Тема 6. Электрические цепи однофазного синусоидального тока

**6.1 Получение переменного напряжния**

Вспомним уроки физики.

При перемещении прямолинейного проводника, замкнутого че­рез внешнюю цепь на нагрузку, с постоянной скоростью ***v*** в одно­родном магнитном поле с индукцией ***В*** в проводнике в соответствии с законом (закон электромагнитной индукции, 1831 год) Майкла Фарадея (английский ученый, 1791-1867 г.г.) индуцируется неизменяю­щаяся ЭДС электромагнитной индукции, а в замкнутой цепи возникает электрический ток (рисунок 5.6,а).

Направление ЭДС в в проводнике определяется по правилу правой руки (рисунок 6.1,б).

|  |  |
| --- | --- |
| Закон Фарадея.png | Правило правой руки.png |
| а | б |

Рисунок 6.1 – Иллюстрация закона электромагнитной индукции

А теперь выполним проводник в виде рамки и заставим ее вращаться вокруг своей продольной оси (рисунок 6.2)

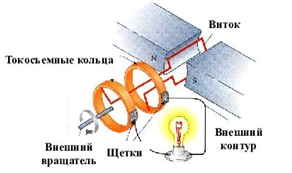


Рисунок 6.2 – Вращающаяся в магнитном поле рамка

Каждые полоборота вектор скорости рамки меняет направление на противоположное. Значит, в соответствии с правилом правой руки и направление индуцированной ЭДС будет менять направление, т.е. на выводах рамки будет формироваться переменное напряжение.

Магнитный поток Φ, пронизывающий вращающуюся рамку в каждый момент времени *tn*, равен

,

где *Sn* – площадь проекции полной площади *S* рамки на поверхность, перпендикулярную силовым линиям магнитного поля (рисунок 6.3).

Если время одного полного оборота рамки равно *Т*, то частота вращения *f*=1/*T* (Гц), а круговая частота ω=2π*f* (рад/с).

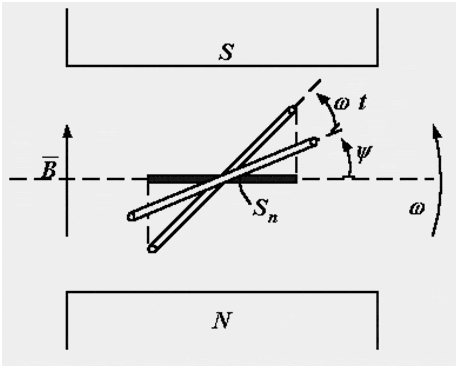


Рисунок 6.3 – Изменение площади проекции рамки при ее вращении

За произвольный промежуток времени *t* от 0 до *tn* рамка повернется на угол ω*t*. Площадь проекции рамки в момент времени *tn* будет равна

,

где ψ – начальный угол наклона рамки в момент времени *t*=0.

Таким образом, магнитный поток, проходящий через рамку будет меняться по косинусоиде

. (6.1)

Индуцируемая ЭДС ***е*** пропорциональна изменению магнитного потока в единицу времени, т.е. производной по времени от магнитного потока

. (6.2)

Если рамка имеет *w* витков, то индуцированная ЭДС будет в *w* раз больше

, (6.3)

где *Em* – амплитуда переменного синусоидального напряжения.

Часто для упрощения описания переменного напряжения начальную фазу полагают рвной нулю: ψ=0.

График изменения индуцированной ЭДС во времени приведен на рисунке 6.4.

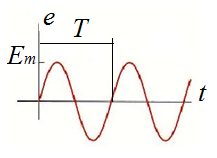


Рисунок 6.4 - Синусоида

**Связь линейной скорости перемещение проводника рамки в магнитном поле и скорости вращения рамки**

Один оборот рамка делает за *T* секунд. За это время формируется один период синусоиды. В единицу времени (одну секунду) рамка сделает *f* оборотов, и сформируется *f* периодов колебаний. Число колебаний в секунду называют частотой колебаний. Период колебаний и частота колебания связаны соотношением

. (6.4)

За один оборот проводник рамки проходит расстояние *L*=2π*R*, где *R* – радиус окружности описываемой точкой на проводнике рамки.

При постоянной скорости вращения линейная скорость проводника рамки определится как

. (6.5)

**6.2 Переменный ток и основные характеризующие его величины**

При подключении к выводам рамки нагрузки (см. рисунок 6.2) в цепи потечет ток, изменяющийся по синусоидальному закону

, (6.6)

где  - амплитуда тока.

