数字电路复习第三章

2019年5月15日　　17:25

- 逻辑代数运算法则

1. 基本逻辑运算

   与运算：n个开关串联，缺一不可

   或运算：n个开关并联，相互可替代

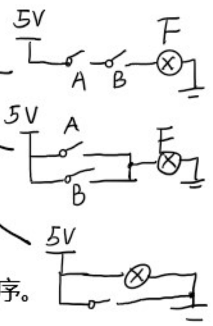
   非运算：将结果的0，1互换

与数学运算区别开

$F = A \cdot B$

$F = A + B$

$F = \overline{A}$



2. 逻辑代数基本定理

   交换律：两个逻辑代数的加减乘除可以改变位置。

   结合律：三个逻辑代数的乘法或者加法可以改变先后的顺序。

   分配率：可以打开括号或者合并括号。

   0-1率：0乘上任何数都是0，1加上任何数都是1.

   互补率：一个数和他的非和为1，乘积为0.

   重叠率：一个逻辑代数与它本身的和与乘积均为它本身。

   还原率：非两次就还原了。

   （1）交换律：$A \cdot B = B \cdot A$，$A + B = B + A$。
   （2）结合律：$A(BC) = (AB)C$，$A + (B + C) = (A + B) + C$。
   （3）分配律：$A(B + C) = AB + AC$，$A + BC = (A + B)(A + C)$。
   （4）0-1 律：$1 \cdot A = A$，$1 + A = 1$，$0 \cdot A = 0$，$0 + A = A$。
   （5）互补律：$A \cdot \overline{A} = 0$，$A + \overline{A} = 1$。
   （6）重叠律：$A \cdot A = A$，$A + A = A$。
   （7）还原律：$\overline{\overline{A}} = A$。

3. 逻辑代数基本规则

   代入规则：任何一个逻辑等式，用两边出现的某一个变量全部用同一个变量代替等式不变。

   例如：$1 + A = 1$，用"BC"代替A 得 $1 + BC = 1$

   反演规则：

   设 F 为逻辑函数，如果将该函数表达式中所有的"与"（·）换成"或"（+），"或"（+）换成"与"（·）；"0"换成"1"，"1"换成"0"；原变量换成反变量，反变量换成原变量，则所得到的逻辑函数即 F 的反函数，表达式为 $\overline{F}$。

   若函数 F 成立，其反函数 $\overline{F}$ 也成立，同时有 $\overline{\overline{F}} = F$。

   注：优先顺序不变（按优先顺序来改）不是单一变量的反号不变

   两个不同的地方

   对偶规则：

   若 F 为逻辑函数，如果将该函数表达式中所有"与"（·）换成"或"（+），"或"（+）换成"与"（·）；"0"换成"1"，"1"换成"0"，则所得到的逻辑函数即 F 的对偶式，表达式为 F'。若 F 成立，则 F' 也成立，同时有 $(F')' = F$。

   利用对偶规则可以使要证明的公式数减少一半。

4. 代数公式

   吸收律：一个变量或上他与其他变量的与，可以简化为这个变量本身。　$A + AB = A$

   合并律：就是一个变量加上它的反为1.　$AB + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = A$

   冗余定理：产生的原因是变量加上它的反为1，且结合吸收律，多个变量组成的新变量吸收律吸收掉多余的。　$AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$

   $BC(A + \overline{A})$

   ABC　$\overline{A}BC$

   异或公式：$A \oplus B = \overline{A \odot B}$

   如果 $A \oplus B \oplus C = D$

   则 $\begin{cases} A \oplus B \oplus D = C; \\ A \oplus C \oplus D = B; \\ B \oplus C \oplus D = A; \end{cases}$

   多变量异或
   变量1的个数为奇数
   结果为1，偶数为0

$\bar{A}BC \leftarrow ABC \rightarrow \bar{A}BC$

- 如果 $A \oplus B \oplus C = D$

则 $\begin{cases} A \oplus B \oplus D = C; \\ A \oplus C \oplus D = B; \\ B \oplus C \oplus D = A; \end{cases}$

多变量异或
变量1的个数为奇数
结果为1，偶数为0

因果关系 **Causality**

- 逻辑代数基本形式

逻辑函数有两种标准形式，一种是最小项之和称为标准与或式；另一种是最大项之积称为标准或与式。

1. 最小项：n个变量组成的逻辑函数的最小项是包含所有变量的与项，每个变量都只会以原变量或者反变量的形式出现一遍。通常用m_i表示。

变量取值 \ 最小项编号			m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
A	B	C	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$AB\bar{C}$	ABC
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

m_i 的下标 i
由 A B C
组成的
二进制数决定
例如 A为1，$\bar{A}$为0
则 $ABC \leftrightarrow 111$
$\bar{A}BC \leftrightarrow 011$

2. 标准与或式：将与项用+或运算连接起来的与或式中所有的与项均为最小项，构成最小项之和的形式。利用互补律任何逻辑代数都能够表达成唯一的标准与或式。

都为 2^n 个

3. 最大项：n个变量组成的逻辑函数中最大项是n个变量组成的或项，每个变量都以原变量或者反变量的形式出现一次。用M_i表示。

变量取值 \ 最大项编号			M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
A	B	C	$A+B+C$	$A+B+\bar{C}$	$A+\bar{B}+C$	$A+\bar{B}+\bar{C}$	$\bar{A}+B+C$	$\bar{A}+B+\bar{C}$	$\bar{A}+\bar{B}+C$	$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

