《前沿数学方法及其在航天工程中的应用》

张量在流体力学中的应用

授课教师：陈　兵

北京航空航天大学 / 宇航学院 / 推进系 / 高超声速推进实验室
航天液体动力全国重点实验室

第二部分：张量在流体力学中的应用

一. 场论与笛卡尔张量分析

二. 流体力学控制方程

三. 正交曲线坐标系下的控制方程

参考书目

1. 黄克智. **张量分析（第二版）**. 北京：清华大学出版社，2014
2. 谢锡麟. **现代张量分析及其在连续介质力学中的应用**. 上海：复旦大学出版社，2014
3. 吴望一. **流体力学（第二版）**. 北京：北京大学出版社，2021

一、场论与张量分析

- 场论基础
- 笛卡尔张量分析基础

斜角直线坐标系坐标变换【回顾】

三维斜角直线坐标系

1、三维斜角直线坐标系（基矢量$\{g_1, g_2, g_3\}$） → 协变基矢量

2、引入对偶基矢量$\{g^1, g^2, g^3\}$ → 逆变基矢量

$$\begin{cases} \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_i = 1 \quad (i = 1,2,3) \\ \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = 0 \quad (i \neq j) \end{cases}$$

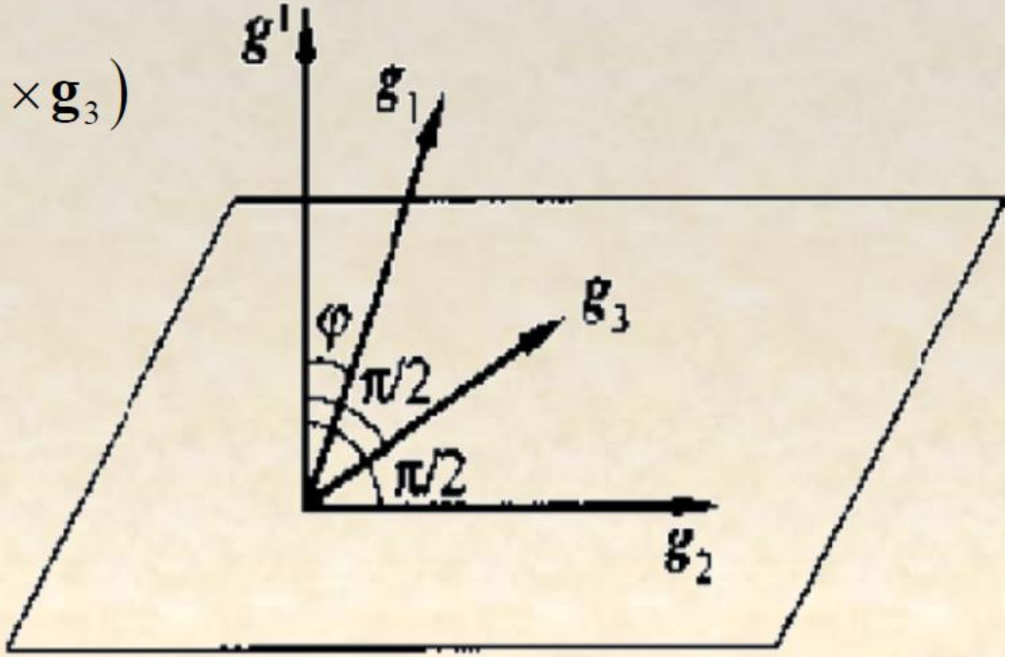
→ 锐角、模值

→ 正交

3、如何求解逆变基矢量

- 先定方向、再定模值

$$\begin{cases} \mathbf{g}^1 = a(\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3) \\ \mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{g}_1 = 1 \end{cases}$$



4、逆变分量和协变分量

逆变分量

$$P^1 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}^1$$
$$P^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}^2$$
$$P^3 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}^3$$

协变分量

$$P_1 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}_1$$
$$P_2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}_2$$
$$P_3 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}_3$$

斜角直线坐标系坐标变换【回顾】

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

三维斜角直线坐标系

A.新旧系之间的转换（协变基）

1、有新旧两组协变基矢量：

$$\{\mathbf{g}_{1'},\mathbf{g}_{2'},\mathbf{g}_{3'}\},\quad \{\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\mathbf{g}_3\}$$

2、任意矢量v对这两组基矢量分解：

$$\mathbf{v}=v^{1'}\mathbf{g}_{1'}+v^{2'}\mathbf{g}_{2'}+v^{3'}\mathbf{g}_{3'}=v^{1}\mathbf{g}_{1}+v^{2}\mathbf{g}_{2}+v^{3}\mathbf{g}_{3}$$

3、$\{v^{1'},v^{2'},v^{3'}\}$ 与 $\{v^{1},v^{2},v^{3}\}$之间的转换关系如何?

旧—>新

$$\begin{bmatrix} v^{1'} \\ v^{2'} \\ v^{3'} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'} \\ \beta_1^{2'} & \beta_2^{2'} & \beta_3^{2'} \\ \beta_1^{3'} & \beta_2^{3'} & \beta_3^{3'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v^{1} \\ v^{2} \\ v^{3} \end{bmatrix}\qquad \mathbf{T}^{ij'}=\begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'} \\ \beta_1^{2'} & \beta_2^{2'} & \beta_3^{2'} \\ \beta_1^{3'} & \beta_2^{3'} & \beta_3^{3'} \end{bmatrix}\qquad \beta_i^{j'}=\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}^{j'}$$

新—>旧

$$\begin{bmatrix} v^{1} \\ v^{2} \\ v^{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta_{1'}^{1} & \beta_{2'}^{1} & \beta_{3'}^{1} \\ \beta_{1'}^{2} & \beta_{2'}^{2} & \beta_{3'}^{2} \\ \beta_{1'}^{3} & \beta_{2'}^{3} & \beta_{3'}^{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v^{1'} \\ v^{2'} \\ v^{3'} \end{bmatrix}\qquad \mathbf{T}^{i'j}=\begin{bmatrix} \beta_{1'}^{1} & \beta_{2'}^{1} & \beta_{3'}^{1} \\ \beta_{1'}^{2} & \beta_{2'}^{2} & \beta_{3'}^{2} \\ \beta_{1'}^{3} & \beta_{2'}^{3} & \beta_{3'}^{3} \end{bmatrix}\qquad \beta_{i'}^{j}=\mathbf{g}_{i'}\cdot\mathbf{g}^{j}$$

B.逆变基之间的转换

旧—>新

$$\begin{bmatrix} v_{1'} \\ v_{2'} \\ v_{3'} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta_{1'}^{1} & \beta_{1'}^{2} & \beta_{1'}^{3} \\ \beta_{2'}^{1} & \beta_{2'}^{2} & \beta_{2'}^{3} \\ \beta_{3'}^{1} & \beta_{3'}^{2} & \beta_{3'}^{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{1} \\ v_{2} \\ v_{3} \end{bmatrix}\qquad 记：\mathbf{T}_{ij'}=\begin{bmatrix} \beta_{1'}^{1} & \beta_{1'}^{2} & \beta_{1'}^{3} \\ \beta_{2'}^{1} & \beta_{2'}^{2} & \beta_{2'}^{3} \\ \beta_{3'}^{1} & \beta_{3'}^{2} & \beta_{3'}^{3} \end{bmatrix}$$

新—>旧

$$\begin{bmatrix} v_{1} \\ v_{2} \\ v_{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta_{1}^{1'} & \beta_{1}^{2'} & \beta_{1}^{3'} \\ \beta_{2}^{1'} & \beta_{2}^{2'} & \beta_{2}^{3'} \\ \beta_{3}^{1'} & \beta_{3}^{2'} & \beta_{3}^{3'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{1'} \\ v_{2'} \\ v_{3'} \end{bmatrix}\qquad 记：\mathbf{T}_{i'j}=\begin{bmatrix} \beta_{1}^{1'} & \beta_{1}^{2'} & \beta_{1}^{3'} \\ \beta_{2}^{1'} & \beta_{2}^{2'} & \beta_{2}^{3'} \\ \beta_{3}^{1'} & \beta_{3}^{2'} & \beta_{3}^{3'} \end{bmatrix}$$

C.协变-逆变之间

4、如果将旧的逆变基矢量看作一个新坐标系的协变基矢量：

将 $\{\mathbf{g}^1,\mathbf{g}^2,\mathbf{g}^3\}$ 替代 $\{\mathbf{g}_{1'},\mathbf{g}_{2'},\mathbf{g}_{3'}\}$

建立的协变坐标与逆变坐标之间的坐标转换关系?

$$\mathbf{v}=v_1\mathbf{g}^1+v_2\mathbf{g}^2+v_3\mathbf{g}^3=v^1\mathbf{g}_1+v^2\mathbf{g}_2+v^3\mathbf{g}_3$$

逆—>协

$$\begin{bmatrix} v_{1} \\ v_{2} \\ v_{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v^{1} \\ v^{2} \\ v^{3} \end{bmatrix}\qquad 其中：\beta_{ij}=\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_j$$

协—>逆

$$\begin{bmatrix} v^{1} \\ v^{2} \\ v^{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13} \\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23} \\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{1} \\ v_{2} \\ v_{3} \end{bmatrix}\qquad 其中：\beta^{ij}=\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{g}^j$$

斜角直线坐标系坐标变换【回顾】

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

三维斜角直线坐标系

A.新旧系之间的转换（协变基）

1、有新旧两组协变基矢量：

$$\{\mathbf{g}_{1'},\mathbf{g}_{2'},\mathbf{g}_{3'}\},\quad \{\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\mathbf{g}_3\}$$

2、任意矢量v对这两组基矢量分解：

$$\mathbf{v}=v^{1'}\mathbf{g}_{1'}+v^{2'}\mathbf{g}_{2'}+v^{3'}\mathbf{g}_{3'}=v^1\mathbf{g}_1+v^2\mathbf{g}_2+v^3\mathbf{g}_3$$

3、$\{v^{1'},v^{2'},v^{3'}\}$ 与 $\{v^1,v^2,v^3\}$之间的转换关系如何？

旧—>新

$$\begin{bmatrix}v^{1'}\\v^{2'}\\v^{3'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1^{1'}&\beta_2^{1'}&\beta_3^{1'}\\\beta_1^{2'}&\beta_2^{2'}&\beta_3^{2'}\\\beta_1^{3'}&\beta_2^{3'}&\beta_3^{3'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v^1\\v^2\\v^3\end{bmatrix}\qquad \mathbf{T}^{ij'}=\begin{bmatrix}\beta_1^{1'}&\beta_2^{1'}&\beta_3^{1'}\\\beta_1^{2'}&\beta_2^{2'}&\beta_3^{2'}\\\beta_1^{3'}&\beta_2^{3'}&\beta_3^{3'}\end{bmatrix}\qquad \beta_i^{j'}=\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}^{j'}$$

