

# 第一部分 场论基础讲义

陈 兵

北京航空航天大学

2025 年 10 月

# 目 录

一、引言.....	1
二、场的定义与分类.....	1
2.1 场的定义.....	1
2.2 场的两大要素.....	1
2.2.1 空间变量.....	2
2.2.2 时间变量.....	2
2.3 场的分类（按分布特性）.....	2
2.3.1 按空间分布特性分类.....	2
2.3.2 按时间分布特性分类.....	2
2.3.3 组合分类.....	3
三、场的几何表示.....	3
3.1 标量场的几何表示——等值线（面/体）.....	3
3.1.1 等值线（2D 标量场）.....	3
3.1.2 等值面（3D 标量场）.....	4
3.1.3 等值线（面）的应用.....	4
3.2 矢量场的几何表示——矢量线与矢量图.....	4
3.2.1 矢量线的定义与性质.....	4
3.2.2 矢量线的方程（直角坐标系）.....	5
3.2.3 工程中的矢量线示例.....	5
3.2.4 矢量图（箭头图）.....	6
3.3 场的几何表示与物理本质的联系.....	6
四、标量场的梯度.....	7
4.1 方向导数——标量场沿任意方向的变化率.....	7

4.1.1 方向导数的定义.....	7
4.1.2 方向导数的物理意义.....	7
4.1.3 直角坐标系中方向导数的计算公式.....	8
4.1.4 方向导数的矢量表示.....	8
4.2 梯度的定义与数学表达式.....	8
4.2.1 梯度的定义.....	8
4.2.2 梯度的哈密尔顿算子表示.....	9
4.2.3 梯度与方向导数的关系.....	9
4.3 梯度的物理意义.....	9
4.3.1 梯度的方向——标量场变化最快的方向.....	9
4.3.2 梯度的大小——标量场的最大变化率.....	10
4.3.3 梯度与等值面的关系.....	10
4.4 梯度的基本性质与定理.....	10
4.4.1 梯度的基本性质.....	10
4.4.2 梯度的重要定理.....	11
4.5 梯度的工程应用示例.....	12
4.5.1 流体力学中的温度梯度与热传导.....	12
4.5.2 电磁学中的电势梯度与电场强度.....	13
4.5.3 地形分析中的高度梯度与坡度.....	13
4.6 梯度的练习题.....	13
4.6.1 练习题 A：几何方法求梯度.....	13
4.6.2 练习题 B：证明梯度的复合函数法则.....	14
五、矢量场的散度.....	14
5.1 矢量的通量——散度的基础.....	14
5.1.1 矢量通量的定义.....	14

5.1.2 矢量通量的物理意义.....	15
5.1.3 封闭曲面的通量.....	15
5.2 散度的定义——矢量场的“源强度” .....	16
5.2.1 散度的定义.....	16
5.2.2 散度的物理意义.....	16
5.2.3 散度的标量性.....	16
5.3 散度的计算公式（直角坐标系） .....	16
5.3.1 推导思路.....	16
5.3.2 各面通量的计算.....	17
5.3.3 总通量与散度的计算.....	18
5.3.4 散度的哈密尔顿算子表示.....	18
5.4 奥-高定理（高斯定理）——通量与散度的关系 .....	18
5.4.1 奥-高定理的表述 .....	18
5.4.2 奥-高定理的物理意义 .....	19
5.4.3 奥-高定理的证明（直角坐标系） .....	19
5.4.4 奥-高定理的应用 .....	20
5.5 无源场及其性质.....	20
5.5.1 无源场的定义.....	20
5.5.2 无源场的性质.....	21
5.6 散度的基本性质与练习题.....	23
5.6.1 散度的基本性质.....	23
5.6.2 散度的练习题.....	24
六、矢量场的旋度.....	26
6.1 矢量的环量——旋度的基础.....	26
6.1.1 环量的定义.....	26

6.1.2 环量的物理意义.....	26
6.1.3 环量与涡旋的关系.....	27
6.2 环量密度（旋度的投影） .....	27
6.2.1 环量密度的定义.....	27
6.2.2 环量密度的物理意义.....	27
6.2.3 直角坐标系中环量密度的表达式.....	28
6.2.4 环量密度的矢量表示.....	29
6.3 旋度的定义与数学表达式.....	30
6.3.1 旋度的定义.....	30
6.3.2 旋度的物理意义.....	30
6.3.3 旋度的哈密尔顿算子表示.....	30
6.3.4 无旋场的定义.....	31
6.4 斯托克斯定理——环量与旋度的关系.....	31
6.4.1 斯托克斯定理的表述.....	31
6.4.2 斯托克斯定理的物理意义.....	31
6.4.3 斯托克斯定理的证明（直角坐标系） .....	32
6.4.4 斯托克斯定理的应用.....	32
6.5 旋度的基本性质与定理.....	33
6.5.1 旋度的基本性质.....	34
6.5.2 旋度的重要定理（无旋场与有势场的等价性） .....	35
6.6 旋度的工程应用示例.....	36
6.6.1 流体力学中的涡旋识别与强度量化.....	36
6.6.2 电磁学中的涡旋电场与感应电流计算.....	36
6.6.3 大气科学中的气旋与反气旋分析.....	37
6.7 旋度的练习题.....	37

6.7.1 练习题 A：计算矢量场的旋度.....	37
6.7.2 练习题 B：刚体旋转的速度场旋度.....	38
6.7.3 练习题 C：点源运动流场的旋度.....	38
七、微分算子.....	39
7.1 哈密尔顿算子 ( $\nabla$ ) .....	39
7.1.1 哈密尔顿算子的定义.....	39
7.1.2 哈密尔顿算子的双重特性.....	39
7.1.3 哈密尔顿算子对“三度”的统一表示 .....	40
7.1.4 哈密尔顿算子的运算性质.....	40
7.2 拉普拉斯算子 ( $\nabla^2$ ) .....	41
7.2.1 拉普拉斯算子的定义.....	41
7.2.2 拉普拉斯算子对不同场的作用.....	41
7.2.3 拉普拉斯算子与梯度、散度的关系.....	42
7.2.4 拉普拉斯算子的运算性质.....	42
7.3 调和场——无源无旋场的统一描述.....	42
7.3.1 调和场的定义.....	43
7.3.2 调和场的势函数与拉普拉斯方程.....	43
7.3.3 调和场的性质.....	43
7.3.4 调和场的工程示例.....	43
7.4 微分算子的练习题.....	44
7.4.1 练习题 A：拉普拉斯算子的计算.....	44
7.4.2 练习题 B：验证矢量拉普拉斯恒等式.....	44
7.4.3 练习题 C：调和场的判定 .....	44
八、总结与展望.....	45
8.1 场论基础核心内容总结.....	45

8.2 场论在流体力学中的应用展望.....	46
8.3 学习建议.....	46
习 题.....	47
(一) 填空题.....	47
(二) 判断题.....	47
(三) 选择题.....	48
(四) 公式推导与计算题.....	48
(五) 综合分析题.....	49

一、引言

在流体力学、电磁学、热力学等众多工程与物理领域中，“场”是描述物理量在空间和时间上分布与变化的核心概念。从飞机飞行时周围空气的速度分布（流场），到物体表面的温度分布（温度场），再到宇宙空间中的引力分布（引力场），场的理论为我们理解和分析复杂物理现象提供了统一的数学框架。

本讲义基于北京航空航天大学《前沿数学方法及其在航天工程中的应用》相关课程课件，系统梳理场论的基础理论，包括场的定义与分类、几何表示方法，以及标量场的梯度、矢量场的散度与旋度这三大核心概念（简称“场论三度”），同时介绍哈密尔顿算子、拉普拉斯算子等重要微分工具的应用。通过本讲义的学习，读者将掌握场论的基本思想与数学表达，为后续在流体力学等专业领域的深入研究奠定基础。

二、场的定义与分类

2.1 场的定义

从数学与物理学的角度，**场**的严格定义为：设在空间某一区域内的任意一点上，都定义了某个物理量（即该物理量是空间位置的函数），则称这个定义在该空间域内的物理量（函数）为场。场的本质是“物理量的空间分布”，其核心特征是“空间位置与物理量的一一对应关系”。例如：

- 当我们描述房间内各点的温度时，每一个空间点 $(x,y,z)$ 都对应一个温度值 $T(x,y,z)$ ，这就构成了**温度场**；
- 当我们分析河流中水流的运动时，每一个空间点 $(x,y,z)$ 都对应一个速度矢量 $\vec{v}(x,y,z)$ （包含大小和方向），这就构成了**速度场**。

根据场所描述的物理量类型，场可分为三大类，具体分类及示例如下表 2-1 所示。

表 2-1 场的物理量类型及示例

场的类型	物理量性质	定义	工程与物理示例
标量场	标量（仅含大小，无方向）	若场函数为标量函数 $\phi(\vec{r},t)$ （ $\vec{r}$ 为空间位置矢量， $t$ 为时间），则称为标量场	温度场 $T(\vec{r},t)$ 、密度场 $\rho(\vec{r},t)$ 、压力场 $p(\vec{r},t)$ 、电势场 $\phi(\vec{r},t)$
矢量场	矢量（含大小和方向）	若场函数为矢量函数 $\vec{a}(\vec{r},t)$ ，则称为矢量场	速度场 $\vec{v}(\vec{r},t)$ 、重力场 $\vec{g}(\vec{r},t)$ 、电磁场 $\vec{E}(\vec{r},t)$ （电场）/ $\vec{B}(\vec{r},t)$ （磁场）
张量场	张量（描述多方向依赖关系）	若场函数为张量函数 $\mathbf{T}(\vec{r},t)$ ，则称为张量场	流体力学中的应变率张量场 $\mathbf{\epsilon}(\vec{r},t)$ 、应力张量场 $\mathbf{\sigma}(\vec{r},t)$ ；固体力学中的应力张量场

2.2 场的两大要素

任何场的描述都离不开两个核心要素：**空间变量与时间变量**，这两个要素共同决定了场的分布与演化规律。



### 2.2.1 空间变量

空间变量用于确定物理量在空间中的位置，通常有两种表示方式：

1. **位置矢量表示**：用空间位置矢量 $\vec{r}$ 描述，在直角坐标系中 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ （ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分别为 $x, y, z$ 轴的单位基矢）；
2. **直角坐标表示**：直接用直角坐标系的坐标 $(x, y, z)$ 描述。

### 2.2.2 时间变量

时间变量 $t$ 用于描述物理量随时间的变化，若场函数依赖于 $t$ ，则表明场的分布随时间变化；若不依赖于 $t$ ，则场的分布不随时间变化。

基于上述两大要素，场的数学表达式可统一写为：

- 标量场： $\phi(\vec{r}, t)$  或  $\phi(x, y, z, t)$ ；
- 矢量场： $\vec{a}(\vec{r}, t)$  或  $\vec{a}(x, y, z, t)$ ；
- 张量场： $\mathbf{T}(\vec{r}, t)$  或  $\mathbf{T}(x, y, z, t)$ 。

## 2.3 场的分类（按分布特性）

根据场的空间分布特性与时间分布特性，可将场进一步分类，这一分类对工程问题的简化分析至关重要（例如，在流体力学中，定常场可忽略时间项，均匀场可忽略空间变化项）。

### 2.3.1 按空间分布特性分类

按同一时刻下场函数是否随空间坐标变化，可分为**均匀场**与**非均匀场**：

- **均匀场**：若在同一时刻，场函数在空间所有点上的取值均相同（即不随空间坐标 $(x, y, z)$ 或位置矢量 $\vec{r}$ 变化），则称为均匀场。数学表达式为：
  - 均匀标量场： $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ （或 $\nabla \phi = 0$ ）；
  - 均匀矢量场： $\frac{\partial \vec{a}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial z} = 0$ （或 $\nabla \vec{a} = 0$ ，此处为张量导数）。示例：密闭容器内静止空气的密度场（忽略重力引起的微小变化）可视为均匀密度场。
- **非均匀场**：若在同一时刻，场函数随空间坐标变化（即至少有一个空间方向上的偏导数不为零），则称为非均匀场。工程中绝大多数场均为非均匀场，例如：
  - 加热平板表面的温度场（中心温度高，边缘温度低）；
  - 管道内流体的速度场（管壁处速度为零，管中心速度最大）。

### 2.3.2 按时间分布特性分类

按同一点上场函数是否随时间变化，可分为**定常场**与**非定常场**：

- **定常场**：若在空间任意一点上，场函数的取值不随时间 $t$ 变化，则称为定常场。数学表达式为：
  - 定常标量场： $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ ；

- 定常矢量场： $\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} = 0$ 。示例：大坝下游恒定水流的速度场（流量不变时）可视为定常速度场。
- **非定常场（或瞬变场）**：若在空间任意一点上，场函数的取值随时间 $t$ 变化，则称为非定常场。数学表达式为：
  - 非定常标量场： $\frac{\partial \phi}{\partial t} \neq 0$ ；
  - 非定常矢量场： $\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} \neq 0$ 。示例：台风移动过程中的风速场（随时间变化）、水龙头开启瞬间管道内的水流速度场（从静止到稳定的过渡过程）。

### 2.3.3 组合分类

结合空间与时间特性，场可进一步组合为四类，具体如表 2-2 所示。

表 2-2 场的分类

组合类型	定义（以标量场为例）	示例
均匀定常场	$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ 且 $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$	密闭绝热容器内静止空气的温度场
均匀非定常场	$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ 且 $\frac{\partial \phi}{\partial t} \neq 0$	电热水器加热过程中内部水的温度场（忽略对流时）
非均匀定常场	$\frac{\partial \phi}{\partial x} \neq 0$ （或其他方向）且 $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$	恒温房间内靠近暖气片的温度场
非均匀非定常场	$\frac{\partial \phi}{\partial x} \neq 0$ （或其他方向）且 $\frac{\partial \phi}{\partial t} \neq 0$	汽车急刹车时周围空气的流场

## 三、场的几何表示

场的数学表达式（如 $\phi(x,y,z,t)$ 、 $\vec{a}(x,y,z,t)$ ）虽能精确描述场的分布，但不够直观。为了更清晰地理解场的空间变化规律，需要采用几何表示方法。标量场与矢量场的几何表示方式不同，张量场的几何表示较为复杂（需借助张量曲面或分量图），本部分重点介绍标量场与矢量场的几何表示。

### 3.1 标量场的几何表示——等值线（面/体）

标量场的核心是“空间各点的标量值”，其几何表示的核心思想是：将**标量值相同的点连接成线（2D）、面（3D）或体（4D，含时间）**，通过这些“等值图形”直观反映标量场的空间分布。

#### 3.1.1 等值线（2D 标量场）

在二维空间（如平面）中，标量场 $\phi(x,y,t)$ 的等值线定义为：同一时刻 $t$ ，平面内满足 $\phi(x,y,t) = C$ （ $C$ 为常数）的所有点 $(x,y)$ 的轨迹，称为**等值线**（或等高线、等温线等，依物理量类型命名）。

以地形高度场 $h(x,y)$ （二维定常标量场）为例，其等值线即为“等高线”——将海拔高度相同的点连接成线。通过等高线的分布，可直观判断地形特征：

- 等高线密集：表示高度变化剧烈（如陡坡、悬崖）；
- 等高线稀疏：表示高度变化平缓（如平原、缓坡）；
- 等高线闭合且中心值高：表示山峰（中间高，四周低）；
- 等高线闭合且中心值低：表示洼地（中间低，四周高）。

类似地，二维温度场 $T(x, y, t)$ 的等值线称为“等温线”，二维电势场 $\phi(x, y, t)$ 的等值线称为“等势线”，其分布规律与等高线一致，均反映标量场的空间变化速率与趋势。

### 3.1.2 等值面（3D 标量场）

在三维空间中，标量场 $\phi(x, y, z, t)$ 的等值面定义为：同一时刻 $t$ ，空间内满足 $\phi(x, y, z, t) = C$ （ $C$ 为常数）的所有点 $(x, y, z)$ 的轨迹，称为**等值面**（或等压面、等温面、等密度面等）。

工程中常见的等值面示例：

- 大气中的等压面：气象学中用于分析气压系统（高压区、低压区）的分布；
- 流体中的等温面：换热器设计中，通过等温面的形状判断热量传递的方向与速率；
- 电场中的等势面：电气设备设计中，等势面的分布直接影响电场强度的大小（等势面密集处电场强度大）。

等值面的核心性质：同一时刻，任意两个不同常数 $C_1$ 和 $C_2$ 对应的等值面 $\phi = C_1$ 与 $\phi = C_2$ 互不相交（若相交，则交点处的标量值同时为 $C_1$ 和 $C_2$ ，矛盾）。

### 3.1.3 等值线（面）的应用

等值线（面）不仅是场的直观表示，更是分析标量场变化的重要工具：

1. **判断变化趋势**：通过等值线（面）的数值大小，可直接判断标量场的“高低”分布（如温度场中，等温线数值从左到右增大，表明温度从左到右升高）；
2. **计算变化速率**：等值线（面）的疏密程度直接反映标量场的空间变化速率——密集处变化快，稀疏处变化慢（这一性质将在“梯度”部分进一步量化）；
3. **工程优化设计**：例如，在飞行器设计中，通过分析流场的压力等值面，可优化机身形状以减少气动阻力；在建筑设计中，通过分析地形等高线，可选择平缓区域作为建筑场地。

## 3.2 矢量场的几何表示——矢量线与矢量图

矢量场的核心是“空间各点的矢量（大小+方向）”，其几何表示需同时反映矢量的大小与方向，常用方法有**矢量线**（流线、电场线等）和**矢量图**（箭头图）。

### 3.2.1 矢量线的定义与性质

矢量线的严格定义为：在同一时刻 $t$ ，矢量场 $\vec{a}(x, y, z, t)$ 所在空间中，存在一条曲线 $L$ ，使得曲线上每一点的切线方向与该点的矢量 $\vec{a}$ 的方向完全重合，则称曲线 $L$ 为该矢量场在时刻 $t$ 的**矢量线**（依物理量类型命名，如速度场的矢量线称为“流线”，电场的矢量线称为“电场线”，磁场的矢量线称为“磁感线”）。

矢量线的核心性质：

1. **方向一致性**：矢量线上任意一点的切线方向=该点矢量的方向；

2. **不相交性**：同一时刻，任意两条矢量线互不相交（若相交，则交点处的矢量有两个方向，矛盾）；
3. **疏密反映大小**：矢量线密集的区域，矢量的模（大小）较大；矢量线稀疏的区域，矢量的模较小（与标量场等值线的疏密性质类似）。

