Цели работы:

а) освоение основных методов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ);

б) совершенствование навыков по алгоритмизации и программированию вычислительных задач.

Вариант задания:

14. Решить систему линейных уравнений $AX = B$ методом Гаусса, где

$$A = \begin{pmatrix} 1\,4\,2\,5 \\ 4\,4\,5\,3 \\ 1\,2\,6\,8 \\ 3\,7\,3\,2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Математическая часть:

В описании метода С – это Х из СЛАУ по варианту

Одним из наиболее широко используемых прямых методов является метод *последовательного исключения неизвестных*, или метод Гаусса. Согласно этому методу, исходная система линейных уравнений (1.7) преобразуется путем последовательного исключения неизвестных в эквивалентную систему уравнений, имеющую так называемый «треугольный» вид.

Последнее уравнение «треугольной» системы должно содержать лишь одно неизвестное (C_m), предпоследнее – два (C_m, $C_{m\text{-}1}$) и т.д. Решение полученной системы уравнений осуществляется последовательным («снизу вверх») определением C_m из последнего уравнения «треугольной» системы, $C_{m\text{-}1}$ из предпоследнего и т.д. Применительно к системе уравнений (1.7) преобразование к «треугольному» виду осуществляется за $(m-1)$ шагов.

Процедура описанного выше преобразования будет следующая.

- *На первом шаге* выделяется первое уравнение системы (1.7). Это уравнение не преобразуется, и оно объявляется *ведущим* уравнением.

Затем исключается неизвестное C_1 из второго уравнения. Для этого ведущее уравнение умножается на коэффициент $q_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ и вычитается из второго уравнения.

В результате получим следующее уравнение:

$$(a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{11})\, C_1 + (a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12})\, C_2 +$$

$$+ \ldots + (a_{2m} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1m})\, C_m = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 \ .$$

Аналогичную процедуру можно проделать с третьим уравнением системы (1.7).

Умножая ведущее уравнение на $q_{31}=\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ и вычитая результат умножения из третьего уравнения, получим эквивалентное уравнение

$$(a_{31}-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{11})C_1+(a_{32}-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12})C_2+$$
$$+\ldots+(a_{3m}-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{1m})C_m=b_3-\frac{a_{31}}{a_{11}}b_1 \ .$$

Очевидно, что коэффициент при C_1 также равен нулю.

Для исключения C_1 из m-го уравнения необходимо умножить ведущее уравнение на $q_{m1}=\dfrac{a_{m1}}{a_{11}}$ и вычесть результат из m-го уравнения.

В результате получим

$$(a_{m1}-\frac{a_{m1}}{a_{11}}a_{11})C_1+(a_{m2}-\frac{a_{m1}}{a_{11}}a_{12})C_2+$$
$$+\ldots+(a_{mm}-\frac{a_{m1}}{a_{11}}a_{1m})C_m=b_3-\frac{a_{m1}}{a_{11}}b_1 \ .$$

Вводя новые обозначения для коэффициентов

$$a_{lk}^{(1)}=a_{lk}-q_{l1}\,a_{1k},\ k=(2,\ ...,\ m),\ l=(2,\ldots,\ m)$$

и свободного члена

$$b_l^{(1)}=b_l-q_{l1}\,b_1,$$

можно представить систему уравнений (1.7) в виде

$$\begin{aligned}
&a_{11}\,C_1+a_{12}\,C_2+\ldots+a_{1m}\,C_m=b_1\\
&0C_1+a_{22}^{(1)}\,C_2+\ldots+a_{2m}^{(1)}\,C_m=b_2^{(1)}\\
&0C_1+a_{32}^{(1)}\,C_2+\ldots+a_{33}^{(1)}\,C_m=b_3^{(1)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&0C_1+a_{m2}^{(1)}\,C_2+\ldots+a_{mm}^{(1)}\,C_m=b_m^{(1)}.
\end{aligned} \qquad (2.1)$$

• *На втором шаге* ведущим объявляется второе уравнение системы (2.1) и исключается неизвестное C_2 из уравнений с номерами от третьего до последнего. Исключение неизвестного проводится по схеме, описанной на первом шаге. Для исключения C_2 из третьего уравнения системы (2.1) ведущее уравнение умножается на $q_{32} = \dfrac{a_{32}}{a_{22}}$, и результат умножения вычитается из третьего уравнения. Результирующий коэффициент при C_2 будет равен нулю.

