Прикладные модели оптимизации

Практическая работа № 3

Задание

13		$x_1 + 6x_2 \to \min$

№	ФИО	Задание
		$x_1 + 2x_2 \leq 10$ $3x_1 - 3x_2 \geq 6$ $2x_1 + 3x_2 \leq 6$ $3x_1 + x_2 \geq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$

1. Найти оптимальное решение задачи линейного программирования с использованием симплекс-метода в Excel и на Python. Привести графическую
интерпретацию результатов решения задачи.
2. (Творческое) Придумать ситуацию, для которой подойдет математическая модель (написать содержательную постановку задачи).

Условие:
$x1 + 6x2 \to \min$

$x1 + 2x2 \leq 10$

$3x1 - 3x2 \geq 6$

$2x1 + 3x2 \leq 6$

$3x1 + x2 \geq 4$

$x1, x2 \geq 0$

1-я часть задания:

Решение вручную с использованием симплекс-метода в Excel:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Basis	x1	x2	s1	s2	s3	s4	RHS	Ratio
2	s1	1	2	1	0	0	0	10	
3	s2	3	-3	0	1	0	0	6	
4	s3	2	3	0	0	1	0	6	
5	s4	3	1	0	0	0	1	4	
6	z	-1	-6	0	0	0	0		
7									

Выполнение симплекс-метода:
Определение вводимой переменной: это переменная с наибольшим отрицательным коэффициентом в строке z. В нашем случае это x2.
Вычисление отношения для каждой строки: разделим RHS на коэффициент в столбце вводимой переменной (только если коэффициент положительный). Запишем результаты в столбец "Ratio".
Определение исключаемой переменной: это строка с минимальным положительным значением в столбце "Ratio".
Использование метода Гаусса-Жордана для пересчета таблицы так, чтобы ведущая ячейка стала равной 1, а все другие значения в ведущем столбце стали равными 0.
Нужно повторять шаги 1-4 до тех пор, пока все коэффициенты в строке z не станут неотрицательными.

Шаг 1: Определение вводимой переменной.
Ищем наибольший отрицательный коэффициент в строке z. В нашем случае это x2 с коэффициентом -6.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Basis	x1	x2	s1	s2	s3	s4	RHS	Ratio
2	s1	1	2	1	0	0	0	10	
3	s2	3	-3	0	1	0	0	6	
4	s3	2	3	0	0	1	0	6	
5	s4	3	1	0	0	0	1	4	
6	z	-1	-6	0	0	0	0		
7									
8									

Шаг 2: Вычисление отношения для каждой строки.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Basis	x1	x2	s1	s2	s3	s4	RHS	Ratio
2	s1	1	2	1	0	0	0	10	=H2/C2
3	s2	3	-3	0	1	0	0	6	
4	s3	2	3	0	0	1	0	6	
5	s4	3	1	0	0	0	1	4	
6	z	-1	-6	0	0	0	0		
7									
8									

Получаем:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Basis	x1	x2	s1	s2	s3	s4	RHS	Ratio	
2	s1	1	2	1	0	0	0	10	5	
3	s2	3	-3	0	1	0	0	6	N/A	-2
4	s3	2	3	0	0	1	0	6	2	
5	s4	3	1	0	0	0	1	4	4	
6	z	-1	-6	0	0	0	0			
7										

Шаг 3: Определение исключаемой переменной.
Ищем минимальное положительное значение в столбце I (Ratio). Это ячейка I3. Следовательно, строка 3 (s2) будет исключаемой.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Basis	x1	x2	s1	s2	s3	s4	RHS	Ratio	
2	s1	1	2	1	0	0	0	10	5	
3	s2	3	-3	0	1	0	0	6	N/A	-2
4	s3	2	3	0	0	1	0	6	2	
5	s4	3	1	0	0	0	1	4	4	
6	z	-1	-6	0	0	0	0			
7										
8										

Шаг 4: Применение метода Гаусса-Жордана.
Сначала преобразуем ведущую строку так, чтобы ведущая ячейка (C2) стала равной 1. Для этого разделите всю строку 2 на значение в ячейке C2.
Получаем:

	J	K	L	M	N	O	P
5	0,5	1	0,5	0	0	0	5
	-2						
2							
4							

K2 =C2/C2

Basis	x1	x2	s1	s2	s3	s4	RHS	Ratio							
s1	1	2	1	0	0	0	10	5	0,5	1	0,5	0	0	0	5
s2	3	-3	0	1	0	0	6	"N/A"	-2						
s3	2	3	0	0	1	0	6	2							
s4	3	1	0	0	0	1	4	4							
z	-1	-6	0	0	0	0									

Переносим значения

Basis	x1	x2	s1	s2	s3	s4	RHS	Ratio
s1	0,5	1	0,5	0	0	0	5	5
s2	3	-3	0	1	0	0	6	"N/A"
s3	2	3	0	0	1	0	6	2
s4	3	1	0	0	0	1	4	4
z	-1	-6	0	0	0	0		

Выполняем для остального:

Basis	x1	x2	s1	s2	s3	s4	RHS	Ratio							
s1	0,5	1	0,5	0	0	0	5	5	0,5	1	0,5	0	0	0	5
s2	3	-3	0	1	0	0	6	-2	4,5	0	1,5	1	0	0	21
s3	2	3	0	0	1	0	6	2	0,5	0	-1,5	0	1	0	-9
s4	3	1	0	0	0	1	4	4	2,5	0	-0,5	0	0	1	-1
z	-1	-6	0	0	0	0									

Basis	x1	x2	s1	s2	s3	s4	RHS	Ratio							
s1	0,5	1	0,5	0	0	0	5	5	0,5	1	0,5	0	0	0	5
s2	4,5	0	1,5	1	0	0	21	#DIV/0!	4,5	0	1,5	1	0	0	21
s3	0,5	0	-1,5	0	1	0	-9	#DIV/0!	0,5	0	-1,5	0	1	0	-9
s4	2,5	0	-0,5	0	0	1	4	#DIV/0!	2,5	0	-0,5	0	0	1	4
z	-1	-6	0	0	0	0									

Шаг 5: Проверка условия оптимальности.

