第三部分 流体力学控制方程讲义

陈 兵

北京航空航天大学

2025 年 10 月

目　录

一、课程导入

在航空航天、水利工程、能源动力等众多工程领域，流体的运动规律是核心研究内容之一。从飞机的升空到管道内流体的输送，从水电站的发电到航天器的姿态控制，都离不开对流体力学的深入理解。而流体力学控制方程，作为描述流体运动的数学语言，是揭示流体运动本质、解决实际工程问题的关键工具。本次课程将围绕流体力学的基本概念与控制方程展开，为后续更深入的流体力学学习与工程应用奠定坚实基础。

二、流体力学基本概念

2.1 连续介质假说

2.1.1 流体的定义与力学特性

1. **流体与固体的力学差异**

   - 固体受力时，能够以一定的变形抵抗外力作用，当剪切（切向）力保持不变时，变形量也会保持恒定。例如，将一个固体方块放在桌面上，对其施加一个恒定的水平切向力，固体方块只会发生一定程度的形变，之后便不再继续变形。
   - 流体则不同，在外部剪切力或切向力的作用下，会发生连续的变形，也就是流动。换句话说，流体只有在流动的过程中，才能抵抗剪切力的作用。比如，向静止的水面施加一个微小的切向力，水面会持续产生流动，不会像固体那样停止变形。

2. **易流动性** 流体在静止状态下无法承受切向力，无论切向力多么微小，只要持续施加，都会使流体发生任意大的变形，这种特性被称为易流动性。这一特性主要是由分子力的作用导致的：

   - 固体分子间的作用力较强，当外界有力作用于固体时，固体发生微小变形后，分子间的作用力能够平衡外力，从而承受住切应力，不再继续变形。
   - 而在液体和气体中，分子间的作用力相对较弱或非常弱，即使是很小的切应力，也足以打破分子间的平衡，使它们产生任意大的变形。

2.1.2 物质三态的力学特征对比

为了更清晰地理解流体的特性，我们通过表 2-1 对固体、液体和气体的力学特征进行对比：

表 2-1 固体、液体和气体的力学特征

物质状态	分子间距	分子力和分子位置	压缩性	形状	受力
固体	约为分子直径	引力斥力平衡，束缚于晶格结构	很难	固定形状	压力；拉力；剪力
液体	约为分子直径	引力斥力平衡，但平衡位置可动	难压缩	受容器限制	压力
气体	10 倍分子直径	引力斥力都很小，无平衡位置	易被压缩	受容器限制	压力

从表中可以看出，液体和气体具有共同点，即都具有易流动性，在任何微小切应力作用下都会发生变形（流动），因此二者统称为流体。而流体和固体的力学性能区别主要在于对外力抵抗的能力不同：固体既能承受压力，也能承受拉力和剪切力，能够抵抗拉伸和剪切变形；流体则只能承受压力，不能承受拉力和剪切力，无法抵抗拉伸和剪切变形。

2.1.3 流体的微观与宏观图景

1. **微观图景**

流体是由大量做无规则运动的分子组成的，分子之间存在空隙。以 $1cm^3$的液体和气体为例：

- 水中含有约 3.3×10^{22}个分子，相邻分子间的距离约为 3.1×10^{-10}m。
- 空气中含有约 2.7×10^{19}个分子，相邻分子间的距离约为 3.2×10^{-9}m。 同时，流体分子或原子每时每刻都在进行无规则的热运动，且分子作用力是“短程力”，液体分子直径一般在 10^{-10}m 量级，分子有效作用半径在 10^{-8}m 量级。

2. **宏观图景**

在研究流体力学规律时，我们关注的并非流体微观上的分子热运动，而是由外部原因（如重力、压力差等）引起的宏观上的整体定向运动。为了便于研究，引入“流体质点”的概念： 流体质点是指微观上无穷大、宏观上充分小的分子团。具体

来说，宏观运动特征尺度 L_3 远大于逻辑抽象的流体质点尺度 L_2，流体质点尺度 L_2 又远大于分子间距 L_1，即 $L_3 >> L_2 >> L_1$。流体质点包含大量分子，少数分子的进出不会影响整个分子团各种参数的统计平均值。而且，由于流体质点宏观上充分小，可以将其近似看作几何上的一个点，每种物理量都可视为均匀分布的常量。流体质点是流体力学中的“无穷小”。

