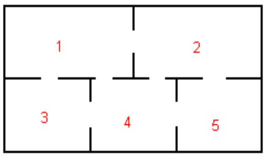
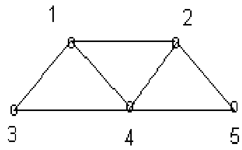
Correction
Série n°2 : Théorie des graphes
LSI-1 - A. GHADI

<u>Exercice n°1</u>

En numérotant les pièces et en matérialisant les portes par des arêtes, on traduit la situation par le graphe ci-dessous :



→



Se promener dans la maison en passant par chacune des ouvertures revient à chercher l'existence d'une chaîne eulérienne Seuls deux degré impairs (1 et 2) , les autres étant de degré pair, il est possible de trouver une chaîne eulérienne associée à ce graphe.

Pour la deuxième situation, il est nécessaire de créer un 6$^{\text{ème}}$ sommet nommé « extérieur » (E)

Il existe maintenant quatre degré impairs (1,2,4 et E) , les autres étant de degré pair, il est impossible de trouver une chaîne eulérienne associée à ce graphe.

<u>Exercice n°2</u>

Trouver des itinéraires qui permettent de parcourir une seule fois chaque route revient à trouver une chaîne eulérienne (voir un cycle eulérien) associée à ce graphe.

Tous les degrés paires, le théorème d'Euler assure l'existence d'un cycle eulérien (donc d'une chaîne eulérienne)

a) E-C-D-A-C-B-E est un exemple.

b) il n'existe pas de chaîne eulérienne partant de C et en terminant à D

c) A-D-C-E-B-C-A est un exemple.

<u>Exercice n°3</u>

En numérotant 1,2,3 les matrice associée à ce graphe est
(attention, le graphe étant orienté, la matrice n'est pas symétrique)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice nous permet d'affirmer qu'il existe :

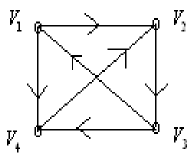
- 3 chaînes de longueur 4 entre A et B

- 1 chaîne de longueur 4 entre B et A

- 4 chaînes de longueur 4 entre B et B

<u>Exercice n°4</u>

1) Les arêtes étant les liaisons, un graphe représentant la situation est :



Il existe au moins un vol de chaque ville V_i vers chaque ville V_j , comportant au plus deux escales, car le diamètre du graphe est égal à 3
3) a) La matrice *M* associée à ce graphe est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) On calcule

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) On calcule :

$$M + M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice ne comportant pas de 0, et ne comportant que des entiers inférieurs ou égaux à 3, il existe toujours une chaîne de longueur au plus égale à 3 entre deux aéroports, c'est-à-dire un voyage comportant au plus deux escales. On retrouve le résultat précédent.

Exercice n°5

Le premier graphe a pour diamètre 2

Le deuxième graphe a pour diamètre 3

Le troisième graphe a pour diamètre 4

Le quatrième graphe a pour diamètre 6

Exercice n°6

1) Puisque seuls les degré impairs, ce graphe admet une chaîne eulérienne.

Il est possible que l'agent de sécurité passe une fois et une seule par tous les chemins de cette usine. Un exemple de trajet est EGCBECDEFGBAG

2) L'agent de sécurité ne peut pas revenir à son point de départ car le théorème d'Euler interdit l'existence d'un cycle eulérien, en raison des deux sommets E et G de degré impair.

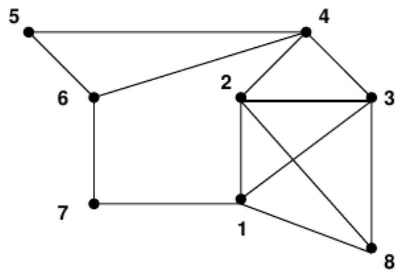
3) on le fera dans le chapitre suivant.

Exercice n°7

1. Les sommets D et F sont de degré impair et tous les autres ont un degré pair. Donc il n' existe pas de cycle eulérie, par contre il existe une chaîne eulérienne.
Exemple de chaîne eulérienne : F-E-G-H-I-J-E-D-F-B-A-C-B-D
2) On le fera dans le chapitre suivant.

Exercice n°8

1)



2) a) Le graphe n'est pas complet car les sommets 2 et 6 ne sont pas adjacents.

Le graphe est connexe car pour toute paire de sommets, il existe une chaîne les reliant.

b)

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	4	4	4	4	2	3	2	3

Puisque $\sum_{x \in V} deg(x) = 2|E|$ $\Rightarrow 2|E| = 26$ Donc $|E| = 13$ Il y a donc 13 arêtes.

3) a) La distance entre les sommets 1 et 5 est égale à 3. (la distance entre deux sommets est la plus courte longueur des chaînes qui les relient).

b) Le diamètre de ce graphe est 4 (Le diamètre d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets)

4) a) Il est possible de partir d'un pays et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une fois et une seule, que si il existe un cycle eulérien dans le graphe. Or il n'y a pas de cycle eulérien car il existe deux sommets de degré impair. Par conséquent, il n'est pas possible de partir d'un pays et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une fois et une seule.

b) Répondre à cette question revient à voir s'il existe une chaîne eulérienne dans ce graphe. Or il y a deux sommets de degré impair (le reste est de degré pair) ; donc il existe une chaîne eulérienne entre les sommets 6 et 8.