张量与场论

斜角直线坐标系

协变基矢量与逆变基矢量

“协下逆上”

- 协变基矢量：g_1, g_2
- 逆变基矢量：g^1, g^2

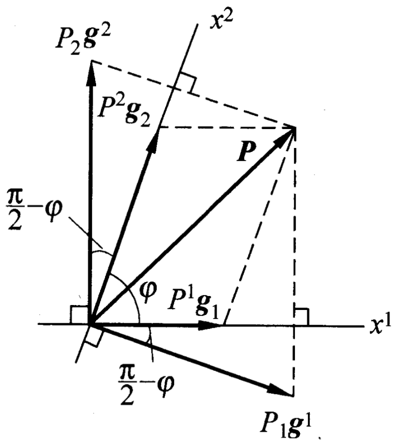
分量和基对应

- 协变分量：P_1, P_2
- 逆变分量：P^1, P^2

协变基与逆变基关系

- $g^i \cdot g_i = 1$
- $g^i \cdot g_j = 0, i \neq j$

平面斜角直线坐标系



- $P \cdot g^1 = P^1$
- $P \cdot g^2 = P^2$
- $P = P^1 g_1 + P^2 g_2$

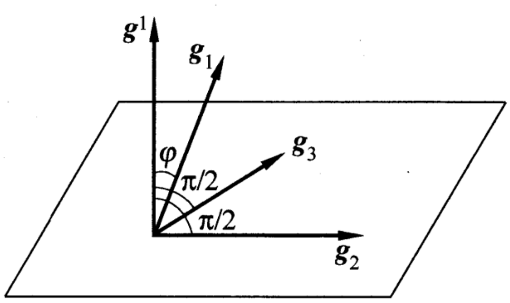
在相互垂直的笛卡尔坐标系下，协变基与逆变基相同：

- $g^1 = g_1, g^2 = g_2$

三维斜角坐标系

矢量的混合积定义：

$$[u, v, w] = (u \times v) \cdot w = u \cdot (v \times w)$$



在三维斜角坐标系下的协变基矢量的混合基：

$$\sqrt{g} = [g_1, g_2, g_3] = g_1 \cdot (g_2 \times g_2)$$

协变基与逆变基的互相转化关系

- $g^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}(g_2 \times g_3)$
- $g^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}(g_3 \times g_1)$
- $g^3 = \frac{1}{\sqrt{g}}(g_1 \times g_2)$

其物理意义为三个协变基构成的立体图形体积

- $\mathbf{P} = P^1 g_1 + P^2 g_2 + P^3 g_3$
- $\mathbf{P} = P_1 g^1 + P_2 g^2 + P_3 g^3$
- $P^i = \mathbf{P} \cdot g^i$
- $P_i = \mathbf{P} \cdot g_i$

协变基与逆变基口诀

- 区分协变基与逆变基：协下逆上
  - 协变基矢量：g_1, g_2
  - 逆变基矢量：g^1, g^2
- 协变基与逆变基转换：同组为1,不同组为0
  - $g^i \cdot g_i = 1$
  - $g^i \cdot g_j = 0, i \neq j$
- 对于向量合成：指标升降合成
  - $\mathbf{P} = P^1 g_1 + P^2 g_2 + P^3 g_3$
  - $\mathbf{P} = P_1 g^1 + P_2 g^2 + P_3 g^3$
- 对于分量分解：指标单侧分解
  - $P^i = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g^i}$
  - $P_i = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g_i}$

斜角坐标系下的坐标变换

给定两组协变基，表示同一个向量：

- $g_1, g_2, g_3 \rightarrow g_i$
- $g_a, g_b, g_c \rightarrow g_{j'}$
- $\mathbf{v} = v^i g_i = v^{j'} g_{j'}$

将旧坐标系的基分解为新坐标系的基的线性表示：

- $g_1 = \beta_1^a g_a + \beta_1^c g_c + \beta_1^c g_c$，即 $g_1 = \beta_1^{j'} g_{j'}$
- $g_2 = \beta_2^a g_a + \beta_2^c g_c + \beta_2^c g_c$，即 $g_2 = \beta_2^{j'} g_{j'}$
- $g_3 = \beta_3^a g_a + \beta_3^c g_c + \beta_3^c g_c$，即 $g_3 = \beta_3^{j'} g_{j'}$
- 对于上面的每个基向量的坐标：$\beta_i^{j'} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^{j'}$
- 那么对于旧坐标系的g_i可以表示为：$\mathbf{g}_i = \beta_i^{j'} \mathbf{g}_{j'}$

将上述的g_i表达式代入原先的向量$\mathbf{v}$表达式可以得到：

- $\mathbf{v} = v^1 \mathbf{g_1} + v^2 \mathbf{g_2} + v^3 \mathbf{g_3}$
- $\mathbf{v} = v^1(\beta_1^a g_a + \beta_1^c g_c + \beta_1^c g_c) + v^2(\beta_2^a g_a + \beta_2^c g_c + \beta_2^c g_c) + v^3(\beta_3^a g_a + \beta_3^c g_c + \beta_3^c g_c)$
- $\mathbf{v} = (v^1 \beta_1^a + v^2 \beta_2^a + v^3 \beta_3^a) g_a + (v^1 \beta_1^b + v^2 \beta_2^b + v^3 \beta_3^b) g_b + (v^1 \beta_1^c + v^2 \beta_2^c + v^3 \beta_3^c) g_c$
  上式可以看到括号内的每个表达式即为v^a, v^b, v^c，将其写成矩阵形式：

- $$\begin{bmatrix} v^a \\ v^b \\ v^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^a & \beta_2^a & \beta_3^a \\ \beta_1^b & \beta_2^b & \beta_3^b \\ \beta_1^c & \beta_2^c & \beta_3^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{ij'} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

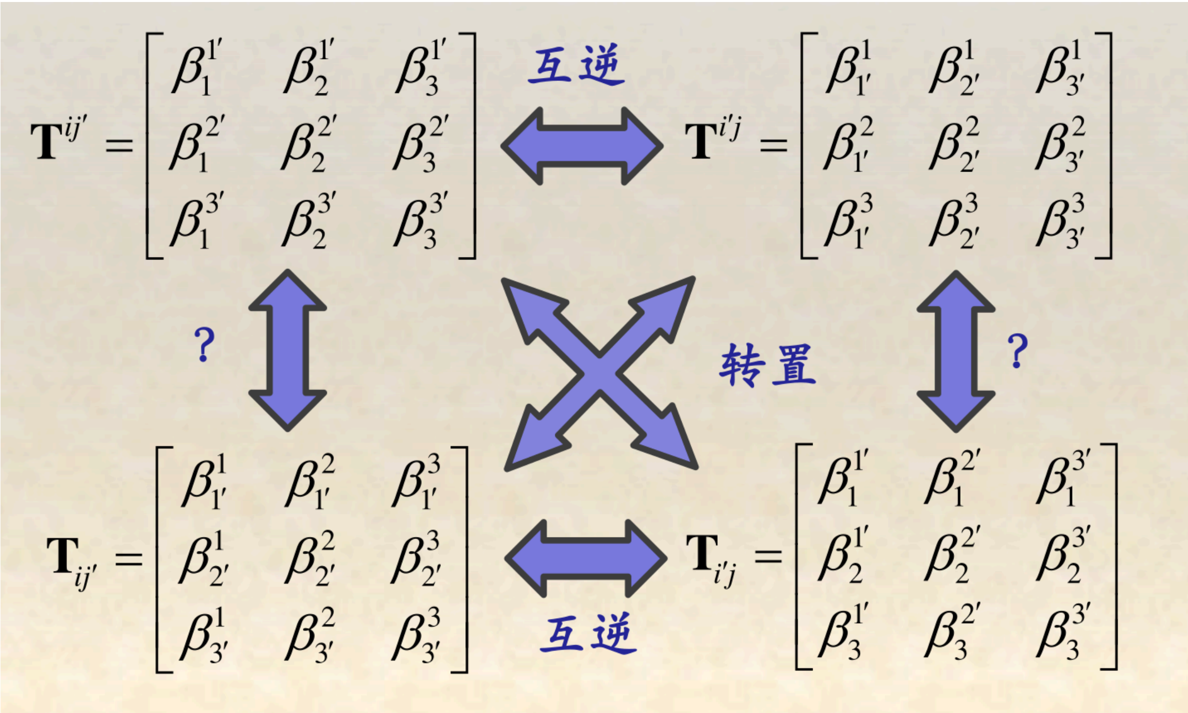
推导过程用上下标简化可以得到：

- $\mathbf{v} = v^i g_i = v^i(\beta_i^{j'} g_{j'}) = (v^i \beta_i^{j'}) g_{j'} = v^{j'} g_{j'}$

上述仅推导了基于两组协变基向量出发，从g_i变化到$g_{j'}$的情况$\mathbf{T}^{ij'}$

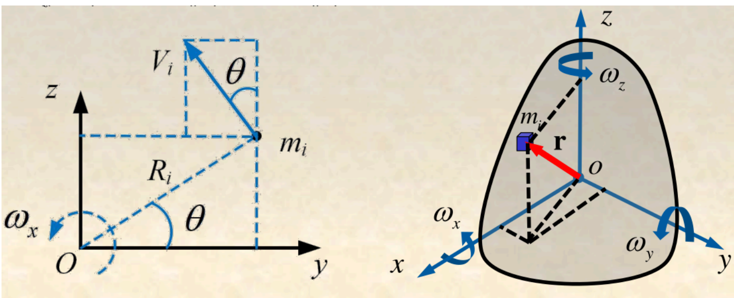
若从$g_{j'}$变化到g_i，则为$\mathbf{T}^{i'j}$，为互逆的情况。

若从两组逆变基出发，则出现$\mathbf{T}_{ij'}$和$\mathbf{T}_{i'j}$的情况，与基于协变基的推导有指标升降关系。



拓展：惯量矩阵的坐标变换

先放一下这部分



证明：某物体在一组正交基矢量$\{e_x, e_y, e_z\}$下的惯量张量I如下。

那么是否存在一组新的正交基矢量$\{\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}, \mathbf{e}_{z'}\}$，使得惯量张量为对角阵（即所有惯性积为零）？求解出新的正交基矢量和惯量张量（提示：借助矩阵的相似变换知识）

$$\mathbf{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 358.451 & 135.887 & -69.25318 \\ 135.887 & 369.5487 & 66.48306 \\ -69.25318 & 66.48306 & 172 \end{bmatrix}$$

张量的引入

基本概念

张量不依赖坐标系，与矢量类似

定义：**由若干有序数组成的集合，并且当坐标系改变时满足相应的坐标转换关系**

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13} \\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23} \\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33} \end{bmatrix}$$

其中：$\beta^{ij} = \nu^i \cdot \nu^j$

上述矩阵即为一个2阶张量，可以简单理解向量为1阶张量，矩阵的几何构成的3维区域构成一个3阶张量，但是构建的张量需要满足坐标转换关系。

并矢

可引用并矢运算构建张量，例如两个1阶张量的并矢可构建一个2阶张量

两个1阶张量的并矢：

$$\mathbf{ab} = \left(a^1\mathbf{g}_1 + a^2\mathbf{g}_2 + a^3\mathbf{g}_3\right)\left(b^1\mathbf{g}_1 + b^2\mathbf{g}_2 + b^3\mathbf{g}_3\right)$$

可以将其写成矩阵形式：

$$[\mathbf{ab}] = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{a}][\mathbf{b}]^T$$

上述情况下，两个张量的协变和逆变是统一的，若不统一的情况下：

$$\mathbf{ab} = \left(a^1\mathbf{g}_1 + a^2\mathbf{g}_2 + a^3\mathbf{g}_3\right)\left(b_1\mathbf{g}^1 + b_2\mathbf{g}^2 + b_3\mathbf{g}^3\right)$$

$$[\mathbf{ab}]^{i}_{\cdot j} = \begin{bmatrix} a^1b_1 & a^1b_2 & a^1b_3 \\ a^2b_1 & a^2b_2 & a^2b_3 \\ a^3b_1 & a^3b_2 & a^3b_3 \end{bmatrix}$$

并矢的运算律：

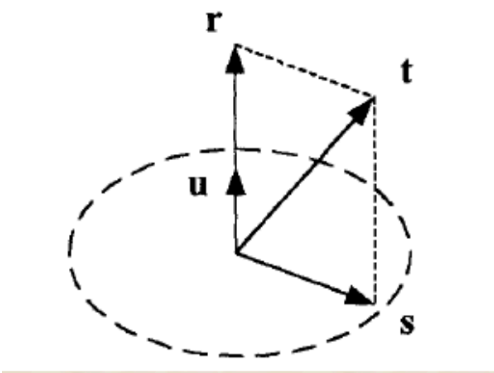
- 满足常规意义下的分配律与结合律
- 然而不满足交换律，即$\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$
- 并矢有常规意义下的点乘运算

并矢运算的应用

投影张量

- 矢量t沿单位矢量u的投影：$\mathbf{r}=(\mathbf{t}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}$
- 投影张量：$\mathbf{P}=\mathbf{u}\mathbf{u}$
- $[\mathbf{r}]=([\overline{\mathbf{t}}][\mathbf{u}])[\mathbf{u}]=[\mathbf{u}]([\overline{\mathbf{t}}][\mathbf{u}])=[\mathbf{u}]([\overline{\mathbf{u}}][\mathbf{t}])=([\mathbf{u}][\overline{\mathbf{u}}])[\mathbf{t}]$
- 上述的$\overline{(\cdot)}$的符号代表矩阵转置

平面投影张量



- $\mathbf{s}=\mathbf{t}-(\mathbf{t}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}$
- 平面投影张量：$[\mathbf{E}]-[\mathbf{u}][\overline{\mathbf{u}}]$

张量的代数运算

张量有常规的**相等判定**方法，常规的**相加运算**规则，以及常规的**标量-张量相乘**法则

张量有较为特殊的**并乘**、**缩并**、**点/内积**的运算规则

两个二维张量的并乘：

- $\mathbf{TS}=\left(T^{11}\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1+T^{12}\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2+\cdots+T^{33}\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3\right)\left(S^{11}\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1+S^{12}\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2+\cdots+S^{33}\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3\right)$
- $=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}T^{ij}S^{km}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_m=T^{ij}S^{km}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_m$
- 这里的张量并乘并不是矩阵乘法，产生的是四维张量

两个二维张量的缩并：

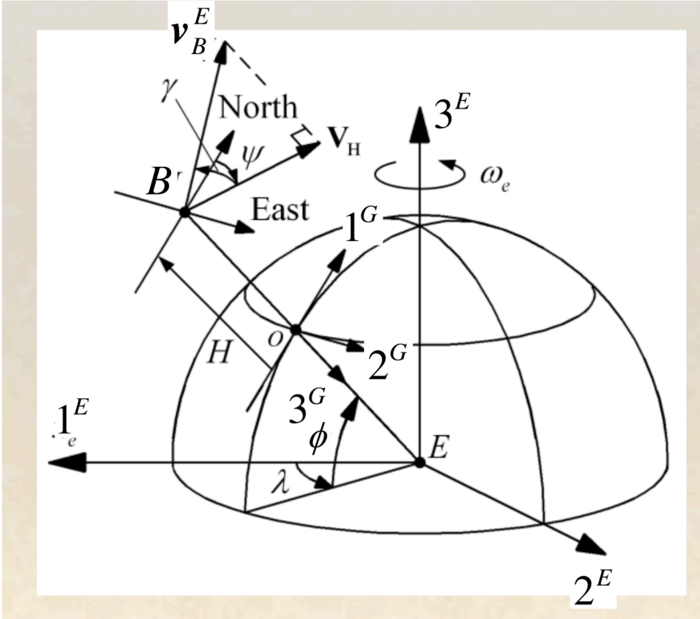
- 这里指定$\mathbf{g}_j$与$\mathbf{g}_l$：
- $\mathbf{S}=\widehat{\mathbf{T}}=T^{ijkl}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_l=T^{ijkl}(\mathbf{g}_j\cdot\mathbf{g}_l)\mathbf{g}_i\mathbf{g}_k=\beta_{jl}T^{ijkl}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_k$
- 人为指定两个基矢量进行点乘运算
- 这里原本两个二维张量的并矢运算将构成四维，缩并后变成二维

两个张量的点/内积运算：

- 先并乘，再缩并的运算
- 首先并乘：$\mathbf{TS}=T^{ijkl}S^{rst}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_l\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\mathbf{g}_t$
- 然后缩并：$\mathbf{TS}=T^{ijkl}S^{rst}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_l\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\mathbf{g}_t=T^{ijkl}S^{rst}\left(\mathbf{g}_k\cdot\mathbf{g}_s\right)\mathbf{g}_t\mathbf{g}_j\mathbf{g}_l\mathbf{g}_r\mathbf{g}_t$

飞行力学的应用

高超声速飞行器再入动力学模型



上述的场景中有三个坐标系：地心地固系（地球坐标系）E，地理坐标系 G（北-东-地），以及飞行器坐标系（北-东-地），后面两个坐标系的差别仅是在定义的位置，一个原点在星下点，另一个原点在飞行器质心。

推导时考虑下述位置与速度描述：

- 经度、纬度、海拔高度：λ, ϕ, H
- 速度、弹道倾角、航向角：V, γ, ψ

首先推导从地心惯性系E到地理坐标系G的转换关系$[T]^{GE}$:

- (讲义中转换了三次，但实际上之用转换两次就ok)
- $\mathrm{E} \rightarrow R_z(\lambda) \rightarrow R_y(-(90^\circ + \phi)) \rightarrow G$
- 上述关系可以通过简单的几何变换得到，产生的旋转矩阵是：

$$[T]^{GE} = \begin{bmatrix} -\cos(\lambda)\sin(\phi) & -\sin(\lambda)\sin(\phi) & \cos(\phi) \\ -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) & 0 \\ -\cos(\lambda)\cos(\phi) & -\sin(\lambda)\cos(\phi) & -\sin(\phi) \end{bmatrix}$$

对于地球坐标系E下的动力学方程有，注意$\mathbf{s}_{BE}$是飞行器的位置矢量：

$$\left[\frac{\mathbf{ds}_{BE}}{\mathbf{d}t}\right]^E = \left[\mathbf{v}_B^E\right]^E$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_B^E}{\mathrm{d}t}\right]^E = \frac{1}{m}[F_{air}]^E + [g]^E - 2\left[\omega^E \times \mathbf{v}_B^E\right]^E - \left[\omega^E \times \omega^E \times s_{BE}\right]^E$$

利用几何学，将速度位置矢量分解，$R = H + R_e$:

$$[s_{BE}]^E = \begin{bmatrix} s_1^E \\ s_2^E \\ s_3^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\cos\phi\cos\lambda \\ R\cos\phi\sin\lambda \\ R\sin\phi \end{bmatrix}$$

$$\left[\mathbf{v}_B^E\right]^G = \begin{bmatrix} v_1^G \\ v_2^G \\ v_3^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V\cos\gamma\cos\psi \\ V\cos\gamma\sin\psi \\ -V\sin\gamma \end{bmatrix}$$

位置微分方程

对于位置s_{BE}首先进行线性化处理：

$$\begin{aligned} [\Delta s_{BE}]^E &= \left[\frac{\partial \mathbf{s}_{BE}}{\partial R}\right]^E \Delta R + \left[\frac{\partial \mathbf{s}_{BE}}{\partial \lambda}\right]^E \Delta\lambda + \left[\frac{\partial \mathbf{s}_{BE}}{\partial \phi}\right]^E \Delta\phi \\ &= [\mathbf{g}_R]^E \Delta R + [\mathbf{g}_\lambda]^E \Delta\lambda + [\mathbf{g}_\phi]^E \Delta\phi \end{aligned}$$

其中：

$$[\mathbf{g}_R]^E=\begin{bmatrix}\cos\phi\cos\lambda\\ \cos\phi\sin\lambda\\ \sin\phi\end{bmatrix},\quad [\mathbf{g}_\lambda]^E=\begin{bmatrix}-R\cos\phi\sin\lambda\\ R\cos\phi\cos\lambda\\ 0\end{bmatrix},\quad [\mathbf{g}_\phi]^E=\begin{bmatrix}-R\sin\phi\cos\lambda\\ -R\sin\phi\sin\lambda\\ R\cos\phi\end{bmatrix}$$

这样形成了一个**局部的协变基矢量组**，构成一个局部坐标系L_1，这样对于Δs_{BE}:

$$[\Delta s_{BE}]^E=[\Delta s_1^E,\Delta s_2^E,\Delta s_3^E]^T$$
$$[\Delta s_{BE}]^{L_1}=[\Delta R,\Delta\lambda,\Delta\phi]^T$$

现在需要寻找L_1坐标系和地球坐标系E的转换关系，首先求解上述协变基的**逆变基矢量**：

$$[g^R]^E=\begin{bmatrix}\cos\phi\cos\lambda\\ \cos\phi\sin\lambda\\ \sin\phi\end{bmatrix},\quad [g^\lambda]^E=\frac{1}{R\cos\phi}\begin{bmatrix}-\sin\lambda\\ \cos\lambda\\ 0\end{bmatrix},\quad [g^\phi]^E=\frac{1}{R}\begin{bmatrix}-\sin\phi\cos\lambda\\ -\sin\phi\sin\lambda\\ \cos\phi\end{bmatrix}$$

注意到，由于上述的协变基是正交但不是单位矢量，可根据$g_i\cdot g^i=1$的特性快速求解。

若是一般情况，需要使用下述方程组求解：

- $g^1=\frac{1}{\sqrt{g}}(g_2\times g_3)$
- $g^2=\frac{1}{\sqrt{g}}(g_3\times g_1)$
- $g^3=\frac{1}{\sqrt{g}}(g_1\times g_2)$

求解得到逆变基矢量后，可以将其组合为两个坐标系下的旋转矩阵：

$$[T]^{L_1E}=\begin{bmatrix}\mathbf{e_1}\cdot\mathbf{g}^R & \mathbf{e_2}\cdot\mathbf{g}^R & \mathbf{e_3}\cdot\mathbf{g}^R\\ \mathbf{e_1}\cdot\mathbf{g}^\lambda & \mathbf{e_2}\cdot\mathbf{g}^\lambda & \mathbf{e_3}\cdot\mathbf{g}^\lambda\\ \mathbf{e_1}\cdot\mathbf{g}^\phi & \mathbf{e_2}\cdot\mathbf{g}^\phi & \mathbf{e_3}\cdot\mathbf{g}^\phi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\phi\cos\lambda & \cos\phi\sin\lambda & \sin\phi\\ \frac{-\sin\lambda}{R\cos\phi} & \frac{\cos\lambda}{R\cos\phi} & 0\\ \frac{-\sin\phi\cos\lambda}{R} & \frac{-\sin\phi\sin\lambda}{R} & \frac{\cos\phi}{R}\end{bmatrix}$$

可以注意到，对于这个旋转矩阵，实际上是：

$$[T]^{L_1E}=\begin{bmatrix}\overline{g^R}\\ \overline{g^\lambda}\\ \overline{g^\phi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\hat{\mathbf{R}}_{L_1})_E^T\\ (\hat{\lambda}_{L_1})_E^T\\ (\hat{\phi}_{L_1})_E^T\end{bmatrix}$$

那么现在对式子进行整理，可以得到：

$$\begin{bmatrix}\dot{R}\\ \dot{\lambda}\\ \dot{\phi}\end{bmatrix}=[T]^{L_1E}[\overline{T}]^{GE}[\mathbf{v}_B^E]^G=T_{L1E}T_{EG}(\mathbf{v}_B^E)_G=\begin{bmatrix}V\sin\gamma\\ \frac{V\cos\gamma\sin\psi}{R\cos\phi}\\ \frac{V\cos\gamma\cos\psi}{R}\end{bmatrix}$$

至此，完成了基于经度、纬度等广义坐标的位置微分方程的建立

速度微分方程

由于课时有限，不讲，直接给出结果：

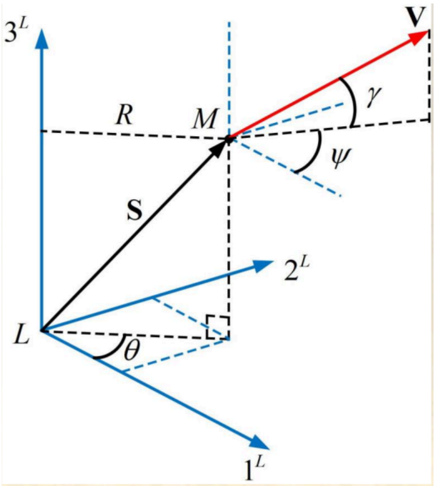
速度：$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\frac{D}{m}-g\sin(\gamma)+\omega_e^2(R_e+H)\cos^2(\phi)\sin(\gamma)$$
$$-\omega_e^2(R_e+H)\sin(\phi)\cos(\phi)\cos(\gamma)\cos(\psi)$$

弹道倾角：$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{V}\left[\frac{L\cos(\sigma)}{m}-g\cos(\gamma)+\frac{V^2\cos(\gamma)}{R_e+H}+\omega_e^2(R_e+H)\cos^2(\phi)\cos(\gamma)\right.$$
$$\left.+2V\omega_e\cos(\phi)\sin(\psi)+\omega_e^2(R_e+H)\sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\gamma)\cos(\psi)\right]$$

航向角：$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{V}\left[\frac{L\sin(\sigma)}{m\cos(\gamma)}+\frac{V^2\cos(\gamma)\sin(\psi)\tan(\phi)}{R_e+H}+\frac{\omega_e^2(R_e+H)\sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\psi)}{\cos(\gamma)}\right.$$
$$\left.+2V\omega_e\sin(\phi)-2V\omega_e\cos(\phi)\tan(\gamma)\cos(\psi)\right]$$

由于课时有限，缺乏完整张量知识来推导上述公式，接下来我们讨论一个相对简单的情况。

基于柱坐标的战术导弹飞行动力学模型



导弹位置的描述有两种方式：

- L系下的描述：$\mathbf{S}^L=[s_1^L,s_2^L,s_3^L]^T$
- 柱坐标描述：R(径向距离)$,\theta,s_3^L$

导弹的速度同样两种描述方式：

- L系下的描述：$\mathbf{V}^L=[v_1^L,v_2^L,v_3^L]^T$
- 球坐标描述：V,γ,ψ

相似地，有如下动力学模型描述：

$$\left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{S}}{\mathrm{d}t}\right]^L=\mathrm{V}^L$$
$$\left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t}\right]^L=\frac{1}{m}\mathrm{F}_T^L+\frac{1}{m}\mathrm{F}_{air}^L+\mathrm{g}^L$$

依旧通过几何关系建立L坐标和广义坐标之间的联系：

- $\mathbf{S}^L=[R\cos\theta,R\sin\theta,s_3^L]^T$
- $\mathbf{V}^L=[V\cos\gamma\cos\psi,V\cos\gamma\sin\psi,V\sin\gamma]^T$

位置微分方程

相似地，对$\mathbf{S}^L$进行线性化处理：

$$\Delta\mathbf{S}^L=\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{bmatrix}\Delta R+\begin{bmatrix}-R\sin\theta\\ R\cos\theta\\ 0\end{bmatrix}\Delta\theta+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\Delta s_3^L$$

上述的三个矩阵即为协变基向量组，记为$\mathbf{g}_R,\mathbf{g}_\theta,\mathbf{g}_{s_3^L}$，其形成的广义坐标系为$U$，寻找$L$到$U$的变换矩阵：

$$[T]^{UL}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta/R & \cos\theta/R & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

那么这样这里微分方程为：

$$\begin{bmatrix}\dot{R}\\ \dot{\theta}\\ \dot{s_3^L}\end{bmatrix}=[T]^{UL}[\mathbf{V}]^L=\begin{bmatrix}V\cos\gamma(\cos\psi\cos\theta+\sin\psi\sin\theta)\\ \frac{V\cos\gamma}{R}(-\cos\psi\sin\theta+\cos\psi\cos\theta)\\ V\sin\gamma\end{bmatrix}$$

速度微分方程

首先对$\mathbf{V}^L$线性化得到：

$$\Delta\mathbf{V}^L=\begin{bmatrix}\cos\gamma\cos\psi\\ \cos\gamma\sin\psi\\ \sin\gamma\end{bmatrix}\Delta V+\begin{bmatrix}-V\sin\gamma\cos\psi\\ -V\sin\gamma\sin\psi\\ V\cos\gamma\end{bmatrix}\Delta\gamma+\begin{bmatrix}-V\cos\gamma\sin\psi\\ V\cos\gamma\cos\psi\\ 0\end{bmatrix}\Delta\psi$$

然后同样地，寻找L到上述协变基向量组构成的广义坐标Q的变换矩阵：

$$[T]^{QL}=\begin{bmatrix}\cos\gamma\cos\psi & cos\gamma\sin\psi & sin\gamma\\ -\sin\gamma\cos\psi/V & -\sin\gamma\sin\psi/V & \cos\gamma/V\\ -\frac{\sin\psi}{V\cos\gamma} & \frac{\cos\psi}{V\cos\gamma} & 0\end{bmatrix}$$

那么同样的，这边有：

$$\begin{bmatrix}\dot{V}\\ \dot{\gamma}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}=[T]^{QL}\begin{bmatrix}\dot{\nu}_1^L\\ \dot{\nu}_2^L\\ \dot{\nu}_3^L\end{bmatrix}=[T]^{QL}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t}\right]^L$$

前面关于飞行器的加速度的表述有：

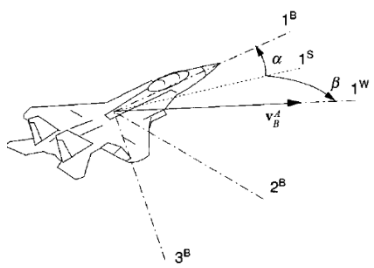
$$\left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t}\right]^L=\frac{1}{m}\,\mathrm{F}_T^L+\frac{1}{m}\,\mathrm{F}_{air}^L+\ \mathrm{g}^L$$

三个力的表述和转换

推力在本体系B下沿着X轴：$F_T^B=[F_T,0,0]^T$

气动力在航迹系V下分解：$F_{air}^V=[-F_D,F_Z,-F_L]^T$

重力在L系下：$g^L=[0,0,-g]^T$



从本体系B转化到航轨系V需要两次旋转：绕y轴旋转$-\alpha$，绕z轴旋转β：

$$[T]^{VB}=R_z(\beta)R_y(-\alpha)$$

从航迹系V转化到柱坐标系同样需要两次旋转：绕y轴旋转$-\gamma$，绕z轴旋转ψ:

$$[T]^{LV} = R_z(\psi)R_y(-\gamma)$$

基于上述的旋转矩阵和关系，可以最终将三个力转换到广义坐标Q下，并得到最终的动力学方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} F_T\cos\alpha\cos\beta \\ F_T\sin\alpha/V \\ F_T\cos\alpha\sin\beta/(V\cos\gamma) \end{bmatrix} + \frac{1}{m}\begin{bmatrix} -F_D \\ F_L/V \\ F_Z/(V\cos\gamma) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -g\sin\gamma \\ -g\cos\gamma/V \\ 0 \end{bmatrix}$$

场论

场论基础

定义：设在空间某个区域内的任意一点上，都定义了某个物理量（函数），则称定义在该空间域内的物理量（函数）为场。

标量场、矢量场、张量场

等值线，即等高线

矢量线：沿着每一点的切线方向：$dr \times V = 0$

微分算子

哈密顿算子

- $$\nabla = \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$
- 哈密顿算子即具有矢量的特性，又是一个微分算子

拉普拉斯算子

- $$\Delta = \nabla^2$$
- $$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= \left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi \\ &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \Delta\phi\end{aligned}$$

场论的三度

梯度

- $$\nabla\phi = \vec{\imath}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} = grad\phi$$
- 梯度在任意方向上的投影为该方向的方向导数
  - $$\frac{\partial\phi}{\partial\vec{s}} = \nabla\phi\cdot\vec{s}^0$$
  - 等式左侧$\frac{\partial\phi}{\partial\vec{s}}$即为方向$\vec{s}$上的方向导数，有下面定义式：
  - $$\frac{\partial\phi}{\partial\vec{s}} = \lim_{MM'\to 0}\frac{\phi(M') - \phi(M)}{MM'}$$
  - 等式右侧即为梯度$\nabla\phi$在$\vec{s}$上的投影。
- 梯度的方向，是等势面的法线方向，是位势函数变化最快的方向，且指向函数值增加的方向。
- 定理1：$d\phi = d\vec{r}\cdot\mathrm{grad}\phi$
- 定理2：若$\vec{a} = \mathrm{grad}\phi$，那么沿封闭曲线的线积分：$\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{r} = 0$

散度

- $$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{a} &= \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\vec{i}a_x+\vec{j}a_y+\vec{k}a_z\right)\\ &= \frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=div\vec{a}\end{aligned}$$
- 散度的意义：矢量$\mathbf{a}$通过单位体积元V的界面处外表面S的通量。
    - $$\nabla\cdot\mathbf{a}=\lim_{V\to 0}\frac{\oint_S a_n ds}{V}$$
    - 上述表达式可通过奥-高定理代入后证明

旋度

- $$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{a} &= \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(\vec{i}a_x+\vec{j}a_y+\vec{k}a_z\right)\\ &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=rot\vec{a}\end{aligned}$$
- 矢量的环量
    - $$\Gamma=\oint_L\vec{a}\cdot d\vec{r}\quad=\oint_L(a_xdx+a_ydy+a_zdz)$$
    - $$\mu_n=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta s}=rot\vec{a}\cdot\vec{n}$$
    - 若在矢量场$\vec{a}$中有一点M存在这样一个矢量，沿其方向的环量面密度最大，这个最大值为该矢量的模，则称该矢量为矢量场在M处的旋度。

两个公式

奥-高公式：连接面积分与体积分

$$\oint_S a_n ds=\int_V\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dV=\int_V\nabla\cdot\mathbf{a}\,dV$$

- 矢量$\mathbf{a}$通过某个封闭曲面S的通量 = 函数在体积V上的积分

斯托克斯公式：连接线积分与面积分

$$\oint_L\vec{a}\cdot d\vec{r}=\int_S rot\vec{a}\cdot d\vec{S}$$

- 矢量场沿闭合曲线L的环量，等于该矢量场的旋度在以L为边界的任意曲面S上的通量。

三种场

无源场/管形场

- 矢量场$\mathbf{a}$满足：$\nabla\cdot\mathbf{a}=0$
- 若$\nabla\cdot\mathbf{a}>0$，单位体积内场的净流出量大于零，为源，水流场中的水龙头
- 若$\nabla\cdot\mathbf{a}<0$，单位体积内场的净流出量大于负，为汇，水流场中的下水道
- 无源矢量是 “单个矢量的属性”，无源场是 “整个区域内无源矢量构成的场”
- 无源矢量经过矢量管任一横截面上的通量保持同一数值。
- 无源场穿过以同一闭合周线为边界的任意曲面的通量都相等，仅由周线本身决定，与曲面形状无关。

无旋场/有势场

- 矢量场$\mathbf{a}$满足：$\nabla\times\mathbf{a}=0$
- ϕ是$\mathbf{a}$的位势函数，$\mathbf{a}=\nabla\phi$

调和场

- 矢量场$\mathbf{a}$满足： $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ 以及 $\nabla \times \mathbf{a} = 0$
- 即无源也无旋的矢量场，满足拉普拉斯方程：
    - $\Delta\phi = \nabla^2\phi = 0$，其中$\phi$是$\mathbf{a}$的势函数，$\mathbf{a} = \nabla\phi$
- $\Delta\phi$称为调和量/调和函数

笛卡尔张量分析基础

张量的定义及表示法

定义：坐标变换时，能够自身转化而保持不变性的量的统称

表示方法：

- 实体法：标量u， 矢量$\mathbf{a}, \vec{a}$， 二阶张量/矩阵 A
- 基向量法：$a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$
- 分量法：$(a_1\ a_2\ a_3)$
- 指标法：a_i

指标表示法：

- 自由标：可以在默认范围内任意取值的指标：A_{ij}
- 哑标：在同一项中，如果有两个指标相同，则表示对此指标从1到3求和。求和标称为哑标：$\sum_{j=1}^{3}\mu_j F_j = \mu_j F_j$

用坐标变换定义张量

- 标量ϕ:
    - 新旧坐标系下，单个标量在某个点M处保持不变
    - $\phi(M) = \phi'(M')$
- 矢量$\mathbf{a}$:
    - 老坐标系下分量列阵：$(\mathbf{a})_{老} = [a_1, a_2, a_3]^T$
    - 新坐标系下分量列阵：$(\mathbf{a})_{新} = [a'_1, a'_2, a'_3]^T$
    - 对于同一个向量$\mathbf{a}$，满足新老坐标系的转化关系：
    - $$a'_i = \alpha_{ij}a_j$$ $$a_i = \beta_{ij}a'_j$$
- 二阶张量P:
    - 老坐标系9个有序排列的量, 转换为新坐标系9个有序排列的量:
    - $p'_{ij} = \alpha_{il}\alpha_{jm}p_{lm}$

两个运算符

克罗内克符号

- $\delta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \begin{cases} 1(i=j) \\ 0(i \neq j) \end{cases}$
- 基本性质
    - $\delta_{ii} = 3$
    - 对称性：$\delta_{ij} = \delta_{ji}$
    - 置换特性：$\delta_{ij}a_j = a_i$，$\delta_{ik}p_{kj} = p_{ij}$

置换符号

- $$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \quad i,j,k\text{正排序} \\ -1 \quad i,j,k\text{逆排序} \\ 0 \quad i,j,k\text{不成排列} \end{cases}$$

- 基本性质
  - $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji}$
  - $\varepsilon - \delta$恒等式：$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ist} = \delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks}$ (顺序项乘积-交叉项乘积)

各项同性张量

- 若n阶张量的每个分量都是旋转坐标下的不变量，则其为n阶各项同性张量
  - δ_{ij}和ε_{ijk}都是各项同性张量
  - 零阶张量（标量）都是各项同性的
  - 一阶张量（矢量）除零张量外，都是各向异性的
  - 二阶各向同性张量的形式必为：$p_{ij} = \lambda\delta_{ij}$，其中$\lambda$为标量
  - 三阶各向同性张量的形式必为：$p_{ijk} = \lambda\varepsilon_{ijk}$，其中$\lambda$为标量

张量的运算

矢量运算的张量表示

- 矢量相加减：$\mathbf{c} = \mathbf{a} \pm \mathbf{b} = a_i \pm b_i$
- 矢量点积：$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$
- 矢量叉积：$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$
- 哈密顿算子：$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}$
- 拉普拉斯算子：$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$
- 梯度：$\nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$
- 散度：$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$
- 旋度：$\nabla \times \mathbf{a} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \mathbf{e_i}$

张量的外积/并矢

对于P与Q的外积/并矢：

- $P = p_{i_1 i_2 \ldots i_m}$
- $Q = q_{j_1 j_2 \ldots j_n}$
- $$S = P \otimes Q = PQ = p_{i_1 i_2 \cdots i_m} q_{j_1 j_2 \cdots j_n} = s_{\underbrace{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n}_{n+m\text{个下标}}}$$

张量的内积/缩并

若一个n阶张量P有两个下标是相同的，那么可以缩并成$n-2$的量

二阶张量与矢量内积，结果为矢量：

- $P \cdot \vec{a} = p_{ij} a_j = b_i$
- $\vec{a} \cdot P = a_i p_{ij} = c_j$

二阶张量与二阶张量内积，结果为二阶张量：

- $S = P \cdot Q = p_{ik} q_{kj} = s_{ij}$

二阶张量与二阶张量两次内积，结果为标量：

- $S = P \cdot \cdot Q = p_{ij} q_{ji} = s_{ii} = \phi$

张量的微分运算

- 对坐标求导一次，张量增加一阶
- $gradP = \nabla P = \frac{\partial p_{i_1 i_2 \cdots i_n}}{\partial x_k} = q_{i_1 i_2 \cdots i_n, k}$
- $divP = \nabla \cdot P = \frac{\partial p_{k i_2 \cdots i_n}}{\partial x_k}$

张量识别定理

- 某个张量与n阶张量的**内积**为m阶张量，那么这个张量必定为$n+m$阶
- 某个张量与n阶张量的**外积**为$n+m$阶张量，那么这个张量必定为m阶

二阶张量

这一部分先暂时放一下

流体力学应用

流体力学基本概念

连续介质假说：流体是连续的，微观上是分子；把流体视为由流体质点无间隙地充满它所占据的整个空间的一种连续介质

速度分解定理

- 由于流体中各质点的相对位置是变化的，所以不具有同刚体一样的速度公式
- 在一个流体的邻域内（流体微团）内可以把某点速度展成泰勒级数形式
- Helmholtz速度分解定理
  - **流体微团运动 = 平移 + 转动 + 变形**
  - $V = V_0 + \omega \times \delta r + S \cdot \delta r$
  - S称为变形速度张量

变形速度张量

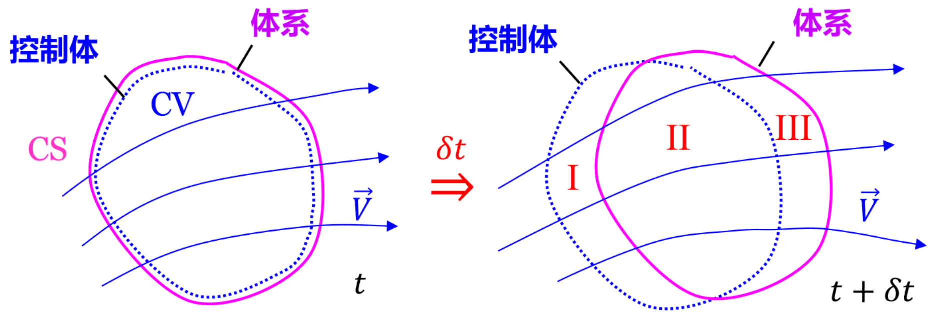
- 变形速度张量为一个二阶对称张量，可以唯一地分解为对称和反对称矩阵：
- $$S = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) & 0 \end{pmatrix}$$
- **流体微团变形 = 线变形 + 角变形**
- 对任意流体微团来说，**总存在一个正交直角坐标**系（主轴系），在该坐标系下，流体微团的变形只有**线变形**。
- 变形速度张量存在三个基本不变量，其中对于I_1即为流体微元的体积相对膨胀量：
- $$I_1 = tr(S) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \mathrm{div}\mathbf{V}$$

应力张量

- 流体受到的力可分为质量力与表面力：
  - 质量力：外力场作用于流体微团质量中心，如重力和惯性力
  - 表面力：相邻流体或物体作用于所研究流体团块外表面，如大气压力
- 流体受到的表面力可分解为正应力与切应力：$p = \sigma\vec{n} + \tau\vec{t}$
- 牛顿平板试验得到流体受力与微团之间的变形率之间的关系：$\tau = \mu\frac{du}{dy}$
- 流场中任意一点的应力，可以由三个坐标轴方向的应力完全描述，即一个二阶应力张量
- $$P = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}$$
- 应用流体力学的假设，可以得到应力张量的表达式为：
- $$p_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\left(s_{ij} - \frac{1}{3}s_{kk}\delta_{ij}\right)$$
  $$P = -pI + 2\mu\left(S - \frac{1}{3}Idiv\vec{V}\right)$$
- 可以看到，对于静止的或无粘流体而言：$P = -\delta_{ij}p$, 这里p是流体压力

雷诺输运定理

- 使用雷诺输运定理，追踪一个选定的流体系统的运动历程



流体体系与控制体

- **雷诺输运定理**：
  - 对于某瞬间控制体内的流体所构成的体系：
  - **物理量的随流导数 = 物理量的增加率 + 物理量的净流出率**
  - $$\frac{DN_s}{Dt} = \iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\sigma\rho)d\tau + \oint_{CS} \sigma\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}$$
  - 其中N为流体具有的某物理量，例如质量m
  - σ为单位流体具有的N，若取$N=m$，则$\sigma=1$

流体力学控制方程

连续方程

- $$\iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t}\rho d\tau + \oint_{CS} \rho\vec{V}\cdot d\vec{S} = 0$$
- $$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{V}) = 0$$
- 物理意义即为质量守恒，流入控制体和流出控制体的质量守恒

动量方程

- $$\iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V})d\tau + \oint_{CS}(\rho\vec{V})(\vec{V}\cdot d\vec{S}) = \iiint_{CV} \rho\vec{R}d\tau + \oint_{CS} P\cdot d\vec{S}$$
- $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + div(\rho\vec{V}\vec{V}) = \rho\vec{R} + divP$$
- 其中R是单位质量力矢量，P是表面力张量
- 物理意义即为牛顿第二定律，动量守恒

能量方程

- 用功率形式表述热力学第一定律：$\dot{Q} = \frac{DE}{Dt} + \dot{W}$
- **换热功率=体系所贮存的总能量的增加率+体系对外界输出功率**
- $$\iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}V^2+u\right)\right]d\tau + \oint_{CS} \rho\left(\frac{1}{2}V^2+u\right)\vec{V}\cdot d\vec{S} = \iiint_{CV}(\rho\vec{R}\cdot\vec{V})d\tau + \oint_{CS} P\cdot\vec{V}\cdot d\vec{S} + \oint_{CS} kgradT\cdot d\vec{S} + \iiint_{CV} \rho q$$
- $$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}V^2+u\right)\right] + div\left[\rho\left(\frac{1}{2}V^2+u\right)\vec{V}\right] = \rho\vec{R}\cdot\vec{V} + div\left(P\cdot\vec{V}\right) + div(kgradT) + \rho q$$
- 物理意义即为能量守恒，能量方程有多种表达形式

N-S方程组

- 即上述三个方程构成的方程组，描述流体运动的一般规律：

$$
\begin{cases}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{V}) = 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \vec{V}\right) + div\left(\rho \vec{V}\vec{V}\right) = \rho \vec{R} + divP \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_t) + div(\rho e_t \vec{V}) = \rho \vec{R} \cdot \vec{V} + div(P \cdot \vec{V}) + div(kgradT) + \rho q
\end{cases}
$$

- $\vec{V}$是流体速度，T是流体温度，ρ是流体密度
- k是流体热传导系数，q是单位质量流体的内热源强度（化学/核反应）
- P是表面力张量，e_t是单位质量流体的总能量（u是单位质量的内能）：

$$
P = -pI + 2\mu\left(S - \frac{1}{3}Idiv\vec{V}\right)
$$

$$
e_t = \left(\frac{1}{2}V^2 + u\right)
$$

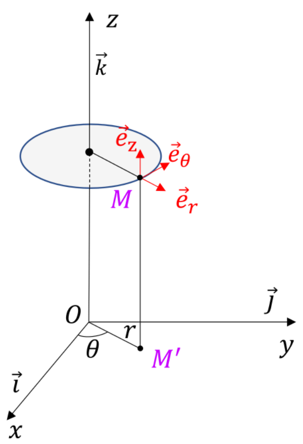
- R是单位质量力矢量：

$$
\vec{R} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}
$$

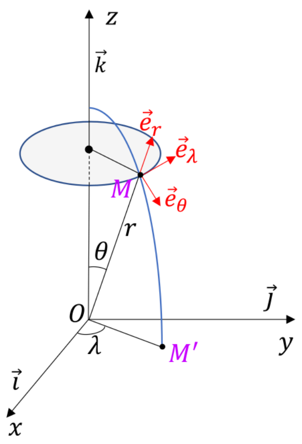
正交曲线坐标系下的控制方程

曲线坐标系

- 在笛卡尔坐标系中，三个曲面的某个交点沿着三个曲面方向的构成的坐标系。
- 曲线坐标系三个方向的单位矢量，随着空间点的不同是不同的，方向发生变化。
- 常见的正交曲线坐标系：柱坐标系、球坐标系



柱坐标系



球坐标系

基矢量与拉梅系数

- 曲线坐标系上的弧元矢量：$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}dq_i = d\mathbf{s}_i$
- 拉梅系数：
  - 表示沿着坐标轴的弧长$|\partial \mathbf{r}|$与坐标增量∂q_i的比值
  - $$h_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$
- 对于弧长：
  - $d\mathbf{r} = h_1 dq_1 \vec{e}_1 + h_2 dq_2 \vec{e}_2 + h_3 dq_3 \vec{e}_3$
- 对于面积：
  - $dS_1 = h_2 h_3 dq_2 dq_3$
  - $dS_2 = h_1 h_3 dq_1 dq_3$
  - $dS_3 = h_1 h_2 dq_1 dq_2$

- 对于体积：
    - $dV = h_1 h_2 h_3 3 dq_1 dq_2 dq_3$
- 对于柱坐标的拉梅系数：$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1$
- 对于球坐标的拉梅系数：$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r\sin\theta$

柱坐标系下流体力学NS方程推导

暂时跳过这部分