基于 BPINNs 的圣维南方程求解与不确定性量化

景象

2025 年 12 月 3 日

项目基本情况

1. **目标**: 发展基于 BPINNs 的圣维南方程求解与不确定性量化方法，实现利用有限观测数据对中线工程全线水情进行模拟
2. **监测数据误差大**: 利用水动力模拟结果开展训练
3. **闸门处 loss 较大**: 仅对渠道进行训练（事后证明渠道模拟只是 rmse 小，其实才是真正谬误所在）
4. **本次汇报内容**: 最简化圣维南方程，仅拟合矩形河道单一工况加噪声的模拟结果，最后较为成功。

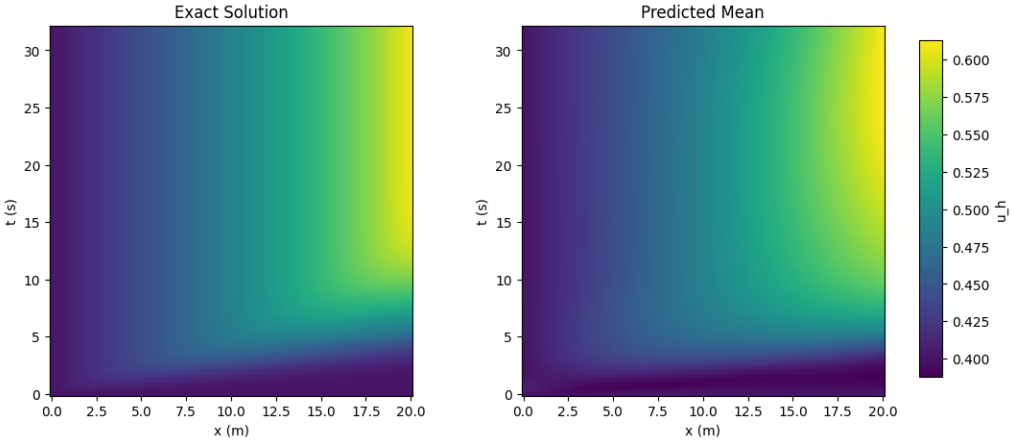
项目演进路线图

1. **阶段一：原型验证** - 小规模问题，可行性验证。
2. **阶段二：理想基准** - 大规模问题，无噪声验证。
3. **阶段三：噪声挑战** - 引入噪声，暴露双曲型方程弱点。
4. **阶段四：频谱陷阱** - 稳定边界数据后，揭示低频偏差问题。
5. **阶段五：最终方案** - 人工粘性 + 频域特征。

实际实施的顺序是：$3 \to 4 \to 1 \to 5 \to 2$。

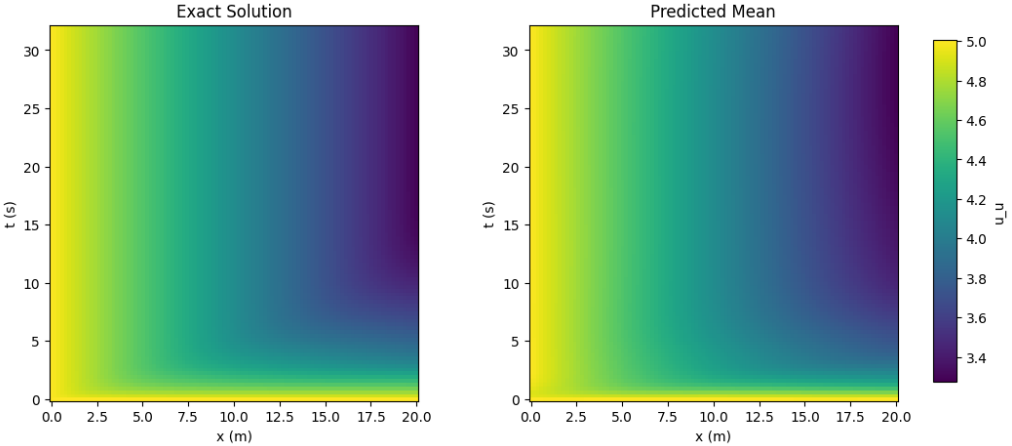
阶段一：Demo 预测结果 - 水深 (h)

小规模验证：矩形渠道平底，长 20m，模拟 32s，边界条件不变
FDM(左) vs PINN (右)



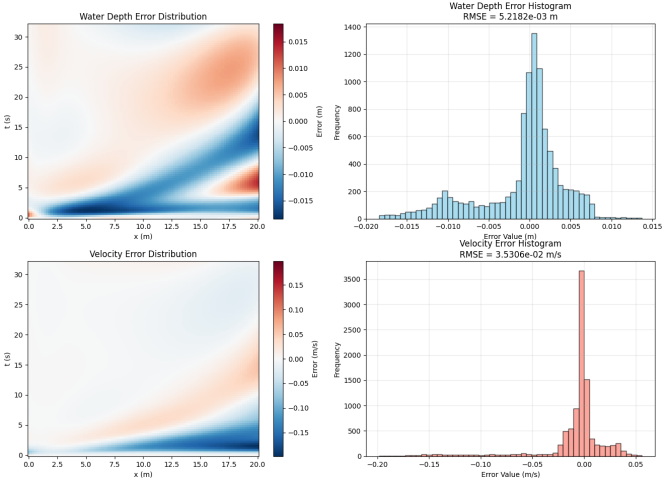
阶段一：Demo 预测结果 - 流速 (u)

