ODE的IVP问题的数值解法

基本概念

ODE：Ordinary Differential Equations 常微分方程
IVP: Initial Value Problem 初值问题

对于一个ODE，有以下基本形式：

$$\dot{y} = f(t, y), \quad t \in [t_0, T]$$

可以看到，方程的变量y的变化率是和时间和方程本身相关的函数。对于上述ODE的初值问题IVP，即给定t_0时刻下的$y = y_0$，求解任意时刻y的值：

$$\text{给定} t_0, y_0, \quad \text{求解} y(t)$$

对于上述的IVP，若通过数值方法在时间节点t_n求解出一个y_n，同时ODE存在一个解析解$y(t)$，那么称ϵ_n为**节点t_n的整体截断误差**:

$$\epsilon_n = y(t_n) - y_n$$

我本科一开始学习这个问题时难以理解这里的f和y之前的关系，因此我给定下面的一个例子，希望帮助理解没有接触过ODE的同学。

ODE的IVP在航天中的应用

对于一个航天器具有质量m，绕质量为M的中心天体（地球，月球）飞行，忽略航天器的质量对地球轨迹的影响，那么航天器受到引力作用：

$$\mathbf{F_g} = m\mathbf{a} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}$$

由于加速度$\mathbf{a}$实际上是位置矢量r的二阶导数$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$，也是速度的一阶导数$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$，上述可以写成一个二阶的微分方程：

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} = \dot{\mathbf{v}}, \quad \mu = GM = \text{常数}$$

为了处理上述的这种二阶情况，可以定义一个状态以及状态的导数：

$$\mathbf{x} = [\mathbf{r}, \mathbf{v}]^T$$
$$\dot{\mathbf{x}} = [\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{v}}] = [\mathbf{v}, \mathbf{a}]^T$$

这样可以将上述的二阶ODE化简成为一组两个一阶ODE，而整个式子右边部分，即为微分方程$f(x)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \end{bmatrix}$$

注意到对于航天器而言，其位置和速度矢量是随着时间变化的，即$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$因此上述式子可以更为广义的写成：

$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$

其中微分方程的变量$\mathbf{x}$自身的变化率$\dot{\mathbf{x}}$和自身$\mathbf{x}$以及时间t相关。

对于上述的微分方程，若给定航天器初始观测时间的t_0和其状态向量$\mathbf{x}_0 = [\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0]$，那么我们可以使用本章学习的经典方法（如龙格-库塔4次方法）进行航天器的轨道预报，这就是一个经典的IVP问题。

显式单步法

为了求解IVP，可以使用数值积分的方法，基本形式如下：

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h)$$

上述式子中h为**积分步长**，ϕ称为**增量函数**。定义R_{n+1}为**节点t_{n+1}处的局部截断误差**：

$$R_{n+1} = y(t_{n+1}) - y_{n+1} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\phi(t_n, y_n, h)$$

若上述局部误差与h^{p+1}**同阶**（局部截断误差R_{n+1}与h^{p+1}的收敛速度或量级相同），即$R_{n+1} = O(h^{p+1})$，那么称单步法为p阶方法。

显性欧拉法

显性欧拉法是最基本的求解ODE的常见方法，其格式为：

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

然而其数值不太稳定，一般在工程中较少使用。

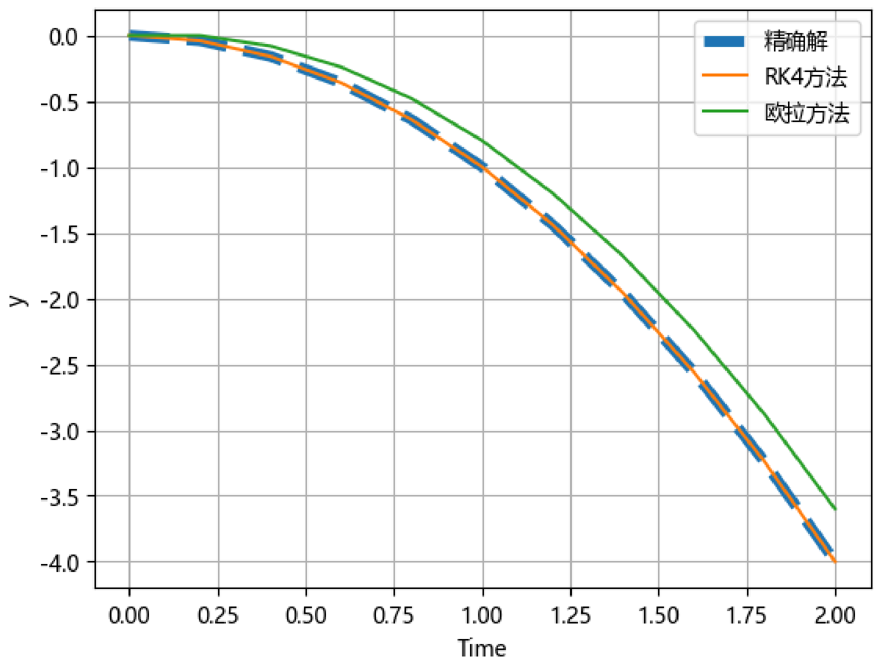
龙格-库塔RK方法

龙格库塔方法有以下的形式：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{N} c_i k_i \\ \quad k_1 = f(t_n, y_n) \\ \quad k_i = f\left(t_n + a_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j\right) \quad (i = 2, 3, \cdots, N) \\ \quad a_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \quad (i = 2, 3, \cdots, N) \\ \qquad (n = 0, 1, \cdots, M-1) \end{cases}$$

其中N为RK方法的阶数，可以发现，$N = 1$时，RK-1方法即为显性欧拉方法。工程中常用的方法为RK4与RK5方法，集成在许多通用计算软件的`ode45`中。

对于上述的两个方法，写了一个简单的示例代码在`ODE.py`中，求解一个简单的模型问题，其曲线如下，这里使用了10个区间，11个点：



收敛条件

Lipschitz 条件

存在常数 $L \geq 0$（称为 Lipschitz 常数），对函数 $f(x)$ 定义域内任意两点 x_1, x_2，都满足:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

Lipschitz条件的直观意义：函数图像的任意割线斜率绝对值不超过 L，变化率有明确上界，不会出现 “突变”。

三个定理

1. **整体局部误差关系**：对于单步法，若增量函数$\phi(t, y, h)$满足关于变量y的Lipschitz 条件，那么若局部截断误差有：$R_{n+1} = O(h^{p+1})$。整体截断误差有：$e_{n+1} = O(h^p)$，比局部截断误差低1阶，这意味着整体误差的收敛速度比局部误差 “慢一阶”。
2. **相容性**：即当取步长h趋于零时，增量函数ϕ的极限成为微分方程本身，就满足相容性。即满足：

$$\lim_{h \to 0} \phi(t, y, h) = \phi(t, y, 0) = f(t, y)$$

   满足相容性的充分必要条件为单步法至少是一阶方法。相容性条件本身又是IVP数值求解问题的必要条件。
3. **收敛性**：若单步法得到的数值解和解析解在极限状态相同，即满足：

$$\lim_{h \to 0, t = t_n} y_n = y(t_n)$$

   那么称单步法是收敛的。满足收敛性的条件为上述的两个条件：**增量函数$\phi(t, y, h)$满足关于变量y的 Lipschitz 条件**，以及**相容性条件**。

绝对稳定性

定义如下的模型方程：

$$\dot{y} = \lambda y$$

若单步法对于上述ODE的IVP问题的初值有误差e_0,由此导致的误差e_n满足：

$$\lim_{n \to \infty} e_n = 0$$

那么称单步法对步长h和复数λ是绝对稳定的。

以欧拉法为例做推导：

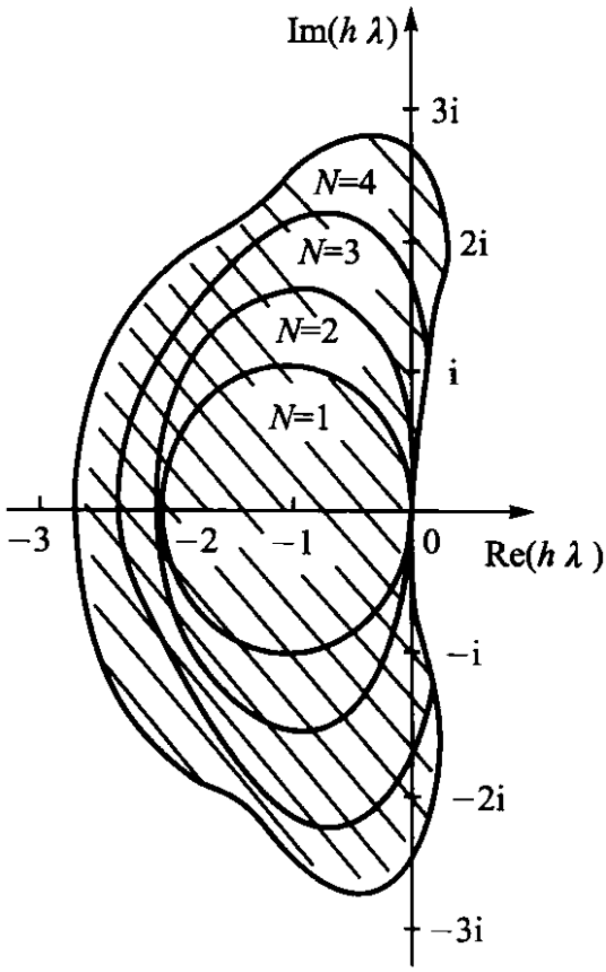
$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n = (1 + h\lambda)y_n$$
$$e_n = (1 + h\lambda)^n e_0$$

因此绝对稳定需要满足：

$$|1 + h\lambda| < 1$$

即在复平面上以-1为圆心，1为半径的圆。

可以对各个方法推导并绘制出下面的图像：



不同阶数RK方法的稳定区间如下：

- RK-1 方法：(-2, 0)

- RK-2 方法：(-2, 0)
- RK-3 方法：(-2.51, 0)
- RK-4 方法：(-2.78, 0)