

17SS208B

修士学位論文

量子カオスとしての Sachdev–Ye–Kitaev 模型とブラックホール

平成 30 年度

信州大学大学院総合理工学研究科

理学専攻・理科学分野

氏名 西村 滉祐

修士学位論文受理年月日

平成 31 年 1 月 31 日

目次

1	はじめに: SYK 模型とは	1
2	2 点関数	3
2.1	シュウィンガー・ダイソン方程式	3
2.2	共形不変性	4
2.3	ラージ q 極限	5
3	4 点関数	8
3.1	K_c の対角化	9
3.2	$h = 2$ の場合の取り扱い	16
3.3	4 点関数: 最終結果	23
4	リパラメトリゼーションの有効理論	24
5	SYK 模型の熱力学的諸量	26
6	量子カオスとしての SYK 模型	27
6.1	量子重力の揺らぎ	27
6.2	スペクトラル形状因子	29
6.3	スペクトラル形状因子の G 、 Σ による記述	34
7	量子カオスとしてのブラックホール	36
8	終わりに	37
付録 A	有効作用の計算	38
付録 B	係数 b の計算	41

1 はじめに: SYK 模型とは

Sachdev–Ye–Kitaev(SYK) 模型とは、Kitaev が AdS/CFT 対応の簡単な模型として提唱したものであり、そのハミルトニアンは次のように与えられる:

$$H = \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l=1}^N J_{ijkl} \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l. \quad (1)$$

ここで ψ はマヨラナフェルミオンである。また J_{ijkl} は乱数で与えられる時間に依らない反対称テンソルであり、その分布は

$$P(J_{ijkl}) = \sqrt{\frac{N^3}{12\pi J^2}} \exp\left(-\frac{N^3}{12J^2} J_{ijkl}^2\right). \quad (2)$$

に従う。このようなパラメータを持つ理論は quenched disorder を持つといい、この J_{ijkl} で取った平均を disorder average と呼ぶ。SYK 模型において次元を持つパラメータのひとつは (2) 式の J であり、 $[J] = 1$ である。(1) 式の大きさはこの J によって決まる。SYK 模型のヒルベルト空間は

$$L = 2^{N/2} \quad (3)$$

という次元を持つ。

SYK 模型を調べるモチベーションは複数あり、大別して以下の 3 つに分けることができる:

強結合領域で可解な模型である。ラージ N 極限を取るとリーディングオーダーでのファインマンダイアグラムが単純なものとなり、その和を取ることによって強結合領域での相関関数が計算可能である。

最大にカオスである。カオスはリャプノフ指数によって計られ、その最大値はアインシュタイン重力におけるブラックホールが持ち、 $2\pi/\beta$ となる [5]。強結合領域における SYK 模型もこの最大値を満たす事が知られている [1]。

共形不変性が現れる。低エネルギーでは 2 点関数が共形不変性を持つ。

大抵の場合、理論を解析する際には摂動論が適用できる範囲でしか計算する事ができないが、SYK 模型では一つ目の性質により強結合領域でも計算する事が可能であり、大きなモチベーションの一つとなっている。一つ目と二つ目を組み合わせると非常に興味深い。古典論では「可解である」という事と可積分系である事は等しく、従ってカオスとは相容れない [3]。これが量子論では必ずしもそうではない事を SYK 模型は示している。また二つ目と三つ目の性質により、何らかの形におけるアインシュタイン重力理論が AdS/CFT 対応での双対理論として期待される。

2 節では SYK 模型のラージ N 極限における構造を調べる。SYK 模型はある確率分布に従う乱数 J_{ijkl} を持つ。2 節の諸々の結果は J_{ijkl} に対して平均操作を施したものである。この結果、2 つの双局所場 (bi-local field) $G(t_1, t_2)$ と $\Sigma(t_1, t_2)$ が現れる。分配関数においてフェルミオンを積分して取り払うと、これらの双局所場についての作用を得る事ができ、 G や Σ について変分を取ればそれらに関する運動方程式 (シュウィンガー・ダイソン方程式) を得る。 G の古典解はフェルミオンの 2 点関数に等しい。シュウィンガー・ダイソン方程式は一般のエネルギースケールにおける解析解は知られておらず、数値的な計算がメインである。また低エネルギー極限では共形対称性を持ち、解析的な解の具体型も存在する。解析解が知られているケースはこの場合以外にも、相互作用するフェルミオンの数 q についてラージ極限を取った場合や、 $q = 2$ とした場合もある (ただし本論文では $q = 2$ のケースは重要ではないので扱わない)。特にラージ q について得た G を用いる事で自由エネルギーやエントロピーを $1/q$ で展開した表式で得る事ができる。これらの諸々の熱力学的量は後の量子カオスにおける性質を述べる上で重要な役割を持つ。

3 節では 4 点関数の解析解について述べる。特にラージ N におけるリーディングオーダー \mathcal{F} を調べるのだが、ダイアグラムは書き下せても一般的な解析解は知られていない。 \mathcal{F} に寄与するダイアグラムはラダーダイアグラムと呼ばれるものであり、 \mathcal{F} はその総和で与えられる。ラダーダイアグラムは図 4 のように、両側にルールがあり、それに接するように内側に輪が存在する。 n 個、および $n + 1$ 個の輪を持つダイアグラムの間には積分核 K で与えられる漸化式が存在し、ダイアグラムの総和は K の幾何級数で与えられる。従ってリーディングオーダーは $\mathcal{F} = \frac{1}{1-K} \mathcal{F}_0$ で与えられる。ここで \mathcal{F}_0 は輪を持たないダイアグラムである。概念的には簡単であるが、 K の作用する関数空間についてある程度理解する必要がある、実際の計算はとても複雑である。そこで 2 点関数では共形極限における解析解 G_c が調べられている事を思い出し、4 点関数でもそれを用いる事にする。基本的に 4 点関数のリーディングオーダー \mathcal{F} は 2 点関数で構成されるので、原理的には G_c を用いて解析は可能であり、実際に解を導く。ただしそれでも、そこまでの道のりがかなり長い。一次元における共形対称性は $SL(2, \mathbb{R})$ であり、これを K の対角化において活用する。これによって一応の計算結果が示されるが、結果の表式に存在する級数は発散する項を含む。この発散項は、 $K = 1$ となるような K の固有関数の存在によってもたらされる。この発散を処理するためには、リパラメトリゼーション不変性の成り立つ低エネルギー極限から少し高エネルギー側にずれる必要がある。すなわち、有限な解ではリパラメトリゼーション不変性は自発的にも、また陽にも破れる。発散項はこれによって有限になり、共形対称性を持たない。

2 2点関数

ここではラージ N における SYK 模型の 2 点関数について述べる。最初に 2 点関数の従うシュウィンガー・ダイソン方程式を示し、そこからリーディングオーダーで寄与するファインマンダイアグラムがメロンダイアグラムと呼ばれるものである事を見る。

次にシュウィンガー・ダイソン方程式が低エネルギー極限でリパラメトリゼーション不変性を持つ事を見る。この不変性は、古典解として共形対称性を持つものを選ぶ事によって自発的に破れる。この共形古典解を用いて、第 3 節で 4 点関数の解析を行う。

シュウィンガー・ダイソン方程式の解析解は共形古典解の他にも、相互作用するフェルミオンの数 q についてラージ極限を取ったものや、 $q = 2$ の時にも知られている。ただし本論文では $q = 2$ のケースは重要ではないので扱わない。特にラージ q については自由エネルギーやエントロピーにも触れる。

2.1 シュウィンガー・ダイソン方程式

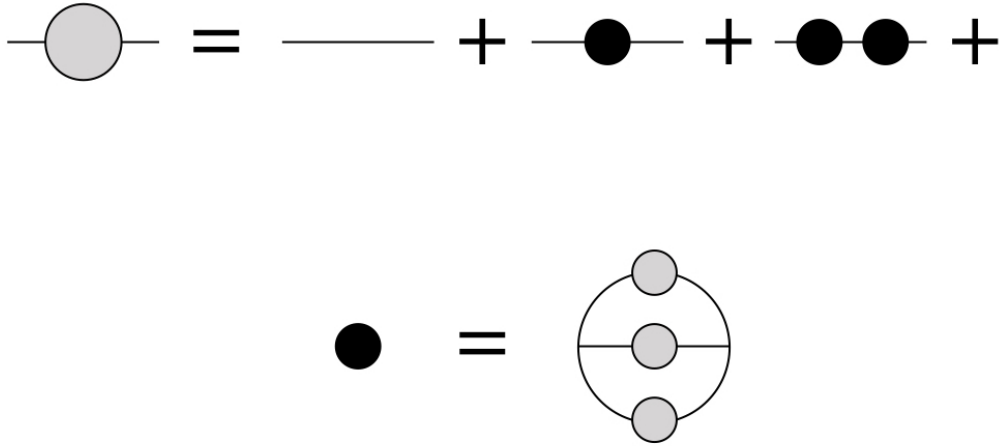


図 1 ラージ N 極限において 2 点関数に寄与する最初の補正ダイアグラム。特に $q = 4$ の場合について描画している。灰色の丸と黒い丸はそれぞれ完全な 2 点関数および 1 粒子相互作用を表している。

SYK 模型の作用は

$$I = \int dt \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \psi_i \frac{d}{dt} \psi_i - \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l=1}^N J_{ijkl} \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l \right) \quad (4)$$

である。これを J_{ijkl} について期待値を取り、その後フェルミオンを積分するために 2 つの双局所

場 $G(t_1, t_2)$, $\Sigma(t_1, t_2)$ を導入すると

$$\frac{I_{\text{eff}}}{N} = -\frac{1}{2} \log \det \left(\frac{d}{dt} - \Sigma \right) + \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 \left(\Sigma G - \frac{J^2}{4} G^4 \right) \quad (5)$$

を得る^{*1}。 Σ は $G = \frac{1}{N} \sum_j \psi_j(t_1) \psi_j(t_2)$ とするようなラグランジュの未定乗数である。(5) 式の停留点が次式のシュウィンガー・ダイソン方程式を与える:

$$G(\omega)^{-1} = -i\omega - \Sigma(\omega), \quad \Sigma(t) = J^2 G(t)^3 \quad (6)$$

なお、SYK 模型では 4 つのフェルミオンが相互作用するとしているが、その数を q として一般化しても有効作用やシュウィンガー・ダイソン方程式は計算する事ができ、それぞれ

$$\frac{I_{\text{eff}}}{N} = -\frac{1}{2} \log \det \left(\frac{d}{dt} - \Sigma \right) + \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 \left(\Sigma G - \frac{J^2}{q} G^q \right) \quad (7)$$

$$G(\omega)^{-1} = -i\omega - \Sigma(\omega), \quad \Sigma(t) = J^2 G(t)^{q-1} \quad (8)$$

である。さらに複数の q について相互作用項を足し合わせたような一般化した SYK 模型も調べられており、[4] にて詳しく論じられている。

ラージ N 極限を施した SYK 模型において、リーディングオーダーで 2 点関数に寄与するファインマンダイアグラムは「メロンダイアグラム」と呼ばれている^{*2}。(8) 式の一般の ω における解析的な計算は現在のところ知られていないが、数値的には可能であり、図 1 のダイアグラムのよう
に再帰的に計算を走らせる事で 2 点関数のグラフをプロットできる。

2.2 共形不変性

シュウィンガー・ダイソン方程式 (8) は $\omega = 0$ という低エネルギー極限においては解析的な解が知られている。この時 (8) 式の一つ目の式は

$$\Sigma(\omega)G(\omega) = -1 \quad (9)$$

となり、この両辺にフーリエ変換を施す事でシュウィンガー・ダイソン方程式は

$$\int dt G(t_1, t) \Sigma(t, t_2) = -\delta(t_1 - t_2), \quad \Sigma(t_1, t_2) = J^2 (G(t_1, t_2))^{q-1} \quad (10)$$

と書き改める事ができる。これらの 2 つの式は次のようなりパラメトリゼーション不変性を持つ:

$$G(t_1, t_2) \rightarrow (f(t_1)f(t_2))^{\Delta} G(f(t_1), f(t_2)), \quad \Sigma(t_1, t_2) \rightarrow (f(t_1)f(t_2))^{1-\Delta} \Sigma(f(t_1), f(t_2)). \quad (11)$$

^{*1} 詳しい計算は付録 A を参照すること。

^{*2} このメロンは watermelon の melon であってメロンではないらしい。どの辺がスイカなのかはよく分からない。

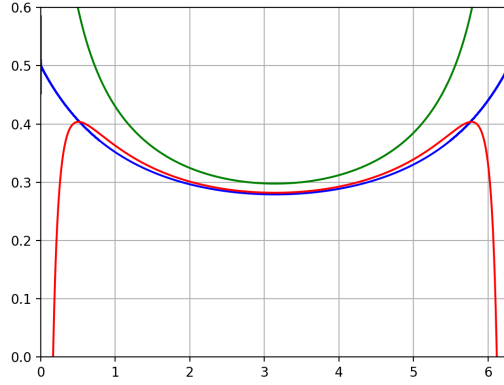


図2 $J = 10$ としてプロットした2点関数。横軸は時間である。青色の線が一般の ω , 緑色の線が $\omega = 0$, 赤色の線が低エネルギー極限に J^{-1} 補正を加えたものである。

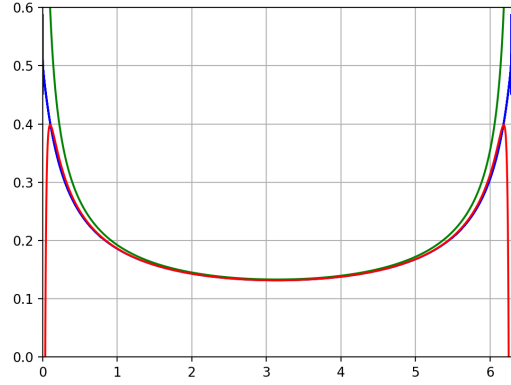


図3 $J = 50$ としてプロットした2点関数。横軸は時間である。各色の意味は左図と同様。低エネルギー極限はラージ J 極限でもあるので、左図と比べて各線は互いに近づく。

ここで $\Delta = 1/q$ である。この不変性は、解として次のような形を仮定すると共形対称性に自発的に破れる:

$$G_c(t) = \frac{b}{|t|^{2\Delta}} \text{sgn}(t), \quad \text{or} \quad G_c(t) = b \left[\frac{\pi}{\beta \sin(\pi t/\beta)} \right]^{2\Delta} \text{sgn}(t) \quad (12)$$

2番目の式は有限温度の場合の解であり、パラメータ t を $f(t) = \tan(\pi t/\beta)$ と変換して得る。図2および図3において G_c を緑色の線でプロットしたところ、一般の ω からは少しずれた。係数 b は

$$J^2 b^q \pi = \left(\frac{1}{2} - \Delta \right) \tan(\pi \Delta) \quad (13)$$

から決める事ができる*3。

2.3 ラージ q 極限

SYK 模型ではラージ q 極限においても(あるオーダーで)解析解が知られている。ここでは $1/q$ オーダーおよび $1/q^2$ オーダーまでの解を述べる。

2.3.1 リーディングオーダー

まず最初に $1/q$ オーダーでの解を考える(q は偶数とする):

$$G(t) = \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \left(1 + \frac{1}{q} g(t) \right), \quad \Sigma(t) = J^2 2^{1-q} \text{sgn}(t) e^{g(t)}. \quad (14)$$

*3 詳しくは付録Bを参照。

一方で $G(t)$ をフーリエ変換したものは

$$\frac{1}{G(\omega)} = \frac{1}{-\frac{1}{i\omega} + \frac{[\text{sgn} \times g](\omega)}{2q}} = -i\omega + \omega^2 \frac{[\text{sgn} \times g](\omega)}{2q} = -i\omega - \Sigma(\omega) \quad (15)$$

で与えられる。ここで $[\text{sgn} \times g](\omega)$ は $\text{sgn}(t)g(t)$ の積のフーリエ変換を表す。また2番目の等号は $1/q$ で展開した。3番目の等号より

$$\Sigma(\omega) = -\omega^2 \frac{[\text{sgn} \times g](\omega)}{2q} \quad (16)$$