小规模验证：流速场捕捉准确。



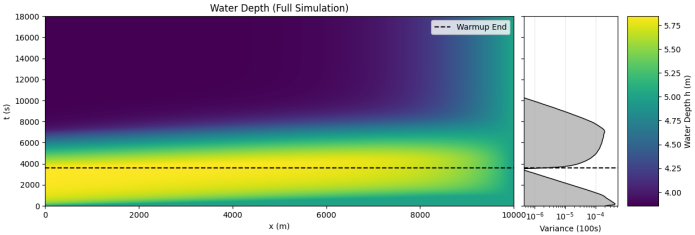
阶段一：Demo 误差分析

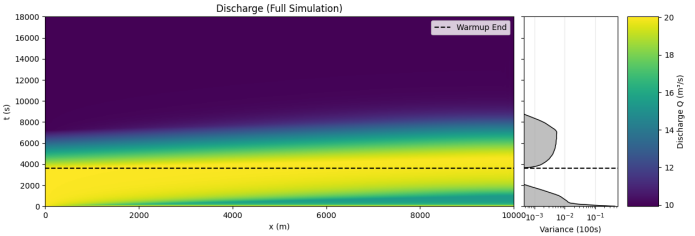
误差分布均匀且量级极低，水深 h 误差约为 5.21e-3 m，流速 u 误差约为 3.53e-2 m/s。



大规模工况定义

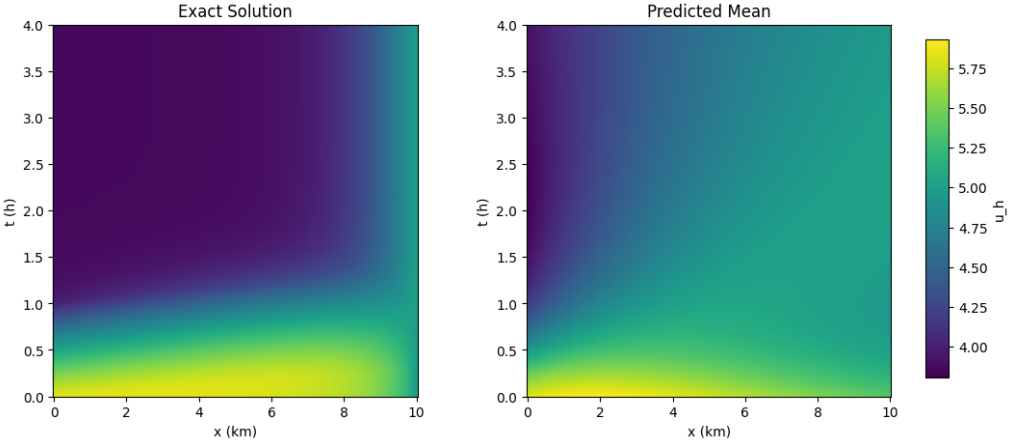
设置：长度 10km，时长 4h，采用上游流量、下游水位边界。正式模拟前预热 1h。模拟过程中前一小时流量 Q_{in} 线性减半。





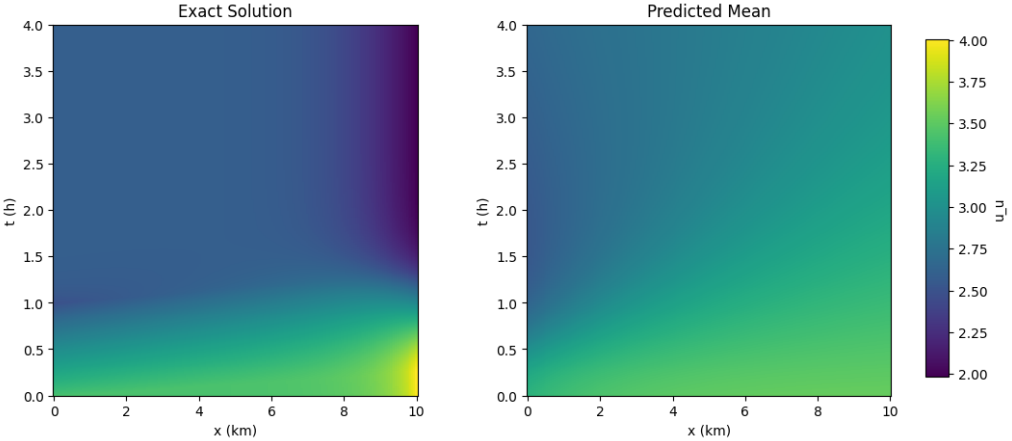
阶段二：无噪声基准 - 水深 (h)

目的: 验证网络容量。预测值 (右) 与真值 (左) 完美重合。



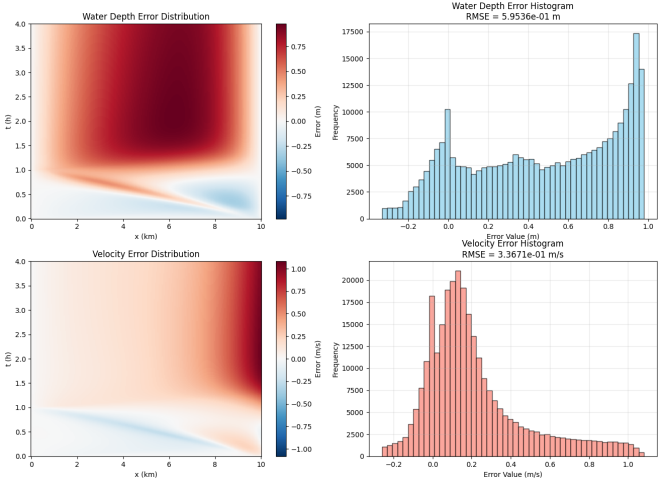
阶段二：无噪声基准 - 流速 (u)

