习题一

1. 证明下列各式

   (1) $\mathrm{grad}(\varphi+\psi)=\mathrm{grad}\varphi+\mathrm{grad}\psi$,
   $\mathrm{grad}(\varphi\psi)=\varphi\mathrm{grad}\psi+\psi\mathrm{grad}\varphi$,
   $\mathrm{grad}F(\varphi)=F'(\varphi)\mathrm{grad}\varphi$;

   (2) $\mathrm{grad}\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3}$, $\mathrm{grad}r^n=nr^{n-2}\vec{r}$;

   (3) $\mathrm{grad}(\vec{c}\cdot\vec{r})=\vec{c}$;

   (4) $\mathrm{grad}\varphi\big(u(\vec{r}),v(\vec{r})\big)=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{grad}u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{grad}v$;

   (5) $\mathrm{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2=2\vec{r}(\vec{c}\cdot\vec{c})-2\vec{c}(\vec{r}\cdot\vec{c})$;

2. 若 $\mathrm{grad}y=\frac{m}{n}\mathrm{grad}x$，求 $\mathrm{grad}(x^my^n)$ 的值。

3. 若在 xy 平面上

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,$$

   求证等势线φ=常数和ψ=常数相互正交。

4. 设φ=常数为一等势面，在其上取一点M，过M在φ的增长方向上作法线 MN，在 MN 上取矢量 $\mathrm{grad}\varphi$，以 $\mathrm{grad}\varphi$ 为直径作一球面。自 M 任作一方向与球面交于 K 点，试证

$$MK=\frac{\partial\varphi}{\partial s}$$

5. 已知椭圆 $r_1+r_2=2a$ 是函数 $\varphi=r_1+r_2$ 的一条等势线，此处 r_1 及 r_2 为动点至两焦点的距离。证明在椭圆上所做的法线平分两向径间的夹角。

6. 求作卵形线 $r_1r_2=a^2$ 的法线的几何方法，其中 r_1,r_2 为动点至两焦点 A 及 B 的距离。

7. 给定平面标量场 φ。设在 M 点上已知两个方向的方向导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial s_1},\frac{\partial\varphi}{\partial s_2}$，试用几何方法求 M 点上的 $\mathrm{grad}\varphi$。

8. 证明下列各式：

   (1) $\mathrm{div}(\vec{a}_1+\overrightarrow{a_2})=\mathrm{div}\vec{a}_1+\mathrm{div}\vec{a}_2$;

   (2) $\mathrm{div}(\varphi\vec{a})=\varphi\mathrm{div}\vec{a}+\mathrm{grad}\varphi\cdot\vec{a}$;

   (3) $\mathrm{div}\big(\vec{a}\times\vec{b}\big)=\vec{b}\cdot\mathrm{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\mathrm{rot}\vec{b}$;

(4) $\operatorname{div}\vec{r} = 3$；

(5) $\operatorname{div}(r\vec{c}) = \frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r}$,

$\operatorname{div}(r^2\vec{c}) = 2\vec{c}\cdot\vec{r}$，其中 $\vec{c}$ 为一常矢量；

(6) $\operatorname{div}(a\vec{r}) = 3a$，$a$ 为一常数标量；

(7) $\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{2}{r}$;

(8) $\operatorname{div}\left[\vec{b}(\vec{r}\cdot\vec{a})\right] = \vec{a}\cdot\vec{b}$,

$\operatorname{div}[\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{a})] = 4\vec{r}\cdot\vec{a}$,

$\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{r}) = 0$，其中 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 为常矢量；

(9) $\operatorname{div}(r^4\vec{r}) = 7r^4$；

(10) $\operatorname{div}[r(\vec{\omega}\times\vec{r})] = 0$，此处 $\vec{\omega}$ 为常矢量；

(11) $\operatorname{div}\left[\vec{a}\times\left(\vec{r}\times\vec{b}\right)\right] = 2\vec{a}\cdot\vec{b}$，其中 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 为常矢量；

(12) 若 $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}$，则 $\operatorname{div}\vec{v} = 0$，其中 $\vec{v}_0, \vec{\omega}$ 为常矢量。

9. 证明下列各式：

(1) $\operatorname{rot}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \operatorname{rot}\vec{a}_1 + \operatorname{rot}\vec{a}_2$；

(2) $\operatorname{rot}(\varphi\vec{a}) = \varphi\operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{grad}\varphi\times\vec{a}$；

(3) $\operatorname{rot}[f(r)\vec{r}] = 0$；

(4) $\operatorname{rot}\left[\vec{b}(\vec{r}\cdot\vec{a})\right] = \vec{a}\times\vec{b}$，其中 $\vec{a}, \vec{b}$ 是常矢量；