を得るので、これを更にフーリエ変換したものと (14) 式の $\Sigma(t)$ を比べると次のような微分方程式を得る:

$$\partial_t^2(\text{sgn}(t)g(t)) = 2\mathcal{J}^2 \text{sgn}(t)e^{g(t)}, \quad \mathcal{J} \equiv \sqrt{q} \frac{J}{2^{\frac{q-1}{2}}}. \quad (17)$$

$q \rightarrow \infty$ の極限で \mathcal{J} は固定されているものとする。この微分方程式の一般解は次のような形をしている事が知られている:

$$e^{g(t)} = \frac{c^2}{\mathcal{J}^2} \frac{1}{\sin^2(c|t| + t_0)}. \quad (18)$$

我々が興味ある解は、 $g(0) = 0$ かつ $g(\beta) = 0$ を満たすものである。なぜなら J は質量次元が1であり、したがって (17) 式が有効となるようなスケールの t が常に存在する。特に $t = 0$ は J のスケールで言い換えれば UV 領域なので、理論は相互作用なしの場合のものになるからである。これを考慮すると、

$$e^{g(t)} = \left[\frac{\cos \frac{\pi v}{2}}{\cos \left(\pi v \left(\frac{1}{2} - \frac{|t|}{\beta} \right) \right)} \right]^2, \quad \beta \mathcal{J} = \frac{\pi v}{\cos \frac{\pi v}{2}} \quad (19)$$

を得る。2つ目の式によってパラメータ $v \in [0, 1]$ を決定する。

2.3.2 サブリーディングオーダー^{*4}

次に我々は $1/q^2$ のオーダーを計算する (q は偶数とする):

$$G(t) = \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \left(1 + \frac{1}{q} g(t) + \frac{1}{q^2} h(t) \right). \quad (20)$$

自己エネルギー $\Sigma(t)$ は (10) 式より

$$\Sigma(t) = \frac{\mathcal{J}^2}{q} \text{sgn}(t) e^g \left(1 + \frac{1}{q} \left(h - g - \frac{1}{2} g^2 \right) \right) \quad (21)$$

^{*4} この節の内容は [10] による。

となる。以下では $t \in [0, \beta]$ とする (従って $\text{sgn}(t) = 1$ である)。 $G(\omega)^{-1}$ を (20) 式を用いて $1/q^2$ まで展開すると

$$G(\omega)^{-1} = -i\omega + \frac{1}{2q}\omega^2 g(\omega) + \frac{\omega^2}{2q^2} \left(h(\omega) + \frac{i\omega}{2}[g \times g](\omega) \right) = -i\omega - \Sigma(\omega) \quad (22)$$

となるので、フーリエ変換された自己エネルギーとして

$$\Sigma(\omega) = -\frac{1}{2q}\omega^2 g(\omega) - \frac{\omega^2}{2q^2} \left(h(\omega) + \frac{i\omega}{2}[g \times g](\omega) \right) \quad (23)$$

を得る。これを ω から t へ逆変換したものと (21) を比べれば、(17) 式及び $h(t)$ に関する微分方程式を得る:

$$\partial_t^2 h = 2\mathcal{J}^2 e^g h + \frac{1}{2}\partial_t^3 [g \times g] - 2\mathcal{J}^2 e^g \left(g + \frac{1}{2}g^2 \right). \quad (24)$$

リーディングオーダーの場合と同様に g と h は次の境界条件を満たすとする:

$$g(0) = g(\beta) = h(0) = h(\beta) = 0. \quad (25)$$

この時 $g(t)$ は (19) 式で与えられる。また (24) 式の解は次式で与えられる:

$$\begin{aligned} h(x) = & \frac{1}{2}g^2(x) - 2L(x) - 4 \left(\tan x \int_0^x dy L(y) + 1 \right) \\ & + 4 \frac{1 + x \tan x}{1 + \frac{\pi v}{2} \tan \frac{\pi v}{2}} \left(\tan \frac{\pi v}{2} \int_0^{\frac{\pi v}{2}} dy L(y) + 1 \right). \end{aligned} \quad (26)$$

ここで $x = \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi v}{\beta}t$ 、また

$$L(x) = g(x) - e^{-g(x)} \text{Li}_2(1 - e^{g(x)}) \quad \left(\text{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \right) \quad (27)$$

である*5。

*5 $\text{Li}_2(z)$ は <http://mathworld.wolfram.com/Dilogarithm.html> を参照した。

3 4 点関数

この節では強結合領域 $\beta J \gg 1$ における 4 点関数を論じる。disorder-average を取る事によって最も一般的な 4 点関数は

$$\langle \psi_i(t_1) \psi_i(t_2) \psi_j(t_3) \psi_j(t_4) \rangle \quad (28)$$

という形に制限される。これを i と j について平均を取ったものを考える:

$$\frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \langle \psi_i(t_1) \psi_i(t_2) \psi_j(t_3) \psi_j(t_4) \rangle = G(t_{12})G(t_{34}) + \frac{1}{N} \mathcal{F}(t_1, \dots, t_4). \quad (29)$$

以下では \mathcal{F} について解析する。

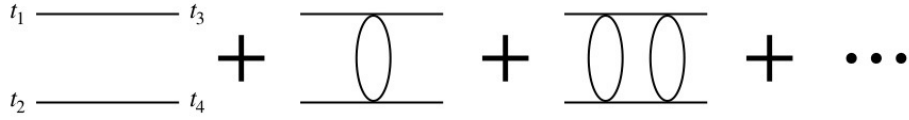


図 4 (29) 式の $1/N$ の項を表すダイアグラム。特に $q = 4$ の場合について描画した。ラダーダイアグラムと呼ぶ。

\mathcal{F} を表すダイアグラムはラダーダイアグラムである (図 4)。 n 個の輪があるものを \mathcal{F}_n とすると、計算するべきは

$$\mathcal{F} = \sum_n \mathcal{F}_n \quad (30)$$

である。図 4 の最初にある輪を持たないラダーダイアグラムは単なるプロパゲーターの積である:

$$\mathcal{F}_0(t_1, \dots, t_4) = -G(t_{13})G(t_{24}) + G(t_{14})G(t_{23}). \quad (31)$$

次に並ぶ、輪を 1 個だけ持つラダーダイアグラムでは、輪の端の位置について積分した形で与えられる:

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_1(t_1, \dots, t_4) \\ &= J^2(q-1) \int dt dt' \left(G(t_1 - t)G(t_2 - t')G(t - t')^{q-2}G(t - t_3)G(t' - t_4) - (t_3 \leftrightarrow t_4) \right). \end{aligned} \quad (32)$$

積分の前にある $q-1$ という因子は、どの線をレールや輪にするかのパターン数に起因する。上述した 2 つのラダーダイアグラム \mathcal{F}_0 、 \mathcal{F}_1 に限らず、全てのラダーダイアグラムは $1/N$ に比例する。

あるラダーダイアグラム \mathcal{F}_n と次の \mathcal{F}_{n+1} の間には

$$\mathcal{F}_{n+1}(t_1, \dots, t_4) = \int dt dt' K(t_1, t_2; t, t') \mathcal{F}_n(t, t', t_3, t_4) \quad (33)$$

という漸化式的な関係がある。ここで積分核 K は

$$K(t_1, t_2; t_3, t_4) = -J^2(q-1)G(t_{13})G(t_{24})G(t_{34})^{q-2} \quad (34)$$

である。(33) 式の計算では、 K の最初の 2 つの変数を 1 つめの添字、残りの 2 つを 2 つ目の添字と見なす事によって積分を行列計算としてしまうのが便利である (行列 K は 2 変数反対称関数の空間に作用する)。こうする事で全てのラダーダイアグラムの総和を

$$\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n = \sum_{n=0}^{\infty} K^n \mathcal{F}_0 = \frac{1}{1-K} \mathcal{F}_0 \quad (35)$$

という様に表す事ができる。これを更に計算するために、以下では K を対角化する事を考える。(34) 式による定義では K は対称行列ではないが、次のような操作により対称化する事が可能である:

$$\tilde{K}(t_1, t_2; t_3, t_4) \equiv |G(t_{12})|^{\frac{q-2}{2}} K(t_1, t_2; t_3, t_4) |G(t_{34})|^{\frac{2-q}{2}}. \quad (36)$$

従って K は固有関数 (固有ベクトル) の完全系を持つとして良い。

3.1 K_c の対角化

ここまでの話は一般の βJ について成り立つ。解析を進めるために、以下では共形対称性の成り立つ極限 $\beta J \gg 1$ で考える。よって 2 点関数は (12) 式の $G_c(t)$ で与えられる。(12) 式を (34) 式に代入すると、 K の共形不変なものとして

$$K_c(t_1, t_2; t_3, t_4) = -\frac{1}{\alpha_0} \frac{\text{sgn}(t_{13})\text{sgn}(t_{24})}{|t_{13}|^{2\Delta}|t_{24}|^{2\Delta}|t_{34}|^{2-4\Delta}} \quad (37)$$

を得る。ここで

$$\alpha_0 \equiv \frac{2\pi q}{(q-1)(q-2) \tan \frac{\pi}{q}} \quad (38)$$

である。 K_c を対角化した暁には、実は固有関数の中に固有値 $k_c(h) = 1$ を持つものも存在する。従って (35) 式の級数は発散するが、これは共形極限から摂動的に少しずれる事によって対処する事ができる。それを議論するまでは、ひとまず (37) 式を用いる事にする。

K_c の対角化では共形不変性を活用する事になる。SYK 模型は時間 1 次元しか持たないので、1 次元共形場理論 CFT_1 であり*6、共形変換群は $SL(2, \mathbb{R})$ で与えられる [11]:

$$\hat{D} = -t\partial_t - \Delta, \quad \hat{P} = \partial_t, \quad \hat{K} = t^2\partial_t + 2t\Delta, \quad (39)$$

*6 1 次元の場の量子論は本質的に量子力学なので、Conformal Quantum Mechanics の頭文字を取って CQM と表記する事もある。

$$[\hat{D}, \hat{P}] = \hat{P}, \quad [\hat{D}, \hat{K}] = -\hat{K}, \quad [\hat{P}, \hat{K}] = -2\hat{D}. \quad (40)$$

これらの生成子は K_c と交換し、

$$(\hat{D}_1 + \hat{D}_2)K_c(t_1, t_2; t_3, t_4) = K_c(t_1, t_2; t_3, t_4)(\hat{D}_3 + \hat{D}_4) \quad (41)$$

となる。ただし、この可換性を示す計算の際に現れる表面項の取扱いには注意を要する。 K_c の固有関数を Ψ_h とすると、固有値方程式は

$$\int dt_1 dt_2 \Psi_h(t_1, t_2) K(t_1, t_2; t_3, t_4) = k_c(h) \Psi_h(t_3, t_4) \quad (42)$$

となり、(41) 式は正確に書けば

$$\begin{aligned} \int dt_1 dt_2 \left[(\hat{D}_1 + \hat{D}_2) \Psi_h(t_1, t_2) \right] K_c(t_1, t_2; t_3, t_4) \\ = (\hat{D}_3 + \hat{D}_4) \int dt_1 dt_2 \Psi_h(t_1, t_2) K_c(t_1, t_2; t_3, t_4) \\ = k_c(h) \left[(\hat{D}_3 + \hat{D}_4) \Psi_h(t_3, t_4) \right] \end{aligned} \quad (43)$$

である。この最初の行の積分を実行する際に現れる表面項は、後に K_c の固有関数は超幾何関数 ${}_2F_1$ のある特定の線型結合である事が判明するが、これを用いた場合のみ消滅する。 \hat{P} や \hat{K} についても同様である。

この対称性により、まずラダーダイアグラム \mathcal{F}_n は $SL(2, \mathbb{R})$ 不変の複比 (cross ratio)

$$\chi = \frac{t_{12}t_{34}}{t_{13}t_{24}} \quad (44)$$

の関数である事が示唆される。これは \mathcal{F}_0 が共形 4 点関数のように変換するからである。この性質は $SL(2, \mathbb{R})$ 不変の演算子を作用させても変わらない。従って $K_c(t_1, t_2; t_3, t_4)$ とする代わりに $K_c(\chi; \tilde{\chi})$ とする事ができる。2 つ目の示唆は、 K_c が次式で与えられるカシミール演算子 C_{1+2} と可換というものである:

$$\begin{aligned} C_{1+2} &= (\hat{D}_1 + \hat{D}_2)^2 - \frac{1}{2}(\hat{K}_1 + \hat{K}_2)(\hat{P}_1 + \hat{P}_2) - \frac{1}{2}(\hat{P}_1 + \hat{P}_2)(\hat{K}_1 + \hat{K}_2) \\ &= 2(\Delta^2 - \Delta) - \hat{K}_1 \hat{P}_2 - \hat{P}_1 \hat{K}_2 + 2\hat{D}_1 \hat{D}_2. \end{aligned} \quad (45)$$

スペクトラムに縮退はないため、これは K_c の固有関数が C_{1+2} のそれと同じであることを意味する。(35) 式を C_{1+2} の固有関数 $\Psi_h(\chi)$ で展開すれば、何らかの内積を用いて

$$\mathcal{F}(\chi) = \sum_h \Psi_h(\chi) \frac{1}{1 - k_c(h)} \frac{\langle \Psi_h, \mathcal{F}_0 \rangle}{\langle \Psi_h, \Psi_h \rangle} \quad (46)$$

と変形できる。よって我々が行うべき仕事は Ψ_h と $k_c(h)$ を求め、そして内積を計算する事である。そのために、まず χ の関数としての \mathcal{F}_n の性質を調べる事から始める。

3.1.1 $\mathcal{F}_n(\chi)$ の性質

共形極限では、ラダーダイアグラム \mathcal{F}_n は $SL(2, \mathbb{R})$ 変換のもとで次元 Δ を持つ 4 点関数として振る舞う:

$$\mathcal{F}_n(t_1, t_2; t_3, t_4) = G_c(t_{12})G_c(t_{34})\mathcal{F}_n(\chi). \quad (47)$$

t_1 と t_2 の間、および t_3 と t_4 の間の反対称性、さらに (t_1, t_2) と (t_3, t_4) の間の対称性や $SL(2, \mathbb{R})$ 変換を駆使すると、 $t_1 = 0, t_3 = 1, t_4 = \infty$ さらに $t_2 > 0$ という様に移す事ができ、 $\chi = t_2$ の値を正であるとして制限できる。(29) 式の時間順序積の存在により、 $\chi > 1$ か $\chi < 1$ かによって

$$\mathcal{F}_n(\chi) \approx \begin{cases} +\langle \psi_j(\infty)\psi_j(1)\psi_i(\chi)\psi_i(0) \rangle & 0 < \chi < 1 \\ -\langle \psi_j(\infty)\psi_i(\chi)\psi_j(1)\psi_i(0) \rangle & 1 < \chi < \infty \end{cases} \quad (48)$$

となる。

$\chi > 1$ の領域では、ある離散的な対称性が存在する。これを見るには

$$\frac{t-2}{t} = \tan \frac{\theta}{2} \quad (49)$$

として t を円周上に写像すると良い。 $t = 0, 1, \infty$ はそれぞれ $\theta = -\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ に写される。 $t_2 = \chi$ はある θ が対応する。対称性 $\theta \rightarrow -\theta$ によって $\chi \rightarrow \frac{\chi}{\chi-1}$ となる。

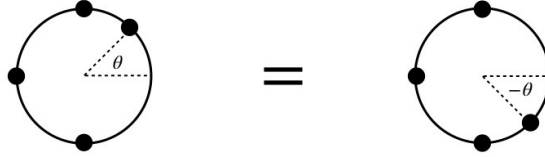


図5 $\theta \rightarrow -\theta$ という対称性は $\chi > 1$ において $\chi \rightarrow \frac{\chi}{\chi-1}$ と対応する。

