

Sachdev–Ye–Kitaev 模型

西村 滉祐

概要

これは修論です。

目次

1	はじめに: SYK 模型とは	2
2	2 点関数	3
2.1	シュウィンガー・ダイソン方程式	3
2.2	共形不変性	4
2.3	ラージ q 極限	5
3	4 点関数	7
4	終わりに	8
付録 A	有効作用の計算	9
付録 B	係数 b の計算	12

1 はじめに: SYK 模型とは

Sachdev–Ye–Kitaev(SYK) 模型とは、Kitaev が AdS/CFT 対応の簡単な模型として提唱したものであり、そのハミルトニアンは次のように与えられる:

$$H = \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l=1}^N J_{ijkl} \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l. \quad (1.1)$$

ここで J_{ijkl} は乱数で与えられる反対称テンソルであり、その分布は

$$P(J_{ijkl}) = \sqrt{\frac{N^3}{12\pi J^2}} \exp\left(-\frac{N^3}{12J^2} J_{ijkl}^2\right). \quad (1.2)$$

に従う。SYK 模型において次元を持つパラメータのひとつは (1.2) 式の J であり、 $[J] = 1$ である。(1.1) 式の大きさはこの J によって決まる。

SYK 模型を調べるモチベーションは複数あり、大別して以下の 3 つに分けることができる:

強結合領域で可解な模型である。ラーゼ N 極限を取るとリーディングオーダーでのファインマンダイアグラムが単純なものとなり、その和を取ることで強結合領域での相関関数が計算可能である。

最大にカオスである。カオスはリャプノフ指数によって計られ、その最大値はアインシュタイン重力におけるブラックホールが持ち、 $2\pi/\beta$ となる [5]。強結合領域における SYK 模型もこの最大値を満たす事が知られている [1]。

共形不変性が現れる。低エネルギーでは 2 点関数が共形不変性を持つ。

大抵の場合、理論を解析する際には摂動論が適用できる範囲でしか計算する事ができないが、SYK 模型では一つ目の性質により強結合領域でも計算する事が可能であり、大きなモチベーションの一つとなっている。一つ目と二つ目を組み合わせると非常に興味深い。古典論では「可解である」という事と可積分系である事は等しく、従ってカオスとは相容れない [3]。これが量子論では必ずしもそうではない事を SYK 模型は示している。また二つ目と三つ目の性質により、何らかの形におけるアインシュタイン重力理論が AdS/CFT 対応での双対理論として期待される。

2 2点関数

2.1 シュウィンガー・ダイソン方程式



図1 ラージ N 極限において 2 点関数に寄与する最初の補正ダイアグラム. 特に $q = 4$ の場合について描画している. 灰色の丸と黒い丸はそれぞれ完全な 2 点関数および 1 粒子相互作用を表している.

SYK 模型の作用は

$$I = \int dt \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \psi_i \frac{d}{dt} \psi_i - \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l=1}^N J_{ijkl} \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l \right) \quad (2.1)$$

である。これを J_{ijkl} について期待値を取り、その後フェルミオンを積分するために 2 つの bi-local 場 $G(t_1, t_2)$, $\Sigma(t_1, t_2)$ を導入すると

$$\frac{I_{eff}}{N} = -\frac{1}{2} \log \det \left(\frac{d}{dt} - \Sigma \right) + \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 \left(\Sigma G - \frac{J^2}{4} G^4 \right) \quad (2.2)$$

を得る^{*1}。(2.2) 式の停留点が次式のシュウィンガー・ダイソン方程式を与える:

$$G(\omega)^{-1} = -i\omega - \Sigma(\omega), \quad \Sigma(t) = J^2 G(t)^3 \quad (2.3)$$

なお、SYK 模型では 4 つのフェルミオンが相互作用するとしているが³、その数を q として一般化しても有効作用やシュウィンガー・ダイソン方程式は計算する事ができ、それぞれ

$$\frac{I_{eff}}{N} = -\frac{1}{2} \log \det \left(\frac{d}{dt} - \Sigma \right) + \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 \left(\Sigma G - \frac{J^2}{q} G^q \right) \quad (2.4)$$

^{*1} 詳しい計算は付録 A を参照すること.

