Riassunto di Calcolo Numerico

Indice

1 Introduzione

Questo è un breve riassunto che ho scritto dopo aver fallito per innumerevoli volte la prova scritta di calcolo numerico. Per ogni domanda non riporterò la dimostrazione esatta che bisogna scrivere all'esame, ma concetti che aiutano a capire il senso (e quindi a memorizzare gli argomenti).
Prima di leggere questo documento consiglio di rivedere la teoria di analisi, in particolare gli argomenti che vengono trattati anche nel corso di calcolo.
Consiglio di leggere quanto scritto nelle prossime pagine con occhio critico: sicuramente saranno presenti molti errori, spero però che questi appunti siano utili per comprendere come studiare le varie dimostrazioni.

2 Domande del Syllabus

2.1 Precisione di macchina

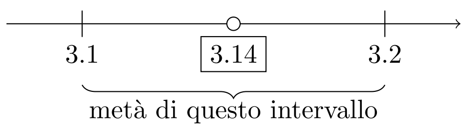
Si parte da un numero reale, scritto in notazione floating point:

$$x = sign(x)(0, d_1 d_2....dt...) \cdot b^p$$

È importante tenere a mente che la 1° cifra dopo la virgola (d_1) è diversa da zero.
Quindi si scrive il numero arrotondato a t cifre di mantissa, e si scrive la definizione formale di arrotondamento.
Poi diciamo che la precisione di macchina è l'errore relativo di arrotondamento, e scriviamo l'errore di arrotondamento:

$$\frac{|x - fl^t(x)|}{|x|}, |x| \neq 0$$

Quindi stimiamo questo rapporto in due parti: prima il numeratore.
Le cifre dei due numeri sono uguali fino alla $t-1$, cambia dalla t in poi (per l'arrotondamento), e con un esempio di può vedere che questa quantità è $\leq \frac{b^{-t}}{2}$
ESEMPIO: se $x = 3.14$ e voglio arrotondare ai decimi, l'errore che compio è $\leq$ mezzo decimo (in questo caso di 0.04):



Ora stimiamo il denominatore. Sappiamo che è una quantità positiva (c'è il valore assoluto), è $\neq 0$, e la prima cifra decimale (d_1) deve essere diversa da zero. Questo serve ad evitare che ci siano più rappresentazioni dello stesso numero.
Quindi $|x|$ è almeno ($\geq$) $0.1 \cdot b^p$ (non ci serve uno specifico p), ovvero $b^{-1} \cdot b^p => b^{p-1}$.
Siccome nella definizione di errore relativo $|x|$ "sta sotto", dobbiamo scrivere il reciproco:

$$\frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{b^{p-1}}$$

Da notare il fatto che è cambiato il verso della disequazione.
Quindi uniamo i due pezzi, e otteniamo che:

$$\frac{|x - fl^t(x)|}{|x|} \leq \frac{\frac{b^{-t}}{2}}{b^{p-1}} = \frac{b^{p-t+1-p}}{2} = \frac{b^{1-t}}{2}$$

Che è la nostra precisione di macchina.

2.2 Analisi di stabilità delle operazioni

Questa è la più lunga di tutte le dimostrazioni, ma:

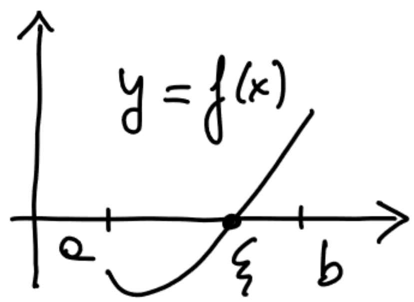
- all'esame il prof ne chiede sempre metà (solitamente moltiplicazione e divisione oppure somma algebrica)
- Non serve impararsi tutto a memoria: gran parte del testo sono operazioni algebriche. Si utilizza la diseguaglianza triangolare e si moltiplica/divide per una certa quantità (questo nel caso della somma algebrica, nella moltiplicazione si somma/sottrae).
- Si inizia dalla definizione, ovvero l'errore relativo che ho su un'operazione con numeri approssimati:

  $$\varepsilon_{x\star y} = \frac{|x \star y - \widetilde{x} \star \widetilde{y}|}{|x \star y|}$$

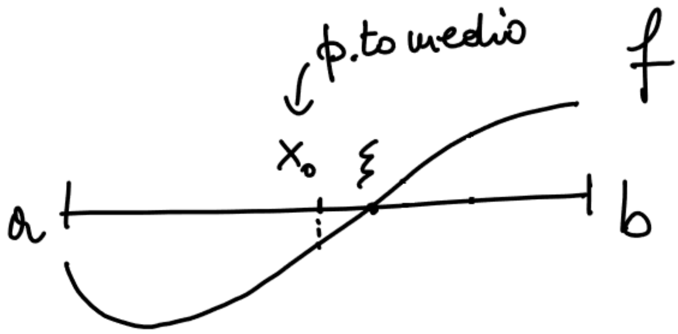
  Dove al posto di $\star$ si mette una delle operazioni, e $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ (con la tilde) sono i numeri approssimati.
- La sottrazione (ovvero la somma algebrica nel caso in cui il segno dei due numeri è diverso) è l'unica operazione instabile (quando x e y sono vicini in termini relativi)