これは $\chi > 1$ では $\mathcal{F}(\chi) = \mathcal{F}(\frac{\chi}{\chi-1})$ が成り立つ事を意味する。この変換は $1 < \chi < 2$ の区間を $2 < \chi < \infty$ へと写す事に注意すると、 $\mathcal{F}(\chi)$ を決定するには $0 < \chi < 2$ という区間で十分である事に気付く。また $\chi = 2$ は固定点なので、 \mathcal{F} の一階微分の $\chi = 2$ における値は 0 であるという条件もつく。

\mathcal{F}_{n+1} と \mathcal{F}_n の間の関係式 (33) 式を χ を用いて書き直すと

$$\mathcal{F}_{n+1}(\chi) = \int_0^2 \frac{d\tilde{\chi}}{\tilde{\chi}^2} K_c(\chi; \tilde{\chi}) \mathcal{F}_n(\chi) \quad (50)$$

となる。 $K_c(\chi; \tilde{\chi})$ は次式で与えられる:

$$K_c(\chi; \tilde{\chi}) = \frac{1}{\alpha_0} \left[\frac{\chi^{2\Delta} \tilde{\chi}^{2\Delta}}{|\chi - \tilde{\chi}|^{2\Delta}} m(\chi, \tilde{\chi}) + \text{sgn}(\tilde{\chi} - 1) \frac{\chi^{2\Delta} \tilde{\chi}^{2\Delta}}{|\chi + \tilde{\chi} - \chi\tilde{\chi}|^{2\Delta}} m\left(\chi, \frac{\tilde{\chi}}{\tilde{\chi}-1}\right) \right]. \quad (51)$$

ここで $m(\chi, \tilde{\chi})$ は次のような超幾何関数 ${}_2F_1$ で与えられる χ と $\tilde{\chi}$ に関して対称な関数である:

$$z \equiv \frac{1 - \min(\chi, \tilde{\chi})}{|\chi - \tilde{\chi}|}, \quad B_h(x) = \frac{\Gamma(h)^2}{\Gamma(2h)} x^h {}_2F_1(h, h, 2h, x) \quad (52)$$

という 2 つの記号を導入して、

$$m(\chi, \tilde{\chi}) = \frac{2\pi}{\sin 2\pi\Delta} {}_2F_1(1 - 2\Delta, 2\Delta, 1, z) - B_{2\Delta}\left(\frac{1}{1-z}\right) - B_{1-2\Delta}\left(\frac{1}{1-z}\right) \quad z \leq 0, \quad (53)$$

$$m(\chi, \tilde{\chi}) = -\frac{2\pi}{z^{2\Delta} \sin 2\pi\Delta} {}_2F_1\left(2\Delta, 2\Delta, 1, \frac{z-1}{z}\right) + \frac{2\pi}{\sin 2\pi\Delta} {}_2F_1(2\Delta, 1 - 2\Delta, 1, z) \quad 0 \leq z \leq 1, \quad (54)$$

$$m(\chi, \tilde{\chi}) = -\frac{2\pi}{\sin 2\pi\Delta} {}_2F_1(2\Delta, 1 - 2\Delta, 1, 1-z) - B_{2\Delta}\left(\frac{1}{z}\right) - B_{1-2\Delta}\left(\frac{1}{z}\right) \quad 1 \leq z \quad (55)$$

である。

3.1.2 カシミール演算子 C_{1+2} の固有関数

次にカシミール演算子 C_{1+2} の固有関数を求める。(45) 式から、 C_{1+2} は

$$C_{1+2} \frac{1}{|t_{12}|^{2\Delta}} f(\chi) = \frac{1}{|t_{12}|^{2\Delta}} \mathcal{C} f(\chi), \quad \mathcal{C} = \chi^2(1-\chi)\partial_\chi^2 - \chi^2\partial_\chi \quad (56)$$

を満たす。 \mathcal{C} の固有値を $h(h-1)$ とすると、固有値方程式は $\mathcal{C}f = h(h-1)f$ である。この一般解は超幾何関数 ${}_2F_1$ を用いて

$$\chi^h {}_2F_1(h, h, 2h, \chi), \quad x^{1-h} {}_2F_1(1-h, 1-h, 2-2h, \chi) \quad (57)$$

という 2 つの解の線型結合となる。それで張られる空間は $f'(2) = 0$ となるような関数の空間である。またこの関数空間の内積は (50) 式より

$$\langle g, f \rangle = \int_0^2 \frac{d\chi}{\chi^2} g^*(\chi) f(\chi) \quad (58)$$

のように与えられる。規格化はこの内積から計算される。 \mathcal{C} がエルミート演算子であるための条件は

$$0 = \langle g, \mathcal{C}f \rangle - \langle \mathcal{C}g, f \rangle = \int_0^2 d\chi \frac{d}{d\chi} \left[g^*(\chi)(1-\chi) \frac{d}{d\chi} f(\chi) - \frac{d}{d\chi} g^*(\chi)(1-\chi) f(\chi) \right] \quad (59)$$

である。 $\chi = 2$ では f や g^* の一階微分が 0 になる事から表面項は消える。また $\chi = 0$ においても f や g^* は $\chi^{1/2}$ よりも速く 0 となるという条件を課す事で消滅する。加えて (57) 式の固有関数は $\chi = 1$ にて対数発散が存在するため、もう 1 つの条件を課す必要がある。即ち、特異点を打ち消すためには

$$\begin{aligned} f &\approx A + B \log(1-\chi) & \text{for } \chi \rightarrow 1^-, \\ f &\approx A + B \log(\chi-1) & \text{for } \chi \rightarrow 1^+ \end{aligned}$$

のように定数項と対数の項が1に近づくにつれ一致していなければならない。

以上を踏まえて、カシミール演算子 C_{1+2} の固有関数 $\Psi_h(\chi)$ は次のように書き下す事ができる。
まず $1 < \chi$ の時は

$$\Psi_h(\chi) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{h}{2}) \Gamma(\frac{h}{2})}{\sqrt{\pi}} {}_2F_1\left(\frac{h}{2}, \frac{1}{2} - \frac{h}{2}, \frac{(2-\chi)^2}{\chi^2}\right) \quad \text{for } 1 < \chi \quad (60)$$

である。また $\chi < 1$ の時は

$$\Psi_h(\chi) = A \frac{\Gamma(h)^2}{\Gamma(2h)} \chi^h {}_2F_1(h, h, 2h, \chi) + B \frac{\Gamma(1-h)^2}{\Gamma(2-2h)} \chi^{1-h} {}_2F_1(1-h, 1-h, 2-2h, \chi) \quad \text{for } \chi < 1 \quad (61)$$

である。ここで A と B は

$$A = \frac{1}{\tan \frac{\pi h}{2}} \frac{\tan \pi h}{2}, \quad B = A(1-h) = -\tan \frac{\pi h}{2} \frac{\tan \pi h}{2} \quad (62)$$

与えられる。 $\chi > 1$ と $\chi < 1$ の両方の場合において $\Psi_h = \Psi_{1-h}$ という性質を持つ。最後に $\chi \rightarrow 0$ で Ψ_h は $\chi^{1/2}$ と同じかそれ以上に速く0に近づくという条件から、 h について次の2つの解が存在する: 1つ目は $h = \frac{1}{2} + is$ というものである。この時 $\Psi_h(\chi)$ は $1 < \chi$ で単調関数であり、また $1 > \chi$ で振動する (非常に多く振動する)。2つ目は $h = 2n, n \in \mathbb{N}$ であり、定数 B は消滅する。この解もまた $0 < 1 < \chi$ で単調関数であり、 $1 > \chi$ で振動する (0 を n 回横切る)。

3.1.3 K_c の固有値

C_{1+2} の固有関数 Ψ_h に縮退はないため、 K_c と C_{1+2} が可換であることから Ψ_h は K_c の固有関数でもある。原理的には (42) 式から固有値 $k_c(h)$ を計算できるが、ここではもっと単純な方法を取る。固有値 $h(h-1)$ を持つ C_{1+2} の固有関数は2つのフェルミオンの共形3点関数の形を持つ:

$$\frac{\text{sgn}(t_{12})}{|t_{10}|^h |t_{20}|^h |t_{12}|^{2\Delta-h}}. \quad (63)$$

これは任意の t_0 や h において K_c の固有関数である。 $SL(2, \mathbb{R})$ を用いて t_0 を動かす事が可能なため、固有値 $k_c(h)$ は h にのみ依存する。特に t_0 を無限大に持っていけば、固有値は (37) 式より

$$k_c(h) = \int dt_1 dt_2 K_c(1, 0; t_1, t_2) \frac{\text{sgn}(t_{12})}{|t_{12}|^{2\Delta-h}} = -\frac{1}{\alpha_0} \int dt_1 dt_2 \frac{\text{sgn}(1-t_1) \text{sgn}(-t_2) \text{sgn}(t_{12})}{|1-t_1|^{2\Delta} |t_2|^{2\Delta} |t_{12}|^{2-2\Delta-h}} \quad (64)$$

となる。この積分の実行には

$$\frac{\text{sgn}(t)}{|t|^a} = \int \frac{\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} c(a) |\omega|^{a-1} \text{sgn}(\omega), \quad c(a) = 2i2^{-a} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1-\frac{a}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{a}{2})} \quad (65)$$

を用いると良い。結果は

$$k_c(h) = \frac{1}{\alpha_0} \frac{c(2-2\Delta-h)}{c(2\Delta-h)} c(2\Delta)^2 \quad (66)$$

となる。 $k_c(h)$ は全ての $h = \frac{1}{2} + is$ や $h = 2n$ で実数となる。特に連続的なスペクトラムに対しては負、離散的なスペクトラムだと正となる。 $q = 4, \infty, 2$ の場合について具体的な式は

$$k_c(h) = -\frac{3}{2} \frac{\tan \frac{\pi(h-1/2)}{2}}{h - \frac{1}{2}} \quad q = 4, \quad (67)$$

$$k_c(h) = \frac{2}{h(h-1)} \quad q = \infty, \quad (68)$$

$$k_c(h) = -1 \quad q = 2 \quad (69)$$

となる。特に $q = 4, \infty$ の時 $k_c(h = 2) = 1$ となり、(35) の級数が発散する。この $h = 2$ についての正しい取り扱いは後に議論する。

3.1.4 $\langle \Psi_h, \Psi_h \rangle$ と $\langle \Psi_h, \mathcal{F}_0 \rangle$

次に (46) 式の計算に必要な 2 つの内積 $\langle \Psi_h, \Psi_h \rangle$ と $\langle \Psi_h, \mathcal{F}_0 \rangle$ を求める。連続的なスペクトラム $h = \frac{1}{2} + is$ に関しては

$$\langle \Psi_h, \Psi_h \rangle = \frac{\pi \tan \pi h}{4h - 2} 2\pi \delta(s - s') \quad (70)$$

で与えられ、また離散的なスペクトラム $h = 2n, n \in \mathbb{N}$ に関しては

$$\langle \Psi_h, \Psi_h \rangle = \frac{\delta_{hh'} \pi^2}{4h - 2} \quad (71)$$

となる。

χ の関数としての \mathcal{F}_0 は

$$\mathcal{F}_0(\chi) = \begin{cases} -\chi^{2\Delta} + \left(\frac{\chi}{1-\chi}\right)^{2\Delta} & 0 < \chi < 1, \\ -\chi^{2\Delta} - \left(\frac{\chi}{\chi-1}\right)^{2\Delta} & 1 < \chi < \infty \end{cases} \quad (72)$$

で与えられる。以下では内積 $\langle \Psi_h, \mathcal{F}_0 \rangle$ の計算には連続的なスペクトラムについてのみ考える。離散的なスペクトラムの場合は h について解析接続する事で得られる。固有関数 Ψ_h は連続スペクトラムにおいて次のような積分表示を持つ:

$$\Psi_h(\chi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{|\chi|^h}{|y|^h |\chi - y|^h |1 - y|^{1-h}}. \quad (73)$$

この積分表示を用いて $\langle \Psi_h, \mathcal{F}_0 \rangle$ の積分を行う。 $\chi \rightarrow \frac{\chi}{\chi-1}$ の変換で $\Psi_h(\chi) = \Psi_h\left(\frac{\chi}{\chi-1}\right)$ であるが、 \mathcal{F}_0 はこの変換で、 $\chi > 1$ の時は対称、 $\chi < 1$ の時は反対称となる。この性質を用いると

$$\langle \Psi_h, \mathcal{F}_0 \rangle = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy d\chi \frac{\text{sgn}(\chi)}{|\chi|^{2-h-2\Delta} |\chi - y|^h |1 - y|^{1-h} |y|^h} \quad (74)$$

を得る。この積分は、積分領域を分割し、それぞれの領域でオイラーの β 関数を用いると実行できる。便利な表式として

$$\langle \Psi_h, \mathcal{F}_0 \rangle = \frac{\alpha_0}{2} k_c(h) \quad (75)$$

というものがある。

3.1.5 全ラダーダイアグラムの総和

ここまでの議論を踏まえて、4点関数は

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\chi) &= \sum_h \Psi_h(\chi) \frac{1}{1 - k_c(h)} \frac{\langle \Psi_h, \mathcal{F}_0 \rangle}{\langle \Psi_h, \Psi_h \rangle} \\ &= \alpha_0 \int_0^\infty \frac{ds}{2\pi} \frac{2h-1}{\pi \tan \pi h} \frac{k_c(h)}{1 - k_c(h)} \Psi_h(\chi) + \alpha_0 \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{2h-1}{\pi^2} \frac{k_c(h)}{1 - k_c(h)} \Psi_h(\chi) \right]_{h=2n}\end{aligned}\quad (76)$$

となる。ここで1つの問題が生じる: $n=1$ の項は $k_c(2)=1$ より発散する。これを取り扱うには共形極限から少しずれた領域に行かなければならない。ここでは、ひとまず $h \neq 2$ となる固有関数のみを扱い、その寄与を $\mathcal{F}_{h \neq 2}$ とする。この時

$$\frac{2}{\tan \pi h} = \frac{1}{\tan \frac{\pi h}{2}} - \frac{1}{\tan \frac{\pi(1-h)}{2}} \quad (77)$$

という公式を使い、 s の積分領域を実数全体 $-\infty \rightarrow \infty$ に広げ、被積分関数が持つ $h \rightarrow 1-h$ の下での反対称性を用いて複数ある項を1つに直すと

$$\frac{\mathcal{F}_{h \neq 2}}{\alpha_0} = \int_{-\infty}^\infty \frac{ds}{2\pi} \frac{h-1/2}{\pi \tan(\pi h/2)} \frac{k_c(h)}{1 - k_c(h)} \Psi_h(\chi) + \sum_{n=2}^\infty \text{Res} \left[\frac{h-1/2}{\pi \tan(\pi h/2)} \frac{k_c(h)}{1 - k_c(h)} \Psi_h(\chi) \right]_{h=2n}. \quad (78)$$

となる。級数の項は $\frac{1}{\tan(\pi h/2)}$ の極の留数を走る総和として書いた。第1項目の被積分関数と第2項目の級数の中身が同じであるため、右辺全体を複素 h 平面のある曲線 \mathcal{C} 上の線積分として理解できる:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} dh = \int_{-\infty}^\infty \frac{ds}{2\pi} + \sum_{n=1}^\infty \text{Res}_{h=2n}. \quad (79)$$

ここで、 Ψ_h は $h = 1+2n$ に極を持つが、これは $1/\tan(\pi h/2) = \pm 1/\infty$ によって相殺される。従って全体では $h = 2n$ のみに極を持つ。

Ψ_h が $\chi > 1$ の場合 (60) 式と $\chi < 1$ の場合 (61) 式で違うため、この2つのケースで場合分けして考える。まず $\chi > 1$ の時、曲線 \mathcal{C} を s 軸から無限遠へ右にずらす事ができる。これによって $h = 2n$ における極の総和はキャンセルされるが、 $k_c(h) = 1$ となる $h = h_m$ における極を選ぶ事となり、

$$\mathcal{F}_{h \neq 2}(\chi) = -\alpha_0 \sum_{m=0}^\infty \text{Res} \left[\frac{h-1/2}{\pi \tan(\pi h/2)} \frac{k_c(h)}{1 - k_c(h)} \Psi_h(\chi) \right]_{h=h_m} \quad \chi > 1 \quad (80)$$

