Mekanik Kuantum

Murthadza Aznam

2020-11-04

Contents

Prakata

> "Pengajaran daripada kisah ini ialah kita tidak patut cuba mencapai banyak perkara sekaligus. Kita seharusnya mengasingkan satu masalah fizik daripada masalah fizik yang lain sejauh mungkin. Kemudian, barulah kita boleh singkirkannya satu demi satu."
>
> — Paul Dirac (1989)

Bagi memulakan buku ini, eloklah kita menghayati petikan fizikawan ulung Paul Dirac daripada rencananya, 'Kaedah Kerja dalam Fizik Teori'. Kisah yang dirujuk oleh beliau itu sebenarnya ialah kisah pencarian persamaan Schrödinger. Ia menepati tema utama kebanyakan kursus pengenalan mekanik kuantum: iaitu agar pelajar memahami dan memahiri persamaan Schrödinger.

Lagipun, petikan itu adalah satu nasihat umum yang baik: jangan terlalu ghairah cuba menyelesaikan semua perkara sekaligus tetapi kenal pasti masalah-masalah kecil di laluan kejayaan tersebut dan selesaikanlah ia sedikit demi sedikit. Jika kita ditimpa satu masalah yang besar, ingatlah akan kata ini lalu pecahkannya menjadi masalah-masalah yang kecil dan cuba singkirkannya sedikit demi sedikit.

Usaha membina masyarakat berilmu ialah satu cabaran yang besar dan memakan masa. Langkah pertama yang perlu diambil ialah belajar menyampaikan ilmu dalam bahasa masyarakat tersebut serta menyediakan acuan agar ia boleh berkembang. Usaha saya menyediakan bahan bacaan hanyalah satu langkah kecil untuk mencapai cita-cita tersebut setelah memahiri laras ilmiah bahasa Melayu.

Semoga ia bermanfaat.

Dorongan Projek

Laman sesawang MajalahSains yang diasaskan oleh Mohd Faizal Aziz boleh dilihat sebagai mercu tanda usaha pemasyarakatan sains di samudera maya bernama internet. Di sebalik bangun jatuh banyak portal sains yang lain, MajalahSains tetap megah mengibarkan benderanya pada ribuan pembaca yang melawatnya. Jelaslah orang ramai masih minat mengikuti berita sains.

Kewujudan MajalahSains juga memberi peluang kepada portal-portal sains lain untuk turut berkembang sama. Misalnya Apadilangit yang diasaskan oleh Muhammad Hafez Ahmat Murtza pada tahun 2016 melaksanakan pelbagai program di luar dan dalam talian. Apadilangit inilah yang menjadi wakil Malaysia untuk memberi nama bintang dan eksoplanet melalui kutipan cadangan dari pelajar-pelajar sempena sambutan 100 tahun Kesatuan Astronomi Antarabangsa, IAU.[1]

Saluran Ajar (walaupun bukan menumpu pada sains semata-mata) yang diasaskan oleh Muhammad Haziq Abdul Rahim pula telah meraih sehingga 270 ribu pelanggan di YouTube melangkaui Anugerah Butang Main Perak walaupun baru berumur 3 tahun! Itu adalah pencapaian yang sangat mengagumkan!

Pemasyarakatan sains, atau umumnya pemasyarakatan ilmu, sedang galak dilaksanakan oleh bicarawan-bicarawan sains yang sudah ataupun yang belum mendapat nama. Kegiatan menyampaikan sains dalam konteks popular ini seringkali menyabitkan nama Carl Sagan sebagai pengasas dan amalannya meluas sehingga muncul banyak saluran YouTube berkaitannya. Di Malaysia, ia masih di peringkat tunas.

Kemunculan golongan seperti MajalahSains, Apadilangit, dan Ajar, telah menyediakan momentum yang cukup agar tanah maya terus disuburkan dengan bahan-bahan ilmiah popular. Saya yakin, dalam sedekad dua kelak, akan muncul nama-nama baharu yang akan menyambung kerja mereka.

Sudah tiba masanya untuk kita agihkan tenaga untuk menyuburkan kandungan sains teknikal pula. Hakikatnya, usaha melahirkan peminat sains dibina atas keinginan melahirkan pakar dalam bidang ini. Maka, penghasilan bahan ilmiah popular dan bahan ilmiah teknikal perlukan keseimbangan.

Penulisan bahan rujukan teknikal sains berbahasa Melayu bukanlah sesuatu yang baharu. Antaranya ialah "Mekanik" dan "Fizik Moden" oleh Prof Mohammad Yahaya; "Superkonduktor" oleh Prof Roslan Abdul Shukor; serta "Tensor dan Bentuk Pembeza" oleh Prof Shaharir Mohd Zain. Yang saya tahu Prof Shaharir ada banyak lagi hasil tulisan dalam bidang Matematik yang tidak mampu saya senaraikan.

Entah berapa ramai lagi penulis ilmiah serta bukunya yang tidak kita ketahui. Ada eloknya jika kita geledah perpustakaan ilmiah kita untuk mengorek khazanah-khazanah ilmu ini.

Adapun semua ini, buku-buku tersebut hanya wujud di alam nyata. Dunia internet ialah satu pustaka yang luas; maka amatlah rugi jika pustaka maya ini kelompongan bahan rujukan. Jumlah bahan ilmiah dalam pustaka nyata dan pustaka maya perlukan keseimbangan.

Buat masa ini, kelihatannya seperti tiada bahan rujukan ilmiah sains berbahasa

[1] Nama yang diberikan oleh Malaysia ialah 'Intan' untuk bintangnya dan 'Baiduri' untuk eksoplanetnya (International Astronomical Union (2019)).

Melayu yang dijumpai di internet, terutamanya untuk pengajian tinggi. Oleh itu, projek Catatan Fizik Teori ini bertujuan untuk memulakan langkah pertama mengisi kelompongan itu.

Karya ini adalah hasil teladan daripada wargamaya seluruh dunia. Ada banyak jenis rujukan yang mereka hasilkan dan sebahagiannya (mungkin sebenarnya sebahagian besar daripadanya) bukanlah daripada kuliah atau kursus bersilibus tetapi hanya sekadar catatan mereka berkaitan ilmu yang diteroka itu.

Lagipun, amalan mengongsikan catatan kuliah sudah lama diamalkan oleh para mahasiswa tetapi selalunya ia adalah perkongsian dari senior ke junior kursus tersebut. Maka, projek ini adalah perkembangan wajar daripada amalan tersebut.

Tentang Penulis

Murthadza bin Aznam ialah seorang pelajar Sarjana Muda Fizik Gunaan di Universiti Kebangsaan Malaysia sejak sesi 2017/2018 dan dijangka akan habis pada sesi 2021/2022. Beliau berkecimpung dalam dunia penulisan sains popular sejak 2016 melalui pelbagai saluran. Selain itu, beliau pernah menyunting di MajalahSains untuk tempoh yang singkat pada tahun 2018 dan pernah menterjemah beberapa penulisan sains.

