Mekanik Kuantum

Murthadza bin Aznam

11/28/22

Table of contents

I Mekanik Kuantum 4

Dorongan Projek 6

Tentang Penulis 9

II Sinaran Jasad Hitam 10

1 Sejarah Sinaran Jasad Hitam 12

2 Hukum Planck 13
2.1 Postulat Planck Tentang Sekuantum Cahaya . . 14
2.2 Pemerolehan Hukum Planck 15

3 Hukum Taburan Wien 19
3.1 Kaitannya Dengan Hukum Planck 19

4 Hukum Rayleigh–Jeans 22
4.1 Kaitannya dengan Hukum Planck 23

5 Hukum Sesaran Wien 25
5.1 Kaitannya Dengan Hukum Planck 25

6 Hukum Stefan–Boltzmann 28
6.1 Kaitannya Dengan Hukum Planck 28

7 Bentuk-Bentuk Lain Persamaan Planck 31

8 Pemalar Planck 33
8.1 Planck Palang 33

III Eksperimen **34**

9 Kesan Fotoelektrik **36**
9.1 Tatakaedah 37
9.2 Pemerhatian 38

IV Persamaan Schrödinger **40**

10 Andaian-Andaian Persamaan Schrödinger **43**

11 Fungsi Gelombang $\Psi(x)$ **44**

12 Pembolehcerap Sebagai Operator **45**

13 Sekilas Pandang Hamiltonan **46**

14 Nilai Jangkaan **47**

15 Arus Kebarangkalian **48**

Appendices **48**

A Penyelesaian Berkomputer Untuk Sesaran Wien **49**
A.1 Kaedah Pembahagi Dua 50
A.1.1 Pelaksanaan 50
A.1.2 Kelebihan dan Kekurangan 51
A.2 Penyelesaian 52

Part I

Mekanik Kuantum

Pengajaran daripada kisah ini ialah kita tidak patut cuba mencapai banyak perkara sekaligus. Kita seharusnya mengasingkan satu masalah fizik daripada masalah fizik yang lain sejauh mungkin. Kemudian, barulah kita boleh singkirkannya satu demi satu."

– Paul Dirac (1989)

Dorongan Projek

Laman sesawang MajalahSains yang diasaskan oleh Mohd Faizal Aziz boleh dilihat sebagai mercu tanda usaha pemasyarakatan sains di samudera maya bernama internet. Di sebalik bangun jatuh banyak portal sains yang lain, MajalahSains tetap megah mengibarkan benderanya pada ribuan pembaca yang melawatnya. Jelaslah orang ramai masih minat mengikuti berita sains.

Kewujudan MajalahSains juga memberi peluang kepada portal-portal sains lain untuk turut berkembang sama. Misalnya Apadilangit yang diasaskan oleh Muhammad Hafez Ahmat Murtza pada tahun 2016 melaksanakan pelbagai program di luar dan dalam talian. Apadilangit inilah yang menjadi wakil Malaysia untuk memberi nama bintang dan eksoplanet melalui kutipan cadangan dari pelajar-pelajar sempena sambutan 100 tahun Kesatuan Astronomi Antarabangsa, IAU.[1]

Saluran Ajar (walaupun bukan menumpu pada sains sematamata) yang diasaskan oleh Muhammad Haziq Abdul Rahim pula telah meraih sehingga 270 ribu pelanggan di YouTube melangkaui Anugerah Butang Main Perak walaupun baru berumur 3 tahun! Itu adalah pencapaian yang sangat mengagumkan!

Pemasyarakatan sains, atau umumnya pemasyarakatan ilmu, sedang galak dilaksanakan oleh bicarawan-bicarawan sains yang sudah ataupun yang belum mendapat nama. Kegiatan menyampaikan sains dalam konteks popular ini seringkali menyabitkan nama Carl Sagan sebagai pengasas dan amalannya meluas sehingga muncul banyak saluran YouTube berkaitannya. Di Malaysia, ia masih di peringkat tunas.

[1] Nama yang diberikan oleh Malaysia ialah 'Intan' untuk bintangnya dan 'Baiduri' untuk eksoplanetnya (International Astronomical Union (2019)).

Kemunculan golongan seperti MajalahSains, Apadilangit, dan Ajar, telah menyediakan momentum yang cukup agar tanah maya terus disuburkan dengan bahan-bahan ilmiah popular. Saya yakin, dalam sedekad dua kelak, akan muncul nama-nama baharu yang akan menyambung kerja mereka.

Sudah tiba masanya untuk kita agihkan tenaga untuk menyuburkan kandungan sains teknikal pula. Hakikatnya, usaha melahirkan peminat sains dibina atas keinginan melahirkan pakar dalam bidang ini. Maka, penghasilan bahan ilmiah popular dan bahan ilmiah teknikal perlukan keseimbangan.

Penulisan bahan rujukan teknikal sains berbahasa Melayu bukanlah sesuatu yang baharu. Antaranya ialah "Pengenalan Mekanik Kuantum" (1996) dan "Fizik Moden" (1989) oleh Prof Mohammad Yahaya; "Superkonduktor: Konvensional dan Suhu Tinggi" (1996) oleh Prof Roslan Abdul Shukor; serta "Vektor dan Tensor: Suatu Pendekatan Terkamir" (1991) dan "Tensor dan Bentuk Pembeza" (2000) oleh Prof Shaharir Mohd Zain. Prof Shaharir ada banyak lagi hasil tulisan dalam bidang Sains, Matematik dan Falsafah Sains yang tidak mampu saya senaraikan.

Entah berapa ramai lagi penulis ilmiah serta bukunya yang tidak kita ketahui. Ada eloknya jika kita geledah perpustakaan ilmiah kita untuk mengorek khazanah-khazanah ilmu ini.

Adapun semua ini, buku-buku tersebut hanya wujud di alam nyata. Dunia internet ialah satu pustaka yang luas; maka amatlah rugi jika pustaka maya ini kelompongan bahan rujukan. Jumlah bahan ilmiah dalam pustaka nyata dan pustaka maya perlukan keseimbangan.

Buat masa ini, kelihatannya seperti tiada bahan rujukan ilmiah sains berbahasa Melayu yang dijumpai di internet, terutamanya untuk pengajian tinggi. Oleh itu, projek Catatan Fizik Teori ini bertujuan untuk memulakan langkah pertama mengisi kelompongan itu.

Karya ini adalah hasil teladan daripada wargamaya seluruh dunia. Ada banyak jenis rujukan yang mereka hasilkan dan sebahagiannya (mungkin sebenarnya sebahagian besar daripadanya) bukanlah daripada kuliah atau kursus bersilibus tetapi hanya sekadar catatan mereka berkaitan ilmu yang diteroka itu.

Lagipun, amalan mengongsikan catatan kuliah sudah lama diamalkan oleh para mahasiswa tetapi selalunya ia adalah perkongsian dari senior ke junior kursus tersebut. Maka, projek ini adalah perkembangan wajar daripada amalan tersebut.

Tentang Penulis

Murthadza bin Aznam ialah graduan Sarjana Muda Fizik Gunaan di Universiti Kebangsaan Malaysia angkatan majlis konvokesyen sesi 2020/2021. Beliau berkecimpung dalam dunia penulisan sains popular sejak 2016 melalui pelbagai saluran. Selain itu, beliau pernah menyunting di MajalahSains untuk tempoh yang singkat pada tahun 2018 dan pernah menterjemah beberapa penulisan sains.

