Resolução da Segunda Lista de EDO

Yuri Santos Silva

11, Março de 2025

Problema 1: Soluções Gerais

Item a: $4\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$

Resolução:

Equação característica:

$$4r^2 + r = 0 \implies r(4r+1) = 0 \implies r_1 = 0,\, r_2 = -\frac{1}{4}$$

Solução geral:

$$\boxed{y(x) = C_1 + C_2 e^{-\frac{x}{4}}}$$

Item b: $2\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} = 0$

Resolução:

Equação característica:

$$2r^2 - 5r = 0 \implies r(2r-5) = 0 \implies r_1 = 0,\, r_2 = \frac{5}{2}$$

Solução geral:

$$\boxed{y(x) = C_1 + C_2 e^{\frac{5x}{2}}}$$

Item c: $3\frac{d^2y}{dx^2} - 36y = 0$

Resolução:

Equação característica:

$$3r^2 - 36 = 0 \implies r^2 = 12 \implies r = \pm 2\sqrt{3}$$

Solução geral:

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{2\sqrt{3}\,x} + C_2 e^{-2\sqrt{3}\,x}}$$

Item d: $\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} = 0$

Resolução:

Equação característica:

$$r^2 - 8r = 0 \implies r(r-8) = 0 \implies r_1 = 0,\, r_2 = 8$$

Solução geral:

$$\boxed{y(x) = C_1 + C_2 e^{8x}}$$

Item e: $\frac{d^2y}{dx^2} + 9\frac{dy}{dx} = 0$

Resolução:

Equação característica:

$$r^2 + 9r = 0 \implies r(r+9) = 0 \implies r_1 = 0,\, r_2 = -9$$

Solução geral:

$$\boxed{y(x) = C_1 + C_2 e^{-9x}}$$

Item f: $3\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

Resolução:

Equação característica:

$$3r^2 + 1 = 0 \implies r^2 = -\frac{1}{3} \implies r = \pm\frac{i}{\sqrt{3}}$$

Solução geral:

$$\boxed{y(x) = C_1 \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}$$

Item g: $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0$

Resolução:

Equação característica:

$$r^2 - r - 6 = 0 \implies r = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = 3, -2$$

Solução geral:

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}}$$

Item h: $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

Resolução:

Equação característica:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \implies (r-1)(r-2) = 0 \implies r = 1, 2$$

Solução geral:

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}}$$

Item i: $\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0$

Resolução:

Equação característica:

$$r^2 + 8r + 16 = 0 \implies (r+4)^2 = 0 \implies r = -4\,\text{(dupla)}$$

Solução geral:

$$\boxed{y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-4x}}$$

Item j: $\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 25y = 0$

Resolução:

Equação característica:

$$r^2 - 10r + 25 = 0 \implies (r-5)^2 = 0 \implies r = 5\,(\text{dupla})$$

Solução geral:

$$\boxed{y(x) = (C_1 + C_2x)e^{5x}}$$

Item k: $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 5y = 0$

Resolução:

Equação característica:

$$r^2 + 3r - 5 = 0 \implies r = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$$

Solução geral:

$$\boxed{y(x) = C_1e^{\frac{-3+\sqrt{29}}{2}x} + C_2e^{\frac{-3-\sqrt{29}}{2}x}}$$

Item l: $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - y = 0$

Resolução:

Equação característica:

$$r^2 + 4r - 1 = 0 \implies r = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

Solução geral:

$$\boxed{y(x) = C_1e^{(-2+\sqrt{5})x} + C_2e^{(-2-\sqrt{5})x}}$$

Item m: $12\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

Resolução:

Equação característica:

$$12r^2 - 5r - 2 = 0 \implies r = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{24} = \frac{5 \pm 11}{24} \implies r = \frac{2}{3}, -\frac{1}{4}$$

Solução geral:

$$\boxed{y(x) = C_1e^{\frac{2}{3}x} + C_2e^{-\frac{1}{4}x}}$$

Item n: $8\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - y = 0$

Resolução:

Equação característica:

$$8r^2 + 2r - 1 = 0 \implies r = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{16} = \frac{-2 \pm 6}{16} \implies r = \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$$

Solução geral:

$$\boxed{y(x) = C_1e^{\frac{1}{4}x} + C_2e^{-\frac{1}{2}x}}$$

Item o: $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0$

Resolução:

Equação característica:

$$r^2 - 4r + 5 = 0 \implies r = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm i$$

Solução geral:

$$\boxed{y(x) = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)}$$

Item p: $2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4y = 0$

Resolução:

Equação característica:

$$2r^2 - 3r - 4 = 0 \implies r = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$$

Solução geral:

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{\frac{3+\sqrt{41}}{4}x} + C_2 e^{\frac{3-\sqrt{41}}{4}x}}$$

Item q: $3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$

Resolução:

Equação característica:

$$3r^2 + 2r + 1 = 0 \implies r = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{6} = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i$$

Solução geral:

$$\boxed{y(x) = e^{-\frac{x}{3}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)\right)}$$

Item r: $2\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$

Resolução:

Equação característica:

$$2r^2 + 2r + 1 = 0 \implies r = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$$

Solução geral:

$$\boxed{y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$$

Problema 2: Soluções com Condições Iniciais

Item a: $\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$

Resolução:

1. Equação característica:
$$r^2 + 16 = 0 \implies r = \pm 4i$$
2. Solução geral:
$$y(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x)$$
3. Aplicando condições iniciais:
$$y(0) = C_1 = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 4C_2 = -2 \implies C_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{y(x) = 2\cos(4x) - \frac{1}{2}\sin(4x)}$$

Item b: $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

Resolução:

1. Equação característica:
$$r^2 - 1 = 0 \implies r = \pm 1$$
2. Solução geral:
$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$
3. Aplicando condições iniciais:
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - C_2 = 1 \end{cases} \implies C_1 = 1,\, C_2 = 0$$

$$\boxed{y(x) = e^x}$$

Item c: $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$

Resolução:

1. Equação característica:
$$r^2 + 6r + 5 = 0 \implies r = -1, -5$$
2. Solução geral:
$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}$$
3. Aplicando condições iniciais:
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 - 5C_2 = 3 \end{cases} \implies C_1 = \frac{3}{4},\, C_2 = -\frac{3}{4}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{3}{4}e^{-x} - \frac{3}{4}e^{-5x}}$$

Item d: $\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 17y = 0,\ y(0) = 4,\ y'(0) = -1$

Resolução:

1. Equação característica:

$$r^2 - 8r + 17 = 0 \implies r = 4 \pm i$$

2. Solução geral:

$$y(x) = e^{4x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$$

3. Aplicando condições iniciais:

$$y(0) = C_1 = 4$$

$$y'(0) = 4C_1 + C_2 = -1 \implies 16 + C_2 = -1 \implies C_2 = -17$$

$$\boxed{y(x) = e^{4x}\left(4\cos x - 17\sin x\right)}$$

Item e: $2\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0$

Resolução:

1. Equação característica:

$$2r^2 - 2r + 1 = 0 \implies r = \frac{1 \pm i}{2}$$

2. Solução geral:

$$y(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

3. Aplicando condições iniciais:

$$y(0) = C_1 = -1$$

$$y'(0) = \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 = 0 \implies -\frac{1}{2} + \frac{C_2}{2} = 0 \implies C_2 = 1$$

$$\boxed{y(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(-\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$$

Item f: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0,\ y(0) = 5,\ y'(0) = 10$

Resolução:

1. Equação característica:

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \implies (r-1)^2 = 0 \implies r = 1\,(\text{dupla})$$

2. Solução geral:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x$$

3. Aplicando condições iniciais:

$$y(0) = C_1 = 5$$

$$y'(0) = C_1 + C_2 = 10 \implies 5 + C_2 = 10 \implies C_2 = 5$$

$$\boxed{y(x) = (5 + 5x)e^x}$$

Item g: $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

Resolução:

1. Equação característica:

$$r^2 + r + 2 = 0 \implies r = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

2. Solução geral:

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right)$$

3. Aplicando condições iniciais:

$$y(0) = C_1 = 0$$

$$y'(0) = -\frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{7}}{2}C_2 = 0 \implies C_2 = 0$$

$$\boxed{y(x) = 0} \quad \text{(Solução trivial)}$$

Item h: $4\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$

Resolução:

1. Equação característica:

$$4r^2 - 4r - 3 = 0 \implies r = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{8} = \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$$

2. Solução geral:

$$y(x) = C_1 e^{\frac{3}{2}x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}$$

3. Aplicando condições iniciais:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ \frac{3}{2}C_1 - \frac{1}{2}C_2 = 5 \end{cases} \implies C_1 = 2,\ C_2 = -1$$

$$\boxed{y(x) = 2e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}}$$

Item i: $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$

Resolução:

1. Equação característica:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \implies r = 1, 2$$

2. Solução geral:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

3. Aplicando condições em $x = 1$:

$$\begin{cases} C_1 e^1 + C_2 e^2 = 0 \\ C_1 e^1 + 2C_2 e^2 = 1 \end{cases} \implies C_1 = -\frac{2}{e},\ C_2 = \frac{1}{e^2}$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{2}{e}e^x + \frac{1}{e^2}e^{2x} = -2e^{x-1} + e^{2x-2}}$$

Item j: $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$**,** $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$**,** $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$

Resolução:

1. Equação característica:
$$r^2 + 1 = 0 \implies r = \pm i$$

2. Solução geral:
$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

3. Aplicando condições em $x = \frac{\pi}{3}$:
$$\begin{cases} C_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ -C_1 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \end{cases}$$

Substituindo $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ e $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\begin{cases} \frac{C_1}{2} + \frac{\sqrt{3}C_2}{2} = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}C_1}{2} + \frac{C_2}{2} = 2 \end{cases} \implies C_1 = -\sqrt{3},\ C_2 = 1$$

$$\boxed{y(x) = -\sqrt{3}\cos x + \sin x}$$

Problema 3: Condições Iniciais

Encontre a solução particular da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0,$$

sabendo que a solução geral é $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$, e que satisfaz as condições iniciais:

$$y(0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx}(0) = 1.$$

Resolução

Passo 1: Aplicar a condição inicial $y(0) = 0$

Substituindo $x = 0$ na solução geral:

$$y(0) = c_1e^0 + c_2e^0 = c_1 + c_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = -c_2.$$

Passo 2: Calcular a derivada da solução geral

Derivando $y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = c_1e^x - c_2e^{-x}.$$

Passo 3: Aplicar a condição inicial $\frac{dy}{dx}(0) = 1$

Substituindo $x = 0$ na derivada:

$$\frac{dy}{dx}(0) = c_1e^0 - c_2e^0 = c_1 - c_2 = 1.$$

Passo 4: Resolver o sistema de equações

Temos o sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 1 \end{cases}$$

Somando as duas equações:

$$2c_1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \frac{1}{2}.$$

Substituindo $c_1 = \frac{1}{2}$ na primeira equação:

$$\frac{1}{2} + c_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{2}.$$

Passo 5: Escrever a solução particular

Substituindo c_1 e c_2 na solução geral:

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Resposta Final

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}}$$

Problema 4:

Encontre a solução particular da equação diferencial

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

sabendo que a solução geral é $y(x) = c_1 x + c_2 x \ln(x)$, e que satisfaz as condições:

$$y(1) = 3 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx}(1) = -1.$$

Resolução

Passo 1: Aplicar a condição $y(1) = 3$

Substituindo $x = 1$ na solução geral:

$$y(1) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 \cdot \ln(1).$$

Como $\ln(1) = 0$, temos:

$$c_1 = 3.$$

Passo 2: Calcular a derivada $\frac{dy}{dx}$

Derivando a solução geral:

$$\frac{dy}{dx} = c_1 + c_2 \left(\ln(x) + 1\right).$$

Passo 3: Aplicar a condição $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = -1$

