第二部分 笛卡尔张量分析基础讲义

陈 兵

北京航空航天大学

2025 年 10 月

目　录

一、引言：为什么要学习张量

在近代工程与物理学科，尤其是流体力学、飞行力学等领域，张量已成为不可或缺的数学工具。从飞行力学视角，利用张量可高效简洁地建立基于广义坐标的动力学模型，且推导过程不易出错（余文斌老师 ppt）；在流体力学领域，吴望一教授在《流体力学（第二版）》（北京大学出版社，2021）中明确指出："在近代理论流体力学和计算流体力学中，越来越广泛地使用张量表示方法。张量表示方法具有书写简洁，运算方便的优点。当表达物理规律的方程中，同时出现张量和矢量时，张量表示方法更加显示其优越性。"

张量的核心价值在于其**坐标不变性**——物理规律的本质不应随坐标系的选择而改变，而张量能精准捕捉这种不变性，同时通过简洁的符号系统简化复杂运算。例如，流体微元的应力状态、速度梯度等物理量，若用常规矢量或标量描述需拆分多个分量，且易因坐标系变换导致方程形式混乱，而张量可统一表征这些多分量物理量，让方程形式在任意坐标系下保持一致。

本讲义将系统讲解笛卡尔张量分析基础，涵盖张量的定义与表示法、坐标系变换、单位张量与矢量运算、张量运算及二阶张量等核心内容，为后续流体力学、飞行力学等课程的学习奠定数学基础。

二、张量的定义及表示法

2.1 张量的定义

2.1.1 代数视角：标量、矢量的推广

张量是标量和矢量的自然推广，其核心特征是**分量数量与阶数的关联**，以及**坐标变换下的特定规律**。具体定义如下：

- **标量（0 阶张量）**：仅具有大小的物理量，无方向属性。在三维空间中，标量仅有 $3^0 = 1$ 个分量，例如空间某点的大气温度 T、流体的密度 ρ 等。标量的数值不随坐标系变换而改变。

- **矢量（1 阶张量）**：同时具有大小和方向的物理量，在三维空间中具有 $3^1 = 3$ 个分量，分量按顺序排列成一维表格。例如重力 $\vec{g}$、流体的速度 $\vec{u}$ 等，其分量可表示为 (u_1, u_2, u_3)（对应笛卡尔坐标系的 x_1, x_2, x_3 轴）。

- **二阶张量**：描述物理量在空间不同方向上的关联属性（如应力、应变），在三维空间中具有 $3^2 = 9$ 个分量，分量按纵横位置排列成二维矩阵。例如流体微元的应力张量 τ_{ij}，其矩阵形式为：

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

其中 τ_{ij} 表示作用在垂直于 x_i 轴的面元上、沿 x_j 方向的应力分量。

- **n 阶张量**：推广到n阶，张量可视为 n 维表格，在三维空间中具有 3^n 个分量。例如三阶张量可描述材料的压电效应（应力与电场、应变的关联），具有 $3^3 = 27$ 个分量。

2.1.2 物理视角：坐标变换下的不变性

从物理本质上，张量是“在三维坐标系中具有 3^n 个分量，且分量随坐标系变换满足特定规律，从而保证物理量本质不变”的物理量。

关键概念：**张量的不变性**——一个物理量本身的性质（如标量的大小、矢量的大小与方向、二阶张量的主值等），不会随坐标系的改变而发生变化。例如：

- 矢量 $\vec{u}$ 在老坐标系（基向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$）中表示为 $\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3$；
- 在新坐标系（基向量 $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$）中表示为 $\vec{u} = u_1{}'\vec{e}_1{}' + u_2{}'\vec{e}_2{}' + u_3{}'\vec{e}_3{}'$；
- 尽管分量 u_i 与 $u_i{}'$ 数值不同，但矢量 $\vec{u}$ 的大小（$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{u_1{}'^2 + u_2{}'^2 + u_3{}'^2}$）和方向保持不变，这就是矢量（1 阶张量）的不变性。

不同阶张量的不变量数量遵循规律：n 阶张量具有 $n + 1$ 个独立不变量，例如：

- 0 阶张量（标量）：1 个不变量（自身大小）；
- 1 阶张量（矢量）：2 个不变量（大小、方向）；
- 2 阶张量：3 个不变量（如主值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$）；
- n阶张量：$n + 1$ 个不变量。

2.2 张量的表示法

为适应不同场景（如公式推导、物理意义解读），张量有多种表示方法，核心包括实体法、基向量法、分量法和指标法，其中**指标法**是张量运算的核心工具。

2.2.1 实体法

直接用单个符号表示张量整体，不展开分量，适用于强调张量的物理本质或整体运算关系。例如：

- 矢量：$\vec{a},\vec{u},\vec{F}$；
- 二阶张量：$\mathbf{A},\mathbf{P},\tau$（应力张量）；
- n阶张量：$\mathbf{T}$（一般 n 阶张量）。

实体法的优点是简洁直观，能快速建立物理量之间的整体关系（如 $\vec{F}=\mathbf{P}\cdot\vec{u}$ 表示力与应力张量、速度的关联），但无法展开具体分量运算。

2.2.2 基向量法

将张量表示为“分量 + 基向量”的线性组合，明确体现张量在坐标系中的分量分布。例如：

- 矢量（1 阶张量）：$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$，其中 $\vec{e}_i$ 为笛卡尔坐标系的单位基向量（满足 $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}$，$\delta_{ij}$ 为克罗内克符号，后续将详细讲解）；
- 二阶张量：$\mathbf{A}=a_{11}\vec{e}_1\vec{e}_1+a_{12}\vec{e}_1\vec{e}_2+a_{13}\vec{e}_1\vec{e}_3+a_{21}\vec{e}_2\vec{e}_1+\cdots+a_{33}\vec{e}_3\vec{e}_3=a_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$（利用爱因斯坦求和约定，后续讲解），其中 $\vec{e}_i\vec{e}_j$ 为二阶张量的基（共 $3\times3=9$ 个）；
- n 阶张量：$\mathbf{T}=T_{i_1i_2\cdots n}\vec{e}_{i_1}\vec{e}_{i_2}\ldots\vec{e}_{i_n}$，基为 $\vec{e}_{i_1}\vec{e}_{i_2}\ldots\vec{e}_{i_n}$（共 3^n 个）。

基向量法的优点是明确关联分量与坐标系，便于理解张量的几何意义，但符号较长，不适用于复杂运算。

2.2.3 分量法

仅用张量的分量矩阵表示张量，适用于矩阵运算场景（如二阶张量的求逆、特征值求解）。例如：

- 矢量（1 阶张量）：分量行矩阵 (a_1,a_2,a_3) 或列矩阵 $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$；

- 二阶张量：分量矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$；
- n 阶张量：n 维分量数组（如三阶张量的分量可表示为 a_{ijk} 的三维数组）。

分量法的优点是直接与矩阵代数结合，便于数值计算，但缺乏对张量整体物理意义的体现，且高阶张量的分量矩阵难以可视化。

2.2.4 指标法与爱因斯坦求和约定

指标法是张量分析的核心表示法，通过"字母下标"表示分量，结合**爱因斯坦求和约定**（Einstein Summation Convention）简化求和符号，极大提升运算效率。

（1）自由标与哑标

- **自由标**：在表达式中仅出现一次的下标，可在 1,2,3 范围内任意取值，代表张量的"自由维度"。例如：
  - 矢量 $\vec{a}$ 的指标表示为 a_i，其中 i 为自由标（$i = 1,2,3$），对应分量 a_1, a_2, a_3；
  - 二阶张量 $\mathbf{A}$ 的指标表示为 A_{ij}，其中 i, j 为自由标（各取 1,2,3），对应 9 个分量 $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{33}$。
- **哑标**：在同一项中重复出现的下标，代表"对该下标从 1 到 3 求和"，求和符号 $\sum_{i=1}^{3}$ 可省略，这就是爱因斯坦求和约定。例如：
  - 矢量点积 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{j=1}^{3} a_j\, b_j = a_j b_j$，其中 j 为哑标；
  - 矩阵的迹（主对角线元素之和）$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \sum_{i=1}^{3} A_{ii} = A_{ii}$，其中 i 为哑标；
  - 矢量散度 $\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$，其中 j 为哑标。

注意：哑标的字母可任意替换（如 $a_j b_j = a_k b_k$），但需避免与自由标冲突；同一表达式中，哑标最多重复两次（否则求和意义不明确）。

（2）指标法的应用示例

- 矢量加法：$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ 用指标法表示为 $c_i = a_i + b_i$（i 为自由标）；
- 二阶张量与矢量的内积：$\vec{b} = \mathbf{A} \cdot \vec{a}$ 表示为 $b_i = A_{ij} a_j$（j 为哑标，i 为自由标）；

- 标量的梯度：$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\vec{e}_3$，指标法表示为 $(\nabla\phi)_i = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}$。

指标法的核心优势是：将复杂的张量运算转化为"下标管理"，无需书写大量求和符号和基向量，同时保持方程的坐标不变性（下标形式在任意坐标系下一致）。

三、笛卡尔坐标系的变换

在实际问题中，常需将张量从一个笛卡尔坐标系转换到另一个坐标系（如从全局坐标系到局部坐标系）。笛卡尔坐标系的变换由**平动**、**旋转**和**反射**组成，若新旧坐标系均为右手系（工程中常用），则仅需考虑**旋转变换**（平动不改变张量分量，反射可通过旋转与符号调整处理）。

3.1 坐标系变换的基本参数：方向余弦

设老坐标系为 $Ox_1x_2x_3$，基向量为 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$；新坐标系为 $Ox_1'x_2'x_3'$，基向量为 $\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'$，两坐标系原点重合（平动已消除）。

定义**方向余弦** α_{ij} 为新基向量 $\vec{e}_i'$ 与老基向量 $\vec{e}_j$ 之间的夹角余弦，即：

$$\alpha_{ij} = \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j = \cos\left(\vec{e}_i', \vec{e}_j\right)$$

同理，定义 $\beta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j'$（老基向量与新基向量的夹角余弦），但由于点积的交换律（$\vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i'$），可得 $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$。

方向余弦的几何意义：α_{ij} 描述新基 $\vec{e}_i'$ 在老基 $\vec{e}_j$ 方向上的投影长度（因基向量为单位向量）。例如，α_{12} 是 $\vec{e}_1'$ 在 $\vec{e}_2$ 方向的投影，即两基向量夹角的余弦。

3.2 基向量的变换关系

利用方向余弦，可建立新旧基向量之间的线性关系。

3.2.1 新基向量用老基向量表示

新基向量 $\vec{e}_i'$ 可分解为老基向量的线性组合，系数为方向余弦 α_{ij}：

$$\vec{e}_i' = \alpha_{i1}\vec{e}_1 + \alpha_{i2}\vec{e}_2 + \alpha_{i3}\vec{e}_3 = \alpha_{ij}\vec{e}_j$$

（利用爱因斯坦求和约定，j 为哑标，求和范围 $1 \sim 3$）。例如，$\vec{e}_1' = \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{12}\vec{e}_2 + \alpha_{13}\vec{e}_3$，其中 $\alpha_{11} = \vec{e}_1' \cdot \vec{e}_1$，$\alpha_{12} = \vec{e}_1' \cdot \vec{e}_2$，$\alpha_{13} = \vec{e}_1' \cdot \vec{e}_3$。

3.2.2 老基向量用新基向量表示

同理，老基向量 $\vec{e}_i$ 可分解为新基向量的线性组合，系数为 $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$：

$$\vec{e}_i = \beta_{i1}\vec{e}_1{}' + \beta_{i2}\vec{e}_2{}' + \beta_{i3}\vec{e}_3{}' = \beta_{ij}\vec{e}_j{}' = \alpha_{ji}\vec{e}_j{}'$$

例如，$\vec{e}_1 = \alpha_{11}\vec{e}_1{}' + \alpha_{21}\vec{e}_2{}' + \alpha_{31}\vec{e}_3{}'$（因 $\beta_{1j} = \alpha_{j1}$）。

3.2.3 方向余弦的正交性

由于基向量是正交归一的（$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$，$\vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_j{}' = \delta_{ij}$），方向余弦满足**正交性条件**：

$$\alpha_{ik}\alpha_{jk} = \delta_{ij}, \quad \alpha_{ki}\alpha_{kj} = \delta_{ij}$$

（证明：以 $\alpha_{ik}\alpha_{jk} = \delta_{ij}$ 为例，$\alpha_{ik}\alpha_{jk} = (\vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_k)\left(\vec{e}_j{}' \cdot \vec{e}_k\right) = \vec{e}_i{}' \cdot \left(\vec{e}_k\vec{e}_k \cdot \vec{e}_j{}'\right) = \vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_j{}' = \delta_{ij}$）。

正交性条件的物理意义：方向余弦矩阵 $\mathbf{A} = \left(\alpha_{ij}\right)$ 是正交矩阵，满足 $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$（$\mathbf{I}$ 为单位矩阵），其逆矩阵等于转置矩阵（$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$）。

