

量子カオスとしての Sachdev–Ye–Kitaev 模型とブラックホール

2018 年 12 月 18 日

目次

1	はじめに: SYK 模型とは	1
2	2 点関数	2
2.1	シュウィンガー・ダイソン方程式	2
2.2	共形不変性	3
2.3	ラージ q 極限	4
2.4	自由エネルギー及びエントロピー	6
3	4 点関数	8
3.1	K_c の対角化	9
4	量子カオスとしての SYK 模型	10
5	量子カオスとしてのブラックホール	11
6	終わりに	12
付録 A	有効作用の計算	13
付録 B	係数 b の計算	16
付録 C	AdS/CFT 対応及びブラックホール熱力学	17
付録 D	量子カオス	18

1 はじめに: SYK 模型とは

Sachdev–Ye–Kitaev(SYK) 模型とは、Kitaev が AdS/CFT 対応の簡単な模型として提唱したものであり、そのハミルトニアンは次のように与えられる:

$$H = \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l=1}^N J_{ijkl} \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l. \quad (1)$$

ここで J_{ijkl} は乱数で与えられる反対称テンソルであり、その分布は

$$P(J_{ijkl}) = \sqrt{\frac{N^3}{12\pi J^2}} \exp\left(-\frac{N^3}{12J^2} J_{ijkl}^2\right). \quad (2)$$

に従う。SYK 模型において次元を持つパラメータのひとつは (2) 式の J であり、 $[J] = 1$ である。(1) 式の大きさはこの J によって決まる。

SYK 模型を調べるモチベーションは複数あり、大別して以下の 3 つに分けることができる:

強結合領域で可解な模型である。ラージ N 極限を取るとリーディングオーダーでのファインマンダイアグラムが単純なものとなり、その和を取ることで強結合領域での相関関数が計算可能である。

最大にカオスである。カオスはリャプノフ指数によって計られ、その最大値はアインシュタイン重力におけるブラックホールが持ち、 $2\pi/\beta$ となる [5]。強結合領域における SYK 模型もこの最大値を満たす事が知られている [1]。

共形不変性が現れる。低エネルギーでは 2 点関数が共形不変性を持つ。

大抵の場合、理論を解析する際には摂動論が適用できる範囲でしか計算する事ができないが、SYK 模型では一つ目の性質により強結合領域でも計算する事が可能であり、大きなモチベーションの一つとなっている。一つ目と二つ目を組み合わせると非常に興味深い。古典論では「可解である」という事と可積分系である事は等しく、従ってカオスとは相容れない [3]。これが量子論では必ずしもそうではない事を SYK 模型は示している。また二つ目と三つ目の性質により、何らかの形におけるアインシュタイン重力理論が AdS/CFT 対応での双対理論として期待される。

2 2点関数

2.1 シュウィンガー・ダイソン方程式



図1 ラージ N 極限において 2 点関数に寄与する最初の補正ダイアグラム. 特に $q = 4$ の場合について描画している. 灰色の丸と黒い丸はそれぞれ完全な 2 点関数および 1 粒子相互作用を表している.

SYK 模型の作用は

$$I = \int dt \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \psi_i \frac{d}{dt} \psi_i - \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l=1}^N J_{ijkl} \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l \right) \quad (3)$$

である。これを J_{ijkl} について期待値を取り、その後フェルミオンを積分するために 2 つの bi-local 場 $G(t_1, t_2)$, $\Sigma(t_1, t_2)$ を導入すると

$$\frac{I_{eff}}{N} = -\frac{1}{2} \log \det \left(\frac{d}{dt} - \Sigma \right) + \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 \left(\Sigma G - \frac{J^2}{4} G^4 \right) \quad (4)$$

を得る^{*1}。(4) 式の停留点が次式のシュウィンガー・ダイソン方程式を与える:

$$G(\omega)^{-1} = -i\omega - \Sigma(\omega), \quad \Sigma(t) = J^2 G(t)^3 \quad (5)$$

なお、SYK 模型では 4 つのフェルミオンが相互作用するとしているが³、その数を q として一般化しても有効作用やシュウィンガー・ダイソン方程式は計算する事ができ、それぞれ

$$\frac{I_{eff}}{N} = -\frac{1}{2} \log \det \left(\frac{d}{dt} - \Sigma \right) + \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 \left(\Sigma G - \frac{J^2}{q} G^q \right) \quad (6)$$

*1 詳しい計算は付録 A を参照すること.

$$G(\omega)^{-1} = -i\omega - \Sigma(\omega), \quad \Sigma(t) = J^2 G(t)^{q-1} \quad (7)$$

