量子カオスとしての Sachdev-Ye-Kitaev模型 とブラックホール

素粒子論研究室

17SS208B

西村 滉祐

Contents

Sachdev-Ye-Kitaev 模型

Sachdev-Ye-Kitaev(SYK)模型とは

$$H = \sum_{i,j,k,l}^{N} J_{ijkl}\ \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l$$

J_{ijkl} 値がガウシアンの確率分布に従う反対称結合定数テンソル

ψ_i N種のマヨラナフェルミオン

- 元々は物性理論の分野のSY模型（スピングラス）
- KitaevによりAdS/CFT対応の模型として提唱された

AdS/CFT対応とは

共形場の理論 (CFT)	⟷	AdS 重力理論
n次元		n + 1次元

- 量子重力の量をCFT側の量として翻訳できる
- 場の理論から重力理論を再構成できる(バルク再構成)
- 量子重力の定義を与えるという見方もできる

AdS/CFT対応の例

$\mathcal{N}=4$
超対称
ヤン・ミルズ理論

⟷

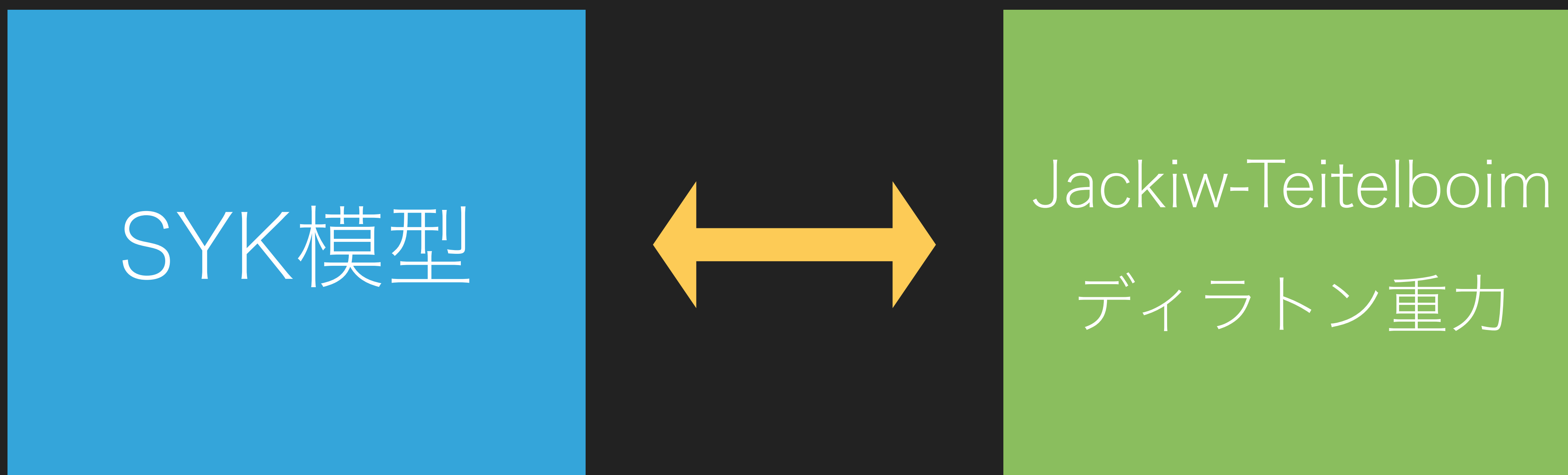
タイプⅡB
超弦理論

4次元

5次元

- 最も有名な例
- 強結合領域の解析となると困難な理論

SYK模型とAdS/CFT対応



1次元CFT　　　　2次元AdS

- 重力双対はJackiw-Teitelboim(JT)ディラトン重力理論
- ある種のアインシュタイン重力

SYK 模型の性質

- ラージN極限において強結合領域で可解となる
- 低エネルギー極限で共形対称性を持つ
- 量子カオス系である(詳しくは次節)

1. 超対称性ヤン・ミルズ理論よりも解析が簡単な模型
2. ブラックホールの量子カオス的な性質を調べる事ができる

SYK模型と量子カオス

量子カオスを調べる道具

1. 時間順序外相関関数(OTOC)
   - バタフライ効果の量子論バージョン
   - 初期の振る舞いは指数関数的に増大する $\sim e^{\lambda t}$

2. **スペクトラル統計**
   - 複数の固有値の相関を調べる
   - 系の大きい時間 t での振る舞いを調べるのに使われる

SYK模型とランダム行列理論

量子カオス理論の基本的な仮定：

量子カオス系のスペクトラル統計を

記述する数学は**ランダム行列理論**である

- ランダム行列とは、ある統計集団に属する乱数を要素に持つ行列
- 統計分布はガウシアン

SYK模型とランダム行列理論

- SYK模型もランダム行列で記述されると考えられている
- スペクトラル統計で重要な量のひとつに**スペクトラル形状因子**がある(次で説明)

$$g(t) = \frac{\langle |Z(\beta - it)|^2 \rangle_J}{\langle Z(\beta)^2 \rangle_J}$$

- スペクトラル形状因子はSYK模型でもよく調べられている

スペクトラル形状因子の定義

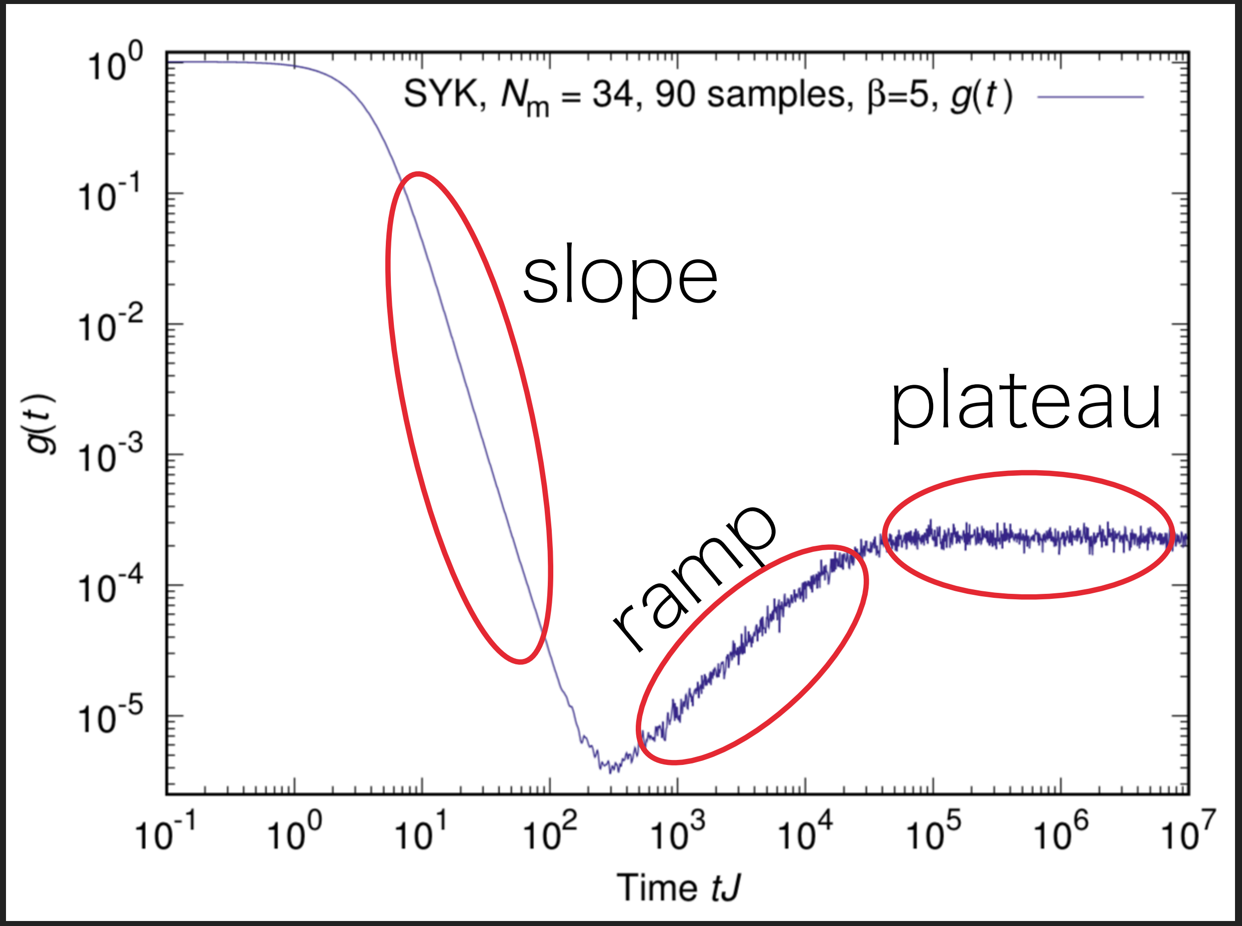
$$g(t) = \frac{\langle |Z(\beta - it)|^2 \rangle_J}{\langle Z(\beta)^2 \rangle_J} \qquad Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