2.3 Convergenza del metodo di bisezione

Questa è la prima domanda in cui il prof inizia a utilizzare la lettera ξ (csi), che semplicemente indica la soluzione che stiamo cercando. Invece con x (oppure x_n) indica la "soluzione" che abbiamo trovato a una certa iterazione. In generale, più iterazioni abbiamo e più la nostra x si avvicina a ξ.
Con convergenza di un metodo (in questo caso la bisezione) si intende il fatto che, facendo iterazioni, ci avviciniamo sempre di più alla soluzione ξ, lo "zero" della funzione.
Il metodo di bisezione funziona applicando iterativamente il teorema degli zeri (o teorema di Bolzano).



Se ho una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ (ovvero hanno segno opposto), allora esiste un punto ξ, con $f(\xi) = 0$, che appartiene all'intervallo (a, b).
Il metodo consiste nell'individuare il punto medio, e continuare il procedimento sulla metà dell'intervallo in cui vale la condizione che i due estremi hanno segno opposto.
Esempio:



In questa funzione abbiamo come estremi a, b. Individuiamo il punto medio x_0, e la successiva iterazione la facciamo sul semintervallo $[a, x]$, perché $f(a)f(x_0) \leq 0$.
Il punto medio è $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$.
Poi si individuano tre successioni: a_n, b_n, x_n, tali che:

- $|\xi - a_n| \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
- $|\xi - b_n| \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
- $|\xi - x_n| \leq \frac{b_n-a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$

$\frac{b-a}{2^n}$ è la lunghezza dell'intervallo $b_n - a_n$, mentre $\frac{b-a}{2^{n+1}}$ è la distanza tra il punto medio e ξ, e non può superare metà dell'intervallo $b_n - a_n$.
Quindi si dimostra che le tre successioni convergono ad uno zero, utilizzando il teorema dei carabinieri:

$$0 \leq |\xi - a_n|, |\xi - b_n| < \frac{b-a}{2^n} \to 0, n \to \infty \overset{teor.carabinieri}{\Longrightarrow} |\xi - a_n|, |\xi - b_n| \to 0, n \to \infty$$

Qui semplicemente diciamo che $|\xi - a_n|, |\xi - b_n|$ sono due quantità positive (per via dei valori assoluti), e da quello che abbiamo detto prima sono $\leq$ di $\frac{b-a}{2^n}$.

Calcolando il $\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}$ otteniamo che è zero. Quindi possiamo utilizzare il teorema dei carabinieri per dire che le due successioni tendono a zero.
Lo stesso ragionamento lo utilizziamo per la terza successione:

$$0 \le |\xi - x_n| < \frac{b-a}{2^{n+1}} \implies |\xi - x_n| \to 0, n \to \infty$$

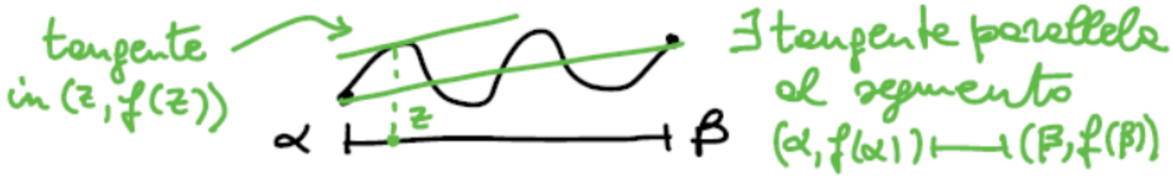
2.4 Stima dell'errore con residuo pesato (bisezione)

Prima di tutto è bene tenere a mente perché il residuo non pesato (detto anche stima a priori) non è una buona stima dell'errore.
Poi, partiamo dalle ipotesi: sono le stesse del metodo di bisezione, con l'aggiunta che la funzione, oltre a essere continua in $[a, b]$, deve anche essere derivabile, e questa derivata deve essere $\neq 0$ in tutto l'intervallo.
Quindi abbiamo che l'errore

$$e_n = \frac{f(x_n)}{f'(z_n)}$$

Dove z_n è un punto che appartiene all'intervallo (x_n, ξ), ma non sappiamo esattamente quanto vale.
Si dimostra utilizzando il teorema del valor medio (detto anche teorema di Lagrange), che dice che se f è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b), allora esiste un punto z in (a, b) : la retta che passa per $f(a)$ e $f(b)$ è parallela alla tangente in z:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(z)$$