である。さらに複数の q について相互作用項を足し合わせたような一般化した SYK 模型も調べられており、[4] にて詳しく論じられている。

ラージ N 極限を施した SYK 模型において、リーディングオーダーで 2 点関数に寄与するファインマンダイアグラムは「メロンダイアグラム」と呼ばれている^{*2}。(7) 式の一般の ω における解析的な計算は現在のところ知られていないが、数値的には可能であり、図 1 のダイアグラムのように再帰的に計算を走らせる事で 2 点関数のグラフをプロットできる。



図 2 $J = 10$ としてプロットした 2 点関数. 横軸は時間である. 青色の線が一般の ω , 緑色の線が $\omega = 0$, 赤色の線が低エネルギー極限に J^{-1} 補正を加えたものである.



図 3 $J = 50$ としてプロットした 2 点関数. 横軸は時間である. 各色の意味は左図と同様. 低エネルギー極限はラージ J 極限でもあるので, 左図と比べて各線は互いに近づく.

2.2 共形不変性

シュウィンガー・ダイソン方程式 (7) は $\omega = 0$ という低エネルギー極限においては解析的な解が知られている。この時 (7) 式の一つ目の式は

$$\Sigma(\omega)G(\omega) = -1 \quad (8)$$

となり、この両辺にフーリエ変換を施す事でシュウィンガー・ダイソン方程式は

$$\int dt G(t_1, t) \Sigma(t, t_2) = -\delta(t_1 - t_2), \quad \Sigma(t_1, t_2) = J^2 (G(t_1, t_2))^{q-1} \quad (9)$$

と書き改める事ができる。これらの 2 つの式は次のようなパラメータ付け替え不変性を持つ:

$$G(t_1, t_2) \rightarrow (f(t_1)f(t_2))^\Delta G(f(t_1), f(t_2)), \quad \Sigma(t_1, t_2) \rightarrow (f(t_1)f(t_2))^{1-\Delta} \Sigma(f(t_1), f(t_2)). \quad (10)$$

ここで $\Delta = 1/q$ である。我々は解として次のような形を仮定する:

$$G_c(t) = \frac{b}{|t|^{2\Delta}} \text{sgn}(t), \quad \text{or} \quad G_c(t) = b \left[\frac{\pi}{\beta \sin(\pi t/\beta)} \right]^{2\Delta} \text{sgn}(t) \quad (11)$$

^{*2} このメロンは watermelon の melon であってメロンではないらしい。どの辺がスイカなのかはよく分からない。

2 番目の式は有限温度の場合の解であり、パラメータ t を $f(t) = \tan(\pi t/\beta)$ と変換して得る。図 2 および図 3 において G_c を緑色の線でプロットしたところ、一般の ω からは少しずれた。係数 b は

$$J^2 b^q \pi = \left(\frac{1}{2} - \Delta \right) \tan(\pi \Delta) \quad (12)$$

から決める事ができる^{*3}。

2.3 ラージ q 極限

SYK 模型ではラージ q 極限においても (あるオーダーで) 解析解が知られている。ここでは $1/q$ オーダーおよび $1/q^2$ オーダーまでの解を述べる。

2.3.1 リーディングオーダー

まず最初に $1/q$ オーダーでの解を考える (q は偶数とする):

$$G(t) = \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \left(1 + \frac{1}{q} g(t) \right), \quad \Sigma(t) = J^2 2^{1-q} \text{sgn}(t) e^{g(t)}. \quad (13)$$

一方で $G(t)$ をフーリエ変換したものは

$$\frac{1}{G(\omega)} = \frac{1}{-\frac{1}{i\omega} + \frac{[\text{sgn} \times g](\omega)}{2q}} = -i\omega + \omega^2 \frac{[\text{sgn} \times g](\omega)}{2q} = -i\omega - \Sigma(\omega) \quad (14)$$

で与えられる。ここで $[\text{sgn} \times g](\omega)$ は $\text{sgn}(t)g(t)$ の積のフーリエ変換を表す。また 2 番目の等号は $1/q$ で展開した。3 番目の等号より

$$\Sigma(\omega) = -\omega^2 \frac{[\text{sgn} \times g](\omega)}{2q} \quad (15)$$

を得るので、これを更にフーリエ変換したものと (13) 式の $\Sigma(t)$ を比べると次のような微分方程式を得る:

$$\partial_t^2 (\text{sgn}(t)g(t)) = 2\mathcal{J}^2 \text{sgn}(t) e^{g(t)}, \quad \mathcal{J} \equiv \sqrt{q} \frac{J}{2^{\frac{q-1}{2}}}. \quad (16)$$