- エネルギー固有値の2点関数
- 結合定数 J_{ijkl} による期待値を取った量(disorder average)

$$\langle A \rangle_J \equiv \int \prod_{i<j<k<l} dJ_{ijkl}\, P(J_{ijkl}) A$$

スペクトラル形状因子の振る舞い

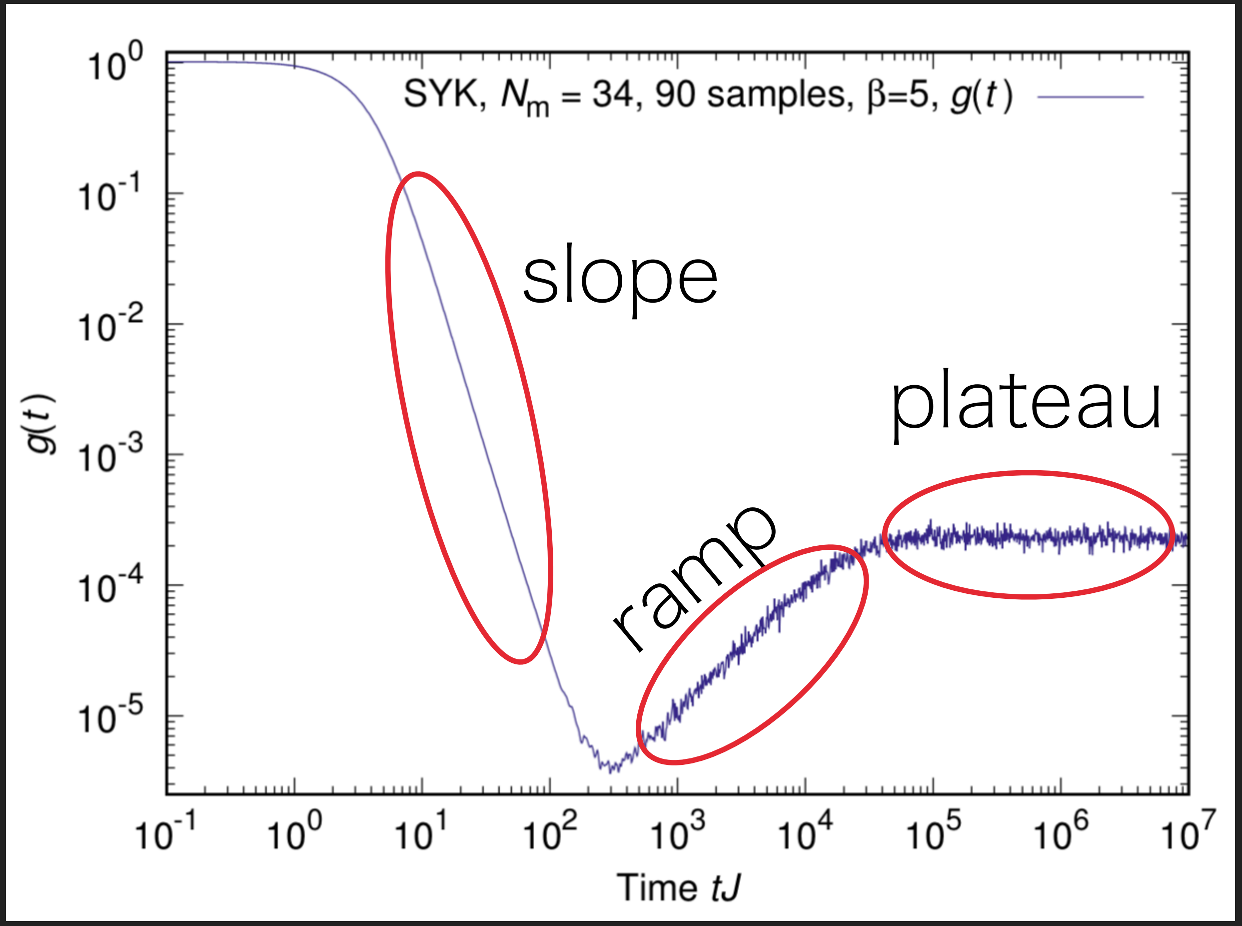
- slope, ramp, plateauという3つの領域からなる
- このlog-logプロットからは非自明だが、rampは時間の一次に比例している
- plateauは離散スペクトラムの存在によるもの



J. S. Cotler et. al.

スペクトラル形状因子の振る舞い

- 古典重力で計算すると値は0に減少するだけ
- 量子論では離散スペクトラムにより違う振る舞いをし、時間が経つと平均値のまわりを揺らぐようになる



J. S. Cotler et. al.

量子カオスにおける対応

SYK模型 g_{SYK} $\longleftrightarrow$ JT 重力 g_{gravity}

- スペクトラル形状因子のslopeとrampの起源も対応している(次節)

AdS/CFT対応と量子カオス

- SYK模型は量子論なのでスペクトラル形状因子は量子論に特有な振る舞いをする
- AdS/CFT対応を期待するならば、詳細を調べる事によって量子重力系の量子カオス的振る舞いを理解できるはず

↓

ブラックホールは量子カオスで記述可能なのでは？

スペクトラル形状因子の
振る舞いの起源

スペクトラル形状因子: SYK模型

- どのような場の配位が分配関数の経路積分に寄与するか？
- 計算にはレプリカ法が用いられる

$$g(t) = \frac{\langle ZZ^* \rangle_J}{\langle Z^2 \rangle_J}$$

$$Z = \int D\phi \, e^{-I[\phi]}$$

$Z \longrightarrow$ R系　　$Z^* \longrightarrow$ L系

スペクトラル形状因子: JT重力

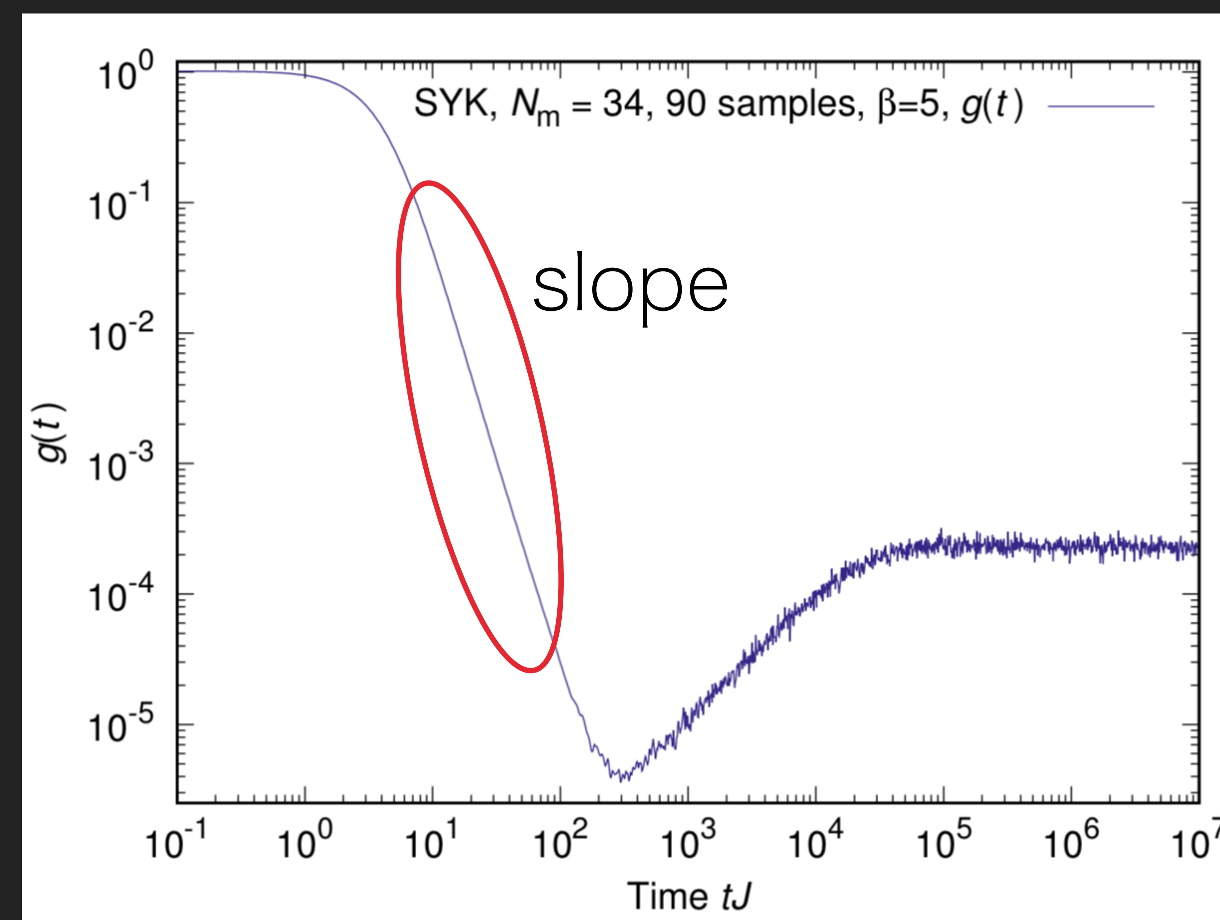
- SYK模型と同様に2つのレプリカL系とR系を用意する
- JT重力では計量テンソルの配位を調べる