Substituindo $x = 1$ na derivada:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = c_1 + c_2 \left(\ln(1) + 1\right).$$

Como $\ln(1) = 0$, obtemos:

$$3 + c_2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad c_2 = -4.$$

Passo 4: Escrever a solução particular

Substituindo $c_1 = 3$ e $c_2 = -4$ na solução geral:

$$y(x) = 3x - 4x\ln(x).$$

Verificação da Equação Diferencial

Para confirmar, calculamos:

$$\frac{dy}{dx} = 3 - 4(\ln(x) + 1) = -1 - 4\ln(x),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{x}.$$

Substituindo na equação diferencial:

$$x^2\left(-\frac{4}{x}\right) - x(-1 - 4\ln(x)) + (3x - 4x\ln(x)),$$

$$-4x + x + 4x\ln(x) + 3x - 4x\ln(x) = 0.$$

A equação é satisfeita.

Resposta Final

$$\boxed{y(x) = 3x - 4x\ln(x)}$$

Questão 5: Independência Linear via Wronskiano

Item a: $\{e^{3x}, e^{-3x}\}$

Wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = e^{3x}(-3e^{-3x}) - e^{-3x}(3e^{3x}) = -6 \neq 0$$

$\boxed{\text{Linearmente independentes.}}$

Item b: $\{\cos(x), \sin(x)\}$

Wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \neq 0$$

$\boxed{\text{Linearmente independentes.}}$

Item c: $\{e^{2x}\cos(3x), e^{2x}\sin(3x)\}$

Wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x}\cos(3x) & e^{2x}\sin(3x) \\ 2e^{2x}\cos(3x) - 3e^{2x}\sin(3x) & 2e^{2x}\sin(3x) + 3e^{2x}\cos(3x) \end{vmatrix}$$

Simplificando:

$$W = e^{4x}(3\cos^2(3x) + 3\sin^2(3x)) = 3e^{4x} \neq 0$$

$\boxed{\text{Linearmente independentes.}}$

Questão 6: Transformada de Laplace pela Definição

Item a: $f(t) = \cos(3t)$

$$\mathcal{L}\{\cos(3t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\cos(3t)\,dt = \frac{s}{s^2+9}$$

$$\boxed{\frac{s}{s^2+9}}$$

Item b: $g(t) = \sin(2t)$

$$\mathcal{L}\{\sin(2t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\sin(2t)\,dt = \frac{2}{s^2+4}$$

$$\boxed{\frac{2}{s^2+4}}$$

Item c: $h(t) = t^3$

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \int_0^\infty e^{-st}t^3\,dt = \frac{6}{s^4}$$

$$\boxed{\frac{6}{s^4}}$$

Questão 7: Problemas de Valor Inicial via Laplace

Item a: $\frac{dy}{dt} - 3y = e^{2t}$, $y(0) = 1$

1. Aplicando Laplace:

$$sY - 1 - 3Y = \frac{1}{s-2} \implies Y(s-3) = 1 + \frac{1}{s-2}$$

$$Y = \frac{1}{s-3} + \frac{1}{(s-2)(s-3)}$$

2. Decompondo em frações parciais:

$$Y = \frac{1}{s-3} + \frac{-1}{s-2} + \frac{1}{s-3}$$

$$Y = \frac{2}{s-3} - \frac{1}{s-2}$$

3. Transformada inversa:

$$y(t) = 2e^{3t} - e^{2t}$$

$\boxed{y(t) = 2e^{3t} - e^{2t}}$

Item b: $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

1. Aplicando Laplace:

$$s^2Y - Y = \frac{2}{s} \implies Y(s^2 - 1) = \frac{2}{s}$$

$$Y = \frac{2}{s(s^2-1)} = \frac{-2}{s} + \frac{2}{s^2-1}$$

2. Transformada inversa:

$$y(x) = -2 + 2\cosh(x)$$

$\boxed{y(x) = 2(\cosh(x) - 1)}$