$q \rightarrow \infty$ の極限で \mathcal{J} は固定されているものとする。この微分方程式の一般解は次のような形をしている事が知られている:

$$e^{g(t)} = \frac{c^2}{\mathcal{J}^2} \frac{1}{\sin^2(c|t| + t_0)}. \quad (17)$$

我々が興味ある解は、 $g(0) = 0$ かつ $g(\beta) = 0$ を満たすものである。なぜなら J は質量次元が 1 であり、したがって (16) 式が有効となるようなスケールの t が常に存在する。特に $t = 0$ は J のスケールで言い換えれば UV 領域なので、理論は相互作用なしの場合のものになるからである。これを考慮すると、

$$e^{g(t)} = \left[\frac{\cos \frac{\pi v}{2}}{\cos \left(\pi v \left(\frac{1}{2} - \frac{|t|}{\beta} \right) \right)} \right]^2, \quad \beta \mathcal{J} = \frac{\pi v}{\cos \frac{\pi v}{2}} \quad (18)$$

を得る。2 つ目の式によってパラメータ $v \in [0, 1]$ を決定する。

^{*3} 詳しくは付録 B を参照。

2.3.2 サブリーディングオーダー*4

次に我々は $1/q^2$ のオーダーを計算する (q は偶数とする):

$$G(t) = \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \left(1 + \frac{1}{q} g(t) + \frac{1}{q^2} h(t) \right). \quad (19)$$

自己エネルギー $\Sigma(t)$ は (9) 式より

$$\Sigma(t) = \frac{\mathcal{J}^2}{q} \text{sgn}(t) e^g \left(1 + \frac{1}{q} \left(h - g - \frac{1}{2} g^2 \right) \right) \quad (20)$$

となる。以下では $t \in [0, \beta]$ とする (従って $\text{sgn}(t) = 1$ である)。 $G(\omega)^{-1}$ を (19) 式を用いて $1/q^2$ まで展開すると

$$G(\omega)^{-1} = -i\omega + \frac{1}{2q} \omega^2 g(\omega) + \frac{\omega^2}{2q^2} \left(h(\omega) + \frac{i\omega}{2} [g \times g](\omega) \right) = -i\omega - \Sigma(\omega) \quad (21)$$

となるので、フーリエ変換された自己エネルギーとして

$$\Sigma(\omega) = -\frac{1}{2q} \omega^2 g(\omega) - \frac{\omega^2}{2q^2} \left(h(\omega) + \frac{i\omega}{2} [g \times g](\omega) \right) \quad (22)$$

を得る。これを ω から t へ逆変換したものと (20) を比べれば、(16) 式及び $h(t)$ に関する微分方程式を得る:

$$\partial_t^2 h = 2\mathcal{J}^2 e^g h + \frac{1}{2} \partial_t^3 [g \times g] - 2\mathcal{J}^2 e^g \left(g + \frac{1}{2} g^2 \right). \quad (23)$$

リーディングオーダーの場合と同様に g と h は次の境界条件を満たすとする:

$$g(0) = g(\beta) = h(0) = h(\beta) = 0. \quad (24)$$

この時 $g(t)$ は (18) 式で与えられる。また (23) 式の解は次式で与えられる:

$$\begin{aligned} h(x) = & \frac{1}{2} g^2(x) - 2L(x) - 4 \left(\tan x \int_0^x dy L(y) + 1 \right) \\ & + 4 \frac{1 + x \tan x}{1 + \frac{\pi v}{2} \tan \frac{\pi v}{2}} \left(\tan \frac{\pi v}{2} \int_0^{\frac{\pi v}{2}} dy L(y) + 1 \right). \end{aligned} \quad (25)$$

ここで $x = \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi v}{\beta} t$ 、また

$$L(x) = g(x) - e^{-g(x)} \text{Li}_2(1 - e^{g(x)}) \quad \left(\text{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \right) \quad (26)$$

である*5。

*4 この節の内容は [10] による。

*5 $\text{Li}_2(z)$ は <http://mathworld.wolfram.com/Dilogarithm.html> を参照した。

2.4 自由エネルギー及びエントロピー

自由エネルギーは (6) 式より

$$-\frac{\beta F}{N} = \frac{1}{2} \log \det \left(\frac{d}{dt} - \Sigma \right) - \frac{1}{2} \int_0^\beta dt_1 dt_2 \left(\Sigma(t_{12}) G(t_{12}) - \frac{J^2}{q} G(t_{12})^q \right) \quad (27)$$