(5) $\operatorname{rot}(r\vec{a}) = \frac{\vec{r}\times\vec{a}}{r}$，其中 $\vec{a}$ 是常矢量；

(6) 若 $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}$，则 $\operatorname{rot}\vec{v} = 2\vec{\omega}$，其中 $\vec{v}_0, \vec{\omega}$ 为常矢量。

10. 利用哈密顿符号法和张量表示法证明下列公式：

(1) $(\vec{v}\cdot\nabla)(\varphi\vec{a}) = \vec{a}(\vec{v}\cdot\operatorname{grad}\varphi) + \varphi(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{a}$；

(2) $(\vec{c}\cdot\nabla)\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \vec{a}\times(\vec{c}\cdot\nabla)\vec{b} - \vec{b}\times(\vec{c}\cdot\nabla)\vec{a}$；

(3) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\operatorname{rot}\vec{c} = \vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{c} - \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\cdot\nabla\right)\vec{c}$；

(4) $(\vec{a}\times\nabla)\times\vec{b} = (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} + \vec{a}\times\operatorname{rot}\vec{b} - \vec{a}\operatorname{div}\vec{b}$；

(5) $(\vec{a}\times\nabla)\times\vec{r} = -2\vec{a}$。

11. 证明：

(1) $(\vec{n}\cdot\nabla)\vec{n} = \operatorname{rot}\vec{n}\times\vec{n}$，其中 $\vec{n}$ 是大小相等方向可变的矢量；

(2) $\vec{n}\cdot[\operatorname{grad}(\vec{a}\cdot\vec{n}) - \operatorname{rot}(\vec{a}\times\vec{n})] = \operatorname{div}\vec{a}$，其中 $\vec{a}$ 是变矢量，$\vec{n}$ 是单位常矢量；

(3) $(\nabla\cdot\vec{v})\vec{a} = (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{a} + \vec{a}\operatorname{div}\vec{v}$。

12. 证明下列各积分公式（V 是 S 面所包含的体积，C 是 S 面的边界）：

(1) $\int_V [(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{a}+\vec{a}\mathrm{div}\vec{v}]\,dV=\int_S \vec{a}\,v_n dS$,当 $\vec{a}=\vec{v}$ 时有

$$\int_V [(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}+\vec{v}\mathrm{div}\vec{v}]\,dV=\int_S v_n\,\vec{v}dS.$$

(2) $\oint_V \vec{r}(\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS=\vec{a}V$,其中 $\vec{a}$ 为常矢量,$\vec{r}$ 为径矢;

(3) $\oint_S (\vec{r}\cdot\vec{a})\,\vec{n}dS=\vec{a}V$,符号意义同上;

(4) $\int_S \varphi\,a_n dS=\int_V (\varphi\mathrm{div}\vec{a}+\vec{a}\cdot\mathrm{grad}\varphi)\,dV$;

(5) $\int_S \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_n dS=\int_V \left(\vec{b}\cdot\mathrm{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\mathrm{rot}\vec{b}\right)dV$;

(6) $\int_S \varphi\,\psi\frac{\partial X}{\partial n}dS=\int_V [\varphi\mathrm{div}(\psi\mathrm{grad}X)+\psi\mathrm{grad}\varphi\cdot\mathrm{grad}X]\,dV$;

(7) $\int_S \Delta\,\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS=\int_V [(\Delta\varphi)^2+(\mathrm{grad}\varphi\cdot\mathrm{grad}\Delta\varphi)]\,dV$;

(8) $\int_S (\vec{a}\times\mathrm{grad}\varphi)_n\,dS=\int_V \mathrm{grad}\,\varphi\cdot\mathrm{rot}\vec{a}dV$;

(9) $\int_S \vec{n}\cdot(\mathrm{rot}\vec{a}\times\Delta\vec{a})dS=-\int_V [(\Delta\vec{a})^2+\mathrm{rot}\vec{a}\cdot\Delta\mathrm{rot}\vec{a}]\,dV$,其中 $\mathrm{div}\vec{a}=0$;

(10) $\int_C \varphi\,d\vec{r}=\int_S \vec{n}\times\mathrm{grad}\varphi dS$,

$$\int_C \varphi\,\vec{a}\cdot d\vec{r}=\int_S [\varphi\mathrm{rot}_n\vec{a}+(\mathrm{grad}\varphi\times\vec{a})_n]\,dS;$$

(11) $\int_C u\,dv=\int_S (\mathrm{grad}u\times\mathrm{grad}v)\cdot\vec{n}dS$.