を得る (図 6)。

次に $\chi < 1$ の場合について考える。この場合は (61) 式の ${}_2F_1(1-h, 1-h, 2-2h, \chi)$ を大きい $h > 0$ に持っていく事ができないため、少し回り道をする必要がある。最初に、被積分関数の中の $\tan(\pi h/2)$ を $\tan(\pi h)$ に置き換えるために、 ${}_2F_1$ 以外の残りの部分が持つ $h \rightarrow 1-h$ の下での反

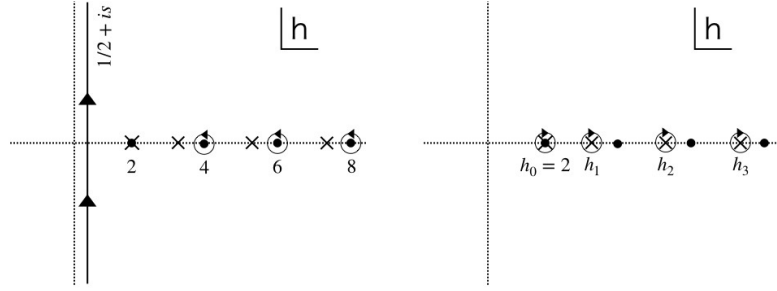


図 6 h 平面における極。 $h = 2n$ における極を点、 $k_c(h) = 1$ となるような $h = h_m$ における極をバツ印で表した。 $h = 2 = h_0$ では極が重なるため点とバツ印を重ねている。 h の連続スペクトラム $h = 1/2 + is$ の直線は右へずらす事ができ、点で表した $1/\tan(\pi h/2)$ の極を相殺し、バツ印の極を選ぶ事になる。

対称性を利用する。これによって $h \rightarrow 1 - h$ の下で対称となる被積分関数を得る。この対称性を使って (61) 式の B を A に置き換えれば、

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_{h \neq 2}(\chi)}{\alpha_0} &= \int \frac{ds}{2\pi} \frac{h - 1/2}{\pi \tan(\pi h/2)} \frac{k_c(h)}{1 - k_c(h)} \frac{\Gamma(h)^2}{\Gamma(2h)} \chi^h {}_2F_1(h, h, 2h, \chi) \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \text{Res} \left[\frac{h - 1/2}{\pi \tan(\pi h/2)} \frac{k_c(h)}{1 - k_c(h)} \frac{\Gamma(h)^2}{\Gamma(2h)} \chi^h {}_2F_1(h, h, 2h, \chi) \right]_{h=2n} \end{aligned} \quad (81)$$

という式に至る。ここで留数の総和において、 h が偶数の時 $\Psi_h(\chi) = \frac{\Gamma(h)^2}{\Gamma(2h)} \chi^h {}_2F_1(h, h, 2h, \chi)$ となる事を用いた。この被積分関数は $\chi > 1$ の場合のように右へずらす事が可能であり、選ぶべき留数が $k_c(h) = 1$ となる $h = h_m$ におけるものとなり、最終的に

$$\mathcal{F}_{h \neq 2} = -\alpha_0 \sum_{m=0}^{\infty} \text{Res} \left[\frac{h - 1/2}{\pi \tan(\pi h/2)} \frac{k_c(h)}{1 - k_c(h)} \frac{\Gamma(h)^2}{\Gamma(2h)} \chi^h {}_2F_1(h, h, 2h, \chi) \right]_{h=h_m} \quad \chi < 1 \quad (82)$$

を得る。

3.2 $h = 2$ の場合の取り扱い

K_c は固有値 $k_c(h) = 1$ を持つため、(35) 式の級数が発散する。 $k_c(h) = 1$ となるのは $h = 2$ における $SL(2, \mathbb{R})$ のカシミール演算子 C_{1+2} の固有関数である。4点関数の有限な解を得るために、 K を摂動的に共形極限から δK だけずらした場所でその固有関数を扱う必要がある。摂動による補正 δK は、 K を構成する2点関数 G の非共形極限におけるリーディングオーダーでの補正 δG から生じる。摂動パラメータは結合の大きさの逆数 $(\beta J)^{-1}$ である。

共形極限において、零温度と有限温度での両方の解 (12) 式は t のリパラメトリゼーション不変性によって互いに等しいものであったが、摂動 δK によって共形対称性が破れるため、2つの解を

等しいとする事はできない。そこで最初から有限温度で議論し、周期を β から 2π にするために角度座標 $\theta = 2\pi t/\beta$ を導入する。値の範囲は $\theta \in [0, 2\pi]$ である。これは $\beta = 2\pi$ と設定して議論を始めようとしているとも言える。 θ は周期的ユークリッド時間である。

また K を直接論じるよりも、それを対称化した \tilde{K} の方が話を進めやすい。(36) 式で $t \rightarrow \theta$ と変数変換すると

$$\tilde{K}(\theta_1, \theta_2; \theta_3, \theta_4) = -J^2(q-1)|G(\theta_{12})|^{\frac{q-2}{2}}G(\theta_{13})G(\theta_{24})|G(\theta_{34})|^{\frac{q-2}{2}} \quad (83)$$

となる。またこの積分核 \tilde{K} の反対称な固有関数を

$$\Psi_{h,n}^{\text{exact}}(\theta_1, \theta_2) = -\Psi_{h,n}^{\text{exact}}(\theta_2, \theta_1) \quad (84)$$

と書く事にする。ここで添字 h はあるラベルであり、後に詳しく説明する。また n はフーリエ展開した際の $e^{-in(\theta_1+\theta_2)/2}$ の中の n である。 \tilde{K} は次式で与えられる内積において対称となる：

$$\langle \Psi, \Phi \rangle \equiv \int_0^{2\pi} d\theta_1 d\theta_2 \Psi^*(\theta_1, \theta_2) \Phi(\theta_1, \theta_2). \quad (85)$$

4 点関数の表式を得るためには、輪を持たないラダーダイアグラム \mathcal{F}_0 が反対称単位行列

$$I(\theta_1, \dots, \theta_4) = -\delta(\theta_{13})\delta(\theta_{24}) + \delta(\theta_{14})\delta(\theta_{23}) = -2 \sum_{h,n} \Psi_{h,n}^{\text{exact}}(\theta_1, \theta_2) \Psi_{h,n}^{\text{exact}*}(\theta_3, \theta_4) \quad (86)$$

に作用する \tilde{K} に比例するという事を用いると良い。おおよそ $\mathcal{F} = (1 - \tilde{K})^{-1} \tilde{K} \cdot I$ の様に見える書き表す事ができ、より正確には

$$\left[(q-1)J^2 G(\theta_{12})^{\frac{q-2}{2}} G(\theta_{34})^{\frac{q-2}{2}} \right] \mathcal{F}(\theta_1, \dots, \theta_2) = 2 \sum_{h,n} \frac{k(h,n)}{1-k(h,n)} \Psi_{h,n}^{\text{exact}}(\theta_1, \theta_2) \Psi_{h,n}^{\text{exact}*}(\theta_3, \theta_4) \quad (87)$$

となる。ここで $k(h,n)$ は固有関数 $\Psi_{h,n}^{\text{exact}}(\theta_1, \theta_2)$ に対応する固有値である。適切な固有関数の完全系の下で、この 4 点関数の表式はあらゆるカップリングの大きさ βJ において正しい。

共形極限 $\beta J \gg 1$ に行くと、前節までの議論と接続できる。固有関数 $\Psi_{h,n}^{\text{exact}}$ は、 $SL(2, \mathbb{R})$ に属する固有値 $h(h-1)$ を持つカシミール演算子 C_{1+2} の固有関数 $\Psi_{h,n}$ となり、固有関数も $k(h,n) \rightarrow k_c(h)$ の様に h だけの関数になる。また (87) 式の n を走る総和は (t を $t = \tan \frac{\theta}{2}$ によって円周上に射影した後で) $\mathcal{F}_{h \neq 2}$ の Ψ_h が現れる表式を与える。

4 点関数の計算において $h = 2$ からは無限大の寄与を得てしまう。これはフーリエインデックス n について走る関数族 $\Psi_{2,n}$ によって与えられる。この無限大を対処するには、共形極限から少し離れて共形対称性を破った上でリーディングオーダーでの補正を求める必要がある。特に共形極限での固有値 $k_c(h)$ への補正を計算する：

$$k(2, n) = 1 - O\left(\frac{1}{\beta J}\right). \quad (88)$$

3.2.1 $\Psi_{2,n}$ の具体型

まず最初に $\Psi_{2,n}$ の具体型を求める。このためにリパラメトリゼーション不変性を活用する。共形極限におけるシュウィンガー・ダイソン方程式 (10) 式はリパラメトリゼーション不変性を持つ。これによって $\theta \rightarrow \theta + \epsilon(\theta)$ という様にリパラメトライズしたとすると変化分 $\delta_\epsilon G_c$ は

$$\delta_\epsilon G_c = \left[\Delta\epsilon'(\theta_1) + \Delta\epsilon'(\theta_2) + \epsilon(\theta_1) \frac{\partial}{\partial\theta_1} + \epsilon(\theta_2) \frac{\partial}{\partial\theta_2} \right] G_c \quad (89)$$

となり、 $G_c + \delta_\epsilon G_c$ もまた (10) 式の解となる。(10) 式の最初の式から

$$\delta_\epsilon G_c * \Sigma_c + G_c * \delta_\epsilon \Sigma_c = 0 \quad \therefore 0 = \delta_\epsilon G_c + G_c * [(q-1)J^2 G_c^{q-2} \delta_\epsilon G_c] * G_c = (1 - K_c) \delta_\epsilon G_c \quad (90)$$

を得る。ここで積 $*$ は

$$(F * G)(t_1, t_2) \equiv \int dt F(t_1, t) G(t, t_2) \quad (91)$$

を表す。つまり変化分 $\delta_\epsilon G_c$ は $1 - K_c$ を作用させる事により消滅する。書き換えれば $K_c \delta_\epsilon G_c = \delta_\epsilon G_c$ という固有値方程式になるため、 $\delta_\epsilon G_c$ は固有値 1 を持つ K_c の固有関数である。 \tilde{K}_c において対応する固有関数は $|G_c|^{\frac{q-2}{2}} \delta_\epsilon G_c$ である。

便利な基底を選ぶには $\epsilon \approx e^{-iny}$ とすると良い。(12) 式の有限温度の G_c を (89) 式に代入し、 $|G_c|^{\frac{q-2}{2}} \delta_\epsilon G_c$ を計算し、最後に内積 (85) 式を用いて規格化すると、 \tilde{K}_c の固有値 1 の固有関数として

$$\Psi_{2,n} = \gamma_n \frac{e^{-iny}}{2 \sin \frac{x}{2}} f_n(x), \quad f_n(x) = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\tan \frac{x}{2}} - n \cos \frac{nx}{2}, \quad (92)$$

$$x = \theta_1 - \theta_2, \quad y = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad \gamma_n^2 = \frac{3}{\pi^2 |n| (n^2 - 1)} \quad (93)$$

を得る。 $\Psi_{2,n}$ はカシミール演算子 C_{1+2} の $h=2$ の固有関数でもある。また $n = -1, 0, 1$ の場合、 G_c の $SL(2, \mathbb{R})$ 共変性により変化分 $\delta_\epsilon G_c$ は消滅する。従って $|n| \geq 2$ の場合のみ考えれば良い。 $n \geq 2$ に対して、 $\Psi_{2,n=2}$ に $\hat{P}_1 + \hat{P}_2$ を作用させる事により全ての $\Psi_{2,n}$ を得る事ができ、従って $SL(2, \mathbb{R})$ のある表現を構成する。 $n \leq -2$ の場合も同様である。

3.2.2 固有値への補正

ここでは $h=2$ の固有値 $k(2, n)$ の共形極限での値 $k_c(h=2) = 1$ に対する $(\beta J)^{-1}$ 補正を、相互作用するフェルミオンの数 q のラージ極限において計算する。伝搬関数は (14) 式、また $g(\theta)$ は (19) 式より与えられる。ラダーダイアグラムの梯子のレールの部分の伝搬関数は

$$G(\theta) = \frac{1}{2} \text{sgn}(\theta), \quad (94)$$

また輪の部分は (q を偶数として)

$$G(\theta)^{q-2} = \frac{1}{2^{q-2}} \left(1 + \frac{g(\theta)}{q}\right)^{q-2} \rightarrow \frac{1}{2^{q-2}} e^{g(\theta)} \quad \text{for } q \rightarrow \text{large} \quad (95)$$

となる。これらを用いると固有値方程式 $\tilde{K}\Psi = k\Psi$ は

$$-J^2 q \int d\theta_1 d\theta_2 \frac{\text{sgn}(\theta_{13})}{2} \frac{\text{sgn}(\theta_{24})}{2} \frac{e^{(g(\theta_{12})+g(\theta_{34}))/2}}{2^{q-2}} \Psi(\theta_1, \theta_2) = k\Psi(\theta_3, \theta_4) \quad (96)$$

と表される。この固有値方程式の両辺に $\partial_{\theta_3} \partial_{\theta_4} e^{g(\theta_{34})/2}$ を作用させ、 $\partial_x \text{sgn}(x) = 2\delta(x)$ を用いる積分を解消して微分方程式に直す事ができる。(19) 式の e^g を代入し、固有値を $k = 2/h(h-1)$ のようにパラメトライズし、フーリエ変換した上で解くと

$$\Psi(\theta_1, \theta_2) = \frac{e^{-iny}}{\sin \frac{\tilde{x}}{2}} \psi_n(x), \quad \tilde{x} = vx + (1-v)\pi, \quad (97)$$

$$\left(n^2 + 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{h(h-1)v^2}{\sin^2 \frac{\tilde{x}}{2}} \right) \psi_n(x) = 0 \quad (98)$$

という解を得る。ここで v は (19) 式の 2 つ目の式によって定義される。 x と y は (93) 式で与えられる。 $v = 1$ の時は $\beta\mathcal{J} \rightarrow \infty$ であり、(98) 式は共形変換群 $SL(2, \mathbb{R})$ のカシミール演算子 C_{1+2} の固有関数を与える方程式となる。ここで \mathcal{J} は (17) 式の 2 つ目の式で与えられる、ラージ q で一定となるようにリスケールされた相互作用の大きさである。しかし (98) 式は任意の $\beta\mathcal{J}$ に対してラージ q の固有関数を与える。

探したいものは然るべき対称性を備えた固有関数である。4 点関数は θ_1, θ_2 の 2 変数関数として

$$F(\theta_1, \theta_2) = -F(\theta_2, \theta_1), \quad F(\theta_1 + 2\pi, \theta_2) = -F(\theta_1, \theta_2), \quad F(\theta_1, \theta_2 + 2\pi) = -F(\theta_1, \theta_2) \quad (99)$$

という性質を持つ。最初の 2 つの性質は 1 つにまとめる事ができ、それを x と y を使って表すと

$$F(x, y) = F(2\pi - x, y + \pi) \quad (100)$$

というものになる。また (99) 式の最初の性質より $x > 0$ と制限できる。さらに (97) 式の e^{-iny} の存在により、 $\psi_n(x)$ は $x = \pi$ で、 n が偶数の時は対称、奇数の時は反対称となる必要がある。以上を踏まえると $\psi_{h,n}$ は、 $\tilde{n} = n/v$ として、

$$\psi_{h,n}(x) \approx \left(\sin \frac{\tilde{x}}{2} \right)^h {}_2F_1 \left(\frac{h-\tilde{n}}{2}, \frac{h+\tilde{n}}{2}, \frac{1}{2}, \cos^2 \frac{\tilde{x}}{2} \right) \quad (n \text{ even}) \quad (101)$$

$$\psi_{h,n}(x) \approx \cos \frac{\tilde{x}}{2} \left(\sin \frac{\tilde{x}}{2} \right)^h {}_2F_1 \left(\frac{1+h-\tilde{n}}{2}, \frac{1+h+\tilde{n}}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 \frac{\tilde{x}}{2} \right) \quad (n \text{ odd}) \quad (102)$$