互逆

新—>旧

$$\begin{bmatrix}v^1\\v^2\\v^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_{1'}^1&\beta_{2'}^1&\beta_{3'}^1\\\beta_{1'}^2&\beta_{2'}^2&\beta_{3'}^2\\\beta_{1'}^3&\beta_{2'}^3&\beta_{3'}^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v^{1'}\\v^{2'}\\v^{3'}\end{bmatrix}\qquad \mathbf{T}^{i'j}=\begin{bmatrix}\beta_{1'}^1&\beta_{2'}^1&\beta_{3'}^1\\\beta_{1'}^2&\beta_{2'}^2&\beta_{3'}^2\\\beta_{1'}^3&\beta_{2'}^3&\beta_{3'}^3\end{bmatrix}\qquad \beta_{i'}^j=\mathbf{g}_{i'}\cdot\mathbf{g}^j$$

转置

B.逆变基之间的转换

旧—>新

$$\begin{bmatrix}v_{1'}\\v_{2'}\\v_{3'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_{1'}^1&\beta_{1'}^2&\beta_{1'}^3\\\beta_{2'}^1&\beta_{2'}^2&\beta_{2'}^3\\\beta_{3'}^1&\beta_{3'}^2&\beta_{3'}^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}\qquad 记：\mathbf{T}_{ij'}=\begin{bmatrix}\beta_{1'}^1&\beta_{1'}^2&\beta_{1'}^3\\\beta_{2'}^1&\beta_{2'}^2&\beta_{2'}^3\\\beta_{3'}^1&\beta_{3'}^2&\beta_{3'}^3\end{bmatrix}$$

互逆

新—>旧

$$\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1^{1'}&\beta_1^{2'}&\beta_1^{3'}\\\beta_2^{1'}&\beta_2^{2'}&\beta_2^{3'}\\\beta_3^{1'}&\beta_3^{2'}&\beta_3^{3'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{1'}\\v_{2'}\\v_{3'}\end{bmatrix}\qquad 记：\mathbf{T}_{i'j}=\begin{bmatrix}\beta_1^{1'}&\beta_1^{2'}&\beta_1^{3'}\\\beta_2^{1'}&\beta_2^{2'}&\beta_2^{3'}\\\beta_3^{1'}&\beta_3^{2'}&\beta_3^{3'}\end{bmatrix}$$

C.协变-逆变之间

4、如果将旧的逆变基矢量看作一个新坐标系的协变基矢量：

将 $\{\mathbf{g}^1,\mathbf{g}^2,\mathbf{g}^3\}$ 替代 $\{\mathbf{g}_{1'},\mathbf{g}_{2'},\mathbf{g}_{3'}\}$

建立的协变坐标与逆变坐标之间的坐标转换关系？

$$\mathbf{v}=v_1\mathbf{g}^1+v_2\mathbf{g}^2+v_3\mathbf{g}^3=v^1\mathbf{g}_1+v^2\mathbf{g}_2+v^3\mathbf{g}_3$$

逆—>协

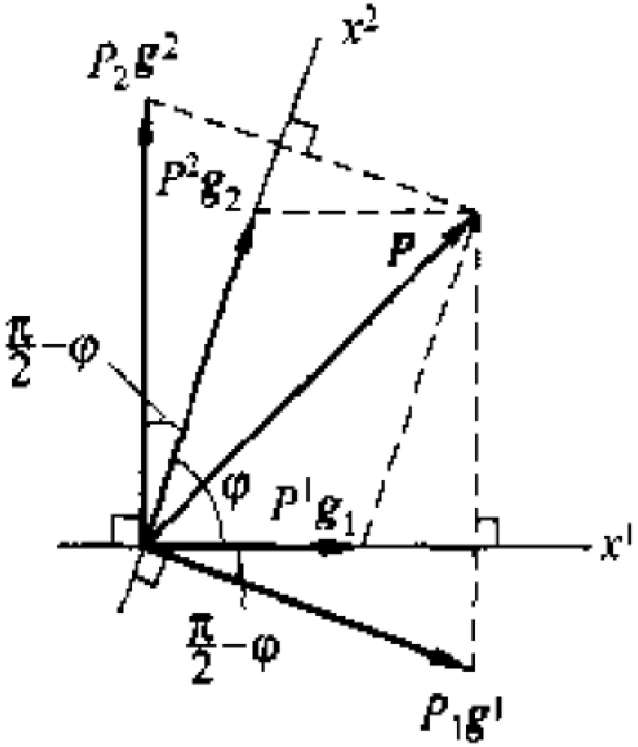
$$\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_{11}&\beta_{12}&\beta_{13}\\\beta_{21}&\beta_{22}&\beta_{23}\\\beta_{31}&\beta_{32}&\beta_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v^1\\v^2\\v^3\end{bmatrix}\qquad 其中：\beta_{ij}=\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_j\qquad \mathbf{T}_{ij}$$

协—>逆

$$\begin{bmatrix}v^1\\v^2\\v^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta^{11}&\beta^{12}&\beta^{13}\\\beta^{21}&\beta^{22}&\beta^{23}\\\beta^{31}&\beta^{32}&\beta^{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}\qquad 其中：\beta^{ij}=\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{g}^j\qquad \mathbf{T}^{ij}$$

斜角直线坐标系坐标变换【回顾】

二维斜角直线坐标系



斜角直线坐标系

$(\varphi < \pi/2)$

协变基矢量 $\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2$

二者不垂直，夹角为φ

非单位向量，模不为1

逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^1 \quad \boldsymbol{g}^2$

$$\boldsymbol{g}^1 \cdot \boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{g}^2 \cdot \boldsymbol{g}_1 = 0$$

$$\boldsymbol{g}^1 \cdot \boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{g}^2 \cdot \boldsymbol{g}_2 = 1$$

$$||\boldsymbol{g}^1|| = \frac{1}{||\boldsymbol{g}_1|| sin\varphi}$$

$$||\boldsymbol{g}^2|| = \frac{1}{||\boldsymbol{g}_2|| sin\varphi}$$

矢量$\boldsymbol{P}$表示为

$$\boldsymbol{P} = P^1 \boldsymbol{g}_1 + P^2 \boldsymbol{g}_2 = P_1 \boldsymbol{g}^1 + P_2 \boldsymbol{g}^2$$

逆变分量

$$P^1 = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{g}^1$$
$$P^2 = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{g}^2$$

协变分量

$$P_1 = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{g}_1$$
$$P_2 = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{g}_2$$

上标：逆变；　　下标：协变

笛卡尔坐标系

$$\boldsymbol{g}^1 = \boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}^2 = \boldsymbol{g}_2$$

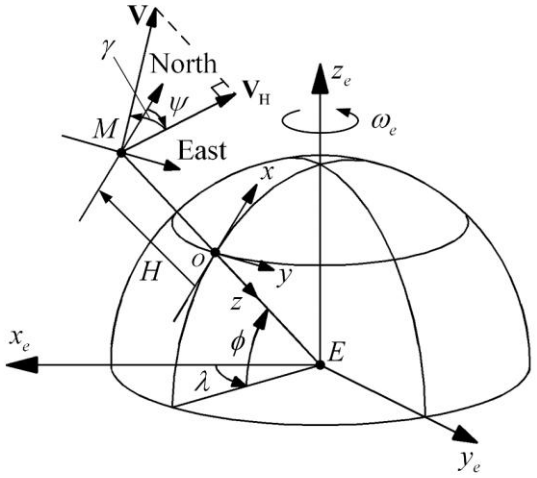
$$P^1 = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{g}_1$$
$$P^2 = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{g}_2$$

1.2 笛卡尔张量分析基础

- 张量的定义及表示法
- 笛卡尔坐标系的变换
- 单位张量及矢量运算
- 张量的运算
- 二阶张量

为什么要介绍张量?

- 从**飞行力学**的角度，利用张量，可以**高效简洁**地建立基于**广义坐标的动力学模型**，且推导过程不易出错 （自余文斌老师）



经度、纬度和海拔描述的典型的广义坐标

- “在近代理论流体力学和计算流体力学中，越来越广泛地使用<u>**张量表示方法**</u>。张量表示方法具有<u>***书写简洁，运算方便***</u>的优点。”

- “当表达物理规律的方程中，**同时出现张量和矢量**时，张量表示方法更加显示其优越性。”

—— 吴望一.《流体力学（第二版）》，北京：北京大学出版社，2021

① 张量的定义及表示法

■ 张量的定义

何为张量?

张量的定义：由若干<u>有序数</u>组成的集合，并且当坐标系改变时满足相应的<u>坐标转换关系</u>

从代数角度讲： 它是**标量**和**矢量**的推广。

- ✓ 标量：具有大小的单一数，0阶张量，有$3^0=1$个分量；
- ✓ 矢量：一维表格（各分量按照顺序排成一排），1阶张量，有$3^1=3$个分量；
- ✓ 矩阵：二维表格（各分量按纵横位置排列），2阶张量，有$3^2=9$个分量；
- ✓ n阶张量：n维表格，有3^n个分量。

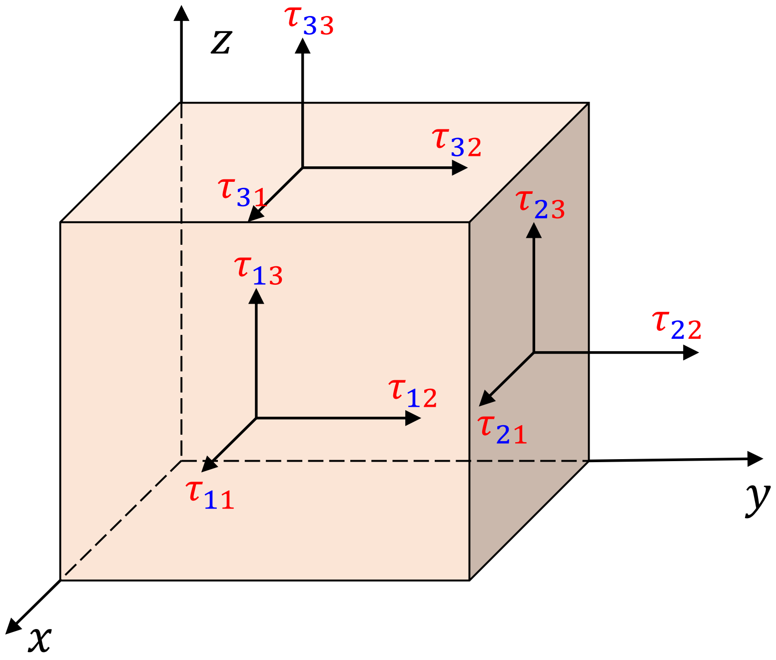
① 张量的定义及表示法

■ 张量的定义

从物理意义上来说， 它是一个在三维坐标系中具有3^n个分量的物理量。物理量可以是：

张量

- ✓ **标量**，比如空间某点的大气温度T；
- ✓ **矢量**，比如重力、速度；
- ✓ **二阶张量**，比如流体微元的应力张量；
- ✓ ……
- ✓ **n-阶张量**



