Тема 4. Методы расчета электрических цепей

**4.1 Расчет токов в электрической цепи на основе совместного использования первого и второго законов Кирхгофа**

Обозначим общее число ветвей схемы через *v*, число ветвей, содержащих источники тока, – через *vИТ*, а число узлов – через *у*. В каждой ветви течет свой ток. Токи в ветвях с источниками тока известны (они равны токам источников токов), поэтому число неизвестных токов равно *v* – *vИТ*. Для определения этих неизвестных необходимо составить *v* – *vИТ* независимых уравнений.

Прежде чем составлять уравнения, необходимо:

1) произвольно выбрать положительные направления токов в ветвях и обозначить их на схеме;

2) выбрать положительные направления обхода контуров для составления уравнений по второму закону Кирхгофа. Для единообразия целесообразно для всех контуров выбрать одинаковое направление, например, по часовой стрелке.

Число независимых переменных (токи в ветвях, которые надо определить) равно, как было отмечено выше, *v* – *vИТ*. Для нахождения их значений необходимо составить *N* = *v* – *vИТ* линейно независимых уравнений.

При составлении уравнений необходимо следовать следующим правилам.

1. По первому закону Кирхгофа составляют число уравнений, равное числу узлов минус один, т.е. *N*1 = *у* – 1.

2. Остальные *N*2 = *N* – *N*1 уравнений составляют по второму закону Кирхгофа. В этих уравнениях не должно быть ветвей, содержащих источники тока.

3. При составлении уравнений необходимо охватить все ветви схемы, не содержащие источники тока. При этом надо, чтобы в каждый новый контур, для которого составляется уравнение, входила хотя бы одна новая ветвь,т не вошедшая в предыдущие контуры, для которых уже записаны уравнения пот второму закону Кирхгофа. Такие контуры называют независимыми.

**Пример расчета токов** в ветвях электрической цепи на основе совместного использования первого и второго законов Кирхгофа.

Рассмотрим электическую схему, показанную на рисунке 4.1.

Kirhgof12.wmf

Рисунок 4.1 – Пример электрической цепи с различными источниками энергии

В цепи три узла (*у*=3) и пять ветвей. Ветвь с источником тока *I* в составлении уравнений по второму закону Кирхгофа участвовать не должна. Таким образом, число ветвей, участующих в составлении уравнений по второму закону Кирхгофа *N*=4.

Необходимо найти значения токов во всех ветвях схемы: *i*1, *i*2, *i*3, *i*4, *i*5.Ток *i*1 равен току источника тока *I*. Для нахождения остальных токов потребуется составить четыре линейно независимых уравнения.

В соответствии с правилом 1 составляет два уравнения по первому закону Кирхгофа. Для составления этих уравнений используем узлы «1» и «2».



Оставшиеся два уравнения составим по второму закону Кирхгофа. В качестве первого контура для составления уравнения выберем контур *E*1*R*2*R*3*R*4*E*2. Для этого контура получим следующе уравнение

.

Второй контур должен содержать хотя бы одну ветвь, не вошедшую в первый контур. Этому условию соответствует контур *E*2*R*4*R*5. Для этого контура получим уравнение

.

Таким образом, получили систему четырех уравнений, достаточных для определения четырех неизвестных токов

. (4.1)

Из решения этой системы получим:

,

.

Вычислив значения токов *i*2 и *i*4, значения токов *i*3 и *i*5 определим соответственно из первого и второго уравнений системы.

Вычислим значения токов в ветвях схемы при следующих исходных данных:

*I*=1 А, *Е*1=10 В, *Е*2=5 В, *R*2=10 Ом, *R*3=20 Ом, *R*4=40 Ом, *R*5=50 Ом.

Сопрротивление *R*1 включено только в ветвь с источником тока I, поэтому не влияет на значения токов в других ветвях. Для определенности схемы примем *R*1=10 Ом.