となる。 ψ は $x = 0$ で消滅するという境界条件によって h の量子化条件が決まる。

欲しい固有関数は強結合領域で $h = 2$ 共形固有関数になるものである。 $h \approx 2$ の時、 $\tilde{x} \approx 0$ 発散する。 $(1-v)$ の 2 次のオーダーにおいて、この発散が存在しないための条件は超幾何関数の 1 番目か 2 番目の変数の少なくともどちらかが負の整数になるというものである。2 に近い解は $h_n = 2 + |\tilde{n}| - |n| = 2 + |n|^{\frac{1-v}{v}}$ となる。(66) 式から $q = \infty$ の時 $k_c(h) = \frac{2}{h(h-1)}$ であるのを思い出せば、これを展開して

$$k(2, n) = 1 - \frac{3|n|}{2}(1-v) + \left(\frac{7n^2}{4} - \frac{3|n|}{2}\right)(1-v)^2 + \dots = 1 - \frac{3|n|}{\beta\mathcal{J}} + \frac{7n^2}{(\beta\mathcal{J})^2} + \dots \quad (103)$$

を得る。ここで最後の表式は v を (19) 式の右の式から $(\beta\mathcal{J})^{-1}$ で展開したものをを用いた:

$$1 - v = \frac{2}{\beta\mathcal{J}} - \frac{4}{(\beta\mathcal{J})^2} + \dots \quad (104)$$

次に一般の q について考える。固有値方程式 $\tilde{K}\Psi_{2,n} = k(2, n)\Psi_{2,n}$ を厳密に解く事はできないが、 $\tilde{K} = \tilde{K}_c + \delta\tilde{K}$ として共形極限からの摂動論を 1 次まで計算する事は可能である。計算するべきは $\langle\Psi_{2,n}, \delta\tilde{K} \cdot \Psi_{2,n}\rangle$ となる。

摂動補正 $\delta\tilde{K}$ は共形伝搬関数に摂動を加えた $G_c + \delta G$ というものを \tilde{K}_c の表式 (83) 式に代入する事で得られる。ここでラージ q に戻って δG を求めると、(12) 式と (19) 式から有限温度のラージ q 共形伝搬関数は

$$G(\theta) = G_c(\theta) \left[1 - \frac{2}{q} \frac{1}{\beta\mathcal{J}} \left(2 + \frac{\pi - \theta}{\tan \frac{\theta}{2}} \right) + \dots \right] \quad (105)$$

となるので、 $(\beta\mathcal{J})^{-1}$ 補正 δG は

$$f_0(\theta) \equiv 2 + \frac{\pi - \theta}{\tan \frac{\theta}{2}} \quad (106)$$

に比例する事がわかる。これは (92) 式の f_n で $n \rightarrow 0$ としたものに一致する。(106) 式を用いて一般の q における G_c への補正は

$$\frac{\delta G}{G_c} = -\frac{\alpha_G}{\beta\mathcal{J}} f_0 \quad (107)$$

のように表せるはずである。ここで α_G は $q \rightarrow \infty$ で $q\alpha_G \rightarrow 2$ となるような係数である。数値解析によって (107) 式は様々な q の値において精度の良いフィッティング関数となる事が示されている [1]。

固有値への補正項を求めるために直接 $\langle\Psi_{2,n}, \delta\tilde{K} \cdot \Psi_{2,n}\rangle$ を計算しても良いが、手っ取り早い方法が存在し、

$$\frac{1}{q\alpha_G} \frac{\langle\Psi_{h,n}, \tilde{K} \cdot \Psi_{2,n}\rangle}{1 - k_c(h)} \quad (108)$$

が実は q に依らない量である事を用いる [1]。この量は $h = 2$ で極を持ち、その留数は固有値への補正項に比例する。この留数とラージ q における固有値の表式 (103) 式、及びラージ q において成

り立つ性質 ($q\alpha_G = 2$, $k'_c(2) = -3/2$) を用いると、一般の q における固有値

$$k(2, n) = 1 - \frac{\alpha_K}{\beta\mathcal{J}}|n| + \dots \quad (109)$$

$$\alpha_K \equiv -qk'_c(2)\alpha_G = \left[\frac{\pi q}{\sin \frac{2\pi}{q}} + \frac{q^3(6-q) - 6q^2}{2(q-1)(q-2)} \right] \alpha_G \quad (110)$$

を得る。 α_K は (103) 式よりラージ q で 3 となる係数である。 α_K を q に関して数値的に求めると、どの q に対しても 3 に近い事がわかる [1]。

3.2.3 $h = 2$ の 4 点関数への寄与

ここまでの議論により 4 点関数 (87) 式での発散は共形極限から少しずれる事によって処理されたので、 $h = 2$ の 4 点関数への寄与は有限となり、 $\beta\mathcal{J}$ のオーダーの値を持つ。ただし $h = 2$ の寄与はこれだけではなく、 $\frac{k(2,n)}{1-k(2,n)}$ による $(\beta\mathcal{J})^0$ の寄与も存在する。ここでは先に $O(\beta\mathcal{J})$ の大きさの寄与を計算し、 $O(1)$ の寄与の計算は後で $q = \infty$ において計算する。

具体的に計算すれば、 $h = 2$ の $O(\beta\mathcal{J})$ の寄与は

$$\frac{\mathcal{F}_{\text{big}}(\theta_1, \dots, \theta_4)}{G(\theta_{12})G(\theta_{34})} = \frac{6\alpha_0}{\pi^2\alpha_K}\beta\mathcal{J} \sum_{|n|\geq 2} \frac{e^{in(y'-y)}}{n^2(n^2-1)} \left[\frac{\sin \frac{nx}{2}}{\tan \frac{x}{2}} - n \cos \frac{nx}{2} \right] \left[\frac{\sin \frac{nx'}{2}}{\tan \frac{x'}{2}} - n \cos \frac{nx'}{2} \right], \quad (111)$$

$$x = \theta_{12}, \quad \tilde{x} = \theta_{34}, \quad y = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad y' = \frac{\theta_3 + \theta_4}{2} \quad (112)$$

となる。さらに共形極限において (90) 式から $h = 2$ の固有関数はリパラメトリゼーション $\theta \rightarrow \theta + \epsilon(\theta)$ による変化分 $\delta_\epsilon G$ そのものであった事から、特に $\epsilon_n \propto e^{-in\theta}$ として

$$\mathcal{F}_{\text{big}} = \sum_n \langle \epsilon_n \epsilon_{-n} \rangle \delta_{\epsilon_n} G \delta_{\epsilon_{-n}} G, \quad \langle \epsilon_n \epsilon_{-n} \rangle = \left(\frac{6\alpha_0 q^2}{\alpha_K N} \right) \frac{\beta\mathcal{J}}{n^2(n^2-1)} \quad (113)$$

と書く事ができる。 $\langle \epsilon_n \epsilon_{-n} \rangle$ はフーリエ変換によって

$$\langle \epsilon(\theta) \epsilon(0) \rangle = \frac{1}{N} \frac{6(\beta\mathcal{J})\beta^2 q^2 \alpha_0}{(2\pi)^4 \alpha_K} \left[-\frac{1}{2}(|\theta| - \pi)^2 + (|\theta| - \pi) \sin |\theta| + 1 + \frac{\pi^2}{6} + \frac{5}{2} \cos \theta \right] \quad (114)$$

と変換される。(111) 式の n を走る和はこの 2 点関数とリパラメトリゼーション (89) 式を用いる事によって計算できる。結果は 4 つのフェルミオンの順番によって変わり、 $\langle \psi_i \psi_i \psi_j \psi_j \rangle$ か $\langle \psi_i \psi_j \psi_i \psi_j \rangle$ かで場合分けする必要がある。

最初の $iiij$ という順番の場合は

$$iiij \text{ order: } \frac{\mathcal{F}_{\text{big}}(\theta_1, \dots, \theta_4)}{G(\theta_{12})G(\pi)} = \frac{6\alpha_0}{\pi^2\alpha_K}\beta\mathcal{J} \left(\frac{\theta_{12}}{2 \tan \frac{\theta_{12}}{2}} - 1 \right) \left(\frac{\theta_{34}}{2 \tan \frac{\theta_{34}}{2}} - 1 \right) \quad (115)$$

で与えられる。また $ijij$ という順番の場合は、特に $\theta_3 = 0, \theta_4 = \pi$ とすると結果が簡略化される:

$$ijij \text{ order: } \frac{\mathcal{F}_{\text{big}}(\theta_1, \theta_2, 0, \pi)}{G(\theta_{12})G(\pi)} = -\frac{6\alpha_0}{\pi^2\alpha_K}\beta\mathcal{J} \left(\frac{\theta_{12}}{2 \tan \frac{\theta_{12}}{2}} - 1 - \pi \frac{\sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2}}{|\sin \frac{\theta_{12}}{2}|} \right). \quad (116)$$

3.2.4 $q = \infty$ における $h = 2$ の寄与

次に $h = 2$ の $O((\beta\mathcal{J})^0)$ の寄与をラージ q において計算する。ラージ q ではラダーダイアグラムの梯子のレールの伝搬関数は $\text{sgn}(\theta)$ に比例するため、 K は次式のような微分演算子のグリーン関数となる事が示せる:

$$-\frac{2}{v^2\tilde{P}^2}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2}K(\theta_1,\dots,\theta_4)=\delta(\theta_{13})\delta(\theta_{24}), \quad \tilde{P}=\frac{1}{\sin\frac{\tilde{x}}{2}}, \quad \tilde{x}=vx+(1-v)\pi. \quad (117)$$

4点関数は $\mathcal{F}=(K^{-1}-1)^{-1}$ の様に見えるため、両辺に $(K^{-1}-1)$ を作用させれば \mathcal{F} の満たす微分方程式を得る。この際、 $x=\theta_{12}, y=\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ という座標を導入すると便利である。ただしこの x と y は配位を足しすぎてしまうため、 $x\geq 0, \tilde{x}\geq 0, y\geq y'$ という様に制限する必要がある。 \mathcal{F} の満たす微分方程式は

$$\left(-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+v^2\frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}^2}-\frac{v^2\tilde{P}^2}{2}\right)\mathcal{F}(x,y,x',y')=\delta(y-y')\delta(x-x')+\delta(y-y'-\pi)\delta(2\pi-x-x') \quad (118)$$

となる。この微分方程式は変数分離法によって解く事が可能である。まず $-\partial_{\tilde{x}}^2+\tilde{P}^2/2$ の固有関数による完全系で展開する。ただし境界条件は $x=0$ で 0 とする。この固有関数は (101) 式や (102) 式で $h=2$ としたものに一致し、(92) 式で定義されている f_n に簡略化される。固有値は $n^2/4$ である。 f_n は完全系の条件

$$\sum_{n>2}\frac{f_n(\tilde{x})f_n(\tilde{x}')}{\pi(n^2-1)}=\delta(\tilde{x}-\tilde{x}'), \quad \sum_{n>2}(-1)^n\frac{f_n(\tilde{x})f_n(\tilde{x}')}{\pi(n^2-1)}=\delta(2\pi-\tilde{x}-\tilde{x}') \quad (119)$$

を満たす事から、 \mathcal{F} は

$$\mathcal{F}(x,y,x',y')=\sum_{n>2}H_n(y-y')\frac{f_n(\tilde{x})f_n(\tilde{x}')}{\pi(n^2-1)}, \quad (120)$$

$$\left(-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{v^2n^2}{4}\right)H_n(y)=v[\delta(y)+(-1)^n\delta(y-\pi)] \quad (121)$$

となる。 H_n は周期 2π の連続関数だが、 $y=0, \pi$ で一階導関数は不連続である。 $y=0$ における不連続性は 0^+ や $2\pi^-$ における導関数の不連続性と同じである。これらの条件を解くと、 $0<y<2\pi$ の範囲で

$$H_n(y)=-\frac{2}{n\sin(n\pi v)}(\cos[nv(y-\pi)]+(-1)^n\cos[nv(|y-\pi|-\pi)]) \quad (122)$$

$$=\frac{4\cos(ny)}{\pi n^2(1-v)}+\frac{4(y-\frac{\pi}{2})\sin(ny)}{\pi n}+O(1-v) \quad (123)$$

$$=\left(\frac{\beta\mathcal{J}}{2}+1-\left(y-\frac{\pi}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)\frac{4\cos(ny)}{\pi n^2}+O\left(\frac{1}{\beta\mathcal{J}}\right) \quad (124)$$

という結果になる。2 行目では $0 < y < \pi$ と仮定して $(1-v)$ で展開した。 $\pi < y < 2\pi$ ならば $\pi/2$ を $3\pi/2$ に置き換えれば良い。また 3 行目では $(1-v)^{-1} \approx \beta\mathcal{J}/2 + 1$ を用いた。この 3 行目の式を (120) 式に代入し、

$$f_n(\tilde{x}) = f_n(x) + (1-v)(\pi-x)\frac{d}{dx}f_n(x) + \cdots \quad (125)$$

を用いて展開すると、ラージ q における 4 点関数として

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, y, x', 0) = & \left[\beta\mathcal{J} - 2 \left\{ -1 + \left(y - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y} + (x - \pi) \frac{\partial}{\partial x} + (x' - \pi) \frac{\partial}{\partial x'} \right\} \right] \\ & \times \sum_{|n| \geq 2} \frac{e^{-iny} f_n(x) f_n(x')}{\pi^2 n^2 (n^2 - 1)} \end{aligned} \quad (126)$$

を得る。 $O(\beta\mathcal{J})$ の項は (111) 式の \mathcal{F}_{big} でラージ q 極限を取ったものに一致する ($\alpha_0 = 2, \alpha_K = 3, G = 1/2$)。

3.3 4 点関数: 最終結果

一般の q について伝搬関数に補正 δG を加えると、4 点関数は (87) 式より次のような補正を受ける:

$$\frac{\mathcal{F}(\theta_1, \dots, \theta_4)}{G(\theta_{12})G(\theta_{34})} \supset -\frac{q}{2} \left[\frac{\delta G(\theta_{12})}{G_c(\theta_{12})} + \frac{\delta G(\theta_{34})}{G_c(\theta_{34})} \right] \frac{\mathcal{F}_{\text{big}}(\theta_1, \dots, \theta_4)}{G_c(\theta_{12})G_c(\theta_{34})} \quad (127)$$

$$= \frac{3\alpha_0}{\pi^2 |k'_c(2)|} [f_0(\theta_{12}) + f_0(\theta_{34})] \sum_{|n| \geq 2} \frac{e^{in(y'-y)} f_n(x) f_n(x')}{n^2 (n^2 - 1)}. \quad (128)$$

ここで重要な点は、この補正項は $\alpha_0/k'_c(2)$ という因子を通してのみ q に依存している事である。従ってラージ q における 4 点関数の結果 (126) 式を一般の q に対する \mathcal{F} に使う事が可能である。 $\chi < 1$ の時は

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{F}(x, y, x', 0)}{G(x)G(x')} \\ &= \alpha_0 \left\{ \frac{6\beta\mathcal{J}}{\alpha_K} - \frac{6}{|k'_c(2)|} \left[-1 + \left(y - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y} + (x - \pi) \frac{\partial}{\partial x} + (x' - \pi) \frac{\partial}{\partial x'} \right] \right\} \sum_{|n| \geq 2} \frac{e^{-iny} f_n(x) f_n(x')}{\pi^2 n^2 (n^2 - 1)} \\ & \quad - \alpha_0 \sum_{m=1}^{\infty} \text{Res} \left[\frac{h - 1/2}{\pi \tan(\pi h/2)} \frac{k_c(h)}{1 - k_c(h)} \frac{\Gamma(h)^2}{\Gamma(2h)} \chi^h {}_2F_1(h, h, 2h, \chi) \right]_{h=h_m} \quad \chi < 1 \end{aligned} \quad (129)$$