3.3 用坐标变换定义张量

张量的本质是“分量随坐标系变换满足特定规律的物理量”，因此可通过**分量的变换公式**严格定义不同阶的张量。

3.3.1 标量（0 阶张量）的定义

设空间任意一点 P 在老坐标系中的坐标为 (x_1, x_2, x_3)，在新坐标系中的坐标为 $(x_1{}', x_2{}', x_3{}')$。若存在一个物理量 ϕ，其在 P 点的数值在新旧坐标系中相等，即：

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \phi'(x_1{}', x_2{}', x_3{}')$$

则 ϕ 称为**标量**（0 阶张量）。

例如，温度 T、密度 ρ 等，其数值与坐标系选择无关，符合标量的定义。

3.3.2 矢量（1 阶张量）的定义

若存在一组物理量 a_1, a_2, a_3（老坐标系分量）和 $a_1{}', a_2{}', a_3{}'$（新坐标系分量），满足分量变换公式：

$$a_i{}' = \alpha_{ij}a_j \quad (\text{新分量} = \text{方向余弦} \times \text{老分量})$$

$$a_i = \alpha_{ji} a_j' \quad \left(\text{老分量} = \text{方向余弦转置} \times \text{新分量}\right)$$

则这组分量定义的物理量称为**矢量**（1 阶张量），记为 $\vec{a}$。

证明：矢量 $\vec{a}$ 在老坐标系中表示为 $\vec{a} = a_j \vec{e}_j$，在新坐标系中表示为 $\vec{a} = a_i' \vec{e}_i'$。将 $\vec{e}_j = \alpha_{kj} \vec{e}_k'$（老基用新基表示）代入老坐标系表达式：

$$\vec{a} = a_j \cdot \alpha_{kj} \vec{e}_k' = \left(\alpha_{kj} a_j\right) \vec{e}_k'$$

与新坐标系表达式 $\vec{a} = a_k' \vec{e}_k'$ 比较，可得 $a_k' = \alpha_{kj} a_j$，即 $a_i' = \alpha_{ij} a_j$（替换哑标 k 为 i）。

同理，可推导 $a_i = \alpha_{ji} a_j'$。

3.3.3 二阶张量的定义

若存在一组物理量 p_{ij}（老坐标系分量，共 9 个）和 p_{ij}'（新坐标系分量，共 9 个），满足分量变换公式：

$$p_{ij}' = \alpha_{il} \alpha_{jm} p_{lm}$$

（新分量 = 两个方向余弦 × 老分量，对哑标 l, m 求和），则这组分量定义的物理量称为**二阶张量**，记为 **P**。

物理意义：二阶张量的分量变换需“对每个下标分别应用矢量的变换规律”——因二阶张量可视为“两个矢量的外积”（后续讲解），每个矢量的分量需乘一个方向余弦，故二阶张量需乘两个方向余弦。

3.3.4 n 阶张量的定义

推广到n阶，若存在一组物理量 $p_{i_1 i_2 \cdots i_n}$（老分量，共 3^n 个）和 $p'_{i_1 i_2 \cdots i_n}$（新分量，共 3^n 个），满足分量变换公式：

$$p'_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \cdots \alpha_{i_n j_n} p_{j_1 j_2 \cdots j_n}$$

（对每个新下标 i_k，对应一个方向余弦 $\alpha_{i_k j_k}$，对所有哑标 $j_1, \dots, j_n$ 求和），则这组分量定义的 **n 阶张量**，记为 **P**。

3.4 方向余弦表与变换示例

3.4.1 方向余弦表

方向余弦 α_{ij} 可整理为表格形式，如表 3-1 所示，清晰展示新旧基向量的夹角关系：

表 3-1 新旧基向量的夹角关系

新基 老基	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1{}'$	$\alpha_{11} = \vec{e}_1{}' \cdot \vec{e}_1$	$\alpha_{12} = \vec{e}_1{}' \cdot \vec{e}_2$	$\alpha_{13} = \vec{e}_1{}' \cdot \vec{e}_3$
$\vec{e}_2{}'$	$\alpha_{21} = \vec{e}_2{}' \cdot \vec{e}_1$	$\alpha_{22} = \vec{e}_2{}' \cdot \vec{e}_2$	$\alpha_{23} = \vec{e}_2{}' \cdot \vec{e}_3$
$\vec{e}_3{}'$	$\alpha_{31} = \vec{e}_3{}' \cdot \vec{e}_1$	$\alpha_{32} = \vec{e}_3{}' \cdot \vec{e}_2$	$\alpha_{33} = \vec{e}_3{}' \cdot \vec{e}_3$

3.4.2 变换示例：绕 x3 轴旋转 θ 角

设新坐标系 $Ox_1{}'x_2{}'x_3{}'$ 由老坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 绕 x_3 轴（$\vec{e}_3 = \vec{e}_3{}'$）旋转 θ 角得到，求方向余弦及矢量分量的变换。

步骤 1：确定基向量关系

- $\vec{e}_3{}' = \vec{e}_3$（旋转轴重合），故 $\alpha_{31} = \vec{e}_3{}' \cdot \vec{e}_1 = 0$，$\alpha_{32} = 0$，$\alpha_{33} = 1$；
- $\vec{e}_1{}'$ 与 $\vec{e}_1$ 夹角为 θ，与 $\vec{e}_2$ 夹角为 $90° - \theta$，故 $\alpha_{11} = \cos\theta$，$\alpha_{12} = \sin\theta$，$\alpha_{13} = 0$；
- $\vec{e}_2{}'$ 与 $\vec{e}_1$ 夹角为 $90° + \theta$，与 $\vec{e}_2$ 夹角为 θ，故 $\alpha_{21} = -\sin\theta$，$\alpha_{22} = \cos\theta$，$\alpha_{23} = 0$。

步骤 2：方向余弦矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

步骤 3：矢量分量变换 设老坐标系中矢量 $\vec{a}$ 的分量为 $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0$（沿 $\vec{e}_1$ 方向），则新分量为：

$$a_1{}' = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \alpha_{13}a_3 = \cos\theta \cdot 1 + \sin\theta \cdot 0 + 0 \cdot 0 = \cos\theta$$

$$a_2{}' = \alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \alpha_{23}a_3 = -\sin\theta \cdot 1 + \cos\theta \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -\sin\theta$$

$$a_3{}' = \alpha_{31}a_1 + \alpha_{32}a_2 + \alpha_{33}a_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

结果符合几何直观：沿老坐标系 x_1 轴的矢量，在新坐标系中沿 $x_1{}'$ 方向的分量为 $\cos\theta$，沿 $x_2{}'$ 方向的分量为 $-\sin\theta$。

四、单位张量及矢量运算

在张量分析中，有两类特殊的单位张量——**二阶单位张量（克罗内克符号）**和 **三阶单位张量（置换符号）**，它们是构建张量运算和矢量运算的基础工具。同时，利用张量的指标表示法，可将传统的矢量运算（如点积、叉积、梯度、散度）统一为简洁的下标表达式。

4.1 二阶单位张量：克罗内克符号（δ_{ij}）

4.1.1 定义与矩阵形式

二阶单位张量，又称克罗内克符号（Kronecker Delta），记为 δ_{ij}，其定义为：

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = j \\ 0 & \text{当 } i \neq j \end{cases}$$

在笛卡尔坐标系中，δ_{ij} 的物理意义是**单位矩阵的分量**，其矩阵形式为：

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即主对角线元素为 1，非主对角线元素为 0。

从基向量角度，δ_{ij} 等于基向量的点积：$\delta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$（因基向量正交归一，$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 1$ 当 $i = j$，否则为 0），这也解释了为何 δ_{ij} 是二阶张量（满足二阶张量的分量变换规律，后续可通过张量识别定理验证）。

4.1.2 基本性质

克罗内克符号的核心性质包括**收缩性**（又称“置换下标”）、对称性和迹为常数，这些性质是简化张量运算的关键。

（1）收缩性（置换下标）

若 δ_{ij} 与某一张量的下标重复（形成哑标），则可将该张量的对应下标置换为 δ_{ij} 的另一下标，同时 δ_{ij} 消失。这一性质称为“收缩性”，是 δ_{ij} 最常用的性质。

示例：

- 与矢量分量收缩：$\delta_{ij}a_j = a_i$（证明：当 $i = 1$ 时，$\delta_{1j}a_j = \delta_{11}a_1 + \delta_{12}a_2 + \delta_{13}a_3 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 = a_1$，同理 $i = 2{,}3$ 时成立）；
- 与二阶张量分量收缩：$\delta_{ij}A_{jk} = A_{ik}$（$j$ 为哑标，置换 A_{jk} 的第一个下标为 i），$A_{ij}\delta_{jk} = A_{ik}$（置换 A_{ij} 的第二个下标为 k）；
- 双重收缩：$\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{11}\delta_{11} + \delta_{12}\delta_{12} + \cdots + \delta_{33}\delta_{33} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \cdots + 1 \cdot 1 = 3$。

（2）对称性

$\delta_{ij} = \delta_{ji}$（交换下标不改变数值），例如 $\delta_{12} = 0 = \delta_{21}$，$\delta_{22} = 1 = \delta_{22}$。

（3）迹为 3

二阶张量的“迹”（trace）定义为主对角线分量之和，δ_{ij} 的迹为：

$$\mathrm{tr}\left(\delta_{ij}\right) = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3$$

用指标法表示为 $\delta_{ii} = 3$（i 为哑标，求和）。

4.1.3 应用示例：简化矢量点积

矢量点积 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 可通过 δ_{ij} 与基向量点积关联，从而验证指标表示的正确性：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_i\vec{e}_i) \cdot \left(b_j\vec{e}_j\right) = a_ib_j\left(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j\right) = a_ib_j\delta_{ij} = a_ib_i$$

（最后一步利用 δ_{ij} 的收缩性：$\delta_{ij}b_j = b_i$），与爱因斯坦求和约定的结果一致，说明 δ_{ij} 是连接基向量运算与指标运算的桥梁。

4.2 三阶单位张量：置换符号（ε_{ijk}）

4.2.1 定义与物理意义

三阶单位张量，又称置换符号（Ricci Symbol），记为 ε_{ijk}，其定义为：

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i,j,k \text{ 为正排序（偶排列）：} 123, 231, 312 \\ -1 & \text{当 } i,j,k \text{ 为逆排序（奇排列）：} 321, 213, 132 \\ 0 & \text{当 } i,j,k \text{ 有重复下标（不成排列）：} 112, 233, \text{等} \end{cases}$$

排序的定义：将下标 1,2,3 视为初始顺序（正排序），通过交换下标次数判断排列性质——交换偶数次得到的排列为偶排列（正排序），交换奇数次得到的排列为奇排列（逆排序）。例如：

- 123（0 次交换）→ 偶排列，$\varepsilon_{123} = 1$；
- 231（123 → 213 → 231，2 次交换）→ 偶排列，$\varepsilon_{231} = 1$；
- 321（123 → 321，1 次交换）→ 奇排列，$\varepsilon_{321} = -1$；
- 112（下标 1 重复）→ $\varepsilon_{112} = 0$。

ε_{ijk} 的物理意义是**描述三维空间中基向量的叉积关系**：$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k$（例如 $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 = \varepsilon_{123}\vec{e}_3$，$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 = \varepsilon_{213}\vec{e}_3$），这也说明 ε_{ijk} 是三阶张量（满足三阶张量的分量变换规律）。

4.2.2 基本性质

置换符号的核心性质包括**反对称性**和 **ε-δ 恒等式**（置换符号与克罗内克符号的组合运算），其中 ε-δ 恒等式是简化高阶张量运算的关键工具。

（1）反对称性

交换任意两个下标，ε_{ijk} 的符号改变，即：

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji}$$

例如：

- $\varepsilon_{123} = 1$，交换 1 和 2 得 $\varepsilon_{213} = -1 = -\varepsilon_{123}$；
- $\varepsilon_{231} = 1$，交换 2 和 3 得 $\varepsilon_{321} = -1 = -\varepsilon_{231}$。

若下标中有重复（如 $i = j$），则 $\varepsilon_{ijk} = 0$，这也符合反对称性（交换 i 和 j 后符号改变，但数值应不变，故只能为 0）。

（2）ε-δ 恒等式

置换符号与克罗内克符号的组合运算满足以下恒等式（称为 ε-δ 恒等式）：

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ist} = \delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks}$$

（对哑标 i 求和，共 3 项：$i = 1,2,3$）。

证明（以 $j = 1, s = 1$ 为例）：左边：$\varepsilon_{i1k}\varepsilon_{i1t} = \varepsilon_{11k}\varepsilon_{11t} + \varepsilon_{21k}\varepsilon_{21t} + \varepsilon_{31k}\varepsilon_{31t}$

- 当 $i = 1$ 时，$\varepsilon_{11k} = 0$，故第一项为 0；
- 当 $i = 2$ 时，$\varepsilon_{21k} = -\varepsilon_{12k}$，$\varepsilon_{21t} = -\varepsilon_{12t}$，故第二项为 $\varepsilon_{12k}\varepsilon_{12t}$；
- 当 $i = 3$ 时，$\varepsilon_{31k} = \varepsilon_{1k3}$（反对称性），$\varepsilon_{31t} = \varepsilon_{1t3}$，故第三项为 $\varepsilon_{1k3}\varepsilon_{1t3}$。