M_i 下标 i 与 m_i
相反 原变量A为0
反变量$\bar{A}$为1

只有一组变量使其
取值为0

4. 标准或与式：逻辑函数表达式是一组最大项的积的形式，称为标准或与式。说明变量在何时逻辑函数等于0。
5. 最小项与最大项：最小项与最大项互补；不出现在最小项的编号一定出现在最大项之中。 $m_i = \overline{M_i}$ $\Sigma m(1,3) = \Pi M(2,4)$

变量数为几时 共2^n个小方格
相邻小格只有一个变量不同，逻辑相邻
上下，左右，包括对称位置都是相邻的

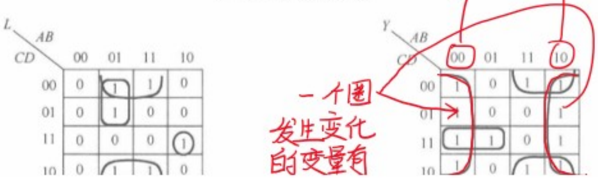
- 逻辑代数的化简

1. 卡诺图：用来表示逻辑函数，将逻辑函数的每一个最小项按照一定规律填入一个特定的方格之中，每一个变量都有01两种取值，每个小格代表一个最小项（0代表最大项）。
2. 卡诺图化简函数：相邻小格之中只有一个变量不同，可以通过合并方格为1的相邻格，保留相同的变量，消去不同的变量。（或与式找0）

【例 3.16】用卡诺图法化简函数 $Y = \bar{A}\bar{B} + A\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}D + AC\bar{D} + \bar{A}BCD$。

解：填卡诺图（见图3.7），圈 1，得到最简与或表达式

$$Y = \bar{B} + A\bar{D} + \bar{A}CD$$



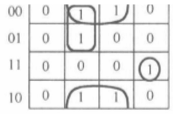


图 3.6 例 3.15 图

一个圈

发生变化的变量有 A, C, D 所以只与 B 有关 且 B 均为 0 故 $\bar{B}$

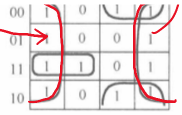


图 3.7 例 3.16 图

【例 3.17】用卡诺图将下列函数化简为最简或与式

$$X(A,B,C)=\sum m(2,3,4,6,7)$$

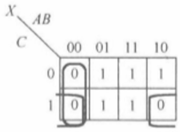


图 3.8 例 3.17 图

解：将函数 X 填入卡诺图（见图3.8），圈 0，得到最简或与表达式

$$X=(A+B)(B+\bar{C})$$

将例 3.17 与例 3.14 相比较，得到结论：同一函数圈 1 和圈 0 得到的结果是相同的。最简与或式和最简或与式是从不同角度描述了同一个逻辑函数。联上面说 $m_i = \overline{M_i}$ 理解

3. 具有随意项的逻辑函数：某些取值组合与事实违背，故视作0或者1对实际没有影响，也称为无关项

【例 3.20】一大一小两台电机 M_L 和 M_S 向水箱泵水。当水箱内水位降到 C 点（见图3.11）时，由小电机 M_S 单独泵水；降到 B 点时，由大电机 M_L 单独泵水；降到 A 点时两台电机同时泵水。试写出两电机工作的最简逻辑函数。

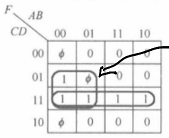


图 3.10 例 3.19 图

ϕ 可取 1 可取 0 看化简的需要

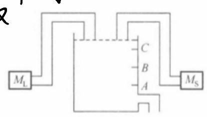


图 3.11 例 3.20 图

解：设水位 A、B、C 为逻辑变量，各变量值在低于相应水位时为 1，不低于相应水位时为 0；电机 M_L 和 M_S 为逻辑函数，工作为 1，不工作为 0。由此得到真值表（见表 3.6）。在真值表中，010、100、101、110 这 4 组取值无意义，对应不可能存在的情况，在真值表中用 ϕ 表示，即其值为 1 或 0 对函数 M_L 和 M_S 无影响。

将 M_L、M_S 分别填入卡诺图中（见图3.12），化简得

$$M_L = B$$

$$M_S = A + \bar{B}C$$

4. 引入变量卡诺图：将一个n变量函数分离出来一个变量到卡诺图之中，卡诺图的面积减小一半。

【例 3.21】用 VEM 化简函数

$$F(A,B,C,D)=ABCD+\bar{A}\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}B\bar{C}\bar{D}+AB\bar{C}\bar{D}+\bar{A}BC\bar{D}+A\bar{B}CD+\bar{A}B\bar{C}D$$

解：将 D 作为引入变量，填入三变量 ABC 卡诺图中（见图3.14），化简得

$$F=\bar{A}\bar{C}D+B\bar{C}\bar{D}+ACD+\bar{A}BC$$

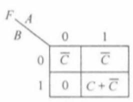


图 3.13 F 的引入变量卡诺图

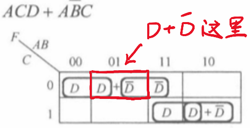


图 3.14 例 3.21 图

$D+\bar{D}$ 这里 D 要被圈一次 $\bar{D}$ 也得被圈一次