SYK模型での配位に対応する幾何学とは？

SYK模型のslope

- slopeを構成する配位はL系とR系に相関がないようなもの

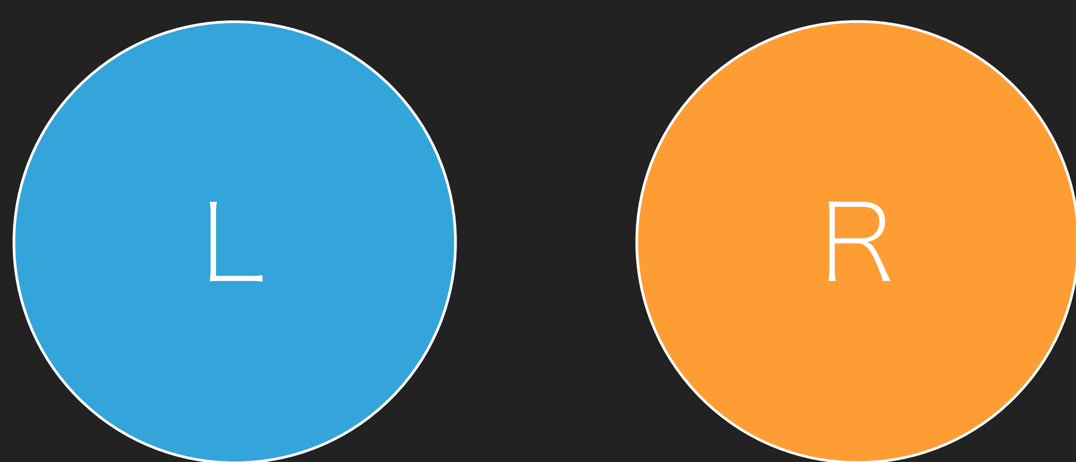
$$G_{LR} = \frac{1}{N}\sum_i \psi_i^L \psi_i^R = 0$$