流速预测同样精准，无伪影。



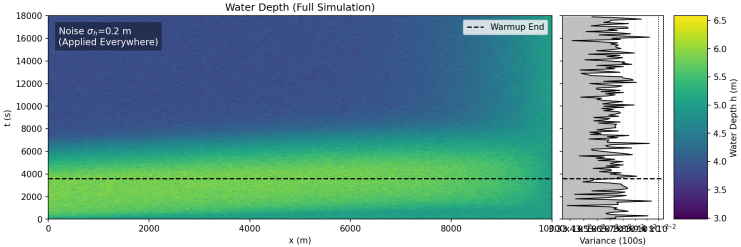
阶段二：Demo 误差分析

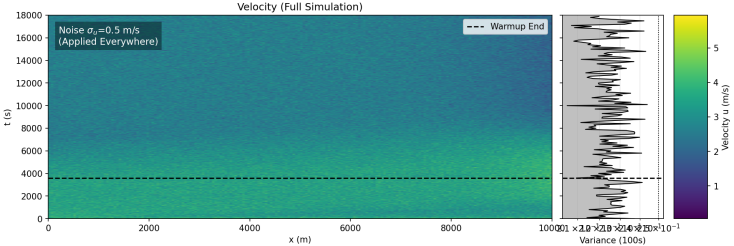
上游误差沿特征线向下游传播，上游 1h 后的稳定边界特征完全丢失



阶段三：工况设置

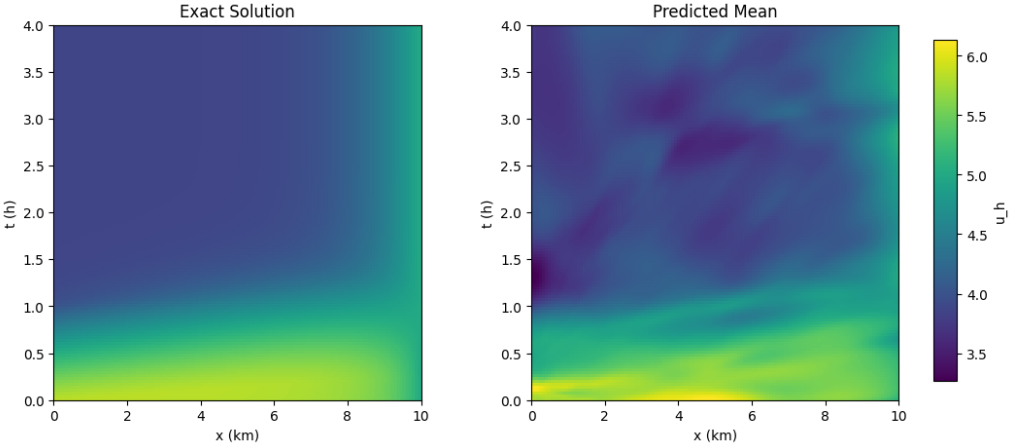
设置：在阶段二的基础上，向观测数据添加噪声，模拟实际测量误差对模型的影响。





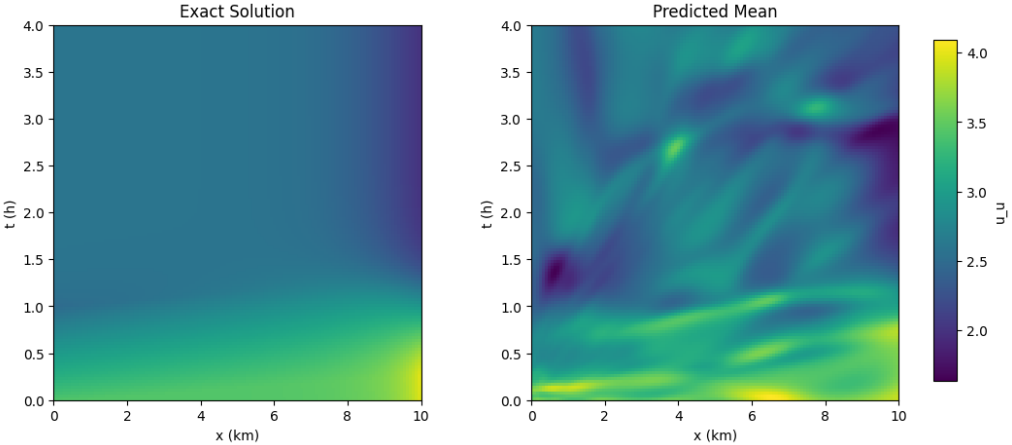
阶段三：全域水深模拟结果 (h)