となる。 $\chi > 1$ に関しては $\frac{\Gamma(h)^2}{\Gamma(2h)} \chi^h {}_2F_1(h, h, 2h, \chi) \rightarrow \Psi_h(\chi)$ という置き換えをすると得る事ができる。

4 リパラメトリゼーションの有効理論

この節では SYK 模型の有効理論を扱う。これによって第 3 節で論じた 4 点関数の計算に対して第 2 の視点を得る。

有効理論の作用は (7) 式で与えられるが、ここでもう一度掲載する：

$$\frac{S}{N} = -\frac{1}{2} \log \det \left(\frac{\partial}{\partial t} - \tilde{\Sigma} \right) + \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 \left[\tilde{\Sigma}(t_1, t_2) \tilde{G}(t_1, t_2) - \frac{J^2}{q} \tilde{G}(t_1, t_2)^q \right]. \quad (130)$$

ここで $\tilde{\Sigma}, \tilde{G}$ は経路積分の積分変数である。古典解は Σ, G と表記する。フェルミオンの 4 点関数は

$$\frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \langle \psi_i(t_1) \psi_i(t_2) \psi_j(t_3) \psi_j(t_4) \rangle = \int \mathcal{D}\tilde{\Sigma} \mathcal{D}\tilde{G} e^{-S} \tilde{G}(t_1, t_2) \tilde{G}(t_3, t_4) \quad (131)$$

と書き表される。(130) 式の停留点はシュウィンガー・ダイソン方程式の解 G, Σ で与えられる。この解からの揺らぎを計算するならば、その揺らぎをそれぞれ $\tilde{G} = G + |G|^{\frac{2-q}{2}} g$, $\tilde{\Sigma} = \Sigma + |G|^{\frac{2-q}{2}} \sigma$ とするのが便利である。この様にしても測度は不変である： $\mathcal{D}\tilde{G} \mathcal{D}\tilde{\Sigma} = \mathcal{D}g \mathcal{D}\sigma$ 。作用を g, σ の 2 次まで展開し、シュウィンガー・ダイソン方程式 $G = (\partial_t - \Sigma)^{-1}$ を用いると、揺らぎ g, σ の作用を得る：

$$\begin{aligned} \frac{S}{N} = & -\frac{1}{4J^2(q-1)} \int dt_1 \cdots dt_4 \sigma(t_1, t_2) \tilde{K}(t_1, \dots, t_4) \sigma(t_3, t_4) \\ & + \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 \left(g(t_1, t_2) \sigma(t_1, t_2) - \frac{1}{2} J^2 (q-1) g(t_1, t_2)^2 \right). \end{aligned} \quad (132)$$

\tilde{K} は (36) 式で与えられる対称化したラダーダイアグラムの積分核である。上式はさらに σ を積分して消去する事ができ、 g の作用

$$\frac{S}{N} = \frac{J^2(q-1)}{4} g \cdot (\tilde{K}^{-1} - 1) \cdot g \quad (133)$$

を与える。4 点関数 (131) 式の被積分関数の \tilde{G} を $|G|^{\frac{q-2}{2}}$ に置き換え、(133) 式を代入してガウス積分を実行する事で $O(N^{-1})$ の項を計算できる。結果は (87) 式となる。

ここまでの議論は任意のエネルギーで成り立つ。低エネルギー極限を取り、共形古典解 G_c, Σ_c を使い、さらに揺らぎとして (89) 式で与えられるリパラメトリゼーション $\delta_\epsilon G_c$ を選べば、 $\delta_\epsilon G_c$ 自身が \tilde{K}_c の固有値 1 に対する固有関数である事から、揺らぎの作用 (133) 式は消滅する。これは (130) 式が行列式の中の ∂_t を捨てる事で、リパラメトリゼーション $t \rightarrow f(t)$ 及び (11) 式の下で不変になる事の帰結である。このリパラメトリゼーション不変性は、共形古典解 G_c が部分群 $SL(2, \mathbb{R})$ 対称性しか持たないために自発的に破れる。 $f(t)$ はそれによって現れるゴールドストーンボソンである。

共形極限から離れるとリパラメトリゼーション不変性は陽に破れ、 $h = 2$ の固有値は 1 から (110) 式に修正され、その結果ゼロモードに対する有限の作用を得る。これを計算するために微小

変換 $t \rightarrow t + \epsilon(t)$ を考え、 $\delta_\epsilon G_c$ の作用を評価すれば、

$$\frac{S}{N} = \frac{\alpha_S}{\mathcal{J}} \int_0^\beta dt \frac{1}{2} \left[(\epsilon'')^2 - \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^2 (\epsilon')^2 \right], \quad \alpha_S \equiv \frac{\alpha_K}{6q^2\alpha_0} = \frac{q|k'_c(2)|\alpha_G}{6q^2\alpha_0} \quad (134)$$

という有限の作用を得る。従って共形対称性は自発的にも、また陽にも破れる。次に (134) 式に有限のリパラメトリゼーション $t \rightarrow f(t)$ を施した表式を求めたい。これには零温度から始めるのが良い。従って t や f は直線上の座標となる。 $f(t)$ はマクローリン展開すれば

$$f(t) = f(0) + f'(0) \left(t + \frac{1}{2} \frac{f''(0)}{f'(0)} t^2 + \dots \right) \quad (135)$$

となり、小さい t に関しては、スケーリングや並進によって $\epsilon' = 0, \epsilon'' = f''/f'$ となるような微小変換を得る。このスケーリングや並進は零温度 2 点関数に影響しないため、次式のような微小変換から有限の変換への一般化が可能である：

$$\frac{1}{2} \int dt (\epsilon'')^2 \rightarrow \frac{1}{2} \int dt \left(\frac{f''}{f'} \right)^2. \quad (136)$$

これによって作用 (134) 式は

$$S = -N \frac{\alpha_S}{\mathcal{J}} \int dt \{f, t\}, \quad \{f, t\} = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right) \quad (137)$$

となる。 $\{f, t\}$ はシュワルツ微分であり、 $SL(2, \mathbb{R})$ 変換 $f \rightarrow \frac{af+b}{cf+d}$ の下で不変という性質を持つ。零温度では G_c が $SL(2, \mathbb{R})$ 不変なので、この対称性は厳密なものである。有限温度に移るには

$$f(t) = \tan \left(\frac{\pi t}{\beta} \right) \quad (138)$$

という変換をすればよい。

5 SYK 模型の熱力学的諸量

この節では SYK 模型の自由エネルギーやエントロピーなどの熱力学的な量を計算する。特に零温度エントロピーや比熱は後に論ずる SYK 模型の量子カオスの性質に関わってくる。

出発点は (130) 式であり、自由エネルギーは

$$e^{-\beta F} = \int \mathcal{D}\tilde{G} \mathcal{D}\tilde{\Sigma} e^{-S[\tilde{G}, \tilde{\Sigma}]} \quad (139)$$

より与えられる。特にこれを低温度で展開すると

$$-\frac{\beta F}{N} = -\beta E_0 + S_0 + \frac{c}{2\beta} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right) \quad (140)$$

となる。ここで E_0 は基底エネルギー、 S_0 は零温度エントロピー、そして c/β は比熱である。 E_0 は自由エネルギーに $J\partial_J$ を作用させる事で得られる:

$$J \frac{\partial}{\partial J} \left(-\frac{\beta F}{N} \right) = \frac{J^2 \beta}{q} \int_0^\beta dt G(t)^q = -\frac{\beta}{q} \frac{\partial G}{\partial t} \Big|_{t \rightarrow 0^+} = \beta E. \quad (141)$$

ここで自由エネルギーを与える古典解 G, Σ は運動方程式に従う事から、 ∂_J は J に陽に依る項のみに作用するという事を用いた。零温度エントロピーは一般の q において

$$\frac{S_0}{N} = \frac{1}{2} \log 2 - \int_0^{1/q} dx \pi \left(\frac{1}{2} - x \right) \tan \pi x \quad (142)$$

で与えられる。また比熱は (137) 式のシュワルツ理論を有限温度にしたものから得られる。具体的にはパラメータ t に $f(t) = \tan(\pi t/\beta)$ のようにリパラメトリゼーションを施し、自由エネルギーへの有限温度の補正を計算すると

$$-\beta F \supset \frac{N\alpha_S}{\mathcal{J}} \int_0^\beta dt \left\{ \tan \frac{\pi t}{\beta}, t \right\} = 2\pi^2 \alpha_S \frac{N}{\beta \mathcal{J}} \quad (143)$$

を得る。ここで α_S は (134) 式で与えられるシュワルツ作用の係数である。この補正項より比熱は

$$\frac{c}{2} = 2\pi^2 \alpha_S \frac{N}{\mathcal{J}} \quad (144)$$

から与えられる。

6 量子カオスとしての SYK 模型

6.1 量子重力の揺らぎ

量子重力の大きい謎の 1 つは、ブラックホールのミクロな状態を持つ離散スペクトラムの起源である。量子論が本質的に持つ離散スペクトラムの存在は、2 点関数を用いる事によって調べる事ができる:

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{1}{Z(\beta)} \text{tr} [e^{-\beta H} O(t) O(0)] \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{m,n} e^{-\beta E_m} |\langle m|O|n\rangle|^2 e^{i(E_m - E_n)t}. \end{aligned} \quad (145)$$

ここで O はあるエルミート演算子、 $Z = \text{tr}(e^{-\beta H})$ は分配関数、そして $|n\rangle$ は固有値 E_n を持つエネルギーの固有状態である。 t が小さい時は級数を粗子化して滑らかな密度の積分に置き換える事ができ、 $G(t)$ は指数関数的に 0 に落ちる。しかしこの振る舞いはずっと続く訳ではなく、 t が大きい時にはスペクトラムの離散性が重要になっていき、(145) 式の波の位相によって $G(t)$ は激しく振動し、もはや 0 には落ちない。

ホログラフィック原理において、粗子化による近似は古典重力への量子補正を加えた摂動計算と同じであり、この近似の範疇では $G(t)$ の値はずっと落ち続ける。よって量子論の持つ離散性が見えておらず、量子重力ではそれに対する補正項の存在があるはずである。

離散スペクトラムの存在を調べるには、2 点関数よりも次式のような量を用いる方が単純化される:

$$Z(\beta, t) = \text{tr} e^{-\beta H - itH}. \quad (146)$$

これは分配関数 $Z(\beta)$ を $\beta \rightarrow \beta + it$ のように解析接続して得られる。 t が大きい時では $Z(\beta, t)$ は $G(t)$ と同様に激しく振動する。

t が大きい時のある量の振る舞いを調べるには時間平均を取るという事がしばしば行われる。 $Z(\beta, t)$ の時間平均はゼロであるので、 $Z(\beta, t)$ は大きい t でゼロのまわりで揺らぐという事が言える。その揺らぎの大体のサイズは

$$\left| \frac{Z(\beta, t)}{Z(\beta)} \right|^2 = \frac{1}{Z(\beta)^2} \sum_{m,n} e^{-\beta(E_m + E_n)} e^{i(E_m - E_n)t} \quad (147)$$

で与えられる。一般にこの揺らぎのサイズの $t \gg 1$ での振る舞いを調べるのは容易ではないが、長時間平均を取る事によって計算がいくらか簡単になる。長時間平均を取ると有限の位相を持つ波は全てゼロに均され、 $E_n - E_m = 0$ の項のみが残り次式にたどり着く:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \left| \frac{Z(\beta, t)}{Z(\beta)} \right|^2 = \frac{1}{Z(\beta)^2} \sum_E N_E^2 e^{-2\beta E}. \quad (148)$$

ここで N_E は縮退度であり、スペクトラムに縮退が存在しない i.e. $N_E = 1$ であるならば

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \left| \frac{Z(\beta, t)}{Z(\beta)} \right|^2 = \frac{Z(2\beta)}{Z(\beta)^2} \quad (149)$$

となる。 Z のスケールは一般的にエントロピー S とある定数 $a > 0$ を用いて $Z \approx e^{aS}$ である。よって Z の揺らぎの長時間平均 (149) 式は大体 e^{-aS} という大きさを持つ。AdS/CFT 対応の文脈では S はブラックホールエントロピーであり、そのスケールは、バルク理論のストリング結合定数 g_s とニュートン定数 G_N を用いて、 $1/g_s^2 \approx 1/G_N$ で与えられる。よって (149) 式はバルク理論における非摂動計算となる。ラージブラックホールでは S は境界側の場の理論の熱力学的エントロピーであり、その大きさは系の自由度で与えられる。超対称性非可換ゲージ理論ならば $S \approx N^2$ であり、SYK 模型ならば $S \approx N$ となる。いずれにせよ (149) 式は $1/N$ の非摂動的量である。

ここで (149) 式の左辺を粗子化近似によって計算しようとする、離散スペクトラムを走る和が滑らかな密度の積分に置き換わり、結果としてゼロとなり (149) 式の右辺と一致しない。よって Z の揺らぎの大きさがゼロにならないのは何故かを探求する事で、ブラックホールのスペクトラムの離散性や量子論を探る事ができる。この研究において、 $\mathcal{N} = 4$ 超対称非可換ゲージ理論よりも解析が可能という理由で SYK 模型は良い” 研究室” となっている。

以下では、基本的には SYK 模型における分配関数の揺らぎの大きさの平均を調べる事になる。ただし SYK 模型はランダム結合定数 J_{ijkl} を持つので、長時間平均の代わりに J_{ijkl} で平均を取る (disorder average):

$$g(\beta, t) \equiv \frac{\langle Z(\beta, t) Z(\beta, t)^* \rangle_J}{\langle Z(\beta)^2 \rangle_J}. \quad (150)$$

ここで分母と分子をまとめて平均操作を施すという選択肢もあるが、ここでは別々に分子と分母の平均を取った。このような量を annealed quantity という。こうするメリットとしてはレプリカの数有限で済むという事が挙げられる。すなわち、(150) 式は基本的に $Z Z^*$ の期待値なので、言ってみれば Z に対応する系と Z^* のそれというように SYK の系を 2 つコピーしたと言える。もし分母と分子をまとめて平均取ったとすると、このコピーの数が任意個になってしまう。

$g(t)$ は量子カオスの分野において重要なスペクトラル統計の量であり、スペクトラル形状因子と呼ばれる^{*7}。スペクトラル統計ではランダム行列理論 (Random Matrix Theory: RMT) という数学が用いられる。量子カオスの分野における基本的な仮定の 1 つに、エネルギー固有値の統計的構造が RMT におけるランダム行列のそれと一致するというものがある。このランダム行列の要素が従う確率分布には 3 種類あり、それぞれ Gaussian Unitary Ensemble(GUE), Gaussian Orthogonal Ensemble(GOE), Gaussian Symplectic Ensemble(GSE) と呼ばれる。どれを用いるかは系の持つ対称性によって決まる。RMT は基本的に複数の固有値の相関の情報を持つ量の計算に使われる。特に $g(t)$ はある程度値の離れた 2 つの固有値についての相関に関する情報を持つ。後に SYK 模型のスペクトラル形状因子の $t \gg 1$ における振る舞いは RMT によって説明される事を見る。

^{*7} 量子カオスやスペクトラル統計の詳細は??を参照する事。

6.2 スペクトラル形状因子

スペクトラル形状因子 (150) 式は、数値解析によって SYK ハミルトニアンを対角化し、その固有値を集め、これを複数回施行して disorder average を取るとグラフにプロットする事ができる (図 7)。 $g(t)$ の値は最初は落ちていくが、ある時刻からは上昇し始める。その後に長時間平均を与える plateau に乗る。この節の目標のひとつはこの振る舞いの起源や、示唆する所を理解する事である。