JT重力のslope

disk의円周に相当するもの

$\beta + iT$ $\beta - iT$



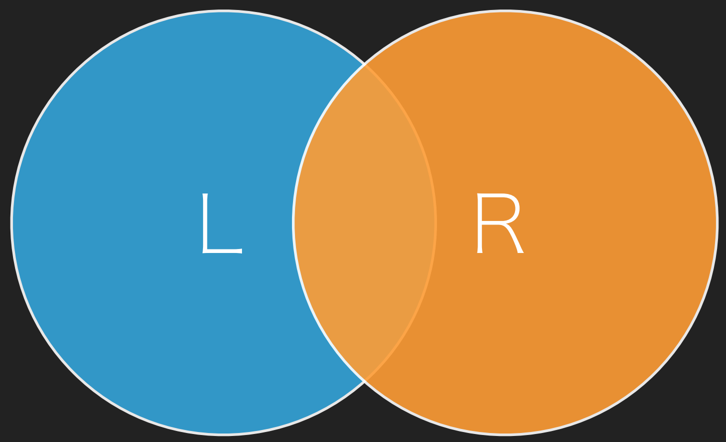
Euclidean black hole
diskのトポロジーを持つ

L系とR系に繋がりがない

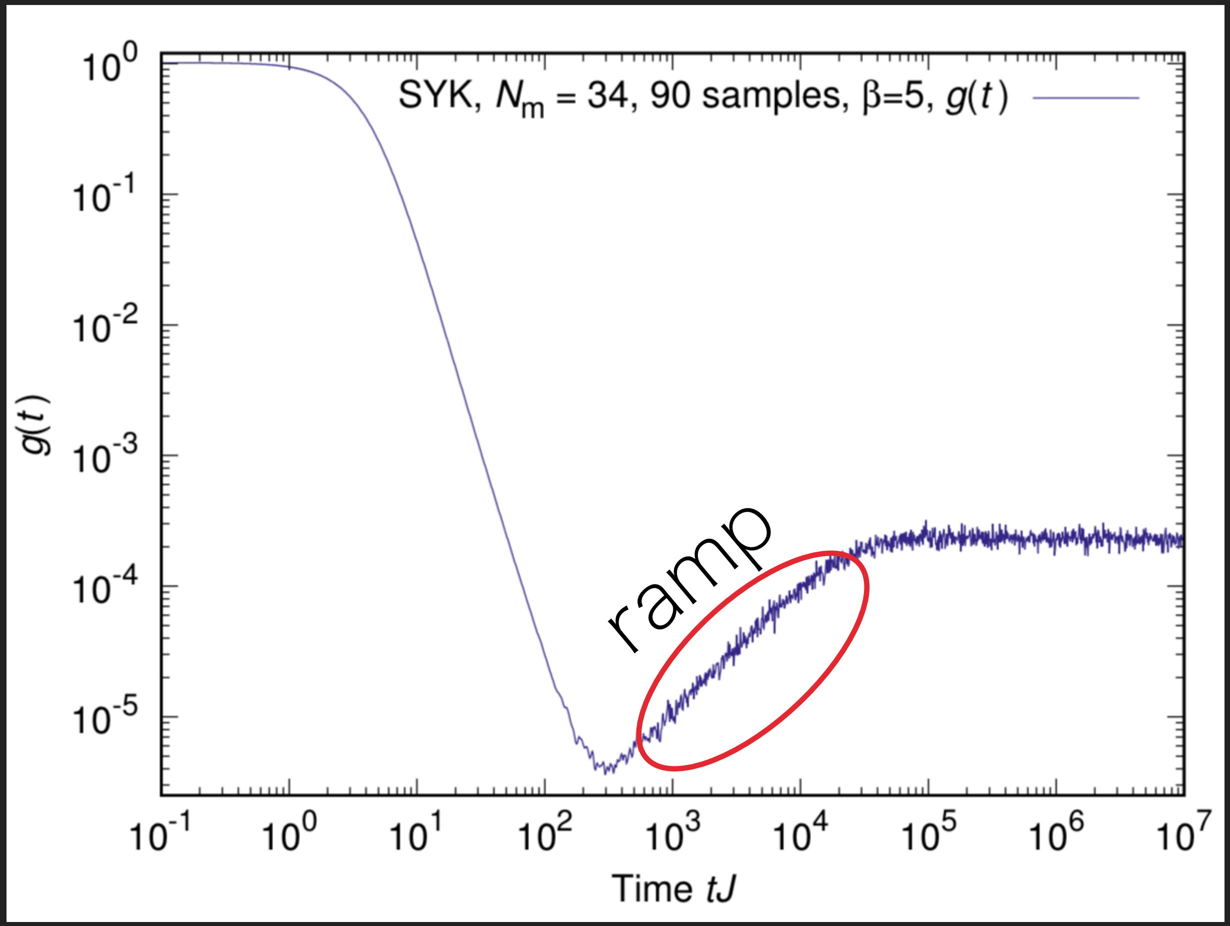
<u>SYK模型でのslopeに対応</u>

SYK模型のramp

- rampを構成する配位はL系とR系に相関があるようなもの



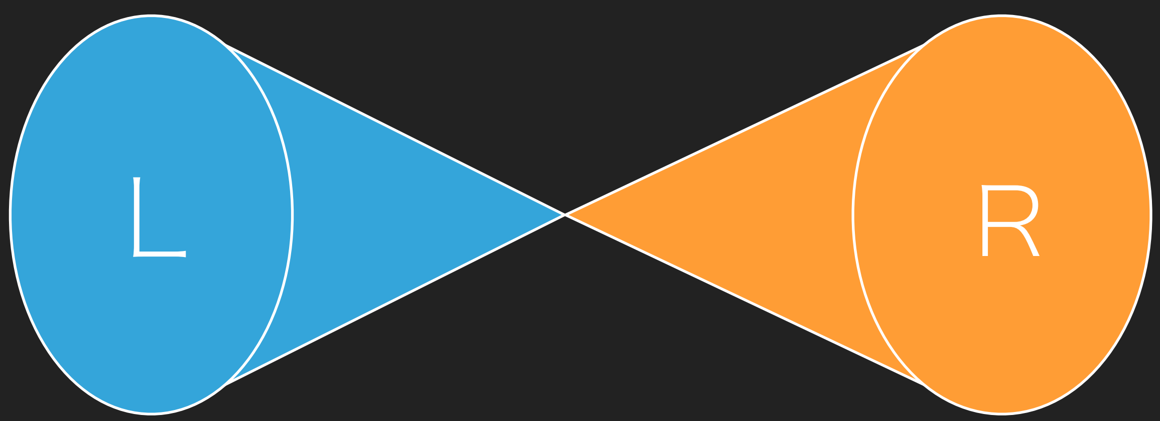
- 特にL系とR系が独立に持っていた時間並進対称性を自発的に破る



$$G_{LR} \neq 0$$

JT重力のramp

$\beta + iT$ $\qquad$ $\beta - iT$



- L系とR系をつなぐwormhole
- 2つの円錐が頂点で接している
- この解は計量の持つ時間並進対称性を自発的に破る

<u>SYK模型でのrampに対応</u>

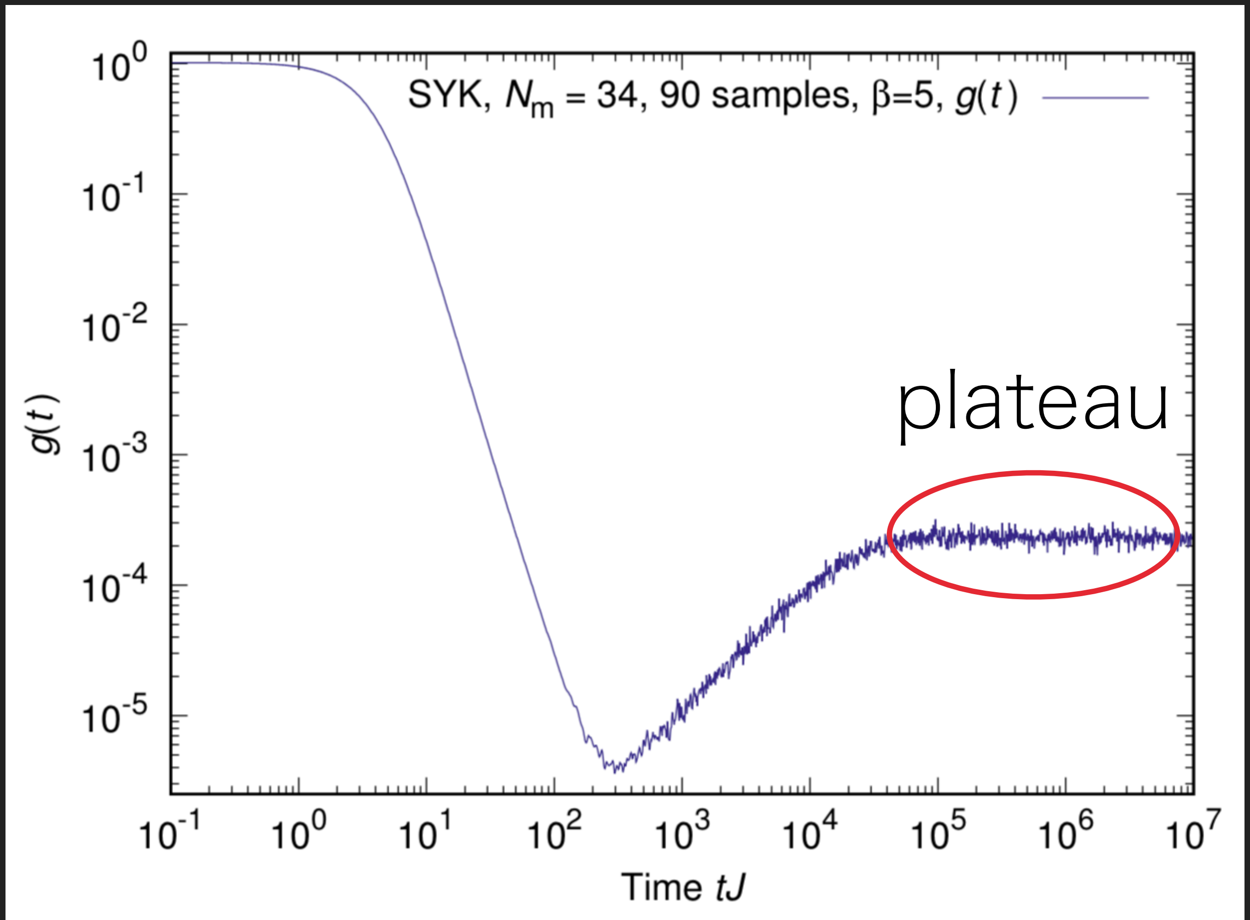
plateau: どの配位が寄与するのかは不明

SYK模型：

- ラージNの非摂動効果？

JT重力：

- D-braneによる非摂動効果？



まとめ

- SYK模型はAdS/CFT対応の期待される量子カオス系であり、重力双対は２次元AdS JT重力である
- 量子カオス系の統計的構造はランダム行列で記述されると思われており、SYK模型もランダム行列に従っていると期待される
- SYK模型とJT重力のスペクトラル形状因子の物理的起源は対応している