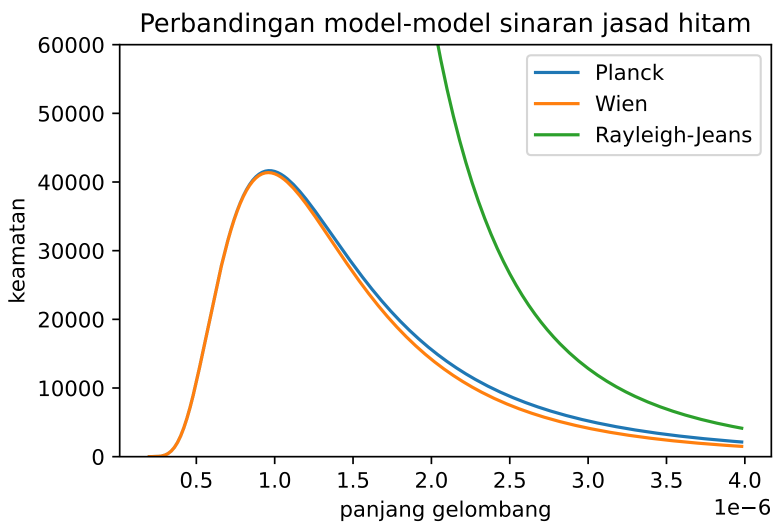
Buku ini, *Catatan Fizik Teori: Mekanik Kuantum*, merupakan catatan penulis sepanjang belajar Mekanik Kuantum di Universiti Kebangsaan Malaysia. Sebahagian besarnya merupakan catatan daripada kuliah Mekanik Kuantum. Namun begitu, ada bahagian yang ditokok tambah daripada pembacaan peribadi penulis yang dirasakan perlu diulas.

Part II

Sinaran Jasad Hitam

Jasad hitam ialah suatu jasad yang akan menyerap kesemua panjang gelombang cahaya dengan sempurna tanpa pantulan dan memancarkan juga kesemua panjang gelombang apabila berada dalam keseimbangan haba. Bintang-bintang memiliki sifat ini.

Rumus terbaik yang memerihalkan taburan cahaya yang dipancarkan oleh bintang ialah hukum Planck. Ada pun begitu, pelajar Fizik lazimnya diajar tentang dua cubaan lampau ialah hukum taburan Wien dan hukum Rayleigh–Jean bagi mengetengahkan kepentingan hukum Planck. Perkembangan tersebut boleh didapati dalam bahagian sejarah. Selain itu, hukum sesaran Wien yang memerihalkan puncak graf serta hukum Stefan–Boltzmann yang memerihalkan luas bawah graf juga adalah dua hukum yang penting berkaitan sinaran jasad hitam.



1 Sejarah Sinaran Jasad Hitam

! Belum Tersedia

Kandungan halaman ini masih belum disediakan. Harap maklum.

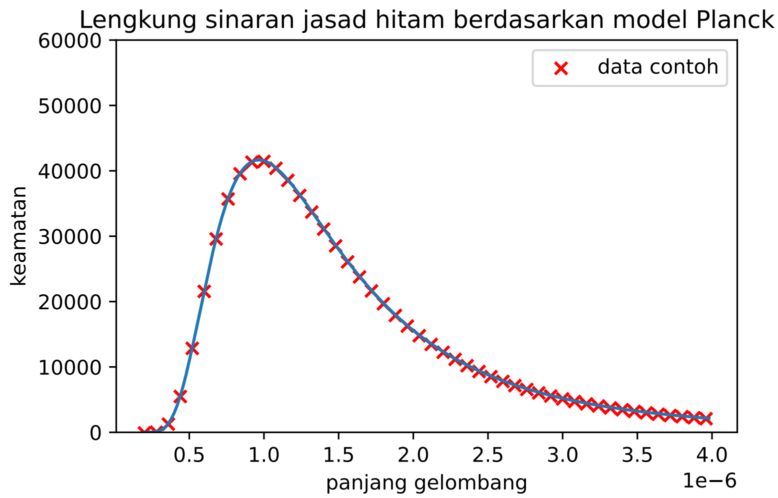
2 Hukum Planck

Hukum 2.1 (Hukum Planck)**.** *Ketumpatan tenaga cahaya, U, adalah berkadaran songsang terhadap panjang gelombang kuasa 5, λ^5, dan berkadaran songsang terhadap eksponen λT tolak satu, exp$\left\{\frac{1}{\lambda T}\right\} - 1$,*

$$U(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

dengan maksud bahawa...

simbol	*maksud*	*nilai*
$U(\lambda, T)$	*ketumpatan tenaga*	*fungsi bersandar λ dan T*
λ	*panjang gelombang cahaya*	*pembolehubah tidak bersandar*
T	*suhu bintang*	*pembolehubah tidak bersandar*
h	*pemalar Planck*	$6.62607015 \times 10^{-34} J \cdot s$
c	*kelajuan cahaya*	$2.99792458 \times 10^{8} m \cdot s^{-1}$
k_B	*pemalar Boltzmann*	$1.380649 \times 10^{-23} J \cdot K^{-1}$



2.1 Postulat Planck Tentang Sekuantum Cahaya

Penyelesaian kepada masalah ini diberikan oleh Max Planck dengan dua postulat yang dibawanya. Postulat-postulat ini mengandaikan bahawa cahaya bukanlah selanjar seperti gelombang tetapi seperti berketul-ketul seperti zarah. Ternyata, persamaan yang muncul dari postulat ini menghasilkan graf yang selari dengan hasil cerapan.

Postulat Planck

1. Tenaga, ε, yang dipancarkan oleh pengayun-pengayun dalam jasad hitam itu bergantung kepada frekuensi cahaya, f, (h ialah pemalar)

$$\varepsilon = hf.$$

2. Tenaga, ε_n, yang dipancarkan oleh pengayun-pengayun dalam jasad hitam mempunyai tahap tenaga berhasil darab integer,

$$\varepsilon_n = n\varepsilon,\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

2.2 Pemerolehan Hukum Planck

Bagi memperoleh persamaan Planck (Hukum 2.1), kita akan bermula dengan menakrif jumlah tenaga yang dimiliki oleh setiap pengayun serta menakrifkan jumlah pengayunnya.

Usul

1. Pengayun-pengayun Planck mempunyai tenaga, ε_n, yang berkadaran terus terhadap frekuensi, f, dan berpekali integer, n, seperti yang dijelaskan dalam dua postulat Planck,

$$\varepsilon_n = nhf \tag{2.1}$$

2. Jumlah pengayun dalam jasad hitam mematuhi taburan Maxwell–Boltzmann,[a]

$$N(n) = N_0 \exp\left\{\frac{-\varepsilon_n}{k_B T}\right\}, \tag{2.2}$$

dengan maksud bahawa...

simbol	maksud	nilai
$N(n)$	jumlah pengayun yang mempunyai tenaga ε_n	pembolehubah bersandar
N_0	sejenis pemalar	
ε_n	nhf	pembolehubah tak bersandar
k_B	pemalar Boltzmann	

[a] Tatatanda $\exp\left\{\frac{-\varepsilon_n}{k_B T}\right\}$ digunakan untuk menggantikan $e^{\frac{-\varepsilon_n}{k_B T}}$ supaya pecahan dalam kuasa eksponen itu lebih jelas kelihatan tetapi kedua-duanya mempunyai maksud yang sama.

Oleh itu, purata tenaga, $\overline{\varepsilon}$, yang dipancarkan oleh jasad hitam boleh diungkapkan sebagai hasil jumlah tenaga yang dibawa oleh semua pengayun, $N(n)\varepsilon_n$, dibahagikan dengan jumlah pengayun, $N(n)$,

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} N(n)\varepsilon_n}{\sum_{n=0}^{\infty} N(n)}. \tag{2.3}$$

Perhatikan bagaimana penjumlahan ini dilaksanakan. Purata tenaga tersebut dijumlahkan menggunakan penjumlahan ($\sum$) dan bukannya pengamiran ($\int$). Cuba ingat semula kelas kalkulus tentang makna pengamiran serta perbezaannya dengan penjumlahan.

Pengamiran hanya sah digunakan sekiranya tiada rongga dalam nilai n. Maksudnya, semua nilai dalam julat $[n_1, n_2]$ mempunyai makna. Sifat ketiadaan rongga ini disebut sebagai sifat selajar.