Tentang Buku

Buku ini, *Catatan Fizik Teori: Mekanik Kuantum*, merupakan catatan penulis sepanjang belajar Mekanik Kuantum di Universiti Kebangsaan Malaysia. Sebahagian besarnya merupakan catatan daripada kuliah Mekanik Kuantum. Namun begitu, ada bahagian yang ditokok tambah daripada pembacaan peribadi penulis yang dirasakan perlu diulas.

Buku ini dihasilkan menggunakan Bookdown yang disediakan oleh Xie (2015). Ia menggunakan Markdown yang dicampur kefungsian LaTeX. Markdown ialah sejenis alat penulisan yang membantu penulis menumpukan perhatian pada isinya dan bukan rupanya. Rupa bentuk buku akan ditentukan oleh pemprosesnya. Dalam kes ini pemprosesnya ialah Bookdown dan bentuk yang kalian baca inilah hasilnya.

LaTeX pula ialah alat untuk menulis formula dengan mudah dan cantik. Alat ini dikira sebagai piawai antarabangsa untuk menulis formula matematik. Misalnya, wikipedia menulis persamaan-persamaannya menggunakan tatatanda LaTeX. Markdown yang mentah tiada sokongan LaTeX tetapi Bookdown ada sokongan penulisan LaTeX yang memadai. Jadi, sebab itulah saya gunakannya untuk menulis buku ini yang sarat Matematik.

Chapter 1

Malapetaka Ultralembayung

Catatan-catatan sejarah sains menulis bahawa kegiatan kajian dunia kuantum bermula dengan kajian terhadap sinaran yang dipancarkan oleh bintang-bintang. Agak hairan bagaimana butiran-butiran bintang yang bertaburan di langit malam yang hakikatnya sebesar ribuan gunung-ganang itu mampu memberi kita ilham tentang dunia kuantum yang lebih kecil daripada pasir. Cahayalah yang menghubungkan dunia sebesar-besar bintang dengan dunia sekecil-kecil zarah. Cahayalah juga yang membawa kita meneroka dua dunia baharu fizik yakni dunia kuantum dan dunia kenisbian seolah-olah cahaya ialah penyuluh harapan kepada fizikawan sekalian alam ketika jalan menjadi suram.

1.1 Sinaran Jasad Hitam

Jasad hitam ialah suatu jasad yang akan menyerap semua panjang gelombang cahaya dengan sempurna tanpa pantulan. Jasad ini akan memancarkan juga kesemua panjang gelombang apabila berada dalam keseimbangan haba. Kata kuncinya di sini ialah ia memancarkan kesemua panjang gelombang cahaya daripada sependek-pendek gamma sehinggalah sepanjang-panjang radio. Bintang-bintang di langit memiliki ciri ini.

Cahaya yang dipancarkan oleh bintang-bintang ini membawa bersamanya tenaga. Jumlah tenaga yang dikeluarkan oleh setiap bintang mematuhi Hukum Stefan–Boltzmann.

HUKUM 1.1 (Hukum Stefan–Boltzmann)**.** Jumlah tenaga, E, yang dikelu-

[2]Kamus Dewan Perdana (2020)

Figure 1.1: Pokok lembayung (*Basella alba*)[2] ataupun nama lainnya remayung atau gendola ialah sejenis pokok menjalar. Salah satu jenisnya mempunyai batang berwarna ungu gelap. Warna lembayung menyerupai warna pokok ini. Karya: Obsidian Soul, CC0 1.0 Dedikasi Domain Awam.

arkan oleh bintang adalah berkadaran dengan suhunya, T,

$$E = \sigma T^4, \tag{1.1}$$

dengan maksud bahawa,

$$\begin{aligned} E &= \text{tenaga}, \\ T &= \text{suhu bintang}, \\ \sigma &= \text{pemalar Stefan–Boltzmann}, \\ &= 5.6704 \times 10^{-8} \mathrm{W} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-4}. \end{aligned}$$

Tenaga yang diperihalkan dalam Hukum Stefan–Boltzmann ini adalah jumlah tenaga yang dibawa oleh semua frekuensi cahaya. Ada sebahagian cahaya yang bersinar lebih kuat berbanding cahaya yang lain. Lazimnya, cahaya yang panjang (seperti radio) dan cahaya yang pendek (seperti sinaran gamma) tidak dipancarkan dengan banyak. Kebanyakan cahaya yang disinarkan oleh setiap satu jasad berada di antara dua nilai yang disebutkan itu.

Rajah 1.2 menunjukkan taburan cahaya yang dipancarkan oleh sesuatu bintang mengikut panjang gelombang cahaya. Puncak lengkung itu menunjukkan cahaya mana yang paling banyak dikeluarkan. Puncak itu semakin menghampiri kiri jika suhu bintang semakin panas.

Hal ini yang menentukan warna bintang tersebut. Jika bintangnya panas, maka puncak lengkungnya akan ke arah warna biru. Jika bintangnya sejuk, maka puncak lengkungnya akan ke arah warna merah. Kita boleh lihat perbezaan warna ini dengan mata kasar jika kita teliti. Puncak graf tersebut mematuhi Hukum Sesaran Wien.