Аналогично первому шагу введем новые обозначения для коэффициентов

$$a_{lk}^{(2)} = a_{lk} - q_{l2}\, a_{2k},\ k = (2, ..., m),\ l = (2, ..., m)$$

и свободного члена

$$b_l^{(2)} = b_l - q_{l2}\, b_2 \, .$$

В результате второго шага (исключения неизвестного C_2) будет получена система уравнений, также эквивалентная исходной системе (1.7):

$$\begin{array}{l}
a_{11}C_1 + a_{12}C_2 + a_{13}C_3 + \ldots + \ a_{1m}C_m = b_1 \\
0C_1 + a_{22}^{(1)}C_2 + a_{23}^{(1)}C_3 + \ldots + a_{2m}^{(1)}C_m = b_2^{(1)} \\
0C_1 + \ 0C_2 \ + a_{33}^{(2)}C_3 + \ldots + a_{3m}^{(2)}C_m = b_3^{(2)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0C_1 + \ 0C_2 \ + a_{m3}^{(2)}C_3 + \ldots + a_{mm}^{(2)}C_m \ = b_m^{(2)}.
\end{array} \qquad (2.2)$$

Отметим, что неизвестное C_1 входит только в первое уравнение, а неизвестное C_2 — в первое и второе уравнения.

- На (m–1) шаге исключается неизвестное $C_{m\text{-}1}$ из последнего m-го уравнения, и в результате система уравнений принимает окончательный «треугольный» вид.

Определим обобщенные формулы для расчета коэффициентов системы в процессе прямого хода метода Гаусса. На i–м шаге неизвестное C_i исключается из всех уравнений с номерами l, где $i + 1 \le l \le m$, при этом ведущее уравнение (с номером i) умножается на

$q_{li} = a_{li}^{(i-1)} / a_{ii}^{(i-1)}$, и результат умножения вычитается из l-го уравнения. Новые значения коэффициентов (в уравнении с номером l) при неизвестных C_k, ($i + 1 \le k \le m$) равны

$$a_{lk}^{(i)} = a_{lk}^{(i-1)} - q_{li}\, a_{ik}^{(i-1)}, \qquad (2.3)$$

новое значение свободного члена

$$b_l^{(i)} = b_l^{(i-1)} - q_{li}\, b_l^{(i-1)}. \qquad (2.4)$$

Система уравнений (2.5) эквивалентна исходной системе уравнений (1.7).

$$\begin{aligned}
&a_{11} C_1 + a_{12} C_2 + a_{13} C_3 + \ldots + a_{1m} C_m = b_1\\
&0C_1 + a_{22}^{(1)} C_2 + a_{23}^{(1)} C_3 + \ldots + a_{2m}^{(1)} C_m = b_2^{(1)}\\
&0C_1 + 0C_2 + a_{33}^{(2)} C_3 + \ldots + a_{3m}^{(2)} C_m = b_3^{(2)}\\
&0C_1 + 0C_2 + 0C_3 + \ldots + a_{mm}^{(m-1)} C_m = b_m^{(m-1)}.
\end{aligned} \qquad (2.5)$$

Приведенный процесс последовательного исключения неизвестных носит название *прямого хода* метода Гаусса.

Решение треугольной системы уравнений (2.5) носит название *обратного хода* метода Гаусса и заключается в последовательном определении всех неизвестных, начиная с последнего C_m. Действительно, из последнего уравнения системы (2.5) следует, что

$$C_m = b_m^{(m-1)} \big/ a_{mm}^{(m-1)} .$$

Значение $C_{m\text{-}1}$ находится при решении предпоследнего уравнения

$$a_{m-1,\,m-1}^{(m-2)}\, C_{m-1} + a_{m-1,m}^{(m-2)}\, C_m = b_{m-1}^{(m-2)}.$$

Так как C_m уже определено, то

$$C_{m-1} = \frac{\left(b_{m-1}^{(m-2)} - a_{m-1,\,m}^{(m-2)}\, C_m\right)}{a_{m-1,\,m-1}^{(m-2)}} .$$

Приведенная процедура применяется последовательно ко всем уравнениям, включая и первое, из которого определяется

$$C_1 = \frac{\left(b_1 - a_{12}\, C_2 - \ldots - a_{1m}\, C_m\right)}{a_{11}} .$$

