前沿数学方法及其在航天工程中的应用

第三讲 张量在飞行力学中的应用

余文斌

沙河校区主楼D座923

邮箱：yuwenbin@buaa.edu.cn

一、张量（见《张量分析》）

- **什么是张量（pp. 23）**

1、定义：由若干有序数组成的集合，并且当坐标系改变时满足相应的坐标转换关系

2、一阶张量X：可表示成向量的形式 $[\mathbf{X}]^{B}=[\mathbf{T}]^{BA}[\mathbf{X}]^{A}$

3、二阶张量I：可表示成矩阵的形式 $[\mathbf{I}]^{B}=[\mathbf{T}]^{BA}[\mathbf{I}]^{A}[\bar{\mathbf{T}}]^{BA}$

符号“[]”代表张量的矩阵形式

上标“—”代表矩阵的转置

一、张量（见《张量分析》）

• 什么是张量（pp. 23）

1、定义：由若干有序数组成的集合，并且当坐标系改变时满足相应的坐标转换关系

2、一阶张量X：可表示成向量的形式 $[\mathbf{X}]^B=[\mathbf{T}]^{BA}[\mathbf{X}]^A$

3、二阶张量I：可表示成矩阵的形式 $[\mathbf{I}]^B=[\mathbf{T}]^{BA}[\mathbf{I}]^A[\bar{\mathbf{T}}]^{BA}$

4、斜角直线坐标系下的坐标变换矩阵

$$\mathbf{v}=v^{1'}\mathbf{g}_{1'}+v^{2'}\mathbf{g}_{2'}+v^{3'}\mathbf{g}_{3'}=v^{1}\mathbf{g}_{1}+v^{2}\mathbf{g}_{2}+v^{3}\mathbf{g}_{3}$$

$$\left\{v^1,v^2,v^3\right\}\Rightarrow\left\{v^{1'},v^{2'},v^{3'}\right\}$$

$$\mathbf{g}_1=\beta_1^{1'}\mathbf{g}_{1'}+\beta_1^{2'}\mathbf{g}_{2'}+\beta_1^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$

$$\mathbf{g}_2=\beta_2^{1'}\mathbf{g}_{1'}+\beta_2^{2'}\mathbf{g}_{2'}+\beta_2^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$

$$\mathbf{g}_3=\beta_3^{1'}\mathbf{g}_{1'}+\beta_3^{2'}\mathbf{g}_{2'}+\beta_3^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$

代入

$$\begin{bmatrix}v^{1'}\\v^{2'}\\v^{3'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}\beta_1^{1'}\\\beta_1^{2'}\\\beta_1^{3'}\end{matrix}} & \begin{matrix}\beta_2^{1'}\\\beta_2^{2'}\\\beta_2^{3'}\end{matrix} & \begin{matrix}\beta_3^{1'}\\\beta_3^{2'}\\\beta_3^{3'}\end{matrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v^{1}\\v^{2}\\v^{3}\end{bmatrix}$$

一、张量（见《张量分析》）

• 什么是张量（pp. 23）

5、并矢运算：构造三阶或更高阶张量

➢ 定义：a和b是两个一阶张量，a并b满足如下运算

这个并不是矢量的点乘，而是基矢量的并矢，代表每一个系数的顺序

按照“序”将每个系数排列起来

$$
\begin{aligned}
\mathbf{ab} &= \left(a^1\mathbf{g}_1 + a^2\mathbf{g}_2 + a^3\mathbf{g}_3\right)\left(b^1\mathbf{g}_1 + b^2\mathbf{g}_2 + b^3\mathbf{g}_3\right) \\
&= \boxed{a^1b^1}\boxed{\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1} + a^1b^2\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2 + a^1b^3\mathbf{g}_1\mathbf{g}_3 \\
&\quad + a^2b^1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_1 + a^2b^2\mathbf{g}_2\mathbf{g}_2 + a^2b^3\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3 \\
&\quad + a^3b^1\mathbf{g}_3\mathbf{g}_1 + a^3b^2\mathbf{g}_3\mathbf{g}_2 + a^3b^3\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3
\end{aligned}
$$

$$
[\mathbf{ab}] = \begin{bmatrix} a^1b^1 & a^1b^2 & a^1b^3 \\ a^2b^1 & a^2b^2 & a^2b^3 \\ a^3b^1 & a^3b^2 & a^3b^3 \end{bmatrix}
$$

a并b的矩阵形式

一、张量（见《张量分析》）

- **什么是张量（pp. 23）**

5、并矢运算：构造三阶或更高阶张量

➢ 定义：a和b是两个一阶张量，a并b满足如下运算

这个并不是矢量的点乘，而是基矢量的并矢，代表每一个系数的顺序

按照“序”将每个系数排列起来

$$\mathbf{ab}=\left(a^1\mathbf{g}_1+a^2\mathbf{g}_2+a^3\mathbf{g}_3\right)\left(b^1\mathbf{g}_1+b^2\mathbf{g}_2+b^3\mathbf{g}_3\right)$$

$$=\boxed{a^1b^1}\boxed{\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1}+a^1b^2\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2+a^1b^3\mathbf{g}_1\mathbf{g}_3$$

$$+a^2b^1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_1+a^2b^2\mathbf{g}_2\mathbf{g}_2+a^2b^3\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3$$

$$+a^3b^1\mathbf{g}_3\mathbf{g}_1+a^3b^2\mathbf{g}_3\mathbf{g}_2+a^3b^3\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3$$

$$[\mathbf{ab}]=\begin{bmatrix} a^1b^1 & a^1b^2 & a^1b^3 \\ a^2b^1 & a^2b^2 & a^2b^3 \\ a^3b^1 & a^3b^2 & a^3b^3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b^1 & b^2 & b^3 \end{bmatrix}=[\mathbf{a}][\bar{\mathbf{b}}]$$

a并b的矩阵运算形式

一、张量（见《张量分析》）

- **什么是张量（pp. 23）**

  - a并b得到一个二阶张量

定义：由若干有序数组成的集合，并且当坐标系改变时满足相应的坐标转换关系

转置

$$[\mathbf{ab}]^{D}=[\mathbf{T}]^{DC}[\mathbf{ab}]^{C}[\bar{\mathbf{T}}]^{DC}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1&=\beta_1^{1'}\mathbf{g}_{1'}+\beta_1^{2'}\mathbf{g}_{2'}+\beta_1^{3'}\mathbf{g}_{3'}\\\mathbf{g}_2&=\beta_2^{1'}\mathbf{g}_{1'}+\beta_2^{2'}\mathbf{g}_{2'}+\beta_2^{3'}\mathbf{g}_{3'}\\\mathbf{g}_3&=\beta_3^{1'}\mathbf{g}_{1'}+\beta_3^{2'}\mathbf{g}_{2'}+\beta_3^{3'}\mathbf{g}_{3'}\end{aligned}$$

证明思路：

代入

$$\begin{aligned}\mathbf{ab}&=\left(a^1\mathbf{g}_1+a^2\mathbf{g}_2+a^3\mathbf{g}_3\right)\left(b^1\mathbf{g}_1+b^2\mathbf{g}_2+b^3\mathbf{g}_3\right)\\&=a^1b^1\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1+a^1b^2\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2+a^1b^3\mathbf{g}_1\mathbf{g}_3\\&\quad+a^2b^1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_1+a^2b^2\mathbf{g}_2\mathbf{g}_2+a^2b^3\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3\\&\quad+a^3b^1\mathbf{g}_3\mathbf{g}_1+a^3b^2\mathbf{g}_3\mathbf{g}_2+a^3b^3\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3\end{aligned}$$

一、张量（见《张量分析》）

• 什么是张量（pp. 23）

6、利用并矢构造三阶张量

$$\mathbf{abc} = \left(a^1\mathbf{g}_1 + a^2\mathbf{g}_2 + a^3\mathbf{g}_3\right)\left(b^1\mathbf{g}_1 + b^2\mathbf{g}_2 + b^3\mathbf{g}_3\right)\left(c^1\mathbf{g}_1 + c^2\mathbf{g}_2 + c^3\mathbf{g}_3\right)$$

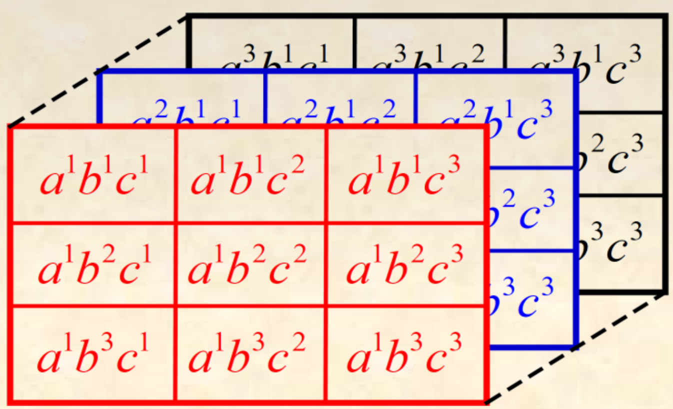
$$= a^1b^1c^1\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1 + a^1b^1c^2\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2 + a^1b^1c^3\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1\mathbf{g}_3 +$$

$$+a^1b^2c^1\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_1 + a^1b^2c^2\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_2 + a^1b^2c^3\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3$$

$$\cdots$$

$$+a^3b^3c^1\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3\mathbf{g}_1 + a^3b^3c^2\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3\mathbf{g}_2 + a^3b^3c^3\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3$$