$$G(\omega)^{-1} = -i\omega - \Sigma(\omega), \quad \Sigma(t) = J^2 G(t)^{q-1} \quad (2.5)$$

である。さらに複数の q について相互作用項を足し合わせたような一般化した SYK 模型も調べられており、[4] にて詳しく論じられている。

ラージ N 極限を施した SYK 模型において、リーディングオーダーで 2 点関数に寄与するファインマンダイアグラムは「メロンダイアグラム」と呼ばれている*2。(2.5) 式の一般の ω における解析的な計算は現在のところ知られていないが、数値的には可能であり、図 1 のダイアグラムのように再帰的に計算を走らせる事で 2 点関数のグラフをプロットできる。



図 2 $J = 10$ としてプロットした 2 点関数. 横軸は時間である. 青色の線が一般の ω , 緑色の線が $\omega = 0$, 赤色の線が低エネルギー極限に J^{-1} 補正を加えたものである.



図 3 $J = 50$ としてプロットした 2 点関数. 横軸は時間である. 各色の意味は左図と同様. 低エネルギー極限はラージ J 極限でもあるので, 左図と比べて各線は互いに近づく.

2.2 共形不変性

シュウィンガー・ダイソン方程式 (2.5) は $\omega = 0$ という低エネルギー極限においては解析的な解が知られている。この時 (2.5) 式の一つ目の式は

$$\Sigma(\omega)G(\omega) = -1 \quad (2.6)$$

となり、この両辺にフーリエ変換を施す事でシュウィンガー・ダイソン方程式は

$$\int dt G(t_1, t) \Sigma(t, t_2) = -\delta(t_1 - t_2), \quad \Sigma(t_1, t_2) = J^2 (G(t_1, t_2))^{q-1} \quad (2.7)$$

と書き改める事ができる。これらの 2 つの式は次のようなパラメータ付け替え不変性を持つ:

$$G(t_1, t_2) \rightarrow (f(t_1)f(t_2))^\Delta G(f(t_1), f(t_2)), \quad \Sigma(t_1, t_2) \rightarrow (f(t_1)f(t_2))^{1-\Delta} \Sigma(f(t_1), f(t_2)). \quad (2.8)$$

ここで $\Delta = 1/q$ である。我々は解として次のような形を仮定する:

$$G_c(t) = \frac{b}{|t|^{2\Delta}} \text{sgn}(t), \quad \text{or} \quad G_c(t) = b \left[\frac{\pi}{\beta \sin(\pi t/\beta)} \right]^{2\Delta} \text{sgn}(t) \quad (2.9)$$

*2 このメロンは watermelon の melon であってメロンではないらしい。どの辺がスイカなのかはよく分からない。

2 番目の式は有限温度の場合の解であり、パラメータ t を $f(t) = \tan(\pi t/\beta)$ と変換して得る。図 2 および図 3 において G_c を緑色の線でプロットしたところ、一般の ω からは少しずれた。係数 b は

$$J^2 b^q \pi = \left(\frac{1}{2} - \Delta \right) \tan(\pi \Delta) \quad (2.10)$$

から決める事ができる*3。

2.3 ラージ q 極限

SYK 模型ではラージ q 極限においても (あるオーダーで) 解析解が知られている。ここでは $1/q$ オーダーおよび $1/q^2$ オーダーまでの解を述べる。

2.3.1 リーディングオーダー

まず最初に $1/q$ オーダーでの解を考える (q は偶数とする):

$$G(t) = \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \left(1 + \frac{1}{q} g(t) \right), \quad \Sigma(t) = J^2 2^{1-q} \text{sgn}(t) e^{g(t)}. \quad (2.11)$$

一方で $G(t)$ をフーリエ変換したものは

$$\frac{1}{G(\omega)} = \frac{1}{-\frac{1}{i\omega} + \frac{[\text{sgn} \times g](\omega)}{2q}} = -i\omega + \omega^2 \frac{[\text{sgn} \times g](\omega)}{2q} = -i\omega - \Sigma(\omega) \quad (2.12)$$

で与えられる。ここで $[\text{sgn} \times g](\omega)$ は $\text{sgn}(t)g(t)$ の積のフーリエ変換を表す。また 2 番目の等号は $1/q$ で展開した。3 番目の等号より

$$\Sigma(\omega) = -\omega^2 \frac{[\text{sgn} \times g](\omega)}{2q} \quad (2.13)$$