Посмотрим на строку z (строка 6). Если все коэффициенты в этой строке неотрицательны, то текущее базисное решение оптимально. В нашем случае нет, нужно вернуться к шагу 1 и продолжить итерации.

D12

Basis	x1	x2	s1	s2	s3	s4	RHS	Ratio							
s1	0,5	1	0,5	0	0	0	5	10	0,5	1	0,5	0	0	0	5
s2	4,5	0	1,5	1	0	0	21	4,666667	4,5	0	1,5	1	0	0	21
s3	0,5	0	-1,5	0	1	0	-9	-18	0,5	0	-1,5	0	1	0	-9
s4	2,5	0	-0,5	0	0	1	4	1,6	2,5	0	-0,5	0	0	1	4
z	-1	-6	0	0	0	0									

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Basis	x1	x2	s1	s2	s3	s4	RHS	Ratio
2	s1	1	2	1	0	0	0	10	
3	s2	3	-3	0	1	0	0	6	
4	s3	2	3	0	0	1	0	6	
5	s4	3	1	0	0	0	1	4	
6	z	-1	-6	0	0	0	0	0	
7									

Результаты таблиц симплекс-метода после каждой итерации:

1:

Basis	x1	x2	s1	s2	s3	s4	RHS	Ratio		
z	-1	-6	0	0	0	0	0	-		
s1	1	2	1	0	0	0	10	-	3	2
s2	3	-3	0	1	0	0	6	-	6	-6
s3	2	3	0	0	1	0	6	-	4	6
s4	3	1	0	0	0	1	4	-	21	13

2:

Basis	x1	x2	s1	s2	s3	s4	RHS	Ratio		
z	3	0	0	0	2	0	12	-		
s1	-0,333333333	0	1	0	-0,666667	0	6	5	-0,333333	0
s2	5	0	0	1	1	0	12	inf	-10	0
x2	0,666666667	1	0	0	0,333333	0	2	2	-1,333333	-2
s4	2,333333333	0	0	0	-0,333333	1	2	4	2,333333	0

3:

Basis	x1	x2	s1	s2	s3	s4	RHS	Ratio							
s1	0	0	0	0	2,428571	-1,28571	9,428571	-			#DIV/0!				
s2	0	0	1	0	-0,71429	0,142857	6,285714	inf	0	0	#DIV/0!	0	-0,71429	**0,142857**	6,285714
s3	0	0	0	1	1,714286	-2,14286	7,714286	2,4	0	0	#DIV/0!	1	1,714286	-2,14286	7,714286
s4	0	1	0	0	0,428571	-0,28571	1,428571	3	0	1	#DIV/0!	0	0,428571	-0,28571	1,428571
z	2	0	0	0	-0,14286	0,428571	0,857143	0,857143	2	0					

Теперь у нас в столбце C все значения, кроме ячейки C5 равны нулю. Это значит, что мы успешно преобразовали таблицу с помощью метода Гаусса-Жордана, и теперь у нас есть новое базисное решение!
Оптимальное значение функции: 2.0
Оптимальные значения переменных: x1 = 2, x2 = 0

Решение с использованием симплекс-метода на

Python:

Вручную:

Код:

```
import numpy as np

# Коэффициенты целевой функции
c = np.array([1, 6, 0, 0, 0, 0])

# Матрица ограничений
A = np.array([
    [1, 2, 1, 0, 0, 0],
    [3, -3, 0, -1, 0, 0],
    [2, 3, 0, 0, 1, 0],
    [3, 1, 0, 0, 0, -1]
])

# Правые части ограничений
b = np.array([10, 6, 6, 4])

# Базисные переменные
basis = [2, 3, 4, 5]

while True:
    # Вычисляем потенциалы
    potentials = c[basis] @ np.linalg.inv(A[:, basis])

    # Вычисляем оценки
    deltas = potentials @ A - c

    # Если все оценки неотрицательны, то решение
оптимально
    if all(d >= 0 for d in deltas):
        break

    # Выбираем входящую переменную (с наибольшей
отрицательной оценкой)
    j0 = np.argmin(deltas)

    # Вычисляем минимальное отношение
    z = np.linalg.inv(A[:, basis]) @ b
    q = np.linalg.inv(A[:, basis]) @ A[:, j0]
    theta = [z[i] / q[i] if q[i] > 0 else float('inf')
```

```
for i in range(len(q))]
    i0 = np.argmin(theta)

    # Обновляем базис
    basis[i0] = j0

# Вычисляем оптимальное решение
x = np.zeros_like(c)
x[basis] = np.linalg.inv(A[:, basis]) @ b

print("Оптимальное значение целевой функции:", c @ x)
print("Оптимальные значения переменных: x1 =", x[0], ",
x2 =", x[1])
```

Результат работы программы:

```
/Users/andrey/Documents/PyCharm/pythonProject/bin/
python /Users/andrey/Documents/PyCharm/pythonProject/
main.py
Оптимальное значение целевой функции: 2
Оптимальные значения переменных: x1 = 2 , x2 = 0

Process finished with exit code 0
```

Упрощённый вариант:

Код :

```
from scipy.optimize import linprog

# Коэффициенты целевой функции
c = [1, 6]

# Матрица коэффициентов ограничений
A = [
    [1, 2],         # для x1 + 2x2 ≤ 10
    [-3, 3],        # для -3x1 + 3x2 ≤ -6 (преобразовано из
3x1 - 3x2 ≥ 6)
    [2, 3],         # для 2x1 + 3x2 ≤ 6
    [-3, -1]        # для -3x1 - x2 ≤ -4 (преобразовано из
3x1 + x2 ≥ 4)
]

# Вектор правых частей ограничений
```

```
b = [10, -6, 6, -4]

# Ограничения на переменные
x0_bounds = (0, None)  # x1 ≥ 0
x1_bounds = (0, None)  # x2 ≥ 0

# Решение задачи линейного программирования
res = linprog(c, A_ub=A, b_ub=b, bounds=[x0_bounds,
x1_bounds], method='highs')

print(f'Оптимальное значение целевой функции: {res.fun}')
print(f'Оптимальные значения переменных: x1 = {res.x[0]},
x2 = {res.x[1]}')
```