$[\mathbf{abc}] =$



一、张量（见《张量分析》）

- **什么是张量（pp. 23）**

6、三阶张量的坐标变换

将

$$\mathbf{g}_1 = \beta_1^{1'}\mathbf{g}_{1'} + \beta_1^{2'}\mathbf{g}_{2'} + \beta_1^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$

$$\mathbf{g}_2 = \beta_2^{1'}\mathbf{g}_{1'} + \beta_2^{2'}\mathbf{g}_{2'} + \beta_2^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$

$$\mathbf{g}_3 = \beta_3^{1'}\mathbf{g}_{1'} + \beta_3^{2'}\mathbf{g}_{2'} + \beta_3^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$

代入下式

$$\mathbf{abc} = \left(a^1\mathbf{g}_1 + a^2\mathbf{g}_2 + a^3\mathbf{g}_3\right)\left(b^1\mathbf{g}_1 + b^2\mathbf{g}_2 + b^3\mathbf{g}_3\right)\left(c^1\mathbf{g}_1 + c^2\mathbf{g}_2 + c^3\mathbf{g}_3\right)$$

举例：某个新坐标分量的转换公式如下

$$a^{1'}b^{2'}c^{3'} = \left(a^1\beta_1^{1'} + a^2\beta_2^{1'} + a^3\beta_3^{1'}\right)\left(b^1\beta_1^{2'} + b^2\beta_2^{2'} + b^3\beta_3^{2'}\right)$$

对应的序？ $\Updownarrow$

$\mathbf{g}_{1'}\mathbf{g}_{2'}\mathbf{g}_{3'}$

$$\times\left(c^1\beta_1^{3'} + c^2\beta_2^{3'} + c^3\beta_3^{3'}\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\beta_i^{1'}\beta_j^{2'}\beta_k^{3'}a^i b^j c^k$$

一、张量（见《张量分析》）

- **思考题**

证明：某物体在一组正交基矢量$\{e_x, e_y, e_z\}$下的惯量张量I如下。

那么是否存在一组新的正交基矢量$\{\mathbf{e}_{x'},\mathbf{e}_{y'},\mathbf{e}_{z'}\}$，使得惯量张量为对角阵（即所有惯性积为零）？求解出新的正交基矢量和惯量张量（提示：借助矩阵的相似变换知识）

$$\mathbf{e}_x=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\mathbf{e}_y=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{e}_z=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{I}=\begin{bmatrix}358.451 & 135.887 & -69.25318\\135.887 & 369.5487 & 66.48306\\-69.25318 & 66.48306 & 172\end{bmatrix}$$

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢**

9、并矢的运算律（pp. 18-19）

结合律	$m(\mathbf{ab})=(m\mathbf{a})\mathbf{b}=\mathbf{a}(m\mathbf{b})=m\mathbf{ab}$	
	$(\mathbf{ab})\mathbf{c}=\mathbf{a}(\mathbf{bc})=\mathbf{abc}$	(1.5.4)
	$(m\mathbf{a})(n\mathbf{b})=(mn)(\mathbf{ab})$	

分配律	$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{ab}+\mathbf{ac}$	
	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c}=\mathbf{ac}+\mathbf{bc}$	(1.5.5)
	$m(\mathbf{ab}+\mathbf{cd})=m\mathbf{ab}+m\mathbf{cd}$	
	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{c}+\mathbf{d})=\mathbf{ac}+\mathbf{ad}+\mathbf{bc}+\mathbf{bd}$	

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢**

9、并矢的运算规律（pp. 19）

交换律不再成立 $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$

$$[\mathbf{ab}]=[\mathbf{a}][\overline{\mathbf{b}}]=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{ba}]=[\mathbf{b}][\overline{\mathbf{a}}]=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \end{bmatrix}$$

1、加上中括号[]以表示矩阵运算

2、可见：分量大小依然相同，但是序已经发生了变化

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢**

10、并矢的点积运算（pp. 19）

定义:

矢量点乘并矢: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{ab}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}$

并矢点乘矢量: $\mathbf{ab}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})$

矢量点乘三阶并矢: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{abc}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})\mathbf{bc}$

三阶并矢点乘矢量: $\mathbf{abc}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{ab}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{u})$

并矢点乘并矢: $\mathbf{ab}\cdot\mathbf{cd}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d}=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{ad}$

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢运算的应用**

  - 投影张量

计算矢量t沿单位矢量u的投影分量

$$\mathbf{r}=(\mathbf{t}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} \qquad [\mathbf{r}]=\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

把它写成矩阵运算的形式 $\boxed{\text{在坐标系A下}}$

$$[\mathbf{r}]=([\bar{\mathbf{t}}][\mathbf{u}])[\mathbf{u}]=[\mathbf{u}]([\bar{\mathbf{t}}][\mathbf{u}])$$

$$=[\mathbf{u}]([\bar{\mathbf{u}}][\mathbf{t}])=([\mathbf{u}][\bar{\mathbf{u}}])[\mathbf{t}]$$

$$[\mathbf{u}]^A[\bar{\mathbf{u}}]^A=\begin{bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_3^A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^A & u_2^A & u_3^A \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (u_1^A)^2 & u_1^A u_2^A & u_1^A u_3^A \\ u_2^A u_1^A & (u_2^A)^2 & u_2^A u_3^A \\ u_3^A u_1^A & u_3^A u_2^A & (u_3^A)^2 \end{bmatrix}=[\mathbf{uu}]^A$$

$\boxed{\text{并矢运算的矩阵形式}}$

$$\mathbf{P}=\mathbf{uu}$$

$\boxed{\text{投影张量}}$ 张量证明?

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢运算的应用**

  - 投影张量

计算矢量t沿单位矢量u的投影分量

$$\mathbf{r}=(\mathbf{t}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} \qquad [\mathbf{r}]=\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

把它写成矩阵运算的形式

$$[\mathbf{r}]=([\bar{\mathbf{t}}][\mathbf{u}])[\mathbf{u}]=[\mathbf{u}]([\bar{\mathbf{t}}][\mathbf{u}])$$

$$=[\mathbf{u}]([\bar{\mathbf{u}}][\mathbf{t}])=([\mathbf{u}][\bar{\mathbf{u}}])[\mathbf{t}]$$

$\boxed{\text{并矢运算的矩阵形式}}$

$$\mathbf{P}=\mathbf{uu}$$

$\boxed{\text{投影张量}}$ 张量证明？ $[\mathbf{P}]^B=[\mathbf{T}]^{BA}[\mathbf{P}]^A[\bar{\mathbf{T}}]^{BA}$

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢运算的应用**

  - 投影张量

计算矢量t沿单位矢量u的投影分量

$$\mathbf{r}=(\mathbf{t}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} \qquad [\mathbf{r}]=\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

把它写成矩阵运算的形式

$$[\mathbf{r}]=([\bar{\mathbf{t}}][\mathbf{u}])[\mathbf{u}]=[\mathbf{u}]([\bar{\mathbf{t}}][\mathbf{u}])=[\mathbf{u}]([\bar{\mathbf{u}}][\mathbf{t}])=([\mathbf{u}][\bar{\mathbf{u}}])[\mathbf{t}]$$

$$[\mathbf{u}]^A[\bar{\mathbf{u}}]^A=\begin{bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_3^A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^A & u_2^A & u_3^A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (u_1^A)^2 & u_1^Au_2^A & u_1^Au_3^A \\ u_2^Au_1^A & (u_2^A)^2 & u_2^Au_3^A \\ u_3^Au_1^A & u_3^Au_2^A & (u_3^A)^2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{并矢的矩阵运算形式}}$

$$\mathbf{P}=\mathbf{uu}$$

$\boxed{\text{投影张量}}$

张量证明：

$$[\mathbf{P}]^B=[\mathbf{u}]^B[\bar{\mathbf{u}}]^B=\left([\mathbf{T}]^{BA}[\mathbf{u}]^A\right)\overline{\left([\mathbf{T}]^{BA}[\mathbf{u}]^A\right)}$$

$$=[\mathbf{T}]^{BA}[\mathbf{u}]^A[\bar{\mathbf{u}}]^A[\bar{\mathbf{T}}]^{BA}=[\mathbf{T}]^{BA}[\mathbf{P}]^A[\bar{\mathbf{T}}]^{BA}$$

一、张量（见《张量分析》）

• 并矢运算的应用

➢ 投影张量

实际上，投影张量P的推导过程也可以看作是逆向运用并矢的点积运算

矢量t沿单位矢量u的投影分量

$$\mathbf{r}=(\mathbf{t}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}$$

矩阵运算形式

$$[\mathbf{r}]=([\bar{\mathbf{t}}][\mathbf{u}])[\mathbf{u}]=[\mathbf{u}]([\bar{\mathbf{t}}][\mathbf{u}])=[\mathbf{u}]([\bar{\mathbf{u}}][\mathbf{t}])=([\mathbf{u}][\bar{\mathbf{u}}])[\mathbf{t}]$$