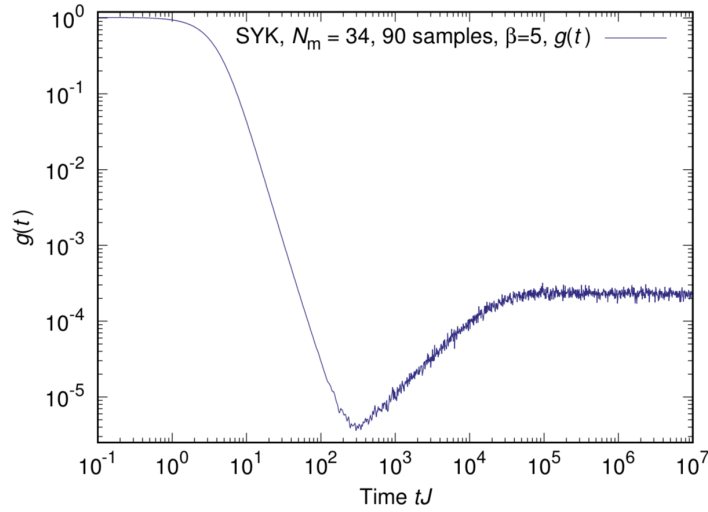


図 7 SYK 模型のスペクトラル形状因子。粒子数は 34 個であり、逆温度を $\beta = 5$ としている。また J_{ijkl} のサンプルを 90 個用意した。ここでは横軸として時間に J_{ijkl} のスケール J を掛けて無次元化したものを用いた。最初は $g(t)$ の値がゼロに落ちている。この領域を slope と呼ぶ。その次には値が上昇している領域があり、この部分は ramp と呼ぶ。ramp は t に比例している。その後の水平な領域は plateau と呼ばれ、長時間平均を取った際に現れる値である。ramp が終わって plateau に乗る時間を plateau 時間 t_p とする。この図は [7] より引用した。

$g(t)$ は disorder average を取った量であり、ランダムカップリング J_{ijkl} についての揺らぎを均したものであるため、図 7 の plateau には量子論で期待される大きい揺らぎが存在しない*8。disorder average を取らず、1 つの J_{ijkl} に対してのみプロットすると揺らぎが見られる [7]。

$g(t)$ は 3 つの領域に区分される。1 つめは最初の値が降下している領域で、slope と呼ばれる。2 つ目は降下が終わって上昇する領域で、ramp という。ramp は t に比例している。ramp 以降は plateau と呼ばれる領域が続く。plateau の高さが長時間平均である。

SYK 模型や RMT の $g(t)$ には共に ramp や plateau の構造が見られる。RMT における $g(t)$ は具体的な解析が行われおり、特に行列のサイズのラージ極限での議論をこの後に述べる。その後、それを踏まえて SYK 模型に話を移す事にする。

*8 小さい揺らぎは見られるが、これは J_{ijkl} のサンプルを無限個にはできない事による数値計算上の理由である。

6.2.1 ランダム行列理論のスペクトル形状因子

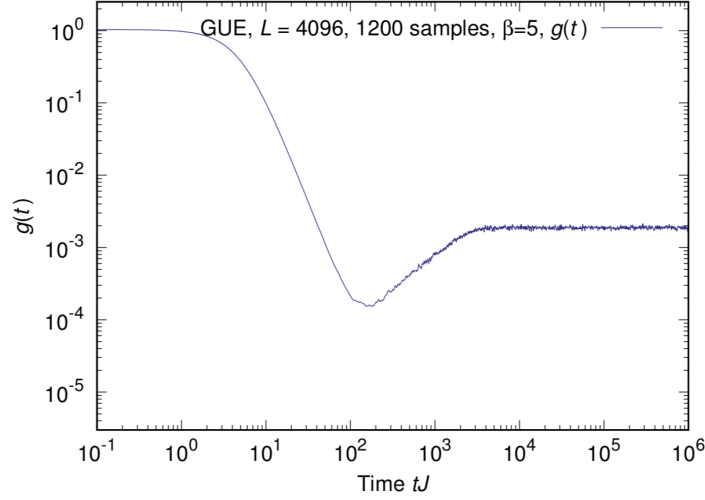


図 8 GUE におけるスペクトル形状因子。逆温度は $\beta = 5$ 、行列のサイズは $L = 4096$ であり、サンプル数は 1200 個である。この図は [7] より引用した。

ここでは RMT の簡単なレビューを記述する。特にランダム行列の持つ乱数の従う統計集団として GUE を選ぶ。この節の目標は図 8 に表示されている GUE スペクトル形状因子の、slope の late-time での振る舞いや ramp の初期の振る舞いを理解する事である。結果は両方ともべき乗で表され、それを用いて slope と ramp が接続する時間を計算する。なお、この時間を dip time と呼ぶ。

階数 L を持つエルミート行列 M を考える。これが GUE に属するとすると、統計平均は

$$Z_{\text{GUE}} = \int \prod_{i,j} dM_{ij} \exp\left(-\frac{L}{2} \text{tr} M^2\right) \quad (151)$$

で与えられる。エルミート行列 M は SYK 模型でのハミルトニアンに相当し、階数 L はヒルベルト空間の次元に対応する。RMT と SYK 模型の間の重要な違いの 1 つは摂動パラメータの違いである; SYK 模型は $1/N$ なのに対し、RMT は $1/L \approx e^{-N}$ である。

M の分配関数は

$$Z(\beta, t) = \text{tr} e^{-\beta M - iMt} \quad (152)$$

で定義される。スペクトル形状因子は (150) 式と同様に定義される。ただし disorder average $\langle \cdot \rangle_J$ は (151) 式による GUE の統計平均 $\langle \cdot \rangle_{\text{GUE}}$ に置き換わる。

次にエルミート行列 M を対角化し、基底をユニタリ変換する事を考える。この変換により、固有値同士の”排斥力”を表すヤコビアンが現れる。行列のサイズ L のラージ極限を取ると固有値分布

はある密度 ρ によって記述できる。この ρ を物理的な密度として使い、 $\tilde{\rho}$ を規格化したものとする:

$$\int d\lambda \rho(\lambda) = L, \quad \int d\lambda \tilde{\rho}(\lambda) = 1, \quad \rho(\lambda) = L\tilde{\rho}(\lambda). \quad (153)$$

(151) 式において M のスペクトルを $\tilde{\rho}$ として滑らかにすると、GUE の統計平均は

$$\mathcal{Z}_{\text{GUE}} = \int \mathcal{D}\tilde{\rho}(\lambda) e^{-S}, \quad S = -\frac{L^2}{2} \int d\lambda \tilde{\rho}(\lambda) \lambda^2 + L^2 \int d\lambda_1 d\lambda_2 \tilde{\rho}(\lambda_1) \tilde{\rho}(\lambda_2) \log |\lambda_1 - \lambda_2| \quad (154)$$

と書き改められる。この \mathcal{Z}_{GUE} のラージ L 鞍点はウィグナー半円分布 (Wigner semicircle law) となる:

$$\langle \tilde{\rho}(\lambda) \rangle = \tilde{\rho}_s(\lambda) \equiv \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - \lambda^2}. \quad (155)$$

固有値間の間隔の平均値はおおよそ $1/L$ である。

ここまでの準備を踏まえて、GUE のスペクトラル形状因子の slope と ramp について議論する。直接 g を計算しても良いが、dip time 以前と以後で g に大きく寄与する成分を大雑把に近似する事ができ、dip time より前ならば非連結部分 g_d 、後ならば連結部分 g_c となる。 g_d および g_c はそれぞれ次式で与えられる:

$$g_d(\beta, t) = \frac{\langle Z(\beta, t) \rangle_{\text{GUE}} \langle Z^*(\beta, t) \rangle_{\text{GUE}}}{\langle Z(\beta) \rangle_{\text{GUE}}^2}, \quad (156)$$

$$g_c(\beta, t) = g(\beta, t) - g_d(\beta, t). \quad (157)$$

なお SYK 模型においても g_c と g_d は同様にして与えられる (期待値計算は disorder average である)。

最初に dip time 以前の振る舞いを調べる事にすると、計算するべきは g_d である。簡単のため $\beta = 0$ とする。分配関数のラージ L での振る舞いは半円分布によって与えられ、次式のような結果となる:

$$\langle Z(\beta = 0, t) \rangle_{\text{GUE}} = \int_{-2}^2 d\lambda L \tilde{\rho}_s(\lambda) e^{-i\lambda t} = L \frac{J_1(2t)}{t} \approx \frac{L}{t^{3/2}} \quad (t \approx \text{large}). \quad (158)$$

ここで J_1 は第 1 種ベッセル関数である。よって $t \gg 1$ において

$$g(\beta = 0, t) \approx g_d(\beta = 0, t) \approx \frac{1}{t^3} \quad (159)$$

となる。有限温度で計算しても計算結果は同じである。

次に dip time 以降の時間に移り、ramp の存在を導く。この時 $g \approx g_c$ となり、両方とも ramp や plateau を与えるため g と g_c のどちらを選んでも良いが、 g_c の ramp は初期時刻のあたりまで伸びているため摂動計算がやりやすい。

g_c は

$$g_c(\beta = 0, t) = \int d\lambda_1 d\lambda_2 R_2(\lambda_1, \lambda_2) e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)t}, \quad (160)$$

$$R_2(\lambda_1, \lambda_2) = \langle \delta \tilde{\rho}(\lambda_1) \delta \tilde{\rho}(\lambda_2) \rangle_{\text{GUE}} \quad (161)$$

で与えられる。ここで R_2 は $\tilde{\rho}$ の連結 2 点関数であり、また $\delta \tilde{\rho}(\lambda) = \tilde{\rho}(\lambda) - \tilde{\rho}_s(\lambda)$ は半円分布からなる固有値密度 (155) 式まわりの揺らぎである。半円分布のちょうど真ん中付近では、 R_2 は次式のような正弦核の 2 乗とデルタ関数の和で与えられる:

$$R_2(\lambda_1, \lambda_2) = -\frac{\sin^2(L(\lambda_1 - \lambda_2))}{(\pi L(\lambda_1 - \lambda_2))^2} + \frac{\delta(\lambda_1 - \lambda_2)}{\pi L}. \quad (162)$$

これを (160) 式に代入して積分を計算すると

$$g_c(0, t) \approx \begin{cases} t/(2\pi L^2) & t < 2L \\ 1/(\pi L) & t \geq 2L \end{cases} \quad (163)$$

となる。これによって ramp と plateau の存在が見て取れる: $t = 2L$ までは ramp であり、その後は一定値を取り plateau に乗っている。ただし ramp を見るには (162) 式において正弦核の近似値を用いたもので十分である。すなわち ramp そのものは

$$R_2(\lambda_1, \lambda_2) \approx -\frac{1}{2(\pi L(\lambda_1 - \lambda_2))^2} \quad (164)$$

から与えられる。しかし plateau の存在は正弦核を近似せずそのまま扱う必要がある。この議論が示唆するのは、ramp は $1/L^2$ を摂動パラメータとする摂動論による効果であり、plateau はそうではないという事である。

これによって SYK 模型に応用する際に次のような事が言える: SYK 模型ではヒルベルト空間の次元は $L = 2^{N/2}$ なので $1/L \approx e^{-aN}$ となる。従って RMT における摂動的な効果は SYK 模型では非摂動的である。また RMT での非摂動効果は $O(e^{-L})$ の大きさであり、これは SYK 模型では $O(\exp(-e^{aN}))$ という極めて小さい非摂動的効果となる。

6.2.2 SYK 模型のスペクトラル形状因子

ここではラージ N SYK 模型におけるスペクトラル形状因子の ramp や plateau の導出を行う。基本的には $\langle Z(\beta + it)Z(\beta - it) \rangle$ の計算であり、SYK 模型における期待値 $\langle \cdot \rangle$ は disorder average $\langle \cdot \rangle_J$ となるが、これを GUE のラージ L での期待値 (154) 式に近似して計算を進める。ramp と plateau は第 4 節で論じたシュワルツ理論から与えられる。

最初に系が GUE 統計に従うとした場合の一般論から ramp や plateau がどのように現れるかを見る。その後議論を SYK 模型へ適用する。 $\langle ZZ^* \rangle$ は一般に

$$\langle Z(\beta + it)Z(\beta - it) \rangle = \int d\lambda_1 d\lambda_2 \langle \rho(\lambda_1)\rho(\lambda_2) \rangle e^{-2\beta E} e^{-ixt} \quad (165)$$

と書ける。ここで

$$x = \lambda_1 - \lambda_2, \quad E = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \quad (166)$$

である。なおここでは密度 ρ は規格化されていないのものであり、 $\int d\lambda \rho = L$ である。

$t \gg 1$ においては $x \ll 1$ となるような領域のみが積分に寄与すると考え、かつこの領域では $\langle \rho(\lambda_1)\rho(\lambda_2) \rangle$ は RMT の統計集団で近似できると仮定する。簡単のため、ここでは前節で扱った GUE 統計を採用すると

$$\langle \rho(\lambda_1)\rho(\lambda_2) \rangle = \langle \rho(E) \rangle \delta(x) + \langle \rho(\lambda_1) \rangle \langle \rho(\lambda_2) \rangle \left(1 - \frac{\sin^2(\pi \langle \rho(E) \rangle x)}{(\pi \langle \rho(E) \rangle x)^2} \right) \quad (167)$$

となり、これを用いて $\langle ZZ^* \rangle$ を計算すると

$$\langle Z(\beta + it)Z(\beta - it) \rangle = |\langle Z(\beta + it) \rangle|^2 + \int dE e^{-2\beta E} \min\left(\frac{t}{2\pi}, \langle \rho(E) \rangle\right) \quad (168)$$

を得る。

次に (168) 式をラージ N SYK 模型に適用して議論する。最初に右辺の第 1 項 $|\langle Z(\beta + it) \rangle|^2$ を計算する。ラージ N の鞍点を用いて数値的に $\langle Z(\beta + it) \rangle$ を評価できるが、大きい $\beta + it$ においては鞍点周りの揺らぎも考慮しなければならない。この揺らぎは第 4 節で論じたシュワルツ理論で与えられる：

$$Z_{\text{Sch}}(\beta) = \int \frac{\mathcal{D}t(u)}{SL(2, \mathbb{R})} \exp \left[-\frac{\pi N \alpha_S}{\beta \mathcal{J}} \int_0^{2\pi} du \left(\left(\frac{t''}{t'} \right)^2 - t'^2 \right) \right]. \quad (169)$$

ここで指数関数の肩の作用は (134) 式で ϵ を t に書き換え、さらに $t \rightarrow 2\pi t/\beta$ としたものを用いた。また $\mathcal{D}t$ の下に存在する $SL(2, \mathbb{R})$ は、測度がこの変換群で不変という事を表している。この分配関数の古典的な寄与や 1 ループの寄与は [1] によって計算されており、

$$Z_{\text{Sch}}^{1\text{-loop}}(\beta) = \frac{\text{numerical const}}{(\beta \mathcal{J})^{3/2}} \exp \left(\frac{2\pi^2 N \alpha_S}{\beta \mathcal{J}} \right) \quad (170)$$

という結果がある。しかしながら $\beta + it \gg 1$ の時は (169) 式の作用積分の前の係数は小さくなり、 $t(u)$ は大きく揺らぐ。大雑把に言えばこれによって摂動計算が破綻し、 Z の計算が難しいものとなっているが、実は適切な測度のもとで理論は 1-ループ完全である事が (間接的に) 示されている [7]。従って (168) 式の第 1 項 $|\langle Z(\beta + it) \rangle|^2$ はスペクトラル形状因子に次のような寄与を与える：

$$\frac{|\langle Z(\beta + it) \rangle|^2}{\langle Z(\beta) \rangle^2} = \frac{\beta^3}{(\beta^2 + t^2)^{3/2}} \exp \left(-\frac{c N t^2}{\beta(\beta^2 + t^2)} \right). \quad (171)$$

ここで c は (144) 式で与えられる比熱である。上式の指数関数による時間依存性は $t \sim \sqrt{N}$ 以降で無視でき、左辺は $\sim t^{-3}$ となり RMT での dip time 直前の slope の振る舞い (159) 式と一致する。