六面体流体微元上的受力

应力张量

$\tau_{11}\vec{i}\vec{i}$　　$\tau_{13}\vec{i}\vec{k}$

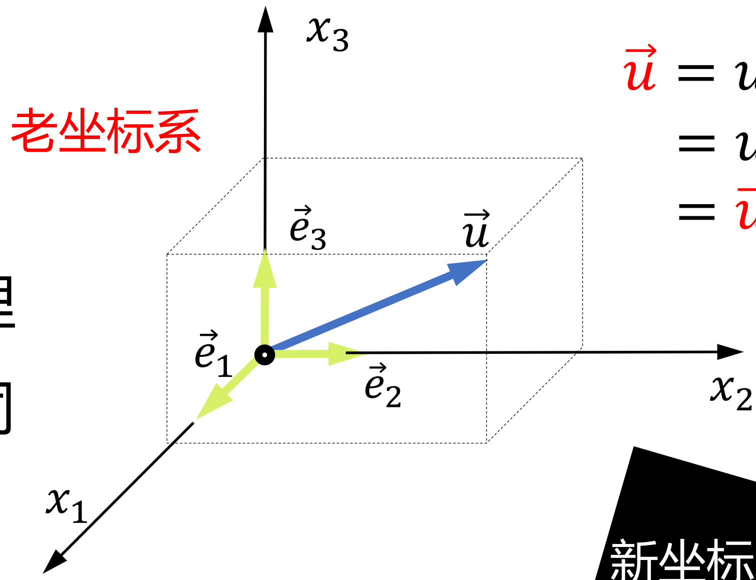
$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

1.2 笛卡尔张量分析基础

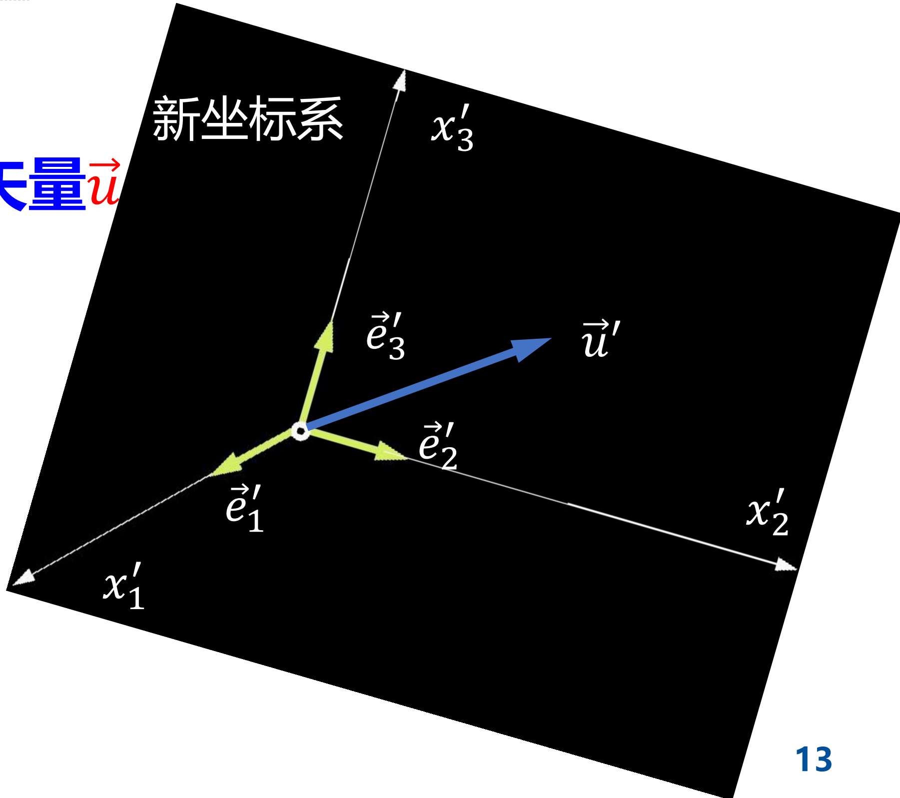
① 张量的定义及表示法

■ 张量的定义

张量的不变性：笼统的来说，一个物理量本身的**性质**，并不会随坐标系的不同而发生变化！



$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3 = u_1'\vec{e}_1' + u_2'\vec{e}_2' + u_3'\vec{e}_3' = \vec{u}'$$



坐标变换下的矢量$\vec{u}$

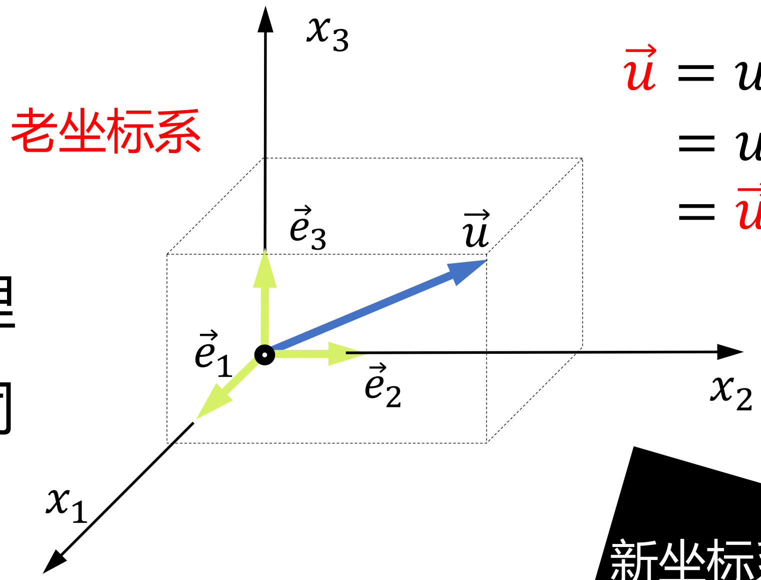
标量：1分量，1个不变量（**大小**）
矢量：3个分量，2个不变量（**大小、方向**）
二阶张量：9个分量，3个不变量
***n*阶张量**：3^n个分量，$n+1$个不变量

1.2 笛卡尔张量分析基础

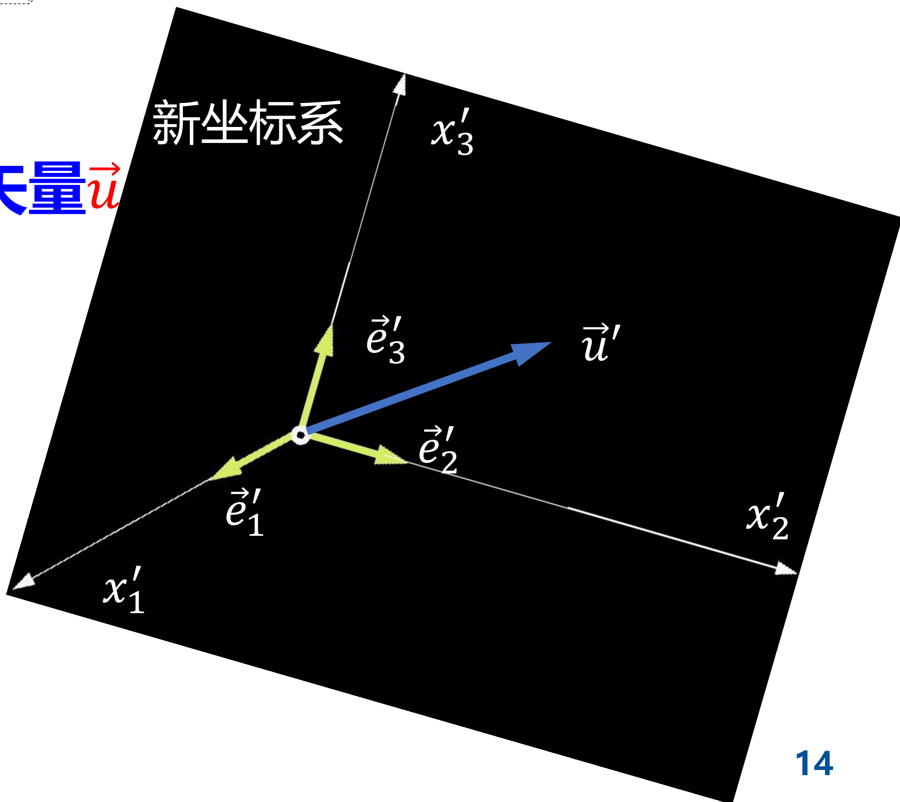
① 张量的定义及表示法

■ 张量的定义

张量的不变性：笼统的来说，一个物理量本身的**性质**，并不会随坐标系的不同而发生变化！



$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3 = u_1'\vec{e}_1' + u_2'\vec{e}_2' + u_3'\vec{e}_3' = \vec{u}'$$



坐标变换下的矢量$\vec{u}$

> **张量：**坐标变换时，能够**自身转化**而保持不变性的量的统称！

坐标系 → 数量表征 → 变换律 → 不变性

① 张量的定义及表示法

■ 张量的表示法

实体法：

u 　　矢量$\vec{\boldsymbol{a}}$ 　　二阶张量（矩阵）$\mathbf{A}$

基向量法：

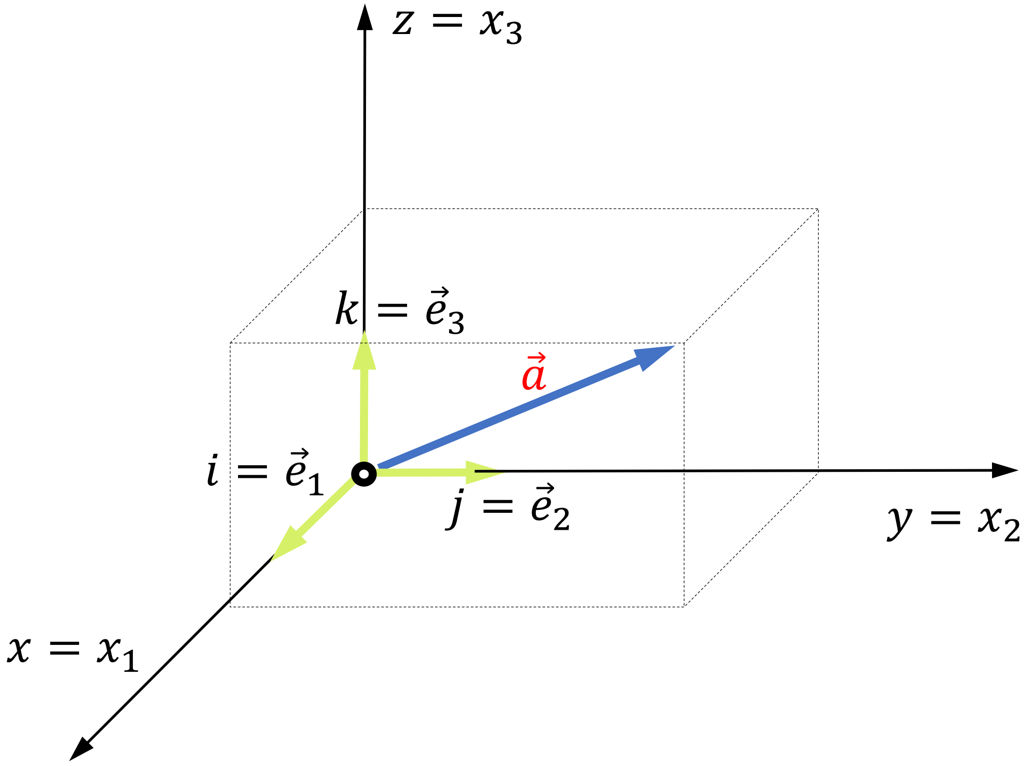
$$a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