Обобщенная формула вычисления C_i имеет вид

$$C_i = \frac{\left(b^{i-1} - a_{i,\,i+1}^{(i-1)}\, C_{i+1} - \ldots - a_{i,\,m}^{i-1}\, C_m\right)}{a_{i,\,i}^{(i-1)}}. \qquad (2.6)$$

В процессе прямого хода метода Гаусса может оказаться, что ко- эффициент a_{ii}(i-1) ведущего уравнения равен нулю. тогда исключить C_i из остальных уравнений рассмотренным методом нельзя. однако уравнения системы можно поменять местами и объявить ведущим то уравнение, у которого коэффициент при неизвестном C_i отличен от нуля. отметим, что системы, отличающиеся лишь взаимным расположением образующих их уравнений, являются эквивалент- ными. Перестановка уравнений не только допустима, но часто и по- лезна для уменьшения погрешности арифметических вычислений. для уменьшения погрешности вычислений в качестве ведущего обычно выбирается уравнение с максимальным по модулю коэффи- циентом при C_i. Это уравнение и уравнение с номером i меняют ме- стами, и процесс исключения продолжается обычным образом. По- иск максимального по модулю коэффициента при C_i носит название *определение ведущего элемента*.

Аналитические расчеты:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

Перепишем систему уравнений в матричном виде и решим его методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & 3 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

от 2 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 4; от 3 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 1; от 4 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -12 & -3 & -17 & -4 \\ 0 & -2 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & -13 & -2 \end{array}\right)$$

2-ую строку делим на -12

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0.25 & \frac{17}{12} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & -13 & -2 \end{array}\right)$$

от 1 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 4; к 3 строке добавляем 2 строку, умноженную на 2; к 4 строке добавляем 2 строку, умноженную на 5

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0.25 & \frac{17}{12} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 4.5 & \frac{35}{6} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -1.75 & -\frac{71}{12} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

3-ую строку делим на 4.5

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0.25 & \frac{17}{12} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{35}{27} & -\frac{8}{27} \\ 0 & 0 & -1.75 & -\frac{71}{12} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

от 1 строки отнимаем 3 строку, умноженную на 1; от 2 строки отнимаем 3 строку, умноженную на 0.25; к 4 строке добавляем 3 строку, умноженную на 1.75

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{53}{27} & \frac{53}{27} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{59}{54} & \frac{11}{27} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{35}{27} & -\frac{8}{27} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{197}{54} & -\frac{23}{27} \end{array}\right)$$

4-ую строку делим на $-\frac{197}{54}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{53}{27} & \frac{53}{27} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{59}{54} & \frac{11}{27} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{35}{27} & -\frac{8}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{46}{197} \end{array}\right)$$

к 1 строке добавляем 4 строку, умноженную на $\frac{53}{27}$; от 2 строки отнимаем 4 строку, умноженную на $\frac{59}{54}$; от 3 строки отнимаем 4 строку, умноженную на $\frac{35}{27}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{477}{197} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{30}{197} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{118}{197} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{46}{197} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{477}{197} \\ x_2 = \frac{30}{197} \\ x_3 = -\frac{118}{197} \\ x_4 = \frac{46}{197} \end{cases}$$

Сделаем проверку. Подставим полученное решение в уравнения из системы и выполним вычисления:

$$\frac{477}{197} + 4\cdot\frac{30}{197} + 2\cdot\left(-\frac{118}{197}\right) + 5\cdot\frac{46}{197} = \frac{477}{197} + \frac{120}{197} - \frac{236}{197} + \frac{230}{197} = 3$$

$$4\cdot\frac{477}{197} + 4\cdot\frac{30}{197} + 5\cdot\left(-\frac{118}{197}\right) + 3\cdot\frac{46}{197} = \frac{1908}{197} + \frac{120}{197} - \frac{590}{197} + \frac{138}{197} = 8$$

$$\frac{477}{197} + 2\cdot\frac{30}{197} + 6\cdot\left(-\frac{118}{197}\right) + 8\cdot\frac{46}{197} = \frac{477}{197} + \frac{60}{197} - \frac{708}{197} + \frac{368}{197} = 1$$

$$3\cdot\frac{477}{197} + 7\cdot\frac{30}{197} + 3\cdot\left(-\frac{118}{197}\right) + 2\cdot\frac{46}{197} = \frac{1431}{197} + \frac{210}{197} - \frac{354}{197} + \frac{92}{197} = 7$$

Проверка выполнена успешно.