Аргумент синуса, т.е. величину  называют полной фазой. Фаза полность определяет числовое значение синусоиды в данный момент времени *t* (вспомните детерминированные сигналы).

Любая синусоидальная фукция характеризутся тремя величинами: **амплитудой** (*Im*), угловой **частотой** (ω) и **начальной фазой** (ψ) (рисунок 6.5).

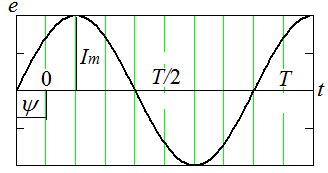


Рисунок 6.5 – Параметры синусоидального тока

На электрических схемах источник синусоидальной ЭДС обозначают в виде кружка со знаком синусоиды (рисунок 6.6)

Графическое изображение источника синусоиды.png

Рисунок 6.6 – Условное графическое обозначение источника синусоидального напряжения

**6.2.1 Действующее значение синусоидально изменяющейся величины**

Пусть через два одинаковых сопротивления *R* протекают синусоидальный ток *i* (см. (6.6)) и постоянный ток *Iд*, которые одинаково нагревают сопротивления.

Мощность, выделяемая на сопротивлении *R* при протекании по нему постоянного тока равна

. (6.7)

Мощность, выделяемая на сопротивлении *R* при протекании по нему синусоидального тока равна

. (6.8)

Так как мощности, выделяемые на сопротивлениях одинаковые, то

.

Подставим в правую часть этого равенства значение тока *i* из (6.6), приняв для упрощения выражений ψ=0. Постоянное сопротивление *R* не зависит от времени, поэтому его можно вынести за знак интеграла и сократить в обеих частях равенства. Получим следующее равенство

. (6.9)

В соответствии с правилами преобразования тригонометрических функций представим sin2(ω*t*) в виде

.

Подставим результат преобразования в (6.9) и учтем, что интегрирование является линейной операцией, т.е. интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от каждой функции. Получим следующее равенство

. (6.10)

Физический смысл интеграла от функции в заданных пределах – это площадь под кривой, описываемой данной функцией.

Косинусоида относительно оси абсцисс имеет значения и >0 и <0 (рисунок 6.7). Площадь частей косинусоиды, расположенных выше оси абсцисс имеет знак «+», а ниже – знак «–». Причем, сумма площадей со знаком «+» равна сумме площадей со знаком «–». Поэтому алгебраическая сумма площадей под кривой косинусоиды равна нулю.

Таким образом, второе слагаемое в (6.10) равно нулю.

В первом слагаемом выражения (6.10) *Im*/2 не зависит от *t*, поэтому этот сомножитель можно вынести за знак интеграла.

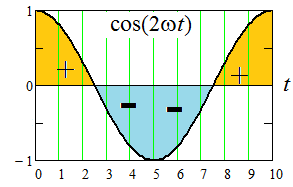


Рисунок 6.7 - Косинусоида

Получаем

. (6.11)

Но , поэтому на основе (6.11) связь действующего и амплитудного значений синусоидального тока описывается выражением

. (6.12)

Аналогично описывается связь действующего и амплитудного значений синусоидальной ЭДС

. (6.13)

**6.2.2 Мгновенная мощность синусоидально изменяющейся величины**

При подключении к источнику синусоидального напряжения нагрузки (приемника энергии) в цепи начинает протекать синусоидальный ток. Протекание синусоидального тока по участку электрической цепи сопровождается потреблением энергии от источника энергии. Количество энергии на участке электрической цепи, выделенное в единицу времени, есть мощность.

Так как падение напряжение на участке цепи и ток, протекающий через этот участок, изменяются во времени, то в каждый конкретный момент времени они характеризуются мгновенными значениями *u* и *i*.

Мгновенной мощностью *р*, выделяемой на участке электрической цепи, называют произведения мгновенного напряжения u на мгновенное значение i

*р* = *ui*. (6.14)

Мгновенная мощность р является функцией времени. Как именно изменяется *р*, выделяемая на разных элементах электрической цепи, рассмотрим немного позднее.

**6.3 Представление гармонического сигнала на комплексной плоскости**

Поскольку [переменный ток](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D1%82%D0%BE%D0%BA) есть колебательный процесс, его удобно описывать и исследовать с применением комплексных чисел. Комплексное число – это двумерное число. Оно имеет вид

*z* = *a* + *jb*, (6.15)

где *j* = √-1 – мнимая единица,

*а* и *b* – действительные числа.

Запись *a* + *jb* означает единое число, а не сумму двух слагаемых.

Число *а* называется ***действительной частью*** Re(*x*)комплексного числа *x*, число *b* называется ***мнимой частью*** Im*(x)* комплексного числа *x*.