### 3.2.2 矢量线的方程（直角坐标系）

在直角坐标系中，矢量场

$$\vec{a}(x, y, z, t) = a_x(x, y, z, t)\vec{i} + a_y(x, y, z, t)\vec{j} + a_z(x, y, z, t)\vec{k}$$

矢量线的切线方向由微分位置矢量  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$  描述。根据矢量线的定义，切线方向与矢量方向一致，即  $d\vec{r}$  与  $\vec{a}$  平行，因此其叉积为零：

$$d\vec{r} \times \vec{a} = 0$$

将叉积展开为分量形式，利用矢量平行的条件（对应分量成比例），可得到矢量线的微分方程：

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z, t)}$$

这是一个常微分方程组（定常场中  $t$  为常数，非定常场中  $t$  为参数），求解该方程组即可得到矢量线的方程。

### 3.2.3 工程中的矢量线示例

矢量线在工程领域有着广泛的应用，以下为几个典型示例：

#### 1. 流体力学中的流线

流线是速度场  $\vec{v}(x, y, z, t)$  的矢量线，其物理意义是：同一时刻，流体中所有质点的运动方向与流线的切线方向一致。通过流线的分布，可直观判断流体的运动状态：

- 流线平行且均匀：表示流体做匀速直线运动（如管道内的层流）；
- 流线弯曲：表示流体做曲线运动（如绕翼型的流动）；
- 流线汇聚：表示流体被压缩（如喷嘴出口的流动）；
- 流线发散：表示流体膨胀（如扩压器内的流动）。

图 3-1 为某飞机飞行时的流场流线图，从图中可清晰看到：气流在机翼前缘被分开，机翼上表面流线密集（流速大），下表面流线稀疏（流速小），这正是飞机产生升力的核心原因（伯努利原理）。

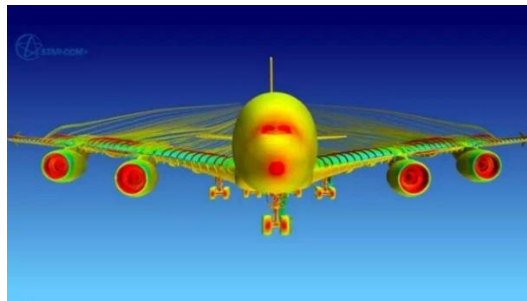


图 3-1 某飞机飞行时的流场

## 2. 电磁学中的电场线与磁感线

- 电场线：电场强度 $\vec{E}$ 的矢量线，起始于正电荷，终止于负电荷，反映电场的方向与强弱；
- 磁感线：磁感应强度 $\vec{B}$ 的矢量线，闭合曲线（无起点和终点），反映磁场的方向与强弱。

例如，平行板电容器之间的电场线为平行直线（均匀电场），通电螺线管内部的磁感线为平行直线（均匀磁场）。

### 3.2.4 矢量图（箭头图）

除矢量线外，矢量场还可通过矢量图（箭头图）直观表示。其绘制方法为：

1. 在空间选取若干代表性的点（通常为网格点）；
2. 在每个点上，沿矢量的方向绘制箭头，箭头的长度与矢量的模成正比（模越大，箭头越长）。

矢量图的优点是“直接反映各点矢量的大小与方向”，适合描述局部区域的矢量场分布（如管道内某截面的速度矢量图）；缺点是空间中箭头过多时会显得杂乱，不适合描述大范围矢量场（此时矢量线更优）。

图 3-2 为用速度矢量表示的速度场，图中每个箭头代表对应点的流速大小与方向，可清晰看到流速在空间中的变化（如箭头长度从左到右递增，表明流速从左到右增大）。

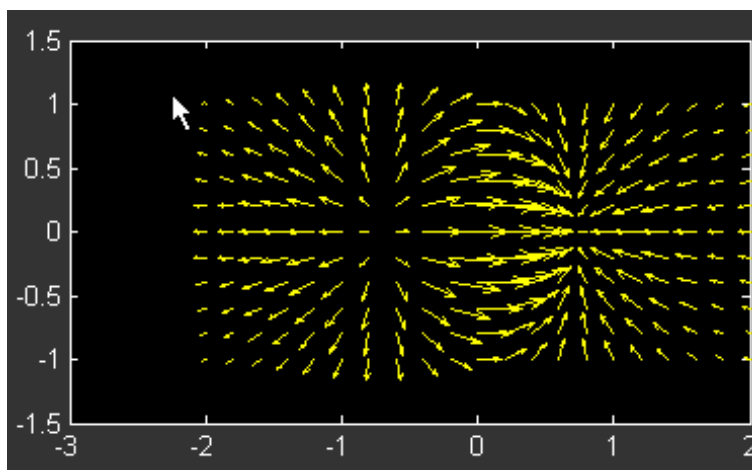


图 3-2 速度矢量表示的速度场

## 3.3 场的几何表示与物理本质的联系

场的几何表示并非单纯的“图形绘制”，而是对物理本质的直观反映，其核心联系如下：

### 1. 标量场的等值线（面）与变化方向

标量场的变化方向始终垂直于等值线（面）（这一结论将在“梯度”部分严格证明），例如：地形高度场中，水流的方向（高度降低最快的方向）垂直于等高线。

### 2. 矢量场的矢量线与质点运动

在定常矢量场中，矢量线与质点的运动轨迹（迹线）重合（非定常场中不重合），例如：定常流场中，流体质点的运动轨迹就是流线。

### 3. 几何图形的疏密与物理量的变化率

无论是标量场的等值线（面）还是矢量场的矢量线，其疏密程度均反映物理量的空间变化率——密集处变化快，稀疏处变化慢，这为工程问题的定性分析提供了重要依据。

## 四、标量场的梯度

标量场的等值线（面）描述了标量值的分布，但无法量化标量场在某点的“变化快慢”与“变化方向”。例如，地形等高线密集处高度变化快，但“快多少”“沿哪个方向最快”需要精确的数学描述。梯度（Gradient）正是为解决这一问题而引入的概念，它是描述标量场空间变化率的核心工具。

### 4.1 方向导数——标量场沿任意方向的变化率

要理解梯度，首先需要引入方向导数的概念：方向导数描述标量场在某点沿任意指定方向的变化率，是梯度的基础。

#### 4.1.1 方向导数的定义

设标量场  $\phi(\vec{r}, t) = \phi(x, y, z, t)$ ， $M$  为场中任意一点， $\vec{s}$  为空间中任意一个指定方向（单位矢量为  $\vec{s}^0$ ）。在  $\vec{s}$  方向上取  $M$  点的邻近点  $M'$ ，使得  $M$  与  $M'$  之间的距离  $MM' = \rho$ （ $\rho > 0$ ），如图 4-1 所示。

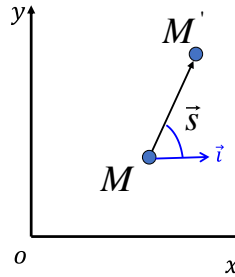


图 4-1 方向导数（二维）

若当  $\rho \rightarrow 0$  时，极限  $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{s}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\phi(M') - \phi(M)}{\rho}$  存在，则称该极限为标量场  $\phi$  在  $M$  点沿  $\vec{s}$  方向的方向导数。

#### 4.1.2 方向导数的物理意义

方向导数的物理意义非常明确：

- $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{s}} > 0$ ：标量场  $\phi$  在  $M$  点沿  $\vec{s}$  方向**递增**，数值越大，递增越快；
- $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{s}} = 0$ ：标量场  $\phi$  在  $M$  点沿  $\vec{s}$  方向**无变化**（该方向与等值线/面平行）；
- $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{s}} < 0$ ：标量场  $\phi$  在  $M$  点沿  $\vec{s}$  方向**递减**，绝对值越大，递减越快。

例如，温度场 $T(x, y, z)$ 中， $M$ 点沿 $\vec{s}$ 方向的方向导数 $\frac{\partial T}{\partial s} = 5 \text{ K/m}$ ，表示沿 $\vec{s}$ 方向每移动 1 米，温度升高 5 开尔文；若 $\frac{\partial T}{\partial s} = -3 \text{ K/m}$ ，则表示沿 $\vec{s}$ 方向每移动 1 米，温度降低 3 开尔文。

#### 4.1.3 直角坐标系中方向导数的计算公式

方向导数的定义是普适的，但在具体坐标系中需要推导其计算公式。以直角坐标系为例，设 $\vec{s}$ 方向的单位矢量 $\vec{s}^0$ 与 $x, y, z$ 轴的夹角分别为 $\alpha, \beta, \gamma$ ，则 $\vec{s}^0$ 的分量为：

$$\vec{s}^0 = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为 $\vec{s}$ 方向的**方向余弦**，满足

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

由于 $M'$ 点在 $\vec{s}$ 方向上，其坐标与 $M$ 点坐标 $(x, y, z)$ 的关系为：

$$x' = x + \rho\cos\alpha, \quad y' = y + \rho\cos\beta, \quad z' = z + \rho\cos\gamma$$

根据多元函数的泰勒展开式， $\phi(M')$ 在 $M$ 点附近可展开为：

$$\phi(M') = \phi(x + \rho\cos\alpha, y + \rho\cos\beta, z + \rho\cos\gamma) \approx \phi(x, y, z) + \frac{\partial\phi}{\partial x}\rho\cos\alpha + \frac{\partial\phi}{\partial y}\rho\cos\beta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\rho\cos\gamma$$

将其代入方向导数的定义式，化简得：

$$\frac{\partial\phi}{\partial s} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\cos\gamma \quad (4-1)$$

这就是直角坐标系中方向导数的计算公式。式中， $\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}$ 分别是标量场 $\phi$ 在 $M$ 点沿 $x, y, z$ 轴正方向的方向导数（即偏导数），它们是方向导数的特殊情况。

#### 4.1.4 方向导数的矢量表示

观察公式（4-1），其右侧可表示为两个矢量的点积：

- 第一个矢量： $\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$ （仅与标量场 $\phi$ 和 $M$ 点有关，与 $\vec{s}$ 方向无关）；
- 第二个矢量： $\vec{s}^0 = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$ （仅与 $\vec{s}$ 方向有关，与标量场 $\phi$ 无关）。

因此，方向导数可改写为：

$$\frac{\partial\phi}{\partial s} = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k} \right) \cdot \vec{s}^0 \quad (4-2)$$

这一矢量表示揭示了一个重要事实：标量场在某点沿任意方向的方向导数，等于一个“与场和点相关的矢量”在该方向上的投影。这个矢量就是**梯度**。

### 4.2 梯度的定义与数学表达式

#### 4.2.1 梯度的定义

标量场 $\phi(\vec{r}, t)$ 在 $M$ 点的**梯度**（记为 $\text{grad } \phi$ 或 $\nabla\phi$ ）定义为：由标量场 $\phi$ 的三个一阶偏导数构成的矢量，即

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k} \quad (4-3)$$

梯度的定义具有以下核心特征：

1. **矢量性**：梯度是矢量，既有大小，又有方向；

2. **场依赖性**：梯度由标量场 $\phi$ 决定，不同标量场的梯度不同；
3. **点依赖性**：梯度在空间不同点的取值不同（非均匀场），即梯度是一个“矢量场”（称为梯度场）；
4. **时间依赖性**：若标量场 $\phi$ 是非定常的（依赖 $t$ ），则梯度也依赖 $t$ ，即 $\text{grad } \phi(\vec{r}, t)$ 。

#### 4.2.2 梯度的哈密尔顿算子表示

为了简化梯度的书写，引入**哈密尔顿算子**（Hamilton Operator），记为 $\nabla$ （读作“nabla”或“倒三角”）。在直角坐标系中，哈密尔顿算子的定义为：

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (4-4)$$

哈密尔顿算子是一个“具有矢量和微分双重性质”的符号：

- 作为微分算子，它可对右侧的函数进行偏导数运算；
- 作为矢量，它可与其他矢量进行点积、叉积等运算。

将哈密尔顿算子作用于标量场 $\phi$ ，即得到梯度：

$$\nabla \phi = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} = \text{grad } \phi$$

因此，梯度的常用表示为 $\nabla \phi$ （比 $\text{grad } \phi$ 更简洁），后续讲义中统一使用 $\nabla \phi$ 。

#### 4.2.3 梯度与方向导数的关系

结合公式（4-2）与梯度的定义，方向导数可表示为：

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{s}} = \nabla \phi \cdot \vec{s}^0 \quad (4-5)$$

根据矢量点积的定义， $\nabla \phi \cdot \vec{s}^0 = |\nabla \phi| \cdot |\vec{s}^0| \cdot \cos \theta = |\nabla \phi| \cos \theta$ （其中 $\theta$ 为 $\nabla \phi$ 与 $\vec{s}^0$ 的夹角， $|\vec{s}^0| = 1$ ）。因此，公式（4-5）可进一步写为：

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{s}} = |\nabla \phi| \cos \theta \quad (4-6)$$

这一关系揭示了梯度与方向导数的核心联系，也是理解梯度物理意义的关键。

### 4.3 梯度的物理意义

梯度的物理意义可从“方向”和“大小”两个方面分析，结合公式（4-6）可得到明确结论。

#### 4.3.1 梯度的方向——标量场变化最快的方向

根据公式（4-6）， $\cos \theta$ 的取值范围为 $[-1, 1]$ ，因此方向导数 $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{s}}$ 的取值范围为 $[-|\nabla \phi|, |\nabla \phi|]$ ：

- 当 $\theta = 0$ 时（ $\vec{s}^0$ 与 $\nabla \phi$ 方向相同）： $\cos \theta = 1$ ， $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{s}} = |\nabla \phi|$ （最大值），即标量场沿 $\nabla \phi$ 方向的变化率最大，且为**递增**；
- 当 $\theta = 180^\circ$ 时（ $\vec{s}^0$ 与 $\nabla \phi$ 方向相反）： $\cos \theta = -1$ ， $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{s}} = -|\nabla \phi|$ （最小值），即标量场沿 $\nabla \phi$ 反方向的变化率最大，且为**递减**；
- 当 $\theta = 90^\circ$ 时（ $\vec{s}^0$ 与 $\nabla \phi$ 方向垂直）： $\cos \theta = 0$ ， $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{s}} = 0$ ，即标量场沿垂直于 $\nabla \phi$ 的方向无变化。



由此可得出梯度的第一个核心物理意义：**梯度的方向是标量场在该点变化最快的方向，且指向标量场递增的方向。**

例如，地形高度场 $h(x, y)$ 中，梯度 $\nabla h$ 的方向就是“坡度最陡”的方向（爬山时最费力的方向），且指向海拔升高的方向；而水流的方向（海拔降低最快的方向）与 $\nabla h$ 的方向相反。

#### 4.3.2 梯度的大小——标量场的最大变化率

公式（4-6）表明，当 $\theta = 0$ 时，方向导数达到最大值 $|\nabla\phi|$ ，即梯度的模（大小）等于标量场在该点的最大变化率。

梯度的大小可通过以下公式计算（直角坐标系）：

$$|\nabla\phi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2} \quad (4-7)$$

例如，温度场 $T(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的梯度大小为：

$$|\nabla T| = \sqrt{(2x)^2 + (4y)^2 + (6z)^2}|_{(1,1,1)} = \sqrt{4 + 16 + 36} = \sqrt{56} \approx 7.48 \text{ K/单位长度}$$

这表明该点温度的最大变化率约为 7.48 K/单位长度，方向沿 $\nabla T = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$ 的方向。

#### 4.3.3 梯度与等值面的关系

标量场的等值面定义为 $\phi(x, y, z, t) = C$ （ $C$ 为常数），其法向量方向与梯度方向存在严格的垂直关系。对等式 $\phi(x, y, z, t) = C$ 两边取全微分（同一时刻 $t$ ， $\partial t = 0$ ），得：

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = 0$$

根据梯度的定义，上式可改写为：

$$\nabla\phi \cdot d\vec{r} = 0 \quad (4-8)$$

其中 $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ 是等值面上任意一点的微分位移矢量（沿等值面的切线方向）。公式（4-8）表明，梯度 $\nabla\phi$ 与等值面上的任意切线方向矢量 $d\vec{r}$ 垂直，因此**梯度的方向是标量场等值面的法向量方向**，且指向等值面数值递增的方向（因梯度方向是 $\phi$ 递增的方向）。

这一关系是标量场几何表示与数学分析的桥梁，例如：

- 地形等高线（2D 等值线）的法向量方向就是梯度方向（坡度最陡的方向）；
- 电场中等势面的法向量方向就是电场强度方向（因电场强度 $\vec{E} = -\nabla\phi$ ，负号表示电场方向指向电势降低的方向）。

### 4.4 梯度的基本性质与定理

梯度作为矢量场，具有一系列基本性质和重要定理，这些性质和定理是场论分析的基础工具。

#### 4.4.1 梯度的基本性质

##### 1. 常标量场的梯度为零

若 $\phi = C$ （ $C$ 为常数），则

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

因此 $\nabla\phi = 0$ 。物理意义：均匀标量场（常标量场是均匀场的特例）无变化，因此变化率为零。

## 2. 梯度的线性性质

设 $\phi$ 和 $\psi$ 为标量场， $a$ 和 $b$ 为常数，则：

$$\nabla(a\phi + b\psi) = a\nabla\phi + b\nabla\psi \quad (4-9)$$

证明：

根据偏导数的线性性质

$$\frac{\partial(a\phi + b\psi)}{\partial x} = a \frac{\partial \phi}{\partial x} + b \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

同理可证 $y, z$ 方向，因此式（4-9）成立。

## 3. 梯度的乘积法则

设 $\phi$ 和 $\psi$ 为标量场，则：

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi \quad (4-10)$$

证明：

$$\frac{\partial(\phi\psi)}{\partial x} = \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

同理 $y, z$ 方向，因此式（4-10）成立。

## 4. 梯度的链式法则（复合函数）

设 $\phi = \phi(u, v)$ ， $u = u(\vec{r})$ ， $v = v(\vec{r})$ （即 $\phi$ 是 $u$ 和 $v$ 的函数，而 $u$ 和 $v$ 又是空间位置的函数），则：

$$\nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial u} \nabla u + \frac{\partial \phi}{\partial v} \nabla v \quad (4-11)$$