并矢点积运算

$$\mathbf{r}=(\mathbf{t}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{t}\cdot\mathbf{u})=\boxed{\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{t})=\mathbf{u}\mathbf{u}\cdot\mathbf{t}}$$

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢运算的应用**

➢ 平面投影张量

应用：电视成像导引头将立体物体投影到聚焦平面上

$$\mathbf{s}=\mathbf{t}-(\mathbf{t}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}$$

写成矩阵形式：

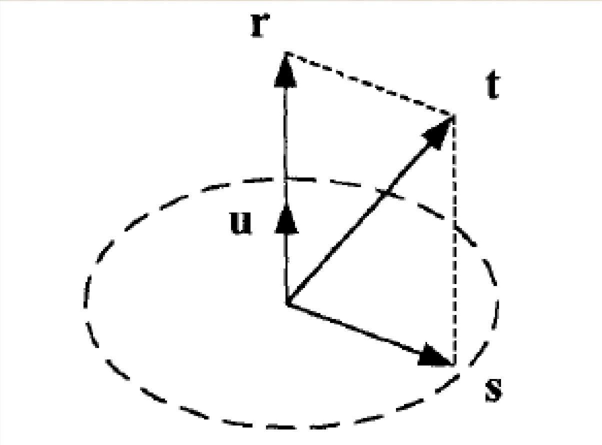
$$[\mathbf{s}]=[\mathbf{t}]-[\mathbf{u}][\bar{\mathbf{u}}][\mathbf{t}]$$

$$=\left([\mathbf{E}]-\underline{[\mathbf{u}][\bar{\mathbf{u}}]}\right)[\mathbf{t}]$$

投影张量P

单位矩阵

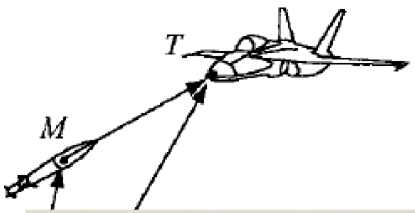
平面投影张量
N=E - uu



平面投影张量

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢运算的应用**
  - ➢ 平面投影张量



Example 2.8 Focal Plane Imaging

Problem. An aircraft is imaged on a focal plane array. To simulate that process, we need to develop the equations that project the aircraft's silhouette on the focal plane. We keep it simple by modeling the perspective of the aircraft with the displacement vectors of the tip, stern, right wing tip, and left wing tip wrt the geometrical center C, $\boldsymbol{t}_{B_1C}$, $\boldsymbol{t}_{B_2C}$, $\boldsymbol{t}_{B_3C}$, and $\boldsymbol{t}_{B_4C}$. The displacement of the aircraft center C wrt the focal plane center F is given by $\boldsymbol{t}_{CF}$ and the orientation of the planar array by the unit normal vector $\boldsymbol{u}$. Separation distance and optics reduce the scale of the projections on the focal plane by a factor f. Determine the aircraft attitude vectors $\boldsymbol{s}_{B_1C}$, $\boldsymbol{s}_{B_2C}$, $\boldsymbol{s}_{B_3C}$, and $\boldsymbol{s}_{B_4C}$ and the displacement vector $\boldsymbol{s}_{CF}$ in the focal plane. (To practice, make a sketch.)

Solution. Subjecting the displacement vectors to the plane projection tensor $N = E - u\bar{u}$ and reducing the magnitude by f produces the image

$$\boldsymbol{s}_{B_1C} = fN\boldsymbol{t}_{B_1C}, \quad \boldsymbol{s}_{B_2C} = fN\boldsymbol{t}_{B_2C}, \quad \boldsymbol{s}_{B_3C} = fN\boldsymbol{t}_{B_3C}, \quad \boldsymbol{s}_{B_4C} = fN\boldsymbol{t}_{B_4C}$$

优势：一个平面投影张量N就解决了不同矢量的投影问题

and the displacement of the aircraft from the focal plane center

$$\boldsymbol{s}_{CF} = fN\boldsymbol{t}_{CF}$$

For building the simulation, the vectors have to be converted to matrices. Most likely, the aircraft data are in geographic coordinates $]^G$, and the image should be portrayed in focal plane coordinates $]^F$. Therefore, a transformation between the two coordinate systems $[T]^{GF}$ will enter the formulation.

一、张量（见《张量分析》）

- **张量的代数运算: 基于并矢运算**

1、张量相等 $\mathbf{T}=\mathbf{S} \Leftrightarrow T^{ij\cdots}=S^{ij\cdots} \Leftrightarrow T_{ij\cdots}=S_{ij\cdots}$

2、张量相加 $\mathbf{T}+\mathbf{S}=\mathbf{U} \Leftrightarrow T^{ij\cdots}+S^{ij\cdots}=U^{ij\cdots} \Leftrightarrow T_{ij\cdots}+S_{ij\cdots}=U_{ij\cdots}$

3、标量与张量相乘 $k\mathbf{T}=\mathbf{U} \Leftrightarrow kT^{ij\cdots}=U^{ij\cdots} \Leftrightarrow kT_{ij\cdots}=U_{ij\cdots}$

4、张量与张量并乘（以二阶张量为例）

$$\mathbf{TS}=\begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S^{11} & S^{12} & S^{13} \\ S^{21} & S^{22} & S^{23} \\ S^{31} & S^{32} & S^{33} \end{bmatrix}$$

一、张量（见《张量分析》）

- **张量的代数运算: 基于并矢运算**

1、张量相等 $\mathbf{T}=\mathbf{S} \Leftrightarrow T^{ij\cdots}=S^{ij\cdots} \Leftrightarrow T_{ij\cdots}=S_{ij\cdots}$

2、张量相加 $\mathbf{T}+\mathbf{S}=\mathbf{U} \Leftrightarrow T^{ij\cdots}+S^{ij\cdots}=U^{ij\cdots} \Leftrightarrow T_{ij\cdots}+S_{ij\cdots}=U_{ij\cdots}$

3、标量与张量相乘 $k\mathbf{T}=\mathbf{U} \Leftrightarrow kT^{ij\cdots}=U^{ij\cdots} \Leftrightarrow kT_{ij\cdots}=U_{ij\cdots}$

4、张量与张量并乘（以二阶张量为例）

$$\mathbf{TS}=\xcancel{\begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S^{11} & S^{12} & S^{13} \\ S^{21} & S^{22} & S^{23} \\ S^{31} & S^{32} & S^{33} \end{bmatrix}}$$

一、张量（见《张量分析》）

- **张量的代数运算: 基于并矢运算**

1、张量相等 $\mathbf{T}=\mathbf{S} \Leftrightarrow T^{ij\cdots}=S^{ij\cdots} \Leftrightarrow T_{ij\cdots}=S_{ij\cdots}$

2、张量相加 $\mathbf{T}+\mathbf{S}=\mathbf{U} \Leftrightarrow T^{ij\cdots}+S^{ij\cdots}=U^{ij\cdots} \Leftrightarrow T_{ij\cdots}+S_{ij\cdots}=U_{ij\cdots}$

3、标量与张量相乘 $k\mathbf{T}=\mathbf{U} \Leftrightarrow kT^{ij\cdots}=U^{ij\cdots} \Leftrightarrow kT_{ij\cdots}=U_{ij\cdots}$

4、张量与张量并乘（以二阶张量为例）

$$\mathbf{TS}=\begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S^{11} & S^{12} & S^{13} \\ S^{21} & S^{22} & S^{23} \\ S^{31} & S^{32} & S^{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{TS}=\left(T^{11}\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1+T^{12}\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2+\cdots+T^{33}\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3\right)\left(S^{11}\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1+S^{12}\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2+\cdots+S^{33}\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}T^{ij}S^{km}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_m=T^{ij}S^{km}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_m \quad \boxed{\text{哑指标}}$$

一、张量（见《张量分析》）

- **张量的代数运算**

5、张量的缩并：人为指定两个基矢量进行点乘运算

（以四阶张量为例）

$$\mathbf{S}=\widehat{\mathbf{T}}=T^{ijkl}\underline{\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_l}=T^{ijkl}(\mathbf{g}_j\cdot\mathbf{g}_l)\mathbf{g}_i\mathbf{g}_k=\beta_{jl}T^{ijkl}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_k$$

这里人为指定将第2和第4个基矢量进行点积

（当然，也可以选择另外两个基矢量）

$$\mathbf{S}=\widehat{\mathbf{T}}=T^{ijkl}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_l=T^{ijkl}(\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_j)\mathbf{g}_k\mathbf{g}_l=\beta_{ij}T^{ijkl}\mathbf{g}_k\mathbf{g}_l$$