Sebaliknya, penjumlahan hanya sah digunakan sekiranya terdapat rongga dalam nilai n. Maksudnya, nilai pertama dan nilai kedua dipisahkan oleh satu nilai tertentu, katakanlah Δn. Dalam kes ini, $n = 1$ dan $n = 2$ dipisahkan oleh $\Delta n = 1$. Natijahnya, nilai perantara seperti $n = 0.5$ tiada makna dalam penjumlahan ini. Sifat set nilai yang berongga ini disebut sebagai sifat diskret.

Penggunaan penjumlahan pers. 2.3 menonjolkan lagi sifat kediskretan cahaya yang kita sebut berketul-ketul tadi. Ia selari dengan postulat keduanya yang mengatakan bahawa pekali n ialah nilai integer.

Pers. 2.3 boleh dikembangkan mengikut takrif nilai $N(n)$ dan ε_n yang diberikan sebelum ini,

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\sum N_0 \exp\left\{\frac{-nhf}{k_B T}\right\} nhf}{\sum N_0 \exp\left\{\frac{-nhf}{k_B T}\right\}}. \tag{2.4}$$

Pekali N_0 dan hf pula boleh difaktorkan keluar kerana malar dalam hal penjumlahan ini. Kemudian, N_0 di atas dan di bawah boleh dipotong. Pemalar $\frac{-hf}{k_B T}$ dalam $\exp\left\{\frac{-nhf}{k_B T}\right\}$ akan digantikan dengan k. Pers. 2.3 kini adalah,

$$\bar{\varepsilon} = hf \frac{\sum ne^{nk}}{\sum e^{nk}}$$

Apabila dikembangkan penjumlahannya, kita akan dapat,

$$\bar{\varepsilon} = hf \lim_{N\to\infty} \frac{(0)e^{0k} + (1)e^{1k} + (2)e^{2k} + (3)e^{3k} + \cdots + Ne^{Nk}}{e^{0k} + e^{1k} + e^{2k} + e^{3k} + \cdots + e^{Nk}}. \tag{2.5}$$

Mari kita perhatikan setiap satu sebutan dalam pecahan tersebut:

Untuk nilai pengangka, sebutan pertamanya ialah sifar maka hanya tinggal sebutan berpekali integer sahaja. Kemudian kita dapati setiap satu sebutan di bahagian atas tersebut mengongsi sebutan sepunya, iaitu e^k. Maka, nilai pengangka tersebut akan menjadi

$$\lim_{N\to\infty} e^k(1 + 2e^k + 3e^{2k} + \cdots + Ne^{(N-1)k}).$$

Untuk nilai pembawah pula, sebutan pertamanya ialah $e^{0k} = e^0 = 1$ dan sebutan-sebutan lain tidak mengalami perubahan.

Ini persamaan baharu kita,

$$\bar{\varepsilon} = hfe^k \lim_{N\to\infty} \frac{1 + 2e^k + 3e^{2k} + \cdots + Ne^{(N-1)k}}{1 + e^k + e^{2k} + e^{3k} + \cdots + x^{Nk}} \tag{2.6}$$

Pers. 2.6 menonjolkan dua jenis siri, iaitu siri geometri yang menjadi nilai pembawah pecahan tersebut, dan pembezaan siri geometri yang menjadi nilai pengangkanya.

Nilai e^{nk} dalam pers. 2.6 menepati syarat petua petua 2.1 dan petua 2.2 kerana $-1 < e^{nk} < 1$. Maka, kedua-dua petua ini boleh digunakan. Ganti sahaja $a = 1$ dan $x = e^k$. Lalu, kita akan peroleh,

$$\bar{\varepsilon} = hfe^k \frac{(1 - e^k)^1}{(1 - e^k)^2}, \tag{2.7}$$

Petua 2.1 (Siri Geometri). *Jika x dalam $a + ax + ax^2 + \cdots + ax^N$ terhad pada $-1 < x < 1$ dan $N \to \infty$, maka siri geometrinya adalah,*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} ax^n = a\frac{1}{1-x}.$$

Dipetik dari Spiegel, Lipschutz, and Liu (2009): contoh 21.5.

Petua 2.2 (Pembezaan Siri Geometri). *Pembezaan siri geometri terhadap x adalah*

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{N} ax^n = \sum_{n=0}^{N} anx^{n-1},$$

dengan jumlahnya ialah

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} anx^{n-1} = a\frac{1}{(1-x)^2}$$

Dipetik dari Mayer (2006): contoh 12.18.

yang setara dengan,

$$\bar{\varepsilon} = hf \frac{1}{\frac{1}{e^k} - 1}. \tag{2.8}$$

Disebabkan k ialah $\frac{-hf}{k_B T}$, maka $\frac{1}{e^k} = e^{\frac{hf}{k_B T}}$. Kita gantikan f menjadi $\frac{c}{\lambda}$,

$$\bar{\varepsilon} = \frac{hc}{\lambda} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}. \tag{2.9}$$

Usul

3. Ketumpatan pengayun Planck mematuhi Nilai Jeans,

$$n(\lambda) = \frac{8\pi}{\lambda^4}. \tag{2.10}$$

Ketumpatan tenaga, U ialah hasil darab nilai Jeans dan pers. 2.9,

$$U = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \tag{2.11}$$

3 Hukum Taburan Wien

Hukum 3.1 (Hukum Taburan Wien)**.** *Ketumpatan tenaga cahaya, U adalah berkadaran eksponensial dengan suhu dan panjang gelombang, exp*$\left\{-\frac{1}{\lambda T}\right\}$*, dan berkadaran songsang dengan suhu berkuasa lima, λ^5,*

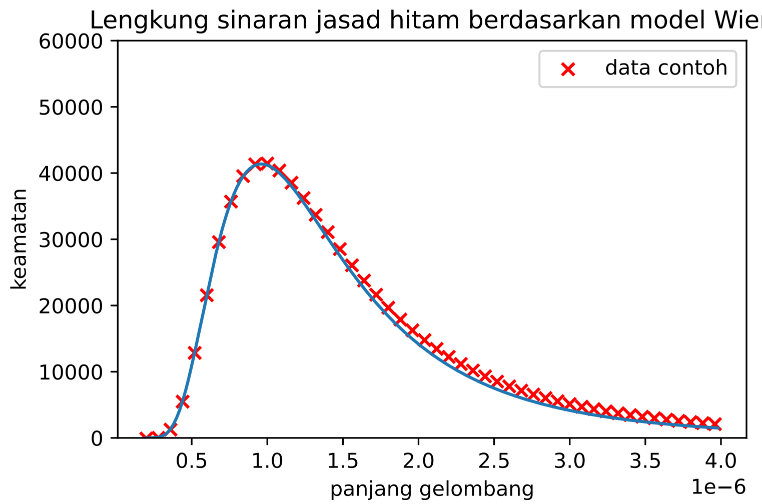
$$U(\lambda, T) = \frac{ae^{-\frac{b}{\lambda T}}}{\lambda^5},$$

dengan maksud bahawa...

simbol	*maksud*	*nilai*
$U(\lambda,T)$	*ketumpatan tenaga cahaya*	*fungsi bersandar λ dan T*
λ	*panjang gelombang cahaya*	*pembolehubah tidak bersandar*
T	*suhu bintang*	*pembolehubah tidak bersandar*
a,b	*pemalar*	

3.1 Kaitannya Dengan Hukum Planck

Proof. Hukum taburan Wien boleh menerangkan lengkung jasad hitam dengan baik hanya jika panjang gelombangnya



pendek. Ia gagal untuk panjang gelombang panjang. Maka, kita boleh peroleh hukum taburan Wien jika diletakkan syarat panjang gelombang mesti pendek.

Usul

Hukum taburan Wien boleh diperolehi jika panjang gelombang, λ, dihadkan ke arah sifar dalam hukum Planck,

$$U_{\text{Wien}} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}. \tag{3.1}$$

Lalu, kita perhatikan apa yang terjadi pada sebutan eksponennya. Jika λ menghampiri sifar, maknanya $\frac{hc}{\lambda k_B T}$ akan menjadi tersangatlah besar. Maka nilai 1 itu boleh diabaikan seperti dalam petua 3.1.

