TD n° 2–*Un corrigé*
Calcul des Probabilités

Exercice 1. A un concours se présentent deux fois plus d'hommes que de femmes. On tire une personne au hasard, soit X la variable aléatoire représentant le résultat : *"femme"*

1) Quelle loi suit la variable X ? Donner la loi de probabilité.

2) Calculer la moyenne et l'écart-type de X.

Corrigé.

1) Il s'agit d'une expérience de Bernoulli dont le succès est obtenir Femme comme résultat (noté 1*— et l'échec sera noté par* 0*) avec une probabilité* $p = 1/3$ *(le nombre des hommes est deux fois plus que les femmes). On note* $X \sim \mathcal{B}(p)$*.*
La loi de probabilité de X *:*

x_i	p_i
0	2/3
1	1/3

2) L'espérance $\mathbb{E}(X) = p$*, la variance* $\mathbb{V}(X) = pq$ *et l'écart-type* $\sigma = \sqrt{pq}$ *(avec* $q = 1 - p$*).*

Exercice 2. (*Utilisation de la table*)

(I) Supposons que la variable aléatoire X, désignant le *bénéfice quotidien d'une entreprise*, suit une loi *normale* de moyenne 75 et de variance 25.

1) Calculer la probabilité que le bénéfice soit compris entre 60 et 80.

2) Calculer la probabilité que le bénéfice soit supérieur à 82.

3) Calculer $\mathbb{P}(|X - 70| \leq 10)$.

4) Calculer $\mathbb{P}(X \geq 100)$.

5) Déterminer x tel que $\mathbb{P}(X \leq x) = 0.826$.

6) Déterminer y tel que $\mathbb{P}(|X - 75| \leq y) = 0.596$.

(II) Supposons que la variable aléatoire X suit une distribution de χ^2. Calculer a tel que : $\mathbb{P}(X > a) = 0.05$:

(a) pour 18 degrés de libertés,

(b) pour 55 degrés de libertés.

(III) Supposons que la variable aléatoire T suit une distribution de Student t_ν à ν degrés de libertés. Donner le quantile $qt_{\nu;1-\alpha/2}$ d'ordre $1 - \alpha/2$ sachant que :

(a) $\nu = 14$ degrés de libertés et $\alpha = 0.10$,

(b) $\nu = 10$ degrés de libertés et $\alpha = 0.05$.

Corrigé.

(I) $X \sim \mathcal{N}(75, 5^2)$*, c-à-d,* $Z = \frac{X-75}{5} \sim \mathcal{N}(0,1)$ *:*

1) $\mathbb{P}(60 \leq X \leq 80) = \mathbb{P}(60 < X < 80) = \mathbb{P}(\frac{60-75}{5} < Z < \frac{80-75}{5}) = \mathbb{P}(60 < X < 80) = \mathbb{P}(-3 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-3) = 0.8399948$ *(code.R :* `pnorm(1,0,1) - pnorm(-3,0,1)`*)* *avec* $\Phi(1) = 0.8413447$ *et* $\Phi(-3) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0.9986501 = 0.001349898 \simeq 0$
*(**Remarque :** pour toute valeur* a *supérieur à* 3*, on pourra –selon la précision cherchée– considérer que* $\Phi(a) \simeq 1$*).*

2) $\mathbb{P}(X > 82) = \mathbb{P}(Z > \frac{82?75}{5}) = \mathbb{P}(Z > 1,4) = 1 - \Phi(1,4) = 1 - 0,9192 = 0,0808$.

3) $\mathbb{P}(|X - 70| \leq 10) = \mathbb{P}(-10 \leq X - 70 \leq 10) = \mathbb{P}(60 \leq X \leq 80) =$ *1).*

4) $\mathbb{P}(X \geq 100) = \mathbb{P}(Z \geq \frac{100?75}{5}) = \mathbb{P}(Z \geq 5) = 1 - \Phi(5) \simeq 0$.

