

02 - Algèbre de Boole

mercredi 10 décembre 2025 12:26

Signes:

$\wedge, \vee, \oplus, \Rightarrow, \dots$

→ Nous allons écrire les opérations logiques avec des opérations arithmétiques

- Afin d'utiliser des opérations + familières.
- Maintenant les mêmes propriétés que les opérations d'origine.
- Ces propriétés sont démontrables grâce aux tables de vérité.
- Les propositions seront toujours soit vraies, soit falses.

La conjonction:

→ elle s'utilise avec l'opérateur \cdot .

→ $a \cdot b$ se lit a et b

→ les propriétés:

- Commutativité: $a \cdot b = b \cdot a$

- Distributivité: $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

- Élément neutre: $a \cdot 1 = a$

- La complémentaire: $a \cdot \neg a = 0$

- Idempotence: $a \cdot a = a$

- La loi identique:

$$\circ a \cdot 0 = 0$$

$$\circ a \cdot 1 = a$$

- Associativité: $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

La disjonction:

→ elle s'utilise avec l'opérateur $+$

→ $a + b$ se lit a ou b

→ les propriétés:

- Commutativité: $a + b = b + a$

- Distributivité: $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

- Élément neutre: $a + 0 = a$

- La complémentaire: $a + \neg a = 1$

- Idempotence: $a + a = a$

- La loi identique:

$$\circ a + 0 = a$$

$$\circ a + 1 = 1$$

- Associativité: $a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$

Le complément:

→ il s'utilise avec l'opérateur \neg .

→ $\neg a$ se lit la complémentaire de a .

→ les propriétés:

$$\circ \neg \neg a = a$$

$$\circ \neg 0 = 1$$

$$- \neg (\neg a) = a$$

La loi de De Morgan:

$$\bullet \neg (a + b) = \neg a \cdot \neg b$$

$$\bullet \neg (a \cdot b) = \neg a + \neg b$$