Oleh itu, pers. 3.1 menjadi,

$$U_{\text{Wien}} = \frac{8\pi hc e^{-\frac{hc}{\lambda k_B T}}}{\lambda^5},$$

yang sepadan dengan hukum taburan Wien. Jika dibandingkan dengan pers. 3.1, kita akan dapat kira nilai pemalar a dan b,

$$a = 8\pi hc, \ b = \frac{hc}{k_B}.$$

Petua 3.1 (Penghampiran Eksponen ke Arah ∞)**.**

$$\lim_{x \to \infty} e^x - 1 \approx e^x.$$

$\square$

4 Hukum Rayleigh–Jeans

Hukum 4.1 (Hukum Rayleigh–Jeans)**.** *Ketumpatan tenaga cahaya, U, adalah berkadaran terus dengan suhu bintang T dan berkadaran songsang dengan panjang gelombang cahaya kuasa empat, λ^4,*

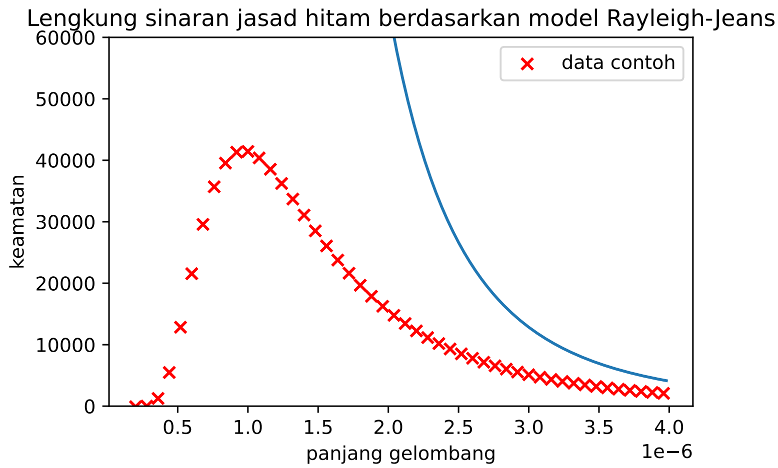
$$U(\lambda, T) = 8\pi \frac{k_B T}{\lambda^4},$$

dengan maksud bahawa...

simbol	*maksud*	*nilai*
$U(\lambda, T)$	*ketumpatan tenaga cahaya*	*pembolehubah bersandar λ dan T*
k_B	*pemalar Boltzmann*	$1.380649 \times 10^{-23} J \cdot K^{-1}$
λ	*panjang gelombang cahaya*	*pembolehubah tak bersandar*
T	*suhu bintang*	*pembolehubah tak bersandar*

! Malapetaka Ultralembayung!

Hasil daripada persamaan Rayleigh–Jeans ialah suatu graf yang menghampiri sifar untuk panjang gelombang



yang panjang, tetapi akan menghampiri infiniti untuk panjang gelombang pendek. Hakikat ini nyata bagi yang celik Matematik kerana persamaan Rayleigh–Jeans ialah suatu fungsi salingan, $\frac{1}{x}$, berkuasa 4.
Maknanya, menurut persamaan ini, bintang akan memancarkan cahaya berpanjang gelombang pendek dengan tenaga yang tidak terhingga! Perkara ini adalah mustahil kerana ia melanggar hukum keabadian tenaga seolah-olah jisim yang terbatas boleh menghasilkan tenaga yang tidak terbatas.
Kejadian ini lazimnya diberi nama "Malapetaka Ultralembayung" kerana sifat gelombang ultralembayung yang pendek panjang gelombangnya. Walaupun tiada malapetaka sebenar yang meragut mana-mana nyawa, nama itu sedap disebut dan selari dengan naluri manusia yang sukakan cerita menarik maka ia melekat dalam lidah para fizikawan.

4.1 Kaitannya dengan Hukum Planck

Proof. Hukum Rayleigh–Jeans boleh menerangkan lengkung jasad hitam pada panjang gelombang panjang. Oleh itu, kita boleh peroleh hukum Rayleigh–Jeans jika diletakkan syarat panjang gelombang mesti panjang.

Usul

Hukum Rayleigh–Jeans boleh diperoleh jika dihadkan panjang gelombang, λ menghampiri infiniti dalam hukum Planck,

$$U_{\mathrm{RJ}} = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}, \tag{4.1}$$

Kemudian, apabila melihat pada eksponennya, kita dapati $\frac{hc}{\lambda k_B T}$ menghampiri sifar kerana λ menghampiri infiniti.

Bila petua 4.1 digunakan terhadap pers. 4.1, kita dapati bahawa hanya sebutan $\frac{hc}{\lambda k_B T}$ sahaja yang tinggal,

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1 \approx \frac{hc}{\lambda k_B T} + 1 - 1 = \frac{hc}{\lambda k_B T}. \tag{4.2}$$

Petua 4.1 (Penghampiran Eksponen ke Arah 0)**.**

$$\lim_{x\to 0} e^x \approx x + 1.$$

Kita peroleh persamaan ini,

$$U_{\mathrm{RJ}} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\frac{hc}{\lambda k_B T}},$$

yang setara dengan,

$$U_{\mathrm{RJ}} = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T,$$

iaitu persamaan Rayleigh–Jeans yang ingin kita perolehi.

□

5 Hukum Sesaran Wien

Hukum 5.1 (Hukum Sesaran Wien)**.** *Panjang gelombang puncak sinaran jasad hitam, λ_p, adalah berkadaran songsang dengan suhu bintang tersebut, T:*

$$\lambda_p = \frac{W}{T}$$

dengan maksud bahawa...

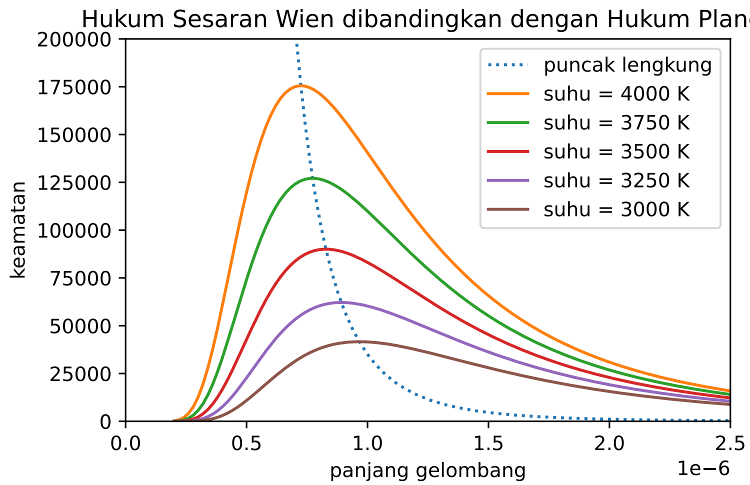
simbol	*maksud*	*nilai*
λ_p	*panjang gelombang puncak*	*pembolehubah bersandar T*
W	*pemalar Wien*	$2.8978 \times 10^{-3} m \cdot K$
T	*suhu bintang*	*pembolehubah tak bersandar*

5.1 Kaitannya Dengan Hukum Planck

Proof. Hukum sesaran Wien menerangkan kedudukan puncak lengkung jasad hitam. Puncak lengkung boleh diperoleh daripada pembezaan persamaan Planck. Puncaknya ialah titik yang menghasilkan pembezaan sifar.