Результат работы программы:

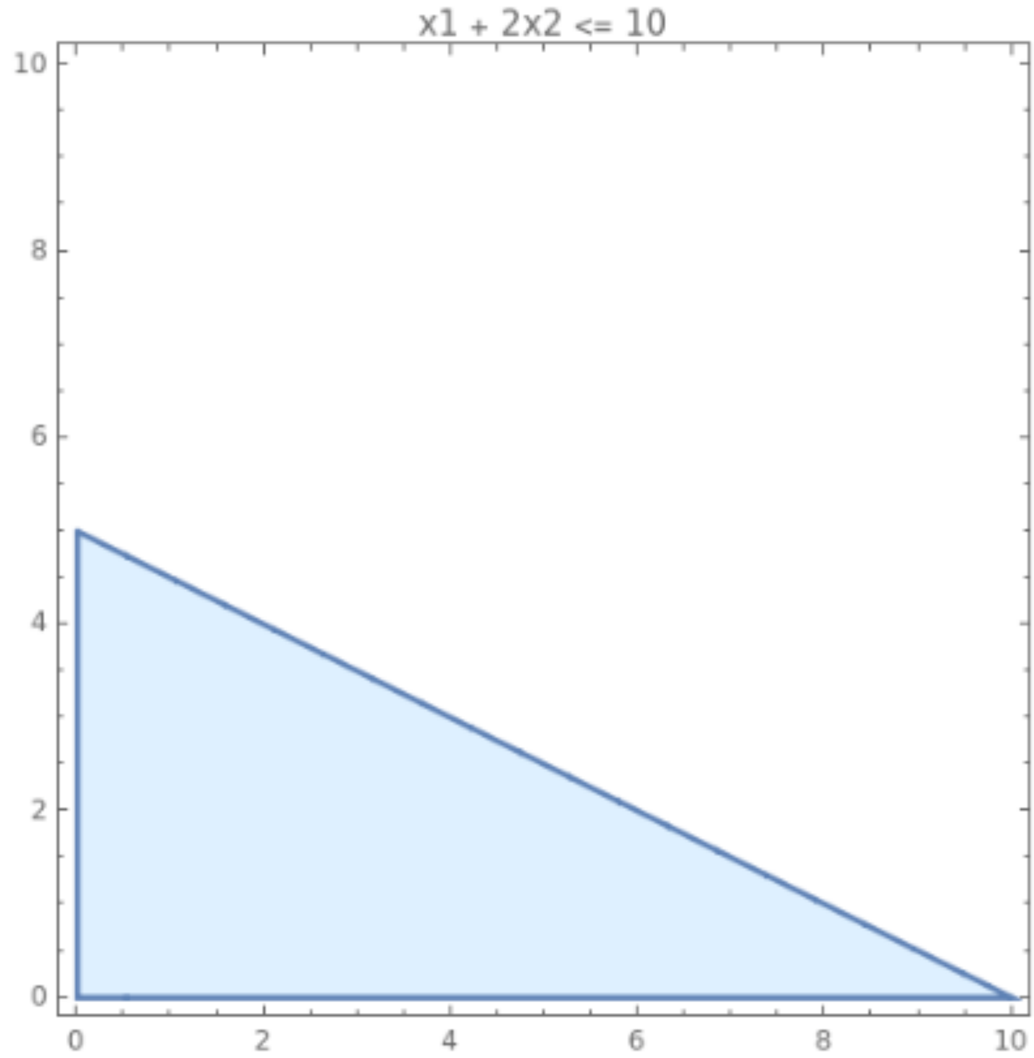
```
/Users/andrey/Documents/PyCharm/pythonProject/bin/
python /Users/andrey/Documents/PyCharm/pythonProject/
main.py
Оптимальное значение целевой функции: 2.0
Оптимальные значения переменных: x1 = 2.0, x2 = 0.0

Process finished with exit code 0
```

Графическая интерпретация результатов решения задачи:

Разберемся с каждым ограничением по отдельности и покажем, как каждое из них влияет на допустимую область решений.

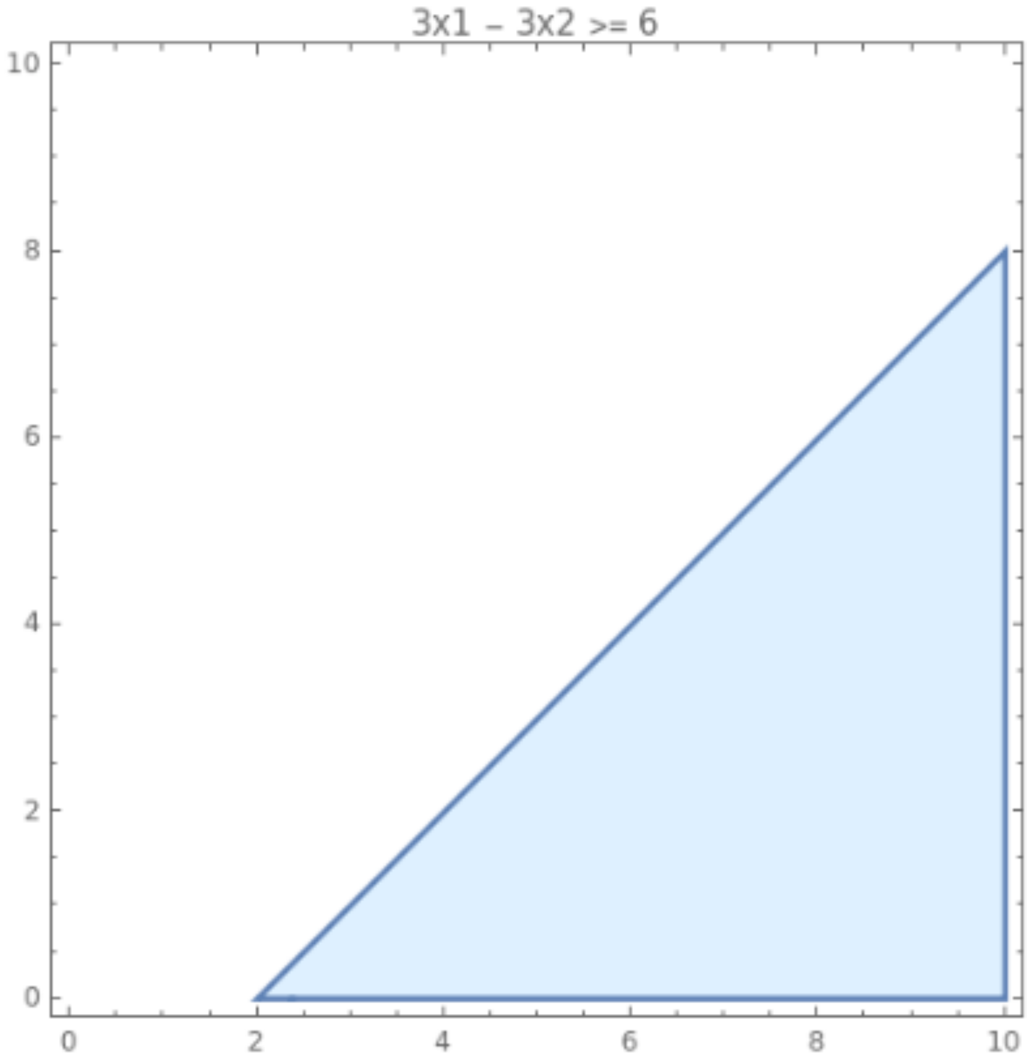
Ограничение 1: $x1 + 2x2 \leq 10$
Это ограничение говорит нам, что комбинация x1 и x2 должна удовлетворять условию, что сумма x1 и удвоенного x2 не превышает 10.