证明：

根据复合函数的偏导数法则，

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

同理 $y, z$ 方向，因此式（4-11）成立。

特例：若 $\phi = \phi(u)$ （仅依赖一个中间变量 $u$ ），则

$$\nabla\phi = \frac{d\phi}{du} \nabla u$$

## 5. 梯度与矢量点积的关系

设 $\vec{c}$ 为常矢量（不依赖空间位置）， $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 为位置矢量，则： $\nabla(\vec{c} \cdot \vec{r}) = \vec{c}$  证明：  
 设 $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$ ，则 $\vec{c} \cdot \vec{r} = c_x x + c_y y + c_z z$ ，因此 $\nabla(\vec{c} \cdot \vec{r}) = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k} = \vec{c}$ 。

### 4.4.2 梯度的重要定理

#### 1. 定理一：梯度与全微分的关系

标量场 $\phi(\vec{r}, t)$ 在 $M$ 点的全微分 $d\phi$ 等于梯度 $\nabla\phi$ 与微分位移矢量 $d\vec{r}$ 的点积，即：

$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\vec{r} \quad (4-13)$$

证明：

根据全微分的定义，

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

而

$$\nabla\phi \cdot d\vec{r} = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k} \right) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

因此式 (4-13) 成立。

物理意义：标量场 $\phi$ 在 $M$ 点沿 $d\vec{r}$ 方向的增量（全微分 $d\phi$ ），等于该点梯度在 $d\vec{r}$ 方向上的投影（即沿 $d\vec{r}$ 方向的方向导数）乘以 $d\vec{r}$ 的长度（ $|d\vec{r}|$ ），这进一步验证了梯度的物理意义。

## 2. 定理二：梯度场的无旋性（有势场的判定）

若矢量场 $\vec{a}(\vec{r}, t)$ 是某标量场 $\phi(\vec{r}, t)$ 的梯度场（即 $\vec{a} = \nabla\phi$ ），则 $\vec{a}$ 沿任意封闭曲线 $L$ 的线积分为零，即：

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (4-14)$$

反之，若矢量场 $\vec{a}$ 沿任意封闭曲线 $L$ 的线积分为零，则 $\vec{a}$ 必为某标量场 $\phi$ 的梯度场（即 $\vec{a} = \nabla\phi$ ）。

证明（正定理）：

由于 $\vec{a} = \nabla\phi$ ，根据定理一， $\vec{a} \cdot d\vec{r} = \nabla\phi \cdot d\vec{r} = d\phi$ 。因此，线积分 $\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint_L d\phi$ 。由于 $\phi$ 是空间位置的单值函数（同一位置只有一个标量值），沿封闭曲线积分一周后， $\phi$ 的增量为零，即 $\oint_L d\phi = 0$ ，因此式 (4-14) 成立。

物理意义：该定理揭示了“梯度场”与“无旋场”的等价关系——梯度场一定是无旋场（旋度为零，将在“矢量场的旋度”部分介绍），无旋场一定是梯度场（即存在标量势函数 $\phi$ ，因此无旋场也称为“有势场”）。这一关系在电磁学（电场是无旋场，存在电势函数）和流体力学（无旋流场存在速度势函数）中具有核心应用。

## 4.5 梯度的工程应用示例

梯度作为描述标量场变化的核心工具，在工程领域有着广泛的应用，以下为几个典型示例：

### 4.5.1 流体力学中的温度梯度与热传导

在流体的热传导问题中，热量的传递方向与温度梯度的方向相反，热传导速率与温度梯度的大小成正比，这一规律由傅里叶定律描述：

$$\vec{q} = -k\nabla T \quad (4-15)$$

其中：

- $\vec{q}$ 为热流密度矢量（单位时间内通过单位面积的热量，方向为热量传递方向）；
- $k$ 为流体的热导率（常数，与流体性质有关）；
- $\nabla T$ 为温度梯度（方向为温度递增方向）；
- 负号表示热量传递方向与温度梯度方向相反（从高温区流向低温区）。

例如，在空调房间内，温度场 $T(x, y, z)$ 的梯度 $\nabla T$ 指向空调出风口（温度低）的反方向（温度高的区域），而热流密度 $\vec{q}$ 的方向指向出风口，即热量从房间高温区流向低温区，符合傅里叶定律。

#### 4.5.2 电磁学中的电势梯度与电场强度

在静电场中，电场强度 $\vec{E}$ 与电势 $\varphi$ （标量场）的关系为：

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \quad (4-16)$$

其中负号表示电场强度的方向与电势梯度的方向相反（即电场方向指向电势降低的方向）。

这一关系的应用非常广泛，例如：

- 平行板电容器之间的电势场 $\varphi(x) = Ex$ （ $x$ 为沿电场方向的坐标），则电势梯度 $\nabla\varphi = E\vec{i}$ ，因此电场强度 $\vec{E} = -E\vec{i}$ （方向与 $x$ 轴相反，从正极板指向负极板）；
- 电力系统设计中，通过分析电势梯度的分布，可判断电场强度的大小，避免因电场强度过大导致空气击穿（电晕现象）。

#### 4.5.3 地形分析中的高度梯度与坡度

在地形测绘与土木工程中，坡度是描述地形陡峭程度的重要参数，而坡度的大小与高度场 $h(x, y)$ 的梯度大小直接相关：

$$\text{坡度} = |\nabla h| = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2} \quad (4-17)$$

坡度的方向与梯度方向一致（即最陡的方向）。例如，在道路设计中，需要将道路的坡度控制在一定范围内（如最大坡度不超过 10%），通过计算高度场的梯度大小，可确定道路的最佳走向（沿坡度较小的方向），降低施工难度和行车风险。

### 4.6 梯度的练习题

#### 4.6.1 练习题 A：几何方法求梯度

给定平面标量场 $\phi(x, y)$ ，在 $M$ 点已知两个不共线方向 $\vec{s}_1$ 和 $\vec{s}_2$ 的方向导数 $\frac{\partial\phi}{\partial\vec{s}_1}$ 和 $\frac{\partial\phi}{\partial\vec{s}_2}$ ，试用几何方法求 $M$ 点的 $\nabla\phi$ 。

**解答思路：**

1. 根据梯度与方向导数的关系， $\frac{\partial\phi}{\partial\vec{s}_1} = \nabla\phi \cdot \vec{s}_1^0$ ， $\frac{\partial\phi}{\partial\vec{s}_2} = \nabla\phi \cdot \vec{s}_2^0$ ，即方向导数是梯度在该方向上的投影；
2. 在平面直角坐标系中，设 $\nabla\phi = A\vec{i} + B\vec{j}$ （待求 $A$ 和 $B$ ）， $\vec{s}_1^0 = \cos\alpha_1\vec{i} + \cos\beta_1\vec{j}$ ， $\vec{s}_2^0 = \cos\alpha_2\vec{i} + \cos\beta_2\vec{j}$ ；
3. 代入方向导数公式，得到方程组：
$$\begin{cases} A\cos\alpha_1 + B\cos\beta_1 = \frac{\partial\phi}{\partial\vec{s}_1} \\ A\cos\alpha_2 + B\cos\beta_2 = \frac{\partial\phi}{\partial\vec{s}_2} \end{cases}$$
4. 求解该线性方程组，得到 $A$ 和 $B$ ，即可确定 $\nabla\phi = A\vec{i} + B\vec{j}$ ；

5. 几何上，可通过“投影作图法”：在 $\vec{s}_1$ 方向上取长度为 $\frac{\partial\phi}{\partial s_1}$ 的线段，作其垂直于 $\vec{s}_1$ 的直线；同理在 $\vec{s}_2$ 方向上作直线，两条直线的交点即为梯度矢量的终点，从而确定 $\nabla\phi$ 。

#### 4.6.2 练习题 B：证明梯度的复合函数法则

证明：对于标量场 $\phi = \phi(u(r), v(r))$ （ $u$ 和 $v$ 均为空间位置 $r$ 的函数），有  $\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial u}\nabla u + \frac{\partial\phi}{\partial v}\nabla v$

证明过程：

1. 计算 $\nabla\phi$ 的 $x$ 分量：根据复合函数的偏导数法则， $\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$
2. 同理，计算 $y$ 分量和 $z$ 分量： $\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$ ， $\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}$
3. 将三个分量组合为梯度矢量： $\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{k}$
4. 整理后可得： $\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}\right) = \frac{\partial\phi}{\partial u}\nabla u + \frac{\partial\phi}{\partial v}\nabla v$  证毕。

## 五、矢量场的散度

梯度描述了标量场的空间变化率，而矢量场的描述需要两个核心工具：**散度**（Divergence）和**旋度**（Curl）。其中，散度描述矢量场在某点的“发散”或“汇聚”特性，反映矢量场的“源”（正源或负源）分布；旋度描述矢量场在某点的“旋转”特性，反映矢量场的“涡旋”分布。本部分重点介绍矢量场的散度。

### 5.1 矢量的通量——散度的基础

要理解散度，首先需要引入**矢量通量**的概念：矢量通量描述矢量场通过某一曲面的“流量”，是散度的基础。

#### 5.1.1 矢量通量的定义

设矢量场 $\vec{a}(\vec{r}, t) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ ， $S$ 为场中任意一个曲面（可为开放曲面或封闭曲面）， $d\vec{S}$ 为曲面 $S$ 上的**面积元矢量**（简称面元矢量），其定义为：

$$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n} \quad (5-1)$$

其中：

- $dS$ 为面积元的大小（标量）；
- $\vec{n}$ 为面积元 $dS$ 的单位法向量（方向由曲面的“正向”决定，开放曲面的正向由问题定义，封闭曲面的正向通常取“外法线方向”——即指向曲面外部）。

矢量场 $\vec{a}$ 通过面积元 $d\vec{S}$ 的**元通量**定义为：

$$d\Phi = \vec{a} \cdot d\vec{S} = \vec{a} \cdot \vec{n} dS = a_n dS \quad (5-2)$$

其中 $a_n = \vec{a} \cdot \vec{n}$ 是矢量 $\vec{a}$ 在面元法向量 $\vec{n}$ 方向上的投影（标量）。

矢量场 $\vec{a}$ 通过整个曲面 $S$ 的**总通量**（简称通量）定义为元通量在曲面 $S$ 上的曲面积分：

$$\Phi = \iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint_S a_n dS \quad (5-3)$$

### 5.1.2 矢量通量的物理意义

矢量通量的物理意义取决于矢量场 $\vec{a}$ 的物理本质，以下为几个典型示例：

#### 1. 流体力学中的体积流量

若 $\vec{a}$ 为流体的速度场 $\vec{v}$ ，则通量 $\Phi = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$ 称为**体积流量**（简称流量），表示单位时间内通过曲面 $S$ 的流体体积：

- $d\Phi = \vec{v} \cdot d\vec{S} = v_n dS$ ：单位时间内通过面元 $dS$ 的流体体积；
- $\Phi > 0$ ：流体通过 $S$ 面的方向与 $\vec{n}$ 方向一致（从曲面负向流向正向）；
- $\Phi < 0$ ：流体通过 $S$ 面的方向与 $\vec{n}$ 方向相反（从曲面正向流向负向）；
- $\Phi = 0$ ：单位时间内通过 $S$ 面的流体体积为零（流入与流出平衡）。

例如，管道内水流的速度场 $\vec{v}$ 通过管道横截面 $S$ 的通量 $\Phi = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$ ，就是管道的体积流量，这是水利工程和给排水工程中的核心参数。

#### 2. 电磁学中的电通量与磁通量

- 若 $\vec{a}$ 为电场强度 $\vec{E}$ ，则通量 $\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ 称为**电通量**，是高斯定理（电场的基本定理）的核心物理量；
- 若 $\vec{a}$ 为磁感应强度 $\vec{B}$ ，则通量 $\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ 称为**磁通量**，是法拉第电磁感应定律的核心物理量。

#### 3. 热传导中的热通量

若 $\vec{a}$ 为热流密度矢量 $\vec{q}$ （单位时间内通过单位面积的热量），则通量 $\Phi_q = \iint_S \vec{q} \cdot d\vec{S}$ 称为**热流量**，表示单位时间内通过曲面 $S$ 的热量，是热传导问题的核心参数。

### 5.1.3 封闭曲面的通量

当曲面 $S$ 为**封闭曲面**（如球面、立方体表面）时，通量的符号具有明确的物理意义（因封闭曲面的法向量取外法线方向）：

- $\Phi = \oiint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} > 0$ ：矢量场通过封闭曲面 $S$ 的总通量向外，表明封闭曲面内部存在“正源”（产生矢量场的源，如流体的喷发源、正电荷）；
- $\Phi < 0$ ：矢量场通过封闭曲面 $S$ 的总通量向内，表明封闭曲面内部存在“负源”（消耗矢量场的汇，如流体的吸收汇、负电荷）；
- $\Phi = 0$ ：矢量场通过封闭曲面 $S$ 的总通量为零，表明封闭曲面内部的正源与负源平衡，或不存在源。

例如，封闭曲面 $S$ 包围一个流体喷发源（如喷泉），则流体速度场通过 $S$ 的通量 $\Phi > 0$ （流体向外喷发）；若 $S$ 包围一个流体吸收汇（如排水口），则 $\Phi < 0$ （流体向内汇聚）；若 $S$ 内部无喷发源和吸收汇，则 $\Phi = 0$ （流入与流出平衡）。

## 5.2 散度的定义——矢量场的“源强度”

封闭曲面的通量描述了矢量场在“区域整体”的源分布，但无法描述“某一点”的源强度。例如，两个不同的流体区域可能具有相同的总通量，但内部各点的喷发强度不同。散度正是为描述矢量场在“某一点”的源强度而引入的概念。

### 5.2.1 散度的定义

设矢量场 $\vec{a}(\vec{r}, t)$ ， $M$ 为场中任意一点。取一个包含 $M$ 点的任意封闭曲面 $S$ ， $S$ 所包围的空间区域为 $V$ ， $V$ 的体积为 $\Delta V$ （当 $S$ 收缩到 $M$ 点时， $\Delta V \rightarrow 0$ ）。

矢量场 $\vec{a}$ 在 $M$ 点的**散度**（记为 $\text{div } \vec{a}$ 或 $\nabla \cdot \vec{a}$ ）定义为：当封闭曲面 $S$ 及其包围的体积 $\Delta V$ 无限收缩到 $M$ 点时，矢量场 $\vec{a}$ 通过 $S$ 的通量与 $\Delta V$ 的比值的极限，即

$$\text{div } \vec{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} \quad (5-4)$$

### 5.2.2 散度的物理意义

散度的物理意义是**矢量场在某点的单位体积内的净通量**，即“源强度”：

- $\text{div } \vec{a} > 0$ ：该点存在**正源**（单位体积内向外发散的通量为正，如喷泉的中心）；
- $\text{div } \vec{a} < 0$ ：该点存在**负源**（单位体积内向内汇聚的通量为正，如排水口的中心）；
- $\text{div } \vec{a} = 0$ ：该点无净源（单位体积内的净通量为零，既不发散也不汇聚）。

散度的物理意义可通过流体速度场 $\vec{v}$ 进一步理解：

- $\nabla \cdot \vec{v} = 2 \text{ m}^{-1}$ ：表示该点单位体积内每秒向外喷发 2 立方米的流体（正源）；
- $\nabla \cdot \vec{v} = -1 \text{ m}^{-1}$ ：表示该点单位体积内每秒向内吸收 1 立方米的流体（负源）；
- $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ ：表示该点单位体积内的流体既不增加也不减少（无净源）。

### 5.2.3 散度的标量性

需要特别注意的是，散度是**标量**（仅含大小，无方向），它描述的是矢量场在某点的“源强度大小”，而不是源的方向。因此，散度场是一个“标量场”（空间各点对应一个散度值），这与梯度（矢量场）形成鲜明对比。

## 5.3 散度的计算公式（直角坐标系）

散度的定义是普适的，但在具体坐标系中需要推导其计算公式。以下以直角坐标系为例，推导散度的表达式。

### 5.3.1 推导思路

根据散度的定义，选择一个以 $M$ 点 $(x, y, z)$ 为中心、边长分别为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 的微元体作为封闭曲面 $S$ ，其体积 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ ，如图 5-1 所示。

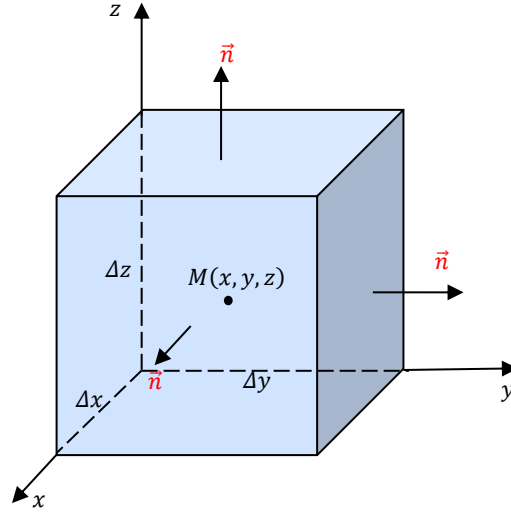


图 5-1 直角坐标系中散度推导的微元体

计算矢量场 $\vec{a}$ 通过六个面的通量，再代入散度的定义式，即可得到散度的计算公式。

### 5.3.2 各面通量的计算

立方体有六个面，分别垂直于 $x, y, z$ 轴，下面逐一计算各面的通量：

#### 1. 垂直于 $x$ 轴的两个面（前后面）

- 前面（ $x + \frac{\Delta x}{2}$ 处）：

面元矢量 $d\vec{S}_1 = \Delta y \Delta z \cdot \vec{i}$ （外法线方向沿 $x$ 轴正方向），该面中心点的矢量

$$\vec{a}_1 \approx \vec{a}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)$$

根据泰勒展开， $\vec{a}_1$ 的 $x$ 分量为：

$$a_{x1} \approx a_x(x, y, z) + \frac{\partial a_x}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

因此，前面的通量为：

$$\Phi_1 \approx a_{x1} \cdot \Delta y \Delta z \approx \left(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta y \Delta z$$

- 后面（ $x - \frac{\Delta x}{2}$ 处）：

面元矢量 $d\vec{S}_2 = -\Delta y \Delta z \cdot \vec{i}$ （外法线方向沿 $x$ 轴负方向），该面中心点的矢量

$$\vec{a}_2 \approx \vec{a}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)$$

其 $x$ 分量为：

$$a_{x2} \approx a_x(x, y, z) - \frac{\partial a_x}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

因此，后面的通量为：

$$\Phi_2 \approx a_{x2} \cdot (-\Delta y \Delta z) \approx -\left(a_x - \frac{\partial a_x}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta y \Delta z$$