Получаются следующие значения токов:

*i*2= – 0.67 А, *i*3= 0.33 А, *i*4= – 0.128 А, *i*5= 0.202 А.

Знаки «минус» у токов *i*2 и *i*4 означает, что на самом деле эти токи текут в противоположных направлениях по сравнению с обозначениями на схеме (рисунок 3.5). Таким образом, токи *i*2, *i*4 и *i*5 втекают в узел «0». Их сумма в соответствии с первым законом Кирхгофа должна раиняться вытекающему из узла «0» току *I*. Проверим это:

*i*2 + *i*4 + *i*5 = 0.67 А+0.128 А+0.202 А = 1 А.

Таким образом, расчет значений токов в ветвях схемы выполнен правильно.

Однако, как следует из приведенных формул, расчета токов в ветвях схемы на основе уравнений первого и второго законов Кирхгофа чрезвычайно громоздкий, требует повышенного внимания при выполнении преобразований.

Современные информационные технологии позволяют исключить человеческий фактор из процесса расчета значений токов.

Например, в известном вам пакете Mathcad имеется встроенная функция для решения системы уравнений. Пример применения этой функции показан на рисунке 4.2.

Сначала надо задать начальные значения токов, от которых начнется поиск решения. Например, *i*2=1, *i*3=1, *i*4=1, *i*5=1. Затем словом Given дают указание, что далее следует система уравнений. Вывод результатов осуществляется функцией Find. Аргументами функции являются переменные, относительно которых решается система уравнений.



Рисунок 4.2 – Применение пакета Mathcad для расчета токов в ветвях электрической схемы

В результате решения системы уравнений в пакете Mathcad получим те же значения токов, какие мы получили при ручном расчете.

Систему уравнений (4.1) можно представить в матричном виде

, (4.2)

где [*i*] – вектор неизвестных токов, которые надо определить,

[*R*] – матрица коэффициентов при токах в системе (4.1),

[*E*] – вектор источников электрической энергии, присутствующих в соответствующнем уравнении.

Для системы уравнений (4.1) с имеем:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 1 | -1 | 0 | 0 | | 0 | 1 | 1 | -1 | | R2 | R3 | - R4 | 0 | | 0 | 0 | R4 | R5 | |  |
| [*R*]= |
|  |

С использованием матричных операций пакета Mathcad вектор значений тока в ветвях схемы определяется как произведение обратной матрицы [*R*-1] на вектор источников электрической энергии:

. (4.3)

Решение (4.3) для рассмотренных в примере исходных данных дает тот же результат: *i*2= –0.67 А, *i*3= 0.33 А, *i*4= –0.128 А, *i*5= 0.202 А.

Знак минус указывает на то, что на самом деле ток в ветви течет в направлении, противоположном принятому на схеме.

**4.2 Метод контурных токов**

Метод расчета токов в ветвях схемы, основанный на применении первого и второго законов Кирхгофа, как следует из приведенного выше примера, достаточнот громоздкий.

Более компактное решение можно получить, используя метод контурных токов. Для реализации этого метода следует применить следующие правила.

1. В соответствии с этим методом в схеме выделяются все независимые контура. Если в каких-либо ветвях схемы есть источник тока, то такая ветвь **должна входить только в один** контур.

2. Положить, что в каждом независимом *i*-м контуре течет свой ток *Ii*. Задать направление протекания тока в каждом контуре. Как правило, этот направление по частовой стрелке.

3. Задать направление обхода в каждом контуре. Направление обхода контура, как правило выбирают совпадающим с направлением тока.

4. Для каждого контура составляют уравнение по второму закону Кирхгофа.

Так как число независимых контуров в схеме меньше числа ветвей, то число уравнений будет меньше, чем в методе с использованием и первого и второго законов Кирхгофа.

5. Токи в каждой ветви находятся как сумма или разность соответствующих контурных токов контуров, в которые ветвь входит.