2.1.4 连续介质模型

1. **模型定义**

连续介质模型是将流体视为由流体质点无间隙地充满它所占据的整个空间的一种连续介质，且其所有的物理量都是空间坐标和时间的连续函数的一种假设模型。该模型由欧拉（Euler）于 1753 年提出。

2. **模型作用**

- 借助该模型，能够将数学上的场论和微积分手段应用于流体研究中，为流体力学的理论分析和计算提供了有力的数学工具。
- 使研究人员从复杂的分子运动中解脱出来，专注于流体的宏观运动规律，大大简化了研究过程。

2.1.5 描述流体的物理量

流体的各种性质（如密度等），只有对流体质点这个分子团进行统计平均后，才能得到稳定的数值，少数分子出入分子团不会影响稳定的平均值。因此，流体的所有物理量只有定义在流体质点上才有意义。

1. **流体密度**

流体密度是指单位体积流体所具有的质量，其数学表达式为：

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

其中，Δm 是流体质点的质量，ΔV 是流体质点的体积。当 ΔV 趋近于 0 时（此处的 0 是指宏观上的无穷小，并非真正的数学意义上的 0，以保证流体质点包含足够多的分子），$\frac{\Delta m}{\Delta V}$ 的极限值即为流体在该流体质点处的密度。

2. **流体压强**

流体压强是指单位面积上所受到的流体压力，其数学表达式为：

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A}$$

其中，ΔF_n 是作用在面积为 ΔA 的流体质点表面上的法向力，当 ΔA 趋近于 0 时（同样是宏观上的无穷小），$\frac{\Delta F_n}{\Delta A}$ 的极限值即为流体在该点的压强。

2.2 速度分解定理

2.2.1 流体运动的描述方法

在研究流体运动问题时，由于流体是由大量流体质点组成的，我们需要找到合适的方法来描述其运动。可以将流体质点的运动与马路上的汽车运动进行对比：

- 相似之处：两者都有位置、速度等运动参数随时间的变化。
- 不同之处：汽车是离散的个体，而流体质点是连续分布的；流体具有易流动性，流体质点之间会发生相对运动，而汽车之间的相对运动相对独立。 交管部门监控交通拥堵状况时，会在道路的不同位置设置监测点，记录每个监测点处车辆的流量、速度等信息，从而掌握整个路段的交通情况。类似地，在描述流体运动时，我们可以采用欧拉法。

2.2.2 描述流体运动的欧拉法

1. **核心思想**

欧拉法着眼于空间点，在空间中的每一个点上描述出流体运动随时间的变化状况。如果能够知道每一空间点上的流体运动情况，那么整个流体的运动状况也就清晰了。

2. **流场性质与流体质点性质的关系**

在欧拉法中，一个空间点上，流体质点的性质与该点的流场性质是相同的。某一时刻位于一个空间点上的流体质点的密度、压力、温度，就是流场对应点、对应时刻的密度场、压强场、温度场上的对应值。

3. **变元与数学工具**

欧拉法中的变元是空间坐标（x，y，z）和时间变量 t。通过欧拉法定义得到的函数都是场函数，因此可以广泛利用场论的知识来分析流体运动，如梯度、散度、

旋度等场论概念在流体力学中有着重要的应用。例如，温度场可以表示为 T(x, y, z, t)，通过分析温度场的梯度，可以了解温度在空间中的变化率和变化方向。

2.2.3 刚体速度分解

在理论力学中，对于刚体的运动，只要知道了刚体质心的平动速度$\vec{V}_0$和绕过质心转轴的角速度$\vec{\omega}$，利用质点的相对位置$\vec{r}$，就可以求得刚体上任意一点的速度，其速度公式为：$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$ 刚体运动具有两大特点：

1. 刚体上任意两个质点的相对位置始终保持不变，不会发生相对运动。
2. 刚体上任意一点的速度都可以分解为平动速度和转动速度两部分，且这种分解式具有全局性，即对刚体上所有点都适用。

2.2.4 流体速度分解的特殊性

与刚体不同，由于流体具有易流动性，流体中各质点的相对位置是不断变化的，因此流体不具有与刚体一样的速度公式。如果已知某一点的速度，很难直接求得距离该点较远（如几千米外）的另一点的速度。但是，在一个较小的邻域内，我们可以尝试将速度分解成几个部分来分别考虑，这就需要引入流体微团的概念。