- 垂直于 $x$ 轴的两个面的总通量:

$$\Phi_x = \Phi_1 + \Phi_2 \approx \frac{\partial a_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial a_x}{\partial x} \Delta V$$

## 2. 垂直于 $y$ 轴的两个面（左右面）

同理，垂直于 $y$ 轴的两个面的总通量为： $\Phi_y \approx \frac{\partial a_y}{\partial y} \Delta V$

## 3. 垂直于 $z$ 轴的两个面（上下面）

同理，垂直于 $z$ 轴的两个面的总通量为： $\Phi_z \approx \frac{\partial a_z}{\partial z} \Delta V$

### 5.3.3 总通量与散度的计算

立方体的总通量为六个面的通量之和：

$$\oiint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \Phi_x + \Phi_y + \Phi_z \approx \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \Delta V$$

将其代入散度的定义式（5-4），当 $\Delta V \rightarrow 0$ 时（立方体收缩到 $M$ 点），近似号变为等号，得：

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (5-5)$$

这就是直角坐标系中散度的计算公式。该公式简洁明了，只需计算矢量场 $\vec{a}$ 的三个分量对各自坐标的偏导数，再求和即可得到散度。

### 5.3.4 散度的哈密尔顿算子表示

结合哈密尔顿算子的定义

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

散度可表示为哈密尔顿算子与矢量场 $\vec{a}$ 的点积：

$$\nabla \cdot \vec{a} = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

这与公式（5-5）一致，因此散度的常用表示为 $\nabla \cdot \vec{a}$ （比 $\text{div } \vec{a}$ 更简洁），后续讲义中统一使用 $\nabla \cdot \vec{a}$ 。

## 5.4 奥-高定理（高斯定理）——通量与散度的关系

奥-高定理（Ostrogradsky-Gauss Theorem，又称高斯定理）是场论中的核心定理之一，它建立了矢量场通过封闭曲面的通量与该曲面所包围区域内散度的体积分之间的联系，是散度应用的重要工具。

### 5.4.1 奥-高定理的表述

设矢量场 $\vec{a}(\vec{r}, t)$ 的三个分量 $a_x, a_y, a_z$ 在空间区域 $V$ 及其边界封闭曲面 $S$ 上具有连续的一阶偏导数，则矢量场 $\vec{a}$ 通过 $S$ 的通量等于 $\vec{a}$ 的散度在 $V$ 上的体积分，即：

$$\oiint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{a}) dV \quad (5-6)$$

其中， $S$ 是 $V$ 的边界封闭曲面， $d\vec{S}$ 的方向取 $S$ 的外法线方向。

### 5.4.2 奥-高定理的物理意义

奥-高定理的物理意义非常明确：**矢量场通过封闭曲面的总通量，等于该曲面所包围区域内所有源的总强度。**

以流体速度场 $\vec{v}$ 为例：

- 左侧 $\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$ ：通过封闭曲面 $S$ 的总体积流量（单位时间内流出 $S$ 的总流体体积）；
- 右侧 $\iiint_V (\nabla \cdot \vec{v}) dV$ ：区域 $V$ 内所有源的总强度（单位时间内 $V$ 内产生的总流体体积）。

因此，奥-高定理表明：“流出封闭曲面的总流量”等于“曲面内部产生的总流量”，这符合质量守恒定律（若流体不可压缩且无源，则 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ ，总通量为零，即流入等于流出）。

### 5.4.3 奥-高定理的证明（直角坐标系）

在直角坐标系中，奥-高定理的证明可通过将通量和体积分分别分解为三个分量的积分，再利用微积分的高斯公式（数学中的高斯公式）来完成。

#### 1. 通量的分解：

封闭曲面 $S$ 的通量可分解为三个坐标方向的通量之和：

$$\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \oint_S a_x dydz + \oint_S a_y dzdx + \oint_S a_z dxdy$$

其中， $dydz = dS \cdot \cos\alpha$ （ $\alpha$ 为 $d\vec{S}$ 与 $x$ 轴的夹角）， $dzdx = dS \cdot \cos\beta$ ， $dxdy = dS \cdot \cos\gamma$ ，分别是面元 $dS$ 在 $y-z$ 、 $z-x$ 、 $x-y$ 平面上的投影。

#### 2. 体积分的分解：

散度的体积分可分解为三个分量的体积分之和：

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{a}) dV = \iiint_V \frac{\partial a_x}{\partial x} dV + \iiint_V \frac{\partial a_y}{\partial y} dV + \iiint_V \frac{\partial a_z}{\partial z} dV$$

#### 3. 利用数学高斯公式：

数学中的高斯公式指出，对于连续可微的函数 $f(x, y, z)$ ，有：

$$\begin{aligned} \oint_S f dydz &= \iiint_V \frac{\partial f}{\partial x} dV \\ \oint_S f dzdx &= \iiint_V \frac{\partial f}{\partial y} dV \\ \oint_S f dxdy &= \iiint_V \frac{\partial f}{\partial z} dV \end{aligned}$$

将 $f$ 分别取为 $a_x, a_y, a_z$ ，代入上述公式，可得：

$$\begin{aligned} \oint_S a_x dydz &= \iiint_V \frac{\partial a_x}{\partial x} dV \\ \oint_S a_y dzdx &= \iiint_V \frac{\partial a_y}{\partial y} dV \\ \oint_S a_z dxdy &= \iiint_V \frac{\partial a_z}{\partial z} dV \end{aligned}$$

#### 4. 求和得证：

将上述三式相加，即可得到奥-高定理的表达式（5-6），证毕。

### 5.4.4 奥-高定理的应用

奥-高定理的核心应用是“将封闭曲面的曲面积分转化为体积分”，从而简化积分计算，以下为两个典型示例：

#### 1. 计算封闭曲面的通量

若矢量场的散度易于计算，则可利用奥-高定理将通量的曲面积分转化为散度的体积分，避免直接计算复杂的曲面积分。

示例：计算矢量场  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  通过球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ （外法线方向）的通量。

解答：

- 第一步，计算散度： $\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$ ；
- 第二步，应用奥-高定理：通量  $\Phi = \oiint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V 3 dV = 3 \times V$ （ $V$  为球体体积）；
- 第三步，计算球体体积： $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ，因此  $\Phi = 3 \times \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2$ 。

若直接计算曲面积分，需使用球面坐标系，过程复杂；而利用奥-高定理，计算过程大幅简化。

#### 2. 推导流体力学的连续性方程

奥-高定理是推导流体力学核心方程——连续性方程的关键工具。根据质量守恒定律，单位时间内封闭曲面  $S$  内流体质量的变化率等于通过  $S$  面的质量通量的负值（流入为正，流出为负），即

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \iiint_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV$$

其中， $\rho$  为流体密度， $\rho \vec{v}$  为质量通量矢量（单位时间内通过单位面积的质量）。对左侧使用 Leibniz 法则（可交换导数与积分顺序，因  $V$  不随时间变化），得：

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oiint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

对右侧应用奥-高定理，将曲面积分转化为体积分：

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \iiint_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV$$

由于该等式对任意区域  $V$  成立，因此被积函数必须相等，即： $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$

这就是流体力学的**连续性方程**（质量守恒方程），是流体运动的基本控制方程之一。对于不可压缩流体（ $\rho = \text{常数}$ ），连续性方程简化为  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ （散度为零），这一结论在管道流动、机翼绕流等问题中具有广泛应用。

## 5.5 无源场及其性质

根据散度的物理意义，若矢量场  $\vec{a}$  的散度处处为零（ $\nabla \cdot \vec{a} = 0$ ），则称该矢量场为**无源场**（或管形场）。无源场的核心特征是“无净源”，其通量和矢量线具有特殊性质。

### 5.5.1 无源场的定义

**无源场**：若在矢量场  $\vec{a}$  的定义域内，对任意点均有  $\nabla \cdot \vec{a} = 0$ ，则称  $\vec{a}$  为无源场。

工程中的无源场示例：

- 不可压缩流体的速度场 $\vec{v}$ ：由连续性方程 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ ，可知为无源场；
- 磁场的磁感应强度场 $\vec{B}$ ：由麦克斯韦方程组 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ，可知为无源场（磁场无“磁荷”源）。

### 5.5.2 无源场的性质

无源场具有两个核心性质，这些性质由奥-高定理推导得出，是理解无源场行为的关键。

**性质一：无源矢量通过矢量管任一横截面上的通量保持同一数值**

**矢量管**的定义：由矢量线围成的管状曲面（称为矢量管的侧壁），其任意横截面上的矢量线均垂直于该横截面（即横截面为矢量线的正交面），如图 5-2 所示。

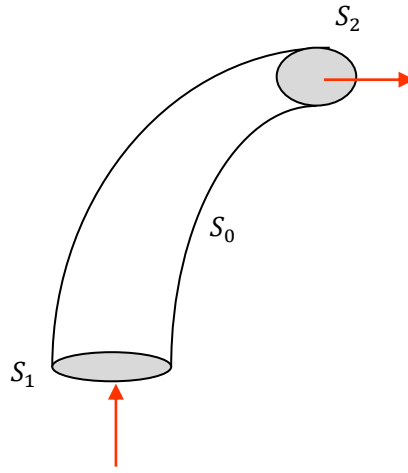


图 5-2 矢量管示意图

**证明：**

取矢量管的一段，其侧壁为 $S_0$ ，两个任意横截面为 $S_1$ 和 $S_2$ （法向量方向与矢量线方向一致），则这三个面共同构成一个封闭曲面 $S = S_1 + S_2 + S_0$ 。对封闭曲面 $S$ 应用奥-高定理：

$$\oiint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{a}) dV$$

由于 $\vec{a}$ 是无源场（ $\nabla \cdot \vec{a} = 0$ ），因此右侧体积分零，即：

$$\oiint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = 0$$

封闭曲面的通量可分解为三个面的通量之和：

$$\oiint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{a} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{a} \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_0} \vec{a} \cdot d\vec{S}_0 = 0$$

分析各面通量：

1. 侧壁 $S_0$ 的通量：由于 $S_0$ 由矢量线构成，矢量 $\vec{a}$ 的方向与 $S_0$ 的法向量方向垂直（矢量线的切线方向与 $\vec{a}$ 一致，而 $S_0$ 的法向量垂直于矢量线），因此 $\vec{a} \cdot d\vec{S}_0 = 0$ ，即 $\iint_{S_0} \vec{a} \cdot d\vec{S}_0 = 0$ ；

2. 横截面 $S_2$ 的通量：若 $S_2$ 的法向量方向与 $\vec{a}$ 方向相反（因封闭曲面的外法线方向指向外侧，可能与 $S_1$ 的法向量方向相反），则 $d\vec{S}_2$ 与 $\vec{a}$ 的点积为负，即 $\iint_{S_2} \vec{a} \cdot d\vec{S}_2 = -\iint_{S_2} a_n dS_2$ （ $a_n$ 为 $\vec{a}$ 在 $S_2$ 内侧法向量上的投影）。

代入总通量等式，化简得：

$$\iint_{S_1} a_n dS_1 = \iint_{S_2} a_n dS_2$$

即无源矢量通过矢量管任一横截面上的通量相等，这一通量称为矢量管的**强度**。

**物理意义：**对于不可压缩流体的速度场（无源场），矢量管即为“流管”，性质一表明：单位时间内通过流管任一横截面的体积流量相等（流管内的流体不可压缩，既不增加也不减少，因此流量守恒）。例如，河道中的流管，若横截面变窄（ $S$ 减小），则流速 $v$ 必须增大（因流量 $Q = vS$ 守恒），这与实际观察一致。

**性质二：**无源矢量 $\vec{a}$ 经过张于已知周线 $L$ 的所有曲面 $S$ 上的通量均相同，此通量只依赖于周线 $L$ ，与所张曲面 $S$ 的形状无关

**张于周线 $L$ 的曲面：**指以闭合周线 $L$ 为边界的任意曲面（如以圆周 $L$ 为边界的平面和半球面，均为张于 $L$ 的曲面），如图 5-3 所示。图中闭合周线 $L$ 、曲面 $S_1$ （平面）、曲面 $S_2$ （半球面）、曲面的法向量方向（由右手螺旋法则与 $L$ 的绕行方向一致）

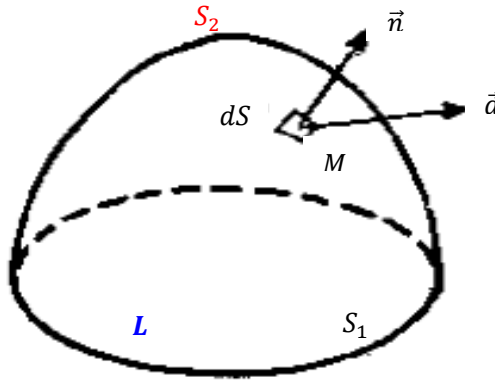


图 5-3 张于周线 $L$ 的两个不同曲面 $S_1$ 和 $S_2$

**证明：**

设 $S_1$ 和 $S_2$ 是张于同一闭合周线 $L$ 的两个任意曲面，且它们的法向量方向与 $L$ 的绕行方向满足右手螺旋法则。则 $S_1$ 和 $S_2$ 共同构成一个封闭曲面 $S = S_1 + S_2'$ （ $S_2'$ 表示 $S_2$ 的反向曲面，其法向量方向与原方向相反）。对封闭曲面 $S$ 应用奥-高定理

$$\oiint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{a}) dV = 0 \quad (\text{因}\vec{a}\text{是无源场})$$

封闭曲面的通量分解为：

$$\iint_{S_1} \vec{a} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2'} \vec{a} \cdot d\vec{S}_2' = 0$$

由于 $S_2'$ 是 $S_2$ 的反向曲面， $d\vec{S}_2' = -d\vec{S}_2$ ，因此：

$$\iint_{S_1} \vec{a} \cdot d\vec{S}_1 - \iint_{S_2} \vec{a} \cdot d\vec{S}_2 = 0$$

即：

$$\iint_{S_1} \vec{a} \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{S_2} \vec{a} \cdot d\vec{S}_2$$

**物理意义：**对于无源场，通过任意张于同一周线的曲面的通量相同，这表明通量仅由周线的“环绕特性”决定，与曲面的具体形状无关。例如，磁场的磁感应强度 $\vec{B}$ 是无源场，通过任意张于同一电流回路的曲面的磁通量均相同，这是法拉第电磁感应定律中“磁通量变化”的理论基础。

## 5.6 散度的基本性质与练习题

### 5.6.1 散度的基本性质

散度作为标量场，具有一系列基本性质，这些性质由散度的定义和计算公式推导得出，是场论运算的基础工具。

#### 1. 常矢量的散度为零

若 $\vec{c}$ 为常矢量（分量 $c_x, c_y, c_z$ 均为常数），则 $\frac{\partial c_x}{\partial x} = \frac{\partial c_y}{\partial y} = \frac{\partial c_z}{\partial z} = 0$ ，因此 $\nabla \cdot \vec{c} = 0$ 。

物理意义：常矢量场是均匀场，无发散或汇聚特性，因此散度为零。

#### 2. 散度的线性性质

设 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为矢量场， $c$ 为常数（标量），则：

$$\nabla \cdot (c\vec{a}) = c\nabla \cdot \vec{a} \quad (5-7)$$

$$\nabla \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \nabla \cdot \vec{a} + \nabla \cdot \vec{b} \quad (5-8)$$

证明（式 5-7）：

$$\nabla \cdot (c\vec{a}) = \frac{\partial(ca_x)}{\partial x} + \frac{\partial(ca_y)}{\partial y} + \frac{\partial(ca_z)}{\partial z} = c \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) = c\nabla \cdot \vec{a}$$

证毕。式（5-8）的证明类似，利用偏导数的线性性质即可。

#### 3. 散度的乘积法则（标量与矢量的乘积）

设 $u$ 为标量场， $\vec{a}$ 为矢量场，则：

$$\nabla \cdot (u\vec{a}) = u\nabla \cdot \vec{a} + \nabla u \cdot \vec{a} \quad (5-9)$$

证明：

根据乘积的偏导数法则，

$$\frac{\partial(ua_x)}{\partial x} = u \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} a_x$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(ua_y)}{\partial y} &= u \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} a_y \\ \frac{\partial(ua_z)}{\partial z} &= u \frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} a_z\end{aligned}$$

将三式相加，得：

$$\nabla \cdot (u\vec{a}) = u \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial x} a_x + \frac{\partial u}{\partial y} a_y + \frac{\partial u}{\partial z} a_z \right) = u \nabla \cdot \vec{a} + \nabla u \cdot \vec{a}$$

证毕。

物理意义：标量场 $u$ 与矢量场 $\vec{a}$ 的乘积的散度，不仅包含 $\vec{a}$ 本身的散度贡献（ $u \nabla \cdot \vec{a}$ ），还包含 $u$ 的梯度与 $\vec{a}$ 的相互作用贡献（ $\nabla u \cdot \vec{a}$ ）。例如，在流体力学中，质量通量矢量 $\rho \vec{v}$ 的散度 $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \rho \nabla \cdot \vec{v} + \nabla \rho \cdot \vec{v}$ ，这正是连续性方程的核心项。

#### 4. 梯度场的散度（拉普拉斯算子）

设 $u$ 为标量场，则梯度场 $\nabla u$ 的散度为：

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u \quad (5-10)$$

其中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 称为拉普拉斯算子（将在“微分算子”部分详细介绍）。

证明：

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

因此其散度为：

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u$$

证毕。

#### 5.6.2 散度的练习题

##### 练习题 A：证明散度的基本性质

证明以下结论（ $c$ 为常数， $u$ 为标量场， $\vec{a}, \vec{b}$ 为矢量场）：

- $\nabla \cdot (c\vec{a}) = c \nabla \cdot \vec{a}$ ;
- $\nabla \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \nabla \cdot \vec{a} + \nabla \cdot \vec{b}$ ;
- $\nabla \cdot (u\vec{a}) = u \nabla \cdot \vec{a} + \nabla u \cdot \vec{a}$ 。

解答：

a) 如“散度的基本性质 2”所示，利用偏导数的常数因子法则， $\frac{\partial(ca_x)}{\partial x} = c \frac{\partial a_x}{\partial x}$ ，同理 $y, z$ 方向，求和后得

$$\nabla \cdot (c\vec{a}) = c \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) = c \nabla \cdot \vec{a}$$