分量法：

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3)$$

指标法：

$$a_i$$



① 张量的定义及表示法

■ 张量的表示法

指标表示法：

用字母和整型**下标变量**表示张量或矩阵，下标默认值为1，2，3。指标分为**自由标**和**哑标**。**自由标**是可以在默认范围内任意取值的指标。

$a \Leftrightarrow a_i$ 一个**自由标**表示行（列）矩阵或一阶张量（向量）

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{13}\\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{23}\\ \mathrm{A}_{31} & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33}\end{pmatrix}=(\mathrm{A}_{ij})$$

两个**自由标**表示矩阵或二阶张量

$$\mathrm{A}=\mathrm{A}_{ij}$$

① 张量的定义及表示法

■ 张量的表示法

爱因斯坦求和约定与哑标

在**同一项中**，如果有两个指标相同，则表示对此指标从1到3求和。求和标称为**哑标。**

矢量点积 $\vec{u}\cdot\vec{F}=u_1F_1+u_2F_2+u_3F_3=\sum_{j=1}^{3}u_jF_j=u_jF_j$

矩阵的迹 $A_{ii}=A_{11}+A_{22}+A_{33}=A_{kk}$

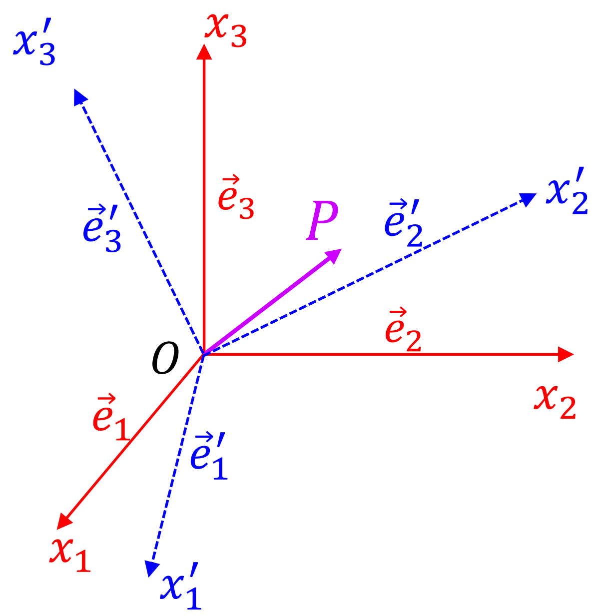
矢量散度 $\nabla\cdot\vec{u}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=\frac{\partial u_l}{\partial x_l}$

作用范围：遵循“**最近原则**”或“**局部范围原则**”

② 笛卡尔坐标系的变换

■ 坐标变换公式

笛卡尔坐标系变换由**平动、旋转**和**反射**组成。如果新旧坐标系都是**右手系**，则只有平动和转动。为了简单起见，**仅考虑旋转变换**。



老坐标系 $Ox_1x_2x_3 \Longrightarrow \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ $\qquad \alpha_{ij} = \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j = \cos(\vec{e}_i', \vec{e}_j)$

新坐标系 $Ox_1'x_2'x_3' \Longrightarrow \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ $\qquad \beta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j' = \cos(\vec{e}_i, \vec{e}_j')$

两组单位矢量间的关系

$$\left.\begin{aligned}
\vec{e}_1' &= \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{12}\vec{e}_2 + \alpha_{13}\vec{e}_3 = \alpha_{1j}\vec{e}_j \\
\vec{e}_2' &= \alpha_{21}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + \alpha_{23}\vec{e}_3 = \alpha_{2j}\vec{e}_j \\
\vec{e}_3' &= \alpha_{31}\vec{e}_1 + \alpha_{32}\vec{e}_2 + \alpha_{33}\vec{e}_3 = \alpha_{3j}\vec{e}_j
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} \vec{e}_i' &= \alpha_{ij}\vec{e}_j \\ \vec{e}_i &= \beta_{ij}\vec{e}_j' \end{aligned}$$

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1'$	α_{11}	α_{12}	α_{13}
$\vec{e}_2'$	α_{21}	α_{22}	α_{23}
$\vec{e}_3'$	α_{31}	α_{32}	α_{23}

笛卡尔坐标系的变换

向量$\vec{a}$

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = a_1'\vec{e}_1' + a_2'\vec{e}_2' + a_3'\vec{e}_3' = \vec{a}'$$

② 笛卡尔坐标系的变换

■ 用坐标变换定义张量

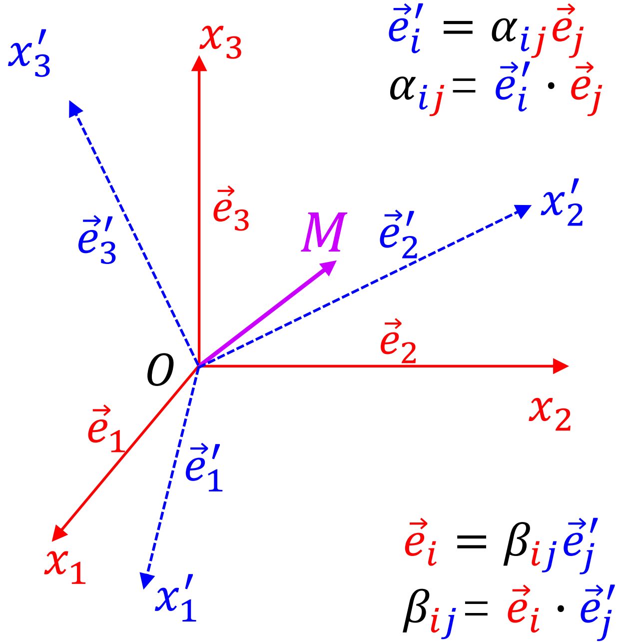
(a) **标量**：ϕ

$\forall$ 空间点：$M(x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow M'(x'_1, x'_2, x'_3)$

$\exists$ 单一数ϕ在新旧坐标系相等：$\phi(M) = \phi'(M')$

即 $\phi(x_1, x_2, x_3) = \phi'(x'_1, x'_2, x'_3)$

则在坐标变化时，ϕ取值保持不变，这就定义了一个标量ϕ。



$\vec{e}'_i = \alpha_{ij}\vec{e}_j$

$\alpha_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j$

$\vec{e}_i = \beta_{ij}\vec{e}'_j$

$\beta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j$

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}'_1$	α_{11}	α_{12}	α_{13}
$\vec{e}'_2$	α_{21}	α_{22}	α_{23}
$\vec{e}'_3$	α_{31}	α_{32}	α_{23}

笛卡尔坐标系的变换

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

② 笛卡尔坐标系的变换

■ 用坐标变换定义张量

(b) **矢量**：$\vec{a}$

$\forall$ 空间点：$M(x_1, x_2, x_3) \Longleftrightarrow M'(x_1', x_2', x_3')$

$\exists$ 老坐标系 $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ 新坐标系 $\vec{a}' = \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix}$

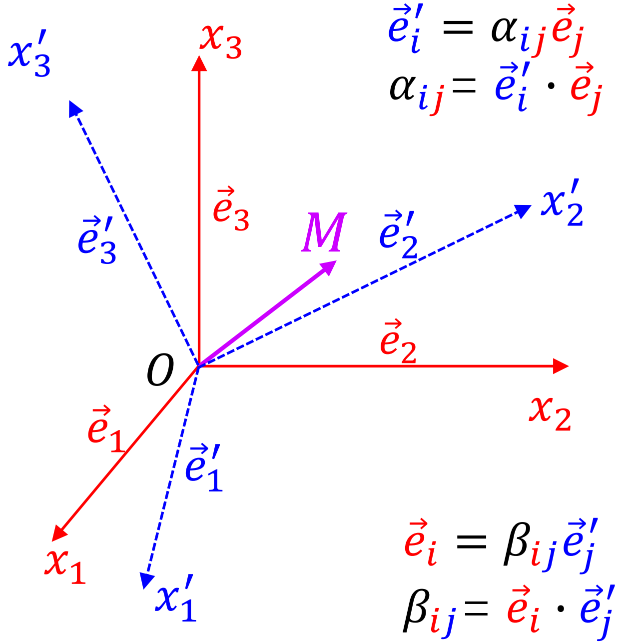
a_j'是$\vec{a}$在新坐标系中轴x_j'上的投影，即：

$$a_j' = \vec{a} \cdot \vec{e}_j' = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \cdot (\alpha_{j1}\vec{e}_1 + \alpha_{j2}\vec{e}_2 + \alpha_{j3}\vec{e}_3)$$

$$= a_1\alpha_{j1} + a_2\alpha_{j2} + a_3\alpha_{j3} = \alpha_{ji}a_i$$

亦即 $\begin{cases} a_i' = \alpha_{ij}a_j \\ a_i = \beta_{ij}a_j' \end{cases}$

则三个分量a_1, a_2, a_3定义了一个矢量。



$\vec{e}_i' = \alpha_{ij}\vec{e}_j$

$\alpha_{ij} = \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j$

$\vec{e}_i = \beta_{ij}\vec{e}_j'$

$\beta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j'$

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1'$	α_{11}	α_{12}	α_{13}
$\vec{e}_2'$	α_{21}	α_{22}	α_{23}
$\vec{e}_3'$	α_{31}	α_{32}	α_{23}