На графике выше светло-синяя область представляет собой допустимую область для этого ограничения. Это область, в которой условие $x1 + 2x2 \leq 10$ выполняется.

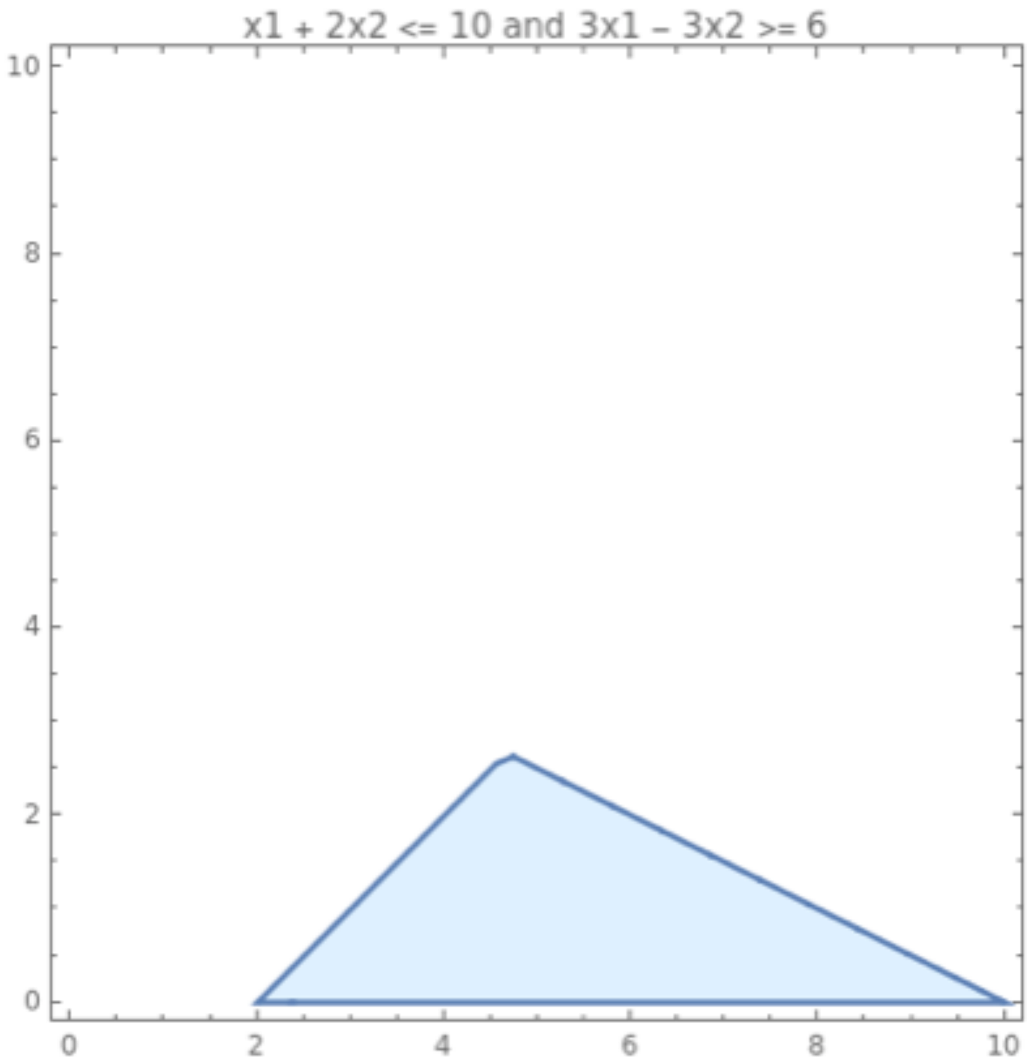
Ограничение 2: $3x1 - 3x2 \geq 6$

Это ограничение говорит нам, что разница между утроенным x1 и утроенным x2 должна быть не менее 6.