Выражение (6.15) является алгебраической формой представления комплексного числа.

Комплексное число может быть представлено геометрически. В этом случае комплексные числа изображают на комплексной плоскости. По оси абсцисс откладывают действительную часть, а по оси ординат – мнимую часть. Если провести на плоскости прямую Re(z), параллельную оси ординат, и прямую Im(*z*), параллельную оси абсцисс, то точка пересечения линий будет соответствовать комплексному числу *z* (рисунок 6.8).

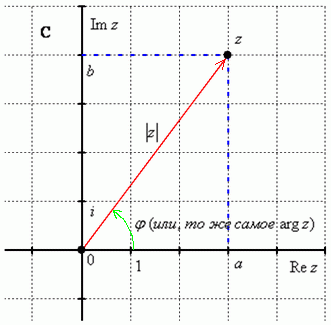


Рисунок 6.8 – Комплексное число

Модулем комплексного числа называют расстояние от точки комплексной плоскости до начала координат. Это растояние еще называют радиус-вектором.

Модуль комплексного числа *z* = *a* + *jb* определяется как квадратный корень из суммы квадратов реальной и мнимой частей

*r*=|*z*|=√*a*2+*b*2 (6.16)

Аргументом комплексного числа называют угол между радиус-вектором соответствующей точки комплексной плоскости и положительной вещественной полуосью. Аргумент связан с реальной и мнимой частями комплексного числа соотношением

φ = tg(*b*/*a*). (6.17)

Комплексное число можно представить в показательной форме

*z*=*rej*φ. (6.18)

В свою очередь, комплексную экспоненту можно выразить, в соответствии с формулой Эйлера, через тригонометрические функции

*ej*φ = cos(φ) + *j*sin(φ). (6.19)

Если в (6.18) в качестве *r* взять амплитуду *Im* переменного тока, то получим

*Im ej*φ = *Im*cos(φ) + *j Im*sin(φ). (6.20)

Для переменного тока аргумент φ можно представить как

φ = ωt + ψ, (6.21)

где ω – круговая частота; ψ – начальная фаза.

Таким образом, синусоидальный ток (см. формулу (6.6)) можно представить как мнимую часть комплексного числа с модулем *Im* и аргументом ωt + ψ

*i* = *Im* sin(ωt + ψ) = Im(*Im ej*(ωt + ψ) ). (6.22)

Исходя из (6.22), синусоидально изменяющийся ток можно представить как проекцию вращающегося вектора *Im ej*(ωt+ψ) на мнимую ось +*j* (рисунок 6.9). В литературе, особенно радиотехнической, часто в качестве описания гармонического колебания используют косинусоиду *Im*cos(ωt+ψ). Косинусоида является проекцией вращающегося вектора *Imej*(ωt+ψ) на действительную ось +1.

Рис_6-9_Компл-Пл

Рисунок 6.9 – Представление гармонического сигнала на комплексной плоскости

**6.4 Прохождение синусоидального тока через элементы электрической схемы**

**6.4.1 Синусоидальный ток в активном сопротивлении**

Определим падение напряжения на сопротивлении *R* при протекании по нему синусоидального тока *i* = *Im* sin(ω*t*) (рисунок 6.10,а). По закону Ома

*u* = *iR* = *RIm*sin(ω*t*). (6.23)

Здесь и далее для упрощения описания принято, что начальная фаза ψ = 0.

Произведение *RIm* есть амплитуда *Um* синусоидального напряжения, поэтому (6.23) можно представить в виде

*u* = *Um* sin(ω*t*). (6.24)

В активном сопротивлении ток и напряжение совпадают по фазе (рисунок 6.10,б,в).

|  |  |
| --- | --- |
| Рис 6-10-R  а | Рис 6-10_I-U  б |
| sin-R  в | |

Рисунок 6.10 – Синусоидальный ток в активном сопротивлении

Мгновенное значение мощности определяется произведением мгновенных значений напряжений и токов. С учетом (6.22) и (6.23) получим

*p* = *UmIm*sin(ω*t*)sin(ω*t*) =0.5*UmIm*(1 – cos(2ω*t*)). (6.25)

Таким образом, мгновенная мощность имеет косинусоидальную составляющую с удвоенной частотой, 0.5*UmIm*cos(2ω*t*), и постоянную составляющую 0.5*UmIm*. Из этого следует, что при нагрузке в виде активного сопротивления все время (пока замкнута цепь источник энергии-нагрузка) происходит отбор мощности от источника энергии и рассеивание ее на сопротивлении нагрузки.

