Université Abdelmalek Essaâdi/FST Tanger
LSI/Maths-Ing/Année 2020–2021

Correction TD1

Exercice1

1- f est définie de $\boldsymbol{R}^n$ dans $\boldsymbol{R}$ par $f(x) = c^T x + \gamma$; $c \in \boldsymbol{R}^n$ et $\gamma \in \boldsymbol{R}$:
On peut écrire $f(x) = (c_1 x_1 + ... + c_n x_n) + \gamma$. D'où

$$\forall x \in \boldsymbol{R}^n,\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = c_i,\ i = 1, ..., n.$$

Donc

$$\forall x \in \boldsymbol{R}^n,\ \nabla f(x) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c \text{ et } \nabla^2 f(x) = 0.$$

2- $F : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ définie par $F(x) = Lx + b$; L matrice $m \times n$ et $b \in \boldsymbol{R}^m$:
On obtient directement la Jacobienne de F :

$$\begin{aligned} J_F(x) &\overset{\text{Définition}}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{m1} & \cdots & L_{mn} \end{pmatrix} \\ &= L. \end{aligned}$$

3- f est définie de $\boldsymbol{R}^n$ dans $\boldsymbol{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + d^T x + \delta$; A est une matrice $n \times n$, $d \in \boldsymbol{R}^n$ et $\delta \in \boldsymbol{R}$:
Soit $h \in \boldsymbol{R}^n$. On a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \frac{1}{2}(x+h)^T A (x+h) + d^T (x+h) + \delta \\ &= \frac{1}{2}\left(x^T + h^T\right)(Ax + Ah) + d^T x + d^T h + \delta \\ &= \left(\frac{1}{2} x^T A x + d^T x + \delta\right) + \frac{1}{2} x^T A h + \frac{1}{2} h^T A x + d^T h + \frac{1}{2} h^T A h \\ &= f(x) + \frac{1}{2} x^T A h + \frac{1}{2} h^T A x + d^T h + \frac{1}{2} h^T A h. \end{aligned}$$

Puisque $h^T A x$ est un nombre réel, on peut écrire

$$h^T A x = \left(h^T A x\right)^T = x^T A^T h.$$

D'où

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x)+\frac{1}{2}x^T A h+\frac{1}{2}x^T A^T h+d^T h+\frac{1}{2}h^T A h \\
&= f(x)+\left(\frac{1}{2}x^T\left(A+A^T\right)+d^T\right)h+\frac{1}{2}h^T A h.
\end{aligned}$$

Avec $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ et $c=\max\limits_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|$, on a

$$\frac{1}{2}\left|h^T A h\right|\le\frac{nc}{2}\|h\|_2^2=\frac{nc}{2}\left(h_1^2+...+h_n^2\right).$$

On en déduit, posant $\varepsilon(h)=\dfrac{1}{2}\dfrac{h^T A h}{\|h\|_2}$, que

$$\frac{1}{2}h^T A h=\|h\|_2\,\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{\substack{h\ne0\\h\to0}}\varepsilon(h)=0.$$

On obtient donc

$$f(x+h)=f(x)+\nabla f(x)\,h+\|h\|_2\,\varepsilon(h),$$

où

$$\nabla f(x)=\frac{1}{2}x^T\left(A+A^T\right)+d^T.$$

Grâce à la question 1) ci-dessus, on a

$$\forall x,\ \nabla^2 f(x)=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right).$$

<u>Exercice2</u>

La fonction de Rosenbrock est définie par $f(x_1,x_2)=100\left(x_2-x_1^2\right)^2+(1-x_1)^2$.
Un calcul immédiat donne, $\forall(x_1,x_2)\in\boldsymbol{R}^2$,

$$\nabla f(x)=\begin{pmatrix}-400x_1\left(x_2-x_1^2\right)-2(1-x_1)\\ \\ 200\left(x_2-x_1^2\right)\end{pmatrix}$$

et

$$\nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix}-400\left(x_2-3x_1^2\right)+2 & -400x_1\\ \\ -400x_1 & 200\end{pmatrix}.$$

<u>Exercice3</u>

1. F est une forme quadratique:
a) Pour $F(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$, $(x_1,x_2)=x\in\boldsymbol{R}^2$, on a $F(x_1,x_2)=F(x)=x^T Ax$, où

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Donc F est une **forme quadratique**.

b) Pour $F(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2$, on a $F(x_1,x_2) = F(x) = x^T A x$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc F est une **forme quadratique**.
c) Pour $F(x_1,x_2) = (x_1+x_2)^2$, on a $F(x_1,x_2) = F(x) = x^T A x$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc F est une **forme quadratique**.
2- Nature de la forme F:
a) $\forall (x_1,x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $F(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 > 0$. Donc F est **définie positive**.
b) $\forall (x_1,x_1) \in \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $F(x_1,x_1) = x_1^2 - x_1^2 = 0$, $F(x_1,2x_1) = x_1^2 - 4x_1^2 = -3x_1^2 < 0$ et $F(2x_1,x_1) = 4x_1^2 - x_1^2 = 3x_1^2 > 0$. On en déduit que, dans ce cas, F **n'est ni semi-définie positive, ni semi-définie négative.**.
c) $\forall (x_1,x_1) \in \boldsymbol{R}^2$, $F(x_1,x_2) = (x_1+x_2)^2 \geq 0$. F est semi-définie positive (F n'est pas définie positive car $F(\alpha,-\alpha) = 0$, $\forall \alpha \in \boldsymbol{R}$).