Usul

Puncak lengkung boleh diperoleh dengan membezakan pers. Planck terhadap panjang gelombang, λ, kemudian



menyamakannya dengan sifar,

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}-1}\right) = 0. \tag{5.1}$$

Persamaan Planck boleh dipecahkan menjadi hasil darab dua fungsi,

$$u = \frac{8\pi hc}{\lambda^5},\ v = \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}-1}, \tag{5.2}$$

lalu petua pembezaan hasil darab (petua 5.1) boleh diguna pakai,

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\lambda} = 8\pi hc\left(\frac{-5}{\lambda^6}\cdot\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}-1} + \frac{1}{\lambda^5}\cdot\frac{hce^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}}{\lambda^2 k_B T\left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}-1\right)^2}\right) = 0. \tag{5.3}$$

Dengan memfaktorkan pekali-pekali sepunya, kita akan peroleh,

$$\frac{8\pi hc}{\lambda^6\left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}-1\right)}\left(-5 + \frac{hce^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}}{\lambda k_B T\left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}-1\right)}\right) = 0. \tag{5.4}$$

Disebabkan pers. 5.4 bersamaan dengan sifar, maka sebutan-sebutan di luar kurungan tersebut boleh diabaikan. Kini,

Petua 5.1 (Pembezaan Hasil Darab)**.**

$$\frac{d}{dx}(u\cdot v) = \frac{du}{dx}\cdot v + u\cdot\frac{dv}{dx}$$

tumpuan kita berada di dalam kurungan tersebut,

$$-5 + \frac{hce^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}}{\lambda k_B T \left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1\right)} = 0. \tag{5.5}$$

Persamaan ini boleh diringkaskan dengan memperkenalkan satu pembolehubah X.

Usul

Kita takrifkan X sebagai,

$$X = \frac{hc}{\lambda k_B T}. \tag{5.6}$$

Maka, pers. 5.5 kini menjadi,

$$X \frac{e^X}{e^X - 1} = 5. \tag{5.7}$$

Pers. 5.7 ini perlu dinilai menggunakan kaedah berangka untuk memperoleh nilai X. Boleh rujuk lampiran A untuk ikuti kiraan yang dilakukan. Nilai X yang diperolehi ialah $X \approx 4.9651$.

Setelah itu, pers. 5.6 perlu disusun semula dalam sebutan λT. Disebabkan kita sudah takrifkan pembezaannya sifar, maka λ di sini semestinya merujuk kepada panjang gelombang puncak iaitu λ_p,

$$\lambda_p T = \frac{hc}{X k_B}, \tag{5.8}$$

dan menggunakan nilai X yang diperoleh sebentar tadi, kita dapati nilai $\lambda_p T$ ini sememangnya sama dengan pemalar Wien,

$$W = \frac{hc}{X k_B} = 2.8978 \times 10^{-3} \mathrm{m} \cdot \mathrm{K}. \tag{5.9}$$

□

6 Hukum Stefan–Boltzmann

Hukum 6.1 (Hukum Stefan-Boltzmann)**.** *Jumlah tenaga, E, yang dikeluarkan oleh bintang adalah berkadaran dengan suhunya, T,*

$$E(T) = \sigma T^4,$$

dengan maksud bahawa...

simbol	*maksud*	*nilai*
E	*tenaga*	*pembolehubah bersandar T*
T	*suhu bintang*	*pembolehubah tak bersandar*
σ	*pemalar Stefan–Boltzmann*	$5.6704 \times 10^{-8}\, W \cdot s^{-1} \cdot K^{-4}$

6.1 Kaitannya Dengan Hukum Planck

Proof. Hukum Stefan–Boltzmann memerihalkan jumlah tenaga yang disinarkan oleh suatu bintang. Hal ini sama seperti mencari luas di bawah lengkung. Maknanya kita perlu kamirkannya terhadap panjang gelombang.

Usul

1. Luas bawah lengkung ialah hasil kamiran Hukum Planck terhadap panjang gelombang dari sifar ke infiniti,

$$E = \int_0^{\infty} \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \mathrm{d}\lambda. \tag{6.1}$$

2. Pembolehubah x ditakrifkan sebagai,

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T}, \tag{6.2}$$

maka,

$$\lambda = \frac{hc}{x k_B T}, \tag{6.3}$$

dan,

$$\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}x \frac{hc}{x^2 k_B T}. \tag{6.4}$$

Menggantikkan pers. 6.2 sehingga pers. 6.4 ke dalam pers. 6.1 akan menghasilkan,

$$E = \frac{8\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} \mathrm{d}x. \tag{6.5}$$

Kamiran tersebut boleh diselesaikan menggunakan petua @ref(thm:mu-thm-03) tanpa perlu selesaikannya menggunakan tangan.

Fungsi gamma $\Gamma(n)$ dalam petua 6.1 hanyalah merujuk kepada fungsi faktorial $\Gamma(n) = (n-1)!$. Untuk kes pers. 6.5, $n = 4$ maka fungsi gammanya $\Gamma(4) = 3!$. Disebabkan $n = 4$, kita akan merujuk petua petua 6.2 untuk menyelesaikan penjumlahan tersebut.

Maka, kita akan peroleh,

$$E \frac{8\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^3} (3!) \left(\frac{\pi^4}{90} \right); \tag{6.6}$$

$$E = \frac{8\pi^5 k_B^4 T^4}{15 h^3 c^3}. \tag{6.7}$$

Petua 6.1. *Kamiran $\frac{x^{(n-1)}}{e^x - 1}$ terhadap x dari sifar ke infititi ialah,*

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{(n-1)}}{e^x - 1} dx = \Gamma(n) \left(\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + ... \right).$$

Dipetik dari (Spiegel, Lipschutz, and Liu 2009): contoh 18.80.

Petua 6.2 (Penjumlahan salingan menaik berkuasa 4)**.**

$$\sum_k^{\infty} \frac{1}{k^4} = \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + ... \right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Dipetik dari (Spiegel, Lipschutz, and Liu 2009): contoh 21.20.

Dengan membandingkan pers. 6.7 dengan hukum Stefan–Boltzmann, maka kita akan menerka perhubungan ini:

$$\sigma T^4 \stackrel{?}{=} \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3c^3} T^4,$$

tetapi terkaan ini tidak benar kerana jika kita kira setiap satu pemalar tersebut, kita akan dapati nilainya tidak sama dengan pemalar Stefan–Boltzmann, σ,

$$\begin{aligned} \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3c^3} &= 7.5657 \times 10^{-16}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{m}^{-3}\cdot\mathrm{K}^{-4}, \\ \sigma &= 5.6704 \times 10^{-8}\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-4}, \\ \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3c^3} &\neq \sigma. \end{aligned}$$

Apa yang berlaku di sini ialah U dalam persamaan Planck yang kita hasilkan itu merujuk kepada **ketumpatan tenaga cahaya** berfrekuensi tertentu (Rujuk bahagian 'Bentuk-Bentuk Lain Persamaan Planck' untuk keterangan lanjut). Oleh itu, kamirannya, iaitu $\int U \mathrm{d}\lambda$, masih merujuk kepada ketumpatan tenaga cahaya tetapi dijumlahkan untuk semua frekuensi. Sedangkan hukum Stefan–Boltzmann merujuk kepada **jumlah tenaga** mutlak. Kita perlukan pekali $\frac{c}{4}$ untuk memperbetulkan keadaan[1],

$$E = \frac{c}{4}\frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3c^3} T^4 \tag{6.8}$$

Kemudian, kita boleh sahkan bahawa,

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3c^2}, \tag{6.9}$$

seperti yang ingin dibuktikan.

□

[1] Nave (2017)

7 Bentuk-Bentuk Lain Persamaan Planck

Jika kalian pernah gelintar sekitar Google, kalian akan dapati bahawa terdapat persamaan-persamaan Planck yang berbeza bentuknya. Khususnya, ada yang menyatakan bahawa pekalinya mendarab $2hc^2$, ataupun $2\pi hc^2$, dan bukannya $8\pi hc$ seperti yang digunakan dalam catatan ini. Setiap satunya betul dan merujuk kepada kuantiti yang berbeza-beza:

> **Note**
>
> Bentuk-bentuk berbeza ini diambil dari Webeneger (t.t) yang menurutnya mengambil dari tiga sumber ini:
>
> 1. Lowry A. Kirkby. *Physik - Der Studienbegleiter*. Springer. 2012 (p. 428)
> 2. E. Boeker, R. van Grondelle. *Environmental Physics*. Wiley. 2011 (p. 9)
> 3. J. R. Mahan. *Radiation Heat Transfer*. Wiley. 2002 (ch. 2.16)

- Dalam bentuk kesinaran, persamaan Planck ialah

$$L = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}.$$

- Dalam bentuk ketumpatan fluks, persamaan Planck ialah

$$M = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}.$$

- Dalam bentuk ketumpatan tenaga pula,

$$U = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}.$$

Dari segi pemahaman sinaran jasad hitam dan pentafsiran bentuk graf, ketiga-tiga bentuk ini tiada bezanya. Setiap satunya akan menghasilkan bentuk lengkung yang sama. Perbezaannya hanyalah apabila mencerap nilai-nilai tersebut. Jadi kita tidak perlu risau tentangnya melainkan kita ditugaskan untuk mencerap jasad hitam menggunakan alat tertentu.