2.2.5 流体微团概念

1. **定义**

流体微团是由同一组流体质点组成的一小团质量（体积）流体，在运动过程中，流体微团的质量保持不变。

2. **与流体质点的区别**

与流体质点相比，流体微团具有一定的体积和形状，而流体质点在宏观上可视为一个点，不考虑其体积和形状。

3. **运动特点**

即使是在一个流体微团内，各个流体质点的相对位置也会在运动中发生变化，这与刚体有着本质的区别。这种相对位置的变化使得流体微团的运动除了平移和旋转外，还会发生变形。

2.2.6 流体速度的泰勒级数展开

设流体微团内某一点$M_0(x,y,z)$的速度为$\vec{V}_0$，在该流体微团内取另一点$M(x+\delta x,y+\delta y,z+\delta z)$，将$M$点的速度在$M_0$点处进行一阶泰勒级数展开，并略去高阶截断项，可得到M点速度的分量形式：

$$v_x = v_{0x} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\delta z$$

$$v_y = v_{0y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v_y}{\partial z}\delta z$$

$$v_z = v_{0z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v_z}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v_z}{\partial z}\delta z$$

将其写成矢量形式为：

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\delta z$$

或缩写成指标形式：

$$v_i = v_{0i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta x_j$$

其中，$v_i - v_{0i}$和δx_j均为任意矢量。根据张量识别定理，$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$必为二阶张量。

2.2.7 流体速度的张量形式分解

将上述速度展开式进一步写成实体形式：

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + D \cdot \delta \vec{r}$$

其中，D为二阶张量，其表达式为：

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

D是由 9 个有序数组成的集合，通过对D进行分解，可以进一步揭示流体速度的构成。

2.2.8 二阶张量的分解（对称张量与反对称张量）

任何一个二阶张量都可以分解为对称张量S和反对称张量A的和，对于张量$D = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$，其分解式为：

$$D = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = a_{ij} + s_{ij} = A + S$$

1. **对称张量S**

对称张量S的表达式为：

$$S = \frac{D+D^T}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 2\frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & 2\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

进一步可拆分为：

$$S = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 0 \end{pmatrix}$$

其中，$\varepsilon_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$，称为线变形率；$\gamma_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)$（$i, j, k$为循环指标），称为剪切变形角速度。

2. **反对称张量A**

反对称张量A的表达式为：

$$A = \frac{D-D^T}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

其中，

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right),$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right),$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right),$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\vec{V},$$

$\vec{\omega}$称为旋转角速度矢量。

2.2.9 亥姆赫兹（Helmholtz）速度分解定理

将张量分解的结果代入流体速度的表达式中，可得：

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + D \cdot \delta\vec{r} = \vec{V}_0 + A \cdot \delta\vec{r} + S \cdot \delta\vec{r} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \delta\vec{r} + S \cdot \delta\vec{r}$$

上式中各项的物理意义如下：

1. $\vec{V}_0$：平移速度分量，仅引起流体微团的整体平移运动，不会导致流体微团发生变形。
2. $\vec{\omega} \times \delta\vec{r}$：旋转速度分量，是由流体微团绕过$M_0$点的轴旋转所产生的速度分量，同样不会引起微团的变形。
3. $S \cdot \delta\vec{r}$：变形速度分量，该分量会导致流体微团发生变形，因此对称张量S也被称为变形速度张量。

综上，流体微团的运动可以分解为平移、转动和变形三部分，这就是亥姆赫兹速度分解定理，其核心结论为：**流体微团运动 = 平移 + 转动 + 变形**。

2.3 变形速度张量

2.3.1 变形速度张量的表达式

变形速度张量S是一个二阶对称张量（也称为应变率张量），其完整表达式为：

$$S=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \gamma_3 & \gamma_2\\ \gamma_3 & 0 & \gamma_1\\ \gamma_2 & \gamma_1 & 0\end{pmatrix}$$

2.3.2 变形速度张量各分量的物理意义

1. **对角线分量——线变形率**

对角线分量

$$\varepsilon_i=\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\text{（}i=1,2,3\text{，对应}x,y,z\text{方向）}$$

表示流体微团上流体线相对长度随时间的变化率，即线变形率。以y方向为例，取流体微团中一段沿y方向的流体线，长度为δy。在时间δt内，由于流体的运动，该流体线在y方向的速度变化为$\frac{\partial v_y}{\partial y}\delta y$，因此流体线长度的变化量为$\frac{\partial v_y}{\partial y}\delta y\cdot\delta t$。则$y$方向的线变形率为：

$$\varepsilon_y=\frac{\frac{\partial v_y}{\partial y}\delta y\cdot\delta t}{\delta y\cdot\delta t}=\frac{\partial v_y}{\partial y}=\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=\varepsilon_2$$