**6.4.2 Синусоидальный ток в индуктивности**

Если идеализированную катушку индуктивности поместить в переменное магнитное поле, то на выводах катушки будет наводиться ЭДС самоиндукции *e* = – *d*Φ/*dt* (см. формулу (6.2)). В свою, если через идеализированную катушку проходит переменный ток *i*, то магнитный поток, обусловленный этим током, будет пропорционален индуктивности катушки *L*, Φ = *Li*.

Таким образом, ЭДС самоиндукции

*eL* = – *Ldi*/*dt*. (6.26)

Величина

*u =* – *eL* = *Ldi/dt* (6.27) называется падением напряжения на индуктивности или просто напряжением на индуктивности (рисунок 6.11,а).

Если через идеальную индуктивность *L* протекает синусоидальный ток *i* = *Im* sin(ω*t*), то напряжение на индуктивности определится в соответствии с (6.27) как

*u* = ω*LIm*cos(ω*t*) = *Um*cos(ω*t*) = *Um*sin(ω*t+*90О), (6.28)

где *Um =* ω*LIm* = амплитуда синусоидального напряжения.

Произведение ω*L* называют индуктивным сопротивлением

*XL* = ω*L.*  (6.29)

Индуктивное сопротивление зависит от частоты сигнала и пропорционально ей.

|  |  |
| --- | --- |
| Рис 6-11_L  а | Рис 6-11_I-U-e  б |
| sin-L  в | |

Рисунок 6.11 – Синусоидальный ток в индуктивности

Из (6.28) следует, напряжение на идеальной индуктивности опережает ток через индуктивность на 90О (рисунок 6.11,б,в).

Мгновенная мощность в индуктивности определяется произведением мгновенных значений напряжений и токов. С учетом (6.28) и (6.22) получим

*p* = *Um*cos(ω*t*) *Im*sin(ω*t*) =0.5*UmIm*sin(2ω*t*)). (6.30)

Мгновенная мощность имеет нулевое значение, когда через нуль проходит либо *u* либо *i* (рисунок 6.11,в).

Площадь, ограниченная кривой мощности *р* и осью абсцисс, представляет собой энергию, которой обмениваются источник энергии и приемник энергии. В моменты времени, когда *p* > 0, энергия берется от источника на создание энергии магнитного поля в индуктивности. В моменты времени, когда *p* < 0, энергия магнитного поля, запасенная в индуктивности, отдается источнику.

Реальные индуктивности всегда имеют какое-то активное сопротивление (сопротивление провода катушки индуктивности). А на активном сопротивлении, как мы установили выше, энергия только рассеивается (превращается в тепловую энергию, нагревающую активное сопротивление). Поэтому в реальных индуктивностях отдается источнику меньше энергии, чем потребляется от него. Разность потребленной и отданной энергии расходуется на нагрев реальной катушки индуктивности.

**6.4.3 Емкость в цепи синусоидального тока**

Электрическая энергия *WE*, которая может быть запасена в емкости *C*, определяется зарядом *q*, накопленном в емкости. В свою очередь, заряд определяется значением емкости и напряжением *u*, до которого она может быть заряжена

*q* = *CuC*. (6.31)

При изменении напряжения, прикладываемого к обкладкам емкости, будет меняться и ее заряд. Ранее мы с вами определили, что электрический ток – это изменение заряда во времени (см. формулу (1.2)). Определим ток через емкость, используя (1.2) и (6.31),

*i* = *dq*/*dt* = *CduC*/*dt*. (6.32)

Если напряжение на конденсаторе меняется по синусоидальному закону

*u* = *Um*sin(ω*t*), (6.33) то конденсатор будет периодически перезаряжаться, т.е. знак разности потенциалов между обкладками будет меняться. Будет меняться и направление тока через конденсатор. Из (6.32) с учетом (6.33) получим

*i* = *Cd*(*Um*sin(ω*t*))/*dt* = ωC*Um*cos(ω*t*) = ωC*Um*sin(ω*t+*90О). (6.34)

Положительное направление тока через конденсатор совпадает с положительным направлением напряжения на конденсаторе (рисунок 6.12,а). При этом, как следует из (6.34), ток через конденсатор опережает по фазе напряжение на конденсаторе на 90О (рисунок 6.12,б,в).

|  |  |
| --- | --- |
| Рис 6-12_LСcdr  а | Рис 6-12_I-U  б |
| sin-C  в | |

Рисунок 6.12 – конденсатор в цепи синусоидального тока

Из (6.34) определим амплитуду синусоидального тока

*Im* = ω*CUm* = *Um*/*XC* , (6.35)

где *XC* – емкостное сопротивление

*XC* = 1/ω*C*. (6.36)

Емкостное сопротивление зависит от частоты сигнала и обратно пропорционально ей.