注意：上述张量缩并后变成了二阶张量，但是系数仍是四维的，这是否矛盾？

• 张量的代数运算

5、张量的缩并：人为指定两个基矢量进行点乘运算

注意：这个张量缩并后变成了二阶张量，但是系数仍是四维的，这是否矛盾？

以三阶张量的缩并为例进行说明：人为指定第2个和第3个基矢量点积运算

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}\overbrace{\mathbf{bc}} = {} & a^1b^1c^1\mathbf{g}_1\overbrace{\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1}^{\cdot} + a^1b^1c^2\mathbf{g}_1\overbrace{\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2}^{\cdot} + a^1b^1c^3\mathbf{g}_1\overbrace{\mathbf{g}_1\mathbf{g}_3}^{\cdot} + \\
& + a^1b^2c^1\mathbf{g}_1\overbrace{\mathbf{g}_2\mathbf{g}_1}^{\cdot} + a^1b^2c^2\mathbf{g}_1\overbrace{\mathbf{g}_2\mathbf{g}_2}^{\cdot} + a^1b^2c^3\mathbf{g}_1\overbrace{\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3}^{\cdot} \\
& \cdots \\
& + a^3b^3c^1\mathbf{g}_3\overbrace{\mathbf{g}_3\mathbf{g}_1}^{\cdot} + a^3b^3c^2\mathbf{g}_3\overbrace{\mathbf{g}_3\mathbf{g}_2}^{\cdot} + a^3b^3c^3\mathbf{g}_3\overbrace{\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3}^{\cdot}
\end{aligned}
$$

一、张量（见《张量分析》）

• 张量的代数运算

6、张量的点积：两个张量T和S先并乘后缩并的运算称为点积（或内积）

注意：和缩并一样，对于点积运算应说明张量T中的哪一个基矢量与张量S中的哪一个基矢量相点积

$$\mathbf{T}=T^{ijkl}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_l;\quad \mathbf{S}=S^{rst}\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\mathbf{g}_t$$

先并乘得到一个七阶张量

$$\mathbf{TS}=T^{ijkl}S^{rst}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_l\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\mathbf{g}_t$$

再指定两个基矢量进行缩并，得到一个五阶张量，比如

$$\mathbf{TS}=T^{ijkl}S^{rst}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_l\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\mathbf{g}_t=T^{ijkl}S^{rst}(\mathbf{g}_k\cdot\mathbf{g}_s)\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_l\mathbf{g}_r\mathbf{g}_t$$

如果将张量T的最后一个基矢量与张量S的第一个基矢量相点积，这时张量的点积可记为 $\mathbf{T}\cdot\mathbf{S}$

一、张量（见《张量分析》）

- **张量的代数运算**

7、张量的双点积：两个张量T和S先并乘后进行两次缩并的运算称为双点积

记

$$\mathbf{T}=T^{ijkl}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_l;\quad \mathbf{S}=S^{rst}\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\mathbf{g}_t$$

并联式

$$\mathbf{W}=\mathbf{T}:\mathbf{S}=T^{ijkl}S^{rst}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_l\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\mathbf{g}_t=T^{ijkl}S^{rst}(\mathbf{g}_k\cdot\mathbf{g}_r)(\mathbf{g}_l\cdot\mathbf{g}_s)\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_t$$

串联式

$$\mathbf{Z}=\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{S}=T^{ijkl}S^{rst}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_l\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\mathbf{g}_t=T^{ijkl}S^{rst}(\mathbf{g}_k\cdot\mathbf{g}_s)(\mathbf{g}_l\cdot\mathbf{g}_r)\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_t$$

一、张量（见《张量分析》）

- **张量的代数运算**

8、张量的矢积（类似于矢量的叉乘）（pp. 43）

令：$\mathbf{T}=T^{ijkl}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_l;\quad \mathbf{S}=S^{rst}\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\mathbf{g}_t$

矢积：$\mathbf{T}\times\mathbf{S}=T^{ijkl}S^{rst}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\left(\mathbf{g}_l\times\mathbf{g}_r\right)\mathbf{g}_s\mathbf{g}_t$

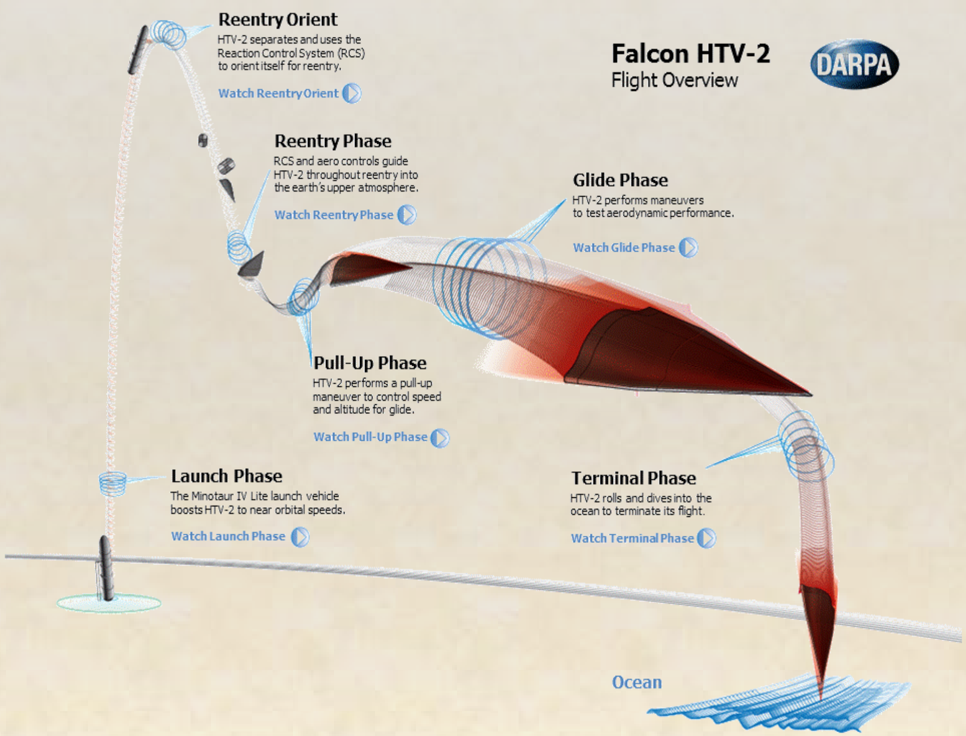
混合积：
$$\mathbf{T}\dot{\times}\mathbf{S}=T^{ijkl}S^{rst}\left(\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_l\right)\dot{\times}\left(\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\mathbf{g}_t\right)$$
$$=T^{ijkl}S^{rst}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\left(\mathbf{g}_k\cdot\mathbf{g}_r\right)\left(\mathbf{g}_l\times\mathbf{g}_s\right)\mathbf{g}_t$$

双重矢积：
$$\mathbf{T}\overset{\times}{\times}\mathbf{S}=T^{ijkl}S^{rst}\left(\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_l\right)\overset{\times}{\times}\left(\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\mathbf{g}_t\right)$$
$$=T^{ijkl}S^{rst}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\left(\mathbf{g}_k\times\mathbf{g}_r\right)\left(\mathbf{g}_l\times\mathbf{g}_s\right)\mathbf{g}_t$$

本课程的推导不会用到这些复杂的张量运算，这些内容仅作了解即可

二、张量在飞行动力学中的应用

- **高超声速飞行器再入飞行动力学模型**



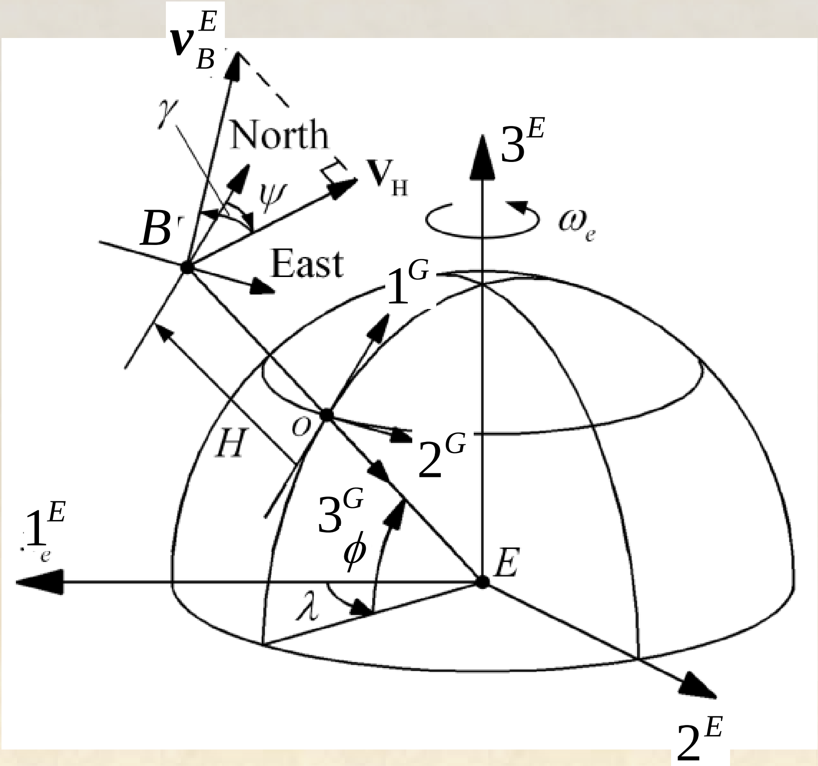
二、张量在飞行动力学中的应用

- **高超声速飞行器再入飞行动力学模型**

➢ 广义坐标：描述飞行器质心的位置和速度

1）位置描述
经度：λ
纬度：ϕ
海拔高度：H

2）速度矢量描述
速度：V
弹道倾角：γ
航向角：ψ



二、张量在飞行动力学中的应用

- **高超声速飞行器再入飞行动力学模型**

经度：$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=\frac{V\cos(\gamma)\sin(\psi)}{(R_e+H)\cos(\phi)}$$