证毕。

b) 利用偏导数的加法法则,  $\frac{\partial(a_x+b_x)}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial b_x}{\partial x}$ , 同理y,z方向, 求和后得

$$\nabla \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} \right) = \nabla \cdot \vec{a} + \nabla \cdot \vec{b}$$

证毕。

c) 如“散度的基本性质 3”所示, 利用乘积的偏导数法则, 分解每个分量的偏导数, 求和后得到

$$\nabla \cdot (u\vec{a}) = u\nabla \cdot \vec{a} + \nabla u \cdot \vec{a}$$

证毕。

### 练习题 B: 计算矢量场的散度

已知矢量场  $\vec{a} = x^2y\vec{i} + y^2z\vec{j} + z^2x\vec{k}$ , 求该矢量场在点(1,1,1)处的散度。

解答:

1. 计算矢量场  $\vec{a}$  的三个分量对各自坐标的偏导数:

$$a_x = x^2y, \text{ 则 } \frac{\partial a_x}{\partial x} = 2xy;$$

$$a_y = y^2z, \text{ 则 } \frac{\partial a_y}{\partial y} = 2yz;$$

$$a_z = z^2x, \text{ 则 } \frac{\partial a_z}{\partial z} = 2zx。$$

2. 计算散度  $\nabla \cdot \vec{a}$ :

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 2xy + 2yz + 2zx$$

3. 代入点(1,1,1):

$$\nabla \cdot \vec{a}|_{(1,1,1)} = 2 \times 1 \times 1 + 2 \times 1 \times 1 + 2 \times 1 \times 1 = 6$$

因此, 该矢量场在点(1,1,1)处的散度为 6。

### 练习题 C: 不可压缩流体的连续性方程应用

已知不可压缩流体 ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) 在管道内流动, 管道横截面为圆形, 某截面 1 的直径  $d_1 = 0.2 \text{ m}$ , 流速  $v_1 = 2 \text{ m/s}$ ; 另一截面 2 的直径  $d_2 = 0.1 \text{ m}$ , 求截面 2 处的流速  $v_2$ 。

解答:

1. 不可压缩流体的连续性方程为  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ , 结合无源场的性质一 (流管通量守恒), 可知通过管道任意横截面的体积流量  $Q$  相等, 即  $Q_1 = Q_2$ 。

2. 体积流量的计算公式为  $Q = v \cdot S$ , 其中  $S$  为管道横截面面积, 圆形截面的面积  $S = \frac{\pi d^2}{4}$ 。

3. 代入流量守恒关系:

$$v_1 \cdot \frac{\pi d_1^2}{4} = v_2 \cdot \frac{\pi d_2^2}{4}$$

4. 化简得:

$$v_2 = v_1 \cdot \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2$$

5. 代入数值计算:



$$v_2 = 2 \times \left(\frac{0.2}{0.1}\right)^2 = 2 \times 4 = 8 \text{ m/s}$$

因此，截面 2 处的流速为 8 m/s。

## 六、矢量场的旋度

散度描述了矢量场的“发散”特性，而旋度（Curl）则描述了矢量场的“旋转”特性，反映矢量场中“涡旋”的分布与强度。例如，水流中的漩涡、大气中的气旋、电磁场中的涡旋电场，其旋转特性均需通过旋度来量化。本部分系统介绍矢量场的旋度，包括环量、环量密度、旋度的定义与性质，以及斯托克斯定理的应用。

### 6.1 矢量的环量——旋度的基础

要理解旋度，首先需要引入矢量环量（简称环量）的概念：环量描述矢量场沿某一封闭曲线的“旋转趋势”，是旋度的基础。

#### 6.1.1 环量的定义

设矢量场  $\vec{a}(\vec{r}, t) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ， $L$  为场中任意一条封闭曲线（称为积分回路）， $d\vec{r}$  为曲线  $L$  上的微分位移矢量（方向与曲线  $L$  的绕行方向一致，由右手螺旋法则定义）。

矢量场  $\vec{a}$  沿封闭曲线  $L$  的**环量**（记为  $\Gamma$ ）定义为矢量  $\vec{a}$  与微分位移  $d\vec{r}$  的点积沿  $L$  的曲线积分：

$$\Gamma = \oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint_L (a_x dx + a_y dy + a_z dz) \quad (6-1)$$

其中， $\oint_L$  表示沿封闭曲线  $L$  的闭合曲线积分，绕行方向由问题定义（通常取右手螺旋法则：四指沿绕行方向，大拇指指向曲面的法向量方向）。

#### 6.1.2 环量的物理意义

环量的物理意义取决于矢量场  $\vec{a}$  的物理本质，以下为几个典型示例：

##### 1. 流体力学中的速度环量

若  $\vec{a}$  为流体的速度场  $\vec{v}$ ，则环量  $\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{r}$  称为**速度环量**，表示流体沿封闭曲线  $L$  的“旋转趋势”：

- $\Gamma > 0$ ：流体的旋转方向与曲线  $L$  的绕行方向一致（逆时针旋转，右手螺旋大拇指指向外侧）；
- $\Gamma < 0$ ：流体的旋转方向与曲线  $L$  的绕行方向相反（顺时针旋转）；
- $\Gamma = 0$ ：流体沿  $L$  无旋转趋势（无涡旋）。

例如，水流中的漩涡中心区域，沿围绕漩涡的封闭曲线  $L$  的速度环量  $\Gamma \neq 0$ （通常为正值），且环量大小与漩涡的旋转强度成正比；而均匀流场（无漩涡）中，任意封闭曲线的速度环量  $\Gamma = 0$ 。

##### 2. 电磁学中的电场环量与磁场环量

- 若  $\vec{a}$  为电场强度  $\vec{E}$ ，则环量  $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r}$  称为**电场环量**，由法拉第电磁感应定律可知，变化的磁场会产生涡旋电场，使电场环量不为零；

- 若 $\vec{a}$ 为磁场强度 $\vec{H}$ ，则环量 $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{r}$ 称为**磁场环量**，由安培环路定理可知，电流会产生涡旋磁场，使磁场环量不为零（等于环路所包围的电流代数和）。

### 3. 力学中的功环量

若 $\vec{a}$ 为力场 $\vec{F}$ ，则环量 $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$ 称为**功环量**，表示力沿封闭曲线 $L$ 对物体所做的功。对于保守力场（如重力场、静电力场），功环量为零（保守力做功与路径无关）；对于非保守力场（如涡旋电场力），功环量不为零。

### 6.1.3 环量与涡旋的关系

环量是“宏观”上描述矢量场旋转趋势的物理量，它反映的是封闭曲线 $L$ 所包围区域内的“总旋转效应”，但无法描述“某一点”的旋转强度。例如，两个不同的漩涡区域可能具有相同的环量，但漩涡中心的旋转强度不同（一个是小而强的漩涡，一个是大而弱的漩涡）。为了量化“某一点”的旋转强度，需要引入环量密度的概念。

## 6.2 环量密度（旋度的投影）

环量密度描述矢量场在某点沿特定方向的“单位面积环量”，即旋转强度的“投影”，是旋度的核心组成部分。

### 6.2.1 环量密度的定义

设矢量场 $\vec{a}(\vec{r}, t)$ ， $M$ 为场中任意一点， $\vec{n}$ 为空间中任意一个指定方向（单位法向量）。过 $M$ 点作一微小曲面 $\Delta S$ ，使得 $\Delta S$ 的法向量方向与 $\vec{n}$ 一致， $\Delta S$ 的边界为封闭曲线 $\Delta L$ （称为边界回路）， $\Delta L$ 的绕行方向与 $\vec{n}$ 满足右手螺旋法则（四指沿 $\Delta L$ ，大拇指指向 $\vec{n}$ ），如图 6-1 所示。

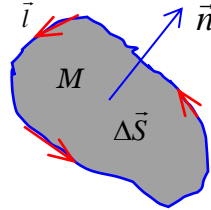


图 6-1 环量密度定义示意图

矢量场 $\vec{a}$ 在 $M$ 点沿 $\vec{n}$ 方向的环量密度（记为 $\mu_n$ ）定义为：当微小曲面 $\Delta S$ 无限收缩到 $M$ 点时（ $\Delta S \rightarrow 0$ ），环量 $\Delta\Gamma$ 与 $\Delta S$ 的比值的极限，即：

$$\mu_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\Gamma}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Delta L} \vec{a} \cdot d\vec{r} \quad (6-1)$$

其中， $\Delta\Gamma = \oint_{\Delta L} \vec{a} \cdot d\vec{r}$ 是矢量场 $\vec{a}$ 沿边界回路 $\Delta L$ 的环量。

### 6.2.2 环量密度的物理意义

环量密度的物理意义是矢量场在某点沿 $\vec{n}$ 方向的单位面积环量，即“单位面积的旋转强度”：

- $\mu_n > 0$ ：沿 $\vec{n}$ 方向观察，矢量场在 $M$ 点的旋转方向为逆时针（与 $\Delta L$ 的绕行方向一致）；
- $\mu_n < 0$ ：沿 $\vec{n}$ 方向观察，矢量场在 $M$ 点的旋转方向为顺时针；

- $\mu_n = 0$ : 矢量场在 $M$ 点沿 $\vec{n}$ 方向无旋转趋势。

环量密度的大小反映了旋转强度的强弱，例如，流体漩涡中心处的环量密度远大于漩涡边缘处的环量密度，表明中心旋转更强。

### 6.2.3 直角坐标系中环量密度的表达式

为了推导环量密度的具体表达式，我们选择直角坐标系，并取 $\vec{n}$ 分别为 $x, y, z$ 轴的单位基矢 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ，计算对应的环量密度（即旋度在各坐标轴上的投影）。

#### 1. 沿 $z$ 轴方向的环量密度（ $\vec{n} = \vec{k}$ ）

取以 $M$ 点 $(x, y, z)$ 为中心、平行于 $x - y$ 平面的微小矩形作为曲面 $\Delta S$ ，矩形的边长分别为 $\Delta x$ 和 $\Delta y$ ，面积 $\Delta S = \Delta x \Delta y$ ，边界回路 $\Delta L$ 的绕行方向为逆时针（从 $z$ 轴正方向观察），如图 6-2 所示。

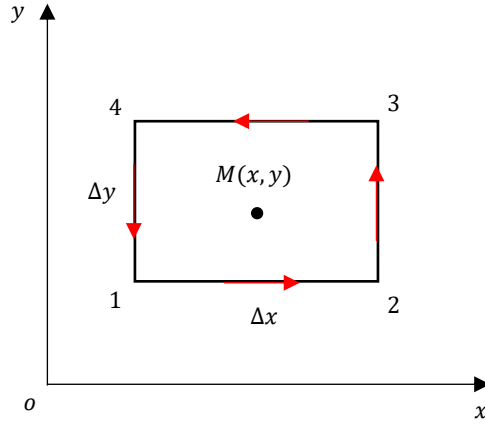


图 6-2 沿  $z$  轴方向的环量密度计算示意图

计算矢量场 $\vec{a}$ 沿 $\Delta L$ 的环量 $\Delta\Gamma$ ，将 $\Delta L$ 分为四个边（1-2, 2-3, 3-4, 4-1），分别计算各边的积分：

- 边 1-2（沿 $x$ 轴正方向）：

位移方向沿 $x$ 轴正方向， $dy = 0$ ， $dz = 0$ ，该边的 $y$ 坐标为 $y - \frac{\Delta y}{2}$ ，矢量 $\vec{a}$ 的 $x$ 分量近似为 $a_x\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right)$ 。根据泰勒展开：

$$a_x\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right) \approx a_x(x, y, z) - \frac{\partial a_x}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{2}$$

积分长度为 $\Delta x$ ，因此该边的积分：

$$\int_{1-2} \vec{a} \cdot d\vec{r} \approx \left(a_x - \frac{\partial a_x}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{2}\right) \Delta x$$

- 边 2-3（沿 $y$ 轴正方向）：

位移方向沿 $y$ 轴正方向， $dx = 0$ ， $dz = 0$ ，该边的 $x$ 坐标为 $x + \frac{\Delta x}{2}$ ，矢量 $\vec{a}$ 的 $y$ 分量近似为 $a_y\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)$ 。根据泰勒展开：

$$a_y\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \approx a_y(x, y, z) + \frac{\partial a_y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

积分长度为 $\Delta y$ ，因此该边的积分：

$$\int_{2-3} \vec{a} \cdot d\vec{r} \approx \left( a_y + \frac{\partial a_y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y$$

- 边 3-4（沿 $x$ 轴负方向）：

位移方向沿 $x$ 轴负方向， $dy = 0$ ， $dz = 0$ ，该边的 $y$ 坐标为 $y + \frac{\Delta y}{2}$ ，矢量 $\vec{a}$ 的 $x$ 分量近似为 $a_x\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right)$ 。根据泰勒展开：

$$a_x\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) \approx a_x(x, y, z) + \frac{\partial a_x}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{2}$$

积分长度为 $\Delta x$ （方向为负），因此该边的积分：

$$\int_{3-4} \vec{a} \cdot d\vec{r} \approx -\left( a_x + \frac{\partial a_x}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x$$

- 边 4-1（沿 $y$ 轴负方向）：

位移方向沿 $y$ 轴负方向， $dx = 0$ ， $dz = 0$ ，该边的 $x$ 坐标为 $x - \frac{\Delta x}{2}$ ，矢量 $\vec{a}$ 的 $y$ 分量近似为 $a_y\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)$ 。根据泰勒展开：

$$a_y\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \approx a_y(x, y, z) - \frac{\partial a_y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

积分长度为 $\Delta y$ （方向为负），因此该边的积分：

$$\int_{4-1} \vec{a} \cdot d\vec{r} \approx -\left( a_y - \frac{\partial a_y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y$$

将四条边的积分相加，得到总环量：

$$\Delta \Gamma = \int_{1-2} + \int_{2-3} + \int_{3-4} + \int_{4-1} \approx \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

根据环量密度的定义，沿 $z$ 轴方向的环量密度（记为 $\mu_z$ ）为：

$$\mu_z = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \Gamma}{\Delta S} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \quad (6-3)$$

## 2. 沿 $x$ 轴和 $y$ 轴方向的环量密度

同理，通过选择平行于 $y - z$ 平面和 $x - z$ 平面的微小矩形，可推导出沿 $x$ 轴和 $y$ 轴方向的环量密度：

- 沿 $x$ 轴方向（ $\vec{n} = \vec{i}$ ）：

$$\mu_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \quad (6-4)$$

- 沿 $y$ 轴方向（ $\vec{n} = \vec{j}$ ）：

$$\mu_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \quad (6-5)$$

### 6.2.4 环量密度的矢量表示

观察式（6-3）、（6-4）、（6-5），环量密度 $\mu_n$ （沿任意方向 $\vec{n}$ ）可表示为一个矢量与 $\vec{n}$ 的点积。定义一个矢量 $\vec{\omega}$ ，其分量分别为沿 $x, y, z$ 轴的环量密度：

$$\vec{\omega} = \mu_x \vec{i} + \mu_y \vec{j} + \mu_z \vec{k} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (6-6)$$

则沿任意方向 $\vec{n}$ 的环量密度为：

$$\mu_n = \vec{\omega} \cdot \vec{n} \quad (6-7)$$

这一矢量 $\vec{\omega}$ 就是**旋度**，它是描述矢量场旋转特性的核心矢量。

## 6.3 旋度的定义与数学表达式

### 6.3.1 旋度的定义

矢量场 $\vec{a}(\vec{r}, t)$ 在 $M$ 点的**旋度**（记为 $\text{curl } \vec{a}$ 或 $\nabla \times \vec{a}$ ）定义为：由矢量场 $\vec{a}$ 的三个环量密度（沿 $x, y, z$ 轴）构成的矢量，即：

$$\nabla \times \vec{a} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (6-8)$$

旋度的定义具有以下核心特征：

1. **矢量性**：旋度是矢量，既有大小，又有方向；
2. **场依赖性**：旋度由矢量场 $\vec{a}$ 决定，不同矢量场的旋度不同；
3. **点依赖性**：旋度在空间不同点的取值不同（非均匀场），即旋度是一个“矢量场”（称为旋度场）；
4. **时间依赖性**：若矢量场 $\vec{a}$ 是非定常的（依赖 $t$ ），则旋度也依赖 $t$ ，即 $\nabla \times \vec{a}(\vec{r}, t)$ 。

### 6.3.2 旋度的物理意义

结合环量密度的物理意义，旋度的物理意义可从“方向”和“大小”两个方面分析：

#### 1. 旋度的方向——旋转强度最大的方向

根据式（6-7），沿任意方向 $\vec{n}$ 的环量密度 $\mu_n = \nabla \times \vec{a} \cdot \vec{n} = |\nabla \times \vec{a}| \cos \theta$ （ $\theta$ 为 $\nabla \times \vec{a}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角）。当 $\theta = 0$ 时（ $\vec{n}$ 与 $\nabla \times \vec{a}$ 方向一致）， $\mu_n$ 达到最大值 $|\nabla \times \vec{a}|$ ；当 $\theta = 90^\circ$ 时， $\mu_n = 0$ 。因此，**旋度的方向是矢量场在该点旋转强度最大的方向**，且与旋转方向满足右手螺旋法则（四指沿旋转方向，大拇指指向旋度方向）。例如，流体漩涡的旋度方向沿漩涡的轴线方向（向上或向下），且旋转强度最大的方向就是轴线方向。

#### 2. 旋度的大小——最大旋转强度

旋度的模（大小） $|\nabla \times \vec{a}|$ 等于矢量场在该点的最大环量密度，即**单位面积的最大旋转强度**。旋度大小的计算公式（直角坐标系）为：

$$|\nabla \times \vec{a}| = \sqrt{\left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)^2} \quad (6-9)$$

例如，矢量场 $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ （绕 $z$ 轴的旋转场）的旋度为 $\nabla \times \vec{a} = 2\vec{k}$ ，其大小为 2，表明该场沿 $z$ 轴方向的旋转强度最大，单位面积的环量为 2。

### 6.3.3 旋度的哈密尔顿算子表示

利用哈密尔顿算子 $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ ，旋度可表示为 $\nabla$ 与 $\vec{a}$ 的叉积（矢量积），即：

$$\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \quad (6-10)$$

这一行列式展开后，与式（6-8）完全一致，因此旋度的常用表示为 $\nabla \times \vec{a}$ （比 $\text{curl } \vec{a}$ 更简洁），后续讲义中统一使用 $\nabla \times \vec{a}$ 。