を得るので、これを更にフーリエ変換したもの $\Sigma(t)$ と (2.11) 式の $\Sigma(t)$ を比べると次のような微分方程式を得る:

$$\partial_t^2 (\text{sgn}(t)g(t)) = 2\mathcal{J}^2 \text{sgn}(t) e^{g(t)}, \quad \mathcal{J} \equiv \sqrt{q} \frac{J}{2^{\frac{q-1}{2}}}. \quad (2.14)$$

$q \rightarrow \infty$ の極限で \mathcal{J} は固定されているものとする。この微分方程式の一般解は次のような形をしている事が知られている:

$$e^{g(t)} = \frac{c^2}{\mathcal{J}^2} \frac{1}{\sin^2(c|t| + t_0)}. \quad (2.15)$$

我々が興味ある解は、 $g(0) = 0$ かつ $g(\beta) = 0$ を満たすものである。なぜなら J は質量次元が 1 であり、したがって (2.14) 式が有効となるようなスケールの t が常に存在する。特に $t = 0$ は J のスケールで言い換えれば UV 領域なので、理論は相互作用なしの場合のものになるからである。これを考慮すると、

$$e^{g(t)} = \left[\frac{\cos \frac{\pi v}{2}}{\cos \left(\pi v \left(\frac{1}{2} - \frac{|t|}{\beta} \right) \right)} \right]^2, \quad \beta \mathcal{J} = \frac{\pi v}{\cos \frac{\pi v}{2}} \quad (2.16)$$

を得る。2 つ目の式によってパラメータ $v \in [0, 1]$ を決定する。

*3 詳しくは付録 B を参照。

2.3.2 サブリーディングオーダー^{*4}

次に我々は $1/q^2$ のオーダーを計算する:

$$G(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) \left(1 + \frac{1}{q} g(t) + \frac{1}{q^2} h(t) \right). \quad (2.17)$$

^{*4} この節の内容は [7] による.

3 4 点関数

4 終わりに

付録 A 有効作用の計算

SYK 模型のラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \psi_i \frac{d}{dt} \psi_i - \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l=1}^N J_{ijkl} \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l \quad (\text{A.1})$$

で与えられる。SYK 模型ではしばしば有限温度を考慮するため、分配関数はユークリッド化したものを計算する:

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \exp \left(- \int dt L \right). \quad (\text{A.2})$$

以下では (A.2) 式を乱数 J_{ijkl} について平均を取るという disorder-average の計算を行い、その後フェルミオンについて積分し有効作用を得る事を目標とする。

disorder-average は

$$\langle Z \rangle = \int \prod_{i<j<k<l}^N [dJ_{ijkl} P(J_{ijkl})] Z \quad (\text{A.3})$$

を計算すれば良い。以下では表記を簡潔にするために

$$a \equiv \frac{N^3}{12J^2} \quad (\text{A.4})$$

$$I_{ijkl} \equiv \int dt \psi_i \psi_j \psi_k \psi_l \quad (\text{A.5})$$

としておく。 J_{ijkl} についての積分が実行される部分が明確になるように式変形すると

$$\begin{aligned} \langle Z \rangle = \int \mathcal{D}\psi \exp \left(- \int dt \sum_i \frac{1}{2} \psi_i \frac{d}{dt} \psi_i \right) \\ \times \underbrace{\int \left[\prod_{i<j<k<l} dJ_{ijkl} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp(-aJ_{ijkl}^2) \right] \exp \left(\frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l} I_{ijkl} J_{ijkl} \right)}_{\equiv G} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

となる。ここから更に G を複数のガウス積分の積となるように変形すると

$$G = \left(\frac{a}{\pi} \right)^{4!N C_4/2} \prod_{i<j<k<l} \int dJ_{ijkl} \exp(-aJ_{ijkl}^2 + I_{ijkl} J_{ijkl}) \quad (\text{A.7})$$

となる。ここで J_{ijkl} と I_{ijkl} が反対称テンソルである事を用いて

$$\frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l} I_{ijkl} J_{ijkl} = \sum_{i<j<k<l} I_{ijkl} J_{ijkl} \quad (\text{A.8})$$