纬度：$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\frac{V\cos(\gamma)\cos(\psi)}{(R_e+H)}$$

高度：$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=V\sin(\gamma)$$

速度：$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\frac{D}{m}-g\sin(\gamma)+\omega_e^2(R_e+H)\cos^2(\phi)\sin(\gamma)-\omega_e^2(R_e+H)\sin(\phi)\cos(\phi)\cos(\gamma)\cos(\psi)$$

弹道倾角：$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{V}\left[\frac{L\cos(\sigma)}{m}-g\cos(\gamma)+\frac{V^2\cos(\gamma)}{R_e+H}+\omega_e^2(R_e+H)\cos^2(\phi)\cos(\gamma)+2V\omega_e\cos(\phi)\sin(\psi)+\omega_e^2(R_e+H)\sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\gamma)\cos(\psi)\right]$$

航向角：$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{V}\left[\frac{L\sin(\sigma)}{m\cos(\gamma)}+\frac{V^2\cos(\gamma)\sin(\psi)\tan(\phi)}{R_e+H}+\frac{\omega_e^2(R_e+H)\sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\psi)}{\cos(\gamma)}+2V\omega_e\sin(\phi)-2V\omega_e\cos(\phi)\tan(\gamma)\cos(\psi)\right]$$

二、张量在飞行动力学中的应用

- **高超声速飞行器再入飞行动力学模型**

经度：$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=\frac{V\cos(\gamma)\sin(\psi)}{(R_e+H)\cos(\phi)}$$

纬度：$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\frac{V\cos(\gamma)\cos(\psi)}{(R_e+H)}$$

高度：$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=V\sin(\gamma)$$

速度：$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\frac{D}{m}-g\sin(\gamma)+\omega_e^2(R_e+H)\cos^2(\phi)\sin(\gamma)-\omega_e^2(R_e+H)\sin(\phi)\cos(\phi)\cos(\gamma)\cos(\psi)$$

弹道倾角：$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{V}\left[\frac{L\cos(\sigma)}{m}-g\cos(\gamma)+\frac{V^2\cos(\gamma)}{R_e+H}+\omega_e^2(R_e+H)\cos^2(\phi)\cos(\gamma)+2V\omega_e\cos(\phi)\sin(\psi)+\omega_e^2(R_e+H)\sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\gamma)\cos(\psi)\right]$$

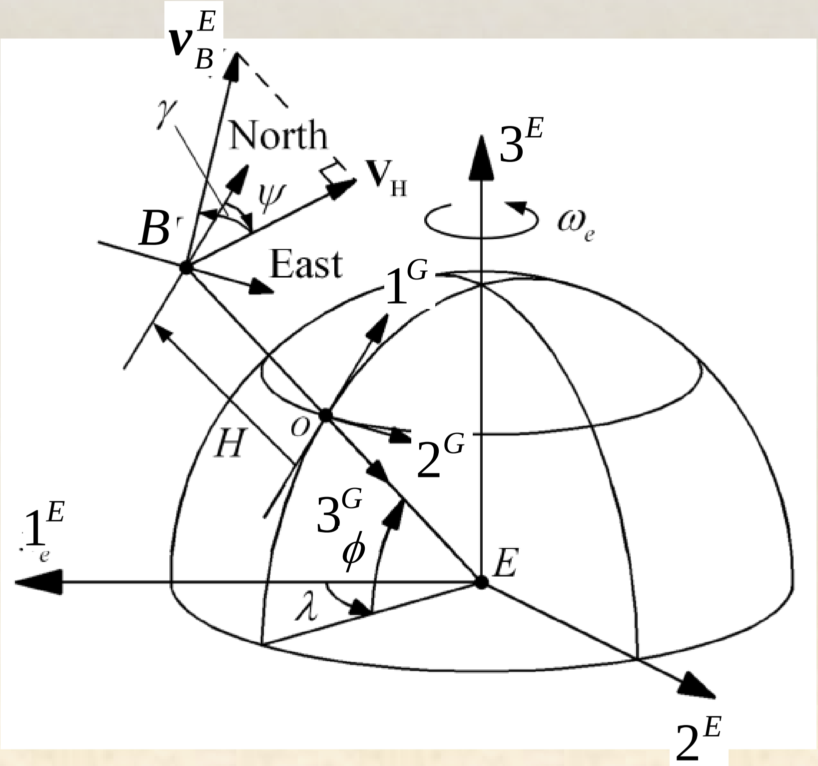
航向角：$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{V}\left[\frac{L\sin(\sigma)}{m\cos(\gamma)}+\frac{V^2\cos(\gamma)\sin(\psi)\tan(\phi)}{R_e+H}+\frac{\omega_e^2(R_e+H)\sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\psi)}{\cos(\gamma)}+2V\omega_e\sin(\phi)-2V\omega_e\cos(\phi)\tan(\gamma)\cos(\psi)\right]$$

挑战：如何运用张量的知识，基于矩阵运算，建立该再入飞行动力学模型？

二、张量在飞行动力学中的应用

- **高超声速飞行器再入飞行动力学模型**

  - 坐标系



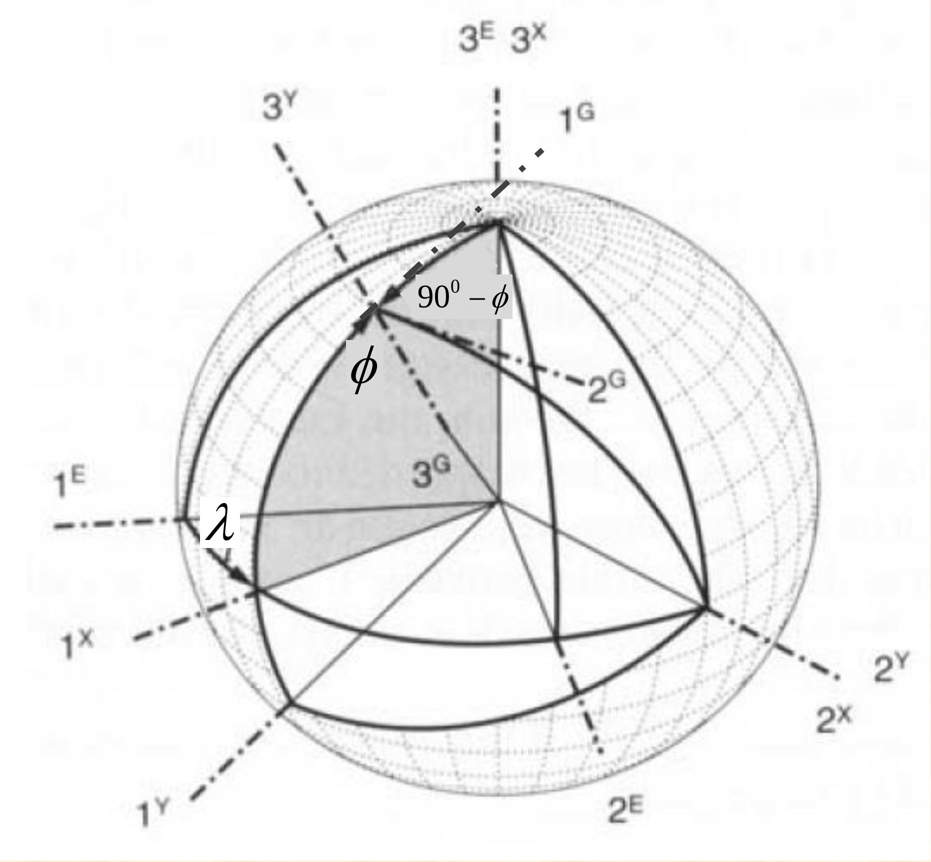
地球坐标系*E*、地理坐标系*G*

二、张量在飞行动力学中的应用

- **高超声速飞行器再入飞行动力学模型**
  - 地球坐标系到地理坐标系的坐标变换关系

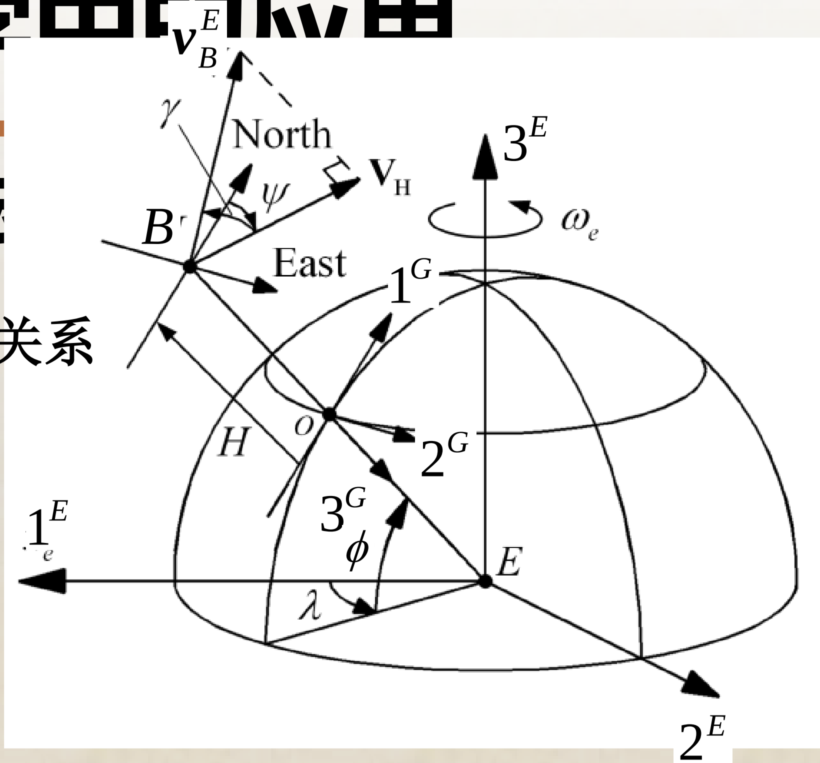
$$E系 \xrightarrow{R_{3E}(\lambda)} X系 \xrightarrow{R_{2X}(90^o-\phi)} Y系$$

$$\xrightarrow{R_{2Y}(180^o)} G系$$



二、张量在飞行动力学中的应用

- **高超声速飞行器再入飞行动**
  - ➢ 地球坐标系到地理坐标系的坐标变换关系



$$E系 \xrightarrow{R_{3^E}(\lambda)} X系 \xrightarrow{R_{2^X}(90^o-\phi)} Y系$$

$$\xrightarrow{R_{2^Y}(180^o)} G系$$

$$[T]^{GE} = R_{2^Y}(180^o)R_{2^X}(90^o-\phi)R_{3^E}(\lambda)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(180^o) & 0 & -\sin(180^o) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(180^o) & 0 & \cos(180^o) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(90^o-\phi) & 0 & -\sin(90^o-\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(90^o-\phi) & 0 & \cos(90^o-\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\phi) & 0 & -\cos(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\lambda)\sin(\phi) & -\sin(\lambda)\sin(\phi) & \cos(\phi) \\ -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) & 0 \\ -\cos(\lambda)\cos(\phi) & -\sin(\lambda)\cos(\phi) & -\sin(\phi) \end{bmatrix}$$

二、张量在飞行动力学中的应用

- **高超声速飞行器再入飞行动力学模型**

  ➢ 基于直角坐标的动力学模型

  以地球坐标系*E*为参照系（非惯性参照系），基于牛顿第二定律，利用理论力学的知识容易建立基于直角坐标的方程

1) 质心位置微分方程：$\left[\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}_{BE}}{\mathrm{d}t}\right]^E=\left[\boldsymbol{v}_B^E\right]^E$

2) 质心速度微分方程：

相对加速度 绝对加速度 科氏加速度 牵连加速度

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_B^E}{\mathrm{d}t}\right]^E=\boxed{\frac{1}{m}\left[\boldsymbol{F}_{air}\right]^E+\left[\boldsymbol{g}\right]^E}-2\left[\boldsymbol{\omega}^E\times\boldsymbol{v}_B^E\right]^E-\left[\boldsymbol{\omega}^E\times\boldsymbol{\omega}^E\times\boldsymbol{s}_{BE}\right]^E$$

气动力 重力加速度

二、张量在飞行动力学中的应用

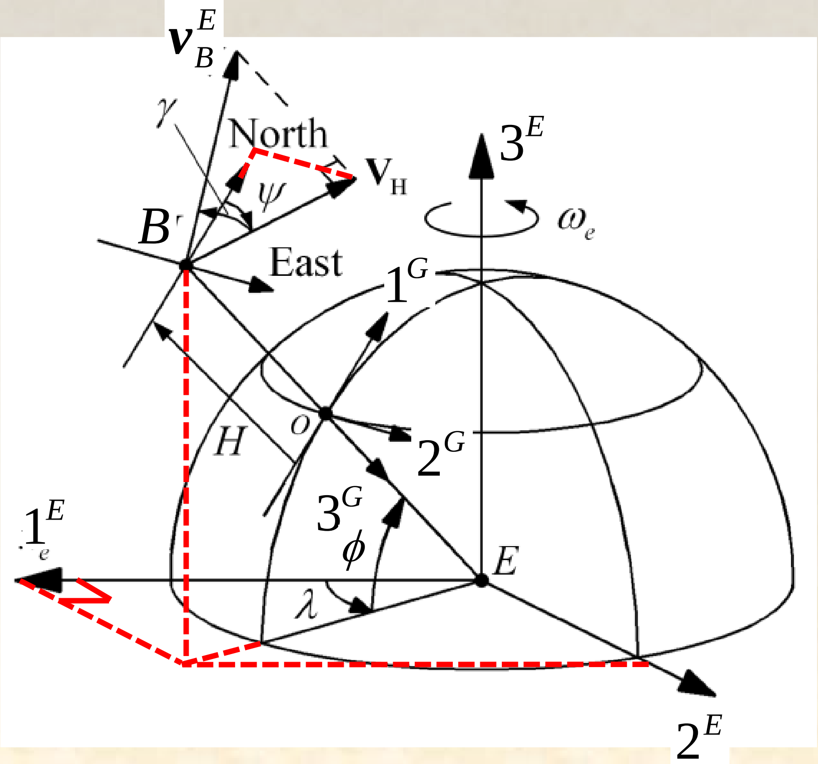
- **高超声速飞行器再入飞行动力学模型**

现在希望建立基于经度、纬度等广义坐标的动力学模型，因此利用几何学建立如下直角坐标与广义坐标的关系

$$[\boldsymbol{s}_{BE}]^E = \begin{bmatrix} s_1^E \\ s_2^E \\ s_3^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\cos\phi\cos\lambda \\ R\cos\phi\sin\lambda \\ R\sin\phi \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{v}_B^E]^G = \begin{bmatrix} v_1^G \\ v_2^G \\ v_3^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V\cos\gamma\cos\psi \\ V\cos\gamma\sin\psi \\ -V\sin\gamma \end{bmatrix}$$

其中： $R = R_e + H$



二、张量在飞行动力学中的应用

- **高超声速飞行器再入飞行动力学模型**

1) 首先建立关于经、纬度的位置微分方程:

将

$$\left[\boldsymbol{s}_{BE}\right]^E = \begin{bmatrix} s_1^E \\ s_2^E \\ s_3^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\cos\phi\cos\lambda \\ R\cos\phi\sin\lambda \\ R\sin\phi \end{bmatrix}$$

线性化处理

$$\left[\Delta\boldsymbol{s}_{BE}\right]^E = \begin{bmatrix} \Delta s_1^E \\ \Delta s_2^E \\ \Delta s_3^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta R\cos\phi\cos\lambda - R\sin\phi\cos\lambda\Delta\phi - R\cos\phi\sin\lambda\Delta\lambda \\ \Delta R\cos\phi\sin\lambda - R\sin\phi\sin\lambda\Delta\phi + R\cos\phi\cos\lambda\Delta\lambda \\ \Delta R\sin\phi + R\cos\phi\Delta\phi \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial\boldsymbol{s}_{BE}}{\partial R}\right]^E \Delta R + \left[\frac{\partial\boldsymbol{s}_{BE}}{\partial\lambda}\right]^E \Delta\lambda + \left[\frac{\partial\boldsymbol{s}_{BE}}{\partial\phi}\right]^E \Delta\phi$$

二、张量在飞行动力学中的应用

- **高超声速飞行器再入飞行动力学模型**

1) 首先建立关于经、纬度的位置微分方程：

记

$$\left[\Delta \boldsymbol{s}_{BE}\right]^E = \left[\frac{\partial \boldsymbol{s}_{BE}}{\partial R}\right]^E \Delta R + \left[\frac{\partial \boldsymbol{s}_{BE}}{\partial \lambda}\right]^E \Delta\lambda + \left[\frac{\partial \boldsymbol{s}_{BE}}{\partial \phi}\right]^E \Delta\phi = \left[\boldsymbol{g}_R\right]^E \Delta R + \left[\boldsymbol{g}_\lambda\right]^E \Delta\lambda + \left[\boldsymbol{g}_\phi\right]^E \Delta\phi$$

其中

$$\boxed{\text{正交基矢量、但不是单位矢量}}$$

$$\left[\boldsymbol{g}_R\right]^E = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\lambda \\ \cos\phi\sin\lambda \\ \sin\phi \end{bmatrix}, \quad \left[\boldsymbol{g}_\lambda\right]^E = \begin{bmatrix} -R\cos\phi\sin\lambda \\ R\cos\phi\cos\lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left[\boldsymbol{g}_\phi\right]^E = \begin{bmatrix} -R\sin\phi\cos\lambda \\ -R\sin\phi\sin\lambda \\ R\cos\phi \end{bmatrix}$$

称以上矢量为空间曲线的局部协变基矢量（张量分析 **Sec. 1.3**），并将这几个基矢量构成的坐标系称为**局部坐标系1**（记为 $]^{L_1}$）。

二、张量在飞行动力学中的应用

- **高超声速飞行器再入飞行动力学模型**

在地球坐标系下（三个轴方向的基矢量记为$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$），则$\Delta\boldsymbol{s}_{BE}$沿着协变基矢量分解的坐标为

$$\left[\Delta\boldsymbol{s}_{BE}\right]^E=\begin{bmatrix}\Delta s_1^E\\ \Delta s_2^E\\ \Delta s_3^E\end{bmatrix}$$

在局部坐标系下（协变基矢量是$\{\boldsymbol{g}_R,\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{g}_\phi\}$），则$\Delta\boldsymbol{s}_{BE}$的坐标为

二、张量在飞行动力学中的应用

- **高超声速飞行器再入飞行动力学模型**

在地球坐标系下（三个轴方向的基矢量记为$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$），则$\Delta\boldsymbol{s}_{BE}$沿着协变基矢量分解的坐标为

$$\left[\Delta\boldsymbol{s}_{BE}\right]^{E}=\begin{bmatrix}\Delta s_1^E\\ \Delta s_2^E\\ \Delta s_3^E\end{bmatrix}$$

在局部坐标系下（协变基矢量是$\{\boldsymbol{g}_R,\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{g}_\phi\}$），则$\Delta\boldsymbol{s}_{BE}$的坐标为

$$\left[\Delta\boldsymbol{s}_{BE}\right]^{\mathrm{L}_1}=\begin{bmatrix}\Delta R\\ \Delta\lambda\\ \Delta\phi\end{bmatrix}$$

即
$$\Delta\boldsymbol{s}_{BE}=\Delta s_1^E\mathbf{e}_1+\Delta s_2^E\mathbf{e}_2+\Delta s_3^E\mathbf{e}_3=\Delta R\boldsymbol{g}_R+\Delta\lambda\boldsymbol{g}_\lambda+\Delta\phi\boldsymbol{g}_\phi$$

问：如何建立由坐标系E向坐标系L_1的坐标变换关系？

二、张量在飞行动力学中的应用

- **高超声速飞行器再入飞行动力学模型**

➢ 建立由坐标系E向坐标系L_1的坐标变换关系

首先，将旧的基矢量 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ 沿新的基矢量$\{\boldsymbol{g}_R,\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{g}_\phi\}$ 分解

$$\mathbf{e}_1=(\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{g}^R)\boldsymbol{g}_R+(\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{g}^\lambda)\boldsymbol{g}_\lambda+(\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{g}^\phi)\boldsymbol{g}_\phi$$

$$\mathbf{e}_2=(\mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{g}^R)\boldsymbol{g}_R+(\mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{g}^\lambda)\boldsymbol{g}_\lambda+(\mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{g}^\phi)\boldsymbol{g}_\phi$$

$$\mathbf{e}_3=(\mathbf{e}_3\cdot\boldsymbol{g}^R)\boldsymbol{g}_R+(\mathbf{e}_3\cdot\boldsymbol{g}^\lambda)\boldsymbol{g}_\lambda+(\mathbf{e}_3\cdot\boldsymbol{g}^\phi)\boldsymbol{g}_\phi$$

代入

$$\Delta\boldsymbol{s}_{BE}=\Delta s_1^E\mathbf{e}_1+\Delta s_2^E\mathbf{e}_2+\Delta s_3^E\mathbf{e}_3$$

并根据新的基矢量进行整理

$$\Delta\boldsymbol{s}_{BE}=\Delta R\boldsymbol{g}_R+\Delta\lambda\boldsymbol{g}_\lambda+\Delta\phi\boldsymbol{g}_\phi$$

二、张量在飞行动力学中的应用

- **高超声速飞行器再入飞行动力学模型**

进而可得

$$\begin{bmatrix} \Delta R \\ \Delta\lambda \\ \Delta\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{g}^R \\ \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{g}^\lambda \\ \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{g}^\phi \end{bmatrix} \Delta s_1^E + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{g}^R \\ \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{g}^\lambda \\ \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{g}^\phi \end{bmatrix} \Delta s_2^E + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{g}^R \\ \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{g}^\lambda \\ \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{g}^\phi \end{bmatrix} \Delta s_3^E = [T]^{L_1E} \begin{bmatrix} \Delta s_1^E \\ \Delta s_2^E \\ \Delta s_3^E \end{bmatrix}$$

其中

$$[T]^{L_1E} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{g}^R & \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{g}^R & \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{g}^R \\ \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{g}^\lambda & \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{g}^\lambda & \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{g}^\lambda \\ \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{g}^\phi & \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{g}^\phi & \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{g}^\phi \end{bmatrix}$$

正交阵?

二、张量在飞行动力学中的应用

- **知识回顾：协变基矢量与逆变基矢量**

1、三维斜角直线坐标系（基矢量$\{g_1, g_2, g_3\}$） → 协变基矢量

2、引入对偶基矢量$\{g^1, g^2, g^3\}$ → 逆变基矢量

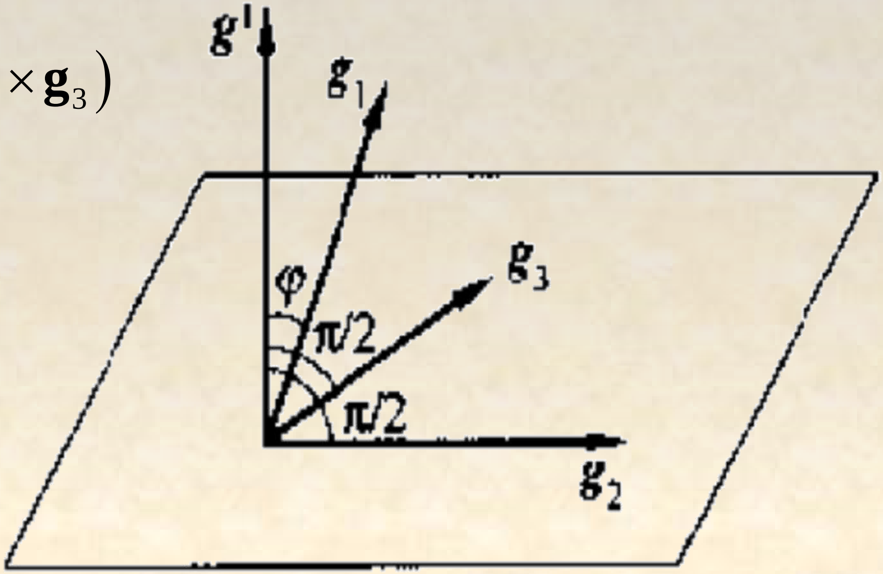
$$\begin{cases} \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_i = 1 \ \ (i = 1, 2, 3) \\ \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = 0 \ \ (i \neq j) \end{cases}$$

→ 锐角、模值

→ 正交

3、如何求解逆变基矢量

➢ 先定方向、再定模值 $\begin{cases} \mathbf{g}^1 = a(\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3) \\ \mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{g}_1 = 1 \end{cases}$



4、逆变分量和协变分量

逆变分量		协变分量	
	$P^1 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}^1$		$P_1 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}_1$
	$P^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}^2$		$P_2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}_2$
	$P^3 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}^3$		$P_3 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}_3$

二、张量在飞行动力学中的应用

- **高超声速飞行器再入飞行动力学模型**

$$[\boldsymbol{g}_R]^E = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\lambda \\ \cos\phi\sin\lambda \\ \sin\phi \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{g}_\lambda]^E = R\cos\phi \begin{bmatrix} -\sin\lambda \\ \cos\lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{g}_\phi]^E = R \begin{bmatrix} -\sin\phi\cos\lambda \\ -\sin\phi\sin\lambda \\ \cos\phi \end{bmatrix}$$

正交基矢量、但不是单位矢量

求解逆变基矢量？

二、张量在飞行动力学中的应用

- **高超声速飞行器再入飞行动力学模型**

$$[\boldsymbol{g}_R]^E = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\lambda \\ \cos\phi\sin\lambda \\ \sin\phi \end{bmatrix},\quad [\boldsymbol{g}_\lambda]^E = R\cos\phi \begin{bmatrix} -\sin\lambda \\ \cos\lambda \\ 0 \end{bmatrix},\quad [\boldsymbol{g}_\phi]^E = R \begin{bmatrix} -\sin\phi\cos\lambda \\ -\sin\phi\sin\lambda \\ \cos\phi \end{bmatrix}$$

正交基矢量、但不是单位矢量

因此逆变基矢量与协变基矢量同向，但是具有不同的模值。根据模值的乘积为1，可得逆变基矢量

$$[\boldsymbol{g}^R]^E = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\lambda \\ \cos\phi\sin\lambda \\ \sin\phi \end{bmatrix},\quad [\boldsymbol{g}^\lambda]^E = \frac{1}{R\cos\phi} \begin{bmatrix} -\sin\lambda \\ \cos\lambda \\ 0 \end{bmatrix},\quad [\boldsymbol{g}^\phi]^E = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} -\sin\phi\cos\lambda \\ -\sin\phi\sin\lambda \\ \cos\phi \end{bmatrix}$$

二、张量在飞行动力学中的应用

- **高超声速飞行器再入飞行动力学模型**

因此可得

$$[T]^{L_1E}=\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{g}^R & \mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{g}^R & \mathbf{e}_3\cdot\boldsymbol{g}^R\\ \mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{g}^\lambda & \mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{g}^\lambda & \mathbf{e}_3\cdot\boldsymbol{g}^\lambda\\ \mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{g}^\phi & \mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{g}^\phi & \mathbf{e}_3\cdot\boldsymbol{g}^\phi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\phi\cos\lambda & \cos\phi\sin\lambda & \sin\phi\\ \dfrac{-\sin\lambda}{R\cos\phi} & \dfrac{\cos\lambda}{R\cos\phi} & 0\\ \dfrac{-\sin\phi\cos\lambda}{R} & \dfrac{-\sin\phi\sin\lambda}{R} & \dfrac{\cos\phi}{R}\end{bmatrix}$$

另外

$$\frac{1}{\Delta t}\begin{bmatrix}\Delta R\\ \Delta\lambda\\ \Delta\phi\end{bmatrix}=[T]^{L_1E}\left(\frac{1}{\Delta t}\begin{bmatrix}\Delta s_1^E\\ \Delta s_2^E\\ \Delta s_3^E\end{bmatrix}\right)\xrightarrow{\Delta t\to 0}\begin{bmatrix}\dot R\\ \dot\lambda\\ \dot\phi\end{bmatrix}=[T]^{L_1E}\begin{bmatrix}\dot s_1^E\\ \dot s_2^E\\ \dot s_3^E\end{bmatrix}=[T]^{L_1E}\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}_{BE}}{\mathrm{d}t}\right]^E$$

$$=[T]^{L_1E}\left[\boldsymbol{v}_B^E\right]^E=[T]^{L_1E}[T]^{EG}\left[\boldsymbol{v}_B^E\right]^G$$

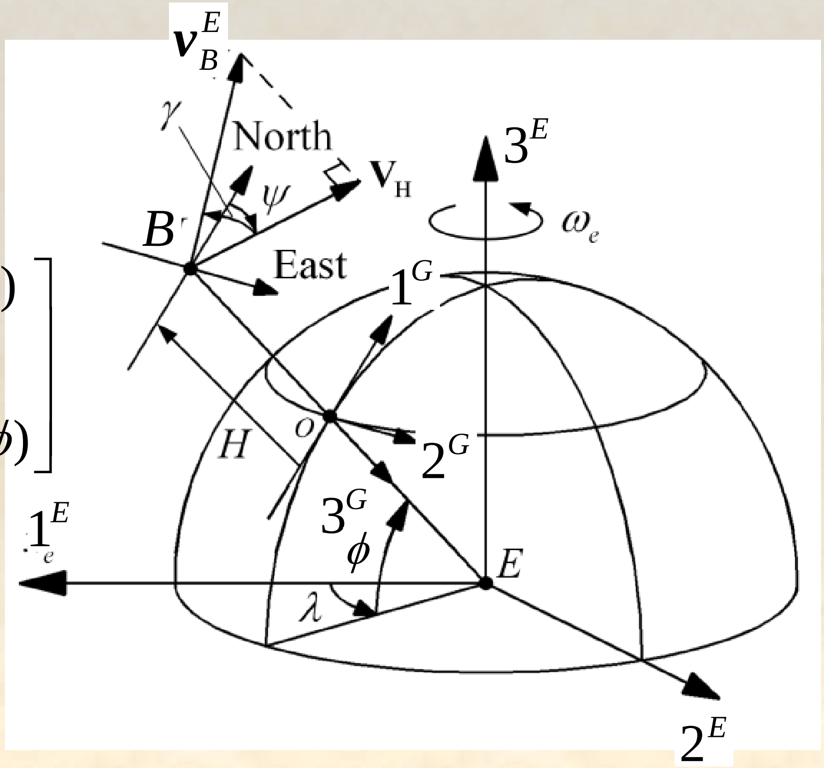
二、张量在飞行动力学中的应用

- **高超声速飞行器再入飞行动力学模型**

前面已经得到：

$$\left[\boldsymbol{v}_B^E\right]^G = \begin{bmatrix} v_1^G \\ v_2^G \\ v_3^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V\cos\gamma\cos\psi \\ V\cos\gamma\sin\psi \\ -V\sin\gamma \end{bmatrix}$$

$$[T]^{GE} = \begin{bmatrix} -\cos(\lambda)\sin(\phi) & -\sin(\lambda)\sin(\phi) & \cos(\phi) \\ -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) & 0 \\ -\cos(\lambda)\cos(\phi) & -\sin(\lambda)\cos(\phi) & -\sin(\phi) \end{bmatrix}$$



二、张量在飞行动力学中的应用

- **高超声速飞行器再入飞行动力学模型**

因此可得

$$\begin{bmatrix} \dot{R} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \left[T\right]^{L_1E} \left[\bar{T}\right]^{GE} \left[\mathbf{v}_B^E\right]^G = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\lambda & \cos\phi\sin\lambda & \sin\phi \\ \dfrac{-\sin\lambda}{R\cos\phi} & \dfrac{\cos\lambda}{R\cos\phi} & 0 \\ \dfrac{-\sin\phi\cos\lambda}{R} & \dfrac{-\sin\phi\sin\lambda}{R} & \dfrac{\cos\phi}{R} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} -\cos(\lambda)\sin(\phi) & -\sin(\lambda) & -\cos(\lambda)\cos(\phi) \\ -\sin(\lambda)\sin(\phi) & \cos(\lambda) & -\sin(\lambda)\cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V\cos\gamma\cos\psi \\ V\cos\gamma\sin\psi \\ -V\sin\gamma \end{bmatrix}$$

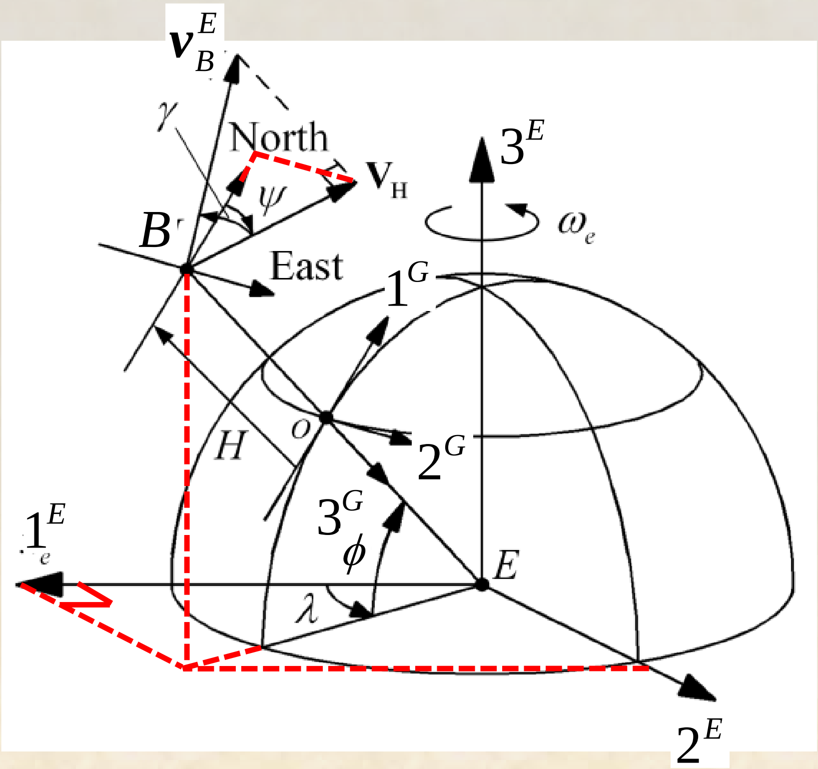
二、张量在飞行动力学中的应用

- **高超声速飞行器再入飞行动力学模型**

解得

$$\begin{bmatrix} \dot{R} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \dfrac{1}{R\cos\phi} & 0 \\ \dfrac{1}{R} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V\cos\gamma\cos\psi \\ V\cos\gamma\sin\psi \\ -V\sin\gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} V\sin\gamma \\ \dfrac{V\cos\gamma\sin\psi}{R\cos\phi} \\ \dfrac{V\cos\gamma\cos\psi}{R} \end{bmatrix}$$



至此，完成了基于经度、纬度等广义坐标的位置微分方程的建立