で与えられる。ここで $t_{ij} \equiv t_i - t_j$ とした。右辺の第一項目の計算を避けるためには自由エネルギーを $J \partial_J$ で微分すると良い^{*6}:

$$J \frac{\partial}{\partial J} \left(-\frac{\beta F}{N} \right) = \frac{J^2 \beta}{q} \int_0^\beta dt G(t)^q = -\frac{\beta}{q} \frac{\partial G}{\partial t}(t \rightarrow 0^+). \quad (28)$$

ここで2つ目の等号では (7) 式の2つ目の式を用いた。(19) 式を代入すると

$$-\frac{\beta}{q} \frac{\partial G}{\partial t}(t \rightarrow 0^+) = \frac{\pi v}{2q} \left(\frac{1}{q} \frac{\partial g}{\partial x} \left(x \rightarrow \frac{\pi v}{2} \right) + \frac{1}{q^2} \frac{\partial h}{\partial x} \left(x \rightarrow \frac{\pi v}{2} \right) \right) \quad (29)$$

となり、更に (18) 式と (25) 式を代入して計算を進めると

$$\frac{\partial g}{\partial x} \left(x \rightarrow \frac{\pi v}{2} \right) = 2 \tan \frac{\pi v}{2} \quad (30)$$

及び

$$\frac{\partial h}{\partial x} \left(x \rightarrow \frac{\pi v}{2} \right) = \frac{4}{1 + \frac{\pi v}{2} \tan \frac{\pi v}{2}} \left(\frac{\pi v}{2} - \tan \frac{\pi v}{2} \left(1 + \frac{\pi v}{2} \tan \frac{\pi v}{2} \right) - \int_0^{\frac{\pi v}{2}} dy L(y) \right) \quad (31)$$

を得る。上式の $L(y)$ に対する積分は具体的に実行する事ができ、

$$\int_0^{\frac{\pi v}{2}} dy L(y) = -\frac{\pi^2 v^2 (\pi v + 3 \sin \pi v)}{24 \cos^2 \frac{\pi v}{2}} \quad (32)$$

で与えられる [10]。この積分結果及び

$$J \frac{\partial}{\partial J} = \frac{v}{1 + \frac{\pi v}{2} \tan \frac{\pi v}{2}} \frac{\partial}{\partial v} \quad (33)$$

を用いて (28) 式を積分すると自由エネルギーをラージ q で展開した式を求める事ができる:

$$-\frac{\beta F}{N} = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{q^2} F_{1/q^2} + \frac{1}{q^3} F_{1/q^3} + \dots, \quad (34)$$

$$F_{1/q^2}(v) = \pi v \left(\tan \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi v}{4} \right), \quad (35)$$

$$F_{1/q^3}(v) = \pi v \left(\pi v - 2 \tan \frac{\pi v}{2} \left(1 - \frac{\pi^2 v^2}{12} \right) \right). \quad (36)$$

パラメータ v は相互作用の大きさ $\beta \mathcal{J}$ で展開すると

$$v = 1 - \frac{2}{\beta \mathcal{J}} + \frac{4}{(\beta \mathcal{J})^2} - \frac{24 + \pi^2}{3(\beta \mathcal{J})^2} + \dots \quad (37)$$

^{*6} G と Σ が運動方程式に従っているため、 ∂_J はあらわに J に依存している項のみに作用する。

となる。これを用いて自由エネルギーを強結合領域で展開すると

$$\begin{aligned}
-\frac{\beta F}{N} &= \beta \mathcal{J} \left(\frac{1}{q^2} - \frac{12 - \pi^2}{6q^3} \right) \\
&+ \left(\frac{1}{2} \log 2 - \frac{\pi^2}{4q^2} + \frac{\pi^2}{3q^3} \right) + \frac{1}{\beta \mathcal{J}} \left(\frac{\pi^2}{2q^2} - \frac{\pi^2(\pi^2 + 12)}{12q^3} \right) \dots
\end{aligned} \tag{38}$$

となる。右辺の一行目は基底状態のエネルギー、二行目の1つめの括弧は零温度エントロピー、2つ目はその補正項である。零温度エントロピーは次式をラージ q で展開したものと一致する [1]:

$$\frac{S_0}{N} = \frac{1}{2} \log 2 - \int_0^{1/q} dx \left(\frac{1}{2} - x \right) \tan \pi x. \tag{39}$$