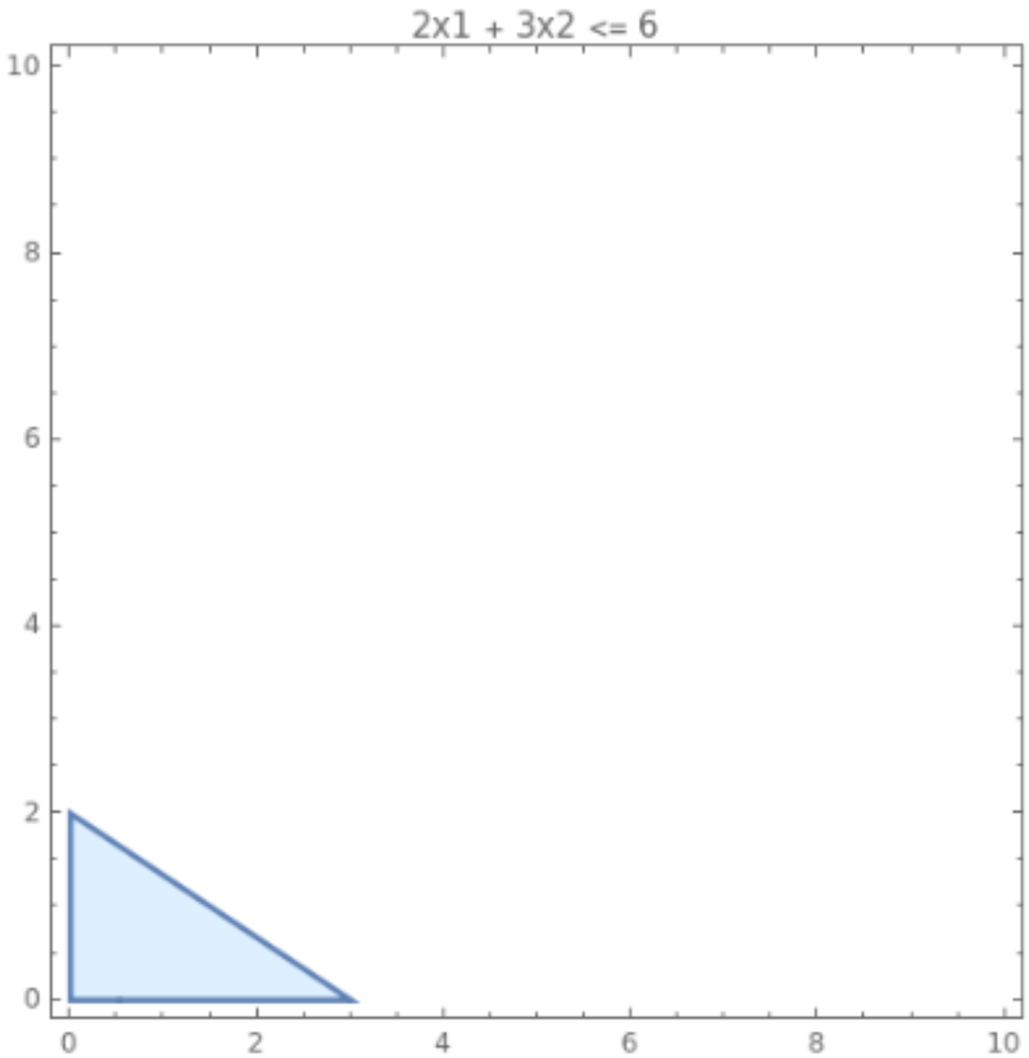


На графике выше светло-синяя область представляет собой допустимую область для этого ограничения. Это область, в которой условие $3x1 - 3x2 \geq 6$ выполняется.

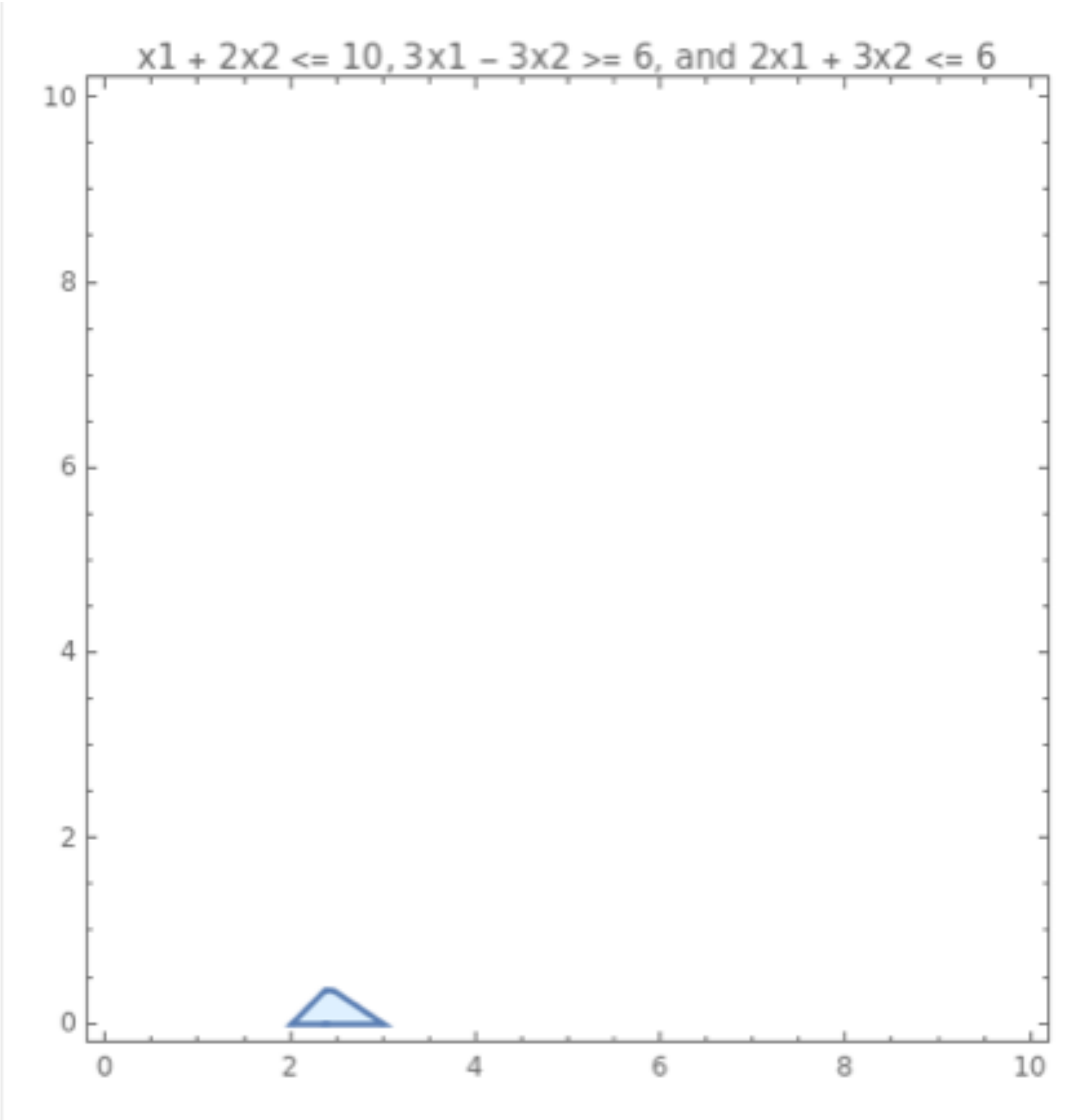
Давайте объединим имеющиеся ограничения:



Ограничение 3: $2x1 + 3x2 \leq 6$
Это ограничение говорит нам, что комбинация x1 и x2 должна удовлетворять условию, что сумма удвоенного x1 и утроенного x2 не превышает 6.

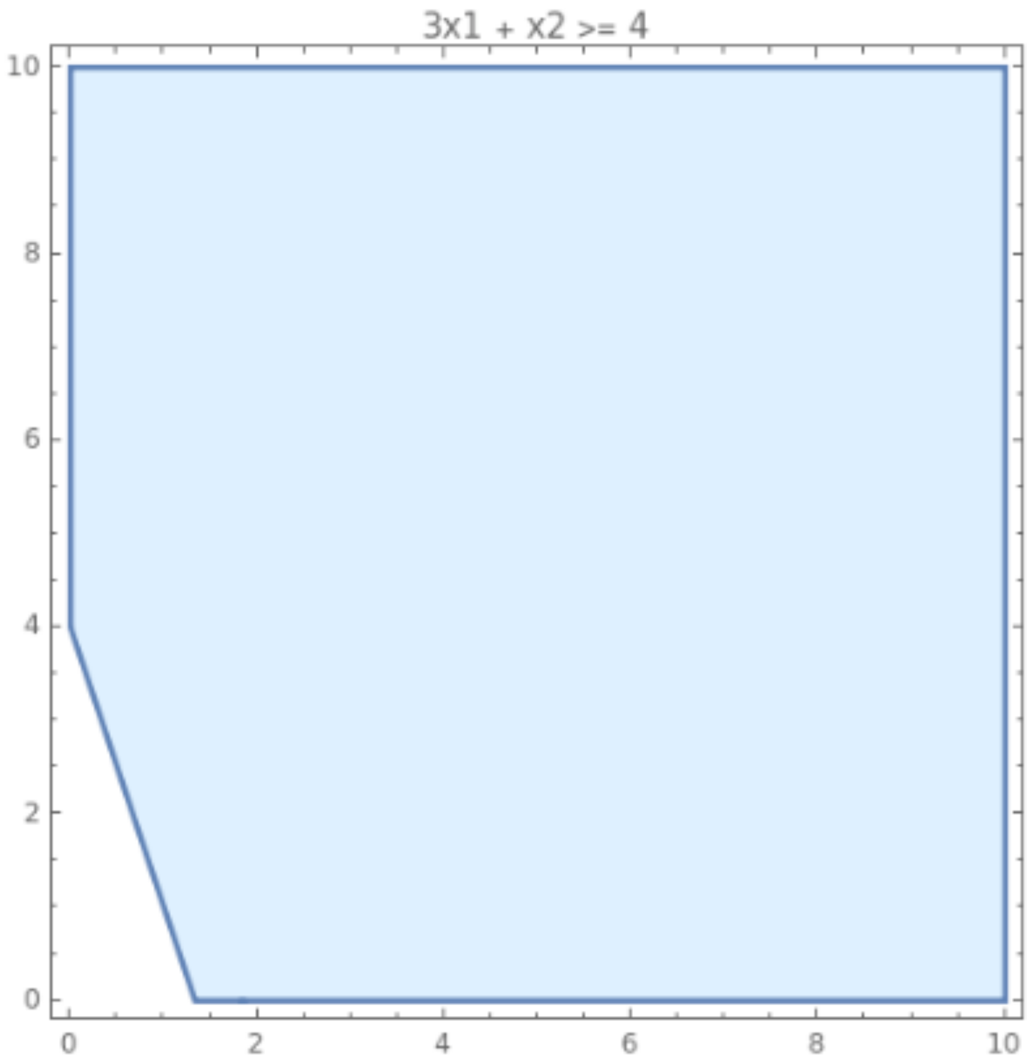


На графике выше светло-синяя область представляет собой допустимую область для этого ограничения. Это область, в которой условие 2x1 + 3x2 ≤ 6 выполняется.
Давайте объединим имеющиеся ограничения:



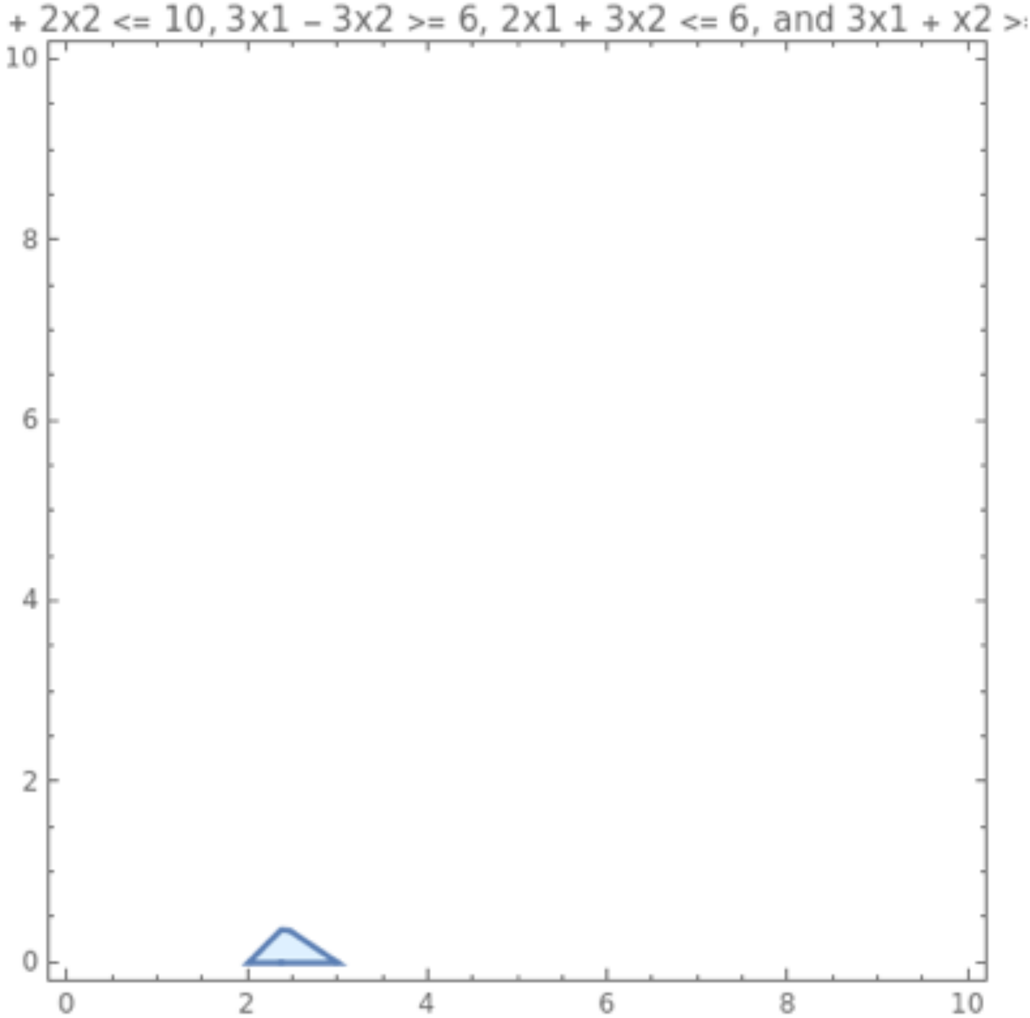
Ограничение 4: $3x1 + x2 \geq 4$

Это ограничение говорит нам, что комбинация x1 и x2 должна удовлетворять условию, что сумма утроенного x1 и x2 не менее 4.



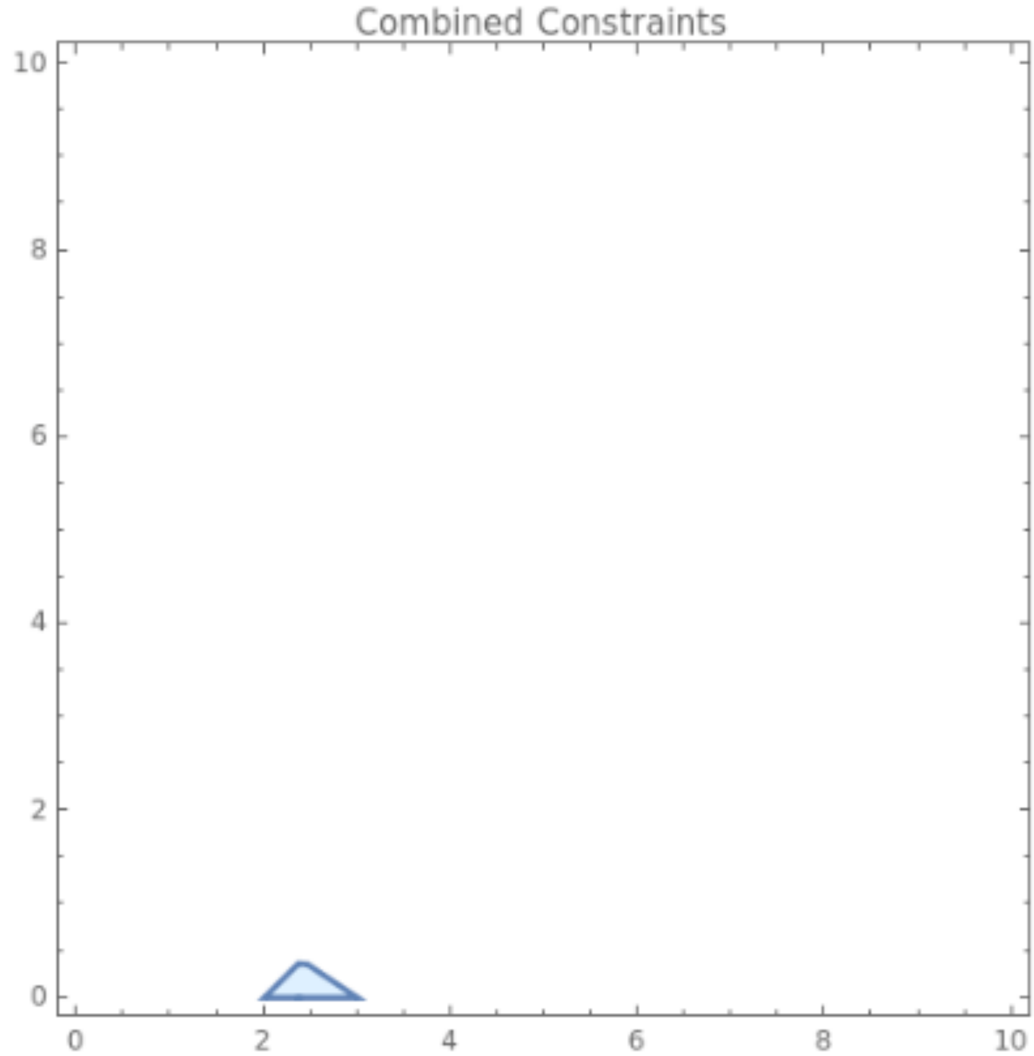
На графике выше светло-синяя область представляет собой допустимую область для этого ограничения. Это область, в которой условие $3x1 + x2 \geq 4$ выполняется.