予想・期待：

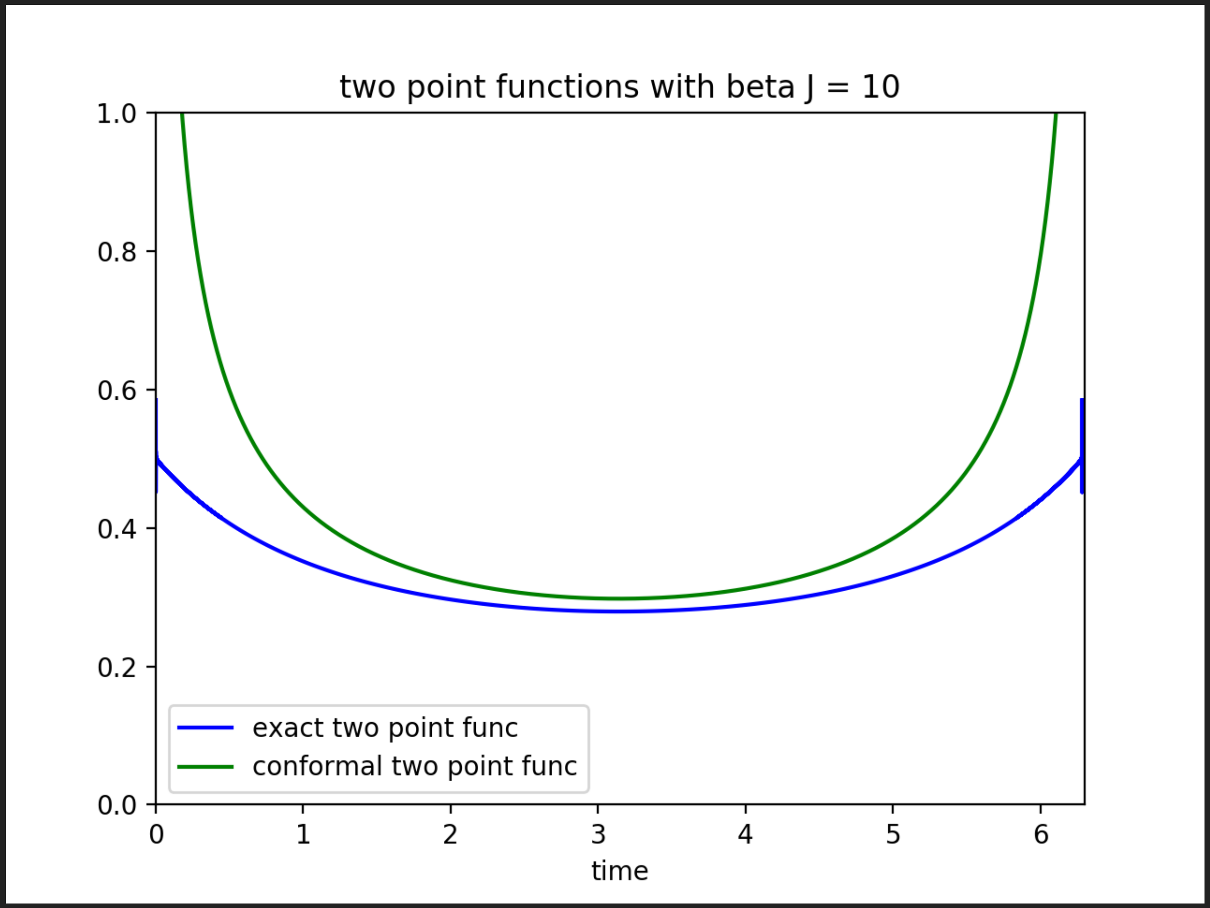
ブラックホールは量子カオスにより記述可能

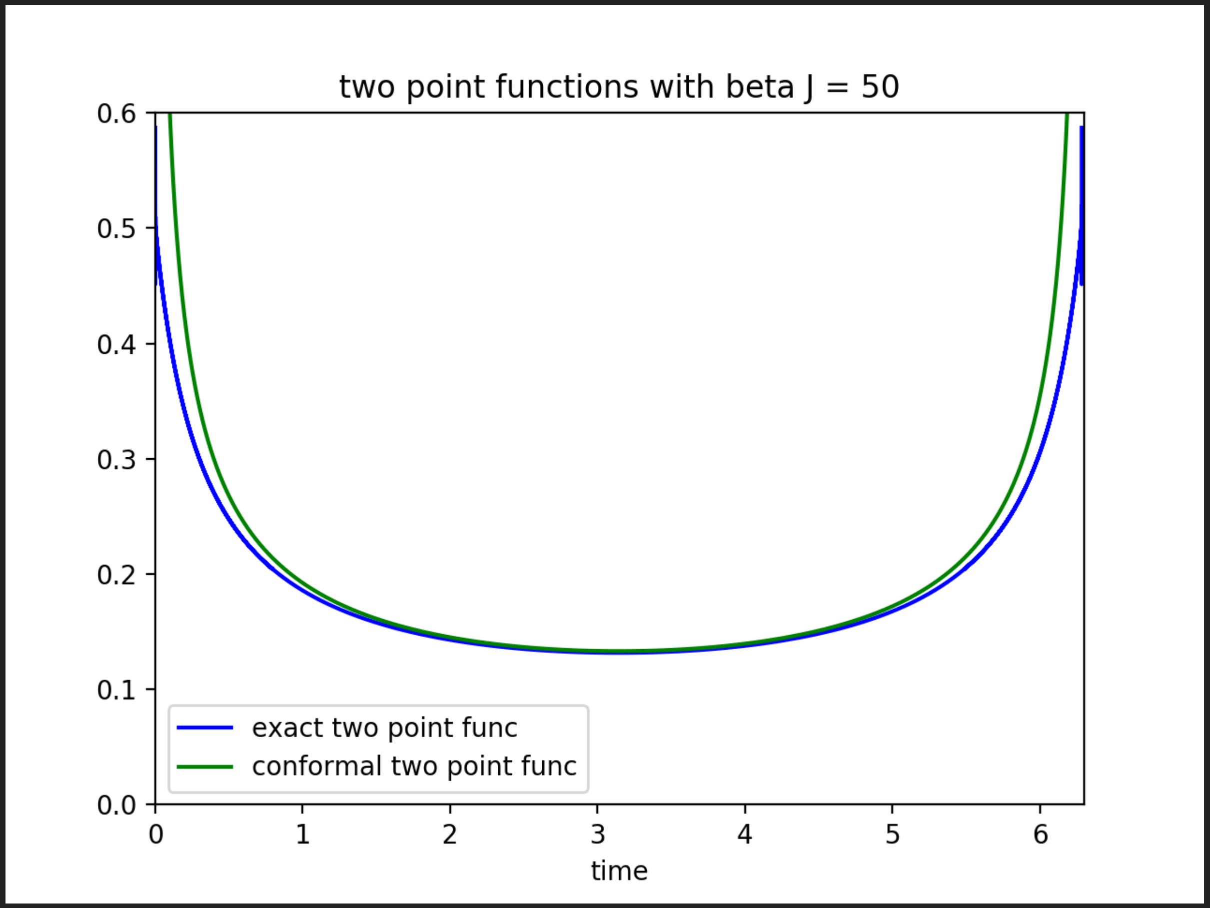
これからの課題：plateauの詳細な解析

- SYK模型やJT重力のplateauの物理的起源はまだ不明
- ランダム行列におけるplateauの非摂動効果の解析は奥山先生が年末に行った
  - eigenvalue instantonによってrampからplateauへの相転移が引き起こされる
  - 時空に対応するものはD-brane?
- ブラックホールの大きい t の振る舞いはまだ謎が多い

Back up

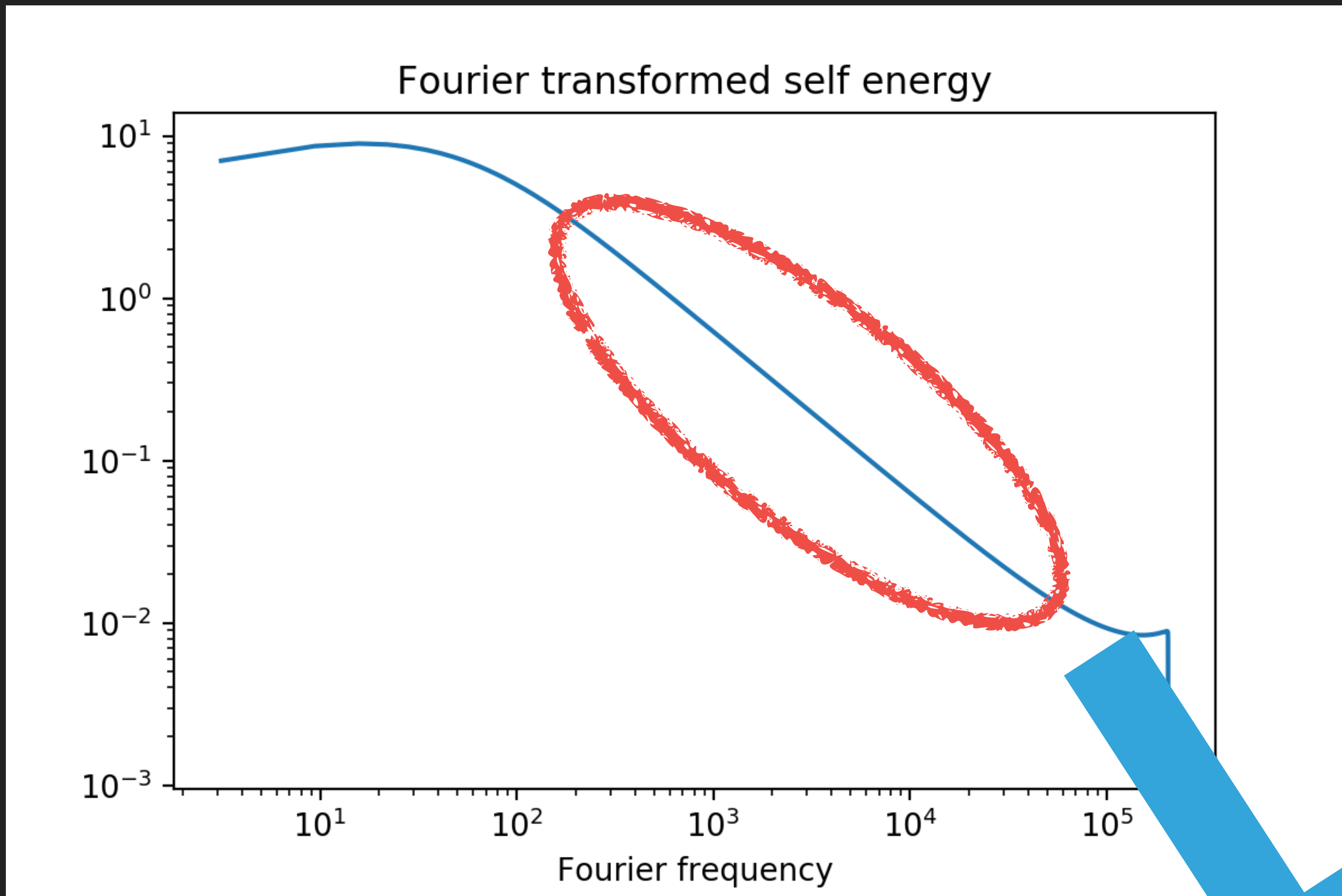
2 点関数


two point functions with beta J = 10
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
1
2
3
4
5
6
time
exact two point func
conformal two point func