3 4 点関数

この節では強結合領域 $\beta J \gg 1$ における 4 点関数を論じる。disorder-average を取る事によって最も一般的な 4 点関数は

$$\langle \psi_i(t_1) \psi_i(t_2) \psi_j(t_3) \psi_j(t_4) \rangle \quad (40)$$

という形に制限される。これを i と j について平均を取ったものを考える:

$$\frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \langle \psi_i(t_1) \psi_i(t_2) \psi_j(t_3) \psi_j(t_4) \rangle = G(t_{12})G(t_{34}) + \frac{1}{N} \mathcal{F}(t_1, \dots, t_4). \quad (41)$$

以下では \mathcal{F} について解析する。

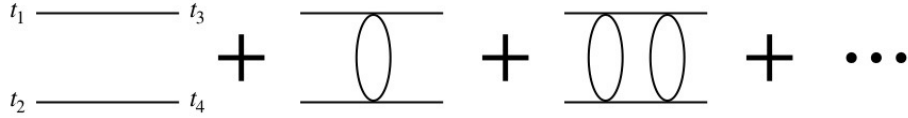


図4 (41) 式の $1/N$ の項を表すダイアグラム。特に $q = 4$ の場合について描画した。ラダーダイアグラムと呼ぶ。

\mathcal{F} を表すダイアグラムはラダーダイアグラムである (図4)。 n 個の輪があるものを \mathcal{F}_n とすると、計算するべきは

$$\mathcal{F} = \sum_n \mathcal{F}_n \quad (42)$$

である。図4の最初にある輪を持たないラダーダイアグラムは単なるプロパゲーターの積である:

$$\mathcal{F}_0(t_1, \dots, t_4) = -G(t_{13})G(t_{24}) + G(t_{14})G(t_{23}). \quad (43)$$

次に並ぶ、輪を1個だけ持つラダーダイアグラムでは、輪の端の位置について積分した形で与えられる:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(t_1, \dots, t_4) \\ = J^2(q-1) \int dt dt' (G(t_1 - t)G(t_2 - t')G(t - t')^{q-2}G(t - t_3)G(t' - t_4) - (t_3 \leftrightarrow t_4)). \end{aligned} \quad (44)$$

積分の前にある $q-1$ という因子は、どの線をレールや輪にするかのパターン数に起因する。上述した2つのラダーダイアグラム $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ に限らず、全てのラダーダイアグラムは $1/N$ に比例する。

あるラダーダイアグラム \mathcal{F}_n と次の \mathcal{F}_{n+1} の間には

$$\mathcal{F}_{n+1}(t_1, \dots, t_4) = \int dt dt' K(t_1, t_2; t, t') \mathcal{F}_n(t, t', t_3, t_4) \quad (45)$$

という漸化式的な関係がある。ここで積分核 K は

$$K(t_1, t_2; t_3, t_4) = -J^2(q-1)G(t_{13})G(t_{24})G(t_{34})^{q-2} \quad (46)$$

である。(45) 式の計算では、 K の最初の 2 つの変数を 1 つめの添字、残りの 2 つを 2 つ目の添字と見なす事によって積分を行列計算としてしまうのが便利である (行列 K は 2 変数反対称関数の空間に作用する)。こうする事で全てのラダーダイアグラムの総和を

$$\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n = \sum_{n=0}^{\infty} K^n \mathcal{F}_0 = \frac{1}{1-K} \mathcal{F}_0 \quad (47)$$

という様に表す事ができる。これを更に計算するために、以下では K を対角化する事を考える。(46) 式による定義では K は対称行列ではないが、次のような操作により対称化する事が可能である:

$$\tilde{K}(t_1, t_2; t_3, t_4) \equiv |G(t_{12})|^{\frac{q-2}{2}} K(t_1, t_2; t_3, t_4) |G(t_{34})|^{\frac{2-q}{2}}. \quad (48)$$

従って K は固有関数 (固有ベクトル) の完全系を持つとして良い。

3.1 K_c の対角化

ここまでの話は一般の βJ について成り立つ。解析を進めるために、以下では共変対称性の成り立つ極限 $\beta J \gg 1$ で考える。よって 2 点関数は (11) 式の $G_c(t)$ で与えられる。(11) 式を (46) 式に代入すると、 K の共変不変なものとして

$$K_c(t_1, t_2; t_3, t_4) = -\frac{1}{\alpha_0} \frac{\text{sgn}(t_{13})\text{sgn}(t_{24})}{|t_{13}|^{2\Delta}|t_{24}|^{2\Delta}|t_{34}|^{2-4\Delta}} \quad (49)$$