Ia juga membawa takrifan tepat yang berbeza. Seperti yang dilihat dalam bahagian 'Hukum Stefan Boltzmann' ketika mencari hukum Stefan–Boltzmann, pekali $\frac{c}{4}$ diperlukan tetapi jika kita bermula dengan menggunakan bentuk ketumpatan fluks, maka pekali tersebut tidak diperlukan.

Satu-satunya sebab saya menggunakan bentuk ketumpatan tenaga dalam nota ini ialah kerana kuliah saya menggunakan bentuk ini sepenuhnya. Hasilnya, hukum-hukum lain seperti Hukum Taburan Wien dan Hukum Rayleigh–Jeans juga diperoleh dalam bentuk ketumpatan tenaganya. Hukum Sesaran Wien pula tidak merasai perbezaan ini kerana pekali tersebut tidak memainkan peranan apabila ditetapkan $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}f(\lambda) = 0$.

8 Pemalar Planck

Pemalar Planck ialah pemalar yang menghubungkan frekuensi jasad kuantum dengan tenaganya. Ia merupakan unit terkecil tenaga sepertimana 5 sen ialah duit terkecil fiat Ringgit Malaysia.

Bermula tahun 2019, pemalar ini diangkat agar mempunyai nilai tertakrif. Hal ini bermaksud pemalar Planck tidak ada ketakpastian dan unit seperti kilogram disandarkan pada nilai ini.

Takrif 8.1 (Pemalar Planck)**.**

$$h = 6.62607015 \times 10^{-34} \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

8.1 Planck Palang

Pemalar Planck ini ada satu saudara yang seringkali digunakan untuk sistem berayun. Memandangkan sistem berayun berkait dengan 2π dan lazimnya muncul bersama dengan h untuk konsep kuantum, maka ia disekalikan menjadi simbol baru, $\hbar$:

Takrif 8.2 (Pemalar Planck Palang)**.**

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Pemalar $\hbar$ ini juga dipanggil 'pemalar Dirac' kerana digunakan dalam kaedah pengkuantuman berkanun Dirac.

Part III

Eksperimen

Terdapat banyak eksperimen yang menyokong kewujudan mekanik kuantum. Antaranya ialah: 1. Kesan Fotoelektrik

9 Kesan Fotoelektrik

Antara yang terawal menyahut postulat kuantum Planck ialah Albert Einstein pada tahun 1905 dalam makalahnya bertajuk *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*[1] yang diterbitkan dalam jurnal masyhur 'Annalen der Physik'.

Kesan fotoelektrik ialah kejadian elektron yang diterujakan apabila disinari cahaya sehingga bebas dari ikatan atomnya. Tenaga yang diterima oleh elektron berkadaran dengan frekuensi cahaya. Hal ini serupa dengan tenaga yang dibawa oleh sekuantum cahaya dalam postulat kuantum Planck (Rujuk Section 2.1). Hal ini serupa dengan tenaga yang dibawa oleh sekuantum cahaya dalam postulat kuantum Planck (Rujuk Section 2.1).

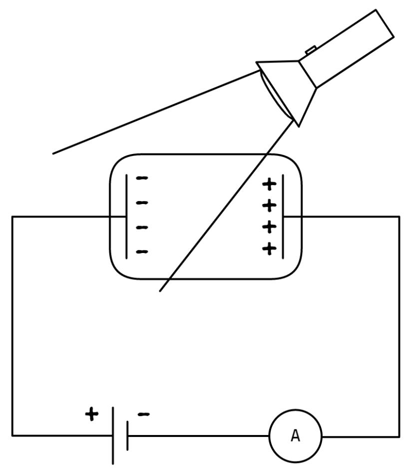
Hukum 9.1 (Kesan Fotoelektrik)**.** *Tenaga, E, yang diterima elektron dari cahaya berfrekuensi f setelah membebaskan diri dari permukaan logam berfungsi kerja Φ ialah*

$$E = hf - \Phi$$

[1] maksud: Tentang Penghasilan dan Penukaran Cahaya Dari Sudut Pandang Heuristik

dengan maksud bahawa...

simbol	*maksud*	*nilai*
E	*tenaga kinetik yang diterima elektron*	*pembolehubah bersandar* f *dan* Φ
h	*pemalar Planck*	$6.62607015 \times 10^{-34} J \cdot s$
f	*frekuensi cahaya*	*pembolehubah tidak bersandar*
Φ	*fungsi kerja logam*	*pembolehubah tidak bersandar*



Tatasusunan radas

9.1 Tatakaedah

Radas-radas yang diperlukan untuk kesan fotoelektrik ialah seperti berikut:

1. Bekas hampagas lutsinar
2. Dua keping logam
3. Sumber cahaya berwarna tulen
4. Bateri
5. Ammeter

Dua keping logam diletakkan dalam bekas hampagas lutsinar bagi memastikan tiada pengaruh bendasing. Sambungkan kepingan logam tersebut pada bateri dan ammeter supaya menjadi litar terbuka. Halakan lampu pada kepingan logam bercas negatif lalu lihat apa hasilnya pada ammeter.

Jika tenaga yang dibekalkan cahaya adalah cukup, maka elektron-elektron akan melompat dari kepingan logam pertama ke kepingan logam kedua. Perbuatan ini akan menutup litar lalu menghasilkan arus. Ujikaji ini boleh ditiru melalui simulasi yang telah disediakan oleh *University of Colorado* di pautan ini: https://phet.colorado.edu/en/simulations/photoelectric/

Bandingkan apakah kesan tiga (3) perkara ini terhadap arus elektrik:

1. keamatan cahaya
2. warna cahaya (frekuensi)
3. jenis logam

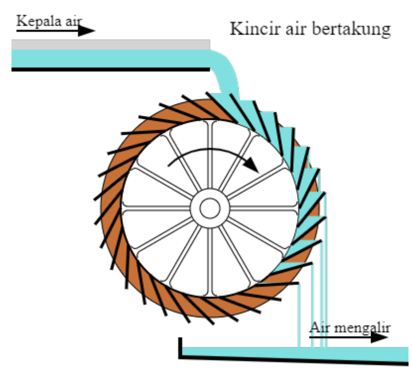
9.2 Pemerhatian

Terdapat tiga perkara yang boleh disimpulkan daripada ujikaji ini:

1. Ada warna (frekuensi) cahaya yang mampu melompatkan elektron dan ada warna cahaya yang langsung tidak mampu melompatkan elektron. Arus litar berkadaran terus dengan frekuensi cahaya.
2. Keamatan cahaya hanya memberi kesan terhadap arus sekiranya warna yang digunakan mampu melompatkan elektron. Arus litar berkadaran terus dengan keamatan cahaya dengan syarat frekuensi cahaya berjaya lompatkan elektron dalam pemerhatian (1).
3. Kepingan logam yang digunakan mempengaruhi frekuensi cahaya yang boleh lompatkan elektron. Ada logam yang memerlukan cahaya berfrekuensi tinggi manakala ada logam yang memerlukan cahaya berfrekuensi rendah.

Hal ini menghairankan Phillip Lenard yang lakukan ujikaji ini pada tahun 1902 dan rakan-rakan sezamannya. Jika disangkakan cahaya adalah gelombang semata-mata, perkara-perkara yang disenaraikan di atas tidak berlaku.