分情况讨论 k, t：

- 若 $k = t = 1$：左边 = 0 + $\varepsilon_{121}\varepsilon_{121}$（0） + $\varepsilon_{113}\varepsilon_{113}$（0）= 0；右边 = $\delta_{11}\delta_{11} - \delta_{11}\delta_{11}$ = 1×1 - 1×1 = 0，等式成立；
- 若 $k = 2, t = 3$：左边 = 0 + $\varepsilon_{122}\varepsilon_{123}$（0） + $\varepsilon_{123}\varepsilon_{133}$（0）= 0；右边 = $\delta_{11}\delta_{23} - \delta_{13}\delta_{21}$ = 1×0 - 0×0 = 0，等式成立；
- 若 $k = 2, t = 2$：左边 = 0 + $\varepsilon_{122}\varepsilon_{122}$（0） + $\varepsilon_{123}\varepsilon_{123}$（1×1=1）= 1；右边 = $\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}$ = 1×1 - 0×0 = 1，等式成立。

其他情况可类似验证，最终得证 ε-δ 恒等式成立。

ε-δ 恒等式的推广形式（双重收缩）：

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$

（证明：令 $s = j, t = k$，则 $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = \delta_{jj}\delta_{kk} - \delta_{jk}\delta_{kj} = 3 \times 3 - 3 = 9 - 3 = 6$）。

4.2.3 应用示例：简化矢量叉积

矢量叉积 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的分量可通过 ε_{ijk} 表示，结合 ε-δ 恒等式可进一步简化运算。

（1）矢量叉积的分量表示

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_i\vec{e}_i) \times (b_j\vec{e}_j) = a_ib_j(\vec{e}_i \times \vec{e}_j) = a_ib_j \cdot \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k = (\varepsilon_{ijk}a_jb_k)\vec{e}_k$$

因此，叉积 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的第 k 个分量为：

$$(\vec{a} \times \vec{b})_k = \varepsilon_{ijk}a_jb_k$$

用矩阵形式验证（以 $k = 3$ 为例）：

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b})_3 &= \varepsilon_{i3j}a_jb_i = \varepsilon_{132}a_2b_1 + \varepsilon_{231}a_1b_2 + \cdots = (-1)a_2b_1 + 1 \times a_1b_2 \\ &= a_1b_2 - a_2b_1\end{aligned}$$

与传统叉积公式 $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ 中 $\vec{e}_3$ 分量一致，证明正确。

（2）三重积的简化（ scalar triple product ）

矢量的标量三重积 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ 可通过 ε-δ 恒等式简化：

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_i(\vec{b}\times\vec{c})_i = a_i\cdot\varepsilon_{ijk}b_jc_k = \varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k$$

利用 ε-δ 恒等式，还可证明标量三重积的循环性：$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$。

4.3 各向同性张量

4.3.1 定义

各向同性张量是指“分量在任意旋转变换下保持不变”的张量，即对任意旋转坐标系，张量的分量满足：

$$p_{i_1 i_2 \cdots n}{}' = p_{i_1 i_2 \cdots n}$$

物理意义：各向同性张量的物理性质与方向无关（如流体的粘度、固体的体积弹性模量），而非各向同性张量（如晶体的弹性张量）的性质随方向变化。

4.3.2 常见各向同性张量示例

根据阶数不同，各向同性张量具有特定的形式，工程中常用的包括：

（1）0 阶张量（标量）

所有标量都是各向同性张量——标量无分量，数值不随坐标系变换而改变（如温度、密度）。

（2）1 阶张量（矢量）

除**零矢量**（所有分量为 0）外，不存在非零的 1 阶各向同性张量。原因：非零矢量具有明确的方向，旋转坐标系会改变其分量（如沿 x_1 轴的矢量，旋转后沿 x_1' 轴的分量改变），故分量无法保持不变。

（3）2 阶各向同性张量

任意 2 阶各向同性张量的形式必为：

$$p_{ij} = \lambda\delta_{ij}$$

其中 λ 为标量，δ_{ij} 为克罗内克符号。

证明：设 p_{ij} 为 2 阶各向同性张量，取绕 x_3 轴旋转 90° 的坐标系变换，方向余弦矩阵为：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

根据各向同性定义，$p_{11}' = p_{11}$。而由二阶张量变换公式：

$$p_{11}' = \alpha_{1l}\alpha_{1m}p_{lm} = \alpha_{11}\alpha_{11}p_{11} + \alpha_{12}\alpha_{12}p_{22} + \cdots = 0 \times 0 \times p_{11} + 1 \times 1 \times p_{22} + 0 = p_{22}$$

故 $p_{11} = p_{22}$。同理，绕 x_1 轴旋转可证 $p_{22} = p_{33}$，即主对角线分量相等（设为 λ）。

再考虑非主对角线分量 p_{12}，旋转后 $p_{12}' = p_{12}$，而：

$$p_{12}' = \alpha_{1l}\alpha_{2m}p_{lm} = \alpha_{11}\alpha_{21}p_{11} + \alpha_{12}\alpha_{22}p_{22} + \alpha_{11}\alpha_{22}p_{12} + \alpha_{12}\alpha_{21}p_{21}$$

代入 $\alpha_{11} = 0, \alpha_{12} = 1, \alpha_{21} = -1, \alpha_{22} = 0$ 及 $p_{11} = p_{22} = \lambda$，得：

$$p_{12}' = 0 + 0 + 0 \times 0 \times p_{12} + 1 \times (-1)p_{21} = -p_{21}$$

由各向同性 $p_{12}' = p_{12}$，且若张量对称（如应力张量），$p_{12} = p_{21}$，故 $p_{12} = -p_{12} \rightarrow p_{12} = 0$。同理可证所有非主对角线分量为 0，因此 $p_{ij} = \lambda\delta_{ij}$。

（4）3 阶各向同性张量

任意 3 阶各向同性张量的形式必为：

$$p_{ijk} = \lambda\varepsilon_{ijk}$$

其中 λ 为标量，ε_{ijk} 为置换符号。证明思路与 2 阶类似，利用旋转对称性可证非 ε_{ijk} 形式的分量必为 0。

（5）4 阶各向同性张量

任意 4 阶各向同性张量的形式必为：

$$p_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk}$$

其中 α, β, γ 为标量。4 阶各向同性张量在弹性力学中应用广泛（如弹性张量），描述应力与应变的线性关系。

4.4 矢量运算的张量表示

利用张量的指标法和单位张量，可将传统的矢量运算（如加减、点积、叉积、梯度、散度、旋度）统一为简洁的下标表达式，且这些表达式具有**坐标不变性**（在任意笛卡尔坐标系下形式一致）。

以下运算均在三维笛卡尔坐标系中进行，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为矢量，ϕ 为标量，$\nabla= \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ 为哈密尔顿算子（梯度算子）。

4.4.1 矢量的代数运算

（1）矢量加减

$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad c_i = a_i \pm b_i$$

（i 为自由标，对应三个分量的加减）。

（2）矢量点积（内积）

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$$

（i 为哑标，求和；结果为标量）。

推论：矢量的模（大小）$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_i a_i}$。

（3）矢量叉积（外积）

$$\vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i$$

（j,k 为哑标，求和；结果为矢量，第 i 个分量为 $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$）。

（4）标量与矢量的乘积

$$\vec{b} = \lambda \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad b_i = \lambda a_i$$

（λ 为标量，i 为自由标）。

4.4.2 矢量的微分运算

矢量的微分运算涉及哈密尔顿算子 ∇，其指标表示为 $\nabla_i= \frac{\partial}{\partial x_i}$（第 i 个分量）。

（1）哈密尔顿算子（∇）

$$\nabla = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

指标表示：$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$。

（2）拉普拉斯算子（Δ）

拉普拉斯算子是哈密尔顿算子的自点积，即 $\mathit{\Delta} = \nabla \cdot \nabla$，指标表示为：

$$\mathit{\Delta} = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

（对 i 求和，即 $\mathit{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$）。

（3）标量的梯度（∇φ）

标量 ϕ 的梯度是矢量，描述标量在空间中的变化率与方向，指标表示为：

$$(\nabla\phi)_i = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}$$

矢量形式：$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\vec{e}_i$。

物理意义：$\nabla\phi$ 的方向是标量 ϕ 增长最快的方向，大小是该方向的变化率（如温度梯度 ∇T 指向温度升高最快的方向）。

（4）矢量的散度（$\nabla\cdot\vec{a}$）

矢量 $\vec{a}$ 的散度是标量，描述矢量场的“源汇”性质（如流体的体积膨胀率），指标表示为：

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

（对 i 求和，即 $\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$）。

物理意义：若 $\nabla \cdot \vec{a} > 0$，表示该点为“源”（如流体从该点流出）；若 $\nabla \cdot \vec{a} < 0$，表示该点为“汇”（如流体向该点流入）；若 $\nabla \cdot \vec{a} = 0$，表示矢量场无源（如不可压缩流体的连续性方程 $\nabla \cdot \vec{u} = 0$）。

（5）矢量的旋度（$\nabla\times\vec{a}$）

矢量 $\vec{a}$ 的旋度是矢量，描述矢量场的“旋转”性质（如流体的涡量），指标表示为：

$$(\nabla\times\vec{a})_i=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j}$$

矢量形式：$\nabla\times\vec{a}=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j}\vec{e}_i$。

物理意义：$\nabla\times\vec{a}$ 的方向是矢量场旋转的轴线方向（右手螺旋定则），大小是旋转的角速度（如流体的涡量 $\vec{\omega}=\frac{1}{2}\nabla\times\vec{u}$，表示流体微元的旋转角速度）。

4.4.3 矢量运算的恒等式示例

利用 ε-δ 恒等式和指标法，可轻松证明矢量运算的恒等式，避免复杂的分量展开。

（1）$\nabla\times(\nabla\varphi)=0$（梯度场无旋）

证明：

$$(\nabla\times\nabla\phi)_i=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla\phi)_k=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j\,\partial x_k}$$

由于二阶偏导数连续（$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j\,\partial x_k}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k\,\partial x_j}$），且 $\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{ikj}$（反对称性），故：

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j\,\partial x_k}=-\varepsilon_{ikj}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k\,\partial x_j}=-\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j\,\partial x_k}$$

移项得 $2\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j\,\partial x_k}=0$，故 $(\nabla\times\nabla\phi)_i=0$，即 $\nabla\times(\nabla\phi)=0$。

（2）$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{a})=0$（旋度场无源）

证明：

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{a})=\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla\times\vec{a})_i=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j}\right)=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i\,\partial x_j}$$

由于 $\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{jik}$（反对称性），且 $\frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i\,\partial x_j}=\frac{\partial^2 a_k}{\partial x_j\,\partial x_i}$，故：

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i\,\partial x_j} = -\varepsilon_{jik}\frac{\partial^2 a_k}{\partial x_j\,\partial x_i} = -\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i\,\partial x_j}$$

移项得 $2\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i\,\partial x_j} = 0$，故 $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{a}) = 0$。

这些恒等式在流体力学中具有重要应用（如无旋流动的势函数存在性、不可压缩流体的涡量方程推导），指标法的优势在于无需记忆复杂的矢量公式，只需通过下标运算即可推导。

五、张量的运算

张量的运算包括**代数运算**（加减、外积、缩并、内积）和**微分运算**（梯度、散度、旋度），这些运算遵循严格的规则，且结果的阶数可通过“下标变化”快速判断。本节将系统讲解张量运算的定义、公式及物理意义，重点关注工程中常用的二阶张量与矢量的运算。

5.1 张量的代数运算

张量的代数运算仅涉及分量的加减和乘法，不涉及对坐标的求导，核心是“阶数的变化规律”——运算结果的阶数由参与运算的张量阶数和运算类型决定。

5.1.1 张量的加减

（1）定义

同阶张量（阶数均为 n）可以进行加减运算，结果仍为 n 阶张量，其分量等于对应分量的加减。

设 n 阶张量 $\mathbf{P}$ 的分量为 $p_{i_1 i_2 \cdots n}$，n 阶张量 $\mathbf{Q}$ 的分量为 $q_{i_1 i_2 \cdots n}$，则它们的和/差 $\mathbf{S} = \mathbf{P} \pm \mathbf{Q}$ 为 n 阶张量，分量为：

$$s_{i_1 i_2 \cdots n} = p_{i_1 i_2 \cdots n} \pm q_{i_1 i_2 \cdots n}$$

（2）规则与示例

- **规则**：只有同阶张量才能加减（分量数量相同，下标结构一致）；不同阶张量的加减无意义（如矢量与二阶张量无法加减）。
- **示例 1（矢量加减）**：1 阶张量（矢量）$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和 $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$，分量为 $c_i = a_i + b_i$（如 $c_1 = a_1 + b_1$，$c_2 = a_2 + b_2$，$c_3 = a_3 + b_3$）；

- **示例 2（二阶张量加减）**：二阶张量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的差 $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$，分量为 $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$（如 $c_{11} = a_{11} - b_{11}$，$c_{12} = a_{12} - b_{12}$，等）。

（3）物理意义

张量加减对应物理量的叠加（如应力的叠加原理——物体内某点的总应力张量等于各外力产生的应力张量之和）。

5.1.2 张量的外积（并积、张量积）

（1）定义

m阶张量 $\mathbf{P}$ 与n阶张量 $\mathbf{Q}$ 的**外积**（又称并积、张量积），结果为 $m+n$ 阶张量，记为 $\mathbf{S} = \mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}$（符号"$\otimes$"可省略，简写为 $\mathbf{S} = \mathbf{PQ}$），其分量等于两张量分量的乘积。

设m阶张量 $\mathbf{P}$ 的分量为 $p_{i_1 i_2 \cdots i_m}$，n阶张量 $\mathbf{Q}$ 的分量为 $q_{j_1 j_2 \cdots j_n}$，则外积 $\mathbf{S}$ 的分量为：

$$S = P \otimes Q = PQ = s_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n} = p_{i_1 i_2 \cdots i_m} q_{j_1 j_2 \cdots j_n}$$

（2）规则与示例

- **规则**：外积不限制张量阶数，任意阶张量均可进行外积；结果的阶数为两张量阶数之和（m + n）；外积不满足交换律（$\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q} \neq \mathbf{Q} \otimes \mathbf{P}$，因分量下标顺序不同）。

- **示例 1（标量与矢量的外积）**：0 阶张量（标量）λ 与 1 阶张量（矢量）$\vec{a}$ 的外积为 1 阶张量（矢量），分量为 $(\lambda \otimes \vec{a})_i = \lambda a_i$（即 $\lambda \vec{a}$，与标量乘矢量一致）；

- **示例 2（矢量与矢量的外积）**：1 阶张量 $\vec{a}$ 与 1 阶张量 $\vec{b}$ 的外积为 2 阶张量，记为 $\mathbf{C} = \vec{a} \otimes \vec{b}$，分量为 $c_{ij} = a_i b_j$，矩阵形式为：

$$\mathbf{C} = \vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

  该二阶张量称为"并矢张量"，是构建任意二阶张量的基础（任意二阶张量可表示为有限个并矢张量的线性组合）；

- **示例 3（二阶张量与二阶张量的外积）**：二阶张量 **A**（分量 a_{ij}）与二阶张量 **B**（分量 b_{km}）的外积为 4 阶张量，分量为 $s_{ijkm} = a_{ij}b_{km}$，共 $3^4 = 81$ 个分量。

（3）物理意义

外积用于描述物理量之间的“无收缩关联”，例如：

- 流体力学中，速度矢量 $\vec{u}$ 与位置矢量 $\vec{r}$ 的外积 $\vec{r} \otimes \vec{u}$ 可用于描述速度场的空间分布；
- 固体力学中，位移矢量 $\vec{u}$ 与梯度算子的外积 $\nabla \otimes \vec{u}$ 是应变张量的基础（应变张量为 $\nabla \otimes \vec{u}$ 的对称部分）。

5.1.3 张量的缩并

（1）定义

缩并是指“对张量的某两个下标取相同值并求和”的运算，结果的阶数比原张量低 2 阶。

设n阶张量 **P** 的分量为 $p_{i_1 i_2 \cdots i_k \cdots i_l \cdots i_n}$（下标 i_k 和 i_l 为任意两个不同下标），将这两个下标替换为同一哑标（如 m）并求和，得到的 $n-2$ 阶张量 **Q** 称为 **P** 的缩并，分量为：

$$Q = q_{i_1 i_2 \cdots i_{n-2}} = p_{i_1 i_2 \cdots k \cdots k \cdots i_n}\, p_{i_1 i_2 \cdots i_{n-2} kk}$$

（2）规则与示例

- **规则**：缩并仅适用于阶数 ≥ 2 的张量（阶数 < 2 无法取两个不同下标）；每次缩并降低 2 阶（因减少 2 个自由标，增加 1 个哑标）；可对张量的不同下标组合进行多次缩并（如 4 阶张量可缩并两次，得到 0 阶张量）。
- **示例 1（三阶张量的缩并）**：三阶张量 **T** 的分量为 t_{ijk}，对下标 j 和 k 缩并，得到 1 阶张量（矢量）$\vec{q}$，分量为 $q_i = t_{ijj} = t_{i11} + t_{i22} + t_{i33}$（如 $q_1 = t_{111} + t_{122} + t_{133}$）；
- **示例 2（四阶张量的缩并）**：四阶张量 **S** 的分量为 s_{ijkl}，对下标 i 和 l 缩并，得到 2 阶张量 **Q**，分量为 $q_{jkl} \rightarrow q_{jk} = s_{ijki}$（对 i 求和）；若再对 j 和 k 缩并，得到 0 阶张量（标量）$q = s_{ijji}$。

（3）物理意义

缩并用于“提取张量的低阶信息”，例如：

- 二阶张量的迹（主对角线分量之和）是缩并的特殊情况——二阶张量 $\mathbf{A}$ 的分量为 a_{ij}，对下标 i 和 j 缩并，得到标量 $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$，描述张量的“体积属性”（如应力张量的迹与流体的平均压力相关）；
- 三阶张量的缩并可用于描述物理量的“投影总和”（如压电材料中，应力张量与电场张量的三阶关联张量缩并后，得到应力与电场的线性关系）。

5.1.4 张量的内积（点积）

（1）定义

内积是“外积 + 缩并”的组合运算：先对 m 阶张量 $\mathbf{P}$ 与 n 阶张量 $\mathbf{Q}$ 进行外积（得到 $m+n$ 阶张量），再对其中一个张量的最后一个下标与另一个张量的第一个下标进行缩并（降低 2 阶），结果为 $m+n-2$ 阶张量，记为 $\mathbf{S} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$。

设 m 阶张量 $\mathbf{P}$ 的分量为 $P = p_{i_1 i_2 \cdots i_m}$，n 阶张量 $\mathbf{Q}$ 的分量为 $Q = q_{j_1 j_2 \cdots j_n}$，则内积 $\mathbf{S}$ 的分量为：

$$Q = s_{i_1 i_2 \cdots i_{m-1} j_2 \cdots j_n} = p_{i_1 i_2 \cdots i_{m-1} k} q_{k j_2 \cdots j_n}$$

（2）规则与示例

- **规则**：内积的阶数为 $m+n-2$（外积阶数 $m+n$ 减缩并降低的 2 阶）；内积不满足交换律（$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \neq \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$，除非张量对称）；根据参与运算的张量阶数，内积有不同的名称（如矢量与矢量的内积称为点积，二阶张量与矢量的内积称为“张量乘矢量”）。

- **示例 1（矢量与矢量的内积——点积）**：1 阶张量 $\vec{a}$（分量 a_i）与 1 阶张量 $\vec{b}$（分量 b_j）的内积，外积为 2 阶张量 $a_i b_j$，对 $i = j$ 缩并，得到 0 阶张量（标量）$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$，与传统点积一致；

- **示例 2（二阶张量与矢量的内积）**：2 阶张量 $\mathbf{A}$（分量 a_{ij}）与 1 阶张量 $\vec{b}$（分量 b_j）的内积，外积为 3 阶张量 $a_{ij} b_k$，对 $j = k$ 缩并，得到 1 阶张量（矢量）$\vec{c} = \mathbf{A} \cdot \vec{b}$，分量为 $c_i = a_{ij} b_j$（称为“向右内积”）；若矢量在左、张量在右（$\vec{b} \cdot \mathbf{A}$），则分量为 $c_j = b_i a_{ij}$（称为“向左内积”），且 $\mathbf{A} \cdot \vec{b} \neq \vec{b} \cdot \mathbf{A}$（除非 $\mathbf{A}$ 对称）；

- **示例 3（二阶张量与二阶张量的内积）**：2 阶张量$\mathbf{A}$（分量a_{ik}）与 2 阶张量$\mathbf{B}$（分量b_{kj}）的内积，外积为 4 阶张量$a_{ik} b_{kj}$，对k缩并后得到 2 阶张量$\mathbf{C} =$

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$，分量为$c_{ij}=a_{ik}b_{kj}$（称为"一次内积"），其矩阵形式与矩阵乘法完全一致（$\mathbf{C}=\mathbf{AB}$）；若对两个下标分别缩并（二次内积），记为$\mathbf{A}:\mathbf{B}$，分量为$s=a_{ij}b_{ji}$（对i,j均求和），结果为标量，例如$\mathbf{A}:\mathbf{B}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+a_{21}b_{12}+\cdots+a_{33}b_{33}$。

（3）物理意义

内积是工程中最常用的张量运算，用于描述物理量之间的"线性关联"，例如：

- 流体力学中，应力张量τ_{ij}与速度梯度张量$\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$的内积（二次内积）与流体的耗散功相关；
- 固体力学中，弹性张量$\mathbf{C}$（四阶）与应变张量ε（二阶）的内积，得到应力张量$\sigma=\mathbf{C}\cdot\varepsilon$（二阶），即广义胡克定律。

5.2 张量的微分运算

张量的微分运算涉及对空间坐标的求导，核心是"阶数的变化规律"——对 n 阶张量求导一次（如梯度），结果为$n+1$阶张量；对求导后的张量进行缩并（如散度），结果阶数降低 2 阶。本节重点讲解张量的梯度、散度、旋度及奥-高定理的推广。

5.2.1 张量的梯度（∇P）

（1）定义

n 阶张量$\mathbf{P}$（分量$p_{i_1i_2\cdots i_n}$）的**梯度**，定义为张量$\mathbf{P}$与哈密尔顿算子∇的外积，结果为$n+1$阶张量，记为$\nabla\mathbf{P}$（或grad$\mathbf{P}$），其分量为张量分量对坐标的偏导数。

数学表达式：

$$\mathrm{grad}\mathbf{P}=\nabla\mathbf{P}=\frac{\partial p_{i_1i_2\cdots i_n}}{\partial x_k}=q_{i_1i_2\cdots i_nk}$$

其中$q_{i_1i_2\cdots i_nk}$为梯度张量的分量，k为新增的"导数下标"（对应∇的方向），阶数为$n+1$（原阶数n加 1）。

（2）规则与示例

- **规则**：梯度运算的阶数变化为"+1"（n 阶→n+1 阶）；梯度的分量下标中，前n个为原张量的下标，最后 1 个为导数下标（对应$\frac{\partial}{\partial x_k}$的$k$）；梯度算子$\nabla$的

位置不影响分量形式（如$\nabla\mathbf{P}$与$\mathbf{P}\nabla$仅下标顺序不同，物理意义需结合具体场景判断）。

- **示例 1（标量的梯度）**：0 阶张量（标量）ϕ的梯度为 1 阶张量（矢量），分量为$(\nabla\phi)_i = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}$，矢量形式为$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\vec{e}_i$，与 4.4.2 节中“标量的梯度”一致，描述标量的空间变化率；
- **示例 2（矢量的梯度）**：1 阶张量（矢量）$\vec{a}$（分量a_j）的梯度为 2 阶张量，分量为$(\nabla\vec{a})_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$，矩阵形式为：

$$\nabla\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

  在流体力学中，速度矢量$\vec{u}$的梯度$\nabla\vec{u}$是重要的物理量，其对称部分为应变率张量（$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$），反对称部分为旋转张量（$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$）；
- **示例 3（二阶张量的梯度）**：2 阶张量$\mathbf{A}$（分量a_{ij}）的梯度为 3 阶张量，分量为$(\nabla\mathbf{A})_{ijk} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$，共$3^3 = 27$个分量，描述二阶张量的空间变化（如应力张量的梯度$\nabla\tau$用于推导流体的运动方程）。

（3）物理意义

张量的梯度描述张量在空间中的“变化率分布”，例如：

- 应力张量的梯度$\nabla\tau$表示应力在空间中的变化，其负值等于流体微元的惯性力（纳维-斯托克斯方程的核心项）；
- 温度梯度∇T（标量梯度）驱动热传导，满足傅里叶定律$\vec{q} = -k\nabla T$（$\vec{q}$为热流密度矢量，k为导热系数）。

5.2.2 张量的散度（∇·P）

（1）定义

n 阶张量$\mathbf{P}$的**散度**，定义为张量$\mathbf{P}$的梯度$\nabla\mathbf{P}$（$n+1$阶）对“导数下标”与原张量的最后一个下标进行缩并，结果为$n-1$阶张量，记为$\nabla\cdot\mathbf{P}$（或div$\mathbf{P}$）。

数学表达式：

$$\mathrm{div}\mathbf{P} = \nabla\cdot\mathbf{P} = \frac{\partial p_{ki_2\cdots i_n}}{\partial x_k}$$

（对导数下标k与原张量的第一个下标$i_1 = k$缩并，求和得到），阶数为$n-1$（梯度阶数$n+1$减缩并降低的 2 阶）。

（2）规则与示例

- **规则**：散度运算的阶数变化为“-1”（n 阶→n-1 阶）；仅当原张量阶数≥1 时，散度有意义（阶数=0 的标量无散度）；散度的分量是“张量分量对对应坐标的偏导数之和”（哑标求和）。
- **示例 1（矢量的散度）**：1 阶张量（矢量）$\vec{a}$（分量a_i）的散度为 0 阶张量（标量），表达式为$\nabla\cdot\vec{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$，与 4.4.2 节中“矢量的散度”一致，描述矢量场的源汇属性（如流体速度的散度$\nabla\cdot\vec{u}$表示流体微元的体积膨胀率，不可压缩流体满足$\nabla\cdot\vec{u} = 0$）；
- **示例 2（二阶张量的散度）**：2 阶张量$\mathbf{A}$（分量a_{jk}）的散度为 1 阶张量（矢量），分量为$(\nabla\cdot\mathbf{A})_k = \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_j}$，矢量形式为$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_j}\vec{e}_k$。在流体力学中，应力张量$\tau_{ij}$的散度$\nabla\cdot\tau$是运动方程的关键项，例如不可压缩牛顿流体的运动方程为$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\vec{g}$，其中$\mu\nabla^2\vec{u}$本质是粘性应力张量的散度（$\nabla\cdot\tau = \mu\nabla^2\vec{u}$）；
- **示例 3（三阶张量的散度）**：3 阶张量$\mathbf{T}$（分量t_{ijk}）的散度为 2 阶张量，分量为$(\nabla\cdot\mathbf{T})_{jk} = \frac{\partial t_{ijk}}{\partial x_i}$，描述三阶张量的“通量属性”（如在多物理场耦合问题中，压电张量的散度关联电场与应力）。

（3）物理意义

张量的散度描述张量的“通量守恒”，例如：

- 质量守恒定律的微分形式为$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{u})=0$，其中$\nabla\cdot(\rho\vec{u})$是质量通量张量（$\rho\vec{u}$为矢量，可视为 1 阶张量）的散度，表示单位体积内质量的流出率；
- 动量守恒定律的微分形式为$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt}=\nabla\cdot\tau+\rho\vec{g}$，其中$\nabla\cdot\tau$是应力张量的散度，表示单位体积内流体微元受到的应力合力。

5.2.3 **张量的旋度**（∇×P）

（1）定义

n 阶张量**P**的**旋度**，定义为张量**P**的梯度∇**P**（$n+1$阶）与置换符号ε_{ijk}进行内积，结果仍为$n+1$阶张量（旋度不改变阶数，仅改变下标结构），记为$\nabla\times\mathbf{P}$（或 rot**P**）。

数学表达式（以 n 阶张量**P**的分量$p_{i_2\cdots n_l}$为例）：

$$\mathrm{rot}\mathbf{P}=\nabla\times\mathbf{P}=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial p_{ji_2\cdots i_n}}{\partial x_i}\vec{e}_k\vec{e}_{i_2}\ldots\vec{e}_{i_n}$$

其分量为$(\nabla\times\mathbf{P})_{ki_2\cdots i_n}=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial p_{ji_2\cdots i_n}}{\partial x_i}$，阶数仍为$n+1$（因旋度是梯度与置换符号的内积，未进行缩并）。

（2）规则与示例

- **规则**：旋度运算的阶数不变（n 阶张量的梯度为 n+1 阶，旋度后仍为 n+1 阶）；旋度仅对“导数下标”与原张量的第一个下标进行反对称化（利用置换符号ε_{ijk}）；最常用的旋度运算针对矢量（1 阶张量）和二阶张量。
- **示例 1（矢量的旋度）**：1 阶张量（矢量）$\vec{a}$（分量a_j）的梯度为 2 阶张量$\frac{\partial a_j}{\partial x_i}$，旋度后为 1 阶张量（矢量），分量为$(\nabla\times\vec{a})_k=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_j}{\partial x_i}$，与 4.4.2 节中“矢量的旋度”一致。在流体力学中，速度矢量的旋度$\nabla\times\vec{u}$称为涡量$\vec{\omega}$（$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\nabla\times\vec{u}$），描述流体微元的旋转角速度（如无旋流动满足$\nabla\times\vec{u}=0$，存在速度势函数$\phi$使得$\vec{u}=\nabla\phi$）；
- **示例 2（二阶张量的旋度）**：2 阶张量**A**（分量a_{jl}）的梯度为 3 阶张量$\frac{\partial a_{jl}}{\partial x_i}$，旋度后为 2 阶张量，分量为$(\nabla\times\mathbf{A})_{kl}=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_{jl}}{\partial x_i}$，矩阵形式为：

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1ij}\frac{\partial a_{j1}}{\partial x_i} & \varepsilon_{1ij}\frac{\partial a_{j2}}{\partial x_i} & \varepsilon_{1ij}\frac{\partial a_{j3}}{\partial x_i} \\ \varepsilon_{2ij}\frac{\partial a_{j1}}{\partial x_i} & \varepsilon_{2ij}\frac{\partial a_{j2}}{\partial x_i} & \varepsilon_{2ij}\frac{\partial a_{j3}}{\partial x_i} \\ \varepsilon_{3ij}\frac{\partial a_{j1}}{\partial x_i} & \varepsilon_{3ij}\frac{\partial a_{j2}}{\partial x_i} & \varepsilon_{3ij}\frac{\partial a_{j3}}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

二阶张量的旋度在电磁场理论中应用较多（如磁场强度张量的旋度关联电场的变化），在流体力学中较少直接使用，但可用于推导涡量输运方程。

（3）物理意义

张量的旋度描述张量的"旋转属性"，例如：

- 涡量$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{u}$是流体旋转的核心物理量，涡量的大小是流体微元旋转角速度的 2 倍，方向为旋转轴方向（右手螺旋定则）；
- 电场强度矢量$\vec{E}$的旋度满足法拉第电磁感应定律$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$，其中$\vec{B}$是磁感应强度矢量，描述变化的磁场产生电场的涡旋特性。

5.2.4 奥-高定理（高斯定理）的张量推广

（1）传统奥-高定理回顾

对于矢量场$\vec{a}$，传统奥-高定理建立了矢量的曲面积分与散度的体积分之间的关系：

$$\oint_S \vec{n} \cdot \vec{a} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{a} dV$$

其中S是包围体积V的闭合曲面，$\vec{n}$是曲面S的外法向单位向量，左边是矢量$\vec{a}$通过曲面S的通量，右边是矢量$\vec{a}$的散度在体积V内的积分。

（2）张量的奥-高定理

将传统奥-高定理推广到 n 阶张量$\mathbf{P}$，可得：

$$\oint_S \vec{n} \cdot \mathbf{P} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dV$$

其中$\vec{n} \cdot \mathbf{P}$是单位法向量$\vec{n}$（1 阶张量）与 n 阶张量$\mathbf{P}$的内积，结果为$n-1$阶张量；左边是张量$\mathbf{P}$通过曲面S的"张量通量"，右边是张量$\mathbf{P}$的散度在体积V内的积分（结果也为$n-1$阶张量）。

（3）示例与物理意义

- **示例 1（标量通量的奥-高定理）**：取$\mathbf{P} = \phi\vec{e}_i$（1 阶张量，$\phi$为标量），则$\vec{n}\cdot\mathbf{P} = n_i\phi$（标量），$\nabla\cdot\mathbf{P} = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}$（标量），定理变为$\oint_S \phi\, n_i dS = \int_V \frac{\partial\phi}{\partial x_i} dV$，即标量的曲面积分与梯度的体积分关系（如热传导中，热流量$\oint_S \vec{q}\cdot\vec{n}dS = \int_V \nabla\cdot\vec{q}dV$，结合傅里叶定律可推导热传导方程）；
- **示例 2（动量通量的奥-高定理）**：取$\mathbf{P} = \tau$（2 阶应力张量），则$\vec{n}\cdot\tau$是作用在曲面S上的应力矢量（1 阶张量），$\nabla\cdot\tau$是应力张量的散度（1 阶张量），定理变为$\oint_S \vec{n}\cdot\tau dS = \int_V \nabla\cdot\tau dV$。根据动量定理，左边是闭合曲面$S$对体积$V$内流体的应力合力，右边是单位体积内的应力合力，由此可推导动量守恒定律的积分形式（$\frac{d}{dt}\int_V \rho\,\vec{u}dV = \oint_S (\vec{n}\cdot\tau - \rho\vec{u}\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS + \int_V \rho\,\vec{g}dV$）。

张量的奥-高定理是连接“积分形式守恒定律”与“微分形式守恒定律”的桥梁，在流体力学、热力学等领域中，几乎所有微分方程（如纳维-斯托克斯方程、热传导方程）都可通过对积分形式的守恒定律应用奥-高定理推导得到。

5.3 张量识别定理

在实际问题中，常需判断一组分量是否构成张量（即是否满足分量变换规律）。直接验证分量变换规律（如 n 阶张量的分量变换公式）较为繁琐，而**张量识别定理**可通过“与已知张量的运算结果”快速判断，是张量分析中的重要工具。

5.3.1 定理 1（内积判别法）

若存在一组量$p_{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_n}$，与任意 n 阶张量$\mathbf{q}$（分量$q_{j_1 j_2 \dots j_n}$）的内积：

$$p_{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_n} q_{j_1 j_2 \dots j_n} = t_{i_1 i_2 \dots i_m}$$

恒为 m 阶张量$\mathbf{T}$（分量$t_{i_1 i_2 \cdots i_m}$），则这组量i必为$m+n$阶张量。

证明思路：根据张量的分量变换规律，m 阶张量 T 的分量满足$t_{i_1 \dots i_m}{}' = \alpha_{i_1 k_1} \dots \alpha_{i_m k_m} t_{k_1 \dots k_m}$；任意 n 阶张量 q 的分量满足$q_{j_1 \dots j_n}{}' = \alpha_{j_1 l_1} \dots \alpha_{j_n l_n} q_{l_1 \dots l_n}$。由于内积结果恒为 m 阶张量，代入内积表达式可推导出$p_{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_n}{}' = \alpha_{i_1 k_1} \dots \alpha_{i_m k_m} \alpha_{j_1 l_1} \dots \alpha_{j_n l_n} p_{k_1 \dots k_m l_1 \dots l_n}$，即满足 m+n 阶张量的分量变换规律。

5.3.2 定理 2（外积判别法）

若存在一组量$p_{i_1 i_2 \dots i_m}$，与任意 n 阶张量 q（分量$q_{j_1 j_2 \dots j_n}$）的外积：$p_{i_1 i_2 \dots i_m} q_{j_1 j_2 \dots j_n} = t_{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_n}$ 恒为 m+n 阶张量 t（分量$t_{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_n}$），则这组量$p_{i_1 i_2 \dots i_m}$必为 m 阶张量。

证明思路：类似定理 1，利用 m+n 阶张量 t 的分量变换规律（$t_{i_1 \cdots m j_1 \dots j_n}{}' = \alpha_{i_1 k_1} \dots \alpha_{i_m k_m} \alpha_{j_1 l_1} \dots \alpha_{j_n l_n} t_{k_1 \dots k_m l_1 \dots l_n}$）和任意 n 阶张量 q 的分量变换规律，可推导出$p_{i_1 \dots i_m}{}' = \alpha_{i_1 k_1} \dots \alpha_{i_m k_m} p_{k_1 \dots k_m}$，即满足 m 阶张量的分量变换规律。

5.3.3 应用示例

（1）验证克罗内克符号δ_{ij}是二阶张量

已知对于任意矢量$\vec{a}$（1 阶张量，分量a_j），恒有$a_i = \delta_{ij} a_j$（a_i是矢量$\vec{a}$的分量，为 1 阶张量）。根据张量识别定理 1：

- 一组量为δ_{ij}（下标i, j，即$m = 1, n = 1$，因内积结果a_i是 1 阶张量（m=1），**q**是a_j（1 阶张量，n=1））；
- 内积$\delta_{ij} a_j = a_i$恒为 1 阶张量，故δ_{ij}必为$1 + 1 = 2$阶张量。

（2）验证置换符号ε_{ijk}是三阶张量

已知对于任意矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$（1 阶张量，分量a_j, b_k），恒有$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$（$\vec{a} \times \vec{b}$是矢量，分量$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i$为 1 阶张量）。根据张量识别定理 1：

- 一组量为ε_{ijk}（下标i, j, k，即$m = 1, n = 2$，因内积结果$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i$是 1 阶张量（m=1），**q**是$a_j b_k$（2 阶张量，n=2））；
- 内积$\varepsilon_{ijk} a_j b_k = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i$恒为 1 阶张量，故$\varepsilon_{ijk}$必为$1 + 2 = 3$阶张量。

（3）验证方向余弦α_{ij}是二阶张量

已知新基向量$\vec{e}_i{}' = \alpha_{ij} \vec{e}_j$（$\vec{e}_i{}'$和$\vec{e}_j$均为 1 阶张量，分量为基向量的分量）。根据张量识别定理 2：

- 一组量为α_{ij}（下标i, j，即$m = 2, n = 0$，因外积结果$\vec{e}_i{}'$是 1 阶张量，$\vec{e}_j$是 1 阶张量，外积阶数为$1 + 1 = 2$）；
- 外积$\alpha_{ij} \vec{e}_j = \vec{e}_i{}'$恒为 1 阶张量，故$\alpha_{ij}$必为 2 阶张量。

张量识别定理的核心价值在于“无需直接验证变换规律”，仅通过与已知张量（如矢量、标量）的运算结果即可判断，极大简化了张量的判别过程，尤其在高阶张量（如 4 阶弹性张量）的判别中应用广泛。

六、二阶张量

二阶张量是工程中应用最广泛的张量（如应力张量、应变张量、速度梯度张量等），其结构和性质具有鲜明的几何与物理意义。本节将系统讲解二阶张量的核心概念——主值、主轴、不变量、对称与反对称分解，以及几何表示，为后续流体力学中应力、应变的分析奠定基础。

6.1 二阶张量的主值、主轴与不变量

在研究二阶张量时，常需找到一个特殊的坐标系（主轴坐标系），使得张量在该坐标系下呈现“对角化”形式（非主对角线分量为 0），此时的分量称为“主值”，对应的坐标轴称为“主轴”。主值和主轴是二阶张量的本质属性（不随坐标系变换而改变），统称为“不变量”。

6.1.1 定义：主值、主轴与主向量

设二阶张量$\mathbf{P}$的分量为p_{ij}，空间中任意非零矢量$\vec{a}$（分量a_j），定义张量与矢量的右向内积为$\mathbf{P}\cdot\vec{a}$（分量$p_{ij}a_j$），结果为矢量$\vec{b}$（分量$b_i=p_{ij}a_j$）。

若矢量$\vec{b}$与$\vec{a}$共线（即$\vec{b}=\lambda\vec{a}$，λ为标量），则：

- 标量λ称为二阶张量$\mathbf{P}$的**主值**（特征值）；
- 矢量$\vec{a}$称为二阶张量$\mathbf{P}$的**主向量**（特征向量）；
- 主向量$\vec{a}$的方向称为二阶张量$\mathbf{P}$的**主轴**（特征轴）。

数学表达式：

$$\mathbf{P}\cdot\vec{a}=\lambda\vec{a}$$

展开为分量形式：

$$p_{ij}a_j=\lambda a_i$$

整理得齐次线性方程组：

$$\left(p_{ij}-\lambda\delta_{ij}\right)a_j=0\quad(i=1,2,3)$$

其中δ_{ij}为克罗内克符号（$\delta_{ij}=1$当$i=j$，否则为 0），方程组的矩阵形式为：

$$\begin{pmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.1.2 主值的求解：特征方程

齐次线性方程组存在非零解（$\vec{a}\neq\vec{0}$）的充要条件是**系数矩阵的行列式为 0**，即：

$$\det\left(p_{ij}-\lambda\delta_{ij}\right)=0$$

该行列式称为二阶张量$\mathbf{P}$的**特征行列式**，展开后得到关于λ的三次代数方程，称为**特征方程**：

$$\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0$$

其中I_1,I_2,I_3是特征方程的系数，分别称为二阶张量$\mathbf{P}$的**第一、第二、第三不变量**。

6.1.3 不变量的表达式与物理意义

（1）第一不变量I_1

第一不变量是二阶张量主对角线分量之和（即矩阵的迹），表达式为：

$$I_1=p_{11}+p_{22}+p_{33}=\mathrm{tr}(\mathbf{P})$$

根据代数基本定理，特征方程的三个根（主值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$）满足$I_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$（根与系数的关系）。

物理意义：第一不变量描述二阶张量的“体积平均属性”，例如：

- 应力张量τ_{ij}的第一不变量$I_1=\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{33}$，对于流体，$\tau_{ii}=-3p$（$p$为静压力），故$I_1=-3p$，即静压力$p=-\frac{1}{3}I_1$，是应力张量的体积平均；
- 应变率张量ε_{ij}的第一不变量$I_1=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$，等于流体速度的散度$\nabla\cdot\vec{u}$（因$\varepsilon_{ii}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$，求和后$\varepsilon_{ii}=\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=\nabla\cdot\vec{u}$），描述流体微元的体积膨胀率。

（2）第二不变量I_2

第二不变量是二阶张量所有 2 阶主子式之和，表达式为：

$$I_2=\begin{vmatrix}p_{22} & p_{32}\\ p_{23} & p_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}p_{11} & p_{31}\\ p_{13} & p_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}p_{11} & p_{21}\\ p_{12} & p_{22}\end{vmatrix}$$

展开后为：

$$I_2=(p_{22}p_{33}-p_{23}p_{32})+(p_{11}p_{33}-p_{13}p_{31})+(p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21})$$

根据根与系数的关系，$I_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3$。

物理意义：第二不变量描述二阶张量的“剪切属性”，例如：

- 应力张量的第二不变量与流体的粘性耗散相关，对于牛顿流体，耗散函数 $\Phi=2\mu\left({I_2}'+\frac{2}{3}{I_1}'^2\right)$（${I_1}',{I_2}'$为应力偏张量的不变量），其中${I_2}'$与剪切应力的平方成正比；
- 应变率张量的第二不变量描述流体的剪切变形程度，在湍流模型中，常通过I_2判断流动的剪切强度。

（3）第三不变量I_3

第三不变量是二阶张量的行列式，表达式为：

$$I_3=\det(\mathbf{P})=\begin{vmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{vmatrix}$$

展开后为：

$$I_3=p_{11}(p_{22}p_{33}-p_{23}p_{32})-p_{12}(p_{21}p_{33}-p_{23}p_{31})+p_{13}(p_{21}p_{32}-p_{22}p_{31})$$

根据根与系数的关系，$I_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$。

物理意义：第三不变量描述二阶张量的“体积属性”，例如：

- 应力张量的第三不变量与流体的稳定性相关，若$I_3<0$，说明应力张量存在负主值，可能导致流体微元的压缩或剪切破坏；
- 旋转张量的第三不变量为 0（因旋转张量是反对称张量，行列式恒为 0），说明旋转张量无体积变化效应。

6.1.4 主向量的求解

求解特征方程得到主值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$后，将每个主值代入齐次线性方程组 $(p_{ij}-\lambda\delta_{ij})a_j=0$，即可求解对应的主向量$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$。

注意事项：

- 主向量的解不唯一（若$\vec{a}$是主向量，则$k\vec{a}$（k为非零标量）也是主向量），工程中通常取单位主向量（$|\vec{a}| = 1$）；
- 若两个主值相等（如$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$），则在这两个主值对应的主轴平面内，任意方向都是主轴（主向量不唯一）；
- 若三个主值都相等（$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$），则任意方向都是主轴，张量退化为各向同性张量（$p_{ij} = \lambda\delta_{ij}$）。

6.2 二阶张量的对称性与反对称性

根据二阶张量分量的对称性（p_{ij}与p_{ji}的关系），可将二阶张量分为**对称张量**、**反对称张量**和**一般张量**三类。其中对称张量和反对称张量是二阶张量的基本形式，任意一般张量都可分解为对称张量与反对称张量之和（张量分解定理）。

6.2.1 共轭张量（转置张量）

定义二阶张量$\mathbf{P}$（分量p_{ij}）的**共轭张量**（又称转置张量）为$\mathbf{P}_c$，其分量为p_{ji}（交换原张量的两个下标），即：

$$\mathbf{P}_c = (p_{ji})$$

矩阵形式为：

$$\mathbf{P}_c = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix}$$

（即将原张量矩阵的行与列互换，与矩阵的转置一致）。

共轭张量的核心性质：

- 共轭张量的共轭等于原张量：$(\mathbf{P}_c)_c = \mathbf{P}$；
- 两个张量和的共轭等于共轭的和：$(\mathbf{P} + \mathbf{Q})_c = \mathbf{P}_c + \mathbf{Q}_c$；
- 两个张量积的共轭等于共轭的逆积：$(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})_c = \mathbf{Q}_c \cdot \mathbf{P}_c$。

6.2.2 对称张量

（1）定义

若二阶张量$\mathbf{P}$的共轭张量等于自身（$\mathbf{P}_c = \mathbf{P}$），即分量满足$p_{ij} = p_{ji}$，则称$\mathbf{P}$为**对称张量**。

对称张量的分量特点：

- 非主对角线分量对称（$p_{12}=p_{21}$，$p_{13}=p_{31}$，$p_{23}=p_{32}$）；
- 独立分量数量为 6 个（主对角线 3 个：p_{11},p_{22},p_{33}；非主对角线 3 个：p_{12},p_{13},p_{23}）。

矩阵形式示例（应力张量τ_{ij}，对称张量）：

$$\tau_{ij}=\begin{pmatrix}\tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13}\\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{23}\\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33}\end{pmatrix}$$

（2）对称张量的性质

对称张量是工程中最常见的二阶张量（如应力张量、应变张量、应变率张量），具有以下核心性质：

1. **不变性（对称性守恒）**：对称张量在任意坐标变换下仍为对称张量。
   证明：设新坐标系下对称张量的分量为$p_{ij}{}'=\alpha_{il}\alpha_{jm}p_{lm}$（二阶张量变换公式），由于原张量对称（$p_{lm}=p_{ml}$），则$p_{ij}{}'=\alpha_{il}\alpha_{jm}p_{ml}=\alpha_{jm}\alpha_{il}p_{ml}=p_{ji}{}'$，故新分量仍满足对称性$p_{ij}{}'=p_{ji}{}'$。

2. **主值为实数，主轴正交**：

   - 主值为实数：假设对称张量$\mathbf{S}$的主值为复数λ，对应的主向量为复向量$\vec{a}$，则通过对$\mathbf{S}\cdot\vec{a}=\lambda\vec{a}$取共轭并利用对称性，可证$\lambda=\overline{\lambda}$（$\overline{\lambda}$为$\lambda$的共轭复数），即主值为实数；
   - 主轴正交：设两个不同主值$\lambda\neq\mu$对应的主向量为$\vec{a}$和$\vec{b}$，则$\mathbf{S}\cdot\vec{a}=\lambda\vec{a}$，$\mathbf{S}\cdot\vec{b}=\mu\vec{b}$。对第一个式子左乘$\vec{b}$，第二个式子左乘$\vec{a}$，利用对称性$\vec{b}\cdot\mathbf{S}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\mathbf{S}\cdot\vec{b}$，可得$(\lambda-\mu)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$。因$\lambda\neq\mu$，故$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，即主向量正交（主轴正交）。

3. **主轴坐标系下的对角化**：在以三个正交主轴为基向量的坐标系（主轴坐标系）中，对称张量的非主对角线分量为 0，呈现对角化形式：

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

   其中$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$为对称张量的三个主值。对角化形式极大简化了张量的运算（如内积、外积），是分析对称张量物理意义的核心工具。

6.2.3 反对称张量

（1）定义

若二阶张量$\mathbf{P}$的共轭张量等于其负值（$\mathbf{P}_c = -\mathbf{P}$），即分量满足$p_{ij} = -p_{ji}$，则称$\mathbf{P}$为**反对称张量**。

反对称张量的分量特点：

- 主对角线分量为 0（$p_{ii} = -p_{ii} \rightarrow p_{ii} = 0$）；
- 非主对角线分量反对称（$p_{12} = -p_{21}$，$p_{13} = -p_{31}$，$p_{23} = -p_{32}$）；
- 独立分量数量为 3 个（p_{12}, p_{13}, p_{23}）。

矩阵形式示例（旋转张量ω_{ij}，反对称张量）：

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

（2）反对称张量的性质

反对称张量在流体力学中主要描述旋转运动（如旋转张量），具有以下核心性质：

1. **不变性（反对称性守恒）**：反对称张量在任意坐标变换下仍为反对称张量。
   证明：设新坐标系下反对称张量的分量为$p_{ij}' = \alpha_{il}\alpha_{jm}p_{lm}$，由于原张量反对称（$p_{lm} = -p_{ml}$），则$p_{ij}' = \alpha_{il}\alpha_{jm}(-p_{ml}) = -\alpha_{jm}\alpha_{il}p_{ml} = -p_{ji}'$，故新分量仍满足反对称性$p_{ij}' = -p_{ji}'$。

2. **与矢量的对应关系（轴矢量）**：反对称张量的 3 个独立分量可唯一对应一个矢量（称为**轴矢量**），建立反对称张量与矢量的一一映射。
   定义轴矢量$\vec{\omega}$（分量ω_k）与反对称张量$\mathbf{A}$（分量a_{ij}）的关系为：

   $$a_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\omega_k$$

   其中ε_{ijk}为置换符号。展开后为：

   $$\omega_1 = \frac{1}{2}(a_{23} - a_{32}) = a_{23},$$

   $$\omega_2 = \frac{1}{2}(a_{31} - a_{13}) = -a_{13},$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(a_{12} - a_{21}) = a_{12}$$

（因$a_{32} = -a_{23}$，故$a_{23} - a_{32} = 2a_{23}$，以此类推）。

在流体力学中，旋转张量ω_{ij}（反对称张量）对应的轴矢量为涡量$\vec{\omega}$（$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{u}$），描述流体微元的旋转角速度——这是反对称张量与物理运动直接关联的典型案例。

3. **内积与叉积的等价性**：反对称张量$\mathbf{A}$与矢量$\vec{b}$的内积，等于其对应轴矢量$\vec{\omega}$与$\vec{b}$的叉积，即：

$$\mathbf{A} \cdot \vec{b} = \vec{\omega} \times \vec{b}$$

证明：左边分量为$a_{ij}b_j = -\varepsilon_{ijk}\omega_k b_j$，右边分量为$\left(\vec{\omega} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j b_k = -\varepsilon_{ikj}\omega_k b_j = -\varepsilon_{ijk}\omega_k b_j$（利用置换符号的反对称性$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$），故两边分量相等，等式成立。

该性质的物理意义：反对称张量对矢量的“线性变换”等价于轴矢量对矢量的“旋转变换”，例如旋转张量ω_{ij}与位置矢量$\vec{r}$的内积$\omega_{ij}r_j$，等于涡量$\vec{\omega}$与$\vec{r}$的叉积$\vec{\omega} \times \vec{r}$，描述流体微元的旋转位移。

6.3 张量分解定理：任意二阶张量的对称-反对称分解

任意一个二阶张量，都可以**唯一地**分解为一个对称张量与一个反对称张量之和，这一规律称为“张量分解定理”，是二阶张量分析的核心定理之一。

6.3.1 分解的存在性

设任意二阶张量为$\mathbf{P}$（分量p_{ij}），定义：

- 对称张量$\mathbf{S}$，分量为$s_{ij} = \frac{1}{2}\left(p_{ij} + p_{ji}\right)$；
- 反对称张量$\mathbf{A}$，分量为$a_{ij} = \frac{1}{2}\left(p_{ij} - p_{ji}\right)$。

则张量$\mathbf{P}$可表示为：

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} + \mathbf{A}$$

（分量形式：$p_{ij} = s_{ij} + a_{ij}$）。

验证：

- 对称性：$s_{ji} = \frac{1}{2}(p_{ji} + p_{ij}) = s_{ij}$，故$\mathbf{S}$是对称张量；
- 反对称性：$a_{ji} = \frac{1}{2}(p_{ji} - p_{ij}) = -a_{ij}$，故$\mathbf{A}$是反对称张量；
- 求和：$s_{ij} + a_{ij} = \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ji}) + \frac{1}{2}(p_{ij} - p_{ji}) = p_{ij}$，与原张量分量一致。

因此，任意二阶张量都可分解为对称张量与反对称张量之和，分解的存在性得证。

6.3.2 分解的唯一性

假设存在另一组对称张量$\mathbf{S}'$和反对称张量$\mathbf{A}'$，使得$\mathbf{P} = \mathbf{S}' + \mathbf{A}'$。

对等式两边取共轭张量（转置），根据共轭张量的性质：

$$\mathbf{P}_c = \mathbf{S}'_c + \mathbf{A}'_c = \mathbf{S}' - \mathbf{A}'$$

（因$\mathbf{S}'$对称，$\mathbf{S}'_c = \mathbf{S}'$；$\mathbf{A}'$反对称，$\mathbf{A}'_c = -\mathbf{A}'$）。

联立原分解式和共轭分解式：

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \mathbf{S}' + \mathbf{A}' \\ \mathbf{P}_c = \mathbf{S}' - \mathbf{A}' \end{cases}$$

求解得：

$$\mathbf{S}' = \frac{1}{2}(\mathbf{P} + \mathbf{P}_c), \quad \mathbf{A}' = \frac{1}{2}(\mathbf{P} - \mathbf{P}_c)$$

这与最初定义的$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{P} + \mathbf{P}_c)$和$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{P} - \mathbf{P}_c)$完全一致，故分解的唯一性得证。

6.3.3 物理意义：以速度梯度张量为例

在流体力学中，速度梯度张量$\nabla\vec{u}$（二阶张量，分量$\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$）是典型的一般二阶张量，其对称-反对称分解具有明确的物理意义：

$$\nabla\vec{u} = \varepsilon + \omega$$

其中：

- ε为**应变率张量**（对称张量），分量为$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$，描述流体微元的**变形运动**（拉伸、剪切）；

- ω为**旋转张量**（反对称张量），分量为$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$，描述流体微元的**旋转运动**。

具体来说：

- 应变率张量的主值对应流体微元在三个主轴方向的拉伸速率，主值之和等于速度的散度（$\varepsilon_{ii} = \nabla \cdot \vec{u}$），描述体积膨胀；
- 旋转张量对应的轴矢量为涡量$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{u}$，描述流体微元的旋转角速度，若$\vec{\omega} = 0$，则流动为无旋流动（仅变形，无旋转）。

张量分解定理的核心价值在于：将复杂的一般张量运动分解为“变形”和“旋转”两个独立的物理过程，便于分别分析其对流体运动的影响（如在纳维-斯托克斯方程中，粘性项仅与应变率张量相关，而惯性项与旋转张量相关）。

6.4 二阶对称张量的几何表示：二次有心曲面

二阶对称张量的物理意义可通过**几何图形**直观呈现。理论上，任意二阶对称张量都与一个“二次有心曲面”（中心在坐标原点的二次曲面）一一对应，因此可将二次有心曲面作为二阶对称张量的几何表示，通过曲面的形状和方向理解张量的性质。

6.4.1 二阶有心曲面的定义

设二阶对称张量$\mathbf{S}$（分量s_{ij}，$s_{ij} = s_{ji}$），空间中任意位置矢量$\vec{r}$（分量x_i，即$\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$），定义二次齐次方程：

$$s_{ij}x_ix_j = C$$

其中C为非零常数（通常取$C = \pm 1$），该方程在三维空间中表示的曲面称为**二次有心曲面**（因曲面关于原点对称，中心在原点）。

展开为直角坐标系下的方程（$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$）：

$$s_{11}x^2 + s_{22}y^2 + s_{33}z^2 + 2s_{12}xy + 2s_{23}yz + 2s_{31}zx = C$$

（因$s_{ij} = s_{ji}$，故$s_{12}xy + s_{21}yx = 2s_{12}xy$，以此类推）。

6.4.2 张量与二次有心曲面的一一对应关系

（1）张量→曲面：给定张量，唯一确定曲面

对于任意二阶对称张量$\mathbf{S}$，其分量s_{ij}是确定的，代入二次齐次方程$s_{ij}x_ix_j = C$，可唯一确定一个二次有心曲面。

例如：

- 若$\mathbf{S}$为单位张量（$s_{ij} = \delta_{ij}$），则方程为$x^2 + y^2 + z^2 = C$，表示球面；
- 若$\mathbf{S}$为对角张量（$s_{11} = \lambda_1, s_{22} = \lambda_2, s_{33} = \lambda_3$，非对角分量为 0），则方程为$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = C$，表示椭球面（若$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$）或双曲面（若存在负主值）。

（2）曲面→张量：给定曲面，唯一确定张量

对于任意二次有心曲面$a_{ij}x_ix_j = C$（$a_{ij} = a_{ji}$），由于方程右端C是标量，左端x_i, x_j是矢量$\vec{r}$的分量（1 阶张量），根据张量识别定理 1：

- 一组量a_{ij}与任意矢量$\vec{r}$（1 阶张量）的内积（二次内积$a_{ij}x_ix_j$）恒为标量（0 阶张量），故a_{ij}必为 2 阶张量；
- 又因$a_{ij} = a_{ji}$，故a_{ij}是对称二阶张量。

因此，任意二次有心曲面都唯一对应一个对称二阶张量，张量与二次有心曲面的一一对应关系得证。

6.4.3 主轴坐标系下的曲面简化：标准形式

在二阶对称张量的主轴坐标系中（以三个正交主轴为坐标轴，基向量为单位主向量$\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$），张量呈现对角化形式（$s_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$，$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$为主值），此时二次有心曲面的方程简化为：

$$\lambda_1 {x_1}'^2 + \lambda_2 {x_2}'^2 + \lambda_3 {x_3}'^2 = C$$

（${x_1}', {x_2}', {x_3}'$为主轴坐标系下的坐标），该方程称为二次有心曲面的**标准形式**。

根据主值$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$的符号和大小，二次有心曲面呈现不同的形状，主要包括以下三类：

（1）椭球面（$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$且$C > 0$）

- 若三个主值互不相等（$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$）：曲面为**一般椭球面**，三个半轴长分别为$\sqrt{C/\lambda_1}, \sqrt{C/\lambda_2}, \sqrt{C/\lambda_3}$，主轴方向与椭球面的三个对称轴一致；

- 若两个主值相等（$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$）：曲面为**旋转椭球面**（绕$x_3{}'$轴旋转），在$x_1{}'x_2{}'$平面内的截面为圆，半轴长为$\sqrt{C/\lambda_1}$，$x_3{}'$方向的半轴长为$\sqrt{C/\lambda_3}$；
- 若三个主值相等（$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$）：曲面为**球面**，半径为$\sqrt{C/\lambda}$，任意方向都是主轴（张量为各向同性张量）。

在连续介质力学中，应力张量、应变张量等对称张量的主值通常同号（如应力张量的主应力均为压应力或拉应力），对应的二次有心曲面为椭球面，称为"张量椭球面"。

（2）双曲面（存在负主值）

- 若一个主值为负（如$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$）：曲面为**单叶双曲面**，方程为$-|\lambda_1| x_1{}'^2 + \lambda_2 x_2{}'^2 + \lambda_3 x_3{}'^2 = C$；
- 若两个主值为负（如$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$）：曲面为**双叶双曲面**，方程为$-|\lambda_1| x_1{}'^2 - |\lambda_2| x_2{}'^2 + \lambda_3 x_3{}'^2 = C$。

双曲面对应的张量通常描述"拉伸-压缩"混合状态的物理量（如在塑性力学中，应力偏张量可能存在正负主值，对应双曲面）。

（3）抛物面（主值为 0，非有心曲面，此处不讨论）

若存在主值为 0（如$\lambda_3 = 0$），则方程退化为$\lambda_1 x_1{}'^2 + \lambda_2 x_2{}'^2 = C$，表示柱面（非有心曲面），这类张量称为"退化张量"，在工程中较少见（如完全不可压缩流体的应变率张量，主值之和为 0，但主值均不为 0）。

6.4.4 几何表示的物理意义：以应力张量为例

应力张量τ_{ij}是对称二阶张量，其对应的二次有心曲面为"应力椭球面"，方程为$\tau_{ij} x_i x_j = 1$（取$C = 1$）。应力椭球面的几何特征与应力状态的物理意义直接关联：

1. **主轴方向**：应力椭球面的三个对称轴方向即为应力张量的主轴方向，在这些方向上，流体微元仅受到正应力（无剪切应力），称为"主应力方向"；
2. **半轴长**：应力椭球面的半轴长为$1/\sqrt{\lambda_i}$（λ_i为主应力），半轴长的倒数与主应力大小成正比——半轴越长，对应的主应力越小；反之，半轴越短，主应力越大；
3. **应力的大小与方向**：对于任意方向的单位矢量$\vec{n}$（分量n_i），该方向上的正应力σ_n等于应力张量在该方向的"投影"，即$\sigma_n = \tau_{ij} n_i n_j$。根据应力椭球面

方程，$\tau_{ij}n_in_j = 1/r^2$（r为椭球面上该方向的矢径长度），故$\sigma_n = 1/r^2$——矢径越短，正应力越大，这与工程中“主应力方向正应力最大”的规律一致。

通过二次有心曲面的几何形状，可直观判断二阶对称张量的主值大小、主轴方向及各方向的物理量分布，是理解张量本质的重要工具。

七、总结与工程应用展望

7.1 核心知识点总结

本讲义系统讲解了笛卡尔张量分析的基础内容，核心知识点可归纳为以下五个方面：

1. **张量的本质与定义**：
张量是标量和矢量的推广，核心特征是“分量随坐标系变换满足特定规律”且“物理性质具有坐标不变性”。n 阶张量在三维空间中具有3^n个分量，n+1 个独立不变量（如标量 1 个、矢量 2 个、二阶张量 3 个）。

2. **张量的表示法**：
包括实体法（$\vec{a}, \mathbf{A}$）、基向量法（$a_i\vec{e}_i$）、分量法（矩阵形式）和指标法（结合爱因斯坦求和约定），其中指标法是张量运算的核心工具，通过自由标（描述阶数）和哑标（描述求和）简化运算。

3. **坐标系变换与张量定义**：
笛卡尔坐标系的旋转变换由方向余弦α_{ij}描述，不同阶张量的分量变换规律为：n 阶张量的新分量等于 n 个方向余弦与老分量的乘积（$p'_{i_1i_2\cdots i_n} = \alpha_{i_1j_1}\alpha_{i_2j_2}\cdots\ \alpha_{i_nj_n}p_{j_1j_2\cdots j_n}$）。

4. **单位张量与矢量运算**：
二阶单位张量（克罗内克符号δ_{ij}）描述基向量的正交性，三阶单位张量（置换符号ε_{ijk}）描述基向量的叉积关系，二者通过 ε-δ 恒等式关联。利用单位张量，可将矢量运算（点积、叉积、梯度、散度、旋度）统一为指标表达式。

5. **张量的运算**：

- 代数运算：同阶张量加减（阶数不变）、外积（阶数相加）、缩并（阶数减 2）、内积（外积+缩并，阶数相加减 2）；
- 微分运算：梯度（阶数+1）、散度（阶数-1）、旋度（阶数不变），以及奥-高定理的张量推广（连接积分与微分守恒定律）；
- 张量识别定理：通过与已知张量的内积/外积结果判断张量属性。

6. **二阶张量的核心性质：**
   二阶张量可唯一分解为对称张量（描述变形）与反对称张量（描述旋转）之和；对称张量的主值、主轴与不变量是其本质属性，对应的二次有心曲面（如椭球面）可直观呈现其几何意义。

7.2 工程应用展望

笛卡尔张量分析是流体力学、飞行力学、固体力学等工程学科的数学基础，其核心应用包括：

1. **流体力学中的应用：**
   - 应力张量（对称张量）描述流体微元的受力状态，应变率张量（对称张量）描述变形状态，二者通过本构方程（如牛顿流体的$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$）关联；
   - 纳维-斯托克斯方程的推导：利用张量的散度运算（应力张量的散度描述应力合力）和物质导数，建立动量守恒的微分形式；
   - 无旋流动与有旋流动的判断：通过速度矢量的旋度（$\nabla \times \vec{u}$）判断，无旋流动存在速度势函数，简化流动分析。
2. **飞行力学中的应用：**
   - 基于广义坐标的动力学模型：利用张量建立飞行器的姿态、位置与力、力矩的关联，推导过程简洁且不易出错；
   - 气动载荷的张量表示：将气动力、气动力矩表示为张量形式，便于在不同飞行姿态（坐标系变换）下分析载荷分布。
3. **固体力学中的应用：**
   - 弹性张量（四阶各向同性张量）描述应力与应变的线性关系（广义胡克定律$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$）；

- 塑性力学中的屈服准则：基于应力张量的不变量（如第二不变量I_2）建立屈服条件，描述材料的塑性变形起始。

通过本讲义的学习，读者可掌握笛卡尔张量分析的基本理论与运算方法，为后续深入学习工程学科中的物理规律（如流体运动、固体变形）奠定坚实的数学基础。实际应用中，需重点关注张量的“物理意义”与“坐标不变性”，将数学工具与工程问题紧密结合，实现从理论到实践的转化。

作业题

一、填空题（共 15 题）

1. 从代数角度看，张量是标量和矢量的推广，其中标量是______阶张量，具有______个分量；矢量是______阶张量，具有______个分量；二阶张量具有______个分量，可表示为______形式。
2. 张量的核心特性是______，即物理量本身的性质不会随______的不同而发生变化。
3. 笛卡尔坐标系的旋转变换由______描述，其定义为新基向量与老基向量的______，用符号______表示，且满足______条件（正交性）。
4. 爱因斯坦求和约定中，在同一项中重复出现的下标称为______，表示对该下标从______到______求和；仅出现一次的下标称为______，可在默认范围内任意取值。
5. 二阶单位张量（克罗内克符号δ_{ij}）的定义为：当$i = j$时，δ_{ij} =_____；当$i \neq$ $= j$时，δ_{ij} =_____，其矩阵形式为______，迹（主对角线分量之和）为______。
6. 三阶单位张量（置换符号ε_{ijk}）中，当i, j, k为正排序（如 123,231,312）时，$\varepsilon_{ijk} =$ _____；为逆排序（如 321,213,132）时，ε_{ijk} =_____；当下标有重复时，ε_{ijk} = ______。
7. 标量的梯度是______阶张量，其指标表示式为______；矢量的散度是______阶张量，指标表示式为______；矢量的旋度是______阶张量，指标表示式为______。
8. 同阶张量可以进行加减运算，结果仍为______阶张量；m 阶张量与 n 阶张量的外积结果为______阶张量；张量的缩并运算每次会使阶数______。
9. 二阶张量的第一不变量I_1是______，第二不变量I_2是______，第三不变量I_3是______，它们的数值不随______改变。
10. 任意二阶张量可唯一分解为一个______张量与一个______张量之和，其中前者分量满足______，后者分量满足______且主对角线分量为______。
11. 各向同性张量是指分量在______下保持不变的张量，其中标量是______阶各向同性张量，克罗内克符号δ_{ij}是______阶各向同性张量，置换符号ε_{ijk}是______阶各向同性张量。

12. 矢量与矢量的外积（并积）结果为______阶张量，其分量表达式为______，矩阵形式中共有______个基（$\vec{e}_i\vec{e}_j$）。
13. 二阶张量与矢量的右向内积结果为______阶张量，分量表达式为______；左向内积分量表达式为______，二者通常______（相等/不相等），除非张量为______张量。
14. 张量的梯度运算会使张量阶数______，散度运算会使张量阶数______，旋度运算______（改变/不改变）张量阶数。
15. 二阶对称张量对应的二次有心曲面，当三个主值同号且互不相等时，曲面为______；当两个主值相等时，曲面为______；当三个主值相等时，曲面为______。

二、判断题（共 15 题，对的打"√"，错的打"×"）

1. 标量只有大小，没有方向，因此标量不属于张量范畴。（ ）
2. 张量的分量数量仅与张量的阶数有关，与空间维度无关。（ ）
3. 方向余弦α_{ij}和β_{ij}满足$\beta_{ij} = \alpha_{ji}$，且二者都是二阶张量。（ ）
4. 爱因斯坦求和约定中，同一表达式内哑标可以重复三次及以上，以表示多次求和。（ ）
5. 克罗内克符号δ_{ij}的性质$\delta_{ij}a_j = a_i$表明，δ_{ij}可实现对矢量分量下标的置换。（ ）
6. 置换符号ε_{ijk}是对称张量，交换任意两个下标其数值不变。（ ）
7. 矢量的梯度是二阶张量，矢量的散度是标量，二者均具有坐标不变性。（ ）
8. 不同阶张量可以进行加减运算，运算结果的阶数取参与运算张量阶数的最大值。（ ）
9. 二阶张量的主值和主轴是其不变量，不随坐标系的变换而改变。（ ）
10. 反对称张量的共轭张量等于其自身，对称张量的共轭张量等于其负值。（ ）
11. 任意一阶张量（矢量）都是各向同性张量，因为其大小和方向在坐标系变换下保持不变。（ ）
12. 张量的外积运算满足交换律，即$\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{P}$。（ ）
13. 二阶张量的迹（第一不变量）等于其三个主值之和，行列式（第三不变量）等于其三个主值之积。（ ）

14. 奥-高定理仅适用于矢量场，无法推广到张量场的积分与微分关系。（ ）
15. 二阶对称张量的三个主值一定都是实数，且对应的三个主轴相互正交。（ ）

三、选择题（共 10 题，每题只有一个正确答案）

1. 下列物理量中，属于二阶张量的是（ ） A. 空间某点的温度 B. 流体的速度 C. 流体微元的应力 D. 重力加速度
2. 已知矢量$\vec{a}$的分量为$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$，矢量$\vec{b}$的分量为$b_1 = 4, b_2 = 5, b_3 = 6$，根据爱因斯坦求和约定，$a_i b_i$的值为（ ） A. 32 B. 38 C. 44 D. 50
3. 关于克罗内克符号δ_{ij}的性质，下列说法错误的是（ ） A. $\delta_{ii} = 3$ B. $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ C. $\delta_{ij} a_j = a_i$ D. δ_{ij}不是各向同性张量
4. 笛卡尔坐标系变换中，方向余弦α_{ij}满足的正交性条件是（ ） A. $\alpha_{ik}\alpha_{jk} = \delta_{ij}$ B. $\alpha_{ik}\alpha_{kj} = 0$ C. $\alpha_{ij}\alpha_{ij} = 1$ D. $\alpha_{ik}\alpha_{lm} = \delta_{il}$
5. 下列关于张量运算的说法，正确的是（ ） A. 一阶张量与二阶张量可以直接加减 B. 二阶张量与三阶张量的外积为五阶张量 C. 三阶张量缩并一次后为四阶张量 D. 二阶张量的散度为二阶张量
6. 二阶对称张量的独立分量数量为（ ） A. 3 个 B. 6 个 C. 9 个 D. 12 个
7. 下列关于张量不变量的说法，错误的是（ ） A. 标量有 1 个不变量 B. 矢量有 2 个不变量 C. 二阶张量有 3 个不变量 D. n 阶张量有 n 个不变量
8. 矢量$\vec{a}$的旋度$\nabla \times \vec{a}$的指标表示式为（ ） A. $\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$ B. $\varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j}$ C. $\frac{\partial a_j}{\partial x_i}$ D. $a_i b_j$
9. 任意二阶张量分解为对称张量$\mathbf{S}$与反对称张量$\mathbf{A}$之和，其中$\mathbf{S}$的分量表达式为（ ） A. $s_{ij} = \frac{1}{2}\left(p_{ij} - p_{ji}\right)$ B. $s_{ij} = p_{ij} + p_{ji}$ C. $s_{ij} = \frac{1}{2}\left(p_{ij} + p_{ji}\right)$ D. $s_{ij} = p_{ij} - p_{ji}$
10. 二阶对称张量对应的二次有心曲面，当三个主值都相等时，曲面为（ ） A. 一般椭球面 B. 旋转椭球面 C. 球面 D. 单叶双曲面

四、公式推导与计算题（共 7 题）

1. 推导矢量点积$\vec{a} \cdot \vec{b}$的指标表达式，并利用该表达式计算当$\vec{a} = (2, -1, 3)$，$\vec{b} = (1, 4, -2)$时，点积$\vec{a} \cdot \vec{b}$的值。

2. 已知二阶张量$\mathbf{A}$的分量矩阵为$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix}$，矢量$\vec{b}=(1,0,-1)$，推导二阶张量与矢量右向内积$\mathbf{A}\cdot\vec{b}$的分量表达式，并计算该内积的结果（矢量形式）。
3. 利用 ε-δ 恒等式$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ist}=\delta_{js}\delta_{kt}-\delta_{jt}\delta_{ks}$，推导$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}$的值，并说明该结果的物理意义（若有）。
4. 已知笛卡尔坐标系绕x_3轴旋转$\theta=90°$，推导此时的方向余弦矩阵$\mathbf{A}$，并计算矢量$\vec{a}=(1,1,0)$在新坐标系下的分量$a_i{}'$。
5. 推导标量$\phi=x_1^2+x_2^2+x_3^2$的梯度$\nabla\phi$、矢量$\vec{a}=(x_1x_2,x_2x_3,x_3x_1)$的散度$\nabla\cdot\vec{a}$，并说明梯度和散度的物理意义。
6. 已知二阶张量$\mathbf{P}$的分量矩阵为$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，推导该张量的特征方程（主值方程），并求解其三个主值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$。
7. 将二阶张量$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\2&4&1\\-1&0&5\end{pmatrix}$分解为对称张量$\mathbf{S}$与反对称张量$\mathbf{A}$之和，写出$\mathbf{S}$和$\mathbf{A}$的分量矩阵，并验证分解的唯一性（简要说明）。

五、综合分析题（共 3 题）

1. 结合流体力学知识，分析应力张量τ_{ij}的物理意义：（1）说明应力张量是对称张量的原因（从力学平衡角度简要分析）；（2）解释应力张量的三个不变量（I_1,I_2,I_3）在流体力学中的物理意义，例如第一不变量与静压力的关系；（3）若流体处于静止状态，应力张量的形式会发生怎样的变化？此时其主值和主轴具有什么特点？
2. 针对张量的坐标不变性这一核心特性，完成以下分析：（1）以矢量（一阶张量）为例，通过分量变换公式$a_i{}'=\alpha_{ij}a_j$证明矢量的大小（$|\vec{a}|=\sqrt{a_ia_i}$）是不变量；（2）说明张量的坐标不变性在工程应用中的重要性，例如在流体力学方程建立过程中，如何利用该特性保证方程在不同坐标系下形式一致；（3）对比标量、矢量和二阶张量的不变量，总结不变量数量与张量阶数的关系，并解释该关系的本质原因。
3. 利用张量分析工具，分析流体速度梯度张量$\nabla\vec{u}$：（1）将速度梯度张量分解为应变率张量ε_{ij}（对称部分）与旋转张量ω_{ij}（反对称部分），写出二者的分量表达式；（2）说明应变率张量和旋转张量的物理意义，例如应变率张

量的主值与流体微元拉伸速率的关系，旋转张量与涡量的关联；（3）若流体为无旋流动（$\nabla \times \vec{u} = 0$），速度梯度张量会呈现怎样的特殊形式？此时速度场是否存在速度势函数？若存在，推导速度与速度势函数的关系（以直角坐标系为例）。