を得る。ここで

$$\alpha_0 \equiv \frac{2\pi q}{(q-1)(q-2)\tan\frac{\pi}{q}} \quad (50)$$

である。 K_c を対角化した暁には、実は固有関数の中に固有値 $g(\alpha) = 1$ を持つものも存在する。従って (47) 式の級数は発散するが、これは共変極限から摂動的に少しずれる事によって対処する事ができる。それを議論するまでは、ひとまず (49) 式を用いる事にする。

K_c の対角化では共変不変性を活用する事になる。SYK 模型は時間 1 次元しか持たないので、1 次元共形場理論 CFT_1 であり^{*7}、共変変換群は $SL(2, \mathbb{R})$ で与えられる [11]:

$$\hat{D} = -t\partial_t - \Delta, \quad \hat{P} = \partial_t, \quad \hat{K} = t^2\partial_t + 2t\Delta, \quad (51)$$

$$[\hat{D}, \hat{P}] = \hat{P}, \quad [\hat{D}, \hat{K}] = -\hat{K}, \quad [\hat{P}, \hat{K}] = -2\hat{D}. \quad (52)$$

これらの生成子は K_c と交換し、

$$(\hat{D}_1 + \hat{D}_2)K_c(t_1, t_2; t_3, t_4)(\hat{D}_3 + \hat{D}_4) \quad (53)$$

となる。 \hat{P} や \hat{K} についても同様である。

^{*7} 1 次元の場の量子論は本質的に量子力学なので、Conformal Quantum Mechanics の頭文字を取って CQM と表記する事もある。

4 量子カオスとしての SYK 模型

この節では SYK 模型の量子カオスの性質を述べる^{*8}。

^{*8} この節の内容は [7] 及び [8] による。

5 量子カオスとしてのブラックホール

この節では主に SYK 模型の重力双対である Jackiw–Teitelboim ブラックホールの量子カオスの性質を述べる^{*9}。

^{*9} この節の内容は [7] 及び [8] による。

6 終わりに

付録 A 有効作用の計算

SYK 模型のラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \psi_i \frac{d}{dt} \psi_i - \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l=1}^N J_{ijkl} \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l \quad (54)$$

で与えられる。SYK 模型ではしばしば有限温度を考慮するため、分配関数はユークリッド化したものを計算する:

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \exp \left(- \int dt L \right). \quad (55)$$

以下では (55) 式を乱数 J_{ijkl} について平均を取るという disorder-average の計算を行い、その後フェルミオンについて積分し有効作用を得る事を目標とする。

disorder-average は

$$\langle Z \rangle = \int \prod_{i<j<k<l}^N [dJ_{ijkl} P(J_{ijkl})] Z \quad (56)$$

を計算すれば良い。以下では表記を簡潔にするために

$$a \equiv \frac{N^3}{12J^2} \quad (57)$$

$$I_{ijkl} \equiv \int dt \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l \quad (58)$$

としておく。 J_{ijkl} についての積分が実行される部分が明確になるように式変形すると

$$\begin{aligned} \langle Z \rangle = \int \mathcal{D}\psi \exp \left(- \int dt \sum_i \frac{1}{2} \psi_i \frac{d}{dt} \psi_i \right) \\ \times \underbrace{\int \left[\prod_{i<j<k<l} dJ_{ijkl} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp(-aJ_{ijkl}^2) \right] \exp \left(\frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l} I_{ijkl} J_{ijkl} \right)}_{\equiv G} \end{aligned} \quad (59)$$

となる。ここから更に G を複数のガウス積分の積となるように変形すると

$$G = \left(\frac{a}{\pi} \right)^{4!N C_4/2} \prod_{i<j<k<l} \int dJ_{ijkl} \exp(-aJ_{ijkl}^2 + I_{ijkl} J_{ijkl}) \quad (60)$$

となる。ここで J_{ijkl} と I_{ijkl} が反対称テンソルである事を用いて

$$\frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l} I_{ijkl} J_{ijkl} = \sum_{i<j<k<l} I_{ijkl} J_{ijkl} \quad (61)$$

を使用した。あとは通常のガウス積分を実行すると

$$G = \exp \left(\frac{3J^2}{N^3} \sum_{i<j<k<l} I_{ijkl}^2 \right) = \exp \left(\frac{3J^2}{4!N^3} \sum_{i,j,k,l} I_{ijkl}^2 \right) \quad (62)$$