笛卡尔坐标系的变换

② 笛卡尔坐标系的变换

■ 用坐标变换定义张量

(c) **二阶张量**：P

$\forall$ 空间点：$M(x_1, x_2, x_3) \Longleftrightarrow M'(x_1', x_2', x_3')$

$\exists$ 老坐标系9个有序排列的量p_{ij}，转换为新坐标系9个有序排列的量p_{ij}'，转换关系为

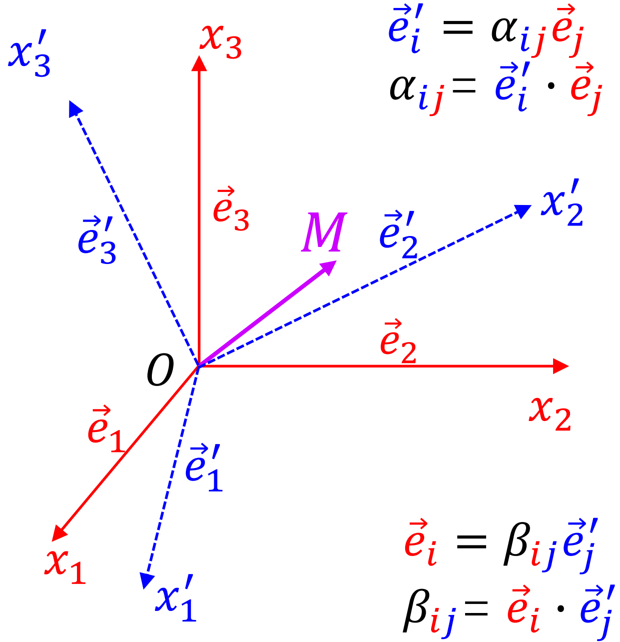
$$p_{ij}' = \alpha_{il}\alpha_{jm}p_{lm}$$

则9个分量p_{ij}定义的量称为二阶张量，写为

$$P = \{p_{ij}\} = p_{ij} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

$\vec{e}_i' = \alpha_{ij}\vec{e}_j$

$\alpha_{ij} = \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j$



$\vec{e}_i = \beta_{ij}\vec{e}_j'$

$\beta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j'$

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1'$	α_{11}	α_{12}	α_{13}
$\vec{e}_2'$	α_{21}	α_{22}	α_{23}
$\vec{e}_3'$	α_{31}	α_{32}	α_{23}

笛卡尔坐标系的变换

② 笛卡尔坐标系的变换

■ 用坐标变换定义张量

(d) ***n*阶张量**：P

$\forall$ 空间点：$M(x_1, x_2, x_3) \Longleftrightarrow M'(x_1', x_2', x_3')$

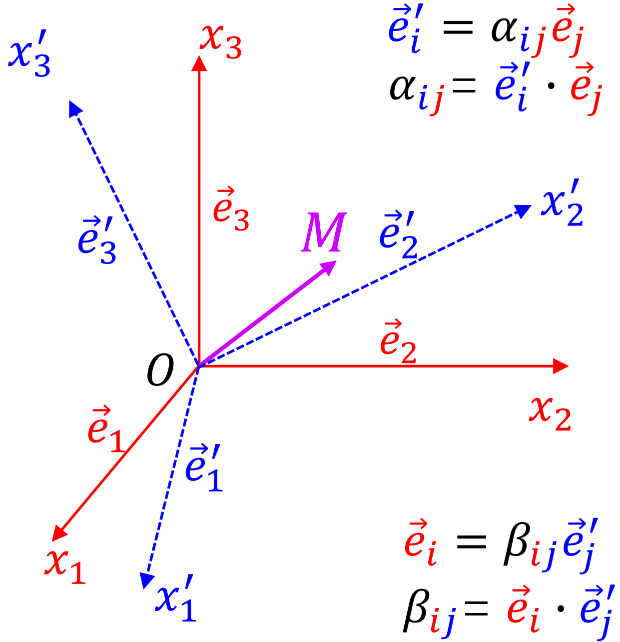
$\exists$ 老坐标系3^n个有序排列的量$p_{i_1 i_2 \cdots i_n}$，转换为新坐标系3^n个有序排列的量$p'_{i_1 i_2 \cdots i_n}$，转换关系为

$$p'_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \underbrace{\alpha_{i_1 j_1}\alpha_{i_2 j_2}\cdots\alpha_{i_n j_n}}_{n\text{个系数}} p_{j_1 j_2 \cdots j_n}$$

则3^n个分量$p_{i_1 i_2 \cdots i_n}$定义的量称为n阶张量。

$\vec{e}_i' = \alpha_{ij}\vec{e}_j$

$\alpha_{ij} = \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j$



$\vec{e}_i = \beta_{ij}\vec{e}_j'$

$\beta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j'$

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1'$	α_{11}	α_{12}	α_{13}
$\vec{e}_2'$	α_{21}	α_{22}	α_{23}
$\vec{e}_3'$	α_{31}	α_{32}	α_{23}

笛卡尔坐标系的变换

1.2 笛卡尔张量分析基础

③ 单位张量及矢量运算

■ 二阶单位张量

δ_{ij}，也叫克罗内克（Kronecker）符号

$$\delta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j' = \begin{cases} 1 \ (i = j) \\ 0 \ (i \neq j) \end{cases} \qquad \delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

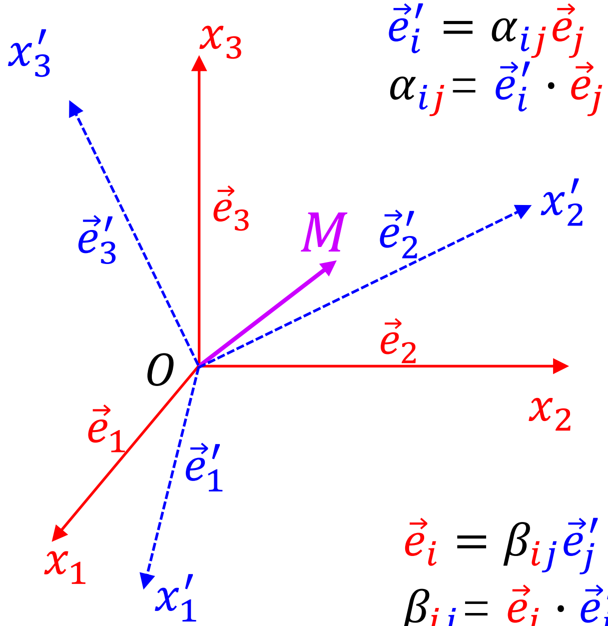
δ_{ij}的基本性质

$$\delta_{ii} = \delta_{jj} = 3$$

$\delta_{ij} = \delta_{ji}$ （**对称性**）

$$\left.\begin{aligned} \delta_{ij} a_j &= a_i \\ \delta_{ik} p_{kj} &= p_{ij} \\ \delta_{ij} \delta_{jk} &= \delta_{ik} \end{aligned}\right\} \text{（置换特性）}$$

规则：若δ_{ij}有一指标与作用指标量的某一指标相同，则用δ_{ij}另一指标置换作用指标量的相同指标，同时自身消失。



$$\vec{e}_i' = \alpha_{ij} \vec{e}_j$$
$$\alpha_{ij} = \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j$$

$$\vec{e}_i = \beta_{ij} \vec{e}_j'$$
$$\beta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j'$$

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1'$	α_{11}	α_{12}	α_{13}
$\vec{e}_2'$	α_{21}	α_{22}	α_{23}
$\vec{e}_3'$	α_{31}	α_{32}	α_{23}

笛卡尔坐标系的变换

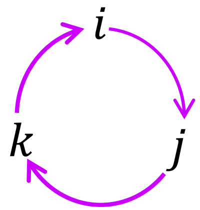
③ 单位张量及矢量运算

■ 三阶单位张量

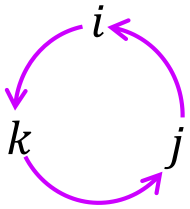
ε_{ijk}，也叫置换（Ricci）符号

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & i,j,k\text{正（偶）排序：}\ \varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1\\-1 & i,j,k\text{逆（奇）排序：}\ \varepsilon_{321}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{132}=-1\\0 & i,j,k\text{不成排列（有两个以上相同）}\end{cases}$$

正排序



逆排序

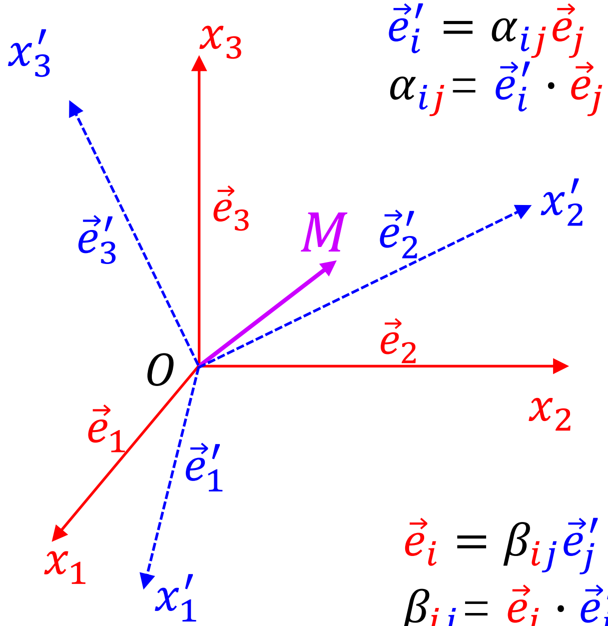


ε_{ijk}的基本性质

$$\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{kji}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ist}=\delta_{js}\delta_{kt}-\delta_{jt}\delta_{ks}\qquad(\varepsilon\text{–}\delta\text{恒等式})$$

$$\vec{e}_i'=\alpha_{ij}\vec{e}_j$$
$$\alpha_{ij}=\vec{e}_i'\cdot\vec{e}_j$$



$$\vec{e}_i=\beta_{ij}\vec{e}_j'$$
$$\beta_{ij}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j'$$

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1'$	α_{11}	α_{12}	α_{13}
$\vec{e}_2'$	α_{21}	α_{22}	α_{23}
$\vec{e}_3'$	α_{31}	α_{32}	α_{23}

笛卡尔坐标系的变换

③ 单位张量及矢量运算

■ 各向同性张量

定义：如果n阶张量$p_{i_1 i_2 \cdots i_n}$的每一个分量，都是旋转坐标变换下的**不变量**，即

$$p'_{i_1 i_2 \cdots i_n} = p_{i_1 i_2 \cdots i_n}$$

则称$p_{i_1 i_2 \cdots i_n}$为n阶**各向同性张量。**

举例：

(i) 克罗内克尔符号δ_{ij}和置换符号ε_{ijk}，都是各向同性张量。

(ii) 零阶张量（标量）都是各向同性的。

(iii) 一阶张量（矢量）除零张量外，都是各向异性的。

(iv) 二阶各向同性张量的形式必为：$p_{ij} = \lambda \delta_{ij}$，其中$\lambda$为标量。

(v) 三阶各向同性张量的形式必为：$p_{ijk} = \lambda \varepsilon_{ijk}$，其中$\lambda$为标量。

(vi) 四阶各向同性张量的形式必为：$p_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk}$，其中$\alpha$、$\beta$和$\gamma$为标量。