を使用した。あとは通常のガウス積分を実行すると

$$G = \exp \left(\frac{3J^2}{N^3} \sum_{i<j<k<l} I_{ijkl}^2 \right) = \exp \left(\frac{3J^2}{4!N^3} \sum_{i,j,k,l} I_{ijkl}^2 \right) \quad (\text{A.9})$$

となり、

$$\begin{aligned} \langle Z \rangle = \int \mathcal{D}\psi \exp \left(- \int dt \sum_i \frac{1}{2} \psi_i \frac{d}{dt} \psi_i \right. \\ \left. + \frac{3J^2}{4!N^3} \sum_{i,j,k,l} \int dt_1 dt_2 \psi_i(t_1) \psi_j(t_1) \psi_k(t_1) \psi_l(t_1) \psi_i(t_2) \psi_j(t_2) \psi_k(t_2) \psi_l(t_2) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

という結果を得る。次はフェルミオンについて積分するのであるが、その前に

$$G(t_1, t_2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_i(t_1) \psi_i(t_2) \quad (\text{A.11})$$

という場を導入するために

$$\begin{aligned} 1 &= \int \mathcal{D}G \delta \left(NG - \sum_i \psi_i \psi_i \right) \\ &= \int \mathcal{D}G \int \mathcal{D}\Sigma \exp \left(- \int dt_1 dt_2 \frac{1}{2} \Sigma(t_1, t_2) \left(NG(t_1, t_2) - \sum_i \psi_i(t_1) \psi_i(t_2) \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

を $\langle Z \rangle$ に挿入する^{*5}。この時、挿入したデルタ関数によって

$$\sum_{i,j,k,l} \int dt_1 dt_2 \psi_i(t_1) \psi_j(t_1) \psi_k(t_1) \psi_l(t_1) \psi_i(t_2) \psi_j(t_2) \psi_k(t_2) \psi_l(t_2) \rightarrow N^4 \int dt_1 dt_2 G(t_1, t_2)^4 \quad (\text{A.13})$$

という置き換えができる。以上を踏まえてフェルミオンの積分が実行される部分が明確になるように式変形を行うと

$$\begin{aligned} \langle Z \rangle &= \int \mathcal{D}G \int \mathcal{D}\Sigma \exp \left(- \frac{N}{2} \int dt_1 dt_2 \left(\Sigma G - \frac{J^2}{4} G^4 \right) \right) \\ &\quad \times \underbrace{\int \mathcal{D}\psi \exp \left(- \sum_i \int dt_1 dt_2 \frac{1}{2} \psi_i(t_1) \left(\delta(t_1 - t_2) \frac{d}{dt_1} - \Sigma(t_1, t_2) \right) \psi_i(t_2) \right)}_{\equiv F} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

となる。あとは F と置いた部分を計算するのだが、そのためには次の公式を使うとよい [6]:

$$\int d\theta \exp \left(- \frac{1}{2} \theta \cdot M \cdot \theta \right) = \sqrt{\det(M)} \quad (\text{A.15})$$

^{*5} ディラックのデルタ関数をフーリエ変換したものはもちろん

$$\delta(x) \propto \int dp \exp(ipx)$$

であるが、今は $\Sigma(t_1, t_2)$ を虚軸方向に積分していると考えているため、結果として虚数単位 i がさらに i 倍され負号となる。

ここで $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ は n 個のグラスマン数であり、 M は反対称行列である。これを用いて、

$$\begin{aligned}
F &= \prod_i \int \mathcal{D}\psi_i \exp \left(- \int dt_1 dt_2 \frac{1}{2} \psi_i(t_1) \left(\delta(t_1 - t_2) \frac{d}{dt_1} - \Sigma(t_1, t_2) \right) \psi_i(t_2) \right) \\
&= \prod_i \left[\det \left(\delta(t_1 - t_2) \frac{d}{dt_1} - \Sigma(t_1 - t_2) \right) \right]^{1/2} \\
&= \left[\det \left(\frac{d}{dt} - \Sigma \right) \right]^{N/2} \\
&= \exp \left(\frac{N}{2} \log \det \left(\frac{d}{dt} - \Sigma \right) \right)
\end{aligned} \tag{A.16}$$