### 6.3.4 无旋场的定义

若矢量场 $\vec{a}$ 的旋度处处为零（ $\nabla \times \vec{a} = 0$ ），则称该矢量场为**无旋场**。无旋场的核心特征是“无旋转趋势”，其环量具有特殊性质。

工程中的无旋场示例：- 保守力场（如重力场 $\vec{g}$ 、静电力场 $\vec{E}_{\text{静}}$ ）： $\nabla \times \vec{g} = 0$ ， $\nabla \times \vec{E}_{\text{静}} = 0$ ；- 不可压缩流体的无旋流场（如机翼远前方的均匀流场）： $\nabla \times \vec{v} = 0$ 。

无旋场与有势场的关系：若 $\vec{a}$ 是无旋场，则存在标量场 $\phi$ （称为势函数），使得 $\vec{a} = \nabla \phi$ （即无旋场必为有势场）；反之，若 $\vec{a} = \nabla \phi$ （梯度场），则 $\nabla \times \vec{a} = 0$ （即梯度场必为无旋场）。这一关系是无旋场分析的核心，将在“旋度的性质”部分详细证明。

## 6.4 斯托克斯定理——环量与旋度的关系

斯托克斯定理（Stokes Theorem）是场论中的另一核心定理，它建立了矢量场沿封闭曲线的环量与该曲线所张曲面的旋度通量之间的联系，是旋度应用的重要工具。

### 6.4.1 斯托克斯定理的表述

设矢量场 $\vec{a}(\vec{r}, t)$ 的三个分量 $a_x, a_y, a_z$ 在空间曲面 $S$ 及其边界封闭曲线 $L$ 上具有连续的一阶偏导数，则矢量场 $\vec{a}$ 沿 $L$ 的环量等于 $\vec{a}$ 的旋度通过 $S$ 的通量，即：

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{a}) \cdot d\vec{S} \quad (6-11)$$

其中， $L$ 是 $S$ 的边界封闭曲线， $L$ 的绕行方向与 $S$ 的法向量方向满足右手螺旋法则（四指沿 $L$ ，大拇指指向 $d\vec{S}$ 的方向）。

### 6.4.2 斯托克斯定理的物理意义

斯托克斯定理的物理意义是：**矢量场沿封闭曲线的总旋转趋势（环量），等于该曲线所张曲面内所有涡旋的总强度（旋度通量）。**

以流体速度场 $\vec{v}$ 为例：- 左侧 $\oint_L \vec{v} \cdot d\vec{r}$ ：流体沿封闭曲线 $L$ 的总旋转趋势（速度环量）；- 右侧 $\iint_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$ ：曲面 $S$ 内所有流体微团的旋转强度之和（旋度通量）。

因此，斯托克斯定理表明：“流体沿回路的总旋转”等于“回路所围区域内所有微团旋转的总和”，这符合旋转运动的叠加原理。

### 6.4.3 斯托克斯定理的证明（直角坐标系）

在直角坐标系中，斯托克斯定理的证明可通过将环量和旋度通量分别分解为三个分量的积分，再利用微积分的格林公式（数学中的格林公式，平面曲线积分与二重积分的关系）来完成。

#### 1. 环量的分解：

封闭曲线 $L$ 的环量可分解为三个坐标方向的积分之和：

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint_L a_x dx + \oint_L a_y dy + \oint_L a_z dz$$

#### 2. 旋度通量的分解：

旋度 $\nabla \times \vec{a}$ 的通量可分解为三个分量的通量之和：

$$\iint_S (\nabla \times \vec{a}) \cdot d\vec{S} = \iint_S \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) dydz + \iint_S \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) dzdx + \iint_S \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dxdy$$

#### 3. 利用数学格林公式：

数学中的格林公式指出，对于平面内的封闭曲线 $L$ 及其所围区域 $D$ ，有：

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

将格林公式推广到空间曲面（投影到坐标平面），可证明环量的每个分量积分等于旋度通量的对应分量积分。例如，对于 $a_x dx$ 的积分，投影到 $y-z$ 平面，利用格林公式可证：

$$\oint_L a_x dx = \iint_S \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) dzdx$$

同理可证其他两个分量的积分相等。

#### 4. 求和得证：

将三个分量的积分分别相等，求和后即可得到斯托克斯定理的表达式（6-11），证毕。

### 6.4.4 斯托克斯定理的应用

斯托克斯定理的核心应用是“将封闭曲线的曲线积分转化为曲面积分”，从而简化积分计算，或推导矢量场的控制方程，以下为两个典型示例：

#### 1. 计算封闭曲线的环量

若矢量场的旋度易于计算，则可利用斯托克斯定理将环量的曲线积分转化为旋度通量的曲面积分，避免直接计算复杂的曲线积分。

示例：计算矢量场 $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ 沿封闭曲线 $L$ （ $x^2 + y^2 = 1$ ， $z = 0$ ，逆时针方向从 $z$ 轴正方向观察）的环量。

解答：

- 第一步，选择 $L$ 所张的曲面 $S$ ：取 $z = 0$ 平面上的圆面 $x^2 + y^2 \leq 1$ ，其法向量方向沿 $z$ 轴正方向（ $d\vec{S} = dxdy\vec{k}$ ）；
- 第二步，计算旋度 $\nabla \times \vec{a}$ ：

$$\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

○ 第三步，计算旋度通量：

$$\iint_S (\nabla \times \vec{a}) \cdot d\vec{S} = \iint_S (-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) \cdot dx dy \vec{k} = - \iint_S dx dy$$

圆面 $S$ 的面积为 $\pi \times 1^2 = \pi$ ，因此：

$$\iint_S (\nabla \times \vec{a}) \cdot d\vec{S} = -\pi$$

○ 第四步，应用斯托克斯定理：环量 $\Gamma = \oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = -\pi$ 。

若直接计算曲线积分，需使用参数方程（ $x = \cos\theta$ ， $y = \sin\theta$ ， $z = 0$ ， $\theta$ 从0到 $2\pi$ ），过程复杂；而利用斯托克斯定理，计算过程大幅简化。

## 2. 推导电磁学的法拉第电磁感应定律

斯托克斯定理是推导法拉第电磁感应定律的关键工具。法拉第实验发现：当磁场变化时，导体回路中会产生感应电动势 $\mathcal{E}$ ，其大小等于磁通量 $\Phi_B$ 的变化率，即：

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

感应电动势的定义是电场强度沿导体回路 $L$ 的环量： $\mathcal{E} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r}$ ；磁通量的定义是磁感应强度通过回路所张曲面 $S$ 的通量： $\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ 。

代入法拉第实验定律，得：

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

对右侧应用 Leibniz 法则（曲面 $S$ 不随时间变化），将时间导数移入积分：

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

对左侧应用斯托克斯定理，将环量转化为旋度通量：

$$\iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

由于该等式对任意曲面 $S$ 成立，因此被积函数必须相等，即：

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

这就是法拉第电磁感应定律的微分形式，是麦克斯韦方程组的核心方程之一，揭示了“变化的磁场产生涡旋电场”的物理本质。

## 6.5 旋度的基本性质与定理

旋度作为矢量场，具有一系列基本性质和重要定理，这些性质和定理是场论分析的基础工具，尤其在无旋场与有势场的关系中具有核心应用。



### 6.5.1 旋度的基本性质

#### 1. 常矢量的旋度为零

若 $\vec{c}$ 为常矢量（分量 $c_x, c_y, c_z$ 均为常数），则 $\frac{\partial c_z}{\partial y} - \frac{\partial c_y}{\partial z} = 0$ ，同理其他分量也为零，因此 $\nabla \times \vec{c} = 0$ 。

物理意义：常矢量场是均匀场，无旋转特性，因此旋度为零。

#### 2. 旋度的线性性质

设 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为矢量场， $c$ 为常数（标量），则：

$$\nabla \times (c\vec{a}) = c\nabla \times \vec{a} \quad (6-12)$$

$$\nabla \times (\vec{a} + \vec{b}) = \nabla \times \vec{a} + \nabla \times \vec{b} \quad (6-13)$$

证明（式 6-12）： $\nabla \times (c\vec{a})$ 的 $x$ 分量为 $\frac{\partial(c a_z)}{\partial y} - \frac{\partial(c a_y)}{\partial z} = c \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right)$ ，同理 $y, z$ 分量也为 $c$ 乘以对应分量，因此 $\nabla \times (c\vec{a}) = c\nabla \times \vec{a}$ ，证毕。

式（6-13）的证明类似，利用偏导数的线性性质即可。

#### 3. 旋度的乘积法则（标量与矢量的乘积）

设 $u$ 为标量场， $\vec{a}$ 为矢量场，则：

$$\nabla \times (u\vec{a}) = u\nabla \times \vec{a} + \nabla u \times \vec{a} \quad (6-14)$$

证明：计算 $\nabla \times (u\vec{a})$ 的 $x$ 分量：

$$\begin{aligned} (\nabla \times (u\vec{a}))_x &= \frac{\partial(u a_z)}{\partial y} - \frac{\partial(u a_y)}{\partial z} = u \frac{\partial a_z}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} a_z - u \frac{\partial a_y}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} a_y \\ &= u \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial y} a_z - \frac{\partial u}{\partial z} a_y \right) \end{aligned}$$

其中， $\left( \frac{\partial u}{\partial y} a_z - \frac{\partial u}{\partial z} a_y \right)$ 是 $\nabla u \times \vec{a}$ 的 $x$ 分量（ $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$ ，叉积的 $x$ 分量为 $\frac{\partial u}{\partial y} a_z - \frac{\partial u}{\partial z} a_y$ ）。

同理可证 $y, z$ 分量，因此 $\nabla \times (u\vec{a}) = u\nabla \times \vec{a} + \nabla u \times \vec{a}$ ，证毕。

物理意义：标量场 $u$ 与矢量场 $\vec{a}$ 的乘积的旋度，不仅包含 $\vec{a}$ 本身的旋度贡献（ $u\nabla \times \vec{a}$ ），还包含 $u$ 的梯度与 $\vec{a}$ 的叉积贡献（ $\nabla u \times \vec{a}$ ）。例如，在流体力学中，若 $\vec{a}$ 为速度场 $\vec{v}$ ， $u$ 为密度 $\rho$ ，则 $\nabla \times (\rho \vec{v}) = \rho \nabla \times \vec{v} + \nabla \rho \times \vec{v}$ ，这一关系在非均匀密度流体的旋转分析中具有重要应用。

#### 4. 梯度场的旋度为零

设 $u$ 为标量场，则梯度场 $\nabla u$ 的旋度为零：

$$\nabla \times (\nabla u) = 0 \quad (6-15)$$

证明：计算 $\nabla \times (\nabla u)$ 的 $x$ 分量：

$$(\nabla \times (\nabla u))_x = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$$

根据微积分的混合偏导数相等定理（若 $u$ 的二阶偏导数连续，则 $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$ ），因此 $x$ 分量为零。同理可证 $y, z$ 分量也为零，因此 $\nabla \times (\nabla u) = 0$ ，证毕。

物理意义：梯度场是无旋场，这一性质是“无旋场必为有势场”的理论基础。例如，重力场 $\vec{g} = -\nabla \Phi$ （ $\Phi$ 为重力势）是梯度场，因此 $\nabla \times \vec{g} = 0$ （无旋场）。

## 5. 旋度场的散度为零

设 $\vec{a}$ 为矢量场，则旋度场 $\nabla \times \vec{a}$ 的散度为零：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0 \quad (6-16)$$

证明：计算 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a})$ ：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)$$

展开后，各项混合偏导数相互抵消（如 $\frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial x} = 0$ ），因此总和为零，证毕。

物理意义：旋度场是无源场，这一性质表明“旋度场无散度源”，例如，磁场的磁感应强度 $\vec{B}$ 是旋度场（ $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ， $\vec{A}$ 为矢量势），因此 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ （无源场），这与麦克斯韦方程组一致。

### 6.5.2 旋度的重要定理（无旋场与有势场的等价性）

**定理：**矢量场 $\vec{a}$ 为无旋场（ $\nabla \times \vec{a} = 0$ ）的充分必要条件是 $\vec{a}$ 为有势场（即存在标量场 $\phi$ ，使得 $\vec{a} = \nabla \phi$ ）。

**证明：** 1. 必要性（有势场必为无旋场）：

若 $\vec{a} = \nabla \phi$ （有势场），则根据旋度的性质 4（梯度场的旋度为零）， $\nabla \times \vec{a} = \nabla \times (\nabla \phi) = 0$ ，即 $\vec{a}$ 为无旋场。必要性得证。

2. 充分性（无旋场必为有势场）：

若 $\vec{a}$ 为无旋场（ $\nabla \times \vec{a} = 0$ ），需证明存在标量场 $\phi$ ，使得 $\vec{a} = \nabla \phi$ 。

选择标量场 $\phi$ 的定义为：

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

其中， $\vec{r}_0$ 为场中任意固定点， $\vec{r}$ 为场中任意点，积分路径为从 $\vec{r}_0$ 到 $\vec{r}$ 的任意曲线。

需证明 $\phi$ 的梯度等于 $\vec{a}$ ，即 $\frac{\partial \phi}{\partial x} = a_x$ ， $\frac{\partial \phi}{\partial y} = a_y$ ， $\frac{\partial \phi}{\partial z} = a_z$ 。

以 $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ 为例，取积分路径从 $\vec{r}_0$ 到 $\vec{r} = (x, y, z)$ ，再沿 $x$ 轴方向取微小位移 $dx$ 到 $\vec{r}' = (x + dx, y, z)$ ，则：

$$\phi(\vec{r}') - \phi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

由于 $\vec{a}$ 是无旋场，根据斯托克斯定理，积分与路径无关，因此可选择沿 $x$ 轴的直线作为积分路径（ $dy = 0$ ， $dz = 0$ ），则：

$$\phi(\vec{r}') - \phi(\vec{r}) = \int_x^{x+dx} a_x(x', y, z) dx' \approx a_x(x, y, z) dx$$

因此， $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\phi(\vec{r}') - \phi(\vec{r})}{dx} = a_x$ 。同理可证 $\frac{\partial \phi}{\partial y} = a_y$ ， $\frac{\partial \phi}{\partial z} = a_z$ ，即 $\vec{a} = \nabla \phi$ 。充分性得证。

**物理意义：**该定理揭示了无旋场与有势场的等价关系，为无旋场的分析提供了重要工具。例如，在流体力学中，无旋流场（ $\nabla \times \vec{v} = 0$ ）存在速度势函数 $\phi$ ，使得 $\vec{v} = \nabla\phi$ ，这一关系可将流体的运动方程（矢量方程）转化为势函数的标量方程，大幅简化求解过程。

## 6.6 旋度的工程应用示例

旋度作为描述矢量场旋转特性的核心工具，在流体力学、电磁学、航空航天等工程领域有着广泛的应用，以下为几个典型示例：

### 6.6.1 流体力学中的涡旋识别与强度量化

在流体力学中，涡旋是一种常见的流动现象（如台风、机翼尾迹涡、管道内的二次流），旋度是识别涡旋和量化涡旋强度的核心参数。

#### 1. 涡旋的识别：

若流体速度场 $\vec{v}$ 的旋度 $\nabla \times \vec{v} \neq 0$ ，则该区域存在涡旋；旋度的方向沿涡旋的轴线方向，旋度的大小与涡旋的旋转强度成正比。

例如，飞机机翼产生的尾迹涡是一对反向旋转的涡旋，其速度场的旋度在涡旋中心区域显著不为零，且旋度方向沿飞行方向（左右尾迹涡的旋度方向相反）。通过计算旋度的分布，可精确识别尾迹涡的位置和范围，为飞机编队飞行的安全距离设计提供依据。

#### 2. 涡旋强度的量化：

涡旋的强度通常用“涡通量”（旋度通过某曲面的通量）来描述，根据斯托克斯定理，涡通量等于沿曲面边界回路的速度环量。因此，通过测量速度环量，可间接获取涡旋的强度。

例如，在风洞实验中，通过在模型周围布置测速探头，测量沿某封闭回路的速度分布，计算速度环量，即可量化该回路所围区域内的涡旋强度，为飞行器的气动性能优化提供数据支持。

### 6.6.2 电磁学中的涡旋电场与感应电流计算

根据法拉第电磁感应定律，变化的磁场会产生涡旋电场（ $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ），涡旋电场会驱动导体中的自由电荷运动，产生感应电流。旋度是分析涡旋电场和感应电流的核心工具。

示例：无限长直螺线管内的磁场随时间变化（ $\frac{\partial B}{\partial t} = k$ ， $k$ 为常数），求螺线管外的涡旋电场和感应电流。

**解答：**

#### 1. 磁场分布：

螺线管内的磁场 $\vec{B} = B\vec{k}$ （沿轴线方向），螺线管外的磁场为零；

#### 2. 涡旋电场的对称性：

由于磁场沿轴线对称变化，涡旋电场的分布也具有轴对称性，电场线为同心圆（垂直于轴线）；

#### 3. 应用斯托克斯定理：

取半径为 $r$ 的同心圆作为积分回路 $L$  ( $r >$  螺线管半径 $R$ )，回路绕行方向与 $\vec{B}$ 满足右手螺旋法则，则：

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

左侧： $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = E \cdot 2\pi r$  ( $E$ 为涡旋电场的大小，方向沿回路切线方向)；右侧： $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -k\vec{k}$ ，曲面 $S$ 为回路所张的圆面（仅螺线管内的部分有贡献，面积 $\pi R^2$ ），因此：

$$\iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -k \cdot \pi R^2$$

联立得： $E \cdot 2\pi r = -k \cdot \pi R^2$ ，即 $E = -\frac{kR^2}{2r}$ （负号表示电场方向与磁场变化率的方向满足楞次定律）；

#### 4. 感应电流计算：

若在回路 $L$ 处放置一根电阻为 $R_{\text{总}}$ 的导体环，则感应电流 $I = \frac{|\mathcal{E}|}{R_{\text{总}}} = \frac{E \cdot 2\pi r}{R_{\text{总}}} = \frac{k\pi R^2}{R_{\text{总}}}$ 。