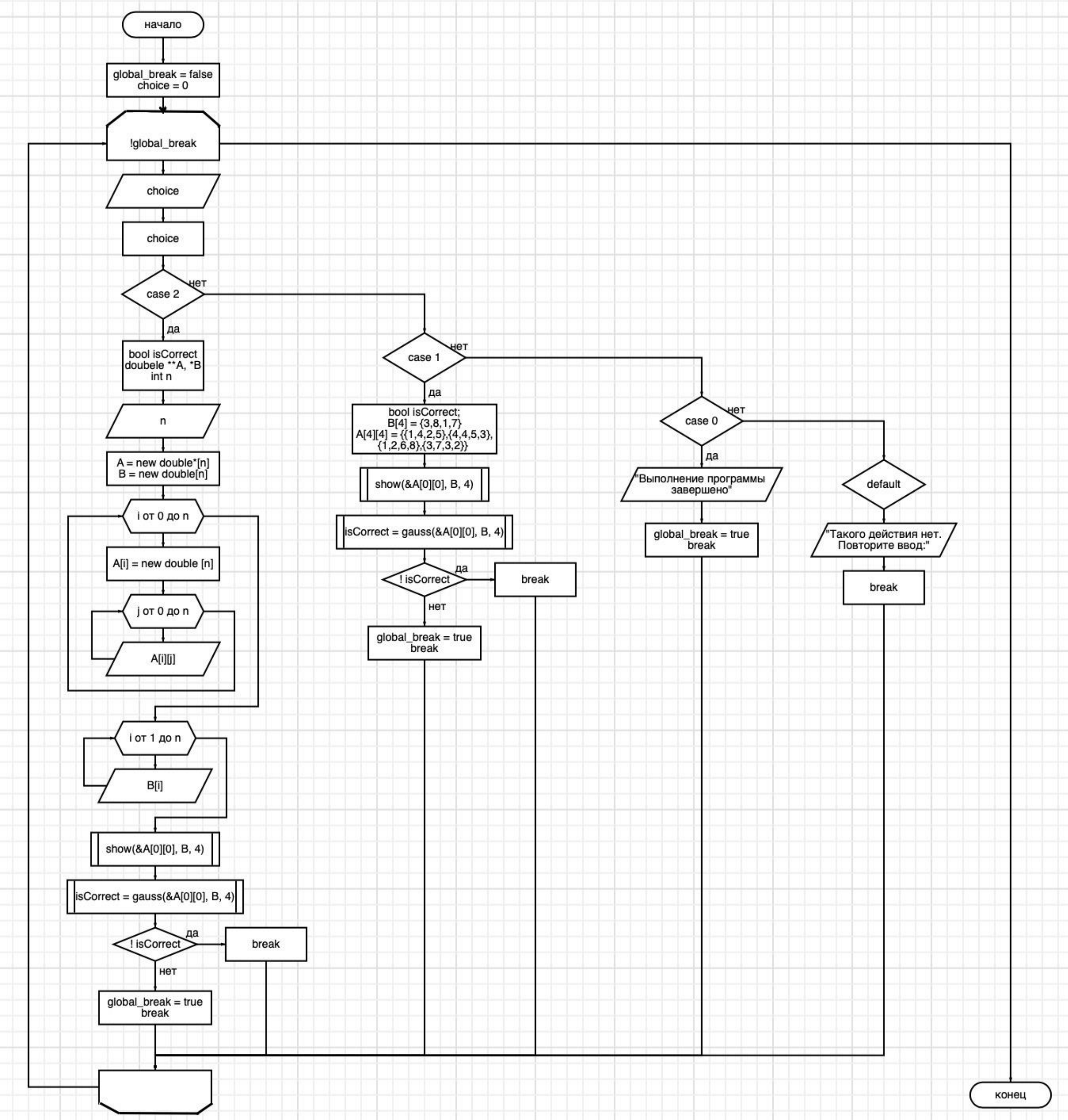
Ответ:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{477}{197} \\ x_2 = \frac{30}{197} \\ x_3 = -\frac{118}{197} \\ x_4 = \frac{46}{197} \end{cases}$$