\begin{figure}

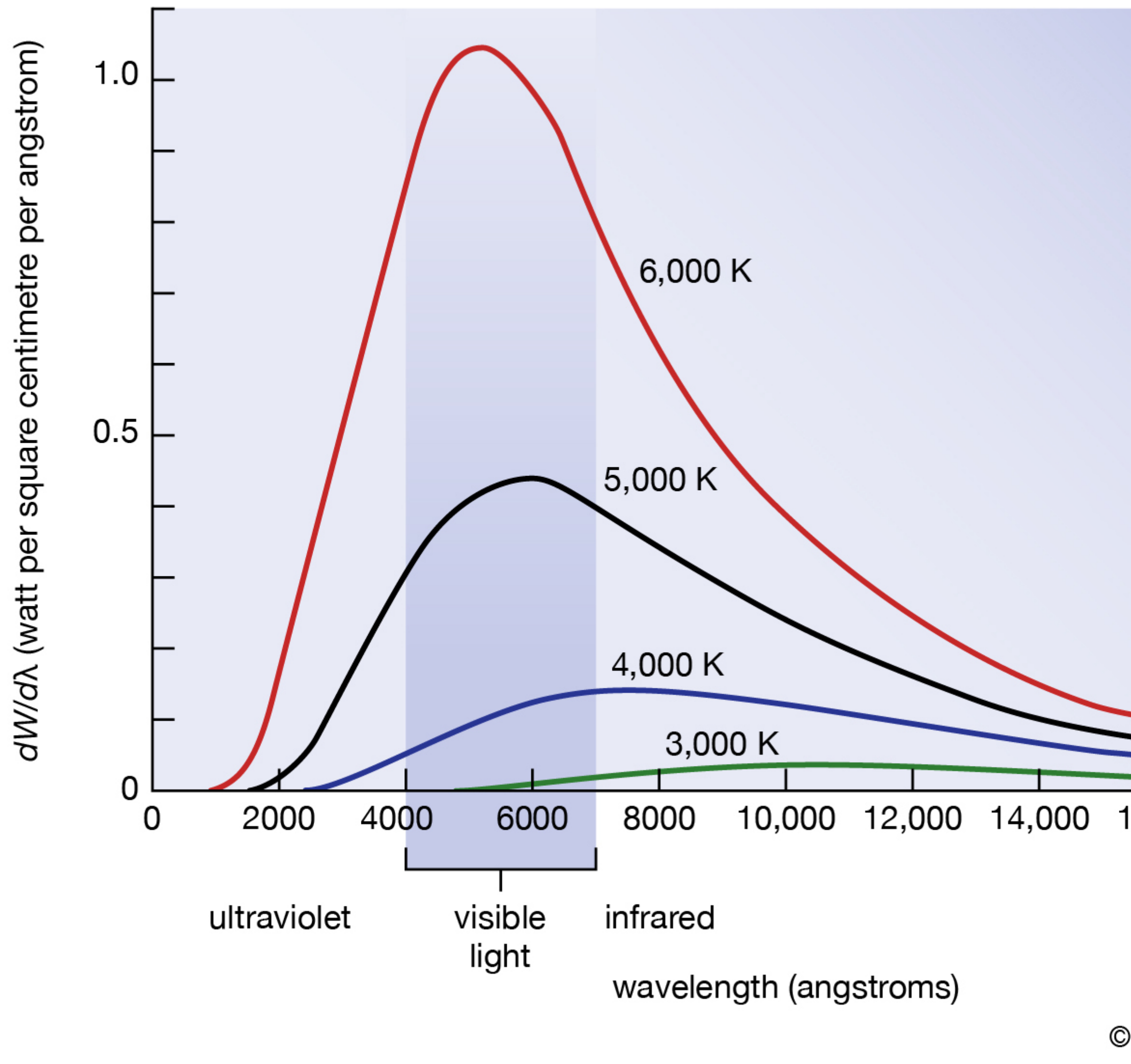

Figure 1.2: Graf keamatan cahaya melawan panjang gelombang yang dipancarkan suatu bintang.

{

}

\caption{Buruj Belantik. Bintang Betelguese (kiri atas) berwarna merah manakala bintang Rigel (kanan bawah) berwarna biru. Dari sini kita boleh simpulkan bahawa bintang Rigel lebih panas berbanding bintang Betelguese. Karya: Mouser, CC BY–SA 3.0.} \end{figure}

HUKUM 1.2 (Hukum Sesaran Wien)**.** Panjang gelombang puncak sinaran jasad hitam, λ_p, adalah berkadaran songsang dengan suhu bintang tersebut, T,

$$\lambda_p = \frac{W}{T}, \tag{1.2}$$

dengan maksud bahawa,

$$\begin{aligned} \lambda_p &= \text{panjang gelombang puncak}, \\ T &= \text{suhu jasad hitam}, \\ W &= \text{pemalar Wien}, \\ &= 2.8978 \times 10^{-3} \text{m} \cdot \text{K}. \end{aligned}$$

Pemerihalan jumlah tenaga dan nilai tenaga puncak itu cukup mantap. Namun, pencarian ahli fizik belum selesai kerana mereka ingin tahu persamaan apakah yang boleh menghasilkan graf tersebut, bukan sekadar jumlah tenaga atau puncaknya sahaja.

Hukum Stefann–Boltzmann hanya mampu menerangkan jumlah tenaga bintang. Hukum Wien pula hanya menyatakan di mana letaknya puncak graf tersebut. Kedua-duanya tidak mampu menerangkan lengkungan graf tersebut.

1.2 Cubaan Wein, Rayleigh dan Jeans

Pada tahun 1897, seorang fizikawan Jerman bernama Wilhelm Wien cuba menyelesaikan masalah ini dengan membina persamaan sinaran jasad hitam berdasarkan pengetahuan keelektromagnetan sedia ada. Persamaan beliau dikenali sebagai Hukum Taburan Wien. Namun, persamaan beliau hanya mampu meramalkan tenaga untuk cahaya-cahaya pendek dan ia tidak meramalkan dengan tepat untuk cahaya-cahaya panjang. Oleh itu, ia juga dikenali sebagai Penghampiran Wien.

HUKUM 1.3 (Hukum Taburan Wien / Penghampiran Wien)**.** Ketumpatan tenaga cahaya, U adalah berkadaran eksponensial dengan suhu dan panjang gelombang, $\exp\left\{-\frac{1}{\lambda T}\right\}$, dan berkadaran songsang dengan suhu berkuasa lima, λ^5,

$$U(\lambda, T) = \frac{ae^{-\frac{b}{\lambda T}}}{\lambda^5}, \tag{1.3}$$

dengan maksud bahawa,

$$\begin{aligned} U(\lambda, T) &= \text{ketumpatan tenaga cahaya}, \\ \lambda &= \text{panjang gelombang cahaya}, \\ T &= \text{suhu bintang}, \\ a, b &= \text{pemalar}. \end{aligned}$$

Pada sekitar tahun 1900-an, ahli fizik Lord Rayleigh dan James Jeans mengemukakan persamaan mereka yang disangka boleh menyelesaikan masalah ini. Mereka menganggap bahawa jasad hitam itu terdiri daripada pengayun-pengayun klasik. Hasilnya, persamaan Rayleigh–Jeans hanya mampu meramalkan tenaga untuk cahaya-cahaya panjang sahaja.

HUKUM 1.4 (Hukum Rayleigh–Jeans)**.** Ketumpatan tenaga cahaya, U, adalah berkadaran terus dengan suhu bintang T dan berkadaran songsang dengan panjang gelombang cahaya kuasa empat, λ^4,

$$U(\lambda, T) = 8\pi \frac{k_B T}{\lambda^4}, \tag{1.4}$$

dengan maksud bahawa,

$$\begin{aligned} U &= \text{ketumpatan tenaga cahaya}, \\ k_B &= \text{pemalar Boltzmann}, \\ &= 1.380649 \times 10^{-23} \mathrm{J \cdot K^{-1}}, \\ \lambda &= \text{panjang gelombang cahaya}, \\ T &= \text{suhu bintang}. \end{aligned}$$

Kaedah Memperoleh Persamaan Rayleigh–Jeans. Bagi memperoleh persamaan Rayleigh–Jeans (Hukum 1.1), kita akan bermula dengan menakrif jumlah tenaga yang dimiliki oleh setiap pengayun serta menakrifkan jumlah pengayun.

USUL 1: Pengayun-pengayun Rayleigh–Jeans mematuhi teorem pemetakan sama, iaitu semua bentuk tenaga akan memiliki jumlah purata yang sama. Sistem pengayun Rayleigh–Jeans memiliki dua bentuk tenaga iaitu tenaga kinetik, E_k, dan tenaga upaya, E_v dan masing-masing mempunyai nilai $\frac{1}{2}k_B T$,

$$E_k = E_v = \frac{1}{2} k_B T.$$

Maka, tenaga setiap pengayun tersebut ialah $k_B T$,

$$\sum E = E_k + E_v = \frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T = k_B T \tag{1.5}$$

USUL 2: Ketumpatan pengayun ialah berkadaran dengan frekuensi kuasa dua f^2,

$$n(f) = \frac{8\pi f^2}{c^3}. \tag{1.6}$$

Nilai $n(f)$ ini dikenali sebagai nilai Jeans.