这一计算结果在变压器、感应加热设备等电气装置的设计中具有重要应用。

### 6.6.3 大气科学中的气旋与反气旋分析

在大气科学中，气旋（低压系统）和反气旋（高压系统）是重要的天气系统，其旋转特性可通过大气 velocity 场的旋度来描述。

1. **气旋：**气旋是一种逆时针旋转的大气涡旋（北半球），其 velocity 场的旋度方向垂直于地面向上（ $\nabla \times \vec{v}$ 的 $z$ 分量为正）。旋度的大小越大，气旋的旋转强度越强，天气越剧烈（如台风是强气旋，旋度极大）；
2. **反气旋：**反气旋是一种顺时针旋转的大气涡旋（北半球），其 velocity 场的旋度方向垂直于地面向下（ $\nabla \times \vec{v}$ 的 $z$ 分量为负）。反气旋通常伴随晴朗天气，旋度大小相对较小。

通过卫星遥感数据获取大气 velocity 场的分布，计算旋度的空间分布，可实时监测气旋和反气旋的位置、强度和移动趋势，为天气预报提供科学依据。

## 6.7 旋度的练习题

### 6.7.1 练习题 A：计算矢量场的旋度

求矢量场 $\vec{A} = xy^2z^2\vec{i} + z^2\sin y\vec{j} + x^2e^y\vec{k}$ 的旋度 $\nabla \times \vec{A}$ 。

**解答：**根据旋度的行列式表达式（式 6-10），计算 $\nabla \times \vec{A}$ 的三个分量：

1.  $x$ 分量：

$$(\nabla \times \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2e^y) - \frac{\partial}{\partial z}(z^2\sin y) = x^2e^y - 2z\sin y$$

2.  $y$ 分量：

$$(\nabla \times \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}(xy^2z^2) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2e^y) = 2xy^2z - 2xe^y$$

3.  $z$ 分量：

$$(\nabla \times \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(z^2 \sin y) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2 z^2) = 0 - 2xyz^2 = -2xyz^2$$

因此, 矢量场 $\vec{A}$ 的旋度为:

$$\nabla \times \vec{A} = (x^2 e^y - 2z \sin y)\vec{i} + (2xy^2 z - 2xe^y)\vec{j} - 2xyz^2\vec{k}$$

### 6.7.2 练习题 B: 刚体旋转的速度场旋度

设一刚体绕过原点的某一轴转动, 其角速度为 $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k}$  (常矢量), 刚体上任意一点的位置矢量为 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , 则该点的线速度 $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ 。求该速度场的旋度 $\nabla \times \vec{V}$ 。

解答:

1. 首先计算线速度 $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ 的分量:

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_2 z - \omega_3 y)\vec{i} + (\omega_3 x - \omega_1 z)\vec{j} + (\omega_1 y - \omega_2 x)\vec{k}$$

2. 计算旋度 $\nabla \times \vec{V}$ 的三个分量:

$$\begin{aligned} \circ \quad x \text{分量: } (\nabla \times \vec{V})_x &= \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(\omega_1 y - \omega_2 x) - \frac{\partial}{\partial z}(\omega_3 x - \omega_1 z) = \omega_1 - (-\omega_1) = 2\omega_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \circ \quad y \text{分量: } (\nabla \times \vec{V})_y &= \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}(\omega_2 z - \omega_3 y) - \frac{\partial}{\partial x}(\omega_1 y - \omega_2 x) = \omega_2 - (-\omega_2) = 2\omega_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \circ \quad z \text{分量: } (\nabla \times \vec{V})_z &= \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\omega_3 x - \omega_1 z) - \frac{\partial}{\partial y}(\omega_2 z - \omega_3 y) = \omega_3 - (-\omega_3) = 2\omega_3 \end{aligned}$$

3. 组合旋度分量, 得到:

$$\nabla \times \vec{V} = 2\omega_1 \vec{i} + 2\omega_2 \vec{j} + 2\omega_3 \vec{k} = 2\vec{\omega}$$

**结论:** 刚体旋转的速度场旋度等于角速度矢量的 2 倍, 这一结果符合刚体力学的基本规律——旋度的大小直接反映了刚体旋转的角速度大小, 方向与角速度方向一致, 该结论在机械转动、流体旋转运动分析中具有重要应用。

### 6.7.3 练习题 C: 点源运动流场的旋度

设一点源运动流场的速度为 $\vec{v} = \frac{b}{r^2} \vec{r}$  (其中 $b$ 为常数,  $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ), 求该速度场的旋度 $\nabla \times \vec{v}$ 。

解答:

1. 先将速度场 $\vec{v}$ 分解为直角坐标系分量:

$$\vec{v} = \frac{b}{r^2} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{bx}{(x^2 + y^2 + z^2)}\vec{i} + \frac{by}{(x^2 + y^2 + z^2)}\vec{j} + \frac{bz}{(x^2 + y^2 + z^2)}\vec{k}$$

即 $v_x = \frac{bx}{r^2}$ ,  $v_y = \frac{by}{r^2}$ ,  $v_z = \frac{bz}{r^2}$  (其中 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ )。

2. 计算旋度的 $z$ 分量 (以 $z$ 分量为例,  $x, y$ 分量同理):

$$(\nabla \times \vec{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

分别计算偏导数：

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} &= b \cdot \frac{1 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) - y \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = b \cdot \frac{r^2 - 2xy}{r^4}; \\ \bullet \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} &= b \cdot \frac{1 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) - x \cdot 2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = b \cdot \frac{r^2 - 2xy}{r^4}。 \end{aligned}$$

$$\text{因此, } (\nabla \times \vec{v})_z = \frac{b(r^2 - 2xy)}{r^4} - \frac{b(r^2 - 2xy)}{r^4} = 0。$$

3. 同理计算 $x$ 分量和 $y$ 分量：

$$\begin{aligned} \bullet \quad x \text{ 分量: } (\nabla \times \vec{v})_x &= \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0; \\ \bullet \quad y \text{ 分量: } (\nabla \times \vec{v})_y &= \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0。 \end{aligned}$$

**结论：**该点源运动流场的旋度 $\nabla \times \vec{v} = 0$ ，即该流场为无旋场，存在速度势函数 $\phi$ （满足 $\vec{v} = \nabla\phi$ ），这一特性在流体力学的势流理论中具有核心应用。

## 七、微分算子

在前面的章节中，我们引入了梯度、散度、旋度来描述场的变化特性，而这些概念都可以通过**微分算子**进行统一表示和运算。微分算子是场论中连接几何描述与代数运算的核心工具，能够简化场论公式的书写和推导，常见的微分算子包括哈密尔顿算子（ $\nabla$ ）和拉普拉斯算子（ $\nabla^2$ ）。本章节将系统介绍这两种算子的定义、性质及应用。

### 7.1 哈密尔顿算子（ $\nabla$ ）

哈密尔顿算子（Hamilton Operator）是场论中最基础、最重要的微分算子，由爱尔兰数学家威廉·哈密尔顿（William Rowan Hamilton）提出。它同时具有**矢量特性**和**微分特性**，是梯度、散度、旋度的统一表达工具。

#### 7.1.1 哈密尔顿算子的定义

在直角坐标系中，哈密尔顿算子 $\nabla$ 的定义为：

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (7-1)$$

从定义可以看出， $\nabla$ 并非一个具体的矢量或标量，而是一个“算子”——它本身没有独立的物理意义，只有作用于场函数（标量场或矢量场）时，才能产生具有物理意义的结果（梯度、散度或旋度）。

#### 7.1.2 哈密尔顿算子的双重特性

哈密尔顿算子的核心特点是“矢量与微分的双重特性”，这一特性决定了它的运算规则：

1. **微分特性：** $\nabla$ 作为微分算子，遵循微分运算的基本法则（如线性法则、乘积法则、链式法则），且仅对其**右侧**的场函数产生微分作用，对左侧的量无微分效果。

示例： $\nabla(u\phi) = u\nabla\phi + \phi\nabla u$ （乘积法则），其中 $\nabla$ 分别对 $u$ 和 $\phi$ 进行微分；而 $u\nabla\phi$ 中， $\nabla$ 仅对 $\phi$ 微分， $u$ 视为常数。

2. **矢量特性**： $\nabla$ 作为矢量，遵循矢量代数的基本法则（如矢量的点积、叉积、数乘），其运算结果的类型由矢量运算规则决定：

- $\nabla$ 与标量场 $\phi$ 作用（类似矢量与标量的数乘）：结果为矢量场（梯度 $\nabla\phi$ ）；
- $\nabla$ 与矢量场 $\vec{a}$ 点积（ $\nabla \cdot \vec{a}$ ）：结果为标量场（散度）；
- $\nabla$ 与矢量场 $\vec{a}$ 叉积（ $\nabla \times \vec{a}$ ）：结果为矢量场（旋度）。

### 7.1.3 哈密尔顿算子对“三度”的统一表示

利用哈密尔顿算子，我们可以将前面章节中的梯度、散度、旋度进行统一且简洁的表示，避免复杂的偏导数符号重复书写，具体对应关系如下表 7-1 所示：

表 7-1 梯度、散度、旋度的哈密尔顿算子表示

场论概念	传统表达式	哈密尔顿算子表达式	结果类型	物理意义
梯度	$\text{grad } \phi$	$\nabla\phi$	矢量场	标量场的空间变化率（方向+大小）
散度	$\text{div } \vec{a}$	$\nabla \cdot \vec{a}$	标量场	矢量场的发散/汇聚特性（源强度）
旋度	$\text{curl } \vec{a}$	$\nabla \times \vec{a}$	矢量场	矢量场的旋转特性（涡旋强度+方向）

**示例验证：**

- 梯度： $\nabla\phi = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$ ，与梯度的传统定义完全一致；
- 散度： $\nabla \cdot \vec{a} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ ，与散度的传统定义完全一致；
- 旋度： $\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$ ，展开后与旋度的传统定义完全一致。

### 7.1.4 哈密尔顿算子的运算性质

基于其双重特性，哈密尔顿算子具有一系列重要的运算性质，这些性质是场论公式推导的核心工具：

1. **线性性质**：对任意标量场 $\phi, \psi$ 和常数 $c_1, c_2$ ，有：

$$\nabla(c_1\phi + c_2\psi) = c_1\nabla\phi + c_2\nabla\psi$$

对任意矢量场 $\vec{a}, \vec{b}$ 和常数 $c_1, c_2$ ，有：

$$\nabla \cdot (c_1\vec{a} + c_2\vec{b}) = c_1\nabla \cdot \vec{a} + c_2\nabla \cdot \vec{b}$$

$$\nabla \times (c_1\vec{a} + c_2\vec{b}) = c_1\nabla \times \vec{a} + c_2\nabla \times \vec{b}$$

该性质由微分运算的线性性和矢量运算的线性性共同决定。

2. **乘积法则（标量-标量乘积）**：对任意标量场 $\phi, \psi$ ，有：

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$

证明：利用微分的乘积法则， $\frac{\partial(\phi\psi)}{\partial x} = \phi\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial\phi}{\partial x}$ ，同理可证y,z方向，组合后即得上述公式。

3. **乘积法则（标量-矢量乘积）**：对任意标量场 $\phi$ 和矢量场 $\vec{a}$ ，有：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\phi \vec{a}) &= \phi \nabla \cdot \vec{a} + \nabla \phi \cdot \vec{a} \\ \nabla \times (\phi \vec{a}) &= \phi \nabla \times \vec{a} + \nabla \phi \times \vec{a}\end{aligned}$$

这两个公式分别在散度和旋度的性质章节中已证明，其本质是结合了微分的乘积法则和矢量的点积/叉积分配律。

4. **矢量三重积相关性质：**对任意矢量场 $\vec{a}, \vec{b}$ ，有：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b}) \\ \nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{a}(\nabla \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\nabla \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b}\end{aligned}$$

这些性质在电磁学、流体力学的复杂场分析中（如麦克斯韦方程组推导、流体运动方程推导）具有重要应用。

## 7.2 拉普拉斯算子 ( $\nabla^2$ )

拉普拉斯算子 (Laplacian Operator) 是由哈密尔顿算子衍生的二阶微分算子，主要用于描述场函数的“二阶空间变化率”，在调和场分析、波动方程、热传导方程等领域中具有核心地位。

### 7.2.1 拉普拉斯算子的定义

拉普拉斯算子 $\nabla^2$ （读作“nabla squared”）定义为哈密尔顿算子自身的点积，即：

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \Delta \quad (7-2)$$

在直角坐标系中，将哈密尔顿算子的定义代入，展开后可得：

$$\nabla^2 = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (7-3)$$

从定义可以看出，拉普拉斯算子是**标量算子**（点积结果为标量），其核心作用是对场函数进行“二阶偏导数求和”，反映场函数在空间三个方向上的二阶变化率总和。

### 7.2.2 拉普拉斯算子对不同场的作用

拉普拉斯算子可以作用于标量场，也可以作用于矢量场（对矢量场的每个分量分别作用），具体形式如下：

1. **作用于标量场 $\phi$ ：**拉普拉斯算子作用于标量场 $\phi$ ，结果仍为标量，记为 $\nabla^2 \phi$ ，其表达式为：

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (7-4)$$

物理意义： $\nabla^2 \phi$ 描述标量场 $\phi$ 的“曲率”——若 $\nabla^2 \phi > 0$ ，表示该点周围的场函数值小于该点值（如凸函数的顶点）；若 $\nabla^2 \phi < 0$ ，表示该点周围的场函数值大于该点值（如凹函数的谷底）；若 $\nabla^2 \phi = 0$ ，表示该点周围的场函数变化平衡（调和函数）。

2. **作用于矢量场 $\vec{a}$ ：**拉普拉斯算子作用于矢量场 $\vec{a}$ ，结果为矢量场，记为 $\nabla^2 \vec{a}$ ，其定义为对 $\vec{a}$ 的每个分量分别作用拉普拉斯算子：

$$\nabla^2 \vec{a} = \nabla^2 a_x \cdot \vec{i} + \nabla^2 a_y \cdot \vec{j} + \nabla^2 a_z \cdot \vec{k} \quad (7-5)$$

其中， $\nabla^2 a_x = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}$ ， $a_y, a_z$ 分量同理。物理意义： $\nabla^2 \vec{a}$ 描述矢量场 $\vec{a}$ 各分量的二阶空间变化率，反映矢量场的“扩散”或“汇聚”趋势（如流体速度场的粘性扩散项）。



### 7.2.3 拉普拉斯算子与梯度、散度的关系

拉普拉斯算子与梯度、散度存在密切的关联——标量场的拉普拉斯算子等于该标量场梯度的散度，即：

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi) \quad (7-6)$$

**证明：**根据梯度的定义， $\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}$ ；对梯度取散度，有：

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \phi$$

证毕。

这一关系是场论中的核心恒等式，它将一阶微分运算（梯度）与二阶微分运算（拉普拉斯）通过散度联系起来，在调和场分析、偏微分方程推导中具有重要应用。例如，在流体力学的势流理论中，无旋流场的速度势 $\phi$ 满足 $\nabla^2 \phi = 0$ （拉普拉斯方程），其本质就是 $\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla \cdot \vec{v} = 0$ （不可压缩流体的连续性方程）。

### 7.2.4 拉普拉斯算子的运算性质

拉普拉斯算子作为二阶微分算子，具有以下重要运算性质：

1. **线性性质：**对任意标量场 $\phi, \psi$ 和常数 $c_1, c_2$ ，有：

$$\nabla^2 (c_1 \phi + c_2 \psi) = c_1 \nabla^2 \phi + c_2 \nabla^2 \psi$$

对任意矢量场 $\vec{a}, \vec{b}$ 和常数 $c_1, c_2$ ，有：

$$\nabla^2 (c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b}) = c_1 \nabla^2 \vec{a} + c_2 \nabla^2 \vec{b}$$

该性质由二阶偏导数的线性性决定。

2. **乘积法则（标量-标量乘积）：**对任意标量场 $\phi, \psi$ ，有：

$$\nabla^2 (\phi \psi) = \phi \nabla^2 \psi + 2 \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \psi \nabla^2 \phi$$

**证明：**利用两次微分的乘积法则，先计算 $\nabla(\phi \psi) = \phi \nabla \psi + \psi \nabla \phi$ ，再对结果取散度：

$$\nabla \cdot \nabla (\phi \psi) = \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) + \nabla \cdot (\psi \nabla \phi)$$

分别应用散度的乘积法则（ $\nabla \cdot (u \vec{a}) = u \nabla \cdot \vec{a} + \nabla u \cdot \vec{a}$ ）：

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi$$

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \phi) = \psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi$$

相加后即得 $\nabla^2 (\phi \psi) = \phi \nabla^2 \psi + 2 \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \psi \nabla^2 \phi$ 。

3. **与哈密顿算子的组合性质：**对任意标量场 $\phi$ 和矢量场 $\vec{a}$ ，有：

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla^2 \vec{a}$$

该恒等式称为“矢量拉普拉斯恒等式”，在电磁学（麦克斯韦方程组推导）和流体力学（纳维-斯托克斯方程推导）中具有关键应用，它将矢量场的一阶微分运算（散度、旋度）与二阶微分运算（拉普拉斯）联系起来。

## 7.3 调和场——无源无旋场的统一描述

调和场是同时满足“无源”和“无旋”两个条件的矢量场，是场论中一类特殊且重要的场，其核心特征与拉普拉斯算子密切相关。

### 7.3.1 调和场的定义

若矢量场 $\vec{a}$ 同时满足以下两个条件，则称 $\vec{a}$ 为**调和场**： 1. 无源场： $\nabla \cdot \vec{a} = 0$ （无发散/汇聚源）； 2. 无旋场： $\nabla \times \vec{a} = 0$ （无涡旋）。

### 7.3.2 调和场的势函数与拉普拉斯方程

由于调和场是无旋场（ $\nabla \times \vec{a} = 0$ ），根据无旋场与有势场的等价性，存在标量势函数 $\phi$ ，使得 $\vec{a} = \nabla \phi$ （ $\phi$ 称为调和场的势函数）。

又因为调和场是无源场（ $\nabla \cdot \vec{a} = 0$ ），将 $\vec{a} = \nabla \phi$ 代入无源条件，可得：

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = 0$$

根据拉普拉斯算子与梯度、散度的关系（ $\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi)$ ），上式可简化为：

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (7-7)$$

式（7-7）称为**拉普拉斯方程**，满足拉普拉斯方程的标量函数 $\phi$ 称为**调和函数**。因此，调和场的势函数必为调和函数，调和场也可定义为“势函数满足拉普拉斯方程的矢量场”。