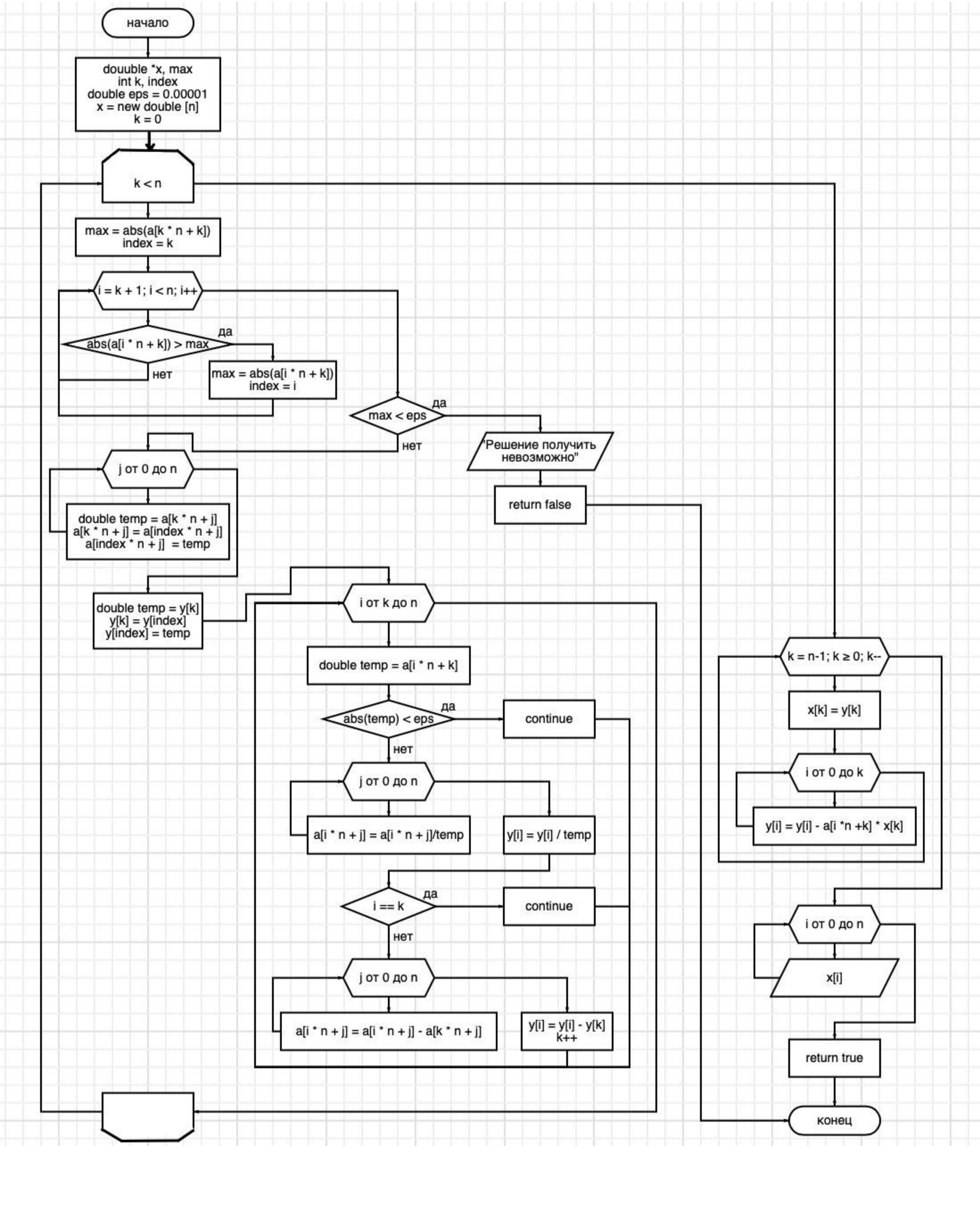
x1 ≈ 2,42132;
x2 ≈ 0,15228;
x3 ≈ -0,59898;
x4 ≈ 0,2335

Блок схемы:

main()