となり、

$$\begin{aligned} \langle Z \rangle = \int \mathcal{D}\psi \exp \left(- \int dt \sum_i \frac{1}{2} \psi_i \frac{d}{dt} \psi_i \right. \\ \left. + \frac{3J^2}{4!N^3} \sum_{i,j,k,l} \int dt_1 dt_2 \psi_i(t_1) \psi_j(t_1) \psi_k(t_1) \psi_l(t_1) \psi_i(t_2) \psi_j(t_2) \psi_k(t_2) \psi_l(t_2) \right) \end{aligned} \quad (63)$$

という結果を得る。次はフェルミオンについて積分するのであるが、その前に

$$G(t_1, t_2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_i(t_1) \psi_i(t_2) \quad (64)$$

という場を導入するために

$$\begin{aligned} 1 &= \int \mathcal{D}G \delta \left(NG - \sum_i \psi_i \psi_i \right) \\ &= \int \mathcal{D}G \int \mathcal{D}\Sigma \exp \left(- \int dt_1 dt_2 \frac{1}{2} \Sigma(t_1, t_2) \left(NG(t_1, t_2) - \sum_i \psi_i(t_1) \psi_i(t_2) \right) \right) \end{aligned} \quad (65)$$

を $\langle Z \rangle$ に挿入する^{*10}。この時、挿入したデルタ関数によって

$$\sum_{i,j,k,l} \int dt_1 dt_2 \psi_i(t_1) \psi_j(t_1) \psi_k(t_1) \psi_l(t_1) \psi_i(t_2) \psi_j(t_2) \psi_k(t_2) \psi_l(t_2) \rightarrow N^4 \int dt_1 dt_2 G(t_1, t_2)^4 \quad (66)$$

という置き換えができる。以上を踏まえてフェルミオンの積分が実行される部分が明確になるように式変形を行うと

$$\begin{aligned} \langle Z \rangle = \int \mathcal{D}G \int \mathcal{D}\Sigma \exp \left(- \frac{N}{2} \int dt_1 dt_2 \left(\Sigma G - \frac{J^2}{4} G^4 \right) \right) \\ \times \underbrace{\int \mathcal{D}\psi \exp \left(- \sum_i \int dt_1 dt_2 \frac{1}{2} \psi_i(t_1) \left(\delta(t_1 - t_2) \frac{d}{dt_1} - \Sigma(t_1, t_2) \right) \psi_i(t_2) \right)}_{\equiv F} \end{aligned} \quad (67)$$

となる。あとは F と置いた部分を計算するのだが、そのためには次の公式を使うとよい [9]:

$$\int d\theta \exp \left(- \frac{1}{2} \theta \cdot M \cdot \theta \right) = \sqrt{\det(M)} \quad (68)$$

^{*10} ディラックのデルタ関数をフーリエ変換したものはもちろん

$$\delta(x) \propto \int dp \exp(ipx)$$

であるが、今は $\Sigma(t_1, t_2)$ を虚軸方向に積分していると考えているため、結果として虚数単位 i がさらに i 倍され負号となる。

ここで $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ は n 個のグラスマン数であり、 M は反対称行列である。これを用いて、

$$\begin{aligned}
F &= \prod_i \int \mathcal{D}\psi_i \exp \left(- \int dt_1 dt_2 \frac{1}{2} \psi_i(t_1) \left(\delta(t_1 - t_2) \frac{d}{dt_1} - \Sigma(t_1, t_2) \right) \psi_i(t_2) \right) \\
&= \prod_i \left[\det \left(\delta(t_1 - t_2) \frac{d}{dt_1} - \Sigma(t_1 - t_2) \right) \right]^{1/2} \\
&= \left[\det \left(\frac{d}{dt} - \Sigma \right) \right]^{N/2} \\
&= \exp \left(\frac{N}{2} \log \det \left(\frac{d}{dt} - \Sigma \right) \right)
\end{aligned} \tag{69}$$

となる。ここで

$$\delta(t_1 - t_2) \frac{d}{dt_1} - \Sigma(t_1 - t_2) \rightarrow \frac{d}{dt} - \Sigma \tag{70}$$

という記号的な処理を施した。

以上より

$$\begin{aligned}
\langle Z \rangle &= \int \mathcal{D}G \int \mathcal{D}\Sigma \exp \left(\frac{N}{2} \log \det \left(\frac{d}{dt} - \Sigma \right) - \frac{N}{2} \int dt_1 dt_2 \left(\Sigma G - \frac{J^2}{4} G^4 \right) \right) \\
&\equiv \int \mathcal{D}G \int \mathcal{D}\Sigma \exp(-I_{eff})
\end{aligned} \tag{71}$$