### 7.3.3 调和场的性质

调和场作为无源无旋场，具有以下核心性质：

1. **势函数的调和性**：调和场的势函数 $\phi$ 满足 $\nabla^2 \phi = 0$ ，即势函数是调和函数，其空间变化率的二阶导数总和为零，反映场的“平衡态”特性（如无热源的稳态温度场、无电荷的静电场）。
2. **通量守恒性**：由于调和场是无源场（ $\nabla \cdot \vec{a} = 0$ ），根据无源场的性质，通过任意闭合曲面的通量为零（ $\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = 0$ ），且通过矢量管任意横截面的通量守恒（ $\iint_{S_1} \vec{a} \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{S_2} \vec{a} \cdot d\vec{S}_2$ ）。
3. **环量为零**：由于调和场是无旋场（ $\nabla \times \vec{a} = 0$ ），根据斯托克斯定理，沿任意闭合曲线的环量为零（ $\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = 0$ ），且通过任意张于同一周线的曲面的旋度通量为零。

### 7.3.4 调和场的工程示例

调和场在工程领域广泛存在，以下为几个典型示例：

1. **无热源的稳态温度场**：在无内热源、无热损耗的稳态条件下，温度场 $T(\vec{r})$ 满足 $\nabla^2 T = 0$ （拉普拉斯方程），此时温度场的梯度 $\vec{q} = -k\nabla T$ （热流密度矢量）构成调和场（ $\nabla \cdot \vec{q} = 0$ ， $\nabla \times \vec{q} = 0$ ），反映热量的稳态平衡分布。
2. **无电荷区域的静电场**：在无自由电荷的区域（ $\rho = 0$ ），静电场的电场强度 $\vec{E}$ 满足 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ （无源）和 $\nabla \times \vec{E} = 0$ （无旋），因此 $\vec{E}$ 是调和场，其势函数（电势 $\phi$ ）满足 $\nabla^2 \phi = 0$ ，这一特性是电器设备绝缘设计的理论基础。
3. **不可压缩流体的无旋流场**：对于不可压缩流体（ $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ ）的无旋流场（ $\nabla \times \vec{v} = 0$ ），速度场 $\vec{v}$ 是调和场，其速度势 $\phi$ 满足 $\nabla^2 \phi = 0$ ，这一关系是飞机机翼绕流、船舶兴波阻力计算等势流理论的核心。

## 7.4 微分算子的练习题

### 7.4.1 练习题 A：拉普拉斯算子的计算

已知标量场  $\phi = x^3 + y^3 + z^3$ ，求  $\nabla^2 \phi$ 。

解答：根据拉普拉斯算子的定义（式 7-4），计算  $\phi$  的二阶偏导数：

$$1. \frac{\partial \phi}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 6x;$$

$$2. \frac{\partial \phi}{\partial y} = 3y^2, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 6y;$$

$$3. \frac{\partial \phi}{\partial z} = 3z^2, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 6z。$$

因此， $\nabla^2 \phi = 6x + 6y + 6z = 6(x + y + z)$ 。

### 7.4.2 练习题 B：验证矢量拉普拉斯恒等式

对矢量场  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ，验证矢量拉普拉斯恒等式  $\nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla^2 \vec{a}$ 。

解答：

1. 计算左侧各项：

- $\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3;$
- $\nabla(\nabla \cdot \vec{a}) = \nabla 3 = 0$ （常标量的梯度为零）；
- $\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$ （旋度为零）；
- $\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla \times 0 = 0。$

因此，左侧 =  $0 - 0 = 0$ 。

2. 计算右侧  $\nabla^2 \vec{a}$ ：

- $\nabla^2 a_x = \nabla^2 x = \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = 0;$
- 同理， $\nabla^2 a_y = 0, \nabla^2 a_z = 0$ ；因此，右侧  $\nabla^2 \vec{a} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = 0。$

3. 结论：左侧 = 右侧，矢量拉普拉斯恒等式成立。

### 7.4.3 练习题 C：调和场的判定

已知矢量场  $\vec{a} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$ ，判断  $\vec{a}$  是否为调和场，若为调和场，求其势函数  $\phi$ 。

解答：

1. 判定是否为调和场（需满足  $\nabla \cdot \vec{a} = 0$  和  $\nabla \times \vec{a} = 0$ ）：  
- 散度：  $\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial(2x)}{\partial x} + \frac{\partial(2y)}{\partial y} + \frac{\partial(2z)}{\partial z} = 2 + 2 + 2 = 6 \neq 0$ ，因此  $\vec{a}$  不是无源场，故不是调和场。
2. 若修改矢量场为  $\vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j}$ （重新判定）：
  - 散度：  $\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} = 0 + 0 = 0$ （无源）；

- 旋度： $\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + (1-1)\vec{k} = 0$ （无旋）；
  - 因此， $\vec{a}$ 是调和场。
3. 求势函数 $\phi$ （满足 $\vec{a} = \nabla\phi$ ）：
- 由 $\frac{\partial\phi}{\partial x} = y$ ，对 $x$ 积分得 $\phi = xy + f(y)$ ；
  - 对 $y$ 求偏导： $\frac{\partial\phi}{\partial y} = x + f'(y)$ ，结合 $\frac{\partial\phi}{\partial y} = x$ ，得 $f'(y) = 0$ ，即 $f(y) = C$ （常数）；
  - 因此，势函数 $\phi = xy + C$ （ $C$ 为任意常数）。

## 八、总结与展望

### 8.1 场论基础核心内容总结

本讲义围绕“场论基础”展开，系统介绍了场的定义、分类、几何表示，以及标量场的梯度、矢量场的散度与旋度（场论“三度”），并通过哈密尔顿算子和拉普拉斯算子实现了场论运算的统一。核心内容可归纳为以下几点：

- 场的本质与分类：**场是物理量在空间区域的分布函数，按物理量类型分为标量场（如温度场、压力场）、矢量场（如速度场、电场）和张量场（如应力场、应变率场）；按分布特性分为均匀/非均匀场、定常/非定常场，这些分类是简化工程问题的基础。
- 场的几何表示：**标量场通过等值线（面）直观反映标量值的分布与变化趋势（疏密表示变化快慢）；矢量场通过矢量线（如流线、电场线）和矢量图反映矢量的大小与方向，几何表示是连接场的数学描述与物理直观的桥梁。
- 场论“三度”的核心意义：**
  - 梯度（ $\nabla\phi$ ）：描述标量场的空间变化率，方向为变化最快的方向，大小为最大变化率，是标量场不均匀性的量度；
  - 散度（ $\nabla \cdot \vec{a}$ ）：描述矢量场的发散/汇聚特性，是矢量场源强度的量度，无源场（ $\nabla \cdot \vec{a} = 0$ ）无净源；
  - 旋度（ $\nabla \times \vec{a}$ ）：描述矢量场的旋转特性，是矢量场涡旋强度的量度，无旋场（ $\nabla \times \vec{a} = 0$ ）无涡旋，且必为有势场。
- 核心定理与算子：**
  - 奥-高定理：连接封闭曲面的通量与体积分，实现曲面积分与体积分的转化；
  - 斯托克斯定理：连接封闭曲线的环量与曲面积分，实现曲线积分与曲面积分的转化；
  - 哈密尔顿算子（ $\nabla$ ）：统一表示梯度、散度、旋度，简化场论运算；
  - 拉普拉斯算子（ $\nabla^2$ ）：描述场的二阶变化率，调和场（无源无旋场）的势函数满足拉普拉斯方程。

## 8.2 场论在流体力学中的应用展望

本讲义的核心目标是为“张量在流体力学中的应用”奠定基础，场论作为流体力学的数学基石，其应用主要体现在以下几个方面：

1. **流体运动的描述：**流体的速度场 $\vec{v}(\vec{r}, t)$ 是矢量场，通过散度 $(\nabla \cdot \vec{v})$ 判断流体的压缩性（不可压缩流体 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ ），通过旋度 $(\nabla \times \vec{v})$ 判断流体的旋转特性（无旋流场 $\nabla \times \vec{v} = 0$ ），为流体运动的分类（如层流/湍流、有旋/无旋）提供量化依据。
2. **流体力学基本方程的推导：**场论是推导流体力学核心方程（连续性方程、动量方程、能量方程）的关键工具。例如，利用奥-高定理将连续性方程的积分形式转化为微分形式 $(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0)$ ，利用哈密尔顿算子简化动量方程中的粘性项（如 $\mu \nabla^2 \vec{v}$ ）。
3. **复杂流场的分析：**对于飞机飞行时的流场、管道内的流动、船舶兴波等复杂流场，通过场论分析梯度（如压力梯度 $\nabla p$ 驱动流体运动）、散度（如射流的发散特性）、旋度（如尾迹涡的旋转强度），可揭示流场的物理本质，为飞行器设计、管道优化等工程问题提供理论支持。
4. **张量场的过渡：**流体力学中的应力场、应变率场是张量场，而张量场的描述与运算（如张量的梯度、散度）是标量场和矢量场场论的推广。掌握场论基础，能够顺利过渡到张量分析，理解张量在流体力学中的应用（如本构方程 $\sigma = -p\mathbf{I} + 2\mu\epsilon$ ）。

## 8.3 学习建议

场论的学习需要兼顾数学严谨性与物理直观性，建议读者在后续学习中注意以下几点：

1. **理解概念的物理本质：**避免单纯记忆公式，结合具体工程示例（如温度场的梯度、流体速度场的散度）理解场论“三度”的物理意义，建立“数学表达式-几何图形-物理现象”的关联。
2. **熟练掌握算子运算：**哈密尔顿算子和拉普拉斯算子是场论运算的核心，需熟练掌握其双重特性和运算规则，通过大量练习（如梯度、散度、旋度的计算）提升公式推导能力。
3. **结合工程应用深理解：**场论的价值在于应用，建议结合流体力学、电磁学等专业课程，分析实际工程问题（如机翼绕流、热传导），体会场论在解决复杂问题中的简化作用。
4. **注重与张量分析的衔接：**场论是张量分析的基础，标量场、矢量场可视为0阶、1阶张量场，其梯度、散度、旋度运算可推广到高阶张量场。

## 习 题

### (一) 填空题

1. 标量场的梯度是( )场,其物理意义是描述标量场在空间某点的( )和( )。
2. 矢量场的散度是( )量,若矢量场的散度为零,则该矢量场称为( )场,其物理意义是( )。
3. 矢量场的旋度是( )场,若矢量场的旋度为零,则该矢量场称为( )场,此时存在( )函数使得该矢量场等于该函数的梯度。
4. 哈密尔顿算子 $\nabla$ 同时具有( )特性和( )特性,在直角坐标系中其表达式为( )。
5. 拉普拉斯算子 $\nabla^2$ 定义为哈密尔顿算子自身的( ),在直角坐标系中其表达式为( )。
6. 调和场是同时满足( )和( )条件的矢量场,其势函数满足( )方程。
7. 标量场 $\nabla\phi =$ ( ),它的方向是标量场等值面的( )方向。
8. 矢量场 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ 的散度在直角坐标系中的表达式为 $\nabla \cdot \vec{a} =$ ( ),其物理意义是( )。
9. 矢量场 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ 的旋度在直角坐标系中用行列式表示为 $\nabla \times \vec{a} =$ ( ),其大小反映了矢量场( )的强弱。
10. 奥-高定理建立了矢量场通过封闭曲面的( )与该曲面所包围区域内矢量场( )的体积分之间的联系。
11. 斯托克斯定理建立了矢量场沿封闭曲线的( )与该曲线所张曲面内矢量场( )的曲面积分之间的联系。
12. 若矢量场 $\vec{a}$ 是某标量场,即 $\vec{a} = \nabla\phi$ ,则 $\vec{a}$ 必为( )场,该结论的数学表达式为( )。
13. 对于不可压缩流体的速度场 $\vec{v}$ ,其满足的连续性方程在微分形式下为( ),这表明该速度场是( )场。
14. 标量场 $\frac{\partial\phi}{\partial s}$ 与梯度的关系为 $\frac{\partial\phi}{\partial s} =$ ( ),其中 $\vec{s}^0$ 是 $\vec{s}$ 方向的( )。
15. 矢量场的环量密度是描述矢量场在某点沿特定方向的( ),其与旋度的关系为 $\mu_n =$ ( ),其中 $\vec{n}$ 是该特定方向的( )。

### (二) 判断题

1. 标量场的等值线(面)上任意一点的切线方向与该点梯度方向平行。( )
2. 常矢量场的散度和旋度均为零。( )
3. 若矢量场的旋度为零,则该矢量场沿任意封闭曲线的环量一定为零。( )
4. 拉普拉斯算子作用于标量场的结果是标量,作用于矢量场的结果是矢量。( )
5. 调和场的势函数是调和函数,调和函数的梯度场一定是调和场。( )
6. 矢量场的通量仅与矢量场的大小和曲面的面积有关,与矢量场的方向和曲面的法向量方向无关。( )
7. 哈密尔顿算子对左侧的场函数也能产生微分作用。( )

8. 无旋场一定是有势场，有势场也一定是无旋场。（ ）
9. 奥-高定理适用于任意矢量场和任意封闭曲面。（ ）
10. 斯托克斯定理中，曲线的绕行方向与曲面的法向量方向满足左手螺旋法则。（ ）

### （三）选择题

1. 下列关于标量场梯度的说法中，错误的是（ ） A. 梯度的方向是标量场变化最快的方向 B. 梯度的大小是标量场的最大变化率 C. 梯度的方向与标量场等值面的切线方向一致 D. 梯度是描述标量场空间变化率的矢量
2. 对于矢量场 $\vec{a}$ ，若 $\nabla \cdot \vec{a} = 0$ ，则该矢量场不可能是（ ） A. 不可压缩流体的速度场 B. 静电场 C. 磁场 D. 有旋场
3. 下列哪个矢量场一定是无旋场（ ） A. 流体的速度场 B. 静电场 C. 磁场 D. 涡旋电场
4. 哈密顿算子 $\nabla$ 作用于标量场（ ） A. 标量 B. 矢量 C. 张量 D. 不确定
5. 拉普拉斯方程 $\nabla^2 = 0$ 的物理意义是（ ） A. 标量场 B. 标量场 C. 标量场 D. 标量场
6. 奥-高定理的表达式为（ ） A.  $\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{a}) \cdot d\vec{S}$  B.  $\oiint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{a}) dV$  C.  $d\phi = \nabla\phi \cdot d\vec{r}$  D.  $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$
7. 下列关于矢量场环量的说法中，正确的是（ ） A. 环量的大小仅与矢量场的大小有关 B. 环量的正负与曲线的绕行方向无关 C. 若矢量场是无旋场，则其沿任意封闭曲线的环量为零 D. 环量的单位与矢量场的单位相同
8. 对于标量场，下列运算正确的是（ ） A.  $\nabla(+) = \nabla + \nabla$  B.  $\nabla() = \nabla - \nabla$  C.  $\nabla \cdot (\nabla) = \nabla^2 - \nabla \cdot \nabla$  D.  $\nabla \times (\nabla) = 0$
9. 下列哪个算子是二阶微分算子（ ） A. 哈密顿算子 $\nabla$  B. 梯度 $\nabla$  C. 散度 $\nabla \cdot \vec{a}$  D. 拉普拉斯算子 $\nabla^2$
10. 调和场的势函数（ ） A.  $\nabla$  B.  $\nabla \cdot (\nabla) = 0$  C.  $\nabla \times (\nabla) = 0$  D.  $\nabla^2(\nabla) = 0$
11. 若矢量场 $\vec{a}$ 的旋度为零，则下列说法错误的是（ ） A. 存在标量场 $\vec{a} = \nabla\phi$  B.  $\vec{a}$ 沿任意封闭曲线的环量为零 C.  $\vec{a}$ 是有源场 D.  $\vec{a}$ 是有势场
12. 对于矢量场 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ ，下列运算正确的是（ ） A.  $\nabla \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \nabla \cdot \vec{a} + \nabla \cdot \vec{b}$  B.  $\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} - (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a}$  C.  $\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a})$  D.  $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b}) - \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a})$
13. 下列关于场的分类说法中，错误的是（ ） A. 温度场是标量场 B. 重力场是矢量场 C. 应力场是标量场 D. 应变率场是张量场
14. 矢量场的散度为零，意味着该矢量场（ ） A. 无旋 B. 无源 C. 有势 D. 均匀
15. 标量场的方向导数最大时，其方向（ ） A. 与梯度方向相同 B. 与梯度方向相反 C. 与梯度方向垂直 D. 任意方向

### （四）公式推导与计算题

1. 推导直角坐标系中标量场 $\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cos \gamma$ ，其中 $\alpha, \beta, \gamma$ 是 $s$ 方向与 $x, y, z$ 轴的夹角。
2. 已知矢量场 $\vec{a} = x^2 y \vec{i} + y^2 z \vec{j} + z^2 x \vec{k}$ ，计算该矢量场在点(1,1,1)处的散度和旋度。

3. 推导奥-高定理  $\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{a}) dV$  (直角坐标系下)。
4. 已知标量场  $\phi = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ , 求该标量场的梯度  $\nabla\phi$  以及梯度的散度  $\nabla \cdot (\nabla\phi)$ 。
5. 已知矢量场  $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ , 计算该矢量场沿封闭曲线  $L$  ( $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ , 逆时针方向从  $z$  轴正方向观察) 的环量 (利用斯托克斯定理)。
6. 推导拉普拉斯算子在直角坐标系中的表达式  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 。
7. 已知刚体绕过原点的轴转动, 角速度  $\vec{\omega} = \omega_1\vec{i} + \omega_2\vec{j} + \omega_3\vec{k}$ , 刚体上某点的位置矢量  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , 线速度  $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , 求该速度场的旋度  $\nabla \times \vec{V}$ 。

## (五) 综合分析题

1. 结合场论知识, 分析不可压缩流体的无旋流场的特性, 包括速度场的散度、旋度、是否存在势函数以及势函数满足的方程, 并说明该流场在工程中的一个应用场景。
2. 某工程场景中存在一温度场  $T(x, y, z) = x^2y + 2yz + 3z^2$ , 试分析该温度场的梯度分布规律, 指出温度变化最快的方向, 并计算在点  $(2, 1, 3)$  处沿方向  $\vec{s} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$  的温度变化率。同时, 若该温度场为稳态无内热源的的温度场, 判断其是否满足拉普拉斯方程, 并说明原因。
3. 阐述电磁学中的电场强度  $\vec{E}$  和磁感应强度  $\vec{B}$  的场论特性 (散度、旋度), 结合麦克斯韦方程组中的相关方程, 分析电场和磁场的产生机制以及它们之间的联系, 并说明场论在电磁学工程应用 (如变压器设计) 中的作用。