同理，x方向和z方向的线变形率分别为：

$$\varepsilon_x=\frac{\partial v_x}{\partial x},\ \ \varepsilon_z=\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

线变形率为正时，表示流体线在该方向上被拉伸；为负时，表示被压缩。

2. **非对角线分量——剪切变形角速度**

非对角线分量γ_i（$i=1,2,3$）表示流体微团上相互垂直的两条流体线夹角的时间变化率的一半，即剪切变形角速度。 以γ_z（对应$x-y$平面内的剪切变形）为例，取流体微团中相互垂直的两条流体线，分别沿x方向和y方向，长度分别为δx

和δy。 在时间δt内，由于x方向速度在y方向的变化$\frac{\partial v_x}{\partial y}$，沿$y$方向的流体线会产生绕$z$轴的转动，转动角度

$$\delta\alpha_1 \approx \frac{\frac{\partial v_x}{\partial y}\delta y\cdot\delta t}{\delta y} = \frac{\partial v_x}{\partial y}\delta t;$$

同时，由于y方向速度在x方向的变化$\frac{\partial v_y}{\partial x}$，沿$x$方向的流体线也会产生绕$z$轴的转动，转动角度

$$\delta\alpha_2 \approx \frac{\frac{\partial v_y}{\partial x}\delta x\cdot\delta t}{\delta x} = \frac{\partial v_y}{\partial x}\delta t。$$

两条流体线夹角的总变化量为$\delta\alpha_1 + \delta\alpha_2$，则剪切变形角速度$\gamma_z$为：

$$\gamma_z = \frac{\delta\alpha_1 + \delta\alpha_2}{2\delta t} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\delta t}{\delta t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) = \gamma_3$$

同理，$x-z$平面和$y-z$平面内的剪切变形角速度分别为：

$$\gamma_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right),\ \gamma_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$$

剪切变形角速度的存在表明流体微团在运动过程中发生了形状的改变（角变形）。

综上，流体微团的变形包括角变形和线变形两部分，即**流体微团变形 = 角变形 + 线变形**。

2.3.3 变形速度张量的性质（二阶对称张量的性质）

变形速度张量S作为二阶对称张量，具有二阶对称张量的所有性质，主要包括以下几个方面：

1. **几何表示**

根据二阶对称张量的几何性质，可以通过变形二次曲面来几何地表示变形速度张量。对于变形速度张量S，其对应的变形二次曲面方程为：

$$2\varphi = \delta\vec{r}\cdot(S\cdot\delta\vec{r}) = s_{ij}\delta x_i\delta x_j = 1$$

展开后为：

$$\varepsilon_1\delta x_1^2 + \varepsilon_2\delta x_2^2 + \varepsilon_3\delta x_3^2 + \theta_1\delta x_2\delta x_3 + \theta_2\delta x_1\delta x_3 + \theta_3\delta x_1\delta x_2 = 1$$

其中，$\theta_i = 2\gamma_i$。通过变形二次曲面，可以直观地了解流体微团在不同方向上的变形情况。 同时，变形速度张量S对应的速度矢量

$$\vec{V}_s = S \cdot \delta\vec{r}$$

可以表示为梯度形式

$$\vec{V}_s = grad\varphi = \frac{1}{ON}\vec{n},$$

其中ON是从坐标原点到二次曲面上点N的距离，$\vec{n}$是二次曲面上点N处的单位法向量。

2. **主轴坐标系下的标准形式**

对于任意一个二阶对称张量，都存在三个相互垂直的主轴。在以这三个主轴为正交直角坐标系（主轴坐标系）中，变形速度张量S具有标准的对角化形式：

$$S = \begin{pmatrix} {\varepsilon_1}' & 0 & 0 \\ 0 & {\varepsilon_2}' & 0 \\ 0 & 0 & {\varepsilon_3}' \end{pmatrix}$$

其中，${\varepsilon_i}'$是主轴方向的线变形率。这意味着，在主轴坐标系下，流体微团的变形只有线变形，不存在角变形，此时变形二次曲面也简化为标准的椭球面方程：

$${\varepsilon_1}'\delta{x_1}'^2 + {\varepsilon_2}'\delta{x_2}'^2 + {\varepsilon_3}'\delta{x_3}'^2 = 1$$