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

③ 单位张量及矢量运算

■ 矢量运算的张量表示

以下讨论，均在三维笛卡尔坐标系下进行。

矢量相加减

$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} = a_i \pm b_i$$

矢量点积

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$$

矢量叉积

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

- 当 i = 1 时：$a_2b_3 - a_3b_2$
- 当 i = 2 时：$a_3b_1 - a_1b_3$
- 当 i = 3 时：$a_1b_2 - a_2b_1$

哈密尔顿算子

$$\nabla = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

拉普拉斯算子

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

梯度

$$grad\phi = \nabla\phi = \vec{e}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

散度

$$div\vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

旋度

$$rot\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \vec{e}_i$$

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

④ 张量的运算

■ 代数运算

张量的代数运算主要包括：**加减**、**外积**，以及**缩并和内积**，等等

(a) 张量的加减

同阶张量可以加减

$$\left.\begin{aligned} P &= p_{i_1 i_2 \cdots i_n} \\ Q &= q_{i_1 i_2 \cdots i_n} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow S = P \pm Q = p_{i_1 i_2 \cdots i_n} \pm q_{i_1 i_2 \cdots i_n}$$

④ 张量的运算

■ 代数运算

(b) 张量的外积

m阶张量P（m个下标），可以与n阶张量Q（n个下标）相乘，这里m和n不一定相等。其结果是一个$m+n$阶张量S（$m+n$个下标），S分量是将P和Q的**分量相乘**（**遍乘**），通常称为张量P和Q的**外积**，也叫**并乘**、**并矢**或**并积**，有时候也叫**张量积**。

$$\left.\begin{array}{l} P = p_{i_1 i_2 \cdots i_m} \\ \\ Q = q_{j_1 j_2 \cdots j_n} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad S = P \otimes Q = PQ = p_{i_1 i_2 \cdots i_m} q_{j_1 j_2 \cdots j_n} = s_{\underbrace{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n}_{m+n\text{个下标}}}$$

这里，并积运算符$\otimes$常常省去不写！

④ 张量的运算

■ 代数运算

(b) 张量的外积

$$\left.\begin{aligned} P &= p_{i_1 i_2 \cdots i_m} \\ Q &= q_{j_1 j_2 \cdots j_n} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow S = P \otimes Q = PQ = p_{i_1 i_2 \cdots i_m} q_{j_1 j_2 \cdots j_n} = \underbrace{s_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n}}_{m+n\text{个下标}}$$

矢量并（外积）

$$C = \vec{a}\vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} (b_1, b_2, b_3) = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = a_i b_j \vec{e}_i \vec{e}_j = c_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$$

它有9个基： $\vec{e}_i \vec{e}_j$

- ✓ n阶张量与标量相乘，结果依然为n阶张量；
- ✓ 两个矢量之积——矢量并，结果为二阶张量；
- ✓ n阶张量可视为n个矢量的连乘（并矢）；任何张量可以表述成基向量并矢的线性组合。

④ 张量的运算

■ 代数运算

(b) **张量的外积**

$$\left.\begin{aligned} P &= p_{i_1 i_2 \cdots i_m} \\ Q &= q_{j_1 j_2 \cdots j_n} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow S = P \otimes Q = PQ = p_{i_1 i_2 \cdots i_m} q_{j_1 j_2 \cdots j_n} = s_{\underbrace{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n}_{m+n\text{个下标}}}$$

二阶张量并积

$$\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} = \mathrm{AB} = (a_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j)\,(b_{km}\vec{e}_k\vec{e}_m) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} a_{ij}b_{km}\vec{e}_i\vec{e}_j\vec{e}_k\vec{e}_m = a_{ij}b_{km}\vec{e}_i\vec{e}_j\vec{e}_k\vec{e}_m$$

结果为4阶张量，共有$3^4=81$个分量。

不等于两个3×3的矩阵相乘！

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

④ 张量的运算

■ 代数运算

(c) 张量的缩并和内积

如果n阶张量$P=p_{i_1 i_2 \cdots i_n}$中有*2个下标是相同*，则根据求和约定，可以得到一个具有n-2个下标的量$Q=q_{i_1 i_2 \cdots i_{n-2}}$。可以证明，$Q$是一个$n$-2阶的张量。称$Q$ 为P 的**缩并**，**缩并一次阶数降2。**

$$Q=q_{i_1 i_2 \cdots i_{n-2}}=p_{i_1 i_2 \cdots k \cdots k \cdots i_n} \qquad \text{(任意两个基矢量)}$$

$$p_{i_1 i_2 \cdots i_{n-2} k k} \qquad (i_{n-1}=i_n)$$

如果m阶张量$P=p_{i_1 i_2 \cdots i_m}$与n阶张量$Q=q_{j_1 j_2 \cdots j_n}$相乘，**各取一个下标缩并一次**(人为指定任意两个基矢量)，得到一个具有$m+n$-2阶张量S。称S 为P和Q的**内积**（也叫**点积**）。如果$(i_m=j_1)$，则记为

$$S=P \cdot Q$$

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

④ 张量的运算

■ 代数运算

(c) 张量的缩并和内积

- 二阶张量与矢量的内积：结果为矢量

$$P \cdot \vec{a} = p_{ij} a_j = b_i \qquad \text{(向右内积)}$$

$$\vec{a} \cdot P = a_i p_{ij} = c_j \qquad \text{(向左内积)}$$

- 二阶张量与二阶张量的内积：结果为二阶张量

$$S = P \cdot Q = p_{ik} q_{kj} = s_{ij} \qquad \text{(一次内积)}$$

- 二阶张量与二阶张量的**二次内积**，用$P{\cdot\cdot}Q$表示，结果为标量

$$S = P{\cdot\cdot}Q = p_{ij}\, q_{ji} = s_{ii} = \phi \qquad \text{(二次内积)}$$

$$\mathbf{T} = T^{ijkl}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_l; \quad \mathbf{S} = S^{rst}\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\mathbf{g}_t$$

并联式

$$\mathbf{W} = \mathbf{T} : \mathbf{S} = T^{ijkl} S^{rst}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_l\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\mathbf{g}_t$$

串联式

$$\mathbf{Z} = \mathbf{T} \cdot\cdot \mathbf{S} = T^{ijkl} S^{rst}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}_l\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\mathbf{g}_t$$

④ 张量的运算

■ 微分运算

(a) **求导**

对坐标**求导一次**，张量**增加一阶**。

0阶 ϕ $\Rightarrow$ 1阶 $a_i = \dfrac{\partial \phi}{\partial x_i}$ $\Rightarrow$ 2阶 $b_{ij} = \dfrac{\partial a_j}{\partial x_i}$

n阶 $P = p_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ $\Rightarrow$ n+1阶 $\dfrac{\partial p_{i_1 i_2 \cdots i_n}}{\partial x_i}$

④ 张量的运算

■ 微分运算

(b) **张量的梯度：** 对于n阶张量$P = p_{i_1 i_2 \cdots i_n}$，它的梯度$\nabla P$（$\nabla$与张量$P$的外积）定义为

$$gradP = \nabla P = \frac{\partial p_{i_1 i_2 \cdots i_n}}{\partial x_k} = q_{i_1 i_2 \cdots i_n, k} \qquad (n\text{+1阶})$$

□ 标量的梯度➔矢量

$$grad\phi = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \vec{e}_i$$

□ 矢量的梯度➔二阶张量

$$grad\vec{a} = \nabla \vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i \right) (a_j \vec{e}_j) = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \vec{e}_i \vec{e}_j = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

④ 张量的运算

■ 微分运算

(c) **张量的散度：** 张量P与哈密顿算子∇的内积，是由梯度∇P收缩一次得到的结果

$$divP=\nabla\cdot P=\frac{\partial p_{ki_2\cdots i_n}}{\partial x_k}$$

□ 矢量的散度→标量

$$div\vec{a}=\nabla\cdot\vec{a}=\left(\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\cdot\left(a_j\vec{e}_j\right)=\delta_{ij}\frac{\partial a_j}{\partial x_i}=\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

□ 二阶张量的散度→矢量

$$divP=\nabla\cdot P=\left(\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\cdot\left(p_{jk}\vec{e}_j\vec{e}_k\right)=\delta_{ij}\frac{\partial p_{jk}}{\partial x_i}\vec{e}_k=\frac{\partial p_{jk}}{\partial x_j}\vec{e}_k=\frac{\partial p_{jk}}{\partial x_j}$$

④ 张量的运算

■ 微分运算

(c) **张量的旋度：** 张量P与哈密顿算子∇的内积，是由梯度∇P收缩一次得到的结果

$$rotP = \nabla \times P$$

□ 矢量的旋度➔矢量

$$rot\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \left(\vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \times \left(a_j \vec{e}_j\right) = \vec{e}_i \times \vec{e}_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

□ 二阶张量的散度➔矢量

$$rotP = \nabla \times P = \left(\vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \times \left(p_{jl} \vec{e}_j \vec{e}_l\right) = \vec{e}_i \times \vec{e}_j \frac{\partial p_{jl}}{\partial x_i} \vec{e}_l = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial p_{jl}}{\partial x_i} \vec{e}_k \vec{e}_l$$

(d) **奥-高定理：** 场论中的奥-高定理可以推广到张量的情形， P为n阶张量

$$\oint_S \vec{n} \cdot P dS = \int_V divP dV$$

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

④ 张量的运算

■ 张量识别定理

定理1 若$p_{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_n}$与任意$n$阶张量$q_{j_1 j_2 \dots j_n}$的**内积：** $p_{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_n} q_{j_1 j_2 \dots j_n} = t_{i_1 i_2 \dots i_m}$ 恒为m阶张量，则$p_{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_n}$必为$n+m$阶张量。

定理2 若$p_{i_1 i_2 \dots i_m}$与任意n阶张量$q_{j_1 j_2 \dots j_n}$的**乘积（外积）：** $p_{i_1 i_2 \dots i_m} q_{j_1 j_2 \dots j_n} = t_{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_n}$ 恒为$n+m$阶张量，则$p_{i_1 i_2 \dots i_m}$必为m阶张量。

举例

(i) 对于任意矢量$\vec{a}$，有$a_i = \delta_{ij} a_j$恒成立。根据张量识别定理，克罗内克尔符号δ_{ij}必为二级张量。

(ii) 对于任意矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$，以及张量$a_j b_k$，有$\vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$恒成立。根据张量识别定理，置换符号$\varepsilon_{ijk}$必为三阶张量。

④ 张量的运算

■ 张量识别定理

定理1 若$p_{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_n}$与任意$n$阶张量$q_{j_1 j_2 \dots j_n}$的**内积**：

$$p_{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_n} q_{j_1 j_2 \dots j_n} = t_{i_1 i_2 \dots i_m}$$

恒为m阶张量，则$p_{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_n}$必为$n+m$阶张量。

定理2 若$p_{i_1 i_2 \dots i_m}$与任意n阶张量$q_{j_1 j_2 \dots j_n}$的**乘积（外积）**：

$$p_{i_1 i_2 \dots i_m} q_{j_1 j_2 \dots j_n} = t_{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_n}$$