Oleh itu, tenaga yang dibawa oleh setiap frekuensi cahaya, $U(\lambda, T)$, boleh diperoleh sebagai hasil darab nilai Jeans (pers. (1.6)) dengan tenaga pengayun (pers. (1.5)),

$$U(\lambda, T) = n(f) \, k_B T. \tag{1.7}$$

Persamaan Rayleigh–Jeans (Hukum 1.1) memerihalkan tenaga cahaya dalam bentuk panjang gelombang λ, maka nilai Jeans tersebut perlu diterjemahkan dalam bentuk panjang gelombang. Hal ini mudah kerana kita tahu hubungan antara frekuensi dan panjang gelombang ialah,

$$f = \frac{c}{\lambda}, \tag{1.8}$$

dan kita lakukan pembezaan siap-siap,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{-c}{\lambda^2}. \tag{1.9}$$

Fungsi nilai Jeans pula boleh ditukar menggunakan perhubungan ini,

$$n\left(\lambda\right) = n(f)\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}\right|. \tag{1.10}$$

Fungsi pembezaan $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}$ dimutlakkan sebab nilai Jeans ialah jumlah pengayun. Jumlah benda fizikal tidak boleh berada dalam julat negatif.

Dengan memasukkan pers. (1.6) dan pers. (1.9) ke dalam pers. (1.10),

$$n(\lambda) = \left(\frac{8\pi f^2}{c^3}\right)\left|\frac{-c}{\lambda^2}\right|. \tag{1.11}$$

Kemudian, pembolehubah f perlu diganti dengan perkaitan dalam pers. (1.8),

$$n(\lambda) = \left(\frac{8\pi}{c^3}\left(\frac{c}{\lambda}\right)^2\right)\left|\frac{-c}{\lambda^2}\right|. \tag{1.12}$$

Maka, nilai $n(\lambda)$ ialah,

$$n\left(\lambda\right) = \frac{8\pi}{\lambda^4}. \tag{1.13}$$

Maka, langkah terakhir kita ialah dengan menggunakan pers. (1.13) untuk menyelesaikan pers. (1.7) di awal kaedah ini tadi,

$$U\left(\lambda, T\right) = 8\pi\frac{k_BT}{\lambda^4}. \tag{1.14}$$

Inilah persamaan Rayleigh–Jeans yang ingin diperolehi. □

Hasil daripada persamaan Rayleigh–Jeans ialah suatu graf yang menghampiri sifar untuk panjang gelombang yang panjang, tetapi akan menghampiri infiniti untuk panjang gelombang pendek. Hakikat ini nyata bagi yang celik Matematik kerana persamaan Rayleigh–Jeans ialah suatu fungsi salingan, $\frac{1}{x}$, berkuasa 4.

Maknanya, menurut persamaan ini, bintang akan memancarkan cahaya berpanjang gelombang pendek dengan tenaga yang tidak terhingga! Perkara ini adalah mustahil kerana ia melanggar hukum keabadian tenaga seolah-olah jisim yang terbatas boleh menghasilkan tenaga yang tidak terbatas.

Kejadian ini lazimnya diberi nama "Malapetaka Ultralembayung" kerana sifat gelombang ultralembayung yang pendek panjang gelombangnya. Walaupun tiada malapetaka sebenar yang meragut mana-mana nyawa, nama itu sedap disebut dan selari dengan naluri manusia yang sukakan cerita menarik maka ia melekat dalam lidah para fizikawan.

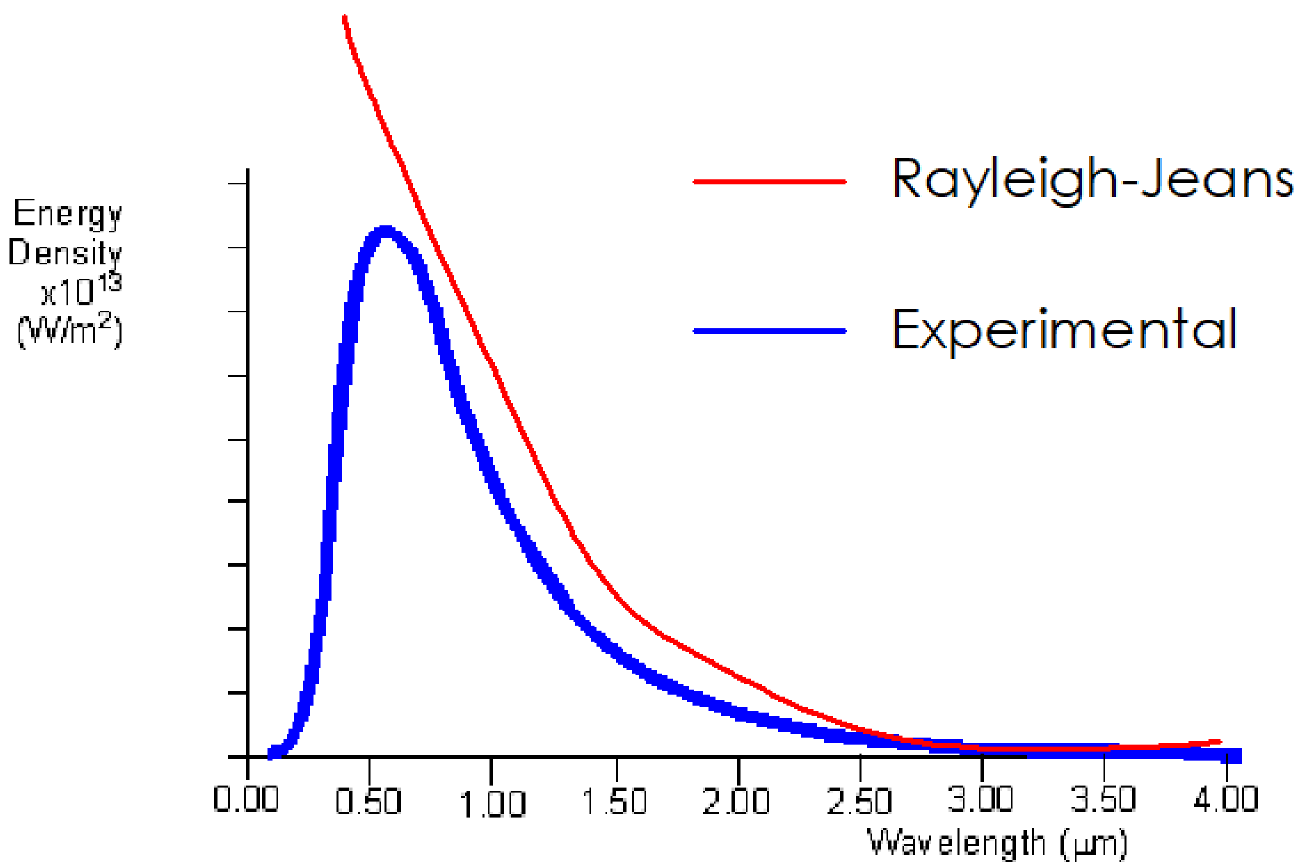

Figure 1.3: Persamaan Rayleigh–Jeans meramalkan tenaga tidak terhingga untuk cahaya-cahaya pendek. Hal ini tidak masuk akal.