---

*. m.fihri@gmail.com

5) $\mathbb{P}(X \leq x) = 0.826 \Leftrightarrow \mathbb{P}(Z \leq \frac{x-75}{5}) = 0.826 \Leftrightarrow \frac{x-75}{5} = \Phi^{-1}(0.826) = 0.9384757 \simeq 0.94$
$\Leftrightarrow x = 79.69238 \simeq 79.7$ *(code.R : `5*qnorm(0.826,0,1)+75`)*

6) $\mathbb{P}(|X-75| \leq y) = 0.596 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\frac{|X-75|}{5} \leq \frac{y}{5}) = 0.596 \Leftrightarrow \mathbb{P}(|Z| \leq \frac{y}{5}) = 0.596$
$\Leftrightarrow 2\Phi(\frac{y}{5}) - 1 = 0.596 \Leftrightarrow \frac{y}{5} = \Phi^{-1}(0.798) \Leftrightarrow y = 5 \times \Phi^{-1}(0.798) = 4.172494$ *(code.R : `5*qnorm(0.798,0,1)`).*
Dans la table statistique, on peut remarquer que 0.798 *se trouve entre* 0.83 *et* 0.84*,* $(\Phi(0.83) = 0.7967$ *et* $\Phi(0.84) = 0.7995)$ *ce qui peut entrainer que* $\Phi(\frac{0.83+0.84}{2}) \simeq 0.798$ *et donc* $y \simeq 5 \times 0.835 \simeq 4.175$.

(II) $X \sim \chi^2(n)$*,* $n = 18; 55$*. Calculer* a *tel que :* $\mathbb{P}(X > a) = 0.05 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X < a) = 0.95$ *:*
(a) *pour* 18 *degrés de libertés :* `qchisq(0.95,18) = 28.8693`*;*
(b) *pour* 55 *degrés de libertés :* `qchisq(0.95,55) = 73.31149`*;*
Sur la table statistique, on utilise l'approximation de la loi de $\chi^2(n)$ *vers la loi normale* $\mathcal{N}(n, 2n)$.

(III) *Supposons que la variable aléatoire* $T \sim t_\nu$*. le quantile* $qt_{\nu;1-\alpha/2}$ *d'ordre* $1-\alpha/2$ *sachant que :*
(a) $\nu = 14$ *degrés de libertés et* $\alpha = 0.10$, $1-\alpha/2 = 0.95$ *:* `qt(0.95,14) = 1.76131`*;*
(b) $\nu = 10$ *degrés de libertés et* $\alpha = 0.05$, $1-\alpha/2 = 0.975$ *:* `qt(0.975,10) = 2.228139`*.*

Exercice 3.
Dans une promotion, on a répertorié les notes obtenues par 20 étudiants lors d'un examen de Statistique :

2	3	4.5	5	5	6	8.5	9	9.5	11
13	13	15	15.5	16.5	17	18	19	19.5	19.5

On admet que ses notes sont issues d'une population distribuée selon une loi *normale* :
1) Donner une estimation de sa moyenne et de sa variance.
2) Calculer la probabilité de valider le module.
3) Calculer la probabilité d'avoir un rattrapage dans le module.
4) Quelle est la probabilité de ne pas valider le module ?

Exercice 4. On prélève un échantillon de 100 personnes d'une population où un individu sur quatre est malade. On désigne par X la variable aléatoire représentant le nombre d'individus malades dans l'échantillon
1) Quelle est la loi de X ?
2) Calculer l'espérance et la variance de X, en déduire l'écart-type.
3) Montrer que l'on peut approximer la loi de X par une loi continue dont on précisera les paramètres.
4) Après cette approximation, calculer les probabilités : $\mathbb{P}(X \geq 25)$ et $\mathbb{P}(23 \leq X \leq 27)$.