Pertimbangkan satu kincir air jenis bertakung yang dipasang di hujung sungai untuk dituai tenaganya. Kincir tersebut tetap akan berpusing tidak kiralah sungainya mengalir secara deras ataupun tidak. Asalkan takungannya dapat diisi, maka kincir tetap akan berpusing (Rujuk Figure ??). Bezanya, sungai



Kincir air bertakung digunakan sebagai analogi bagaimana fizikawan terdahulu menggambarkan elektron boleh mengumpulkan tenaga dari cahaya seolah-olah ianya sungai. Gambar dipetik dari *Malcolm.boura* melalui wikimedia dan diubah suai dengan lesen karyasama CC-BY-SA 4.0

yang tidak deras akan ambil masa yang lama untuk mengisi takungan kincir air berbanding sungai yang deras.

Begitulah juga gambaran fizikawan terdahulu tentang cahaya. Sekiranya cahaya adalah sejenis gelombang yang terus-menerus memberikan tenaga, maka mana-mana frekuensi cahaya akan boleh melompatkan elektron dari kepingan logam. Bezanya cepat atau lambat sahaja menunggu takungan tenaga diisi. Hakikatnya, elektron melompat dengan serta-merta dan bergantung kepada frekuensi cahaya.

Hal ini yang menjemput Albert Einstein memikirkan semula ujikaji ini dari kerangka postulat kuantum Planck. Jika digambarkan cahaya melalui postulat kuantum Planck , maka ketiga-tiga pemerhatian di atas dapat dijelaskan, termasuklah hakikat bahawa elektron melompat serta-merta:

1. Setiap elektron hanya boleh terima tenaga satu kuantum cahaya secara serta-merta. Oleh itu, tenaga cahaya yang berkadaran dengan frekuensi cahaya ($E = hf$) memainkan peranan penting. Sekiranya tenaga yang dibekalkan frekuensi tertentu tidak mencukupi, maka elektron tidak boleh lompat.
2. Keamatan cahaya mewakili berapa banyak ketulan kuantum cahaya yang disinarkan. Kemudian, lebih banyak ketulan kuantum cahaya disinarkan, lebih banyaklah elektron yang melompat lalu meninggikan arus (walaupun tenaga setiap satu elektron tidak bertambah).
3. Setiap logam ada ikatan yang tersendiri terhadap elektron. Ikatan ini ialah fungsi kerja Φ dan setiap logam mempunyai nilai lain-lain. Tenaga yang diterima elektron tersebut akan digunakan untuk membebaskan diri dari ikatan ini. Selebihnya, akan digunakan untuk melompat.

Dari tiga perkara inilah munculnya hukum 9.1.

Part IV

Persamaan Schrödinger

Hukum 9.2 (Persamaan Schrödinger).

1 Dimensi

Pertimbangkan suatu zarah berfungsi gelombang $\Psi(x,t)$ *yang merambat dalam medan keupayaan* $V(x,t)$, *maka sifat zarah tersebut tertakluk pada persamaan berikut:*

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial^2 x}\Psi(x,t)+V(x,t)\Psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)$$

dengan maksud bahawa...

simbol	*maksud*	*nilai*
$\hbar$	*pemalar Planck palang*	$1.054571817...\times 10^{-34}\ J{\cdot}s$
m	*jisim zarah*	*pembolehubah tidak bersandar*
x	*kedudukan*	*pembolehubah tidak bersandar*
t	*masa*	*pembolehubah tidak bersandar*
$V(x,t)$	*keupayaan*	*fungsi bersandar* x *dan* t
$\Psi(x,t)$	*fungsi gerlombang*	*fungsi bersandar* x *dan* t

3 Dimensi

Pertimbangkan suatu zarah berfungsi gelombang $\Psi(r,t)$ *yang merambat dalam medan keupayaan* $V(r,t)$, *maka* *sifat zarah tersebut tertakluk pada persamaan berikut:*

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(r,t) + V(r,t)\Psi(r,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(r,t)$$

dengan maksud bahawa...

simbol	*maksud*	*nilai*
$\hbar$	*pemalar Planck palang*	$1.054571817\ldots\times 10^{-34}\ J{\cdot}s$
m	*jisim zarah*	*pembolehubah tidak bersandar*
r	*kedudukan dalam 3 dimensi*	*pembolehubah tidak bersandar*
t	*masa*	*pembolehubah tidak bersandar*
$V(r,t)$	*keupayaan*	*fungsi bersandar r dan t*
$\Psi(r,t)$	*fungsi gelombang*	*fungsi bersandar r dan t*
∇^2	*operator Laplace*	$\frac{\partial^2}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2}{\partial^2 z}$

10 Andaian-Andaian Persamaan Schrödinger

Bagi memunculkan persamaan Schrödinger, seharusnya kita berpegang pada andaian-andaian berikut:

1. Bahawa tenaga sistem kuantum mematuhi perhubungan tenaga, E, dan frekuensi, f seperti yang digariskan oleh postulat Planck, $E = hf = \hbar\omega$;
2. Bahawa momentum sistem kuantum mematuhi perhubungan momentum jisim, p, dan momentum gelombang, k, seperti yang digariskan oleh hipotesis deBroglie, $p = hk$;
3. Bahawa sistem kuantum mematuhi prinsip keabadian tenaga;
4. Bahawa fungsi gelombang $\Psi(r, t)$ bersifat linear; dan
5. Bahawa fungsi keupayaan $V(r, t)$ bersandarkan ruang dan masa.

11 Fungsi Gelombang $\Psi(x)$

! Belum Tersedia

Kandungan halaman ini masih belum disediakan. Harap maklum.

12 Pembolehcerap Sebagai Operator

> **!** Belum Tersedia
>
> Kandungan halaman ini masih belum disediakan. Harap maklum.

13 Sekilas Pandang Hamiltonan

! Belum Tersedia

Kandungan halaman ini masih belum disediakan. Harap maklum.

14 Nilai Jangkaan

> **!** Belum Tersedia
>
> Kandungan halaman ini masih belum disediakan. Harap maklum.

15 Arus Kebarangkalian

! Belum Tersedia

Kandungan halaman ini masih belum disediakan. Harap maklum.

A Penyelesaian Berkomputer Untuk Sesaran Wien

Pers. 5.7 yang muncul dalam bahagian 5.1 berbentuk begini

$$X\frac{e^X}{e^X - 1} = 5. \tag{A.1}$$

Agak sukar untuk menyelesaikan persamaan ini pakai tangan jadi kita rujuk kaedah berangka.

> **Note**
>
> Secara ringkasnya, kaedah berangka cuba mendapat jawapan penghampiran melalui pemanipulasian angka. Bandingkan dengan kaedah beraljabar yang mendapat jawapan tepat melalui mantik terhadap simbol. Contoh kaedah berangka ialah pencarian titik silang antara graf dengan garis $y = 0$ melalui cuba jaya berulang kali.

Bagi mendapatkan nilai X dalam pers. A.1, kita harus akui ia sama dengan

$$X\frac{e^X}{e^X - 1} - 5 = 0$$

lalu kita gantikan 0 menjadi pembolehubah y,

$$X\frac{e^X}{e^X - 1} - 5 = y. \tag{A.2}$$

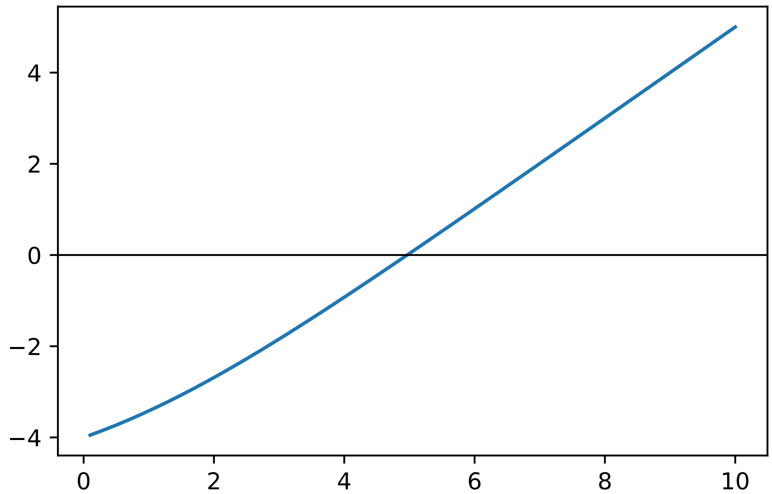
Persamaan ini mewakili graf x melawan y. Nilai X yang kita mahukan ialah apabila $y = 0$. Permasalah ini telah bertukar menjadi permasalah pencarian titik silang graf dengan garis $y = 0$.