Siccome z_n è nell'intervallo (x_n, ξ), e x_n tende a ξ, allora la derivata di z_n ha un valore molto vicino a quello della derivata di ξ.
Con la notazione $int(x_n, \xi)$ indichiamo un intervallo che ha come estremi x_n e ξ, ma non sappiamo quale dei due è più grande.
La dimostrazione si fa con un'applicazione del teorema del valor medio. Supponiamo di essere nel caso in cui $\xi < xn$ (l'altro caso è analogo), e quindi $a = \xi$, $b = x_n$, e "sostituiamo" questi valori nella formula del valor medio:

$$f(x_n) - f(\xi) = f'(z_n)(x_n - \xi) \to \text{il denominatore lo portiamo sopra}$$

Che si può riscrivere come

$$|x_n - \xi| = \frac{f(x_n)}{f'(z_n)} = e_n$$

2.5 Convergenza globale del metodo di Newton

Il metodo di Newton è un altro metodo iterativo per trovare gli zeri di una funzione. Rispetto alla bisezione converge molto più rapidamente, ma ha bisogno di ipotesi più forti[1].
Questo è il metodo di Newton:

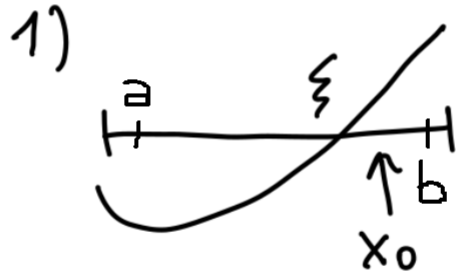
$$\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \end{cases} \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

[1] vedi lezione 9 - confronto tra bisezione e metodo di Newton

Queste sono le ipotesi:

$$\begin{cases} f \in C^2[a,b] & \text{la funzione ha derivata seconda e } f''(x) \text{ è continua} \\ f(a)f(b) < 0 & f(a) \text{ e } f(b) \text{ hanno segno opposto} \\ f''(x) > 0 \forall x \in [a,b] & \text{dimostriamo solo il caso di concavità stretta} \\ x_0 : f(x_0)f''(x_0) > 0 & \text{punto iniziale "scelto bene"} \end{cases}$$

Riguardo la scelta del punto iniziale, è una condizione importante, altrimenti il metodo non converge alla soluzione.
Nella dimostrazione vengono illustrati graficamente quattro casi differenti, in base al segno di $f''(x)$ e se $f(a) > f(b)$ (oppure viceversa). Basta farne solo uno (gli altri sono uguali), per comodità scegliamo il primo, che è quello che tratta anche il prof. a lezione:
CASO 1:



- $f(a) < 0, f(b) > 0$
- $f''(x) > 0 \forall x \in [a,b]$
- $x_0 \in (\xi, b]$

Dobbiamo dimostrare due cose: innanzitutto, per induzione, se l'n-esimo termine appartiene all'intervallo $(\xi, b]$, allora lo stesso vale per il termine $n+1$-esimo. La dim. si fa a parole.
Poi bisogna dimostrare che x_n è decrescente. Qui si riprende la definizione di metodo di Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Guardando il grafico del caso 1 si capisce che, nell'intervallo $(\xi, b]$, $f(x)$ è sempre > 0.
Stessa cosa per $f'(x_n)$, che potrebbe essere negativo solo se $f''(x)$ cambiasse segno in $(\xi, b]$, cosa che escludiamo (vedi le ipotesi iniziali).
Quindi x_{n+1} è dato da x_n a cui viene sottratta una quantità positiva. Questo è sufficiente per dire che la successione x_n è decrescente.
Infine diciamo che, visto che la successione è decrescente, per il teorema della monotonia diciamo che il limite (per $n \to \infty$) della successione è il suo estremo inferiore, che il prof indica con la lettera η.
Quindi passiamo al limite della formula, e diciamo che:

$$\eta = \lim x_{n+1} = \lim \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right)$$

Dopo un po' di proprietà di limiti e continuità otteniamo

$$\eta = x_n - \frac{f(\eta))}{f'(\eta)}$$

Infine diciamo che

$$\frac{f(\eta)}{f'(\eta)} = 0 \Rightarrow f(\eta) = 0 \Rightarrow \eta = \xi$$

2.6 Ordine di convergenza del metodo di Newton

Le ipotesi di partenza sono le stesse della domanda precedente, con l'aggiunta che la derivata prima deve essere $\neq 0$ per ogni x contenuto in un sottointervallo di $[a, b]$. Questo ci servirà più avanti, per evitare la divisione per zero.

2.7 Ordine di convergenza delle iterazioni di punto fisso

2.8 Esistenza e unicità dell'interpolazione polinomiale

2.9 Convergenza uniforme dell'interpolazione lineare a tratti

2.10 Stime di condizionamento: perturbazione termine noto

http://dm.unife.it/~tinti/Didattica/Labcn/lucidi9.pdf