**Пример расчета токов** **в ветвях электрической цепи методом контурных токов**

Проведем расчет схемы, представленной на рисунке 4.1.

В схеме три независимых контура. Имеющийся в схеме источник тока должен войти только в один контур. В соответсвии с правилами 1, 2 получим контурные токи *I*1, *I*2, *I*3 (рисунок 4.3).

КонтурТоки.wmf

Рисунок 4.3 – Контурные токи в схеме

По правилам 3, 4 составим для каждого контура уравнения по второму закону Кирхгофа.

Так как в первый контур входит источник тока *I*, то контурный ток *I*1=*I*.

Остаются два неизвестных тока *I*2 и *I*3, поэтому достаточно составить два уравнения: для контура 1 и контура 2. При этом надо учесть, что через резистор *R*2 протекают навстречу друг другу соответственно токи *I*1 и *I*2, а через резистор *R*4 – токи и *I*2 и *I*4.

Таким образом, ток в ветви с сопротивлением *R*2 определится как *i*(*R*2)=*I*2 – *I*, а ток в ветви с сопротивлением *R*4 как *i*(*R*4)=*I*2 – *I*3. Токи в ветвях с резисторами *R*1, *R*3 и *R*5 будут соответственно равны контурным токам *I*1, *I*2 и *I*3.

Уравнения контурных токов:

. (4.4)

Решение системы уравнений (4.4) при исходных данных, приведенных в предыдущем примере, дает следующие результаты:

*I*2=0.33 A, *I*3=0.202 А.

С учетом сделанных выше замечаний о токах в сопротивлениях R2 R3 R4 и R5 получим следующие значения токов в ветвях с этими сопротивлениями:

*i*(*R*2)= –0.67 А, *i*(*R*3)= 0.33 А, *i*(*R*4)= –0.128 А, *i*(*R*5)= 0.202 А,

то есть те же самые значения, что и при решении методом с использованием первого и второго законов Кирхгофа.

Также, как и в предыдущем примере, знак минус указывает на то, что на самом деле ток в ветви течет в направлении, противоположном принятому на схеме.

При расчете токов в ветвях схемы по методу контурных токов можно применять все приемы с использованием пакета Mathcad, рассмотренные в разделе 4.1.

**4.3 Метод узловых потенциалов**

Метод узловых потенциалов основан на применении первого закона Кирхгофа.

Метод узловых потенциалов целесообразно применять, когда число узлов в схеме без единицы меньше числа независимых контуров. Если число узлов обозначить *n*, а число независимых контуров *К*, то условием целесообразности применения будет неравенство

*n* – 1 < *K*.

Токораспределение в схеме не изменится, если потенциал одного из узлов принять равным нулю. Говорят, что узел с потенциалом φ=0 «заземлен» или подключен к «земле». Такой узел ещетназывают базисным.

Таким образом, любой один узел (но только один) можно заземлить, уменьшив тем самым на один число узлов и, соответственно, требуемое число уравнений системы для определения потенциалов в узлах схемы.

Рационально заземлять узел, в котором сходится наибольшее число ветвей. В этом случае упрощаются выражения, описывающие собственные проводимости оставшихся узлов.

Вспомним, что проводимостью называется величина, обратная сопротивлению

.

Единицей проводимости является Сименс (См).

Собственной проводимостью узла называют сумму проводимостей всех ветвей, сходящихся в этот узел. Обозначим собственную проводимость *i*-го узла *Gi*.

Проводимость ветвей между *i*-м и *j*-м узлами называют общей проводимостью между *i*-м и *j*-м узлами. Обозначим ее *Gij*.

Пронумеруем узлы числами 0, 1, 2, 3, … Узел с номером 0 заземлен. Для нахождения потентциалов в остальных узлах необходимо составить *n*-1 уравнений.

Правила составления уравнений следующие.