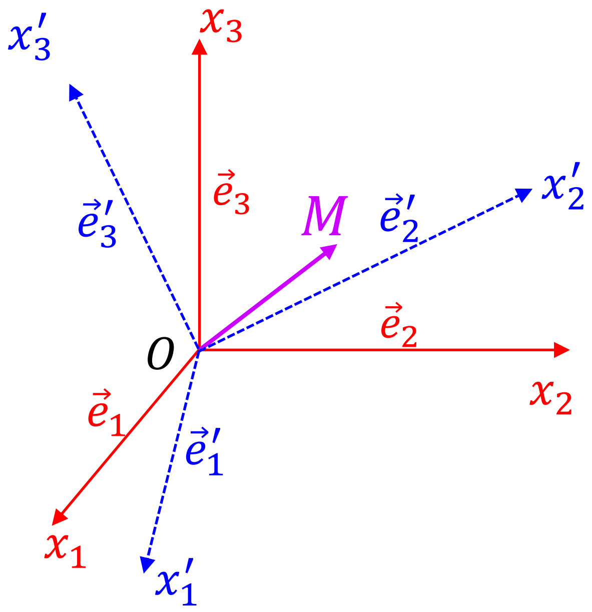
恒为$n+m$阶张量，则$p_{i_1 i_2 \dots i_m}$必为m阶张量。

举例 （iii）笛卡尔坐标变换

$$\vec{e}_i' = \alpha_{ij} \vec{e}_j \qquad \vec{e}_i = \beta_{ij} \vec{e}_j'$$

$$\alpha_{ij} = \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j \qquad \beta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j'$$

α_{ij}和β_{ij}都是二阶张量！



	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1'$	α_{11}	α_{12}	α_{13}
$\vec{e}_2'$	α_{21}	α_{22}	α_{23}
$\vec{e}_3'$	α_{31}	α_{32}	α_{23}

笛卡尔坐标系的变换

⑤ 二阶张量（仿射量）

■ 主值、主轴及不变量

定义：P为二阶张量，

$$P=\{p_{ij}\}=p_{ij}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

$\vec{a}$为空间**任意非零矢量**，二者的**向右内积**为$P\cdot\vec{a}=\vec{b}$。如果矢量$\vec{b}$与$\vec{a}$**共线**，即$\lambda\vec{a}=\vec{b}$，则矢量$\vec{a}$的方向为张量P的**主轴方向**，标量λ为张量P的**主值**，矢量$\vec{a}$为张量P的**主向量。**

求解：张量P的主值λ及主向量$\vec{a}$

$$\left.\begin{array}{l} P\cdot\vec{a}=\vec{b} \\ \\ \lambda\vec{a}=\vec{b} \end{array}\right\} \Rightarrow P\cdot\vec{a}=\lambda\vec{a} \Rightarrow (p_{ij}-\lambda\delta_{ij})\cdot a_j=0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}=0$$

⑤ 二阶张量

■ 主值、主轴及不变量

求解：张量P的主值λ及主向量$\vec{a}$

$$\left.\begin{aligned} P\cdot\vec{a} &= \vec{b} \\ \lambda\vec{a} &= \vec{b} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P\cdot\vec{a}=\lambda\vec{a} \Rightarrow (p_{ij}-\lambda\delta_{ij})\cdot a_j=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}=0$$

由齐次代数方程有不全为0的解的条件，可得

$$\det\left(p_{ij}-\lambda\delta_{ij}\right)=\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

此即**特征方程**

$$\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0$$

⑤ 二阶张量

■ 主值、主轴及不变量

特征方程

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

该方程有3个根（可以是3个实根，也可以是1个实根+2个共轭复根）： λ_1， λ_2， λ_3

$$I_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33} = tr(P) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} p_{22} & p_{32} \\ p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{31} \\ p_{13} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\,\lambda_3$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = \det(P) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

I_1、I_2和I_3是张量P的3个坐标变换**不变量**（不随坐标变换而改变数值的量，类似于标量的大小、矢量的大小和方向）。

将λ_i代入$(p_{ij} - \lambda\delta_{ij}) \cdot a_j = 0$，即可求得张量$P$的主向量$a_j$ 。

⑤ 二阶张量

■ 共轭张量

如果$P=p_{ij}$为二阶张量，则$P_c=p_{ji}$为P的共轭张量。 （**转置**）

■ 对称张量

如果$P=p_{ij}$为二阶张量，且$p_{ij}=p_{ji}$，则P的对称张量。 只有6个独立分量。

$$P=\{p_{ij}\}=p_{ij}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \qquad P_c=P$$

■ 反对称张量

如果$P=p_{ij}$为二阶张量，且$p_{ij}=-p_{ji}$为，则P的反对称张量。 只有3个独立分量。

$$P=\{p_{ij}\}=p_{ij}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ -p_{12} & 0 & p_{23} \\ -p_{13} & -p_{23} & 0 \end{bmatrix} \qquad P_c=-P$$

⑤ 二阶张量

■ 反对称张量的性质

(a) 不变性：

如果A为二阶**反对称张量**，则其对称性不因坐标转换而改变。 （**守恒性**）

老坐标系

$$A=\{a_{ij}\}=a_{ij}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ -a_{12} & 0 & a_{23}\\ -a_{13} & -a_{23} & 0\end{bmatrix}$$

新坐标系 $A'=a'_{ij}$ $\Longrightarrow$

$$a'_{ij}=\alpha_{il}\alpha_{jm}a_{lm}$$

$$a'_{ji}=\alpha_{jm}\alpha_{il}a_{ml}$$

$$\xrightarrow[a_{lm}=-a_{ml}]{A\text{反对称}} \quad a'_{ij}=-a'_{ji}$$

$\Longrightarrow$ A'为二阶反对称张量

⑤ 二阶张量

■ 反对称张量的性质

(b) 关于3个分量：

如果A为二阶**反对称张量**，有三个非零分量，可组成一个矢量。

$$A=\{a_{ij}\}=a_{ij}=\begin{bmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ -a_{12} & 0 & a_{23}\\ -a_{13} & -a_{23} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix} \Longleftrightarrow a_{ij}=-\varepsilon_{ijk}\omega_k$$

取： $\vec{\omega}=\omega_1\vec{i}+\omega_2\vec{j}+\omega_3\vec{k}$ 　　$\vec{\omega}$为一个矢量（在流体力学中的旋度是一个实例）

(c) **反对称张量**A与矢量$\vec{b}$的内积，等于$\vec{\omega}$矢量与$\vec{b}$的叉（矢）积

$$A\cdot\vec{b}=\vec{\omega}\times\vec{b}$$

证：

$$A\cdot\vec{b}=a_{ij}b_j=-\varepsilon_{ijk}\omega_k b_j=\vec{\omega}\times\vec{b}$$

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

⑤ 二阶张量

■ 对称张量的性质

（a）不变性：

如果S为二阶**对称张量**，则其对称性不因坐标转换而改变。 （**守恒性**）

老坐标系

$$S=\{s_{ij}\}=s_{ij}=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix}$$

新坐标系

$$S'=s'_{ij} \Rightarrow \begin{cases} s'_{ij}=\alpha_{il}\alpha_{jm}s_{lm} \\ s'_{ji}=\alpha_{jm}\alpha_{il}s_{ml} \end{cases} \xrightarrow[s_{lm}=s_{ml}]{S\text{对称}} s'_{ij}=s'_{ji} \Rightarrow S'\text{为二阶对称张量}$$

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

⑤ 二阶张量

■ 对称张量的性质 $P_c = P$

(b）主值、主轴：

三个主值都是**实数**，三根主轴**正交**。

证： (i) **先证主值为实数。**如果S为二阶对称张量，λ为S的任一主值，$\vec{a}$是与λ对应的非零矢量，则

$$S\cdot\vec{a} = \lambda\vec{a}$$

两端同时乘以$\vec{a}$的共轭$\bar{\vec{a}}$（注意**矢量共轭**的定义），

$$\bar{\vec{a}}\cdot S\cdot\vec{a} = \lambda\bar{\vec{a}}\cdot\vec{a} \;= \lambda|\vec{a}|^2 \qquad (1)$$

在上式两端取共轭，同时乘以$\vec{a}$的共轭$\bar{\vec{a}}$，

$$\vec{a}\cdot S\cdot\bar{\vec{a}} = \bar{\lambda}|\vec{a}|^2 \qquad (2)$$

联立（1）和（2）式，可得

$$(\lambda-\bar{\lambda})|\vec{a}|^2 = 0$$

由于$|\vec{a}|^2 \neq 0$，所以必然有$\lambda = \bar{\lambda}$，即主值λ为实数。

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

⑤ 二阶张量

■ 对称张量的性质

（b）主值、主轴：

三个主值都是**实数**，三根主轴**正交**。

证：(ii) **再证不同主值对应的两个主轴方向相互垂直**。设对称二阶张量S的主值λ和μ**互不相等**，对应的主向量分别为$\vec{a}$和$\vec{b}$，则

$$S\cdot\vec{a}=\lambda\vec{a}$$

$$S\cdot\vec{b}=\mu\vec{b}$$

上式左乘$\vec{b}$，下式左乘$\vec{a}$，然后两式相减，（注意：S对称，有$\vec{b}\cdot S\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot S\cdot\vec{b}$）

$$(\lambda-\mu)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

由于$\lambda\neq\mu$，所以必有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

即矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$正交，也就是两根主轴正交/垂直。

⑤ 二阶张量

■ 对称张量的性质

（c）标准形式：

可以证明，**对称二阶张量一定存在三个相互垂直的主轴**。设主轴的单位向量分别为$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$和$\vec{e}_3$，则在主轴坐标系中，**对称张量**S具有简单的**标准形式**：

$$S=\{s_{ij}\}=s_{ij}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}$$

二阶对称张量，可以由三个主值λ_1、λ_2和λ_3来表征，进行对角化。

注意：关于三个主值λ_1、λ_2和λ_3，有3种情形：

（i）三个根互不相同；

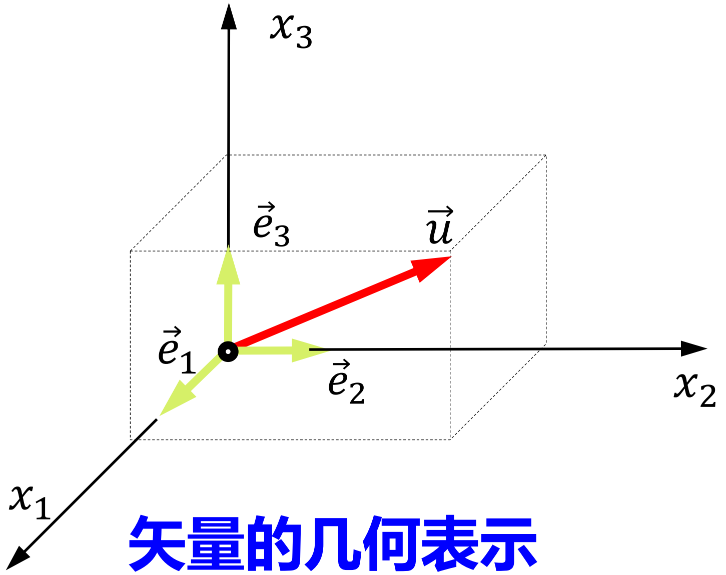
（ii）一个双重根、1个单根；

（iii）1个三重根。

⑤ 二阶张量

■ 对称张量的性质

(d) 几何表示：



矢量的几何表示

二阶对称张量与**二次有心曲面**是一一对应的，因此可以用二次有心曲面作为二阶对称张量的几何表示。

证： 来证明**二阶对称张量与二次有心曲面是一一对应的。**

设$S = s_{ij}$为一个二阶对称张量（即$s_{ij} = s_{ji}$），可以作$\vec{r} \cdot S \cdot \vec{r} =$ 常数，其展开形式为

$$F = s_{11}x_1^2 + s_{22}x_2^2 + s_{33}x_3^2 + 2s_{12}x_1x_2 + 2s_{23}x_2x_3 + 2s_{31}x_3x_2 = \text{常数} \Rightarrow s_{ij}x_ix_j = \text{常数}$$

