《前沿数学方法及其在航天工程中的应用》

张量在流体力学中的应用

授课教师：陈 兵

北京航空航天大学 / 宇航学院 / 推进系 / 高超声速推进实验室
航天液体动力全国重点实验室

第二部分：张量在流体力学中的应用

一. 场论与笛卡尔张量分析

二. 流体力学控制方程

三. 正交曲线坐标系下的控制方程

二、流体力学控制方程

- 流体力学基本概念
- 流体力学控制方程

2.1 流体力学基本概念

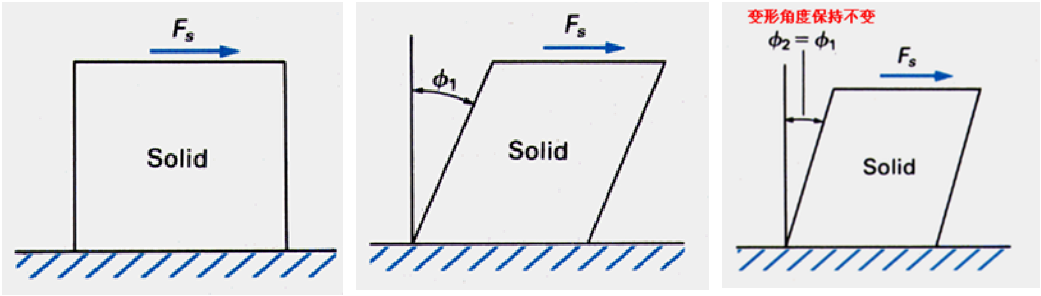
- 连续介质假说
- 速度分解定理
- 变形速度张量
- 应力张量
- 雷诺输运定理

2.1 流体力学基本概念

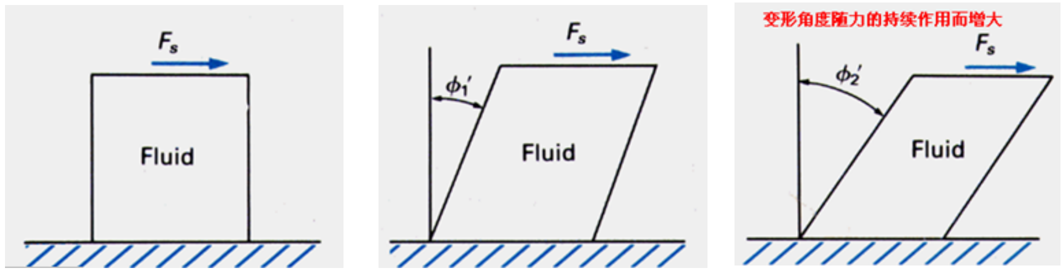
① 连续介质假说

■ 什么是流体

固体受力：可以以一定的变形抵抗外力的作用；剪切(切向)力不变，则变形量不变



流体受力：流体在外部剪切力/切向力的作用下连续的变形(即流动)；或者讲,流体只有在流动的情况下才能抵抗剪切力的作用



易流动性

流体在静止时不能承受切向力,不管多小的切向力,只要连续施加,都会使流体发生任意大的变形,叫易流动性。

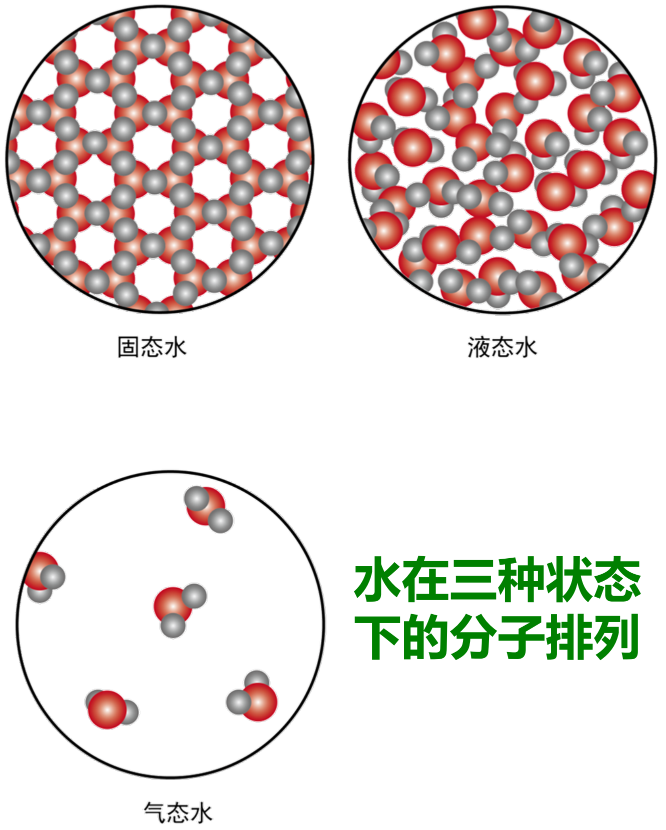
这主要是分子力的作用结果:

- 固体分子间的作用较强，当外界有力作用于固体时，它可以作微小变形，然后承受住切应力不再变形;
- 而在液体和气体中，分子间的作用较弱或很弱，只要很小的切应力，都可使它们产生任意大的变形。

2.1 流体力学基本概念

① 连续介质假说

■ 什么是流体



水在三种状态下的分子排列

物质三态的力学特征对比表

	分子间距	分子力和分子位置	压缩性	形状	受力
固体	约为分子直径	引力斥力平衡 束缚于晶格结构	很难	固定形状	压力;拉力;剪力
液体	约为分子直径	引力斥力平衡 但平衡位置可动	难压缩	受容器限制	压力
气体	10倍分子直径	引力斥力都很小,无平衡位置	易被压缩	受容器限制	压力

液体和气体的共同点：

两者均具有易流动性，即在任何微小切应力作用下都会发生变形（或称为流动），故二者统称为流体。

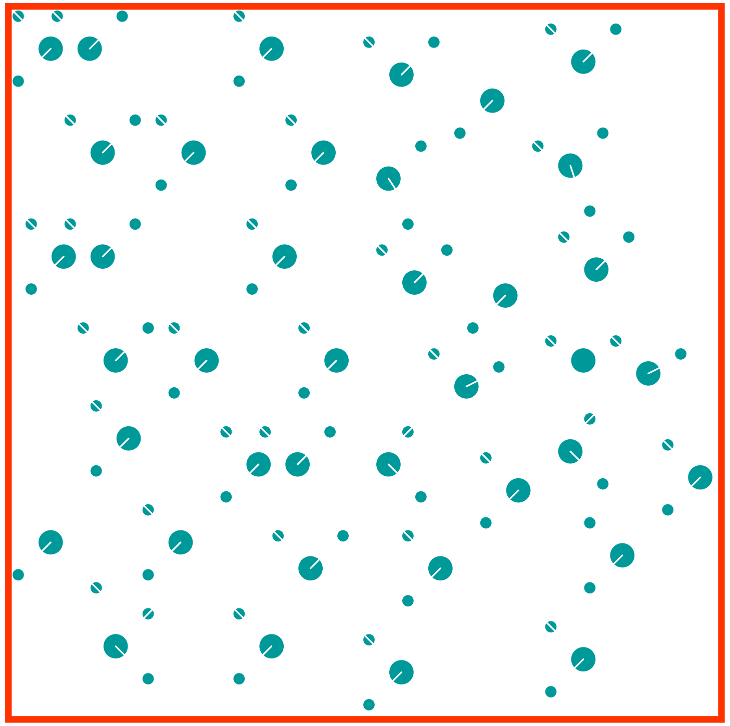
流体和固体的力学性能区别: 对外力抵抗的能力不同

- 固体：既能承受压力，也能承受拉力和剪切力、抵抗拉伸和剪切变形。
- 流体：只能承受压力，不能承受拉力和剪切力,不能抵抗拉伸和剪切变形。

① 连续介质假说

■ 连续介质假说

流体的宏观图景



流体的微观图景

- ■ 微观：流体是由大量做无规则运动的分子组成的，分子之间存在空隙。
- ■ 比如，$1cm^3$液体和气体里的分子数和分子间距是：
  - ✓ 水中含有3.3×10^{22}个左右的分子，相邻分子间的距离约为3.1×10^{-10}m。
  - ✓ 空气中含有2.7×10^{19}个左右的分子，相邻分子间的距离约为3.2×10^{-9}m。

- ◻ 流体是由分子或原子所组成，分子或原子每时每刻都在作无规则的热运动。
- ◻ 分子作用力是“短程力”，液体分子直径一般在10^{-10}m量级，分子有效作用半径在10^{-8}m量级。

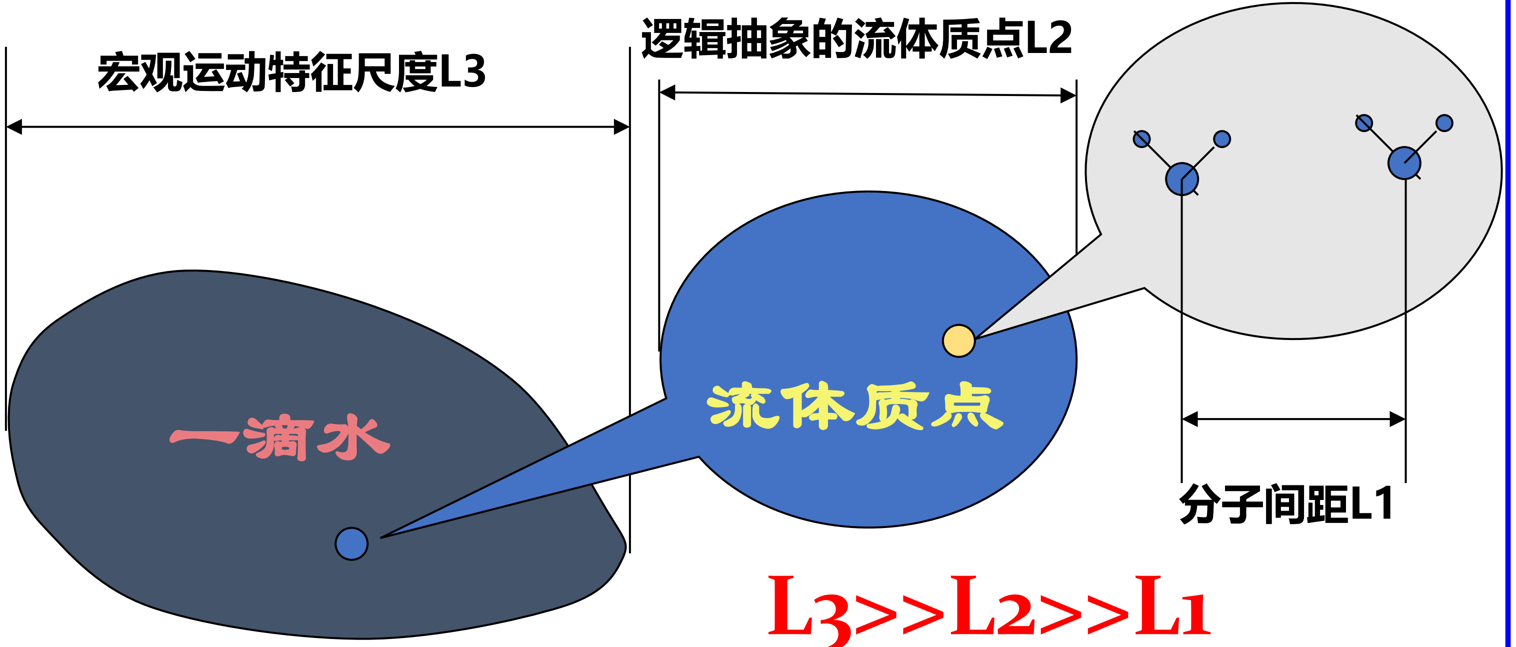
① 连续介质假说

■ 连续介质假说

在研究流体力学规律时，人们感兴趣的不是流体的这种微观上的分子热运动，而是由外部原因，如重力、压力差等作用引起的宏观上的整体定向运动。

引入概念**流体质点**：

指的是微观上无穷大，宏观上充分小的分子团。



$L_3 >> L_2 >> L_1$

$L_2 >> L_1$

流体质点包含大量的分子，少数分子的进出不影响整个分子团各种参数的统计平均值

$L_3 >> L_2$

可以把它近似地看成是几何上的一个点，每种物理量都可看成是均匀分布的常量

流体质点是流体力学中的无穷小！

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

① 连续介质假说

■ 连续介质假说

连续介质模型：

把流体**视为**由**流体质点无间隙地充满**它所占据的整个空间的一种**连续介质**，且其所有的*物理量都是空间坐标和时间的连续函数的一种假设模型*。该模型由Euler于1753年提出。

流体的宏观图景

连续介质模型的作用：

- ✓ 可以把数学上的**场论**和**微积分手段**应用于流体上了；
- ✓ 使人们从分子运动的复杂性中解放出来。

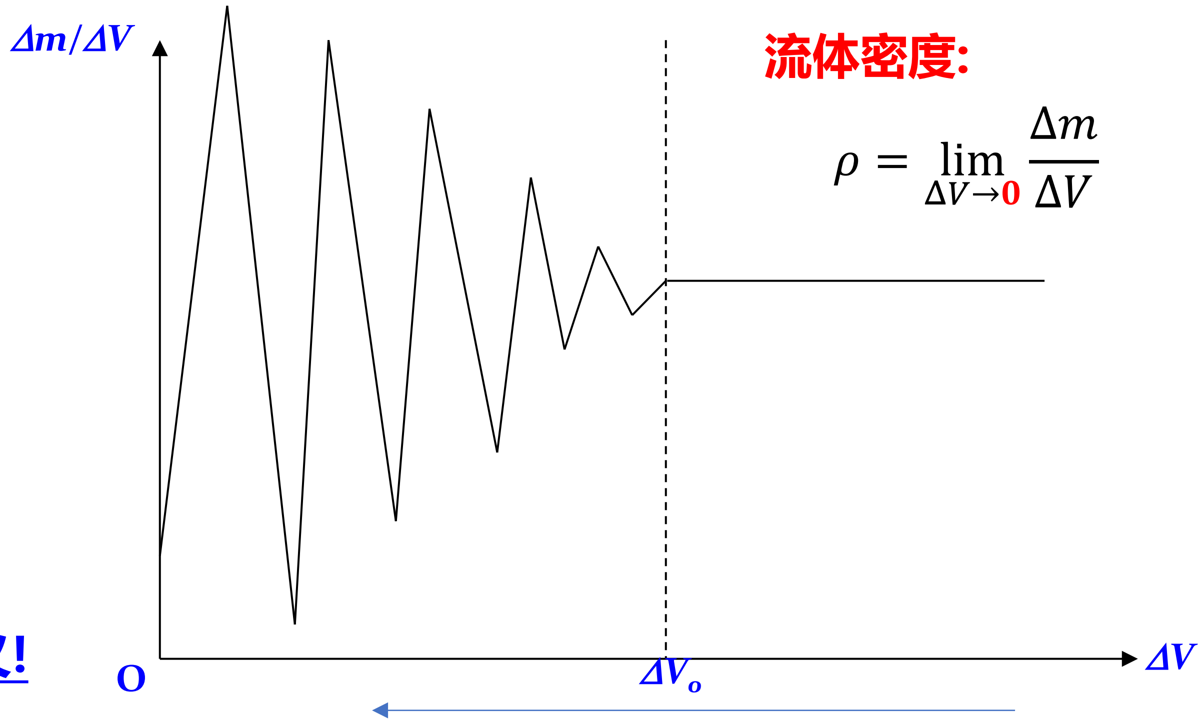
2.1 流体力学基本概念

① 连续介质假说

■ 描述流体的物理量

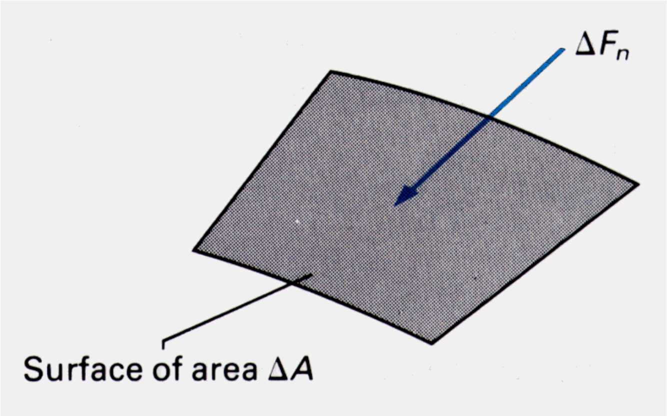
流体的各种性质，如密度等，只有对**流体质点分子团进行统计平均**后才能得到**稳定的数值**，少数分子出入分子团不影响稳定的平均值。

<u>**流体的所有物理量只有定义在流体质点上才有意义!**</u>



流体密度:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$



流体压强:

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A}$$

$$\Delta A \approx (\Delta V)^{2/3}$$

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

② 速度分解定理

■ 用什么方法来描述流体运动问题？（流体是由流体质点组成的）

✓ 将流体质点运动，与马路上的汽车进行对比，有何异同？

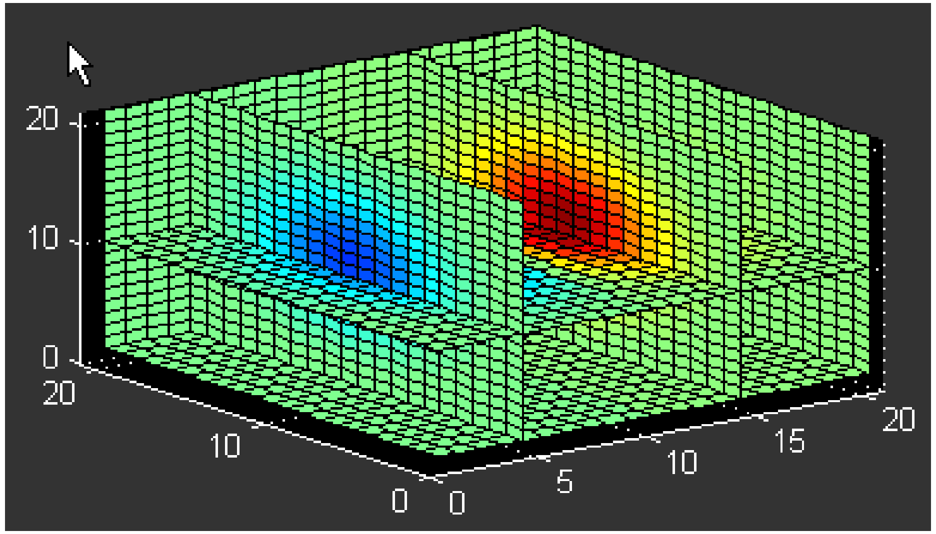
✓ 如何描述一段马路上的车流情况？

✓ 交管部门是如何监控交通拥堵状况的？

② 速度分解定理

■ 描述流体运动的欧拉法

- □ **欧拉法**着眼于空间点，在空间中的每一个点上描述出**流体运动随时间的变化状况**。如果每一空间点上的流体运动都已知道，则整个流体的运动状况也就清楚了。
- □ 一空间点上，**流体质点的性质**与**该点的流场性质**是相同的。
- □ 某时刻位于一个空间点上的**流体质点**的密度、压力、温度就是**流场**对应点、对应时刻的密度场、压强场、温度场上的对应值。
- □ 欧拉法中的变元是**空间坐标**和**时间变量**。
- □ 欧拉法中的定义得到的函数都是**场函数**，可以广泛的利用**场论**的知识。



温度场

② 速度分解定理

■ 刚体速度分解

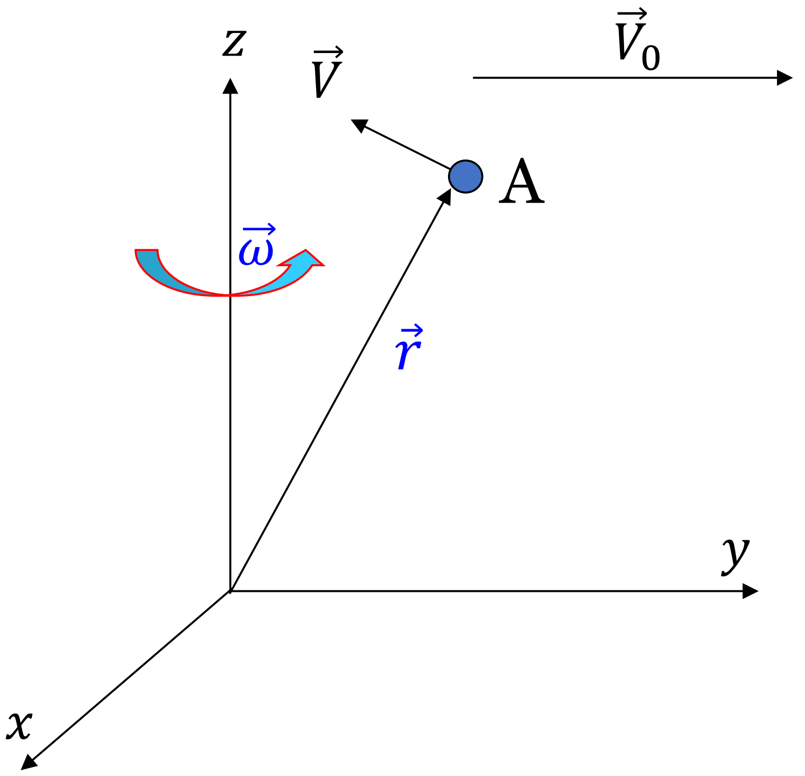
在理论力学中，如果知道了刚体**质心**的**平动速度**和**绕过质心转轴**的**角速度**，则利用质点的相对位置，就可以求得任何一点的速度

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

两大特点：

✓ 刚体上任意两个质点的相对位置不变

✓ 刚体上任意一点的速度分解为：**平动 + 转动**，且该分解式具有全局性。

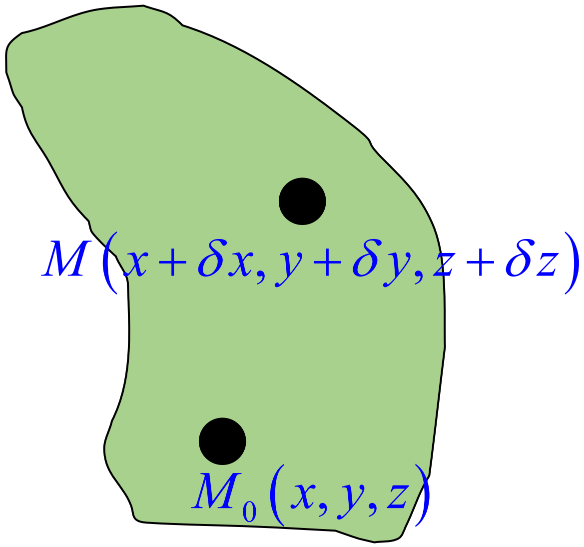


刚体运动分解

② 速度分解定理

■ 流体速度分解

- 由于流体中**各质点的相对位置是变化的**，所以不具有同刚体一样的速度公式。
- 已知一点速度，求几千米外的速度是不太可能的！
- 但至少在一个**小的邻域内**可以尝试一下把速度分解成几个部分来分别考虑。
- 在**流体微团**内可以把某点速度展成**泰勒级数**形式.
- **流体微团**概念
  - ✓ 由同一组流体质点组成的一小团质量（体积）流体，在运动过程中质量不变
  - ✓ 与流体质点相比，流体微团具有体积、形状。
  - ✓ 即使是在一个流体微团内，各个流体质点的相对位置会在运动中发生变化（不同于刚体）。这使得微团运动除**平移**、**旋转**外，还有**变形**。



流体运动分解

② 速度分解定理

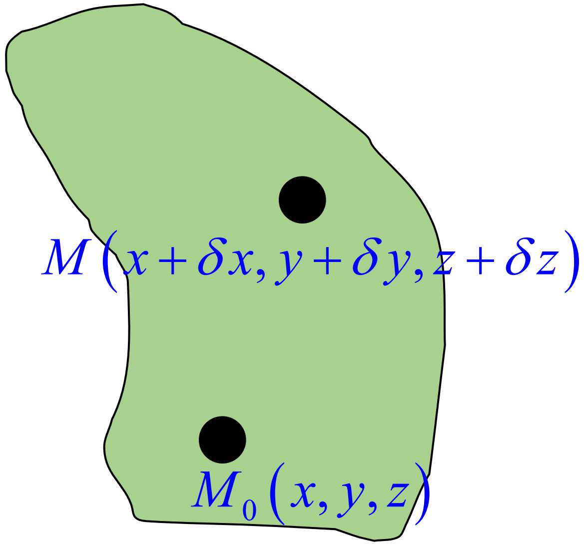
■ 流体速度分解

设M_0点速度为$\vec{V}_0$，**一阶泰勒级数**展开，获得M点的速度$\vec{V}$

$$v_x = v_{0x} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\delta z + O(\delta r)$$
$$v_y = v_{0y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v_y}{\partial z}\delta z + O(\delta r)$$
$$v_z = v_{0z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v_z}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v_z}{\partial z}\delta z + O(\delta r)$$

略去高价截断项，写成矢量形式

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\delta z$$



流体运动分解

或缩写成

$$v_i = v_{0i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta x_j \xrightarrow[\text{张量识别定理}]{v_i - v_{0i}\text{、}\delta x_j\text{均为任意矢量}} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\text{必为}\textbf{二阶张量}$$

② 速度分解定理

■ 流体速度分解

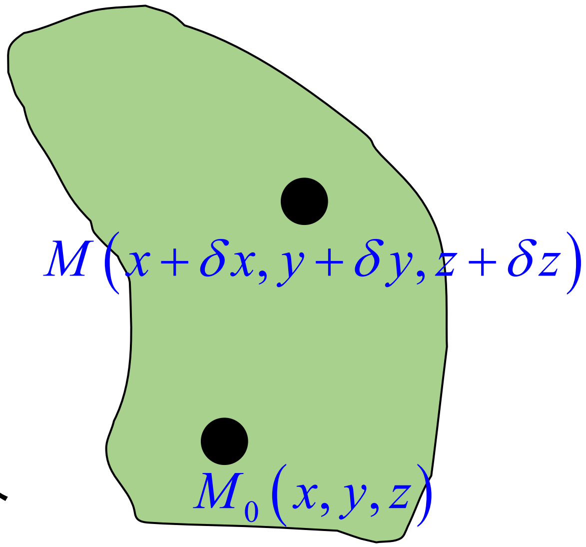
设M_0点速度为$\vec{V}_0$，**一阶泰勒级数**展开，获得M点的速度$\vec{V}$

进一步写成实体形式

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + D \cdot \delta\vec{r}$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

D为二阶张量：由9个**有序**数组成的集合



流体运动分解

下面应用**二阶张量的性质**，来进一步讨论该速度分解，揭示其内涵。

② 速度分解定理

■ 流体速度分解

任何一个二阶张量，可以分解为对称张量S和反对称张量A的和

$$D=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)=a_{ij}+s_{ij}=A+S$$

其中

$$S=\frac{D+D'}{2}=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\end{pmatrix}\right)$$

$$\varepsilon_i=\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

$$\gamma_i=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \gamma_3 & \gamma_2\\ \gamma_3 & 0 & \gamma_1\\ \gamma_2 & \gamma_1 & 0\end{pmatrix}$$

② 速度分解定理

■ 流体速度分解

任何一个二阶张量，可以分解为对称张量S和反对称张量A的和

$$D=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)=a_{ij}+s_{ij}=A+S$$

其中

$$A=\frac{D-D'}{2}=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial V_2}{\partial x_3}\right) & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}\omega_1&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial V_2}{\partial x_3}\right)\\ \omega_2&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\\ \omega_3&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \vec{\omega}=\frac{1}{2}rot\vec{V}$$

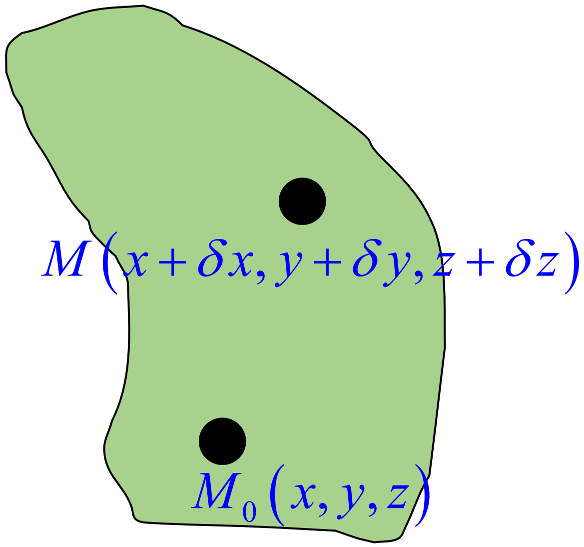
② 速度分解定理

■ 流体速度分解

设M_0点速度为$\vec{V}_0$，**一阶泰勒级数**展开，获得M点的速度$\vec{V}$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + D \cdot \delta\vec{r} = \vec{V}_0 + A \cdot \delta\vec{r} + S \cdot \delta\vec{r}$$

$$= \underbrace{\vec{V}_0}_{\text{平移速度分量}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \delta\vec{r}}_{\text{旋转速度分量}} + \underbrace{S \cdot \delta\vec{r}}_{\text{变形速度分量}}$$



流体运动分解

- □ **平移速度分量：**引起流体微团平移，不造成变形
- □ **旋转速度分量：**流体微团绕过M_0点的轴旋转造成的速度分量，不引起微团变形
- □ **变形速度分量：**引起流体微团变形，因此S也叫**变形速度张量**

亥姆赫兹（Helmholtz）速度分解定理：

流体微团运动 = 平移 + 转动 + 变形

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

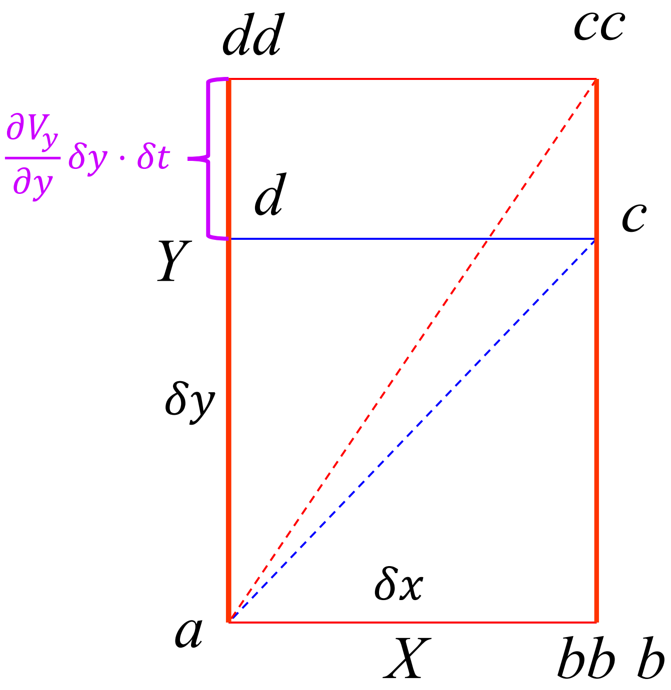
③ 变形速度张量

■ 各分量的物理意义

变形速度张量是一个**二阶对称张量**（**应变率张量**），其分量如下

$$S=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \gamma_3 & \gamma_2\\ \gamma_3 & 0 & \gamma_1\\ \gamma_2 & \gamma_1 & 0\end{pmatrix}$$



对角线分量，**线变形率**（流体微团上流体线相对长度随时间的变化率）

线变形

$$\varepsilon_y=\frac{\frac{\partial V_y}{\partial y}\delta y\cdot\delta t}{\delta y\cdot\delta t}=\frac{\partial V_y}{\partial y}=\frac{\partial V_2}{\partial x_2}=\varepsilon_2$$

$$\varepsilon_x=\frac{\partial V_x}{\partial x}\qquad \varepsilon_z=\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

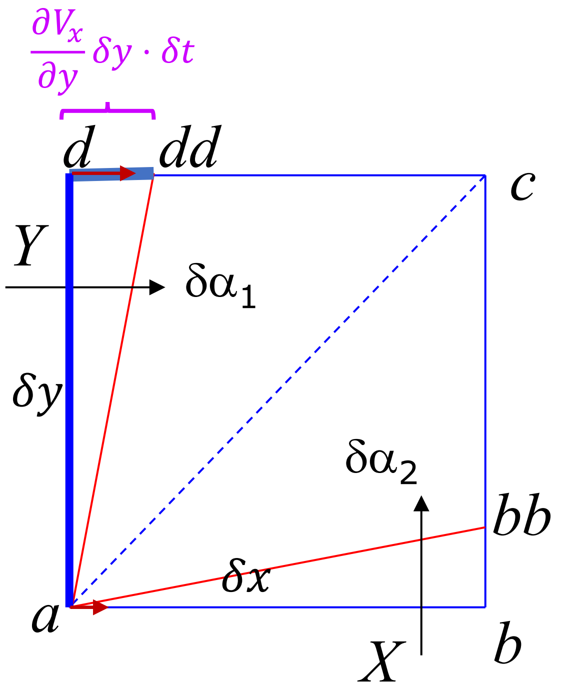
③ 变形速度张量

■ 各分量的物理意义

变形速度张量是一个**二阶对称张量**，其分量如下

$$S=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \gamma_3 & \gamma_2\\ \gamma_3 & 0 & \gamma_1\\ \gamma_2 & \gamma_1 & 0\end{pmatrix}$$



角变形

非对角线分量，**剪切变形角速度**（流体微团上相互垂直的两条流体线夹角的时间变化率的一半）

$$\gamma_z=\frac{\delta\alpha_2+\delta\alpha_1}{2\delta t}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)\delta t}{\delta t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)=\gamma_3$$

$$\gamma_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)\qquad \gamma_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)$$

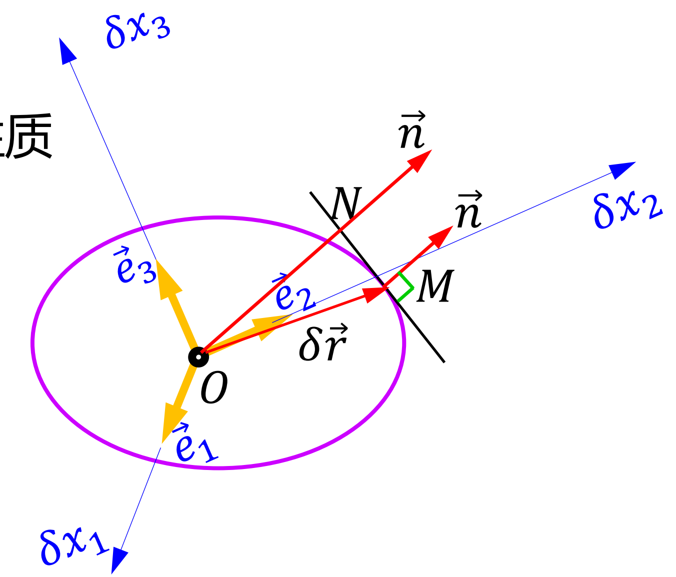
流体微团变形 = 角变形 + 线变形

③ 变形速度张量

■ 性质（二阶对称张量）

变形速度张量是一个**二阶对称张量**，因此它具有二阶对称张量的所有性质

$$S=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2\\ \gamma_1 & \varepsilon_2 & \gamma_1\\ \gamma_2 & \gamma_1 & \varepsilon_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \frac{1}{2}\theta_3 & \frac{1}{2}\theta_2\\ \frac{1}{2}\theta_1 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\theta_1\\ \frac{1}{2}\theta_2 & \frac{1}{2}\theta_1 & \varepsilon_3\end{pmatrix}$$



恒定对称张量的几何表示

(i) **几何表示**

$$2\varphi=\delta\vec{r}\cdot(S\cdot\delta\vec{r})=s_{ij}\delta x_i\delta x_j=1$$

即

$$\varepsilon_1\delta x_1^2+\varepsilon_2\delta x_2^2+\varepsilon_3\,\delta x_3^2+\theta_1\delta x_2\delta x_3+\theta_2\delta x_1\delta x_3+\theta_3\delta x_2\delta x_1=1$$

于是，可以用几何方法，做出M点的变形速度$\vec{V}_s$

$$\vec{V}_s=S\cdot\delta\vec{r}=grad\varphi=\frac{1}{ON}\vec{n}$$

③ 变形速度张量

■ 性质（二阶对称张量）

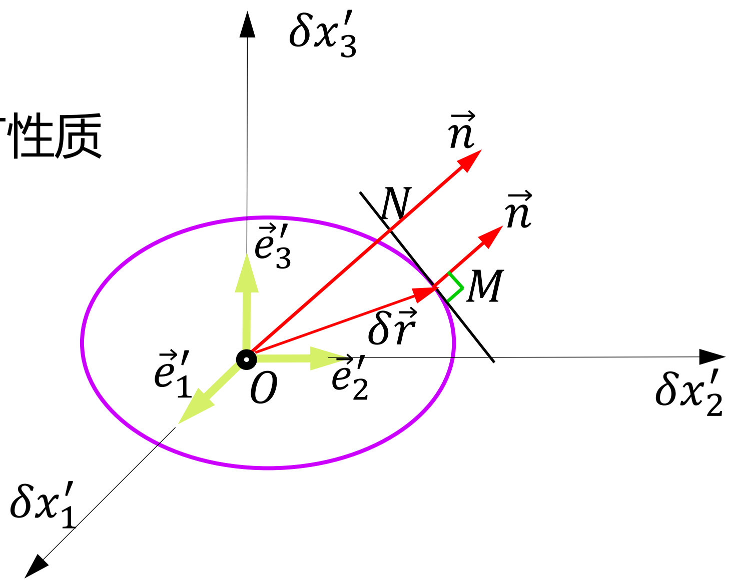
变形速度张量是一个**二阶对称张量**，因此它具有二阶对称张量的所有性质

$$S=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2\\ \gamma_1 & \varepsilon_2 & \gamma_1\\ \gamma_2 & \gamma_1 & \varepsilon_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \frac{1}{2}\theta_3 & \frac{1}{2}\theta_2\\ \frac{1}{2}\theta_1 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\theta_1\\ \frac{1}{2}\theta_2 & \frac{1}{2}\theta_1 & \varepsilon_3\end{pmatrix}$$

(ii) 主轴坐标系下的**标准形式**：

恒有**三个相互垂直的主轴**，在以这三个主轴为正交直角坐标系，变形速度张量S有**标准形式**

$$S=\begin{pmatrix}\varepsilon_1' & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2' & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3'\end{pmatrix}$$



恒定对称张量的几何表示

ε_i'为主轴方向的线变形率，此时变形二次曲面为

$$\varepsilon_1'\delta {x_1'}^2+\varepsilon_2'\delta {x_2'}^2+\varepsilon_3'\delta {x_3'}^2=1$$

对任意流体微团来说，**总存在一个正交直角坐标系**（主轴系），在该坐标系下，流体微团的变形**只有线变形。**

③ 变形速度张量

■ 性质（二阶对称张量）

变形速度张量是一个**二阶对称张量**，因此它具有二阶对称张量的所有性质

$$S=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2\\ \gamma_1 & \varepsilon_2 & \gamma_1\\ \gamma_2 & \gamma_1 & \varepsilon_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \frac{1}{2}\theta_3 & \frac{1}{2}\theta_2\\ \frac{1}{2}\theta_1 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\theta_1\\ \frac{1}{2}\theta_2 & \frac{1}{2}\theta_1 & \varepsilon_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1' & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2' & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3'\end{pmatrix}$$

(iii) **三个基本不变量**

$$I_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\varepsilon_1'+\varepsilon_2'+\varepsilon_3'=tr(S)=\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=div\vec{V}$$

$$I_2=\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2-\frac{1}{4}(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2)$$

$$I_3=\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3+\frac{1}{4}\theta_1\theta_2\theta_3-\frac{1}{4}(\theta_1^2\varepsilon_1+\theta_2^2\varepsilon_2+\theta_3^2\varepsilon_3)$$

③ 变形速度张量

■ 性质（二阶对称张量）

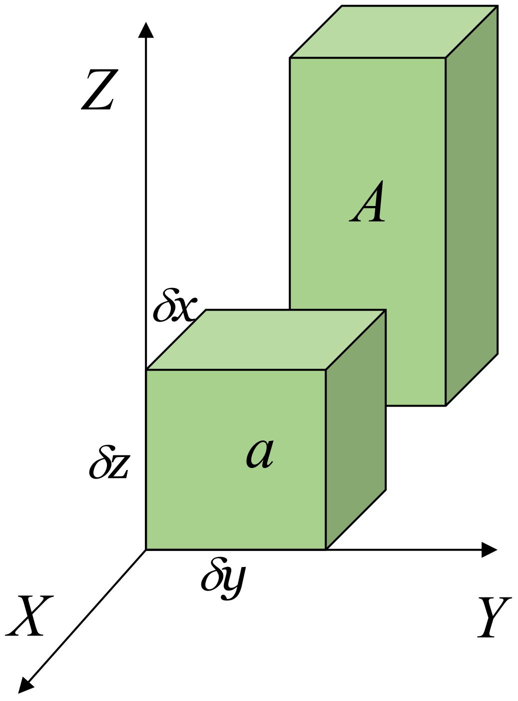
变形速度张量是一个**二阶对称张量**，因此它具有二阶对称张量的所有性质

$$S=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2\\ \gamma_1 & \varepsilon_2 & \gamma_1\\ \gamma_2 & \gamma_1 & \varepsilon_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \frac{1}{2}\theta_3 & \frac{1}{2}\theta_2\\ \frac{1}{2}\theta_1 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\theta_1\\ \frac{1}{2}\theta_2 & \frac{1}{2}\theta_1 & \varepsilon_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1' & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2' & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3'\end{pmatrix}$$

(iii) **三个基本不变量——I_1**的物理意义

$$I_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\varepsilon_1'+\varepsilon_2'+\varepsilon_3'=tr(S)=\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=div\vec{V}$$

如图所示，在主轴坐标系$OXYZ$中，微元体在t时刻具有形状a，在$t+\delta t$时刻变形得形状A。各边长都因端点上沿边长方向的速度不同而发生了变化。



体积变化率

✓ t 时刻具有形状a的体积

$$\delta x\delta y\delta z$$

③ 变形速度张量

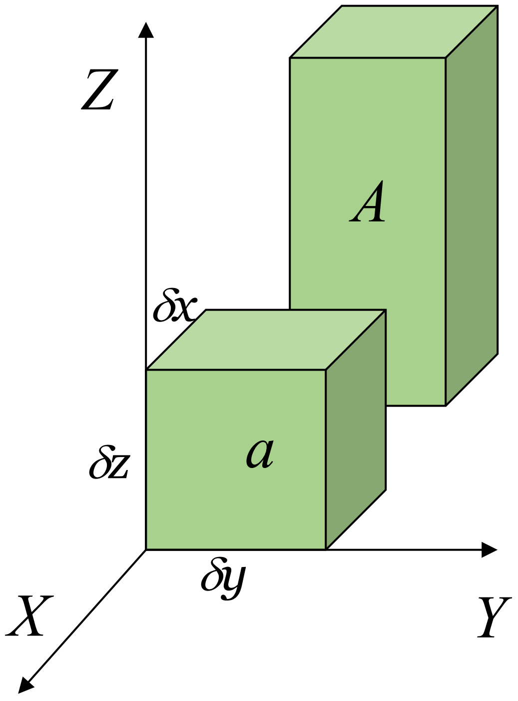
■ 性质（二阶对称张量）

变形速度张量是一个**二阶对称张量**，因此它具有二阶对称张量的所有性质

$$S=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2\\ \gamma_1 & \varepsilon_2 & \gamma_1\\ \gamma_2 & \gamma_1 & \varepsilon_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \frac{1}{2}\theta_3 & \frac{1}{2}\theta_2\\ \frac{1}{2}\theta_1 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\theta_1\\ \frac{1}{2}\theta_2 & \frac{1}{2}\theta_1 & \varepsilon_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1' & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2' & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3'\end{pmatrix}$$

(iii) **三个基本不变量——I_1**的物理意义

$$I_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\varepsilon_1'+\varepsilon_2'+\varepsilon_3'=tr(S)=\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=div\vec{V}$$



✓ $t+\delta t$时刻，形状A的体积

$$\left(\delta x+\frac{\partial v_x}{\partial x}\delta x\delta t\right)\left(\delta y+\frac{\partial v_y}{\partial y}\delta y\delta t\right)\left(\delta z+\frac{\partial v_z}{\partial z}\delta z\delta t\right)=\delta x\delta y\delta z+\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z\delta t$$

体积变化率

✓ 体积相对膨胀量(**体积变化率**)

$$\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\delta t}=\frac{\left(\frac{\partial vx}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\delta y\delta x\delta z\delta t}{\delta y\delta x\delta z\delta t}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=div\vec{V}=I_1$$

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

④ 应力张量

■ 流体受力——质量力和表面力

力的三要素?

1）按**物理性质**的不同分类：重力、摩擦力、惯性力等

- 摩擦力: 如牛顿内摩擦力
- 惯性力: 因为非惯性运动而引起的力

2）按**作用方式**分：**质量力**和**表面力**

- 质量力:

  外力场作用于流体微团质量中心，大小与微团质量成正比的非接触力，如重力和惯性力。

- 表面力:

  相邻流体或物体作用于所研究流体团块外表面，大小与流体团块表面积成正比的接触力, 如大气压力。

2.1 流体力学基本概念

④ 应力张量

■ 流体受力——质量力

1）质量力:

- 是指作用于隔离体内每一流体质点上的力，它的大小与质量成正比。
- 对于均质流体（各点密度相同），质量力与流体体积成正比，质量力又称为体积力，或者彻体力。
- 单位：牛顿（N）。

2）单位质量力:

- 单位质量流体所受到的质量力。
- 单位：m/s^2，与重力加速度单位相同。

单位质量力的数学表示:

$$\vec{R} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta m}\bigg|_{\text{对固定点}}$$

$$= \lim_{\Delta m \to 0} \left(\frac{\Delta F_x}{\Delta m}\vec{i} + \frac{\Delta F_y}{\Delta m}\vec{j} + \frac{\Delta F_z}{\Delta m}\vec{k} \right)\bigg|_{\text{对固定点}}$$

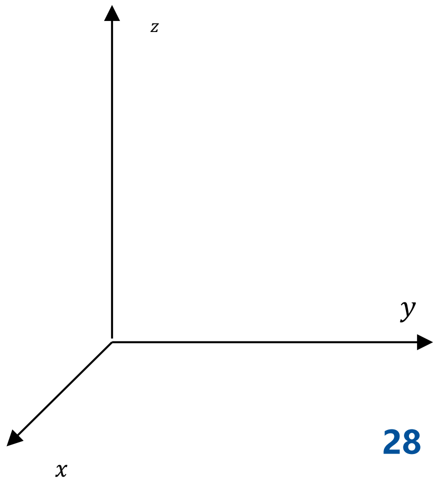
$$= X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

对于重力

$$\vec{R} = -gk$$

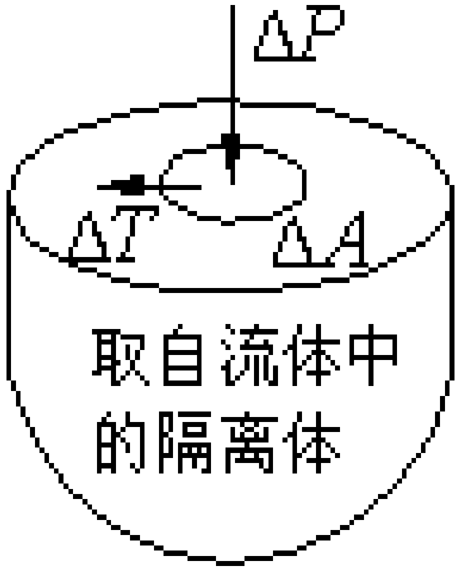
对于惯性力

$$\vec{R} = -\vec{a}$$



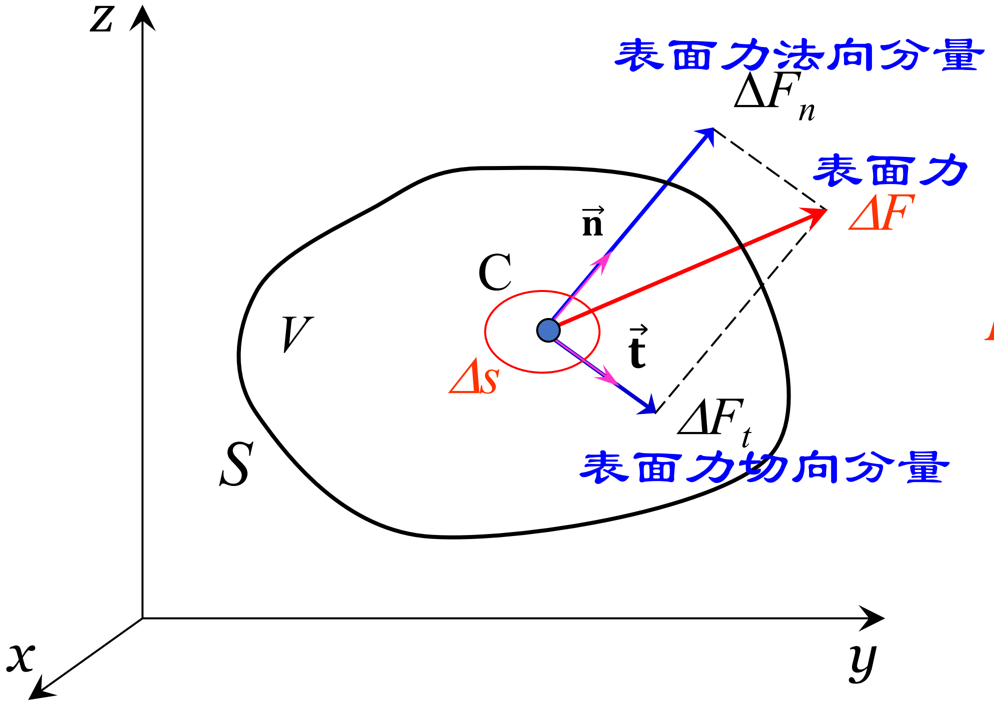
④ 应力张量

■ 流体受力——表面应力



作用在流体上的表面力指的是：用物体表面或假想截面分割流体，物体或者一部分流体作用在另一部分流体上的力，其作用点在所截取的截面上

表面力的分解-当地坐标系



$$p = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta s}\bigg|_{C点} = \sigma \vec{\mathbf{n}} + \tau \vec{\mathbf{t}}$$

σ：正应力　　τ：切应力

$$(\Delta F)^2 = (\Delta F_n)^2 + (\Delta F_t)^2$$

表面应力：

单位面积上所受的表面力，单位为Pa

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

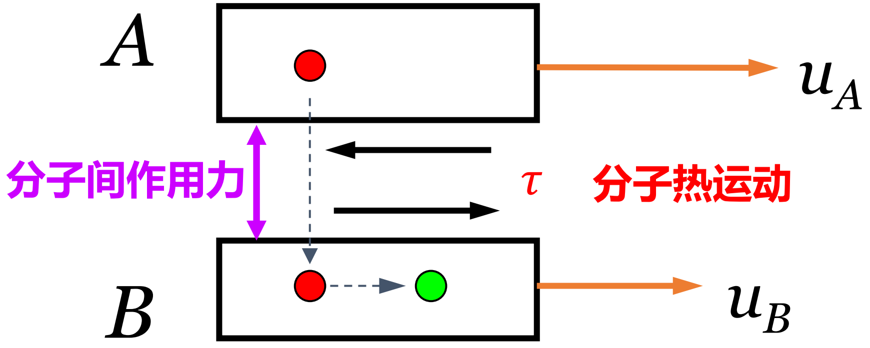
④ 应力张量

■ 流体受力——牛顿内摩擦定律

两无限大平行平板之间充满了静止的液体。将下板固定，对上板施加一恒定外力，使上板以速度U沿x方向作匀速运动：

a) 紧贴上下壁的流体与平板相对静止

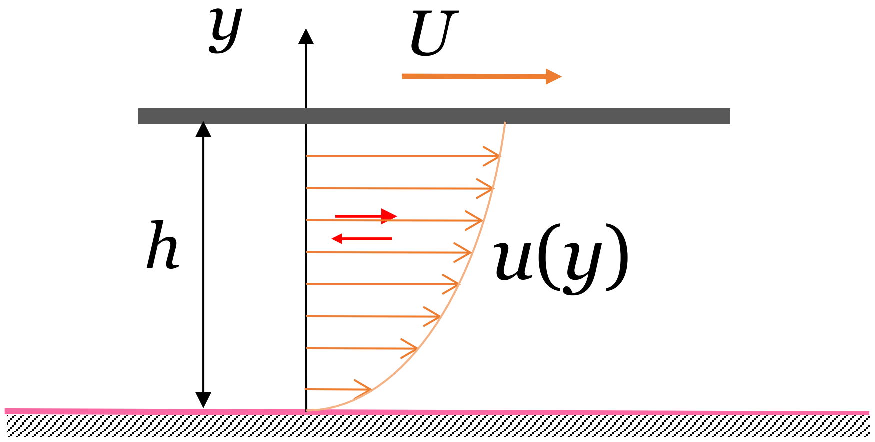
b) 两板之间，由于流体的粘性作用，速度逐渐变化



□ **粘性**：流体所具有这种抵抗两层流体相对滑动速度，或普遍讲抵抗剪切变形的性质叫做粘性。

□ **粘性力**：流体对相邻两层流体间的相对运动（即相对滑动）有抵抗作用,这种抵抗力称为粘性力。

□ 粘性是流体的固有特性，粘性**产生的物理原因**：分子间作用力和分子热运动导致的动量交换



牛顿平板试验

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

④ 应力张量

■ 流体受力——牛顿内摩擦定律

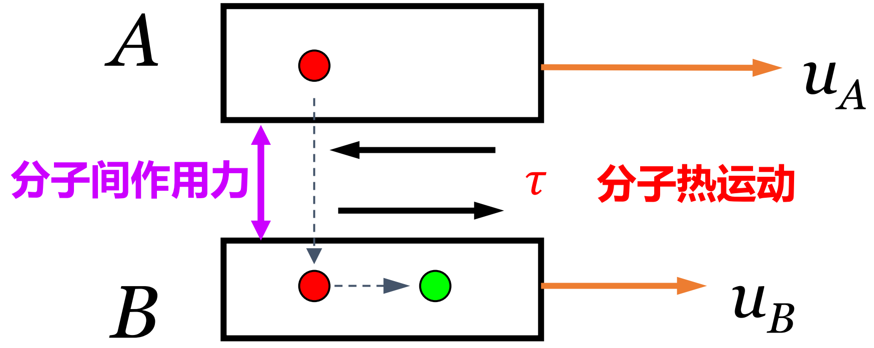
流体相对运动时所引起的摩擦力 $F = \mu \frac{du}{dy} A$

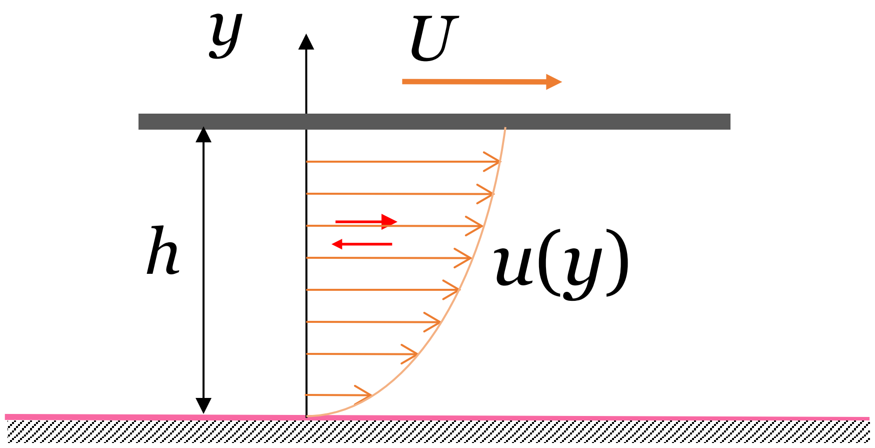
写成剪应力形式 $\tau = \mu \frac{du}{dy}$

其中，τ：剪应力，Pa；μ，粘性系数（粘度），单位：N•s/m²（Pa.s）

流体**受力**与流体微团的**变形率**之间的关系！

牛顿流体：凡是剪应力与速度梯度符合牛顿内摩擦定律的流体均称为牛顿流体。否则，为非牛顿流体。





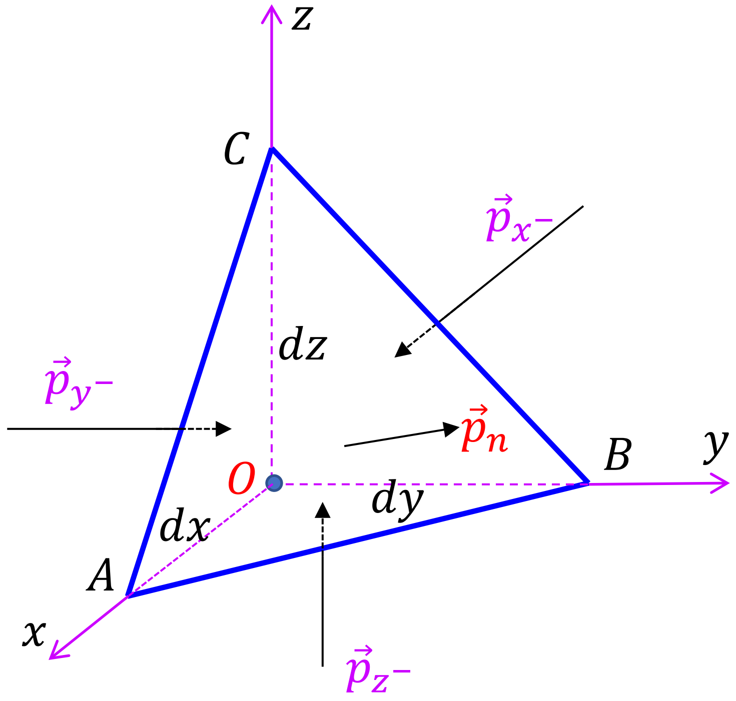
牛顿平板试验

④ 应力张量

■ 流体受力——应力张量

如图，O为流场中任意一点，过O作直角坐标系$Oxyz$，点A、B和C分别在x、y和z轴上，dx、dy和dz是**小量**。面ABC的法向$\vec{n}$是**任意的**。三角形ΔOBC、ΔOAC、ΔOAB和ΔABC的面积分别为dS_x、dS_y、dS_z和dS，它们的外法向分别为$-\vec{i}\,(x^-)$、$-\vec{j}\,(y^-)$、$-\vec{k}\,(z^-)$和$\vec{n}$，各面上的应力向量分别为$\vec{p}_{x^-}$、$\vec{p}_{y^-}$、$\vec{p}_{z^-}$和$\vec{p}_n$，则很显然有下式成立

$$dS_x = \cos(\vec{n},\vec{i})\,dS = \alpha dS$$
$$dS_y = \cos(\vec{n},\vec{j})\,dS = \beta dS$$
$$dS_z = \cos(\vec{n},\vec{k})\,dS = \gamma dS$$



应力张量

我们的目标：找出4个面上的应力之间的关系！也就是要找，过O点的任意方向$\vec{n}$上的应力与三个坐标方向应力的关系。

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

④ 应力张量

■ 流体受力——应力张量

在与流体力固连的坐标系中考虑问题，该流体微团受的表面力可以**由各应力与面积乘积求得**，它们是**二阶小量**；而**体积力**则包括重力、惯性力等，与体积成正比，为**三阶小量**。因此，当微团向O点收缩，体积趋于零时，流体微团所受体积力可以忽略。于是，微团受力平衡方程为

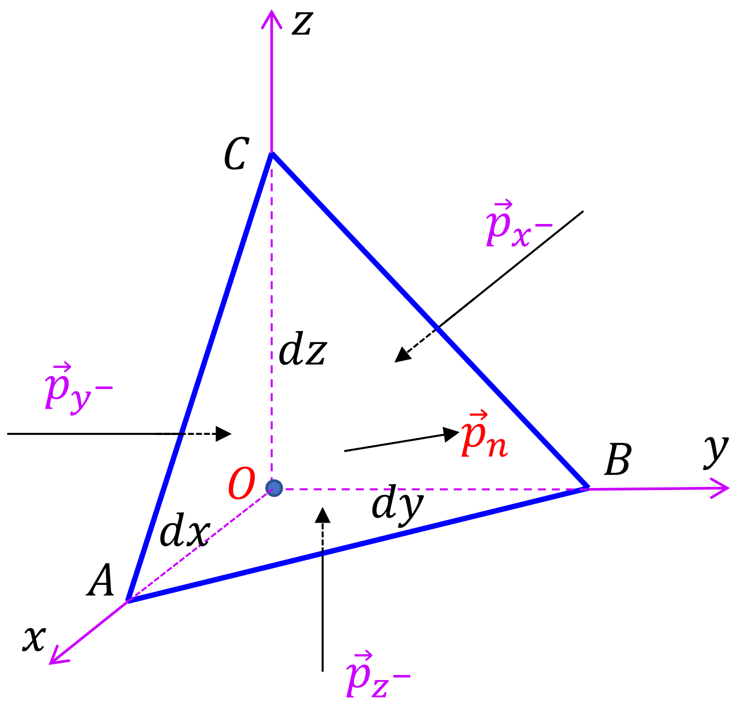
$$\vec{p}_{x^-}dS_x + \vec{p}_{y^-}dS_y + \vec{p}_{z^-}dS_z + \vec{p}_n dS = 0$$

很显然

$$\vec{p}_{x^-} = -\vec{p}_x \qquad \vec{p}_{y^-} = -\vec{p}_y \qquad \vec{p}_{z^-} = -\vec{p}_z$$

将面积关系式及以上应力关系代入平衡方程，可以得到

$$\vec{p}_n = \vec{p}_x\alpha + \vec{p}_y\beta + \vec{p}_z\gamma$$



应力张量

④ 应力张量

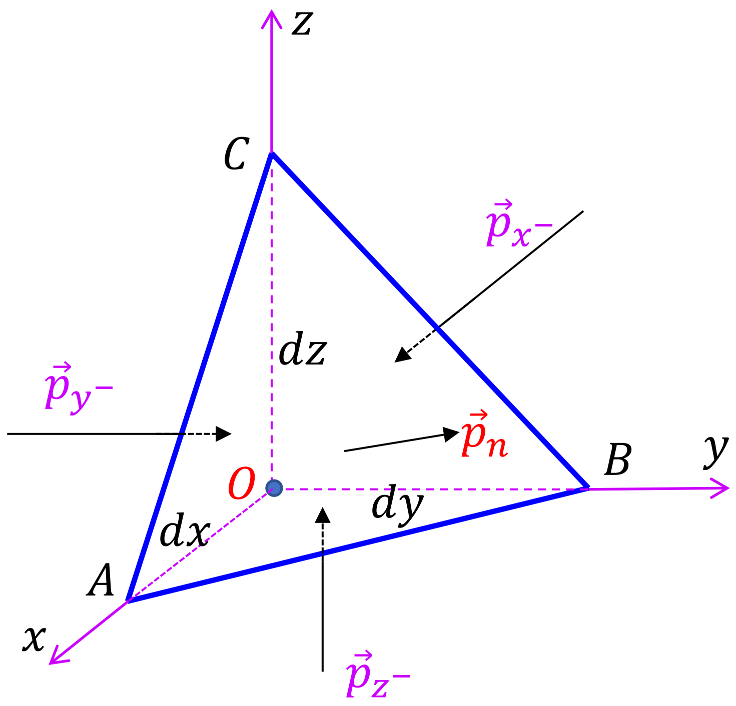
■ 流体受力——应力张量

表面应力关系：任意方向$\vec{n}$的应力$\vec{p}_n$，可以由三个坐标方向应力$\vec{p}_x$、$\vec{p}_y$和$\vec{p}_z$线性表出

$$\vec{p}_n = \vec{p}_x\alpha + \vec{p}_y\beta + \vec{p}_z\gamma$$

也就是说，**流场中任意一点的应力，可以由三个坐标轴方向的应力完全描述。**

进一步，每个面上的应力都是矢量，都会有3个分量。比如$\vec{p}_x$有3个分量p_{xx}、p_{xy}和p_{xz}。因此，也可以说流场中任意一点的应力有9个分量来描述清楚。



应力张量

$$P = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{p}_n = \vec{n}\cdot P$$

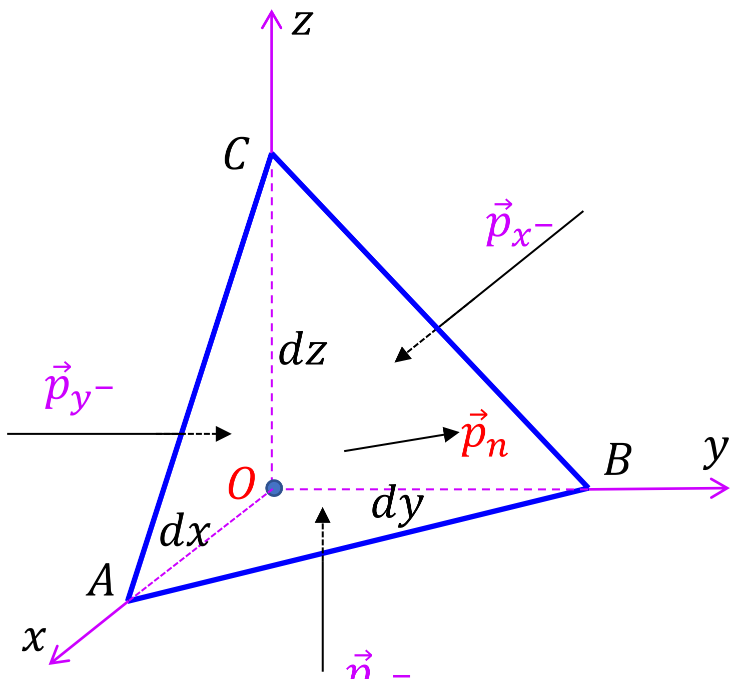
P为二阶张量！

④ 应力张量

■ 流体受力——应力张量

二阶应力张量

$$P=\begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}$$



应力张量

还可以利用**力矩平衡**，证明P为**对称张量**（6个不同分量），这里略去该证明过程。因此，**应力张量** P 具有二阶对称张量的性质：

(i) **几何表示：**应力二次曲面

$$\vec{r}\cdot(P\cdot\vec{r})=1$$

(ii) **标准型（对角化）**：在主轴坐标系中，只有正应力

$$P=\begin{pmatrix} p'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p'_{33} \end{pmatrix}$$

(iii) **3个基本不变量**（略）

④ 应力张量

流体**受力**与流体微团的**变形率**之间的关系！

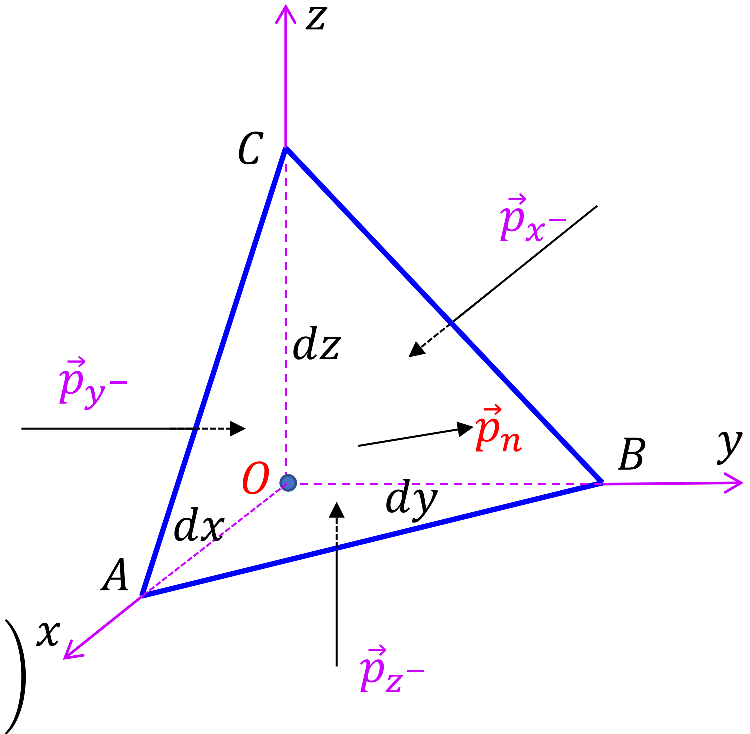
■ 流体受力——广义牛顿定律

二阶应力张量

$$P=\begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}$$

据广义牛顿定律，并结合斯托克斯第二粘性假设，各应力分量为：

$$\left.\begin{aligned}
p_{xx} &= -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} \\
p_{yy} &= -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} \\
p_{zz} &= -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} \\
p_{xy} &= p_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
p_{xz} &= p_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\
p_{yz} &= p_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}
p_{ij} &= -p\delta_{ij} + 2\mu\left(s_{ij} - \frac{1}{3}s_{kk}\delta_{ij}\right) \\
P &= -pI + 2\mu\left(S - \frac{1}{3}I div\vec{V}\right)
\end{aligned}\right.$$



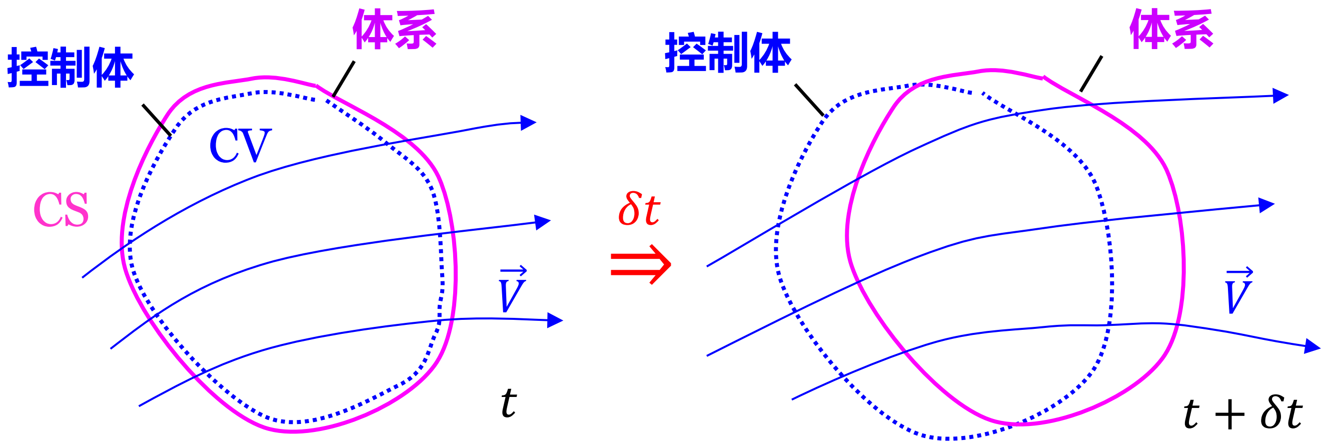
应力张量

其中，p为流体压力。显然，对于**静止**的流体或者**无粘**（理想）流体而言：$P=\delta_{ij}p$

⑤ 雷诺输运定理

■ 体系和控制体

- □ **欧拉方法**描述的对象是**空间的点**，而**牛顿定律**的研究对象必须是**质量不变的确定物体**。
- □ 把**三大基本物理守恒定律**应用到运动流体时，势必要追踪一个**选定的流体系统的运动历程**。
- □ 需要采用**控制体分析法**，进行转化。这就是**雷诺输运定理**的任务



流体体系与控制体

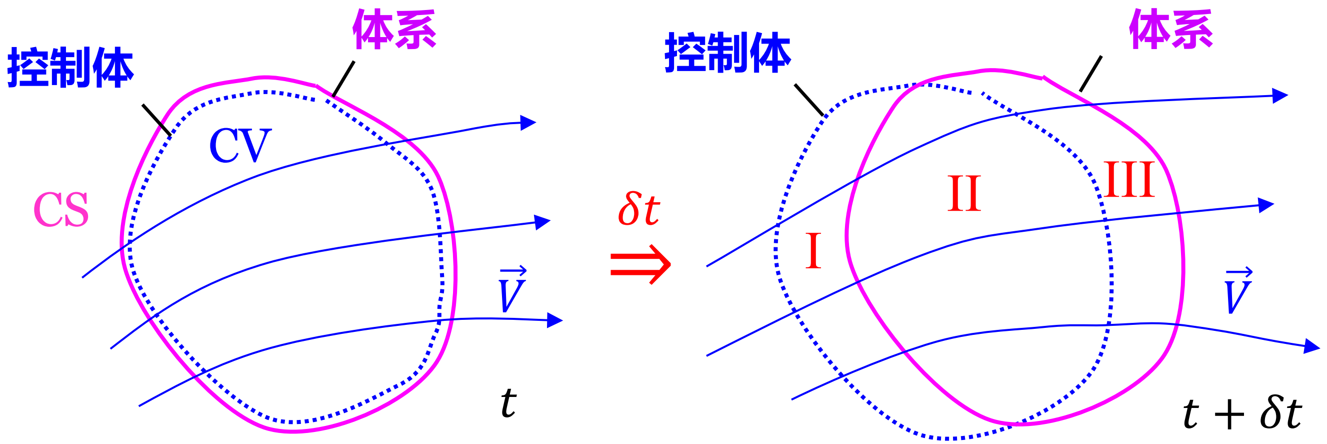
名　称	定　义	边界特性	适　用
体系（闭口系）	物质的集合	有力、能交换，无质量交换	拉格朗日法
控制体（开口系）	固定在空间的一个体积	有力、能、质量交换	欧拉法

主要解决在流体上如何应用物理守恒定律（质量、动量和能量守恒）问题

⑤ 雷诺输运定理

■ 体系和控制体

设N代表质量m，动量$\vec{m}$和能量E等**随流物理量**（分布在质量或体积上，随流动输运）。



流体体系与控制体

单位质量流体所具有的N值，用符号σ代表，

$$\sigma = \frac{dN}{dm}$$

其中，$N = m, \sigma = 1$;
$N = \vec{m}, \sigma = \vec{V}$;
$N = E, \sigma = \frac{1}{2}V^2 + u$，$u$为比内能。

$$\frac{DN_s}{Dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{(N_2+N_3)_{t+\delta t} - (N_1+N_2)_t}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{(N_2+N_3)_{t+\delta t} - (N_1+N_2)_t + (N_1)_{t+\delta t} - (N_1)_{t+\delta t}}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{(N_1+N_2)_{t+\delta t} - (N_1+N_2)_t}{\delta t} + \lim_{\delta t \to 0} \frac{(N_3)_{t+\delta t} - (N_1)_{t+\delta t}}{\delta t}$$

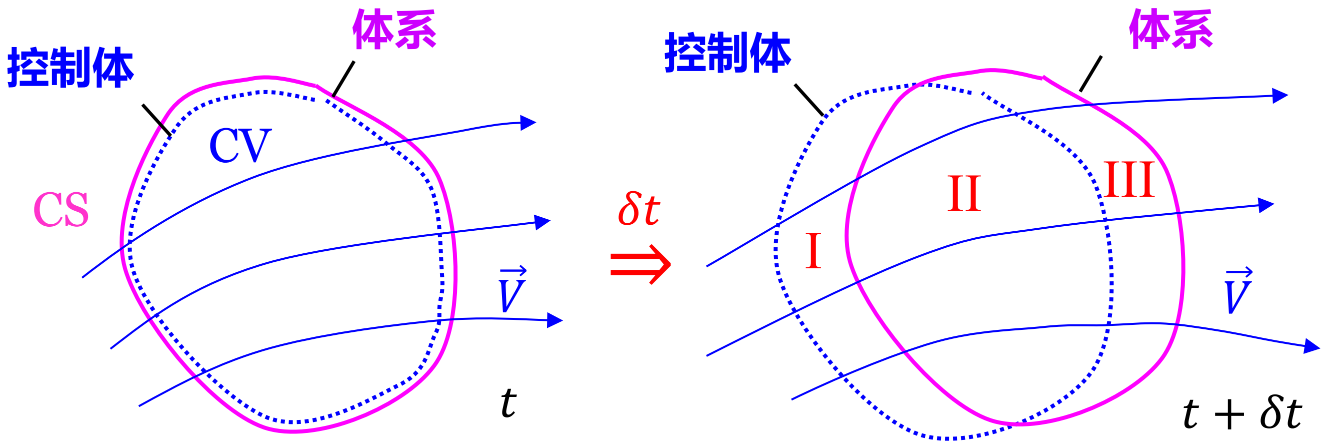
$$= \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV} (\sigma\rho) d\tau + \oiint_{CS} \sigma\rho\vec{V} \cdot d\vec{S}$$

$$= \iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\sigma\rho) d\tau + \oiint_{CS} \sigma\rho\vec{V} \cdot d\vec{S}$$

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

⑤ 雷诺输运定理

■ 体系和控制体



流体体系与控制体

雷诺输运定理：

某瞬间控制体内的流体所构成的体系，它所具有的**物理量的随流导数**，等于同一瞬间控制体中所含同一随流物理量的增加率（**右端第一项，体积分**）与该物理量通过控制面的净流出率（**右端第二项，面积分**）之和。

$$\frac{DN_s}{Dt}=\iiint_{CV}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma\rho)d\tau+\oiint_{CS}\sigma\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}$$

等式**左端**：**体系** → 等式**右端**：**控制体**

如 $N=m,\sigma=1$;
$N=\vec{m},\sigma=\vec{V}$;
$N=E,\sigma=\frac{1}{2}V^2+u$，$u$为比内能。

2.2 流体力学控制方程

- □ 质量（连续）方程
- □ 动量方程
- □ 能量方程

① 连续方程

■ 积分形式

流体体系在运动中，质量是保持不变的!

$$\frac{DN_s}{Dt}=\frac{Dm}{Dt}=0$$

在雷诺输运方程中，取$N=m,\sigma=1$，可得

$$\frac{DN_s}{Dt}=\iiint_{CV}\frac{\partial}{\partial t}(1\cdot\rho)d\tau+\oiint_{CS}1\cdot\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}=0$$

即可得**积分形式质量守恒方程**（也叫连续方程）

$$\iiint_{CV}\frac{\partial}{\partial t}\rho d\tau+\oiint_{CS}\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}=0$$

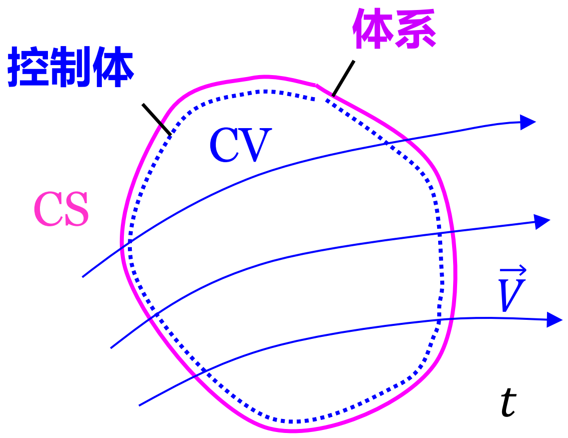
物理意义（质量守恒）：

控制体内质量的**增加率** = 通过控制面的质量**流入率**

$$\frac{DN_s}{Dt}=\iiint_{CV}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma\rho)d\tau+\oiint_{CS}\sigma\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}$$

如果 $N=m,\sigma=1$;
$N=\vec{m},\sigma=\vec{V}$;
$N=E,\sigma=\frac{1}{2}V^2+u$，$u$为比内能。

等式左端：体系 ⇒ 等式右端：控制体



流体体系与控制体

① 连续方程

■ 微分形式

在积分形式方程

$$\iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t}\rho d\tau + \oiint_{CS} \rho\vec{V}\cdot d\vec{S} = 0$$

中，通过**奥-高定理**/公式，将第二项（面积分）改成CV上的体积分

$$\oiint_{CS} \rho\vec{V}\cdot d\vec{S} = \iiint_{CV} div(\rho\vec{V})d\tau$$

即可得

$$\iiint_{CV} \left[\frac{\partial}{\partial t}\rho + div(\rho\vec{V})\right] d\tau = 0$$

由于该式**对任意控制体都成立**，因此有

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + div(\rho\vec{V}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{V}) = 0$$

此即为微分形式质量守恒方程（连续方程）！

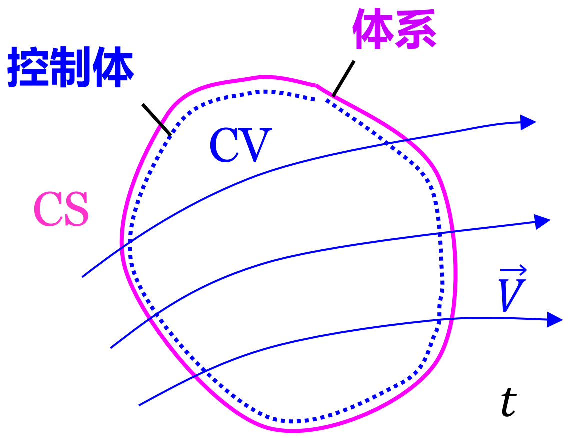
$$\frac{DN_s}{Dt} = \iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\sigma\rho)d\tau + \oiint_{CS} \sigma\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}$$

如果 $N = m, \sigma = 1$；

$N = \vec{m}, \sigma = \vec{V}$；

$N = E, \sigma = \frac{1}{2}V^2 + u$，$u$为比内能。

等式左端：体系 ➡ 等式右端：控制体



流体体系与控制体

② 动量方程

■ 积分形式

流体体系在运动中，其动量变化率等于外力的合力，此即**牛顿第二定律**：

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{\tau_s}\rho\vec{V}d\tau=\sum\vec{F}$$

由雷诺输运方程，动量变化率为

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{\tau_s}\rho\vec{V}d\tau=\iiint_{CV}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V})d\tau+\oiint_{CS}(\rho\vec{V})(\vec{V}\cdot d\vec{S})$$

$$=\iiint_{CV}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V})d\tau+\oiint_{CS}(\rho\vec{V})(\vec{V}\cdot\vec{n}dS)$$

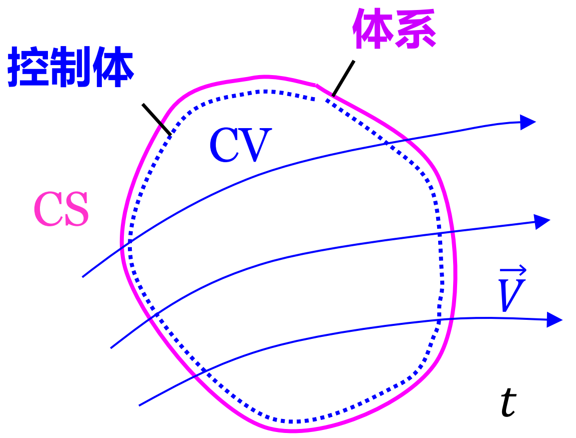
$$\frac{DN_s}{Dt}=\iiint_{CV}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma\rho)d\tau+\oiint_{CS}\sigma\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}$$

如果 $N=m,\sigma=1$;

$N=\vec{m},\sigma=\vec{V}$;

$N=E,\sigma=\frac{1}{2}V^2+u$，$u$为比内能。

等式左端：体系 → 等式右端：控制体



流体体系与控制体

② 动量方程

■ 积分形式

流体体系在运动中，其动量变化率等于外力的合力，此即**牛顿第二定律**：

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{\tau_s}\rho\vec{V}d\tau=\sum\vec{F}$$

再来看受力，主要包括质量力$\vec{R}$和表面力P

质量力 $\vec{F}_b=\iiint_{CV}\rho\vec{R}d\tau$ 单位质量力矢量 $\vec{R}=X\vec{\imath}+Y\vec{\jmath}+Z\vec{k}$

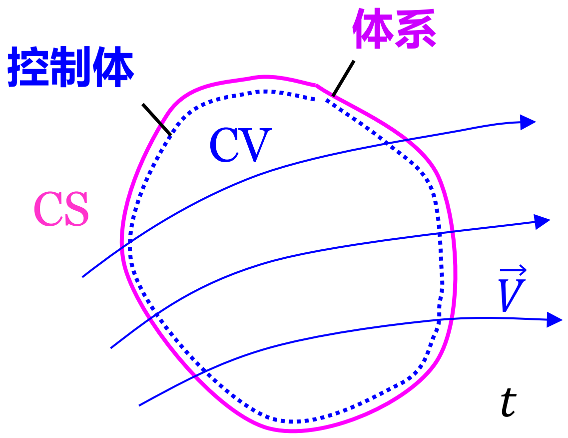
表面力 $\vec{F}_s=\oiint_{CS}P\cdot d\vec{S}$

表面力张量 $P=\begin{pmatrix}\vec{p}_{xx} & \vec{p}_{xy} & \vec{p}_{xz}\\ \vec{p}_{yx} & \vec{p}_{yy} & \vec{p}_{yz}\\ \vec{p}_{zx} & \vec{p}_{zy} & \vec{p}_{zz}\end{pmatrix}=-pI+2\mu\left(S-\frac{1}{3}Idiv\vec{V}\right)$

$$\frac{DN_s}{Dt}=\iiint_{CV}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma\rho)d\tau+\oiint_{CS}\sigma\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}$$

如果 $N=m,\sigma=1$;
$N=\vec{m},\sigma=\vec{V}$;
$N=E,\sigma=\frac{1}{2}V^2+u$，$u$为比内能。

等式左端：体系 ➡ 等式右端：控制体



流体体系与控制体

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

② 动量方程

■ 积分形式

流体体系在运动中，其动量变化率等于外力的合力，此即**牛顿第二定律**：

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{\tau_s}\rho\vec{V}d\tau=\sum\vec{F}$$

于是，将各项代入上式，可得**动量方程**

$$\iiint_{CV}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V})d\tau+\oiint_{CS}(\rho\vec{V})(\vec{V}\cdot d\vec{S})=\iiint_{CV}\rho\vec{R}d\tau+\oiint_{CS}P\cdot d\vec{S}$$

注意：上式中，所有量都是控制体上的量（**欧拉法**）。

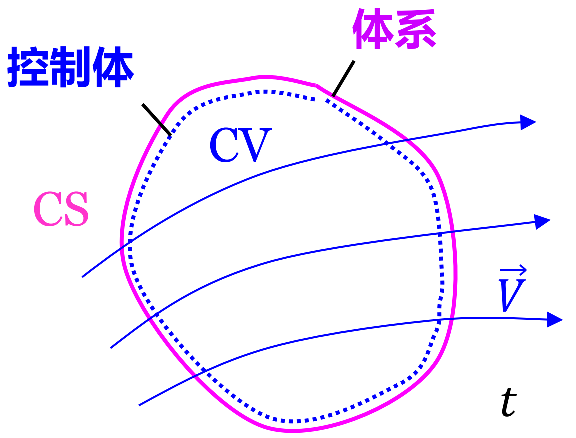
$$\frac{DN_s}{Dt}=\iiint_{CV}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma\rho)d\tau+\oiint_{CS}\sigma\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}$$

如果 $N=m,\sigma=1$；

$N=\vec{m},\sigma=\vec{V}$；

$N=E,\sigma=\frac{1}{2}V^2+u$，$u$为比内能。

等式左端：体系 → 等式右端：控制体



流体体系与控制体

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

② 动量方程

$$\frac{DN_s}{Dt} = \iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\sigma\rho)d\tau + \oiint_{CS} \sigma\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}$$

如果 $N = m, \sigma = 1$;
$N = \vec{m}, \sigma = \vec{V}$;
$N = E, \sigma = \frac{1}{2}V^2 + u$，$u$为比内能。

等式左端：体系 ➡ 等式右端：控制体

■ 微分形式

积分形式**动量方程**

$$\iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V})d\tau + \oiint_{CS}(\rho\vec{V})(\vec{V}\cdot d\vec{S}) = \iiint_{CV} \rho\vec{R}d\tau + \oiint_{CS} P\cdot d\vec{S}$$

应用张量**奥-高定理** $\oint_S P\cdot d\vec{S} = \int_V divP dV$，分别可得

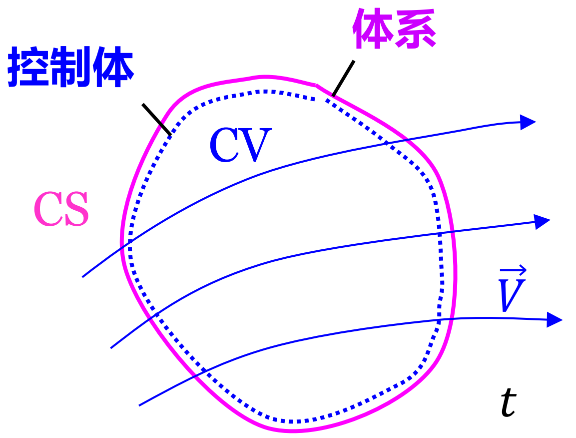
$$\oiint_{CS}(\rho\vec{V})(\vec{V}\cdot d\vec{S}) = \iiint_{CV} div(\rho\vec{V}\vec{V})d\tau$$

$$\oiint_{CS} P\cdot d\vec{S} = \iiint_{CV} divP d\tau$$

代入上式可得

$$\iiint_{CV}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + div(\rho\vec{V}\vec{V}) - \rho\vec{R} - divP\right]d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + div(\rho\vec{V}\vec{V}) - \rho\vec{R} - divP = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + div(\rho\vec{V}\vec{V}) = \rho\vec{R} + divP$$



流体体系与控制体

③ 能量方程

■ 积分形式

用功率形式表述的**热力学第一定律**为：单位时间内外界传给**体系**的热量$\dot{Q}$,等于体系所贮存的总能量的增加率 DE/Dt，加上体系对外界输出功率$\dot{W}$

$$\dot{Q} = \frac{DE}{Dt} + \dot{W}$$

$\dot{Q}$： 表示换热功率（**外界对流体**所传热量功率)

系统与外界热量交换形式有传导、对流和辐射。其中，传导换热可据傅立叶公式来计算。将$\dot{Q}$分为**传导项**和**非传导项**，

$$\dot{Q} = \underbrace{\oint\!\!\!\oint_{CS} k\,gradT \cdot d\vec{S}}_{\text{传导项}} + \underbrace{\iiint_{CV} \rho q d\tau}_{\text{非传导项}}$$

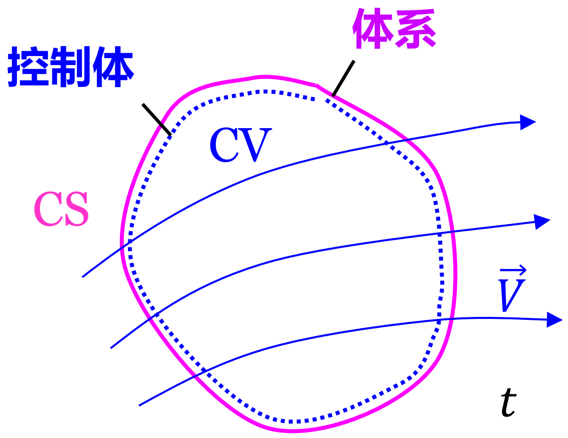
$$\frac{DN_s}{Dt} = \iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\sigma\rho)d\tau + \oint\!\!\!\oint_{CS} \sigma\rho\vec{V} \cdot d\vec{S}$$

如果 $N = m, \sigma = 1$;

$N = \vec{m}, \sigma = \vec{V}$;

$N = E, \sigma = \frac{1}{2}V^2 + u$，$u$为比内能。

$\boxed{\text{等式左端：体系}} \Rightarrow \boxed{\text{等式右端：控制体}}$



流体体系与控制体

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

③ 能量方程

■ 积分形式

用功率形式表述的**热力学第一定律**为：

$$\dot{Q}=\frac{DE}{Dt}+\dot{W}$$

$\dot{Q}$： 表示换热功率

$$\dot{Q}=\oint\!\!\oint_{CS} kgradT\cdot d\vec{S}+\iiint_{CV}\rho q d\tau$$

E： 表示体系包含的能量

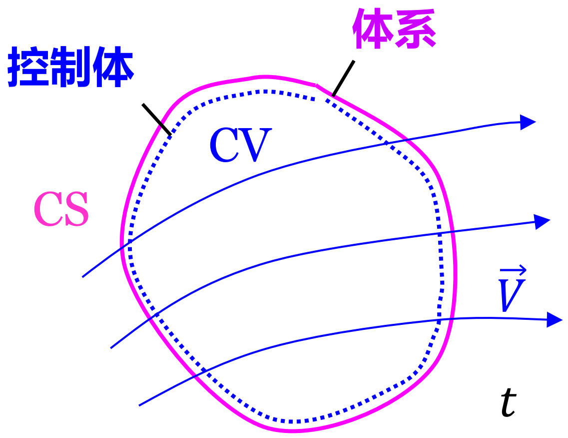
能量e包括：动能 $V^2/2$ 和内能u $\qquad e=u+\dfrac{V^2}{2}$

$$\frac{DE}{Dt}=\iiint_{CV}\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}V^2+u\right)\right]d\tau+\oint\!\!\oint_{CS}\rho\left(\frac{1}{2}V^2+u\right)\vec{V}\cdot d\vec{S}$$

$$\frac{DN_s}{Dt}=\iiint_{CV}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma\rho)d\tau+\oint\!\!\oint_{CS}\sigma\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}$$

如果 $N=m,\sigma=1$;
$N=\vec{m},\sigma=\vec{V}$;
$N=E,\sigma=\frac{1}{2}V^2+u$，$u$为比内能。

等式左端：体系 → 等式右端：控制体



流体体系与控制体

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

③ 能量方程

■ 积分形式

用功率形式表述的**热力学第一定律**为:

$$\dot{Q}=\frac{DE}{Dt}+\dot{W}$$

$\dot{W}$: 表示**流体对外**所做的功功率，分为质量力和表面力做功功率

$$\dot{W}=-\iiint_{CV}(\rho\vec{R}\cdot\vec{V})d\tau-\oiint_{CS}P\cdot\vec{V}\cdot d\vec{S}$$

将各项代入热力学第一定律，可得能量方程

$$\iiint_{CV}\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}V^2+u\right)\right]d\tau+\oiint_{CS}\rho\left(\frac{1}{2}V^2+u\right)\vec{V}\cdot d\vec{S}$$

$$=\iiint_{CV}(\rho\vec{R}\cdot\vec{V})d\tau+\oiint_{CS}P\cdot\vec{V}\cdot d\vec{S}+\oiint_{CS}k\,gradT\cdot d\vec{S}+\iiint_{CV}\rho q\,d\tau$$

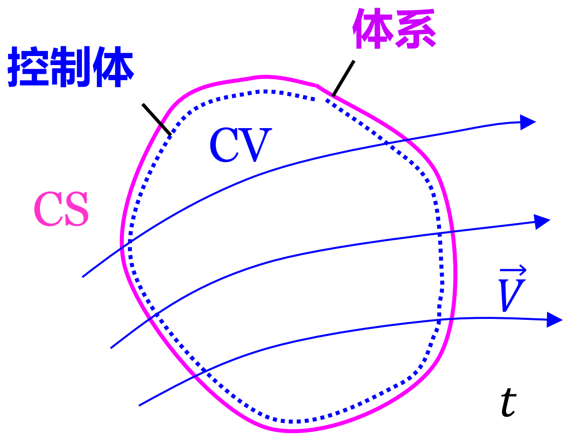
$$\frac{DN_s}{Dt}=\iiint_{CV}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma\rho)d\tau+\oiint_{CS}\sigma\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}$$

如果 $N=m,\sigma=1$;

$N=\vec{m},\sigma=\vec{V}$;

$N=E,\sigma=\frac{1}{2}V^2+u$，$u$为比内能。

等式左端：体系 → 等式右端：控制体



流体体系与控制体

③ 能量方程

■ 积分形式

$$\frac{DN_s}{Dt} = \iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\sigma\rho)d\tau + \oint\!\!\!\oint_{CS} \sigma\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}$$

如果 $N = m, \sigma = 1$;

$N = \vec{m}, \sigma = \vec{V}$;

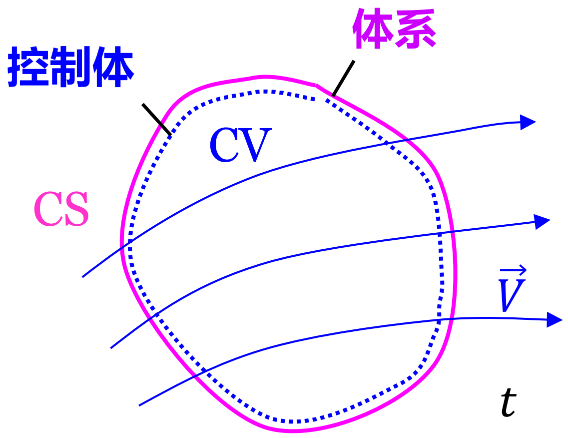
$N = E, \sigma = \frac{1}{2}V^2 + u$，$u$为比内能。

等式左端：体系 → 等式右端：控制体

积分形式能量方程

$$\iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}V^2 + u\right)\right]d\tau + \oint\!\!\!\oint_{CS} \rho\left(\frac{1}{2}V^2 + u\right)\vec{V}\cdot d\vec{S}$$

$$= \iiint_{CV} (\rho\vec{R}\cdot\vec{V})d\tau + \oint\!\!\!\oint_{CS} P\cdot\vec{V}\cdot d\vec{S} + \oint\!\!\!\oint_{CS} kgradT\cdot d\vec{S} + \iiint_{CV} \rho q d\tau$$



流体体系与控制体

由奥-高定理，将面积分转化为体积分，即可得到微分形式的能量方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}V^2 + u\right)\right] + div\left[\rho\left(\frac{1}{2}V^2 + u\right)\vec{V}\right] = \rho\vec{R}\cdot\vec{V} + div(P\cdot\vec{V}) + div(kgradT) + \rho q$$

注意：能量方程有多种形式！比如，可以以**焓、动能、内能**等为未知量。

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

§ N-S方程组

■ 积分形式

$$\iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t} \rho d\tau + \oiint_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) d\tau + \oiint_{CS} (\rho \vec{V})(\vec{V} \cdot d\vec{S}) = \iiint_{CV} \rho \vec{R} d\tau + \oiint_{CS} P \cdot d\vec{S}$$

$$\iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e_t) d\tau + \oiint_{CS} \rho e_t \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint_{CV} (\rho \vec{R} \cdot \vec{V}) d\tau + \oiint_{CS} P \cdot \vec{V} \cdot d\vec{S} + \oiint_{CS} k grad T \cdot d\vec{S} + \iiint_{CV} \rho q d\tau$$

$$P = -pI + 2\mu \left(S - \frac{1}{3} I div \vec{V} \right)$$

$$e_t = \left(\frac{1}{2} V^2 + u \right)$$

2.2 流体力学控制方程

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

§ N-S方程组

■ 微分形式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\underbrace{div(\rho\vec{V})}_{1}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V})+\underbrace{div(\rho\vec{V}\vec{V})}_{2}=\rho\vec{R}+\underbrace{divP}_{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_t)+\underbrace{div(\rho e_t\vec{V})}_{4}=\rho\vec{R}\cdot\vec{V}+\underbrace{div(P\cdot\vec{V})}_{5}+\underbrace{div(kgradT)}_{6}+\rho q$$

$$e_t=\left(\frac{1}{2}V^2+u\right)$$

$$P=-pI+2\mu\left(S-\underbrace{\frac{1}{3}Idiv\vec{V}}_{7}\right)$$

笛卡尔坐标系

$$\vec{R}=X_1\vec{i}+X_2\vec{j}+X_3\vec{k}$$

$$divP=\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[2\mu\left(s_{ij}-\frac{1}{3}s_{kk}\delta_{ij}\right)\right]$$

问题：如何得到笛卡尔坐标系下的分量形式控制方程?

2.2 流体力学控制方程

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

§ 推导过程

张量实体形式N-S方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{V}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + div(\rho\vec{V}\vec{V}) = \rho\vec{R} + divP$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_t) + div(\rho e_t\vec{V}) = \rho\vec{R}\cdot\vec{V} + div(P\cdot\vec{V}) + div(kgradT) + \rho q$$

$$P = -pI + 2\mu\left(S - \frac{1}{3}Idiv\vec{V}\right)$$

$$e_t = \left(\frac{1}{2}V^2 + u\right)$$

按对应坐标系下的微分算子展开

对应坐标系下的方程
(比如笛卡尔坐标系等正交曲线坐标系)

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

§ 笛卡尔坐标系N-S方程

$$\vec{R} = X_1\vec{i} + X_2\vec{j} + X_3\vec{k}$$

$$divP = \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[2\mu\left(s_{ij} - \frac{1}{3}s_{kk}\delta_{ij}\right)\right]$$

$$P = -pI + 2\mu\left(S - \frac{1}{3}Idiv\vec{V}\right) = -pI + \tau$$

在笛卡尔（直角）坐标系下，将实体形式的N-S方程展开

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = \rho X_i + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_t) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho e_t v_j) = \rho X_i \cdot v_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(p_{ij} \cdot v_j) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial}{\partial x_j}T\right) + \rho q$$

写成分量形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uu + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho uw) = \rho X_1 + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho vu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv + p) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho vw) = \rho X_2 + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho wu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho wv) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho ww + p) = \rho X_3 + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_t) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho e_t + p)u + \frac{\partial}{\partial y}(\rho e_t + p)v + \frac{\partial}{\partial z}(\rho e_t + p)w = \rho X_i \cdot v_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij} \cdot v_j) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial}{\partial x_j}T\right) + \rho q$$

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

To be continued …