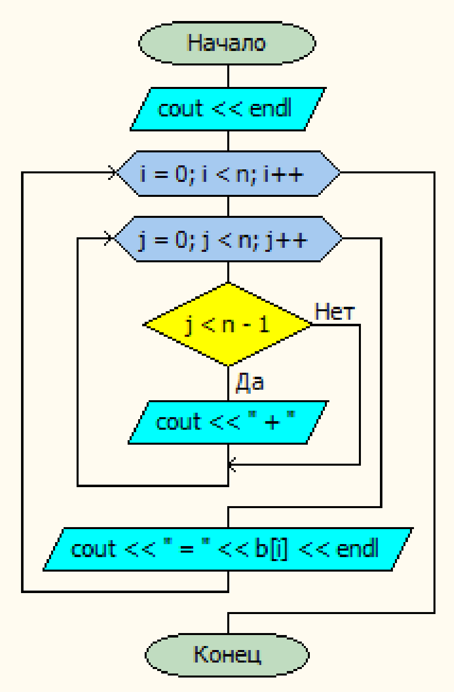


gauss():



начало
douuble *x, max
int k, index
double eps = 0.00001
x = new double [n]
k = 0
k < n
max = abs(a[k * n + k])
index = k
i = k + 1; i < n; i++
abs(a[i * n + k]) > max
да
нет
max = abs(a[i * n + k])
index = i
max < eps
да
нет
"Решение получить невозможно"
return false
j от 0 до n
double temp = a[k * n + j]
a[k * n + j] = a[index * n + j]
a[index * n + j] = temp
double temp = y[k]
y[k] = y[index]
y[index] = temp
i от k до n
double temp = a[i * n + k]
abs(temp) < eps
да
нет
continue
j от 0 до n
a[i * n + j] = a[i * n + j]/temp
y[i] = y[i] / temp
i == k
да
нет
continue
j от 0 до n
a[i * n + j] = a[i * n + j] - a[k * n + j]
y[i] = y[i] - y[k]
k++
k = n-1; k ≥ 0; k--
x[k] = y[k]
i от 0 до k
y[i] = y[i] - a[i *n +k] * x[k]
i от 0 до n
x[i]
return true
конец

sysout():



Листинг:

```
#include <iostream>

using namespace std;

// Вывод системы уравнений
void sysout(double a[], double* b, size_t n) {
    cout << endl;

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            cout << a[i * n + j] << " * x" << j;
            if (j < n - 1)
            cout << " + ";
        }
        cout << " = " << b[i] << endl;
    }
    return;
}

bool gauss(double a[], double *y, size_t n) {
    double *x, max;
    int k, index;
    const double eps = 0.00001;  // точность
    x = new double[n];
    k = 0;

    while (k < n) {
      // Поиск строки с максимальным a[i][k]
      max = abs(a[k * n + k]);
      index = k;

      for (int i = k + 1; i < n; i++) {
          if (abs(a[i * n + k]) > max) {
              max = abs(a[i * n + k]);
              index = i;
          }
      }
```

```
        // Перестановка строк
        if (max < eps) {
          // нет ненулевых диагональных элементов
          cout << "\nРешение получить невозможно из-за нулевого столбца ";
          cout << index << " матрицы A" << endl;
          return false;
        }

        for (int j = 0; j < n; j++) {
            double temp = a[k * n + j];
            a[k * n + j] = a[index * n + j];
            a[index * n + j] = temp;
        }

        double temp = y[k];
        y[k] = y[index];
        y[index] = temp;

        // Нормализация уравнений
        for (int i = k; i < n; i++) {
            double temp = a[i * n + k];

            if (abs(temp) < eps) continue; // для нулевого коэффициента пропустить

            for (int j = 0; j < n; j++)
            a[i * n + j] = a[i * n + j] / temp;

            y[i] = y[i] / temp;

            if (i == k)  continue; // уравнение не вычитать само из себя

            for (int j = 0; j < n; j++)
                a[i * n + j] = a[i * n + j] - a[k * n + j];

            y[i] = y[i] - y[k];
        }
        k++;
    }

  // обратная подстановка
    for (k = n - 1; k >= 0; k--) {
        x[k] = y[k];

        for (int i = 0; i < k; i++)
            y[i] = y[i] - a[i * n + k] * x[k];
    }

    for (int i = 0; i < n; i++)
        cout << "x[" << i << "] = " << x[i] << endl;

    cout << endl;

    return true;
}

int main() {
    bool global_break = false;
    int choice = 0;

    while (!global_break) {
        cout << "1 - использовать параметры по умолчанию\n2 - ввести параметры вручную\n0 - завершить
выполнение программы\n";
        cout << "\nВаш выбор: ";
        cin >> choice;

        switch (choice){
            case 0:
                global_break = true;
                cout << "\nВыполнение программы завершено\n";
```

```
            break;

        case 1: {
            double B[4] = {3, 8, 1, 7};

            double A[4][4] = {{1, 4, 2, 5},
                              {4, 4, 5, 3},
                              {1, 2, 6, 8},
                              {3, 7, 3, 2}};

            sysout(&A[0][0], B, 4);
            if ( ! gauss(&A[0][0], B, 4) ) {
                cout << "\nПовторите ввод:\n";
                break;
            }

            global_break = true;
            break;
        }
        case 2:
            double **A, *B;
            int n;
            cout << "\nВведите количество уравнений: ";
            cin >> n;
            cout << endl;

            A = new double *[n];
            B = new double [n];

            for (int i = 0; i < n; i++) {
                A[i] = new double[n];
                for (int j = 0; j < n; j++) {
                    cout << "A[" << i << "][" << j << "] = ";
                    cin >> A[i][j];
                }
            }
            cout << endl;

            for (int i = 0; i < n; i++) {
                cout << "B[" << i << "] = ";
                cin >> B[i];
            }

            sysout(&A[0][0], B, n);

            if ( ! gauss(&A[0][0], B, 4) ) {
                cout << "\nПовторите ввод:\n";
                break;
            }

            global_break = true;
            break;

        default:
            cout << "\nТакого действия нет. Повторите ввод:\n\n";
            break;
        }
    }
    return 0;
}
```