Давайте объединим имеющиеся ограничения:



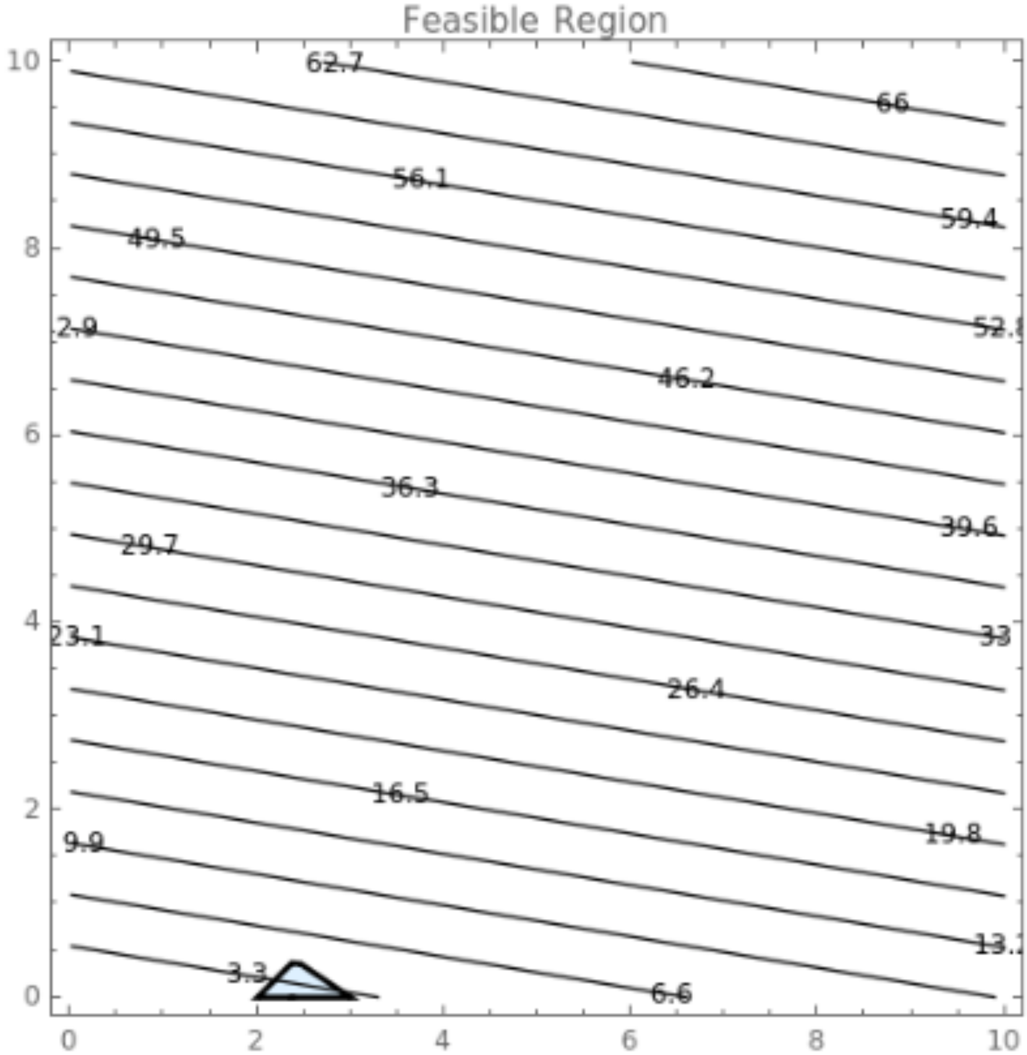
Объединение всех ограничений

После того как мы рассмотрели каждое ограничение по отдельности, мы можем объединить их все вместе, чтобы увидеть общую допустимую область решений.



На графике выше светло-синяя область представляет собой допустимую область решений, которая удовлетворяет всем четырем ограничениям одновременно. Это область, в которой все ограничения выполняются одновременно.

Рассмотрим графическое представление задачи линейного программирования



Светло-синяя область представляет допустимую область, которая удовлетворяет всем ограничениям. Линии уровня (контурные линии) представляют разные значения целевой функции x1 + 6x2.
Для определения оптимального решения графически, нам нужно найти точку в допустимой области, где значение целевой функции минимально. Поскольку мы стремимся минимизировать x1 + 6x2, мы ищем точку, где контурная линия целевой функции касается допустимой области и находится как можно ниже на графике.
Исходя из графика, видно, что оптимальное решение достигается в точке, где x1=2.0 и x2=0.0. В этой точке значение целевой функции равно 2.0.
Таким образом:
Оптимальное значение целевой функции: 2.0
Оптимальные значения переменных: x1 = 2.0 и x2 = 0.0

2-я часть задания:

Ситуация, для которой подойдет математическая модель.

Оптимизация производства в автомобильной компании.

Автомобильная компания специализируется на производстве двух моделей автомобилей: седанов и внедорожников.
Для производства одного седана требуется 1 единица стали и 2 единицы алюминия, а для производства одного внедорожника - 3 единицы стали и 3 единицы алюминия. На складе компании имеется 10 единиц стали и 6 единиц алюминия. Каждый седан приносит компании прибыль в размере 1 доллара, а каждый внедорожник - 6 долларов.

Однако есть дополнительные условия:

1. Из-за ограниченного количества рабочих и оборудования компания может производить не более 10 седанов в день.
2. Чтобы удовлетворить спрос на внедорожники, компания должна производить как минимум на 6 внедорожников больше, чем седанов.
3. Из-за ограниченного количества алюминия компания может производить не более 6 внедорожников в день.
4. Компания должна производить как минимум 4 седана в день, чтобы удовлетворить минимальный заказ.

Задача: Какое количество седанов и внедорожников компания должна производить, чтобы минимизировать свои расходы на производство, учитывая имеющиеся ресурсы и ограничения?

$x1$ - это количество производимых седанов, а $x2$ - количество производимых внедорожников.