1.3 Postulat Planck Tentang Sekuantum Tenaga

Penyelesaian kepada masalah ini diberikan oleh Max Planck dengan dua postulat yang dibawanya. Postulat-postulat ini mengandaikan bahawa cahaya bukanlah selanjar seperti gelombang tetapi seperti berketul-ketul seperti zarah. Ternyata, persamaan yang muncul dari postulat ini menghasilkan graf yang selari dengan hasil cerapan.

POSTULAT 1: Tenaga, ε, yang dipancarkan oleh pengayun-pengayun dalam jasad hitam itu bergantung kepada frekuensi cahaya, f,

$$\varepsilon = hf.$$

(h ialah pemalar)

POSTULAT 2: Tenaga, ε_n, yang dipancarkan oleh pengayun-pengayun dalam jasad hitam mempunyai tahap tenaga berhasil darab integer,

$$\varepsilon_n = n\varepsilon,$$

$$n = 1, 2, 3, \cdots$$

Adapun begitu, perkara ini bertentangan dengan pandangan ahli fizik tentang cahaya yang dipegang pada zaman itu. Selama ini, cahaya dipandang sebagai suatu gelombang selanjar yang selari dengan persamaan Maxwell. Postulat yang diusulkan itu menatijahkan bahawa cahaya itu sifatnya berketul-ketul. Satu ketul cahaya inilah yang disebut satu kuantum cahaya.

Max Planck sendiri menolak postulat yang dikemukakannya. Postulat tersebut hanyalah cubaannya sahaja dan mendapati ia selari dengan hasil cerapan. Baginya, ia adalah ralat dalam dunia Matematik dan ia akan dapat diperbetulkan di kemudian hari.

Namun begitu, dua postulat ini kekal sehingga hari ini setelah banyak ujikaji lain mengesahkannya. Fizikawan mendapati cahaya mempunyai kedua-dua sifat gelombang dan zarah. Pemilikan dua sifat ini dipanggil kedualan gelombang–zarah dan sifat ini adalah asas kepada Mekanik Kuantum. Pemalar h itu kini dikenali sebagai Pemalar Planck.

HUKUM 1.5 (Hukum Planck)**.** Ketumpatan tenaga cahaya, U, adalah berkadaran songsang terhadap panjang gelombang kuasa 5, λ^5, dan berkadaran songsang terhadap eksponen λT tolak satu, $\exp\left\{\frac{1}{\lambda T}\right\} - 1$,

$$U(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \tag{1.15}$$

dengan maksud bahawa,

$$\begin{aligned} U(\lambda, T) &= \text{ketumpatan tenaga}, \\ \lambda &= \text{panjang gelombang cahaya}, \\ T &= \text{suhu bintang}, \\ h &= \text{pemalar Planck}, \\ &= 6.62607015 \times 10^{-34} \mathrm{J \cdot s}, \\ c &= \text{kelajuan cahaya}, \\ &= 2.99792458 \times 10^{8} \mathrm{m \cdot s^{-1}}, \\ k_B &= \text{pemalar Boltzmann}, \\ &= 1.380649 \times 10^{-23} \mathrm{J \cdot K^{-1}}. \end{aligned}$$

Proof. (Kaedah Memperoleh Persamaan Planck) Bagi memperoleh persamaan Planck (Hukum 1.5), kita akan bermula dengan menakrif jumlah tenaga yang dimiliki oleh setiap pengayun serta menakrifkan jumlah pengayunnya.

USUL 1: Pengayun-pengayun Planck mempunyai tenaga, ε_n, yang berkadaran terus terhadap frekuensi, f, dan berpekali integer, n, seperti yang dijelaskan dalam dua postulat Planck,

$$\varepsilon_n = nhf \tag{1.16}$$

USUL 2: Jumlah pengayun dalam jasad hitam mematuhi taburan Maxwell–Boltzmann,

$$N(n) = N_0 \exp\left\{\frac{-\varepsilon_n}{k_B T}\right\}, \tag{1.17}$$

dengan maksud bahawa,

$$\begin{aligned} N(n) &= \text{jumlah pengayun yang mempunyai tenaga } \varepsilon_n, \\ N_0 &= \text{sejenis pemalar} \\ \varepsilon_n &= nhf \\ k_B &= \text{pemalar Boltzmann}. \end{aligned}$$

Tatatanda $\exp\left\{\frac{-\varepsilon_n}{k_B T}\right\}$ digunakan untuk menggantikan $e^{\frac{-\varepsilon_n}{k_B T}}$ supaya pecahan dalam kuasa eksponen itu lebih jelas kelihatan tetapi kedua-duanya mempunyai maksud yang sama.

Oleh itu, purata tenaga, $\bar{\varepsilon}$, yang dipancarkan oleh jasad hitam boleh diungkapkan sebagai hasil jumlah tenaga yang dibawa oleh semua pengayun, $N(n)\varepsilon_n$, dibahagikan dengan jumlah pengayun, $N(n)$,

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} N(n)\varepsilon_n}{\sum_{n=0}^{\infty} N(n)}. \tag{1.18}$$

Perhatikan bagaimana penjumlahan ini dilaksanakan. Purata tenaga tersebut dijumlahkan menggunakan penjumlahan ($\sum$) dan bukannya pengamiran ($\int$).

Cuba ingat semula kelas kalkulus tentang makna pengamiran serta perbezaannya dengan penjumlahan.

Pengamiran hanya sah digunakan sekiranya tiada rongga dalam nilai n. Maksudnya, semua nilai dalam julat $[n_1, n_2]$ mempunyai makna. Sifat ketiadaan rongga ini disebut sebagai sifat selajar.

Sebaliknya, penjumlahan hanya sah digunakan sekiranya terdapat rongga dalam nilai n. Maksudnya, nilai pertama dan nilai kedua dipisahkan oleh satu nilai tertentu, katakanlah Δn. Dalam kes ini, $n = 1$ dan $n = 2$ dipisahkan oleh $\Delta n = 1$. Natijahnya, nilai perantara seperti $n = 0.5$ tiada makna dalam penjumlahan ini. Sifat set nilai yang berongga ini disebut sebagai sifat diskret.

Penggunaan penjumlahan dalam pers. (1.18) menonjolkan lagi sifat kediskretan cahaya yang kita sebut berketul-ketul tadi. Ia selari dengan postulat keduanya yang mengatakan bahawa pekali n ialah nilai integer.

Pers. (1.18) boleh dikembangkan mengikut takrif nilai $N(n)$ dan ε_n yang diberikan sebelum ini,

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\sum N_0 \exp\left\{\frac{-nhf}{k_B T}\right\} nhf}{\sum N_0 \exp\left\{\frac{-nhf}{k_B T}\right\}}. \tag{1.19}$$

Pekali N_0 dan hf pula boleh difaktorkan keluar kerana malar dalam hal penjumlahan ini. Kemudian, N_0 di atas dan di bawah boleh dipotong. Pemalar $\frac{-hf}{k_B T}$ dalam $\exp\left\{\frac{-nhf}{k_B T}\right\}$ akan digantikan dengan k. Pers. (1.18) kini adalah,

$$\overline{\varepsilon} = hf \frac{\sum ne^{nk}}{\sum e^{nk}}$$

Apabila dikembangkan penjumlahannya, kita akan dapat,

$$\overline{\varepsilon} = hf \lim_{N \to \infty} \frac{(0)e^{0k} + (1)e^{1k} + (2)e^{2k} + (3)e^{3k} + \cdots + Ne^{Nk}}{e^{0k} + e^{1k} + e^{2k} + e^{3k} + \cdots + e^{Nk}}. \tag{1.20}$$

Mari kita perhatikan setiap satu sebutan dalam pecahan tersebut. Untuk nilai pengangka, sebutan pertamanya ialah sifar maka hanya tinggal sebutan berpekali integer sahaja. Kemudian kita dapati setiap satu sebutan di bahagian atas tersebut mengongsi sebutan sepunya, iaitu e^k. Maka, nilai pengangka tersebut akan menjadi

$$\lim_{N \to \infty} e^k (1 + 2e^k + 3e^{2k} + \cdots + Ne^{(N-1)k}).$$

Untuk nilai pembawah pula, sebutan pertamanya ialah $e^{0k} = e^0 = 1$ dan sebutan-sebutan lain tidak mengalami perubahan.

Ini persamaan baharu kita,

$$\overline{\varepsilon} = hfe^k \lim_{N\to\infty} \frac{1 + 2e^k + 3e^{2k} + \cdots + Ne^{(N-1)k}}{1 + e^k + e^{2k} + e^{3k} + \cdots + x^{Nk}} \tag{1.21}$$

Pers. (1.21) menonjolkan dua jenis siri, iaitu siri geometri yang menjadi nilai pembawah pecahan tersebut, dan pembezaan siri geometri yang menjadi nilai pengangkanya.

PETUA 1.1 (Siri Geometri)**.** *Jika x dalam $a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots + ax^N$ mempunyai ciri $-1 < x < 1$ dan $N \to \infty$, maka siri geometrinya adalah,*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} ax^n = a\frac{1}{1-x}.$$

(Dipetik dari Spiegel, Lipschutz, and Liu 2009, contoh 21.5)

PETUA 1.2 (Pembezaan Siri Geometri)**.** *Pembezaan siri geometri terhadap x adalah*

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{N} ax^n = \sum_{n=0}^{N} anx^{n-1},$$

dengan jumlahnya ialah

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} anx^{n-1} = a\frac{1}{(1-x)^2}.$$

(Dipetik dari Mayer 2006, contoh 12.18)

Nilai e^{nk} dalam pers. (1.21) menepati syarat petua 1.1 dan 1.2 kerana $-1 < e^{nk} < 1$. Maka, kedua-dua petua ini boleh digunakan. Ganti sahaja $a = 1$ dan $x = e^k$. Lalu, kita akan peroleh,

$$\overline{\varepsilon} = hfe^k \frac{(1-e^k)^1}{(1-e^k)^2}, \tag{1.22}$$

yang setara dengan,

$$\overline{\varepsilon} = hf\frac{1}{\frac{1}{e^k} - 1}. \tag{1.23}$$

Disebabkan k ialah $\frac{-hf}{k_BT}$, maka $\frac{1}{e^k} = e^{\frac{hf}{k_BT}}$.

USUL 3: Ketumpatan pengayun Planck mematuhi Nilai Jeans,

$$n(f) = \frac{8\pi f^2}{c^3}. \tag{1.24}$$

Ketumpatan tenaga, U ialah hasil darab nilai Jeans dan pers. (1.23),

$$U = n(f)\overline{\varepsilon} = \frac{8\pi f^2}{c^3}\frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} \tag{1.25}$$

Menggunakan kaedah yang serupa dalam pers. (1.10) sehingga pers.(1.13) untuk menukarkan bentuk frekuensi menjadi bentuk panjang gelombang, kita akan peroleh persamaan Planck:

$$U = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \tag{1.26}$$

□

1.4 Kesinambungan Persamaan Planck dengan Usaha Sebelumnya

Meskipun hanya usaha Planck sahaja yang mampu menerangkan lengkung jasad hitam secara menyeluruh, usaha-usaha sebelumnya hanya mampu menerangkan sebahagian sahaja daripada lengkung tersebut. Jika begitu, maknanya persamaan Planck boleh diubah agar menyerupai persamaan-persamaan ini dengan meletakkan syarat-syarat tertentu.

Ada empat hukum yang dibangunkan sebelum Max Planck. Yang pertama ialah hukum Stefan–Boltzmann (Hukum 1.1) yang menerangkan jumlah tenaga yang disinarkan oleh bintang. Yang kedua ialah hukum sesaran Wien (Hukum 1.2) yang menerangkan puncak lengkung. Yang ketiga ialah hukum taburan Wien (Hukum 1.3) yang menerangkan lengkung jasad hitam pada panjang gelombang pendek. Yang keempat ialah hukum Rayleigh–Jeans (Hukum 1.4) yang menerangkan lengkung jasad hitam pada panjang gelombang panjang.

Kita akan cuba memperoleh setiap satu daripadanya menggunakan Hukum Planck mengikut turutan tersebut.

1.4.1 Kaedah Memperoleh Hukum Stefan–Boltzmann Daripada Hukum Planck

Hukum Stefan–Boltzmann memerihalkan jumlah tenaga yang disinarkan oleh suatu bintang. Hal ini sama seperti mencari luas di bawah lengkung. Maknanya kita perlu kamirkannya terhadap panjang gelombang.

USUL 1: Luas bawah lengkung ialah hasil kamiran Hukum Planck terhadap panjang gelombang dari sifar ke infiniti,

$$E = \int_0^\infty \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}\mathrm{d}\lambda. \tag{1.27}$$

USUL 2: Pembolehubah x ditakrifkan sebagai,

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T}, \tag{1.28}$$

maka,

$$\lambda = \frac{hc}{x k_B T}, \tag{1.29}$$

dan,

$$\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}x \frac{hc}{x^2 k_B T}. \tag{1.30}$$

Menggantikkan pers. (1.28) sehingga pers. (1.30) ke dalam pers. (1.27) akan menghasilkan persamaan ini,

$$E = \frac{8\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} \mathrm{d}x. \tag{1.31}$$

Kamiran tersebut boleh diselesaikan menggunakan petua 1.3 tanpa perlu selesaikannya menggunakan tangan.

PETUA 1.3 (Kamiran khusus)**.** *Kamiran* $\frac{x^{(n-1)}}{e^x-1}$ *terhadap* x *dari sifar ke infititi ialah,*

$$\int_0^\infty \frac{x^{(n-1)}}{e^x - 1} dx = \Gamma(n) \left(\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots \right).$$

(Dipetik dari Spiegel, Lipschutz, and Liu 2009, contoh 18.80)

Fungsi gamma $\Gamma(n)$ hanyalah merujuk kepada fungsi faktorial $\Gamma(n) = (n-1)!$. Untuk kes pers. (1.31), $n = 4$ maka fungsi gammanya $\Gamma(4) = 3!$. Disebabkan $n = 4$, kita akan merujuk petua 1.4 untuk menyelesaikan penjumlahan tersebut.

PETUA 1.4 (Penjumlahan khusus)**.** *Penjumlahan salingan menaik berkuasa 4 ialah*

$$\sum_k^\infty \frac{1}{k^4} = \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots \right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

(Dipetik dari Spiegel, Lipschutz, and Liu 2009, contoh 21.20)

Maka, kita akan peroleh,

$$\begin{aligned} E &= \frac{8\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^3} (3!) \left(\frac{\pi^4}{90} \right) \\ &= \frac{8\pi^5 k_B^4 T^4}{15 h^3 c^3}. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Dengan membandingkan pers. (1.32) dengan hukum Stefan–Boltzmann, maka kita menerka perhubungan ini,

$$\sigma T^4 \stackrel{?}{=} \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3c^3} T^4,$$

tetapi terkaan ini tidak benar kerana jika kita kira setiap satu pemalar tersebut, kita akan dapati nilainya tidak sama dengan pemalar Stefan–Boltzmann, σ,

$$\begin{aligned}
\frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3c^3} &= 7.5657 \times 10^{-16}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{m}^{-3}\cdot\mathrm{K}^{-4},\\
\sigma &= 5.6704 \times 10^{-8}\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-4},\\
\frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3c^3} &\neq \sigma.
\end{aligned}$$

Apa yang berlaku di sini ialah U dalam persamaan Planck yang kita hasilkan itu merujuk kepada ketumpatan tenaga cahaya berfrekuensi tertentu (Rujuk bahagian 1.5 untuk keterangan lanjut). Oleh itu, kamirannya, $\int U \mathrm{d}\lambda$, itu masih merujuk kepada ketumpatan tenaga tetapi mengambil kira semua frekuensi cahaya. Sedangkan hukum Stefan–Boltzmann merujuk kepada jumlah tenaga mutlak. Kita perlukan pekali $\frac{c}{4}$ untuk memperbetulkan keadaan (Nave (2017)),

$$E = \frac{c}{4}\frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3c^3} T^4 \tag{1.33}$$

Kita boleh sahkan bahawa,

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3c^2}.$$

1.4.2 Kaedah Memperoleh Hukum Sesaran Wien Daripada Hukum Planck

Hukum sesaran Wien menerangkan kedudukan puncak lengkung jasad hitam. Puncak lengkung boleh diperoleh daripada pembezaan persamaan Planck. Puncaknya ialah titik yang menghasilkan pembezaan sifar.

USUL 1: Puncak lengkung boleh diperoleh dengan membezakan persamaan Planck terhadap panjang gelombang, kemudian menyamakannya dengan sifar,

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}-1}\right) = 0. \tag{1.34}$$

PETUA 1.5 (Petua Pembezaan Hasil Darab)**.**

$$\frac{d}{dx}(u\cdot v) = \frac{du}{dx}\cdot v + u\cdot\frac{dv}{dx},$$

Persamaan Planck boleh dipecahkan menjadi hasil darab dua fungsi,

$$u = \frac{8\pi hc}{\lambda^5},\ v = \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1},$$

lalu petua pembezaan hasil darab boleh diguna pakai,

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\lambda} = 8\pi hc\left(\frac{-5}{\lambda^6}\cdot\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} + \frac{1}{\lambda^5}\cdot\frac{hce^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}}{\lambda^2 k_B T\left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1\right)^2}\right) = 0. \tag{1.35}$$

Dengan memfaktorkan pekali-pekali sepunya, kita akan peroleh persamaan ini,

$$\frac{8\pi hc}{\lambda^6\left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1\right)}\left(-5 + \frac{hce^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}}{\lambda k_B T\left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1\right)}\right) = 0. \tag{1.36}$$

Disebabkan persamaan itu bersamaan dengan sifar, maka sebutan-sebutan di luar kurungan tersebut boleh diabaikan. Kini, tumpuan kita berada di dalam kurungan tersebut,

$$-5 + \frac{hce^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}}{\lambda k_B T\left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1\right)} = 0. \tag{1.37}$$

Persamaan ini boleh diringkaskan dengan memperkenalkan satu pembolehubah.

USUL 2: Kita takrifkan X sebagai,

$$X = \frac{hc}{\lambda k_B T}. \tag{1.38}$$

Maka, pers. (1.37) kini menjadi,

$$X\frac{e^X}{e^X - 1} = 5. \tag{1.39}$$

Pers. (1.39) ini perlu dinilai menggunakan kaedah berangka untuk memperoleh nilai X. Saya merujuk kepada nilai yang diperoleh oleh Stroyan (1998)[3], iaitu $X \approx 4.9651$. Setelah itu, pers. (1.38) perlu disusun semula dalam sebutan λT. Disebabkan kita sudah takrifkan pembezaannya sifar, maka λ di sini semestinya merujuk kepada panjang gelombang puncak, λ_p,

$$\lambda_p T = \frac{hc}{X k_B}, \tag{1.40}$$

dan menggunakan nilai X yang diperoleh sebentar tadi, kita dapati nilai ini sememangnya sama dengan pemalar Wien,

$$W = \frac{hc}{X k_B} = 2.8978 \times 10^{-3}\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}. \tag{1.41}$$

[3]Stroyan (1998) menulisnya sebagai $5 = (5 - X)e^X$ tetapi bentuk ini setara dengan $X\frac{e^X}{e^X - 1} = 5$.

1.4.3 Kaedah Memperoleh Hukum Taburan Wien Daripada Hukum Planck

Hukum taburan Wien boleh menerangkan lengkung jasad hitam dengan baik hanya jika panjang gelombangnya pendek. Ia gagal untuk panjang gelombang panjang. Maka, kita boleh peroleh hukum taburan Wien jika diletakkan syarat panjang gelombang mesti pendek.

USUL 1: Hukum taburan Wien boleh diperolehi jika panjang gelombang dihadkan ke arah sifar dalam hukum Planck,

$$U_{\text{Wien}} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}. \tag{1.42}$$

Lalu, kita perhatikan apa yang terjadi pada sebutan eksponennya. Jika λ menghampiri sifar, maknanya $\frac{hc}{\lambda k_B T}$ akan menjadi tersangatlah besar. Maka nilai 1 itu boleh diabaikan seperti dalam petua 1.6.

PETUA 1.6 (penghampiran eksponen)**.**

$$\lim_{x \to \infty} e^x - 1 \approx e^x. \tag{1.43}$$

Oleh itu, pers. (1.42) menjadi,

$$U_{\text{Wien}} = \frac{8\pi hce^{-\frac{hc}{\lambda k_B T}}}{\lambda^5}, \tag{1.44}$$

yang sepadan dengan hukum taburan Wien. Jika dibandingkan dengan hukum 1.3, kita akan dapat kira nilai pemalar a dan b,

$$a = 8\pi hc, \; b = \frac{hc}{k_B}.$$

1.4.4 Kaedah Memperoleh Hukum Rayleigh–Jeans Daripada Hukum Planck

Hukum Rayleigh–Jeans boleh menerangkan lengkung jasad hitam dengan baik hanya jika panjang gelombangnya panjang. Ia gagal untuk panjang gelombang pendek. Maka, kita boleh peroleh hukum Rayleigh–Jeans jika diletakkan syarat panjang gelombang mesti panjang.

USUL 1: Hukum Rayleigh–Jeans boleh diperoleh jika dihadkan panjang gelombang menghampiri infiniti dalam hukum Planck,

$$U_{\text{RJ}} = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}, \tag{1.45}$$

Kemudian, bila melihat pada eksponennya, kita dapati $\frac{hc}{\lambda k_B T}$ menghampiri sifar kerana λ menghampiri infiniti.

PETUA 1.7 (Penghampiran eksponen)**.**

$$\lim_{x\to 0} e^x \approx x + 1.$$

Bila petua 1.7 digunakan terhadap pers. (1.45), kita dapati bahawa hanya sebutan $\frac{hc}{\lambda k_B T}$ sahaja yang tinggal,

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1 \approx \frac{hc}{\lambda k_B T} + 1 - 1 = \frac{hc}{\lambda k_B T}.$$

Kita peroleh persamaan ini,

$$U_{\mathrm{RJ}} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\frac{hc}{\lambda k_B T}}, \tag{1.46}$$

yang setara dengan,

$$U_{\mathrm{RJ}} = \frac{8\pi}{\lambda^4}k_B T, \tag{1.47}$$

iaitu persamaan Rayleigh–Jeans yang ingin kita perolehi.

1.5 Pelbagai Bentuk Persamaan Planck

Jika kalian pernah gelintar sekitar Google, kalian akan dapati bahawa terdapat persamaan-persamaan Planck yang berbeza bentuknya. Khususnya, ada yang menyatakan bahawa pekalinya mendarab $2hc^2$, ataupun $2\pi hc^2$, dan bukannya $8\pi hc$ seperti yang digunakan dalam catatan ini. Setiap satunya betul dan merujuk kepada kuantiti yang berbeza-beza (Webeneger (n.d.)).

- Dalam bentuk kesinaran, persamaan Planck ialah

$$L = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}.$$

- Dalam bentuk ketumpatan fluks, persamaan Planck ialah

$$M = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}.$$

- Dalam bentuk ketumpatan tenaga pula,

$$U = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}.$$

Dari segi pemahaman sinaran jasad hitam dan pentafsiran bentuk graf, ketiga-tiga bentuk ini tiada bezanya. Setiap satunya akan menghasilkan bentuk lengkung yang sama. Perbezaannya hanyalah apabila mencerap nilai-nilai tersebut. Jadi kita tidak perlu risau tentangnya melainkan kita ditugaskan untuk mencerap jasad hitam menggunakan alat tertentu.

Ia juga membawa takrifan tepat yang berbeza. Seperti yang dilihat dalam bahagian 1.4.1 ketika mencari hukum Stefan–Boltzmann, pekali $\frac{c}{4}$ diperlukan tetapi jika kita bermula dengan menggunakan bentuk ketumpatan fluks, maka pekali tersebut tidak diperlukan.

Satu-satunya sebab saya menggunakan bentuk ketumpatan tenaga dalam nota ini ialah kerana kuliah saya menggunakan bentuk ini sepenuhnya. Hasilnya, hukum-hukum lain seperti Hukum Taburan Wien dan Hukum Rayleigh–Jeans juga diperoleh dalam bentuk ketumpatan tenaganya. Hukum Sesaran Wien pula tidak merasai perbezaan ini kerana pekali tersebut tidak memainkan peranan apabila ditetapkan $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}f(\lambda) = 0$.

Chapter 2

Pengenalan Kepada Fungsi Gelombang

Sewaktu awal perkembangan mekanik kuantum, ada dua kaedah mengkaji sistem-sistem kuantum yang diperkenalkan oleh dua kepala berpengaruh fizik kuantum. Kaedah pertama ialah dengan menggunakan matriks yang diperkenalkan oleh Werner Heisenberg. Kaedah kedua ialah dengan menggunakan fungsi gelombang yang diperkenalkan oleh Erwin Schrödinger. Kedua-dua kaedah ini didapati setara sahaja upayanya dan pilihlah kaedah mana yang mudah. Sebelum kita berkenalan dengan kaedah Schrödinger, bab ini akan menerangkan ciri-ciri fungsi gelombang terlebih dahulu.

Daftar Pemalar

Data diperoleh dari (NIST 2018). Semua nilai dibundarkan menjadi 5 angka bererti kecuali nilai-nilai yang dibintangkan. Yang dibintangkan itu ialah sebahagian daripada 7 pemalar asasi yang mempunyai nilai tepat seperti yang ditakrifkan oleh Biro Ukur Berat dan Ukuran Am Antarabangsa (BIPM).

Simbol	Nama	Nilai
c	Kelajuan cahaya dalam hampagas*	2.99792458×10^{8} m $\cdot$ s^{-1}
h	Pemalar Planck*	$6.62607015 \times 10^{-34}$ J $\cdot$ s
k_B	Pemalar Boltzmann*	1.380649×10^{-23} J $\cdot$ K^{-1}
W	Pemalar Wien	2.8978×10^{-3} m $\cdot$ K
σ	Pemalar Stefan–Boltzmann	5.6704×10^{-8} W $\cdot$ s^{-1} $\cdot$ K^{-4}

Daftar Pustaka

Fitzpatrick, Richard. 2002. "Harmonic Oscillators." http://farside.ph.utexas.edu/teaching/sm1/lectures/node68.html.

International Astronomical Union. 2019. "Hundreds of thousands of people select names for exoplanet systems." https://phys.org/news/2019-12-hundreds-thousands-people-exoplanet.html.

Mayer, Raymond. 2006. "Numbers: From $2 \cdot 0 = 0$ to $e^{2\pi i} = 1$." In. Nota Kuliah Math112. http://people.reed.edu/~mayer/math112.html/html2/index.html.

Nave, Carl Rod. 2017. "Radiation Energy Density." HyperPhysics. http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/raddens.html.

NIST. 2018. "CODATA Internationally Recommended 2018 Values of the Fundamental Physical Constants." https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html.

Spiegel, Murray R., Seymour Lipschutz, and John Liu. 2009. *Schaum's Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables*. 3rd ed. McGraw-Hill.

Stroyan, Keith Duncan. 1998. "Projects for Calculus: The Language of Change." In, 3rd ed. Academic Press. http://homepage.divms.uiowa.edu/~stroyan/CTLC3rdEd/ProjectsOldCD/estroyan/cd/26/index.htm.

Tatum, Jeremy. 2019. "Stellar Atmospheres." In. LibreTexts. https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Astronomy___Cosmology/Book%3A_Stellar_Atmospheres_(Tatum)/02%3A_Blackbody_Radiation/2.10%3A_Derivation_of_Wien's_and_Stefan's_Laws.

Webeneger, Tobias. n.d. "Different Formulations of Planck's Law." Physics In A Nutshell. https://www.physics-in-a-nutshell.com/article/24/different-formulations-of-plancks-law.

Xie, Yihui. 2015. *Dynamic Documents with R and Knitr*. 2nd ed. Boca Raton, Florida: Chapman; Hall/CRC. http://yihui.name/knitr/.