加入 5% 高斯噪声后，水深预测出现严重伪影。



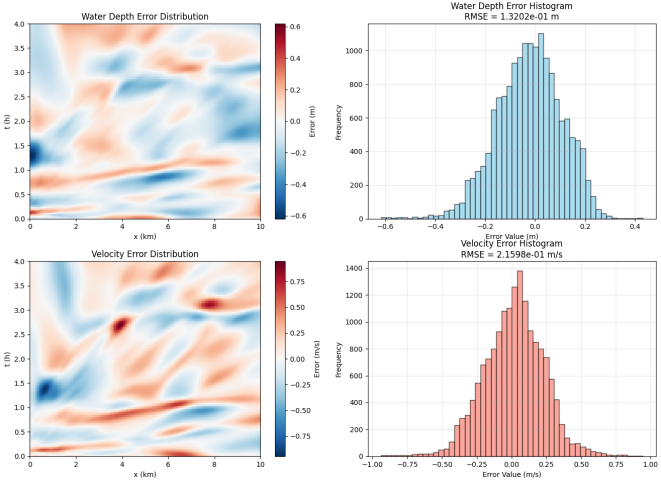
阶段三：全域流速模拟结果 (u)

流速场也出现剧烈震荡，无法使用。



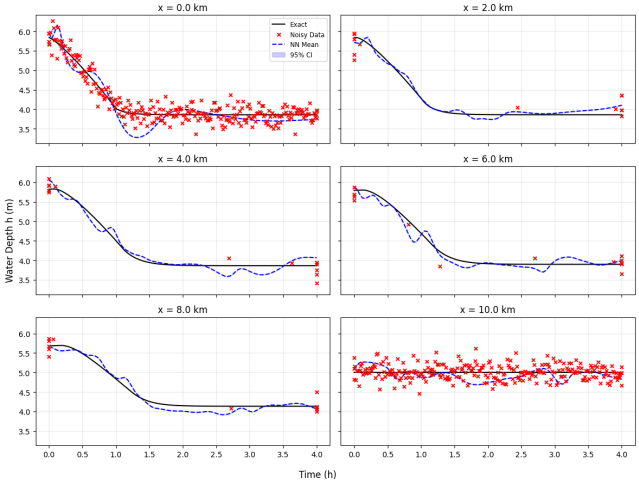
阶段三：误差传播机制分析

误差连片聚集分布，沿特征线扩散。



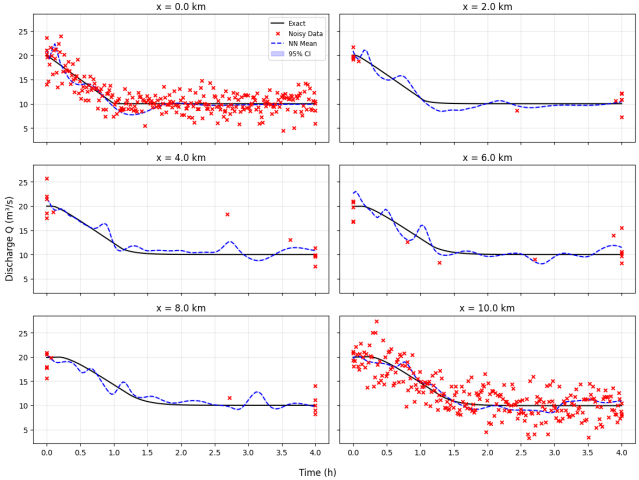
阶段三：时序分析 (水深 h)

预测值剧烈震荡，物理守恒性丧失。
黑色：FEM 解。红色：带误差的模型训练输入。蓝色：BPINN 预测值。



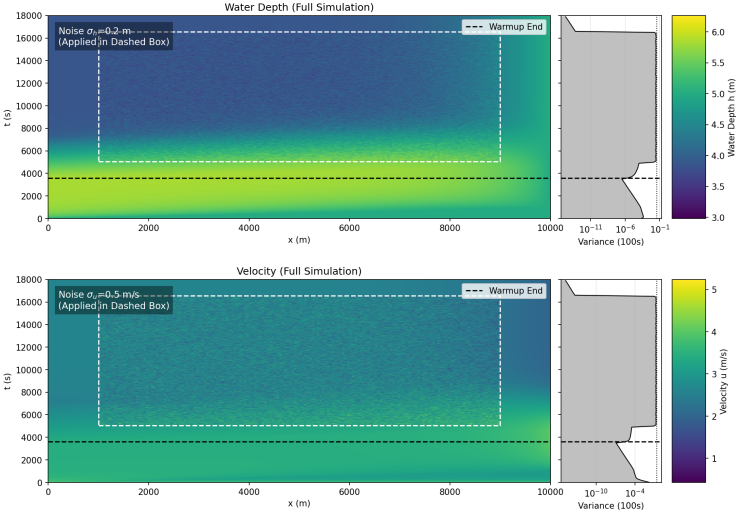
阶段三：时序分析 (流量 Q)