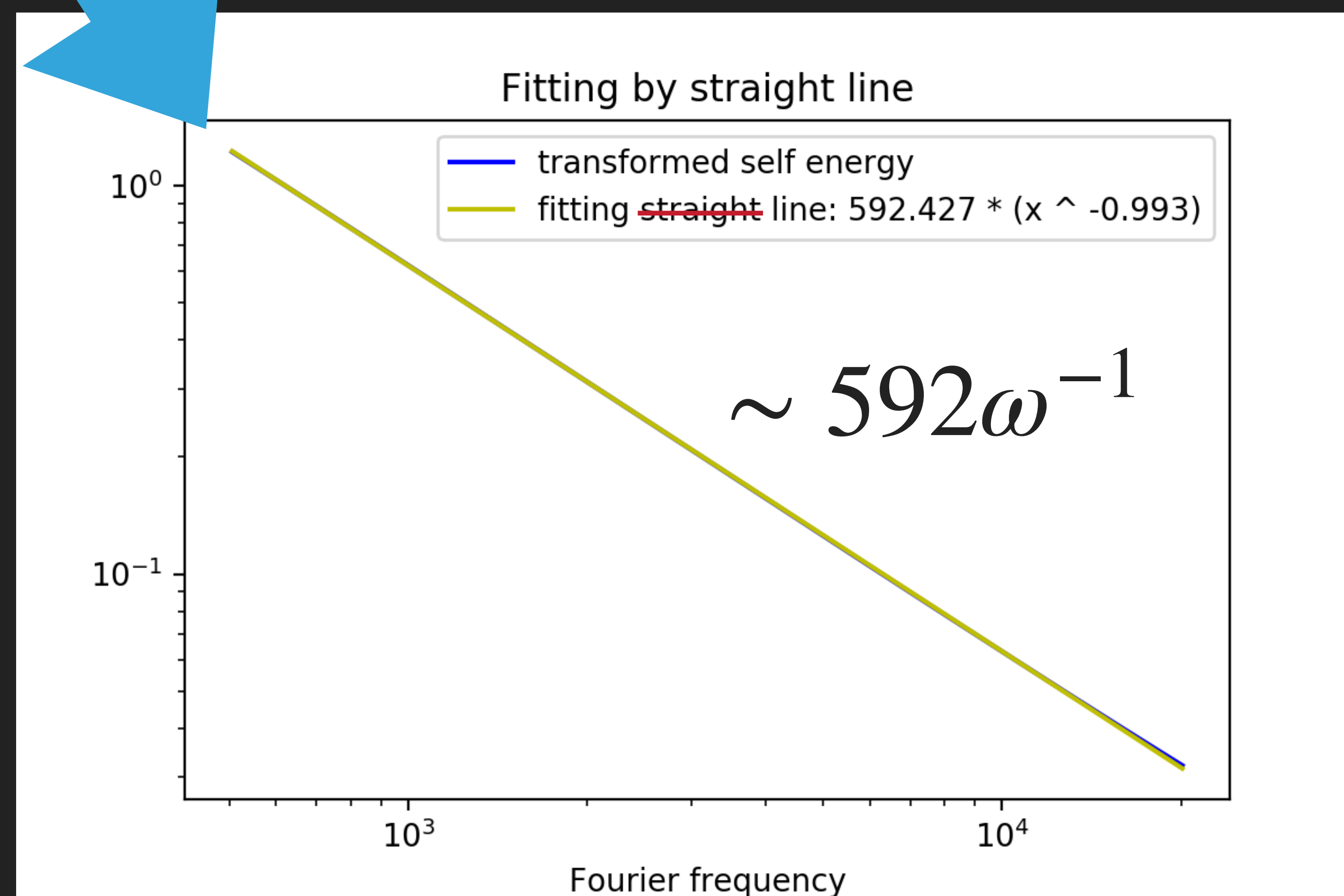

two point functions with beta J = 50
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0
1
2
3
4
5
6
time
exact two point func
conformal two point func

$$J = 10$$

$$J = 50$$



べき乗らしきところをフィッティング



$$G(\omega) = \frac{1}{-i\omega - \Sigma(\omega)}$$

$$\Sigma(t) = J^2 G(t)^3$$

G ：2点関数

Σ ：自己エネルギー

ランダム行列と量子カオス

In nuclear physics, random matrices were introduced by **Eugene Wigner** to model **the nuclei of heavy atoms**. He postulated that **the spacings between the lines in the spectrum of a heavy atom nucleus should resemble the spacings between the eigenvalues of a random matrix**, and should depend only on the symmetry class of the underlying evolution. In solid-state physics, random matrices model the behaviour of large disordered Hamiltonians in the mean field approximation.

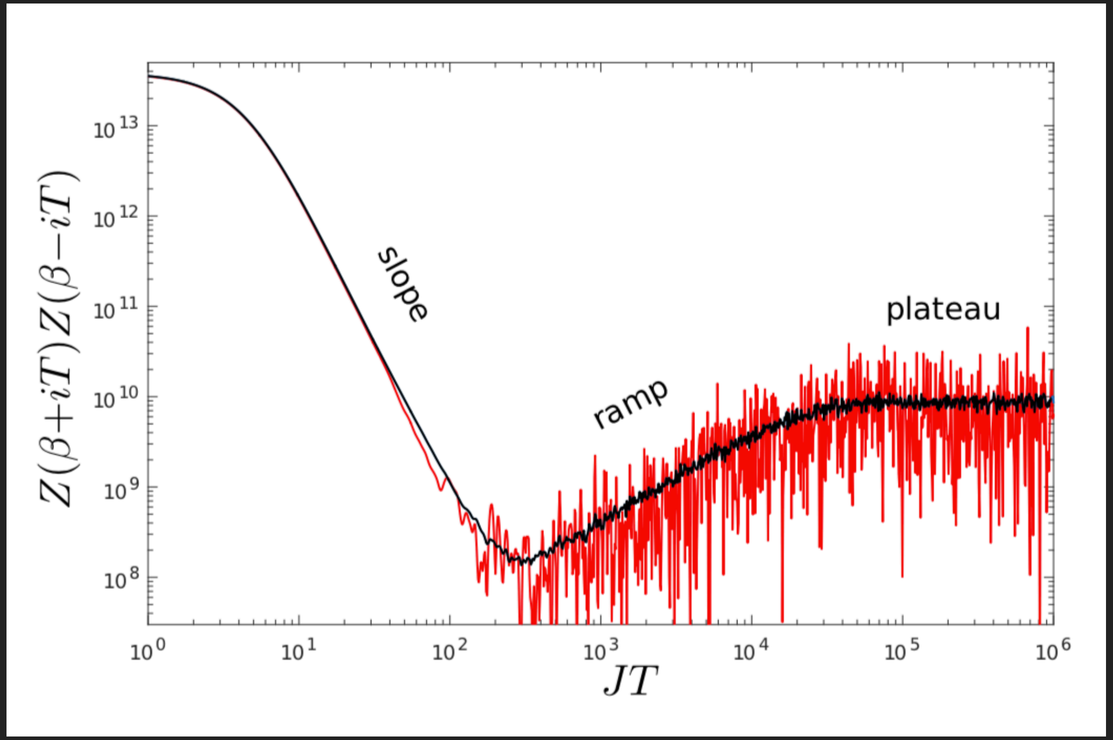
In quantum chaos, the Bohigas–Giannoni–Schmit (BGS) conjecture asserts that **the spectral statistics of quantum systems whose classical counterparts exhibit chaotic behaviour are described by random matrix theory**.