となり、有効作用として

$$\frac{I_{eff}}{N} = -\frac{1}{2} \log \det \left(\frac{d}{dt} - \Sigma \right) + \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 \left(\Sigma G - \frac{J^2}{4} G^4 \right) \tag{72}$$

を得た。

付録 B 係数 b の計算

この付録では (11) 式の係数 b の計算方法について述べる。まず (9) 式の 2 つの式を一つにまとめると

$$J^2 \int ds G(s - t_1) G(s - t_2)^{q-1} = -\delta(t_2 - t_1) \quad (73)$$

となる。この積分を実行するには、

$$\frac{\text{sgn}(t)}{|t|^{2\Delta}} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t) i 2^{1-2\Delta} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1-\Delta)}{\Gamma(1/2+\Delta)} |\omega|^{2\Delta-1} \text{sgn}(\omega) \quad (74)$$

を使用すると便利である。少しの計算のあとに、

$$\begin{aligned} -\delta(t) = & -J^2 b^q \pi \frac{\Gamma(1-\Delta)\Gamma(\Delta)}{\Gamma(1/2+\Delta)\Gamma(3/2-\Delta)} \\ & \times \int ds \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega(t-s)) |\omega|^{2\Delta-1} \text{sgn}(\omega) \int \frac{d\Omega}{2\pi} \exp(-i\Omega s) |\Omega|^{1-2\Delta} \text{sgn}(\Omega) \end{aligned} \quad (75)$$

という式にたどり着く。積分の部分は最初に s について実行すると $\delta(\omega - \Omega)$ が現れ、その後 ω および Ω で積分すると $\delta(t)$ が現れる。またガンマ関数の部分については

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad \text{for } \forall z \notin \mathbb{Z} \quad (76)$$

という性質と $\Gamma(1+z)\Gamma(z) = z\Gamma(z)$ を用いることで

$$\frac{\Gamma(1-\Delta)\Gamma(\Delta)}{\Gamma(1/2+\Delta)\Gamma(3/2-\Delta)} = \frac{1}{(1/2-\Delta)\tan(\pi\Delta)} \quad (77)$$

となる。以上より、係数 b は

$$J^2 b^q \pi = \left(\frac{1}{2} - \Delta \right) \tan(\pi\Delta) \quad (78)$$

という式により決定できる。

付録 C AdS/CFT 対応及びブラックホール熱力学

この節では AdS/CFT 対応及びブラックホール熱力学の詳しい説明を行う。

付録 D 量子カオス

この付録では量子カオスおよびランダム行列理論の詳しい説明を行う^{*11}。

^{*11} この節の内容は [6] による。

参考文献

- [1] J. Maldacena and D. Stanford, "Comments on the Sachdev-Ye-Kitaev model," [arXiv:1604.07818 \[hep-th\]](#)
- [2] V. Rosenhaus, "An introduction to the SYK model," [arXiv:1807.03334v1 \[hep-th\]](#)
- [3] J. Polchinski and V. Rosenhaus, "The Spectrum in the Sachdev-Ye-Kitaev Model," [arXiv:1601.06768 \[hep-th\]](#)
- [4] D. J. Gross and V. Rosenhaus, "A Generalization of Sachdev-Ye-Kitaev," [arXiv:1610.01569 \[hep-th\]](#)
- [5] J. Maldacena, S. H. Shenker and D. Stanford, "A bound on chaos," [arXiv:1503.01409 \[hep-th\]](#)
- [6] J. Liu, "Spectral form factors and late time quantum chaos," [arXiv:1806.05316 \[hep-th\]](#)
- [7] J. S. Cotler, G. Gur-Ari, M. Hanada, J. Polchinski, P. Saad, S. H. Shenker, D. Stanford, A. Streicher and M. Tezuka, "Black Holes and Random Matrices," [arXiv:1611.04650 \[hep-th\]](#)
- [8] P. Saad, S. H. Shenker and D. Stanford, "A semiclassical ramp in SYK and in gravity," [arXiv:1806.04650 \[hep-th\]](#)
- [9] H. E. Haber, "[Notes on antisymmetric matrices and the pfaffian](#)"
- [10] G. Tarnopolsky, "On large q expansion in the Sachdev-Ye-Kitaev model," [arXiv:1801.06871 \[hep-th\]](#)
- [11] K. Andrzejewski, "Quantum conformal mechanics," [arXiv:1506.05596 \[hep-th\]](#)