次に (168) 式の第 2 項の積分を計算する。ホログラフィック極限 $\beta \sim \text{large}$ においてエンロピーは $S(E) = NS_0 + \sqrt{2c(E - E_0)N}$ となる事を用い、さらに (168) 式の積分から 1-ループの寄与を無視すると、 $g(t)$ に対して次のような ramp と plateau を与える寄与を得る:

$$g_{\text{ramp}} \approx \begin{cases} \frac{t}{2\pi} \exp\left(-2NS_0 - \frac{cN}{\beta}\right) & \frac{t}{2\pi} < e^{NS_0} \\ \frac{t}{2\pi} \exp\left(-2NS_0 - \frac{cN}{\beta} - \frac{\beta}{cN} \log^2\left(\frac{t/(2\pi)}{e^{NS_0}}\right)\right) & e^{NS_0} < \frac{t}{2\pi} < \frac{t_p}{2\pi} \\ \exp\left(-NS_0 - \frac{3cN}{4\beta}\right) & t_p < t \end{cases} \quad (172)$$

ここで $t_p = 2\pi e^{NS_0 + cN/(2\beta)} = 2\pi e^{S(\beta)}$ である。この式と (171) 式を連立させると dip time $t_d \sim e^{NS_0/2}$ を得る。

6.3 スペクトラル形状因子の G 、 Σ による記述

次にここではスペクトラル形状因子の slope、ramp を与える寄与のフェルミオンの 2 点関数 G および自己エネルギー Σ による記述を述べる^{*9}。これにより SYK 模型に対応する Jackiw–Teitelboim 重力理論におけるスペクトラル形状因子の解析に対してある程度の方針を得る。実際に第 7 節では得た方針を元にして slope や ramp の構造を与える時空の計量を考える。

$g(\beta, t)$ は基本的には分配関数 $Z = \int \mathcal{D}\tilde{G}\mathcal{D}\tilde{\Sigma} \exp(-NS[\tilde{G}, \tilde{\Sigma}])$ から与えられるものであり、従って $g(\beta, t)$ の振る舞いの起源を調べるという事はこの経路積分に寄与するような G と Σ の場としての配位を探るという事である。

また $g(\beta, t)$ そのものは $\langle Z(\beta + it)Z(\beta - it) \rangle_J$ の計算であり、従ってあたかも逆温度がそれぞれ $\beta + it$ と $\beta - it$ であるような 2 つの SYK 模型のコピーを用意したように見える。このコピーはレプリカと呼ばれており、レプリカの数 n が 2 つで済む事が (150) 式の $g(\beta, t)$ の定義式で disorder average を分子分母別々に施すメリットである。この 2 つのレプリカを L 系、R 系と名付ける事にする。

この節の方針は次の通りである。まず簡単のため $\beta = 0$ として $\langle Z(it)Z(-it) \rangle_J$ を計算し、2 つのレプリカ系が従う作用を導き出し、経路積分に寄与するような鞍点を探る。slope を与える鞍点は自明な解から構成されるものであり、L 系と R 系に相関がない。一方で ramp を与える鞍点は非自明な解から成り、L 系と R 系が互いに相関する。この解は L 系と R 系がそれぞれ独立に持っていた時間並進対称性を自発的に破るものであり、そのソフトモードによって解はラベリングされている。その結果 $g(t)$ の経路積分のうち ramp を与える部分はソフトモードを走る積分となり、その積分範囲が t までという事から $g \propto t$ となり、ramp を構築する。その後は一般の β について議論を拡張するのだが、素朴に計算を試みても鞍点を見つける事はできない。これは系を低エネルギーへ押し出すようなある種の圧力の存在によるものであり、この不安定さを安定させるために小正準集団スペクトラル形状因子 $Y_{E,\Delta}(t)$ というものを導入する。このスペクトラル形状因子の変形版を用いて鞍点を探る事によって $\beta = 0$ の場合と同様に slope/ramp 構造を見る事ができる。

^{*9} plateau はここでは述べない。詳しくは第 8 節で述べるが、現時点では plateau を与える寄与はわかっていない。

なお、以下では G や Σ の時間変数と、分配関数 Z の虚軸の時間変数を区別するために、分配関数の持つ時間変数を大文字の T として $Z(\beta, T)$ などと表記し、 G や Σ の持つ時間変数には小文字の t を割り当て $G(t)$ などと表記する。

6.3.1 $\beta = 0$ の場合

7 量子カオスとしてのブラックホール

この節では主に SYK 模型の重力双対である Jackiw–Teitelboim ブラックホールの量子カオスの性質を述べる^{*10}。

^{*10} この節の内容は [7] 及び [8] による。

8 終わりに

付録 A 有効作用の計算

SYK 模型のラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \psi_i \frac{d}{dt} \psi_i - \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l=1}^N J_{ijkl} \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l \quad (173)$$

で与えられる。SYK 模型ではしばしば有限温度を考慮するため、分配関数はユークリッド化したものを計算する:

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \exp \left(- \int dt L \right). \quad (174)$$

以下では (174) 式を乱数 J_{ijkl} について平均を取るという disorder-average の計算を行い、その後フェルミオンについて積分し有効作用を得る事を目標とする。

disorder-average は

$$\langle Z \rangle = \int \prod_{i<j<k<l}^N [dJ_{ijkl} P(J_{ijkl})] Z \quad (175)$$

を計算すれば良い。以下では表記を簡潔にするために

$$a \equiv \frac{N^3}{12J^2} \quad (176)$$

$$I_{ijkl} \equiv \int dt \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l \quad (177)$$

としておく。 J_{ijkl} についての積分が実行される部分が明確になるように式変形すると

$$\begin{aligned} \langle Z \rangle &= \int \mathcal{D}\psi \exp \left(- \int dt \sum_i \frac{1}{2} \psi_i \frac{d}{dt} \psi_i \right) \\ &\times \underbrace{\int \left[\prod_{i<j<k<l} dJ_{ijkl} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp(-aJ_{ijkl}^2) \right] \exp \left(\frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l} I_{ijkl} J_{ijkl} \right)}_{\equiv G} \end{aligned} \quad (178)$$

となる。ここから更に G を複数のガウス積分の積となるように変形すると

$$G = \left(\frac{a}{\pi} \right)^{4!N C_4/2} \prod_{i<j<k<l} \int dJ_{ijkl} \exp(-aJ_{ijkl}^2 + I_{ijkl} J_{ijkl}) \quad (179)$$

となる。ここで J_{ijkl} と I_{ijkl} が反対称テンソルである事を用いて

$$\frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l} I_{ijkl} J_{ijkl} = \sum_{i<j<k<l} I_{ijkl} J_{ijkl} \quad (180)$$

を使用した。あとは通常のガウス積分を実行すると

$$G = \exp \left(\frac{3J^2}{N^3} \sum_{i < j < k < l} I_{ijkl}^2 \right) = \exp \left(\frac{3J^2}{4!N^3} \sum_{i,j,k,l} I_{ijkl}^2 \right) \quad (181)$$

となり、

$$\begin{aligned} \langle Z \rangle = \int \mathcal{D}\psi \exp \left(- \int dt \sum_i \frac{1}{2} \psi_i \frac{d}{dt} \psi_i \right. \\ \left. + \frac{3J^2}{4!N^3} \sum_{i,j,k,l} \int dt_1 dt_2 \psi_i(t_1) \psi_j(t_1) \psi_k(t_1) \psi_l(t_1) \psi_i(t_2) \psi_j(t_2) \psi_k(t_2) \psi_l(t_2) \right) \end{aligned} \quad (182)$$

という結果を得る。次はフェルミオンについて積分するのであるが、その前に

$$G(t_1, t_2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_i(t_1) \psi_i(t_2) \quad (183)$$

という場を導入するために

$$\begin{aligned} 1 &= \int \mathcal{D}G \delta \left(NG - \sum_i \psi_i \psi_i \right) \\ &= \int \mathcal{D}G \int \mathcal{D}\Sigma \exp \left(- \int dt_1 dt_2 \frac{1}{2} \Sigma(t_1, t_2) \left(NG(t_1, t_2) - \sum_i \psi_i(t_1) \psi_i(t_2) \right) \right) \end{aligned} \quad (184)$$

を $\langle Z \rangle$ に挿入する^{*11}。この時、挿入したデルタ関数によって

$$\sum_{i,j,k,l} \int dt_1 dt_2 \psi_i(t_1) \psi_j(t_1) \psi_k(t_1) \psi_l(t_1) \psi_i(t_2) \psi_j(t_2) \psi_k(t_2) \psi_l(t_2) \rightarrow N^4 \int dt_1 dt_2 G(t_1, t_2)^4 \quad (185)$$

という置き換えができる。以上を踏まえてフェルミオンの積分が実行される部分が明確になるように式変形を行うと

$$\begin{aligned} \langle Z \rangle &= \int \mathcal{D}G \int \mathcal{D}\Sigma \exp \left(- \frac{N}{2} \int dt_1 dt_2 \left(\Sigma G - \frac{J^2}{4} G^4 \right) \right) \\ &\quad \times \underbrace{\int \mathcal{D}\psi \exp \left(- \sum_i \int dt_1 dt_2 \frac{1}{2} \psi_i(t_1) \left(\delta(t_1 - t_2) \frac{d}{dt_1} - \Sigma(t_1, t_2) \right) \psi_i(t_2) \right)}_{\equiv F} \end{aligned} \quad (186)$$

^{*11} ディラックのデルタ関数をフーリエ変換したものはもちろん

$$\delta(x) \propto \int dp \exp(ipx)$$

であるが、今は $\Sigma(t_1, t_2)$ を虚軸方向に積分していると考えているため、結果として虚数単位 i がさらに i 倍され負号となる。

となる。あとは F と置いた部分を計算するのだが、そのためには次の公式を使うとよい [9]:

$$\int d\theta \exp\left(-\frac{1}{2}\theta \cdot M \cdot \theta\right) = \sqrt{\det(M)} \quad (187)$$

ここで $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ は n 個のグラスマン数であり、 M は反対称行列である。これを用いて、

$$\begin{aligned} F &= \prod_i \int \mathcal{D}\psi_i \exp\left(-\int dt_1 dt_2 \frac{1}{2} \psi_i(t_1) \left(\delta(t_1 - t_2) \frac{d}{dt_1} - \Sigma(t_1, t_2)\right) \psi_i(t_2)\right) \\ &= \prod_i \left[\det\left(\delta(t_1 - t_2) \frac{d}{dt_1} - \Sigma(t_1 - t_2)\right) \right]^{1/2} \\ &= \left[\det\left(\frac{d}{dt} - \Sigma\right) \right]^{N/2} \\ &= \exp\left(\frac{N}{2} \log \det\left(\frac{d}{dt} - \Sigma\right)\right) \end{aligned} \quad (188)$$

となる。ここで

$$\delta(t_1 - t_2) \frac{d}{dt_1} - \Sigma(t_1 - t_2) \rightarrow \frac{d}{dt} - \Sigma \quad (189)$$

という記号的な処理を施した。

以上より

$$\begin{aligned} \langle Z \rangle &= \int \mathcal{D}G \int \mathcal{D}\Sigma \exp\left(\frac{N}{2} \log \det\left(\frac{d}{dt} - \Sigma\right) - \frac{N}{2} \int dt_1 dt_2 \left(\Sigma G - \frac{J^2}{4} G^4\right)\right) \\ &\equiv \int \mathcal{D}G \int \mathcal{D}\Sigma \exp(-I_{eff}) \end{aligned} \quad (190)$$

となり、有効作用として

$$\frac{I_{eff}}{N} = -\frac{1}{2} \log \det\left(\frac{d}{dt} - \Sigma\right) + \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 \left(\Sigma G - \frac{J^2}{4} G^4\right) \quad (191)$$

を得た。

付録 B 係数 b の計算

この付録では (12) 式の係数 b の計算方法について述べる。まず (10) 式の 2 つの式を一つにまとめると

$$J^2 \int ds G(s - t_1) G(s - t_2)^{q-1} = -\delta(t_2 - t_1) \quad (192)$$

となる。この積分を実行するには、

$$\frac{\text{sgn}(t)}{|t|^{2\Delta}} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t) i 2^{1-2\Delta} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1-\Delta)}{\Gamma(1/2+\Delta)} |\omega|^{2\Delta-1} \text{sgn}(\omega) \quad (193)$$

を使用すると便利である。少しの計算のあとに、

$$\begin{aligned} -\delta(t) = & -J^2 b^q \pi \frac{\Gamma(1-\Delta)\Gamma(\Delta)}{\Gamma(1/2+\Delta)\Gamma(3/2-\Delta)} \\ & \times \int ds \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega(t-s)) |\omega|^{2\Delta-1} \text{sgn}(\omega) \int \frac{d\Omega}{2\pi} \exp(-i\Omega s) |\Omega|^{1-2\Delta} \text{sgn}(\Omega) \end{aligned} \quad (194)$$

という式にたどり着く。積分の部分は最初に s について実行すると $\delta(\omega - \Omega)$ が現れ、その後 ω および Ω で積分すると $\delta(t)$ が現れる。またガンマ関数の部分については

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad \text{for } \forall z \notin \mathbb{Z} \quad (195)$$

という性質と $\Gamma(1+z)\Gamma(z) = z\Gamma(z)$ を用いることで

$$\frac{\Gamma(1-\Delta)\Gamma(\Delta)}{\Gamma(1/2+\Delta)\Gamma(3/2-\Delta)} = \frac{1}{(1/2-\Delta)\tan(\pi\Delta)} \quad (196)$$

となる。以上より、係数 b は

$$J^2 b^q \pi = \left(\frac{1}{2} - \Delta\right) \tan(\pi\Delta) \quad (197)$$

という式により決定できる。

参考文献

- [1] J. Maldacena and D. Stanford, "Comments on the Sachdev-Ye-Kitaev model," [arXiv:1604.07818 \[hep-th\]](#)
- [2] V. Rosenhaus, "An introduction to the SYK model," [arXiv:1807.03334v1 \[hep-th\]](#)
- [3] J. Polchinski and V. Rosenhaus, "The Spectrum in the Sachdev-Ye-Kitaev Model," [arXiv:1601.06768 \[hep-th\]](#)
- [4] D. J. Gross and V. Rosenhaus, "A Generalization of Sachdev-Ye-Kitaev," [arXiv:1610.01569 \[hep-th\]](#)
- [5] J. Maldacena, S. H. Shenker and D. Stanford, "A bound on chaos," [arXiv:1503.01409 \[hep-th\]](#)
- [6] J. Liu, "Spectral form factors and late time quantum chaos," [arXiv:1806.05316 \[hep-th\]](#)
- [7] J. S. Cotler, G. Gur-Ari, M. Hanada, J. Polchinski, P. Saad, S. H. Shenker, D. Stanford, A. Streicher and M. Tezuka, "Black Holes and Random Matrices," [arXiv:1611.04650 \[hep-th\]](#)
- [8] P. Saad, S. H. Shenker and D. Stanford, "A semiclassical ramp in SYK and in gravity," [arXiv:1806.04650 \[hep-th\]](#)
- [9] H. E. Haber, "Notes on antisymmetric matrices and the pfaffian"
- [10] G. Tarnopolsky, "On large q expansion in the Sachdev-Ye-Kitaev model," [arXiv:1801.06871 \[hep-th\]](#)
- [11] K. Andrzejewski, "Quantum conformal mechanics," [arXiv:1506.05596 \[hep-th\]](#)
- [12] J. Masoliver and A. Ros, "Integrability and chaos: the classical uncertainty," [arXiv:1012.4384 \[nlin.CD\]](#)
- [13] D. Ullmo and S. Tomsovic, "INTRODUCTION TO QUANTUM CHAOS," <http://www.lptms.u-psud.fr/membres/ullmo/Articles/eolss-ullmo-tomsovic.pdf>
- [14] W. Hsiao, "Introduction to Classical Chaos," <http://theory.uchicago.edu/ejm/course/JournalClub/IntroductionToClassicalChaos.pdf>
- [15] P. H. C. Lau, C. T. Ma, J. Murugan and M. Tezuka, "Randomness and Chaos," [arXiv:1812.04770 \[hep-th\]](#)