预测值剧烈震荡，物理守恒性丧失。



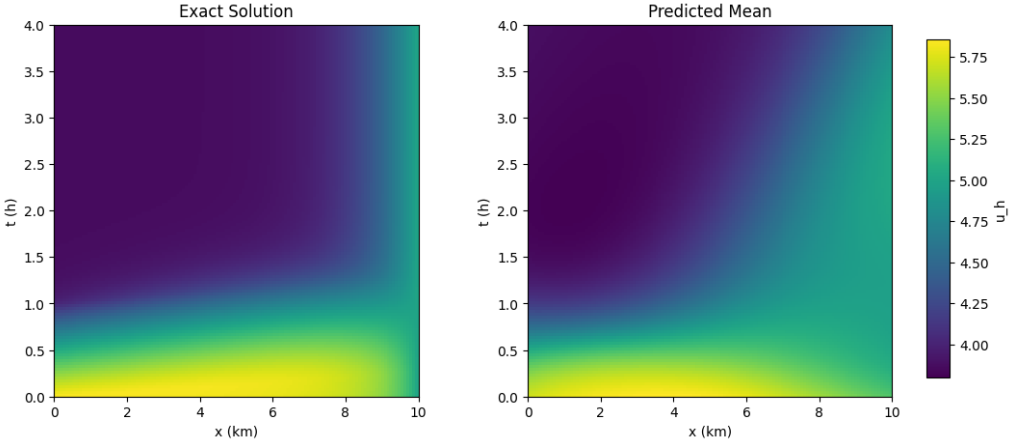
阶段四：工况设置

设置: 仅在内部观测数据添加噪声，模拟模型理论边界 + 实测误差对模型的影响。



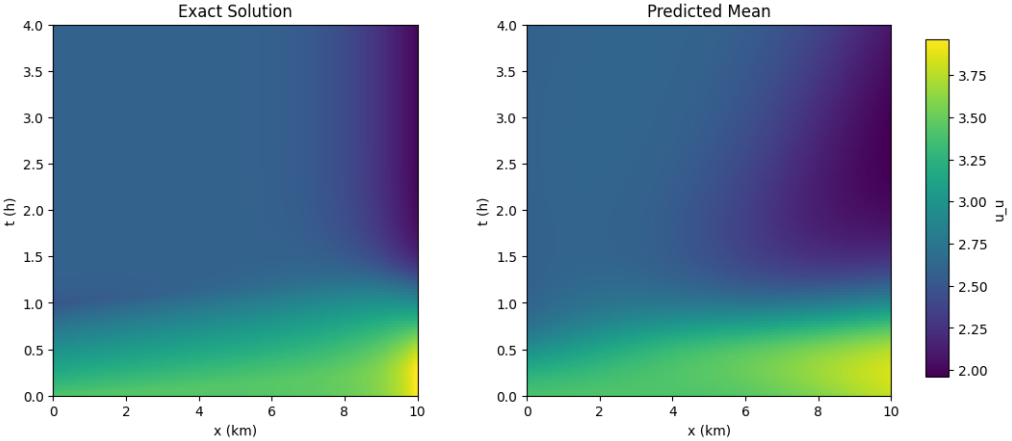
阶段四：频谱陷阱 - 水深 (h)

结果过于平滑，丢失波峰。上游流量边界在 (x=0m,t=3600s) 时流量的一阶导数不连续，网络未能捕捉到该变化。



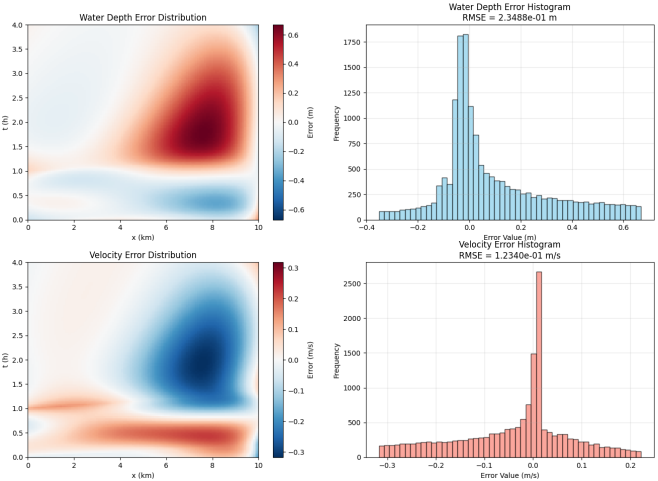
阶段四：频谱陷阱 - 流速 (u)

流速同样平滑化，未能捕捉锐利变化。



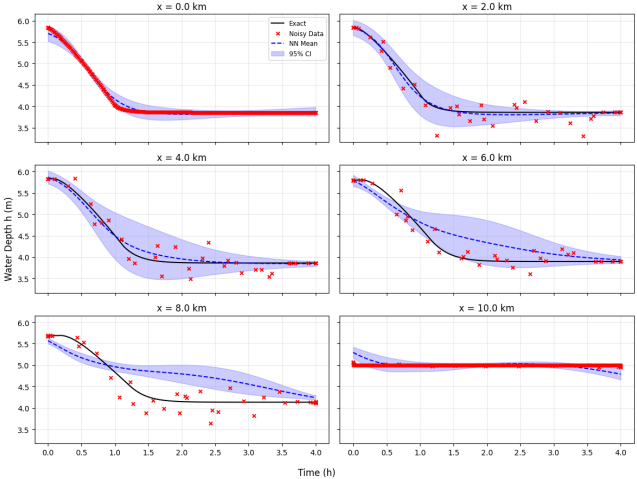
阶段四：系统性偏差分析

低频偏差 (Spectral Bias) 导致结构性误差。



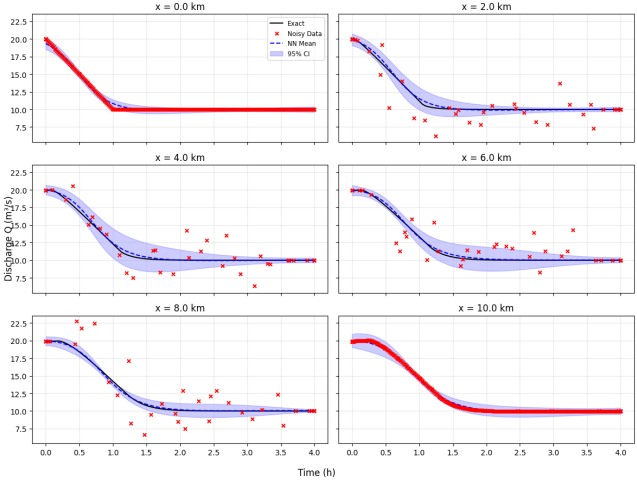
阶段四：时序分析 (水深 h)

预测均值 (蓝虚线) 明显偏离真值。



阶段四：时序分析 (流量 Q)

波前捕捉失败。



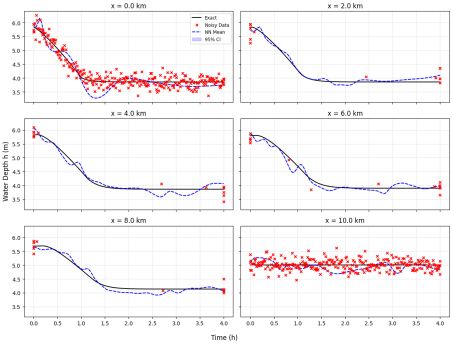
改进一：人工粘性 (Artificial Viscosity)

控制方程修正

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S} + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}$$

为何引入？

- **物理层**：模拟流体微团内摩擦，**抹平激波间断。**
- **优化层**：平滑 Loss Landscape，防止 **HMC 采样发散。**



图：目标：消除此类数值震荡

改进二：傅里叶特征嵌入 (Fourier Features)

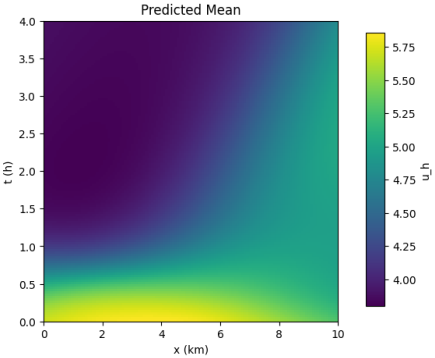
坐标映射 (放大变化)

$$\gamma(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \cos(2\pi\mathbf{B}\mathbf{x}) \\ \sin(2\pi\mathbf{B}\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

核心机制

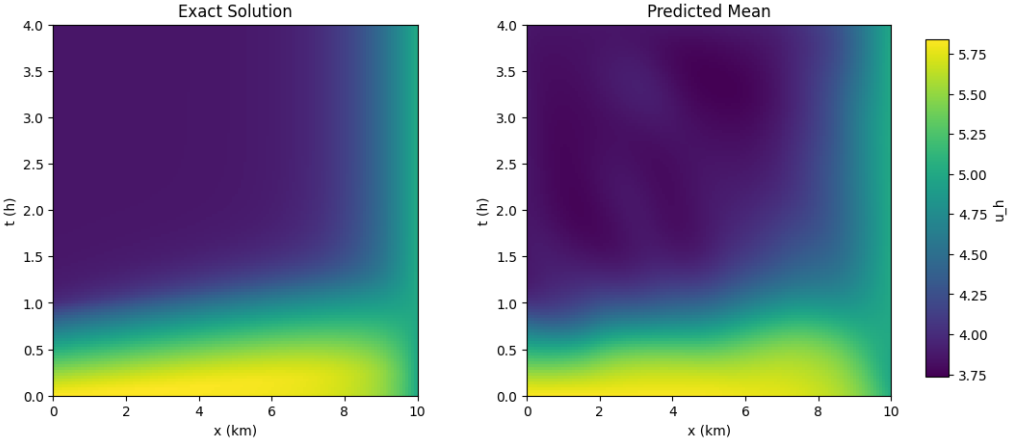
- **问题**：神经网络 tanh 具有低通滤波器的特性，导致神经网络出现了**谱偏置**问题，偏爱低频信息。
- **对策**：映射至高维频率空间，强迫网络关注高频细节。



图：目标：修正过度平滑 (丢失波前)

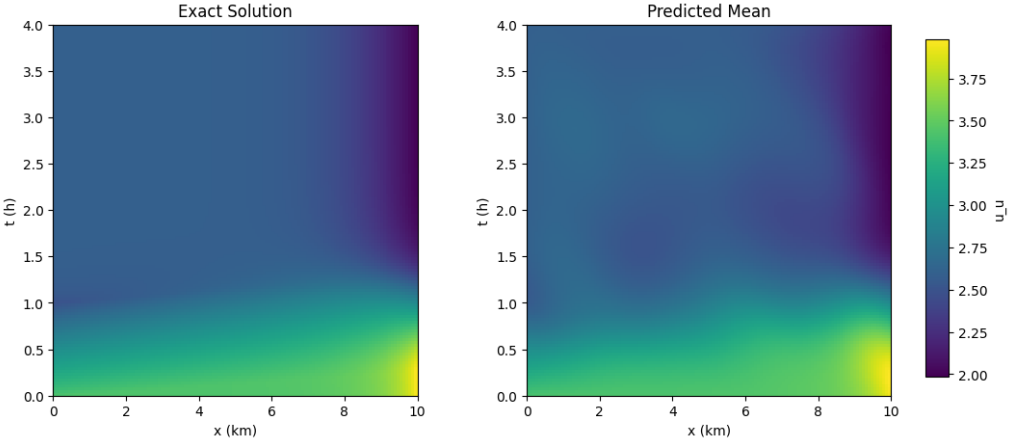
阶段五结果：精准预测 - 水深 (h)

完美重建流场，伪影消失，强噪声鲁棒性。



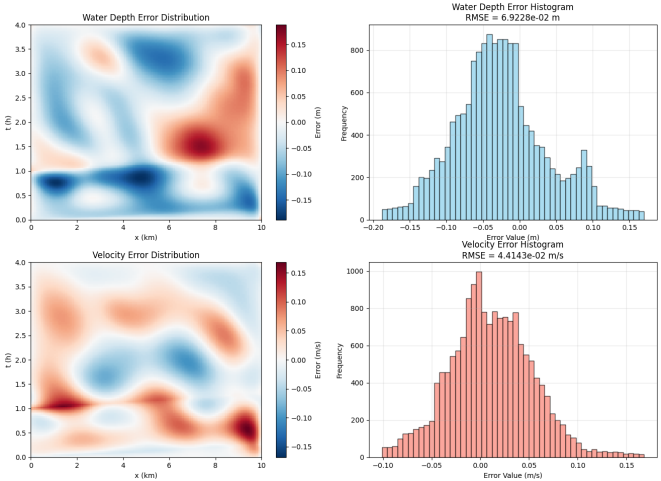
阶段五结果：精准预测 - 流速 (u)

流速场恢复清晰，细节保留完整。



阶段五结果：全域误差分析

全域误差显著降低，无明显结构性偏差。

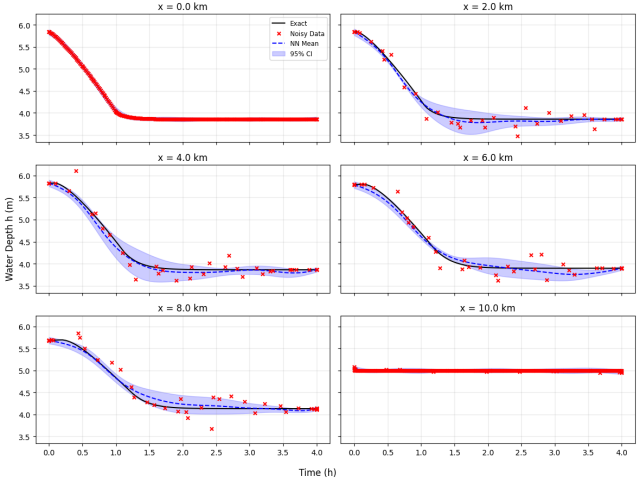


阶段五结果：训练收敛性 (Loss)

Loss 曲线平稳下降，无过拟合或震荡迹象。

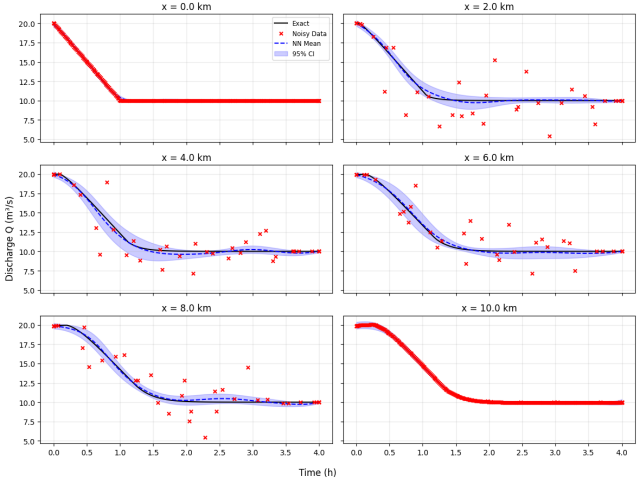
阶段五：不确定性量化 (水深 h)

95% CI: 蓝色阴影覆盖良好，不确定性随时间合理扩散。



阶段五：不确定性量化 (流量 Q)

准确捕捉流量减半动态，物理守恒性得到保持。



总结

- **当前结论**：BPINN 可以通过人工粘性、傅里叶特征嵌入等技术，有效应对噪声和频谱偏置问题，实现对含噪声简单流场的预测。
- **存在问题**：对于复杂流场（如渐变段、多段渠道联合），当前方法的可行性未经验证。
- **存在问题**：目前的实现还是对流场的复现，也即 $f(x,t)=[u,h]$，但我们事实上希望的是一个预测模型，即 $f(x,t|BC,IC)=[u,h]$，这需要进一步的研究工作。

特殊工况：无域内数据 (Boundary Data Only)

实验设置

- **数据**: 仅提供初始条件 (IC, $t = 0$) 和边界条件 (BC, $x = 0, L$) 的观测值。
- **约束**: 域内仅通过 PDE 残差 ($Res_{PDE} \approx 0$) 进行物理约束。

结果观测 - 水深 (h)

- 预测完全失败。
- 尽管边界条件被强制满足，但波形无法向域内传播。
- 网络坍缩为一个简单的平面解，无法捕捉行波动态。

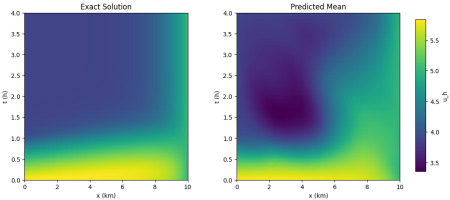


图: 水深预测 (仅边界数据)