Мгновенная мощность на емкости определяется произведением мгновенных значений напряжений и токов. С учетом (6.33), (6.34) и (6.35) получим

*p* = *Um*sin(ω*t*) *Im*cos(ω*t*) =0.5*UmIm*sin(2ω*t*)). (6.37)

Так же как и для индуктивности, мгновенная мощность на конденсаторе имеет нулевое значение, когда через нуль проходит либо *u* либо *i* (рисунок 6.12,в).

Так же как и для индуктивности, в моменты времени, когда мгновенная мощность *p* > 0, энергия берется от источника на создание энергии электрического поля в емкости. В моменты времени, когда *p* < 0, энергия электрического поля, запасенная на емкости, отдается источнику.

Если задан ток через конденсатор, то напряжение на конденсаторе можно определить на основе (6.32), интегрируя левую и правую части уравнения,

*uC* = (1/*C*)∫*idt*. (6.38)

**6.5 Законы Ома и Кирхгофа для цепей синусоидального тока**

**6.5.1 Комплексное сопротивление. Закон Ома для цепи синусоидального тока**

Рассмотрим электрическую цепь, содержащую последовательно соединенные источник синусоидального напряжения, активное сопротивление, индуктивность и емкость (рисунок 6.13).

Уравнение по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений напряжений на элементах цепи имеет вид:

*uR* + *uL* + *uC* = *e*. (6.39)

Рис 6-13_L_R_C

Рисунок 6.13 – Электрическая цепь синусоидального тока

Используя выражения (6.23), (6.27), (6.38), представляющие напряжения на элементах через текущие через эти элементы токи, преобразуем (6.39) к виду

*iR* +*Ldi/dt* + (1/*C*)∫*idt* = *e*. (6.40)

При рассмотрении прохождения синусоидального тока через элементы цепи мы с вами выяснили, что напряжение на индуктивности опережает ток на 90О, а напряжение на емкости отстает от тока на 90О.

Мы также определили, что синусоидальный ток можно представить вектором ***Im*** на комплексной плоскости. Умножение вектора ***Im*** на *j* дает новый вектор с той же амплитудой *Im*, но повернутый на 90О против часовой стрелки, т.е. опережающий исходный вектор на 90О. Умножение вектора ***Im*** на –*j* дает новый вектор с той же амплитудой *Im*, но повернутый на 90О по часовой стрелки, т.е. отстающий от исходного вектора на 90О.

С учетом сделанных замечаний, уравнение (6.40) можно записать в комплексной форме

***Im****R +* ***Im****j*ω*L +* ***Im***~~(~~–*j/*ω*C*) = ***Em***.

Вынесем ***Im*** за скобки:

***Im***(*R + j*ω*L* –*j/*ω*C*) = ***Em***. (6.41)

Множитель в скобках в выражении (6.41) имеет размерность сопротивления (Ом), называется комплексным сопротивлением

***Z =*** (*R + j*ω*L* –*j/*ω*C*) = *z*e*jφ*. (6.42)

Таким образом, выражение (6.41) можно представить в виде

***ImZ = Em***. 6.43)

Перейдем от комплексных амплитуд к комплексам действующих значений, разделив обе части последнего уравнения на √2, и решим уравнение относительно тока:

***I = E/Z***. (6.44)

Уравнения (6.43) и (6.44) представляют собой закон ОМА для синусоидального тока.

Комплексное сопротивление ***Z*** имеет действительную часть *R* и мнимую часть *jX*:

***Z =*** *R + jX,*  (6.45)

где *R* – активное сопротивление,

*Х* – реактивное сопротивление.

Для схемы на рисунке 6.13 реактивное сопротивление с учетом (6.42)

*Х =* ω*L* –1*/*ω*C.*

Модуль *z* комплексного сопротивления ***Z*** определяется как

*z = √R2+X2*. (6.46)

**6.5.2 Законы Кирхгофа в комплексной форме**

По первому закону Кирхгофа алгебраическая сумма мгновенных значений токов, сходящихся в любом узле схемы, равна нулю:

∑*ik* = 0. (6.47)

Токи в цепях синусоидального тока могут быть представлены комплексными величинами ***Ik***e*j*ω*t*. Поэтому первый закон Кирхгофа в комплексной форме записывается следующим образом

∑ ***Ik*** = 0. (6.48)

Запись второго закона Кирхгофа в комплексной форме имеет вид

∑ ***IkZk*** =∑***Ek***. (6.49)