Результат работы программы:

1 – используются данные из аналитических расчетов:

```
1 - использовать параметры по умолчанию
2 - ввести параметры вручную
0 - завершить выполнение программы

Ваш выбор: 1

1 * x0 + 4 * x1 + 2 * x2 + 5 * x3 = 3
4 * x0 + 4 * x1 + 5 * x2 + 3 * x3 = 8
1 * x0 + 2 * x1 + 6 * x2 + 8 * x3 = 1
3 * x0 + 7 * x1 + 3 * x2 + 2 * x3 = 7

x[0] = 2.42132
x[1] = 0.152284
x[2] = -0.598985
x[3] = 0.233503
```

Рис1.Данные из аналит.расчетов

2 – ручной ввод; в программе реализована проверка на пустой столбец

```
1 - использовать параметры по умолчанию
2 - ввести параметры вручную
0 - завершить выполнение программы

Ваш выбор: 2

Введите количество уравнений: 2

A[0][0] = 0
A[0][1] = 1
A[1][0] = 0
A[1][1] = 2

B[0] = 3
B[1] = 4

0 * x0 + 1 * x1 = 3
0 * x0 + 2 * x1 = 4


Решение получить невозможно из-за нулевого столбца 0 матрицы А

Повторите ввод:
1 - использовать параметры по умолчанию
2 - ввести параметры вручную
0 - завершить выполнение программы

Ваш выбор: |
```

Рис2.Ручной ввод; В матрице есть нулевой столбец

```
1 – использовать параметры по умолчанию
2 – ввести параметры вручную
0 – завершить выполнение программы

Ваш выбор: 2

Введите количество уравнений: 4

A[0][0] = 1
A[0][1] = 4
A[0][2] = 2
A[0][3] = 5
A[1][0] = 4
A[1][1] = 4
A[1][2] = 5
A[1][3] = 3
A[2][0] = 1
A[2][1] = 2
A[2][2] = 6
A[2][3] = 8
A[3][0] = 3
A[3][1] = 7
A[3][2] = 3
A[3][3] = 2

B[0] = 3
B[1] = 8
B[2] = 1
B[3] = 7

1 * x0 + 4 * x1 + 2 * x2 + 5 * x3 = 3
4 * x0 + 4 * x1 + 5 * x2 + 3 * x3 = 8
1 * x0 + 2 * x1 + 6 * x2 + 8 * x3 = 1
3 * x0 + 7 * x1 + 3 * x2 + 2 * x3 = 7

x[0] = 2.42132
x[1] = 0.152284
x[2] = –0.598985
x[3] = 0.233503
```

Рис3. Корректный ручной ввод

Сравнение результатов программных и аналитических расчетов:

Результат аналитических расчетов:
x1 ≈ 2,42132;
x2 ≈ 0,15228;
x3 ≈ -0,59898;
x4 ≈ 0,2335

Результат программных расчетов:
x[0] = 2.42132
x[1] = 0.152284
x[2] = -0.598985
x[3] = 0.233503

Итог: результаты совпадают.

Вывод:

Я освоил метод Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений.