

استفاده از الگوریتم ژنتیک برای حل یک معادله ساده ریاضی

استفاده از الگوریتم ژنتیک برای حل یک معادله ساده ریاضی

این مطلب استفاده از الگوریتم ژنتیک را به شکلی ساده به همراه مثال برای افراد مبتدی شرح می دهد. ابتدا فلسفه اساسی و فلوچارت این الگوریتم شرح داده می شود و در مرحله بعد محاسبات قدم به قدم الگوریتم ژنتیک برای حل یک مسئله ساده تساوی ریاضیات بصورت کامل شرح داده می شود.

فلسفه پایه الگوریتم های ژنتیک

الگوریتم ژنتیک بوسیله goldberg توسعه و گسترش یافت که الهام گرفته از تئوری تکامل داروین است ، مبنای این نظریه هم بقای گونه ها بر اساس میزان ارزش آنها ست هرچه قوی تر احتمال بقا هم بیشتر . داروین همچنین معتقد است که بقای یک نسل می تواند بوسیله فرآیند تولید مثل انتخاب ، برش و جهش حفظ شود. بعدها از ایده داروین در خصوص تکامل برای بدست آوردن راه حل بهینه در مسائل محاسباتی استفاده شد که یکی از معروف ترین این الگوریتم ها ، الگوریتم ژنتیک است.

راه حلی که توسط الگوریتم های ژنتیک تولید می شود یک کروموزوم نامیده می شود و مجموعه از کروموزم ها ، جمعیت population نامیده می شوند. کروموزم ها از ژنها تشکیل شده اند و مقدار آن می تواند عددی ، دودویی ، سمبل ها یا کاراکتر ها باشد که وابسته به مسئله است که قصد حل نمودن آن را داریم. شایان ذکر است نحوه نمایش کروموزوم ها و مقادیر ژنها یکی از اساسی ترین قسمت های حل یک مسئله با استفاده از الگوریتم ژنتیک است و دیگر قسمت بسیار مهم در این الگوریتم ها تعریف تابع برازش است که در قسمت بعدی به آن پرداخته می شود.

ارزش و بهای هر کروموزوم توسط تابعی تحت نام برازش اندازه گیری می شود ، در واقع تابع برازش میزان مفید و مناسب بودن راه حل برای مسئله مورد نظر را اندازه گیری می نماید. پس از هر مرحله ای که الگوریتم ژنتیک تکرار شد برازش هر یک از راه حل های تولید شده (کروموزوم ها) اندازه گیری می شود. برخی از کروموزم ها درون جمعیت تحت پروسه ای به نام crossover با یکدیگر ترکیب می شوند و بدین صورت کروموزم های جدیدی که فرزند نامیده می شود تولید می کنند که ترکیب ژن این کروموزم های جدید ترکیبی از ژنهای والدین آنهاست. در یک نسل تعدادی از کروموزومها نیز در ژنهای خود دچار جهش mutation می شوند.

تعداد کروموزوم هایی که تحت تأثیر crossover و جهش mutation قرار میگیرند بوسیله نرخ برش و نرخ جهش کنترل می شوند. کروموزومی در جمعیت که برای نسل بعدی حفظ و نگهداری می شود بوسیله قانون تکامل داروین انتخاب می شود. کروموزمی که مقدار برازش بالاتری دارد از احتمال بالاتری برای انتخاب دوباره در نسل بعدی برخوردار است. بعد از چندین نسل ، مقدار کروموزم به یک مقدار خاص که بهترین راه حل برای مسئله است همگرا می شود.

مراحل الگوریتم ژنتیک

۱: در الگوریتم ژنتیک فرآیند به شرح ذیل است

قدم ۱ : تعداد کروموزوم ها ، نسل ها و نرخ جهش و نرخ برش معیین می شود

قدم ۲: بر اساس تعداد جمعیت کروموزوم - کروموزوم ایجاد می شود و ژنهای کروموزوم - با یک مقدار تصادفی مقدار دهی اولیه می شوند.

قدم ۳ : قدم های ۴-۷ را تا زمانی که تعداد نسل ها برآورده شود (تأمین شود) انجام می شود

قدم ۴: مقدار برازش کروموزوم بوسیله محاسبه تابع هدف objective function مورد ارزیابی قرار می گیرد

قدم ۵ : انتخاب کروموزوم

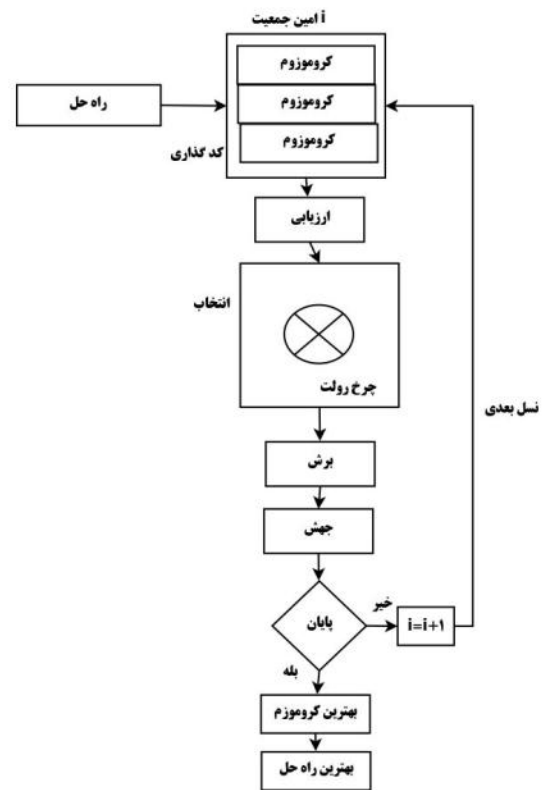
قدم ۵ : برش

قدم ۶: جهش

قدم ۷: کروموزم جدید (فرزند)

قدم ۸ : راه حل (بهترین کروموزوم ها)

فلوچارت الگوریتم را می توان در شکل زیر مشاهده نمود :



مثال عددی

در اینجا یک مثال از کاربردی که از الگوریتم ژنتیک برای حل نمودن یک مسئله ترکیبی استفاده می‌کند را توضیح می‌دهیم. فرض کنیم که تساوی زیر را داریم

$$a+db+3c+4d=30$$

از الگوریتم ژنتیک برای بدست آوردن مقادیر a, b, c, d تا برای حل تساوی ذکر شده استفاده می‌کنیم. در ابتدا باید تابع هدف را فرمول کنیم، برای این مسئله هدف مینیم نمودن مقدار تابع $f(x)$ جایی که

$$f(x) = ((a + 2b + 3c + 4d) - 30)$$

از آنجا که چهار متغیر در تساوی وجود دارد، یعنی a, b, c, d می‌توانیم کروموزوم‌ها را به صورت زیر شکل دهیم

| a | b | c | d |
|---|---|---|---|
|---|---|---|---|

برای افزودن سرعت محاسبات، می‌توانیم مقدار متغیر a, b, c, d را به اعداد صحیح بین ۰ تا ۳۰ محدود نماییم.

قدم اول: مقدار دهی اولیه

برای نمونه تعداد کروموزوم‌ها درون جمعیت را ۶ عدد تعریف می‌کنیم، سپس مقادیر تصادفی را برای ژنهای a, b, c و d که تشکیل‌دهنده کروموزوم مورد نظر ما هستند تولید می‌کنیم. پس همانطور که ملاحظه می‌شود ۶ کروموزومی را که در اختیار داریم به صورت زیر با اعداد تصادفی مقدار دهی می‌نماییم

$$\text{Chromosome}[1] = [a; b; c; d] = [12; 05; 23; 08]$$

$$\text{Chromosome}[2] = [a; b; c; d] = [02; 21; 18; 03]$$

$$\text{Chromosome}[3] = [a; b; c; d] = [10; 04; 13; 14]$$

$$\text{Chromosome}[4] = [a; b; c; d] = [20; 01; 10; 06]$$

$$\text{Chromosome}[5] = [a; b; c; d] = [01; 04; 13; 19]$$

$$\text{Chromosome}[6] = [a; b; c; d] = [20; 05; 17; 01]$$

قدم دوم: ارزیابی راه حل‌ها (کروموزوم‌ها)

در این مرحله مقدار تابع هدف برای هر کروموزومی که در مرحله مقدار دهی جمعیت اولیه تولید شده است محاسبه می‌شود

$$F_{\text{obj}}[1] = \text{Abs}((12 + 2 \times 05 + 3 \times 23 + 4 \times 08) - 30) = \text{Abs}((12 + 10 + 69 + 32) - 30) = \text{Abs}(123 - 30) = 93$$

$$F_{\text{obj}}[2] = \text{Abs}((02 + 2 \times 21 + 3 \times 18 + 4 \times 03) - 30) = \text{Abs}((02 + 42 + 54 + 12) - 30) = \text{Abs}(110 - 30) = 80$$

$$F_{\text{obj}}[3] = \text{Abs}((10 + 2 \times 04 + 3 \times 13 + 4 \times 14) - 30) = \text{Abs}((10 + 08 + 39 + 56) - 30) = \text{Abs}(113 - 30) = 83$$

$$F_{\text{obj}}[4] = \text{Abs}((20 + 2 \times 01 + 3 \times 10 + 4 \times 06) - 30) = \text{Abs}((20 + 02 + 30 + 24) - 30) = \text{Abs}(76 - 30) = 46$$

$$F_obj[\Delta] = Abs((01 + 2*04 + 3*13 + 4*19) - 30) = Abs((01 + 08 + 39 + 76) - 30) = Abs(124 - 30) = 94$$

$$F_obj[\epsilon] = Abs((20 + 2*05 + 3*17 + 4*01) - 30) = Abs((20 + 10 + 51 + 04) - 30) = Abs(85 - 30) = 55$$

مرحله سوم : انتخاب

با ارزشترین کروموزوم از شانس و احتمال بیشتری برای انتخاب شدن به منظور تولید نسل بعدی دارد. برای محاسبه احتمال برآزش باید برآزش هر کروموزوم محاسبه شود. برای جلوگیری از مشکل تقسیم بر صفر مقدار تابع هدفی که برای هر کروموزوم در مرحله قبل بدست آمد با عدد ۱ جمع می شود :

$$Fitness[1] = 1 / (1 + F_obj[1]) = 1 / 94 = 0.0106$$

$$Fitness[2] = 1 / (1 + F_obj[2]) = 1 / 81 = 0.0123$$

$$Fitness[3] = 1 / (1 + F_obj[3]) = 1 / 84 = 0.0119$$

$$Fitness[4] = 1 / (1 + F_obj[4]) = 1 / 47 = 0.0213$$

$$Fitness[\Delta] = 1 / (1 + F_obj[\Delta]) = 1 / 95 = 0.0105$$

$$Fitness[\epsilon] = 1 / (1 + F_obj[\epsilon]) = 1 / 56 = 0.0179$$

$$Total = 0.0106 + 0.0123 + 0.0119 + 0.0213 + 0.0105 + 0.0179 = 0.0845$$

احتمال مربوط به هر کروموزوم را با سیله فرمول $P[i] = Fitness[i] / Total$ محاسبه می نماییم :

$$P[1] = 0.0106 / 0.0845 = 0.1254$$

$$P[2] = 0.0123 / 0.0845 = 0.1456$$

$$P[3] = 0.0119 / 0.0845 = 0.1408$$

$$P[4] = 0.0213 / 0.0845 = 0.2521$$

$$P[\Delta] = 0.0105 / 0.0845 = 0.1243$$

$$P[\epsilon] = 0.0179 / 0.0845 = 0.2118$$

با توجه به احتمالاتی که در بالا محاسبه شده است مشاهده می وشد که کروموزوم ۴ بیشترین برآزش را دارا می باشد و بنابراین احتمال انتخاب شدن آن برای نسل بعدی کروموزوم ها بسیار بالاست. برای فرآیند انتخاب از روش چرخ رولت استفاده می کنیم که بدین منظور ابتدا باید مقادیر احتمال تجمعی (cumulative probability) را محاسبه کنیم:

$$C[1] = 0.1254$$

$$C[2] = 0.1254 + 0.1456 = 0.2710$$

$$C[3] = 0.1254 + 0.1456 + 0.1408 = 0.4118$$

$$C[4] = 0.1254 + 0.1456 + 0.1408 + 0.2521 = 0.6639$$

$$C[\Delta] = 0.1254 + 0.1456 + 0.1408 + 0.2521 + 0.1243 = 0.7882$$

$$C[\epsilon] = 0.1254 + 0.1456 + 0.1408 + 0.2521 + 0.1243 + 0.2118 = 1.0$$

با داشتن مقادیر احتمال تجمعی استفاده از چرخ رولت در فرآیند انتخاب امکان پذیر می گردد. فرآیند بعدی تولید یک عدد تصادفی در محدوده ۰ تا ۱ است که آن را R نامیم :

$$R[1] = 0.201, R[2] = 0.284, R[3] = 0.099, R[4] = 0.822, R[\Delta] = 0.398, R[\epsilon] = 0.501$$

اگر برای مثال عدد تصادفی $R[1]$ بزرگتر از $C[1]$ و کوچکتر از $C[2]$ بود در این صورت Chromosome [۲] به عنوان یک کروموزوم در جمعیت جدید برای تولید نسل بعدی مورد استفاده قرار می گیرد. با توجه به مقادیر نمونه های بالا خواهیم داشت :

$$NewChromosome[1] = Chromosome[2]$$

$$NewChromosome[2] = Chromosome[3]$$

$$NewChromosome[3] = Chromosome[1]$$

$$NewChromosome[4] = Chromosome[6]$$

$$NewChromosome[\Delta] = Chromosome[3]$$

$$NewChromosome[\epsilon] = Chromosome[4]$$

و کروموزوم ها در جمعیت به صورت زیر خواهند شد :

Chromosome[۱] = [۰۲;۲۱;۱۸;۰۳]

Chromosome[۲] = [۱۰;۰۴;۱۳;۱۴]

Chromosome[۳] = [۱۲;۰۵;۲۳;۰۸]

Chromosome[۴] = [۲۰;۰۵;۱۷;۰۱]

Chromosome[۵] = [۱۰;۰۴;۱۳;۱۴]

Chromosome[۶] = [۲۰;۰۱;۱۰;۰۶]

مرحله ۴ : برش (Crossover)

در این مثال از برش یک نقطه ای (one cut point) استفاده می نماییم. به صورت تصادفی یک محل در کروموزوم والدین انتخاب شده و سپس زیر کروموزوم هایی که از این نقطه بدست آمده اند در دو واحد تعویض می شود. کروموزوم های والدینی که با همدیگر جفت شده اند به صورت تصادفی انتخاب می شوند و تعداد کروموزوم هایی که جفت می شوند توسط پارامتری به نام نرخ برش (Crossover rate ρ_c) معین می شود. شبه کد فرآیند برش در ذیل آورده شده است :

begin

$k \leftarrow ۰$;

while($k < \text{population}$) do

$R[k] \leftarrow \text{random}(۰-۱)$;

if ($R[k] < \rho_c$) then

select Chromosome[k] as parent;

end;

$k = k + ۱$;

end;

end;

اگر $R[k] < \rho_c$ باشد کروموزوم K به عنوان یکی از والدین انتخاب می شود. فرض کنیم که نرخ برش را ۲۵٪ در نظر گرفته باشیم ، در این صورت کروموزوم شماره k در صورتی

برای برش انتخاب می شود اگر مقدار عدد تصادفی تولید شده برای کروموزوم k کمتر از ۰.۲۵ باشد. فرآیند را به صورت زیر ادامه می دهیم. ابتدا به تعداد جمعیتی که داریم عدد تصادفی R را تولید می نماییم:

$R[۱] = ۰.۱۹۱$, $R[۲] = ۰.۲۵۹$, $R[۳] = ۰.۷۶۰$, $R[۴] = ۰.۰۰۶$, $R[۵] = ۰.۱۵۹$, $R[۶] = ۰.۳۴۰$

با توجه به اعداد نمونه تصادفی که در بالا آورده شده است ، والدین Chromosome [۱], Chromosome [۴] و Chromosome [۵] برای عملگرد برش انتخاب می شوند. حالا با توجه این والدین ترکیب همه آنها را بدست می آوریم که بصورت زیر خواهد بود

Chromosome[۱] >< Chromosome[۴]

Chromosome[۴] >< Chromosome[۵]

Chromosome[۵] >< Chromosome[۱]

بعد از اتمام انتخاب کروموزوم ها برای برش ، فرآیند بعدی مشخص نمودن محل نقطه برش است. این کار با تولید یک عدد تصادفی بین عدد ۱ تا طول کروموزوم ۱- انجام می شود. در مثال ما عدد تصادفی باید بین ۱ تا ۳ باشد. بعد از اینکه نقطه برش را بدست آوردیم کروموزوم های والد در آن نقطه برش خورده و ژن های آنها تعویض می شود و یک فرزند جدید تولید می شود. برای مثال ما سه عدد تصادفی ذیل را تولید نمودیم

$C[۱] = ۱$, $C[۲] = ۱$, $C[۳] = ۲$

و کروموزم ها به صورت زیر تحت تاثیر عملگر برش قرار می گیرند. همانگونه که ملاحظه می شود ژنهای والدین به ترتیب در ژن های شماره ۱، شماره ۱ و شماره ۲ برش داده می شوند.

Chromosome[۱] = Chromosome[۱] >< Chromosome[۴]

= [۰۲;۲۱;۱۸;۰۳] >< [۲۰;۰۵;۱۷;۰۱]

= [۰۲;۰۵;۱۷;۰۱]

Chromosome[۴] = Chromosome[۴] >< Chromosome[۵]

= [۲۰;۰۵;۱۷;۰۱] >< [۱۰;۰۴;۱۳;۱۴]

= [۲۰;۰۴;۱۳;۱۴]

Chromosome[۵] = Chromosome[۵] >< Chromosome[۱]

= [۱۰;۰۴;۱۳;۱۴] >< [۰۲;۲۱;۱۸;۰۳]

= [۱۰;۰۴;۱۸;۰۳]

بعد از انجام اولین فرآیند برش در الگوریتم ژنتیک مورد نظرمان جمعین ما به صورت زیر خواهد بود:

Chromosome[۱] = [۰۲;۰۵;۱۷;۰۱]

Chromosome[۲] = [۱۰;۰۴;۱۳;۱۴]

Chromosome[۳] = [۱۲;۰۵;۲۳;۰۸]

Chromosome[۴] = [۲۰;۰۴;۱۳;۱۴]

Chromosome[۵] = [۱۰;۰۴;۱۸;۰۳]

Chromosome[۶] = [۲۰;۰۱;۱۰;۰۶]

مرحله ۵ جهش

تعداد کروموزوم هایی که جمعیت مورد جهش قرار می گیرند توسط پارامتر نرخ جهش مشخص می شوند. فرآیند جهش با تعویض تصادفی مقدار یک ژن که در یک موقعیت تصادفی قرار دارد با مقدار جدید انجام می شود. برای انجام این فرآیند مراحل که در ادامه گفته می شود را انجام می دهیم. ابتدا باید مجموع کل ژنهای موجود در جمعیت را محاسبه نماییم. که در مثال ما از فرمول زیر بدست می آید

تعداد کل ژنها = تعداد ژنهای هر کروموزوم * تعداد جمعیت = ۲۴ = ۶ * ۴

فرآیند جهش با تولید یک عدد تصادفی بین ۱ و تعداد کل ژنها (۱ تا ۲۴ در مثال ما) انجام می شود. اگر مقدار عدد تصادفی تولید شده کمتر از نرخ جهش (mutation_rate pm) باشد در این صورت موقعیت این ژن در کروموزوم نشان گذاری می شود. فرض کنیم که نرخ جهش را ۱۰٪ در نظر بگیریم ، که در این صورت انتظار داریم که ۱۰٪ (۰.۱) کل ژنها در جمعیت جهش داده شوند.

تعداد کل جهش ها = ۲۲.۳ = ۲۴ * ۰.۱

حالا اگر فرض کنیم که اعداد تصادفی که تولید شده است ۱۲ و ۱۸ باشند در این صورت کروموزم هایی که جهش دارند کروموزم شماره ۳ در ژن شماره ۴ آن و کروموزوم شماره ۵ در ژن شماره ۲ آن خواهند بود. مقدار ژنهای جهش یافته در نقطه جهش بوسیله اعداد تصادفی بین ۰ تا ۳۰ عوض می شوند. اگر اعداد تصادفی تولید شده ۲ و ۵ باشند سپس ترکیب کروموزوم ها بعد از جهش به صورت زیر است :

Chromosome[۱] = [۰۲;۰۵;۱۷;۰۱]

Chromosome[۲] = [۱۰;۰۴;۱۳;۱۴]

Chromosome[۳] = [۱۲;۰۵;۲۳;۰۲]

Chromosome[۴] = [۲۰;۰۴;۱۳;۱۴]

Chromosome[۵] = [۱۰;۰۵;۱۸;۰۳]

Chromosome[۶] = [۲۰;۰۱;۱۰;۰۶]

بعد از پایان فرآیند جهش یک تکرار یا یک نسل از الگوریتم ژنتیک داریم که باید این نسل جدید را مجدداً توسط تابع هدف مورد ارزیابی قرار دهیم که ارزیابی آن مانند آنچه قبلاً گفته شد انجام می شود :

Chromosome[1] = [0۲;0۵;۱۷;0۱]
 $F_obj[1] = Abs((0۲ + ۲*0۵ + ۳*۱۷ + ۴*0۱) - ۳0)$
 $= Abs((۲ + ۱0 + ۵۱ + ۴) - ۳0)$
 $= Abs(۶۷ - ۳0)$
 $= ۳۷$
Chromosome[۲] = [۱0;0۴;۱۳;۱۴]
 $F_obj[۲] = Abs((۱0 + ۲*0۴ + ۳*۱۳ + ۴*۱۴) - ۳0)$
 $= Abs((۱0 + ۸ + ۳۹ + ۵۶) - ۳0)$
 $= Abs(۱۰۷ - ۳0)$
 $= ۷۷$
Chromosome[۳] = [۱۲;0۵;۲۳;0۲]
 $F_obj[۳] = Abs((۱۲ + ۲*0۵ + ۳*۲۳ + ۴*0۲) - ۳0)$
 $= Abs((۱۲ + ۱0 + ۶۹ + ۸) - ۳0)$
 $= Abs(۸۷ - ۳0)$
 $= ۴۷$
Chromosome[۴] = [۲0;0۴;۱۳;۱۴]
 $F_obj[۴] = Abs((۲0 + ۲*0۴ + ۳*۱۳ + ۴*۱۴) - ۳0)$
 $= Abs((۲0 + ۸ + ۳۹ + ۵۶) - ۳0)$
 $= Abs(۱۲۳ - ۳0)$
 $= ۹۳$
Chromosome[۵] = [۱0;0۵;۱۸;0۳]
 $F_obj[۵] = Abs((۱0 + ۲*0۵ + ۳*۱۸ + ۴*0۳) - ۳0)$
 $= Abs((۱0 + ۱0 + ۵۴ + ۱۲) - ۳0)$
 $= Abs(۸۶ - ۳0)$
 $= ۵۶$
Chromosome[۶] = [۲0;0۱;۱0;0۶]
 $F_obj[۶] = Abs((۲0 + ۲*0۱ + ۳*۱0 + ۴*0۶) - ۳0)$
 $= Abs((۲0 + ۲ + ۳0 + ۲۴) - ۳0)$
 $= Abs(۷۶ - ۳0)$
 $= ۴۶$

همانگونه که از ارزیابی کروموزوم ها در جمعیت جدید مشاهده می شود تابع هدف کاهش یافته است که به این معناست که ما کروموزومها یا راه حل های بهتری نسبت هب کروموزومهای نسل قبل داریم. بنابراین کروموزومها برای تکرار بعدی به صورت زیر خواهد بود :

Chromosome[1] = [0۲;0۵;۱۷;0۱]
Chromosome[۲] = [۱0;0۴;۱۳;۱۴]
Chromosome[۳] = [۱۲;0۵;۲۳;0۲]
Chromosome[۴] = [۲0;0۴;۱۳;۱۴]
Chromosome[۵] = [۱0;0۵;۱۸;0۳]
Chromosome[۶] = [۲0;0۱;۱0;0۶]

کروموزم های جدید تحت تاثیر فرآیند مشابهی با آنچه با نسل قبلی کرموزمها انجام شد قرار می گیرند. مثل ارزیابی ، انتخاب ، برش و جهش و در پایان هر تکرار نیز نسل جدیدی از کروموزمها برای تکرار بعدی تولید میشود. این فرآیند تا رسیدن به تعداد تکرار های از پیش تعریف شده یا بدست آمدن یک شرط ادامه می یابد. در این مثال حدودا بعد از ۵۰ نسل بهترین کروموزم بدست می آید

Chromosome = [0۷; 0۵; 0۳; 0۱]

که بدان معناست که $a=۷, b=۵, c=۳, d=۱$ که اگر این اعداد را در معادله این که در ابتدا داشتیم قرار دهیم خواهیم داشت

$$a + ۲ b + ۳ c + ۴ d = ۳0$$

$$7 + (2 * 5) + (3 * 3) + (4 * 1) = 30$$

در این مثال ساده به خوبی کارایی و قدرت الگوریتم ژنتیک در حل مسائل بهینه سازی مشاهده می شود.