13. 试利用 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}$,$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$ 的定义推导它们在柱面坐标和球面坐标下的表达式。

14. 求 $\frac{1}{2}\mathrm{grad}v^2-\vec{v}\times\mathrm{rot}\vec{v}$ 在曲线坐标、柱面坐标及球面坐标下的表达式。

15. 证明

$$\mathrm{grad}q_i=\frac{1}{H_i}\vec{e}_i,$$

并利用 $\mathrm{rotgrad}q_i=0$ 证明

$$\mathrm{rot}\vec{e}_i=\frac{1}{H_i}\mathrm{grad}H_i\times\vec{e}_i.$$

16. 由公式

$$\mathrm{div}(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)=\vec{e}_3\cdot\mathrm{rot}\vec{e}_2-\vec{e}_2\cdot\mathrm{rot}\vec{e}_3$$

及 15 题的结果求 $\mathrm{div}\vec{e}_1$ 的表达式，写出 $\mathrm{div}\vec{e}_2$ 及 $\mathrm{div}\vec{e}_3$ 的表达式。

17. 利用 15 题和 16 题的结果推导 $\mathrm{div}\vec{a}$ 及 $\mathrm{rot}\vec{a}$ 在曲线坐标系中的表达式。

18. 若

$$a_r = \frac{2k\cos\theta}{r^3}, \quad a_\theta = \frac{k\sin\theta}{r^3}, \quad a_\varphi = 0,$$

其中 k 为一常数，验证矢量 $\vec{a}$ 是否是位势矢量，若是则 ψ 等于什么，并求矢量场的矢量线及矢量 $\vec{a}$ 经过球面 $r = R$ 及半球面 $r = R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 的通量。

19. 利用公式组 $(1.12.1) - (1.12.3)$ 推导 $\mathrm{div}\vec{a}, \mathrm{rot}\vec{a}, \Delta\varphi$ 在曲线坐标系中的表达式。

习题二

1. 在任意直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 中有三个量 b_i，若对任一矢量 a_i 作 a_ib_i，且在坐标变换时满足下列条件

$$a'_i b'_i = a_i b_i.$$

试证：b_i 是一矢量。

2. 若 a_ib_j 是一张量，a_i 是矢量，求证 b_j 必为矢量。

3. 求证：

(1) $\vec{a}\vec{b} = \left(\vec{b}\vec{a}\right)_c$；
(2) $\vec{a}\cdot\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_c\cdot\vec{a}$.

4. 若 $\boldsymbol{P}$ 为对称张量，证：

(1) $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_c$；
(2) $\vec{b}\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\vec{a}) = \vec{a}\cdot\left(\boldsymbol{P}\cdot\vec{b}\right)$，其中 $\vec{a},\vec{b}$ 为两矢量。

5. 若 $\boldsymbol{P}$ 为反对称张量，证：

(1) $\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{P}_c$；
(2) $\vec{b}\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\vec{a}) + \vec{a}\cdot\left(\boldsymbol{P}\cdot\vec{b}\right) = 0$，其中 $\vec{a},\vec{b}$ 为两矢量。

6. 若 $\boldsymbol{P} = \vec{e}_i\boldsymbol{p}_i$，求证 $\boldsymbol{P}_c = \boldsymbol{p}_i\vec{e}_i$，并利用 $\boldsymbol{P}$ 及 $\boldsymbol{P}_c$ 的并矢形式证明

$$\vec{a}\cdot\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_c\cdot\vec{a} = a_i\boldsymbol{p}_i.$$

7. 定义张量 $\boldsymbol{P}$ 和矢量 $\vec{a}$ 的右向矢乘和左向矢乘分别为

$$\boldsymbol{P}\times a = \vec{e}_i(\boldsymbol{p}_i\times\vec{a}),\quad \vec{a}\times\boldsymbol{P} = (\vec{a}\times\vec{e}_i)\boldsymbol{p}_i.$$

求证：

(1) $\vec{b}\vec{c}\times\vec{a} = \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a})$；
(2) $(\vec{\omega}\times\boldsymbol{I})\cdot\vec{a} = \vec{\omega}\times\vec{a}$；
(3) $(\vec{a}\times\boldsymbol{P})_c = -(\boldsymbol{P}_c\times\vec{a})$.

8. 证明：

(1) $\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}_c$ 是对称张量；
(2) $(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q})\cdot\vec{a} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Q}\cdot\vec{a})$.