A.1 Kaedah Pembahagi Dua

Kaedah paling mudah nak faham dan buat untuk mencari titik silang graf dengan garis $y = 0$ ialah kaedah pembahagi dua. Langkah-langkahnya ialah seperti berikut:

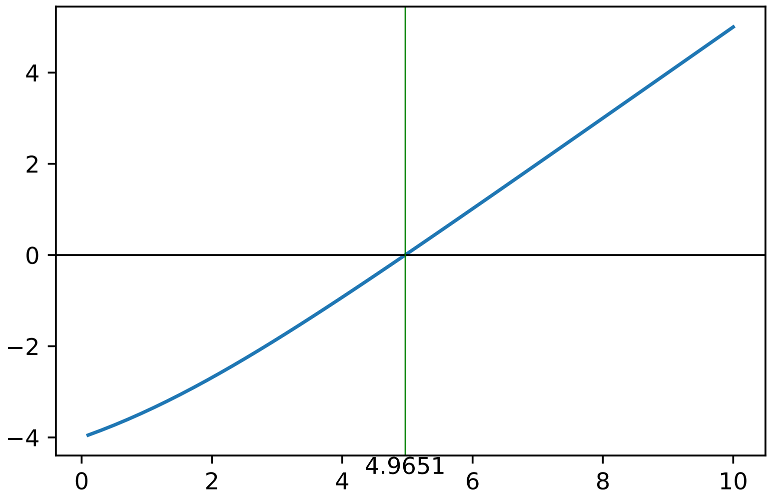
1. Pilih dua titik, `kiri` dan `kanan`. Jauh-jauh pun tidak mengapa asalkan titik persilangan itu berada di antara dua titik ini.
2. Dapatkan titik `tengah` lalu kita peroleh dua julat: julat [`kiri`, `tengah`] dan julat [`tengah`, `kanan`].
3. Semak samada persilangan berlaku dalam julat pertama atau tidak. Persilangan ini boleh disemak dengan melihat sama ada dua nilai tersebut berbeza tanda positif atau negatifnya.
   - Jika ya, maka balik ke langkah (1) dengan nilai baharu `kiri=kiri` dan `kanan=tengah`.
   - Jika tidak, kita andaikan persilangan berlaku dalam julat kedua. Balik ke langkah (1) dengan nilai baharu `kiri=tengah` dan `kanan=kanan`.
4. Ulang langkah (1) sampai (3) sehingga `jarak` antara `kiri` dan `kanan` lebih kecil dari `ketepatan` yang diinginkan. Ambil nilai `tengah` sebagai jawapan.

A.1.1 Pelaksanaan

````
```{python}
def persilangan_pembahagi_dua(fungsi, kiri: float, kanan: float, ketepatan: float = 1.0e-6)
    # !! `fungsi` ialah fungsi yang kita nak tahu puncanya (titik persilangan)
    # [1] Pilih dua titik, `kiri` dan `kanan`.
    jarak = abs(kanan-kiri)

    had: int = 100 # Untuk letak had berapa kali boleh ulang
    ulangan: int = 1 # Untuk kira berapa kali dah ulang
    while jarak > ketepatan:
        # [2] Dapatkan titik `tengah`
        tengah = (kiri+kanan)/2.
````
````

~~~~
        # [3] Semak sama ada persilangan berlaku di julat pertama [`kiri`,`tengah`]
        if (fungsi(kiri)*fungsi(tengah)) < 0:
            # Jika ya, balik ke langkah (1) dengan nilai baharu kiri=kiri dan kanan=tengah
            # Ulangan [1] Pilih dua titik, `kiri` dan `kanan`.
            kiri = kiri
            kanan = tengah
        else:
            # Jika tidak, balik ke langkah (1) dengan nilai baharu kiri=tengah dan kanan=kan
            # Ulangan [1] Pilih dua titik, `kiri` dan `kanan`.
            kiri = tengah
            kanan = kanan
        # [4] Ulang langkah [1] - [3] sampai `jarak <= ketepatan`
        jarak = abs(kanan-kiri)

        # Kalau dah lebih had, kita keluar. Kita tak nak benda ni ulang sampai bila-bila tak
        ulangan += 1
        if ulangan == had:
            raise ValueError(f'Sudah {had} kali diulang tetapi masih tak jumpa jawapan.')

    return tengah
```
~~~~

A.1.2 Kelebihan dan Kekurangan

- Kelebihan kaedah ini ialah ia sangat mudah dan sangat cekap. Jika titik persilangan berada di antara dua titik asal, maka kita akan jumpa titik persilangan itu.
- Kekurangan kaedah ini ada dua:

    1. Kaedah ini tidak begitu pantas. Sekiranya titik asal `kiri` dan `kanan` berpisah jauh sangat, maka pencarian titik persilangan akan ambil masa yang lama kerana jaraknya hanya dibahagi dua setiap kali.
    2. Kaedah ini mengandaikan titik persilangan berada di antara titik `kiri` dan `kanan` yang awal. Sekiranya tidak, maka kaedah ini tidak akan membuahkan apa-apa hasil.

A.2 Penyelesaian

Sebelum kita mulakan penyelesaian, kita perlu tahu dahulu adakah fungsi yang kita ada ini bersilang dengan garis $y = 0$ tidak? Kita cuba lukis graf untuk tengok wujud ke tak persilangan tersebut. Oleh itu, kita takrifkan dulu fungsi untuk pers. A.2.

````
```{python}
import numpy as np

def formula(x: float) -> float:
    return x*np.exp(x)/(np.exp(x) - 1) -5
```
````

Kemudian, bolehlah kita lukis grafnya.

````
```{python}
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(0.1, 10)
y = formula(x)

plt.plot(x, y)
plt.axhline(y=0, linewidth=0.8, color='black')
plt.show()
```
````



Nampaknya, titik persilangan tersebut berada di antara $x = 4$ dan $x = 6$. Kedua-dua nilai ini boleh jadi nilai `kiri` dan `kanan` asal untuk kaedah pembahagi dua.

Apabila sudah diketahui wujud titik persilangan, maka bolehlah kita gerakkan algoritma pencarian titik silang melalui pembahagian dua.

````
```{python}
jawapan = persilangan_pembahagi_dua(formula, kiri=4, kanan=6)
```
````

```
Nilai x ialah 4.965113639831543 apabila y=0
```

Kita boleh semak jawapan ini dengan graf.



International Astronomical Union. 2019. "Hundreds of thousands of people select names for exoplanet systems." https://phys.org/news/2019-12-hundreds-thousands-people-exoplanet.html.

Mayer, Raymond. 2006. "Numbers: From $2 \cdot 0 = 0$ to $e^{2\pi i} = 1$." In. Nota Kuliah Math112. http://people.reed.edu/~mayer/math112.html/html2/index.html.

Nave, Carl Rod. 2017. "Radiation Energy Density." HyperPhysics. http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/raddens.html.

Spiegel, Murray R., Seymour Lipschutz, and John Liu. 2009. *Schaum's Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables*. 3rd ed. McGraw-Hill.

Webeneger, Tobias. t.t. "Different Formulations of Planck's Law." Physics In A Nutshell. https://www.physics-in-a-nutshell.com/article/24/different-formulations-of-plancks-law.