这是一个**有心二次曲面**。这就说明，对于任意二阶对称向量S，都存在一个有心二次曲面与之对应。

反之，如果给定有心二次曲面$s_{ij}x_ix_j =$ 常数，由于右端是标量（常数），且x_i、x_j均为矢量，则据张量识别定理，二次曲面方程的系数s_{ij}必为张量，又因为$s_{ij} = s_{ji}$，因此s_{ij}是一个对称二阶张量。

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

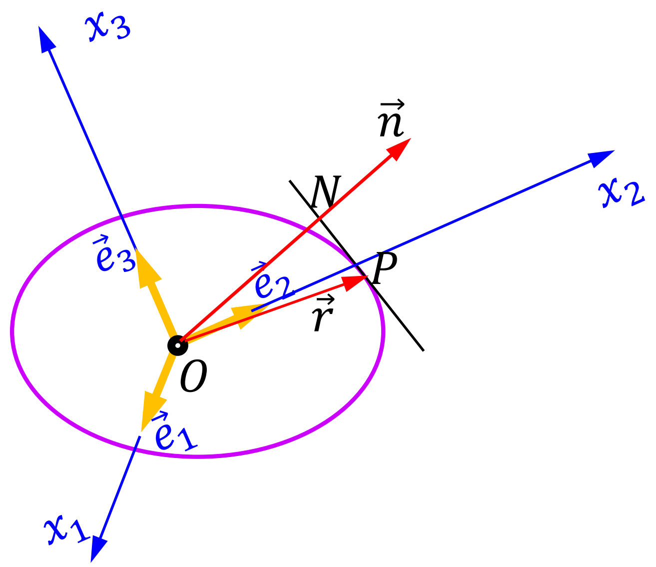
⑤ 二阶张量

■ 对称张量的性质

(d) 几何表示:

在**连续介质力学**中出现的二阶张量S，往往是三个**主值同号**的，此时称S为**恒定的**（同为正号称为**正定**，同为负号称为**负定**）。S对应的二次有心曲面为**椭球面**

$$F=\vec{r}\cdot S\cdot\vec{r}=s_{ij}x_ix_j=\pm 1$$



恒定对称张量的几何表示

设O为椭球中心，P为椭球上一点，$\vec{r}$为矢径，$\vec{n}$为椭球面在P点的外法向单位向量。于是ON为$\vec{r}$在$\vec{n}$方向的投影。容易证明，以下关系式成立

$$S\cdot\vec{r}=\frac{1}{2}gradF \qquad |S\cdot\vec{r}|=\frac{1}{ON}$$

不难发现，在张量的主轴方向（$S\cdot\vec{r}=\lambda\vec{r}$）上，椭球面法向与矢径**恰好重合。**

⑤ 二阶张量

■ 对称张量的性质

(d) 几何表示：

在连续介质力学中出现的二阶张量S，往往是三个主值同号的，此时称S为**恒定的**（同为正号称为**正定**，同问负号称为**负定**）。S对应的二次有心曲面为椭球面

$$F = s_{ij}x_ix_j = \pm 1$$

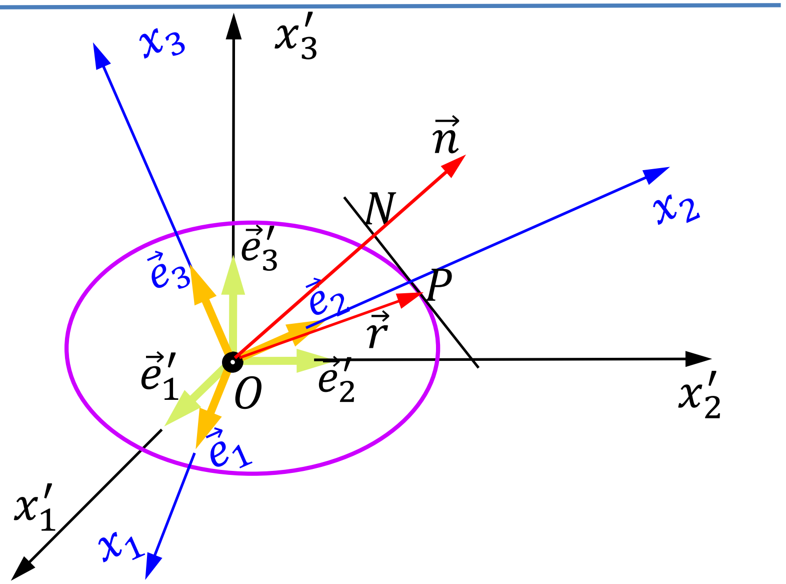
在**主轴坐标系**$Ox_1'x_2'x_3'$中，张量椭球面方程化为

$$\lambda_1 {x_1'}^2 + \lambda_2 {x_2'}^2 + \lambda_3 {x_3'}^2 = \pm 1$$

(i) 当$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$时，三个主轴不相等，为**一般椭球面**；

(ii) 当$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$时，两个主轴不相等，为**旋转椭球面**；

(iii) 当$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$时，三个主轴相等，为**球面**，任意矢径均为主轴。



恒定对称张量的几何表示

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

⑤ 二阶张量

■ 张量分解定理

任何一个二阶张量，都可以**唯一地分解**为一个**对称张量**与一个**反对称张量**之和。

$$P=\{p_{ij}\}=p_{ij}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{12} & p_{22} & p_{23}\\ p_{13} & p_{23} & p_{33}\end{bmatrix}$$

(a) 存在性

$$P=p_{ij}=\frac{1}{2}(p_{ij}+p_{ji})+\frac{1}{2}(p_{ij}-p_{ji})=S+A \qquad S=\frac{1}{2}(p_{ij}+p_{ji}) \qquad A=\frac{1}{2}(p_{ij}-p_{ji})$$

很显然，S为对称张量，而A为反对称张量。

(b) 唯一性

S为对称张量，A为反对称张量

$$P=S+A \xrightarrow[\text{取共轭}]{} P_c=S_c+A_c=S-A \Rightarrow \begin{cases}P=S+A\\ P_c=S-A\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}S=\frac{1}{2}(p_{ij}+p_{ji})\\ A=\frac{1}{2}(p_{ij}-p_{ji})\end{cases}$$

笛卡尔张量分析知识图谱

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

- 1.2 笛卡尔张量分析基础
  - 1.2.1 张量的定义及表示法
    - 定义：若干有序数集合，坐标系改变满足相应转换关系，是标量（0阶，1分量）、矢量（1阶，3分量）推广，n
    - 不变性：物理性质不随坐标系变化，n阶张量有n+1个不变量
    - 表示法：实体法（矢量a、二阶张量A）、基向量法、分量法、指标法（自由标、哑标，爱因斯坦求和约定）
  - 1.2.2 笛卡尔坐标系的变换
    - 变换组成：平动、旋转、反射，右手系仅平动和转动，旋转变换中α_ij=e_i'・e_j=cos(e_i',e_j)
    - 坐标变换定义张量：标量（新旧坐标系值相等）、矢量（a_j'=α_ji a_i）、二阶张量（p_ij'=α_il α_jm p_lm）、n
  - 1.2.3 单位张量及矢量运算
    - 二阶单位张量（δ_ij，克罗内克符号）：δ_ij=e_i・e_j，i=j时为1，i≠j时为0，性质有δ_ii=3、对称性、置换特性
    - 三阶单位张量（ε_ijk，置换符号）：正排序为1，逆排序为-1，有重复下标为0，性质有ε_ijk ε_ist=δ_js δ_kt-δ_
    - 各向同性张量：旋转坐标变换下分量不变，如δ_ij、ε_ijk、标量，1阶张量除零张量外各向异性，二阶各向同性
    - 矢量运算张量表示：矢量加减（c_i=a_i±b_i）、点积、叉积（a×b=ε_ijk a_j b_k）、哈密尔顿算子、梯度（gra
  - 1.2.4 张量的运算
    - 代数运算：加减（同阶张量，s_$i_1i_2\cdots i_n$=p_$i_1i_2\cdots i_n$±q_$i_1i_2\cdots i_n$）、外积（m阶×n阶=m+n阶，s_$i_1\cdots i_m j_1\cdots j_n$=p_$i_1\cdots i_m$ q_$j_1\cdots$
    - 微分运算：求导（对坐标求导一次阶数+1）、梯度（n阶→n+1阶，标量梯度=矢量，矢量梯度=二阶张量）、散度（张量与
    - 张量识别定理：定理1（p与任意n阶张量q内积为m阶张量，则p为m+n阶张量）、定理2（p与任意n阶张量q外积为m+n阶
  - 1.2.5 二阶张量
    - 主值、主轴及不变量：P・a=λa时，λ为主值，a为主向量，a方向为主轴；特征方程$\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0$，$I_1=tr(P)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$，
    - 共轭张量：对称张量（p_ij=p_ji，6独立分量）、反对称张量（p_ij=-p_ji，3独立分量）
    - 反对称张量性质：对称性守恒；3非零分量组成矢量（a_ij=-ε_ijk ω_k）；与矢量内积=ω×b
    - 对称张量性质：对称性守恒；主值实数，主轴正交；主轴坐标系中对角化（$S=diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$）；几何表示为二次有心曲面，
    - 张量分解定理：任意二阶张量=对称张量+反对称张量（P=S+A，S=(p_ij+p_ji)/2，A=(p_ij-p_ji)/2），存在且唯一

课后作业

习题一（用张量表示法）：

1(1)(5)、8(1)~(3）、9(2)(3)
10题

习题二：

1、2题

北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

To be continued …