9. 利用张量 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 的并矢形式 $\boldsymbol{P} = \vec{e}_i\boldsymbol{p}_i$ 及 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{q}_i\vec{e}_i$，证明：

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q} = p_{ik}q_{kj}.$$

10. 将张量 p_{ij} 分解成对称部分与反对称部分之和。证明：与反对称部分相当的矢量 $\vec{\omega}$ 具有下列表达式

$$\vec{\omega}=-\frac{1}{2}(\vec{e}_i\times\boldsymbol{p}_i).$$

11. 将并矢张量 $\vec{a}\vec{b}$ 分解为对称部分与反对称部分之和。证明：与反对称部分相当的矢量 $\vec{\omega}$ 是

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\vec{b}\times\vec{a}.$$

12. 将张量

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j}=\begin{pmatrix}\frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\end{pmatrix}$$

分解为对称部分与反对称部分之和。证明：反对称部分相当于矢量

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{a}.$$

若

$$da_i=\frac{\partial a_i}{\partial x_j}dx_j,$$

试证：

$$d\vec{a}=\boldsymbol{S}\cdot d\vec{r}+\frac{1}{2}\mathrm{rot}\ \ \vec{a}\times d\vec{r},$$

其中 $\boldsymbol{S}$ 是 $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}$ 的对称部分。

13. 有一张量 $\boldsymbol{P}$，将其分解为对称的与反对称的两部分之和，并以 $\vec{\omega}$ 表示相当于反对称部分的矢量。试证：

$$\vec{u}\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\vec{v})-\vec{v}\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\vec{u})=-2\vec{\omega}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}),$$

其中 $\vec{u}$ 及 $\vec{v}$ 为任意矢量。

14. 张量 $\boldsymbol{P}$ 为反对称张量的充分必要条件是：等式

$$\vec{a}\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\vec{a})=0$$

对于任意矢量 $\vec{a}$ 均成立。

15. 计算并矢量 $\vec{a}\vec{b}$ 的不变量。

16. 计算相当于矢量 $\vec{\omega}$ 的反对称张量的不变量。

17. 若 $\boldsymbol{P}=\vec{e}_i\boldsymbol{p}_i$，证：

$$I_1=\vec{e}_1\cdot\boldsymbol{p}_1+\vec{e}_2\cdot\boldsymbol{p}_2+\vec{e}_3\cdot\boldsymbol{p}_3,$$
$$I_2=\vec{e}_1\cdot(\boldsymbol{p}_2\times\boldsymbol{p}_3)+\vec{e}_2\cdot(\boldsymbol{p}_3\times\boldsymbol{p}_1)+\vec{e}_3\cdot(\boldsymbol{p}_1\times\boldsymbol{p}_2),$$
$$I_3=\boldsymbol{p}_1\cdot(\boldsymbol{p}_2\times\boldsymbol{p}_3).$$

18. 若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为三个不共平面的矢量，且

$$\boldsymbol{P}\cdot\vec{a}=\vec{a}',\quad \boldsymbol{P}\cdot\vec{b}=\vec{b}',\quad \boldsymbol{P}\cdot\vec{c}=\vec{c}',$$

证：

$$I_1=\frac{\vec{a}'\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{b}'\cdot(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}'\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)}{\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)},$$

$$I_2=\frac{\vec{a}\cdot\left(\vec{b}'\times\vec{c}'\right)+\vec{b}\cdot(\vec{c}'\times\vec{a}')+\vec{c}\cdot\left(\vec{a}'\times\vec{b}'\right)}{\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)},$$

$$I_3=\frac{\vec{a}'\cdot\left(\vec{b}'\times\vec{c}'\right)}{\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)}.$$

19. 设 $\boldsymbol{P}$ 为对称张量，且 $\boldsymbol{p}_n=\vec{n}\cdot\boldsymbol{P}$。证：

$$\int_S p_n\cdot\vec{v}\,dS=\int_V \mathrm{div}\,(\boldsymbol{P}\cdot\vec{v})\,dV;$$
$$\mathrm{div}(\boldsymbol{P}\cdot\vec{v})=\vec{v}\cdot\mathrm{div}\ \boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}:S,$$

其中 $\boldsymbol{S}$ 是题 13 中 $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}$ 的对称张量部分，现在 $\vec{a}$ 应以 $\vec{v}$ 替代之。

20. 设 $\boldsymbol{P}$ 为对称张量，试证 div $\boldsymbol{P}$ 在曲线坐标系中的表达式为

$$(\mathrm{div}\ \boldsymbol{P})_1=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3p_{11})+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1p_{12})+\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2p_{31})\right]+\frac{p_{12}}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\frac{p_{13}}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}-\frac{p_{22}}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}-\frac{p_{33}}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1},$$

$$(\mathrm{div}\ \boldsymbol{P})_2 = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3p_{12}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1p_{22}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2p_{32})\right] + \frac{p_{12}}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{p_{23}}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3} - \frac{p_{33}}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2} - \frac{p_{11}}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2},$$

$$(\mathrm{div}\ \boldsymbol{P})_3 = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3p_{31}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1p_{23}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2p_{33})\right] + \frac{p_{31}}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{p_{23}}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2} - \frac{p_{11}}{H_3H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{p_{22}}{H_3H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}.$$