Corrigé.
1) Il s'agit de 100 *réalisations indépendantes d'une expérience de Bernoulli. Donc* X *suit une loi binomiale* $X \sim \mathcal{B}(n = 100, p = 1/4)$ *(le succès est d'obtenir un individu malade avec sa probabilité vaut* $p = 1/4$*).*
2) L'espérance $\mathbb{E}(X) = np$*, la variance* $S_X^2 = \mathbb{V}(X) = npq$ *et l'écart-type* $S_X = \sqrt{npq}$ *(avec* $q = 1-p$*).*
3) Puisque $n > 30$ *et* $np > 5$*, alors la loi de* X *peut être approximativement une loi normale de paramètres* $\mu = np$ *et* $\sigma^2 = npq$ *:* $X \sim \mathcal{N}(np, npq) \Leftrightarrow Z = \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \sim \mathcal{N}(0,1)$
$np = 25$ *;* $npq = 18.75$
4) – $\mathbb{P}(X \geq 25) = \mathbb{P}(Z \geq 0) = 1 - \mathbb{P}(Z < 0) = 0.5$.
– $\mathbb{P}(23 \leq X \leq 27) = 2\Phi(0.46) - 1 = 0.3544838$.
(Si on passe par la correction de continuité, on trouve des résultats plus précis)

Exercice 5. (Rattrapage 2015/2016)

Les statistiques antérieures d'une compagnie d'assurances permettent de prévoir qu'elle recevra en moyenne 300 réclamations durant l'année en cours. Quelle est la probabilité que la compagnie reçoive plus de 350 réclamations pendant l'année en cours ?

Corrigé.

La variable X qui nous intéresse est le "nombre de réclamations reçues pendant une année". Il s'agit du nombre de réalisations d'un événement pendant un intervalle de temps donné. X suit donc une loi de Poisson. Le nombre moyen de réalisations dans une année est 300. Cette valeur moyenne est aussi le paramètre de la loi de Poisson. Donc X suit la loi $\mathcal{P}(300)$.

On cherche à déterminer $\mathbb{P}(X > 350)$. Il n'y a pas de table de la loi de Poisson pour cette valeur du paramètre. Il nous faut donc approcher X qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(300)$ par Y qui suit la loi normale de même espérance et de même variance, c'est-à-dire $\mathcal{N}(300, 300)$.

Ici aussi, on remplace une loi discrète par une loi continue.

On se ramène finalement à la loi normale centrée réduite. On pose $T = \frac{Y-300}{\sqrt{300}}$.

$$\mathbb{P}(X > 350) = \mathbb{P}(T > \frac{350-300}{\sqrt{300}}) = \mathbb{P}(T > 2.89) = 1 - \Phi(2.89) = 1 - 0.9981 = 0.0019$$

La compagnie d'assurances a donc environ 0.19% de chances de recevoir plus de 350 réclamations en une année.

Exercice 6. (Rattrapage 2015/2016)

Supposons que ***la durée*** T (en seconde) du dernier ***séisme au large des provinces Nador et Al-Hoceima*** est une variable aléatoire réelle ***continue***, de densité f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} ae^{-t/30} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Déterminer la ***constante*** a.
2. Calculer l'***espérance*** (moyenne), la ***variance*** de T et en déduire son ***écart-type***.
3. Déterminer la ***fonction de répartition*** de T.
4. Calculer $\mathbb{P}(T > 20)$.
5. Calculer $\mathbb{P}(T > 35 | T > 15)$. ***Conclure***.

Corrigé.

1. $a = \frac{1}{30}$ *Il s'agit d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/30$.*

2.

$$\mathbb{E}(T) = 30\ s$$
$$\mathbb{V}(T) = 30^2\ s^2$$
$$\sigma(T) = 30\ s$$

3.

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t/30} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

4. $\mathbb{P}(T > 20) = 1 - \mathbb{P}(T < 20) = 1 - F(20) = e^{-2/3}$.

5. *La distribution exponentielle est "**sans mémoire**", dans le sens où, pour $h > 0$, on a*

$$P(X > t + h | X > t) = P(X > h).$$

En effet si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors

$$P(X > t) = e^{-\lambda t},$$

donc

$$P(X > t+h | X > t) = \frac{P(X > t+h, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+h)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(X > h).$$

Ici $t + h = 35$ et $t = 15$ donc $h = 20$, solution question **4.**.