仅边界数据：时序分析

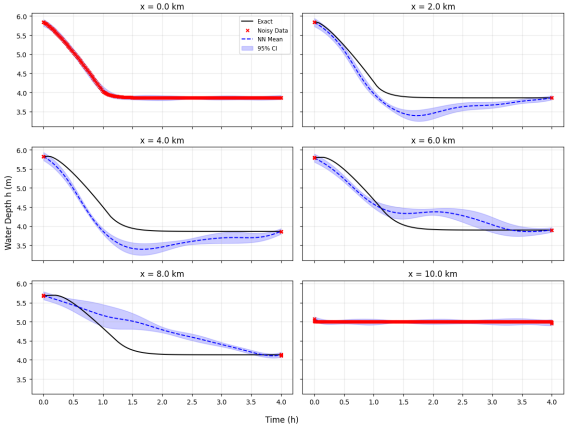


图: 水深 (h) 时序预测

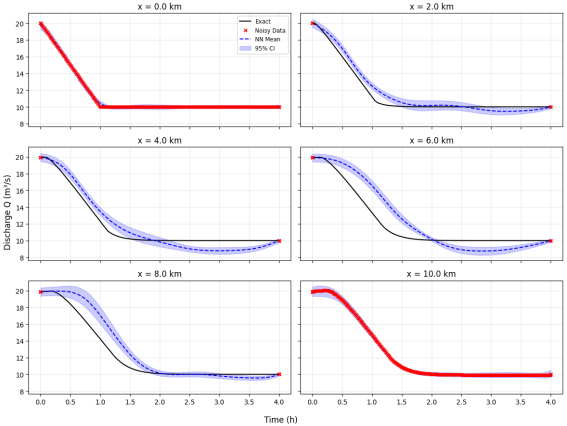


图: 流量 (Q) 时序预测

失败原因分析

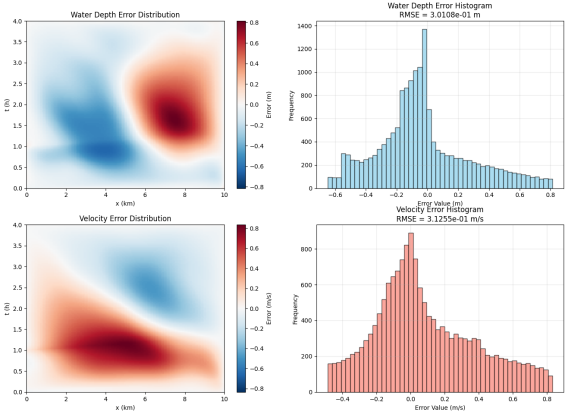
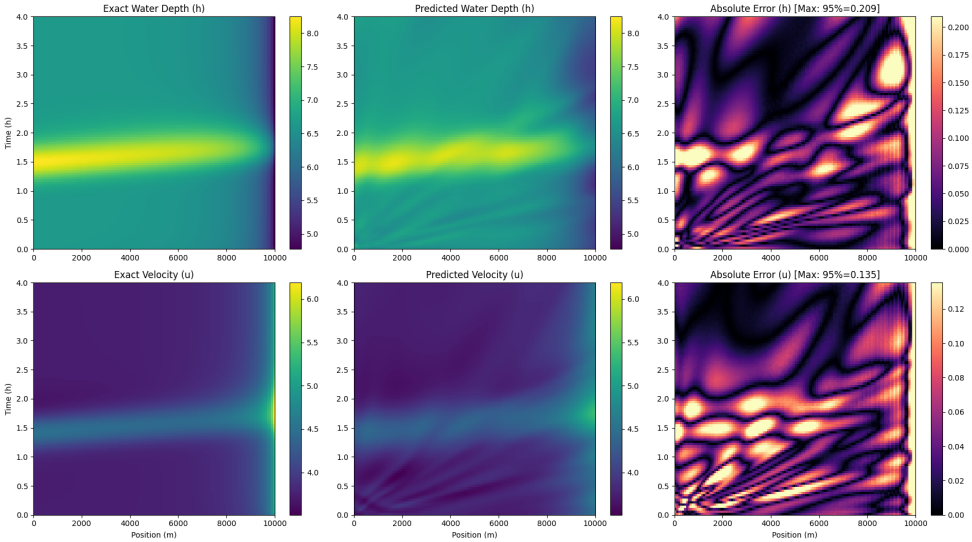


图: 全域误差分布

为何 PINN 无法仅靠边界求解双曲方程?

- **缺乏因果性**: PINN 的 Loss 是空间点上的平均求和。优化器“看不见”时间的先后顺序，无法沿着特征线将边界信息传递到内部。
- **传播困难**: 对于长时间积分问题，边界信息需要穿越整个时空域。梯度在反向传播中容易消失或被局部极小值阻断。
- **结论**: 对于圣维南这类双曲系统，仅靠 PDE 约束很难收敛，**稀疏的内部观测数据是重要的。**

算符学习结果


Exact Water Depth (h)
Predicted Water Depth (h)
Absolute Error (h) [Max: 95%=0.209]
Exact Velocity (u)
Predicted Velocity (u)
Absolute Error (u) [Max: 95%=0.135]
Time (h)
Position (m)