Wikipedia: Random matrix より引用

plateauの揺らぎ

- JT重力理論はSYK模型のような乱数で与えられる結合定数がないので、これによる期待値というものが存在しない
- もしJによる期待値を取らないと、SYK模型ではplateauは大きく揺らぐ
- 今回の重力の解析ではこの揺らぎが見られず、揺らぎの起源は不明

$$g(t) = \frac{|Z(\beta - it)|^2}{Z(\beta)^2}$$



D. Stanford et. al.

SYK模型とランダム行列理論

ランダム行列: ハミルトニアン

統計分布: ガウシアン

シュウィンガー・ダイソン方程式

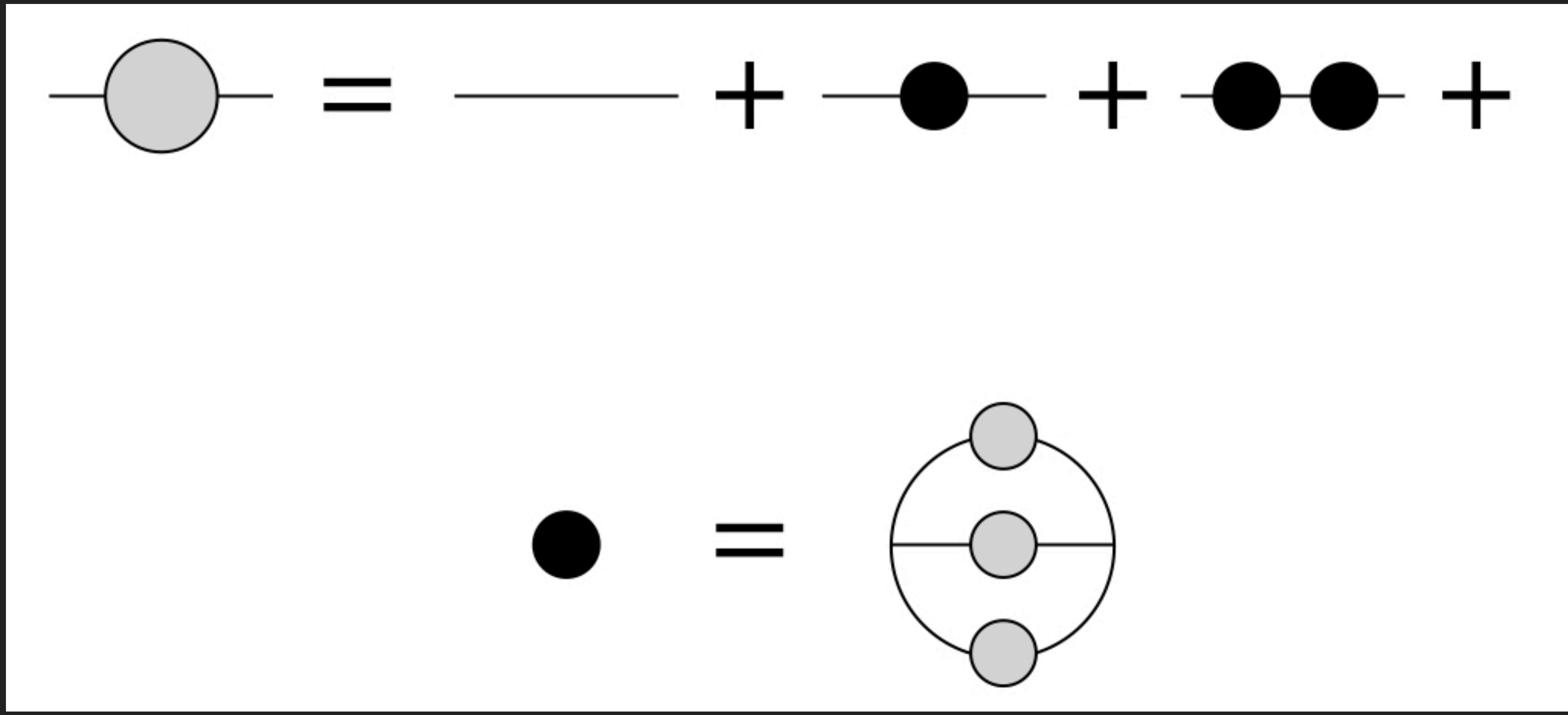
シュウィンガー・ダイソン方程式：

$$G(\omega) = \frac{1}{-i\omega - \Sigma(\omega)} \qquad \Sigma(t) = J^2 G(t)^3$$

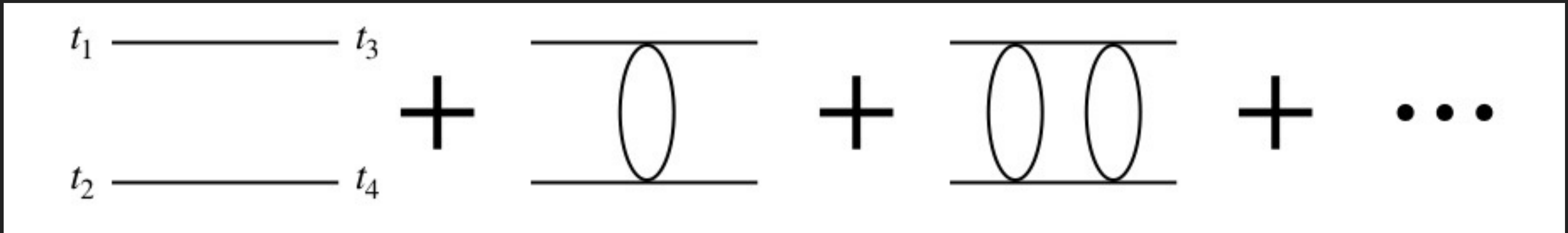
G ：2点関数 Σ ：自己エネルギー

Leading diagrams in large N

2点関数：



4点関数：



カオスとは何か

カオスの研究の始まり

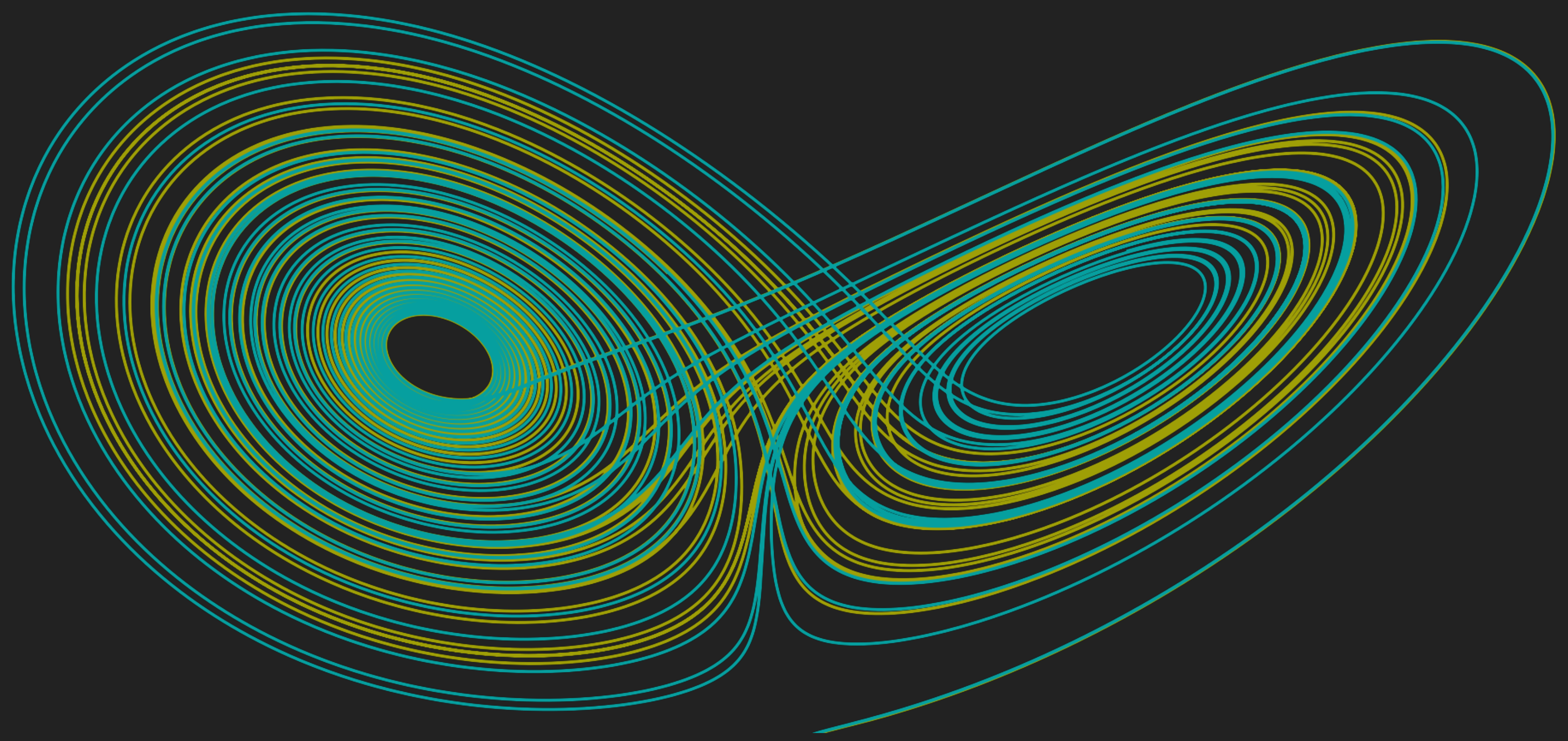
- アンリ・ポアンカレの3体問題に関する論文が起源
- 特殊な場合を除き安定軌道が存在しない
- 3体系はカオスである
- 我々の太陽系は安定か？