1. В левой части уравнения пишут сумму всех произведений потенциалов каждого узла на соответствующую проводимость, причем потенциал φ*i* *i*-го узла умножается на собственную проводимость *Gi* и это произведение берут со знаком «+», а потенциалы φ*j* любого *j*-го узла из оставшихся узлов умножают на общую проводимость *Gij* между *i*-м и *j*-м узлами и эти произведения берут со знаком « – ».

ВНИМАНИЕ! **Если к узлу подходит ветвь с источником тока, то проводимость этой ветви в расчете собственной проводимости узла не участвует.**

2. В правой части уравнения пишут сумму алгебраической суммы токов источников тока в ветвях, примыкающих к *i*-му узлу, и алгебраической суммы произведений ЭДС источников напряжения, имеющихся в ветви, примыкающей к узлу, на проводимость этой ветви. Есди ЭДС источника напряжения или ток источника тока направлены к узлу, то слагаемые берутся со знаком «+», если от узла, то со знаком « – ».

Если в какой-либо ветви схемы нет источника напряжения или тока, то такая ветвь исключается из процесса формирования правой части уравнения.

В качестве примера составим систему уравнений для расчета методом узловых потенциалов схемы с четырьмя узлами, т.е. *n*=4. Один узел будет заземлен, для оставшихся трех узлов требуется составить три уравнения:

, (4.5)

где означает, что учитываются все ветви, подходящие к *i*-му узлу, при условии, что в них есть источники ЭДС или тока.

Систему (4.5) решают относительно потенциалов φ*i* каждого узла.

Токи в ветвях, расположенных меду *i*-м узлом и «землей» определяют по закону Ома, разделив разность потенциала *i*-го узла φ*i* и алгебраической суммы ЭДС источников напряжения, имеющихся в ветви, на сумму сопротивлений в этой ветви:

. (4.6)

За положительное направление тока принимают направление от узла к «земле». Если при расчете по (4.6) получили значение тока со знаком « – », то это значит, что в реальной схеме ток течет в противоположном направлении.

Ток в ветви, расположенной меду *i*-м и *j*-м узлами тоже определяют по закону Ома, разделив разность потенциалов между узлами на суммарное сопротивление ветви:

. (4.7)

Так же, если при расчете по (4.7) получили значение тока со знаком « – », то это значит, что в реальной схеме ток течет в противоположном направлении.

**Пример расчета токов** **в ветвях электрической цепи методом узловых потенциалов**

Проведем расчет схемы, представленной на рисунке 4.1.

В схеме три узла. Наибольшее число ветвей сходится в нижнем узле. Его и заземлим. Остается схема с двумя узлами (рисунок 4.4).

УзловПотен.wmf

Рисунок 4.4 – Схема для расчета потенциалов в узлах

Система уравнений, составленная с учетом приведенных выше правил, имеет вид

. (4.8)

Собственные проводимости *G*1 и *G*2 узлов «1» и «2» определим как сумму проводимостей всех ветвей сходящихся в эти узлы:

 .

В соответствии с правилом 1 из расчета собственной проводимости узла «1» исключена ветвь с источником тока *I*.

Общая проводимость между узлами «1» и «2» равна

.

Проводимости ветвей с источниками ЭДС *Е*1 и *Е*2 соответоственно равны

.

Решение системы уравнений (4.6) с помощью пакета Mathcad (см. пример в разделе 4.1) при исходных данных, приведенных в примере раздела 4.1, дает следующие результаты:

φ1 = 16.702 В, φ2 = 10.106 В.

Зная потенциалы φ1 и φ2 в узлах «1» и «2», с помощью закона Ома для участка цепи найдем значения токов в каждой из ветвей схемы:

1) ветвь с сопротивлением *R*2 и источником ЭДС *Е*1

;

2) ветвь с сопротивлением *R*4 и источником ЭДС *Е*2

;

3) ветвь с сопротивлением *R*5

;

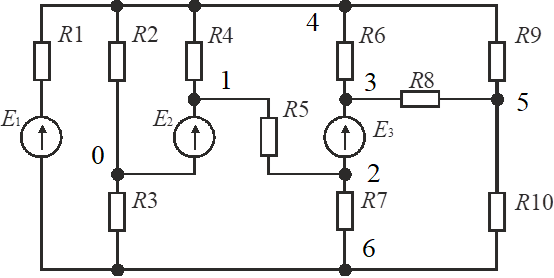
4) ветвь с источником тока *I* – ток в ветви равен току источника тока

*I*(*R*1)=*I* = 1 А.