となる。ここで

$$\delta(t_1 - t_2) \frac{d}{dt_1} - \Sigma(t_1 - t_2) \rightarrow \frac{d}{dt} - \Sigma \tag{A.17}$$

という記号的な処理を施した。

以上より

$$\begin{aligned}
\langle Z \rangle &= \int \mathcal{D}G \int \mathcal{D}\Sigma \exp \left(\frac{N}{2} \log \det \left(\frac{d}{dt} - \Sigma \right) - \frac{N}{2} \int dt_1 dt_2 \left(\Sigma G - \frac{J^2}{4} G^4 \right) \right) \\
&\equiv \int \mathcal{D}G \int \mathcal{D}\Sigma \exp(-I_{eff})
\end{aligned} \tag{A.18}$$

となり、有効作用として

$$\frac{I_{eff}}{N} = -\frac{1}{2} \log \det \left(\frac{d}{dt} - \Sigma \right) + \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 \left(\Sigma G - \frac{J^2}{4} G^4 \right) \tag{A.19}$$

を得た。

付録 B 係数 b の計算

この付録では (2.9) 式の係数 b の計算方法について述べる. まず (2.7) 式の 2 つの式を一つにまとめると

$$J^2 \int ds G(s - t_1) G(s - t_2)^{q-1} = -\delta(t_2 - t_1) \quad (\text{B.1})$$

となる. この積分を実行するには,

$$\frac{\text{sgn}(t)}{|t|^{2\Delta}} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t) i 2^{1-2\Delta} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1-\Delta)}{\Gamma(1/2+\Delta)} |\omega|^{2\Delta-1} \text{sgn}(\omega) \quad (\text{B.2})$$

を使用すると便利である. 少しの計算のあとに,

$$\begin{aligned} -\delta(t) &= -J^2 b^q \pi \frac{\Gamma(1-\Delta)\Gamma(\Delta)}{\Gamma(1/2+\Delta)\Gamma(3/2-\Delta)} \\ &\quad \times \int ds \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega(t-s)) |\omega|^{2\Delta-1} \text{sgn}(\omega) \int \frac{d\Omega}{2\pi} \exp(-i\Omega s) |\Omega|^{1-2\Delta} \text{sgn}(\Omega) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

という式にたどり着く. 積分の部分は最初に s について実行すると $\delta(\omega - \Omega)$ が現れ, その後 ω および Ω で積分すると $\delta(t)$ が現れる. またガンマ関数の部分については

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad \text{for } \forall z \notin \mathbb{Z} \quad (\text{B.4})$$

という性質と $\Gamma(1+z)\Gamma(z) = z\Gamma(z)$ を用いることで

$$\frac{\Gamma(1-\Delta)\Gamma(\Delta)}{\Gamma(1/2+\Delta)\Gamma(3/2-\Delta)} = \frac{1}{(1/2-\Delta)\tan(\pi\Delta)} \quad (\text{B.5})$$

となる. 以上より, 係数 b は

$$J^2 b^q \pi = \left(\frac{1}{2} - \Delta \right) \tan(\pi\Delta) \quad (\text{B.6})$$

という式により決定できる。

参考文献

- [1] J. Maldacena and D. Stanford, "Comments on the Sachdev-Ye-Kitaev model," [arXiv:1604.07818](#) [hep-th]
- [2] V. Rosenhaus, "An introduction to the SYK model," [arXiv:1807.03334v1](#) [hep-th]
- [3] J. Polchinski and V. Rosenhaus, "The Spectrum in the Sachdev-Ye-Kitaev Model," [arXiv:1601.06768](#) [hep-th]
- [4] David J. Gross and Vladimir Rosenhaus, "A Generalization of Sachdev-Ye-Kitaev," [arXiv:1610.01569](#) [hep-th]
- [5] J. Maldacena, S. H. Shenker and D. Stanford, "A bound on chaos," [arXiv:1503.01409](#) [hep-th]
- [6] Howard E. Haber, "[Notes on antisymmetric matrices and the pfaffian](#)"
- [7] Grigory Tarnopolsky, "On large q expansion in the Sachdev-Ye-Kitaev model," [arXiv:1801.06871](#) [hep-th]