古典カオスの定義: バタフライ効果

- 解の初期条件をわずかに変えただけで軌道が大きく変わる
- 変化の割合は指数関数的に増大する

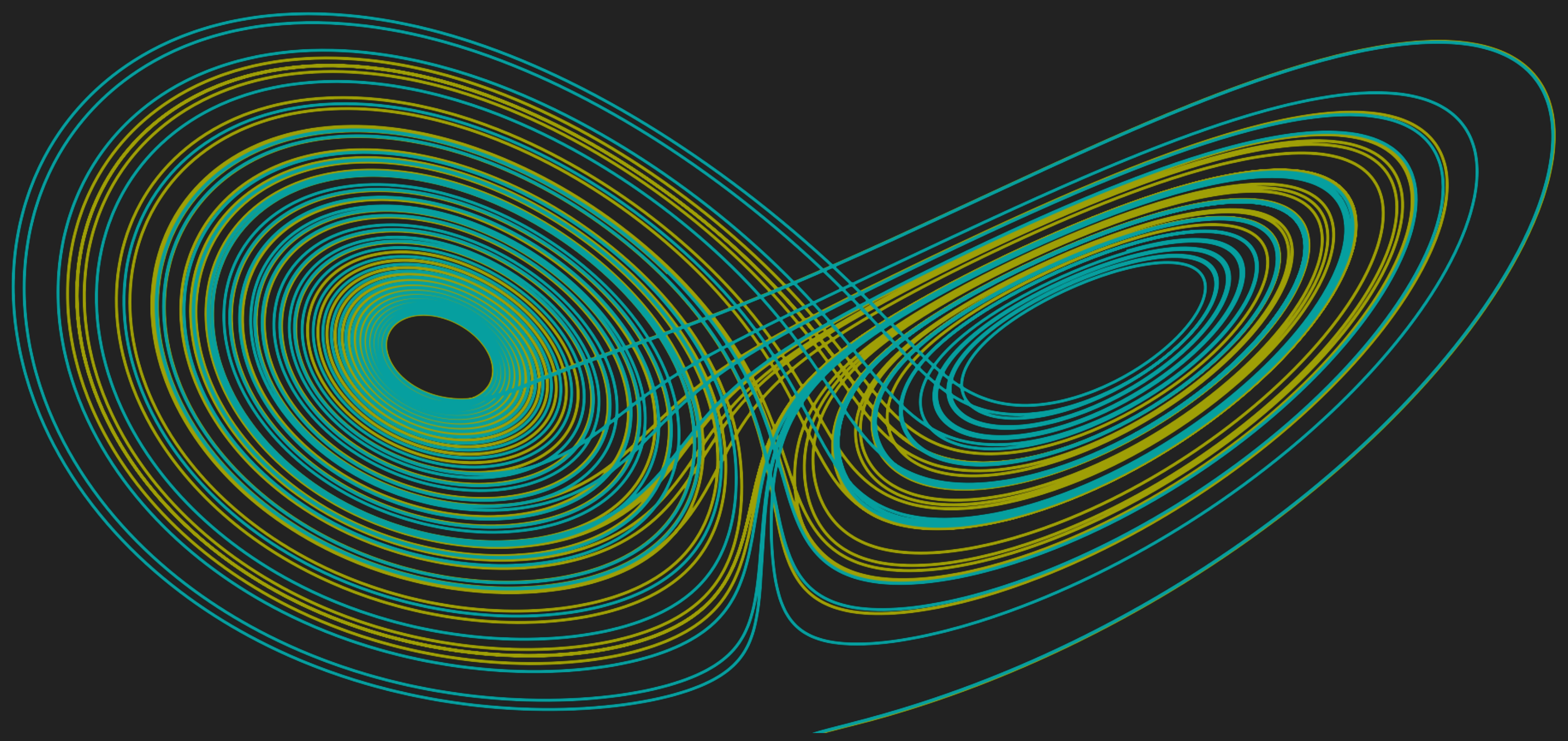
$$\frac{\delta x(t)}{\delta x(0)} \approx e^{\lambda t}$$

例: ローレンツカオス



$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \qquad \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \qquad \frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

例: ローレンツカオス



- 黄色と青の線は初期値を0.1だけずらしている
- 最初の方は重なっているが、渦の部分は綺麗にずれている

量子カオスとは何か

- 量子論なので古典カオスのような位相空間での定義は不可能
- 量子カオスの性質を調べる道具:

1. 時間順序外相関関数(OTOC)

$$C(t) = \langle [V(t), W(0)]^2 \rangle$$

2. スペクトラル形状因子

$$g(t) = \frac{\langle Z(\beta - it)Z(\beta + it) \rangle}{\langle Z(\beta)^2 \rangle}$$

量子カオスの分野の意義：普遍性

- 量子カオスは一見して関係なさそうな広いクラスの量子系に渡ってある統計的な振る舞いとして見られる
    - Rayleigh 分布に従う散乱問題における縦波の強度
    - 重い原子核同士の衝突による中性子散乱問題におけるEricsonゆらぎ
    - カオス量子ドットのコンダクタンスゆらぎ

量子カオスの分野の意義：普遍性

- 広いクラスの問題に応用できる
  - 重い原子核内の陽子中性子共鳴
  - 非可換ゲージ背景場のDiracスペクトラム
  - 原子や分子のスペクトル
  - 量子情報
  - Etc…

OTOC

$$C(t) = \langle [V(t), W(0)]^2 \rangle \sim e^{\lambda t}$$

- 系の持つリャプノフ指数はOTOCの初期の振る舞いから求められる
- 交換子の中の演算子として位置と運動量を選び、準古典近似を施してポアソン括弧に置き換えると古典カオスのバタフライ効果と一致する
- OTOCはバタフライ効果を量子論に拡張したもの

スペクトラル形状因子

$$g(t) = \frac{\langle Z(\beta - it)Z(\beta + it)\rangle}{\langle Z(\beta)^2\rangle}$$

SYK 模型とリパラメトリゼーション不変性

SYK模型の作用：

$$\frac{I}{N} = -\frac{1}{2}\log\det\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Sigma\right) + \frac{1}{2}\int_0^\beta dt_1 dt_2 \left[\Sigma(t_1,t_2)G(t_1,t_2) - \frac{J^2}{q}G(t_1,t_2)^q\right]$$

- 低エネルギー領域でリパラメトリゼーション不変性を持つ
- 特に古典解として共形対称性を持つものを選べる
- これによりリパラメトリゼーション不変性は自発的に破れる

低エネルギー極限：　$\partial_t \approx 0$

SYK 模型とリパラメトリゼーション不変性

SYK模型の有効作用：

$$\frac{I}{N} = -\frac{1}{2}\log\det\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Sigma\right) + \frac{1}{2}\int_0^\beta dt_1 dt_2 \left[\Sigma(t_1, t_2)G(t_1, t_2) - \frac{J^2}{q}G(t_1, t_2)^q\right]$$

- 低エネルギー領域では4点関数に発散項が存在する
- これを処理するには低エネルギー領域から少しずれる
- これにより リパラメトリゼーション不変性は陽にも破れる

SYK 模型とホログラフィ原理

- 低エネルギー極限ではリパラメトリゼーション不変性が自発的に破れるのでゴールドストーンボソンが現れる
- 低エネルギー極限から少しずれるとゴールドストーンボソンがシュワルツ微分で与えられる作用に従う
- このシュワルツ作用がSYK作用への主要な寄与となるため、SYK模型はこの領域では（ほぼ）シュワルツ理論と考えて良い

$$\frac{I}{N} \propto \int dt\ \{f, t\} = \int dt\ \left[\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right]$$

SYK 模型とホログラフィ原理

- シュワルツ理論はJackiw-Teitelboim ディラトン重力理論と等価である事が知られている
- 従ってSYK模型の重力双対理論は２次元AdSディラトン重力と期待される
- 厳密には共形対称性が少し破れているので、Near AdS/ Near CFT と称される

SYK模型の量子カオス的性質

- KitaevがOut-of-Time-Order Correlation function(OTOC)を用いてリャプノフ指数がchaos boundを満たす事を発見

$$\mathrm{OTOC} \propto \exp\left(\lambda_L t\right) \qquad \lambda_L = \frac{2\pi}{\beta}$$

- つまりSYK模型は量子カオス系であり、カオスの度合いが強い

- Chaos boundとは有限温度の量子論が持つリャプノフ指数の最大値で、重力理論も同じ値を満たす

Jackiw-Teitelboim 重力とは

- ２次元AdS重力はトポロジカルな理論なので有限の励起状態が存在しない
- より高次元の重力理論を２次元にコンパクト化するとディラトンの重力理論を得られる
- このディラトンは余剰次元の大きさのスケールとなる