Как видим, расчет токов в ветвях схемы разными методами дал одни и те же результаты.

**Особенности расчета схем при наличии ветвей только с источниками ЭДС без последовательно включенных сопротивлений**

Исходные данные: в схеме *N* узлов и две ветви с источниками ЭДС (*Е*), включенные непосредственно между двумя узлами.



U3=U2+E3

U2\*(g5+g7)+U2\*x –(U2+E3)\*x = – E3\*x

–U2\*x+(U2+E3)\*(g6+g8)+(U2+E3)\*x=E3\*x

U2\*(g5+g7+g6+g8)= –E3\*(g6+g8)

1. Один из выводов одного источника «заземлить», т.е. принять, что потенциал узла, к которому подключен этот вывод, равен нулю.

При этом потенциал узла, к которому подключен второй вывод источника ЭДС становится известным (например, равным *Е*2).

Таким образом, число узлов с неизвестными потенциалами сокращается на два и становится равным *N* – 2.

2. Потенциал одного из узлов, к которому подключен один из выводов второго источника ЭДС, выражается через потенциал узла, к которому подключен второй вывод источника ЭДС, и напряжение источника (например, φ3=φ2+*Е*3).

Таким образом, исключается еще одна неизвестная (в примере – потенциал φ3), и число узлов с неизвестными потенциалами становится равным *N* – 3.

Для этих узлов составляется окончательная система из *N* – 3 уравнений.

Например, если схема содержит 7 узлов, то надо составить систему из 4-х уравнений.

Но прежде, чем это произойдет, составляется система из *N* – 2 уравнений, в двух из которых будет использоваться потенциал одного и того же узла, через который был выражен потенциал другого узла (например, в обоих уравнениях будет использоваться потенциал φ2, и ни в одном из этих двух уравнений не будет фигурировать потенциал φ3)

3. Правила составления уравнений

3.1. Проводимость ветви с источником ЭДС, включенным между двумя узлами (это относится к источнику, у которого ни один вывод не «заземлен»), обозначить как ***х.***

3.2 При расчете собственной проводимости составляющую, определяемую ветвью с источником ЭДС, лучше выделить отдельным слагаемым. Тогда произведение потенциала узла (например, узла 2) на собственную проводимость будет представлено двумя слагаемыми, например, φ2*G*2+φ2***х***, где *G*2 – сумма проводимости подходящих к узлу ветвей, содержащих сопротивления, *х* – проводимость ветви с источником ЭДС без последовательно включенного сопротивления.

Аналогично общую проводимость между узлами, между которыми включен только источник ЭДС, обозначают как *х*. Например, слагаемое в уравнении, описывающее связь между узлами 3 и 2 в приведенной выше цепи, будет иметь вид –φ2***х***, а между узлами 2 и 3: –φ3***х***.

Таким образом, в двух уравнениях будут содержаться слагаемые с неизвестной проводимость ***х***. Причем в разные уравнения эти слагаемые войдут с разными знаками.

3.3. Используем свойства линейной системы уравнений и сложим эти два уравнения, образуя из них одно новое уравнение системы (см. пример под рисунком).

Слагаемые с разными знаками, содержащие неизвестную проводимость ***х***, сократятся, и останется система из *N* – 3 уравнений с *N* – 3 неизвестными.

3.4. Решаем полученную систему обычным образом и по правилам метода узловых потенциалов находим токи во всех ветвях схемы.