主轴坐标系的存在为分析流体微团的变形提供了极大的便利，我们可以通过将坐标系转换到主轴坐标系，从而更清晰地研究流体的变形特性。

3. **三个基本不变量**

二阶对称张量具有三个基本不变量，即无论坐标系如何变换，这三个量的值始终保持不变。对于变形速度张量S，其三个基本不变量分别为：

- 第一不变量I_1：

$$I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = {\varepsilon_1}' + {\varepsilon_2}' + {\varepsilon_3}' = tr(S) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = div\vec{V}$$

其中，$tr(S)$表示张量S的迹，即对角线元素之和；$div\vec{V}$是速度矢量$\vec{V}$的散度。

- 第二不变量I_2：

$$I_2 = \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 - \frac{1}{4}(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)$$

- 第三不变量I_3：

$$I_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \frac{1}{4}\theta_1\theta_2\theta_3 - \frac{1}{4}(\theta_1^2\varepsilon_1 + \theta_2^2\varepsilon_2 + \theta_3^2\varepsilon_3)$$

2.3.4 第一不变量I_1的物理意义

第一不变量$I_1 = div\vec{V}$具有明确的物理意义，它表示流体微团的体积相对膨胀量（体积变化率）。 在主轴坐标系$OXYZ$中，考虑一个流体微团，在t时刻，该微团的形状为边长分别为δx、δy、δz的长方体，其体积为$V = \delta x\delta y\delta z$。 经过时间$\delta t$后，由于流体的线变形，微团在三个主轴方向上的边长分别变为：

$$\delta x' = \delta x + {\varepsilon_1}'\delta x\delta t = \delta x(1 + {\varepsilon_1}'\delta t)$$

$$\delta y' = \delta y + {\varepsilon_2}'\delta y\delta t = \delta y(1 + {\varepsilon_2}'\delta t)$$

$$\delta z' = \delta z + {\varepsilon_3}'\delta z\delta t = \delta z(1 + {\varepsilon_3}'\delta t)$$

此时微团的体积变为：

$$V' = \delta x'\delta y'\delta z' = \delta x\delta y\delta z(1 + {\varepsilon_1}'\delta t)(1 + {\varepsilon_2}'\delta t)(1 + {\varepsilon_3}'\delta t)$$

忽略高阶小量（δt的二次及以上项），展开可得：

$$V' \approx \delta x\delta y\delta z[1 + ({\varepsilon_1}' + {\varepsilon_2}' + {\varepsilon_3}')\delta t]$$

则体积的变化量

$$\Delta V = V' - V \approx ({\varepsilon_1}' + {\varepsilon_2}' + {\varepsilon_3}')\delta x\delta y\delta z\delta t$$

体积相对膨胀量（体积变化率）为：

$$\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\delta t} \approx \frac{({\varepsilon_1}' + {\varepsilon_2}' + {\varepsilon_3}')\delta x\delta y\delta z\delta t}{\delta x\delta y\delta z\delta t} = {\varepsilon_1}' + {\varepsilon_2}' + {\varepsilon_3}'$$

由第一不变量的定义可知，

$${\varepsilon_1}' + {\varepsilon_2}' + {\varepsilon_3}' = I_1 = div\vec{V},$$

因此：

$$\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\delta t} = div\vec{V} = I_1$$

当$div\vec{V} > 0$时，流体微团的体积随时间增大，发生膨胀；当$div\vec{V} < 0$时，体积随时间减小，发生压缩；当$div\vec{V} = 0$时，体积保持不变，这种流体运动称为不可压缩流动。

2.4 应力张量

2.4.1 流体受力的分类

流体在运动过程中会受到各种力的作用，根据力的作用方式和性质，可对流体受力进行分类：

1. **按物理性质分类**
   - 重力：由地球引力引起的力，作用于流体的每一个质点，方向竖直向下。
   - 摩擦力：流体内部或流体与固体壁面之间由于相对运动而产生的力，如牛顿内摩擦力。
   - 惯性力：当流体做非惯性运动时，为了在非惯性坐标系中应用牛顿运动定律而引入的虚拟力。
2. **按作用方式分类**
   - 质量力：外力场作用于流体微团质量中心，大小与微团质量成正比的非接触力，如重力和惯性力。
   - 表面力：相邻流体或物体作用于所研究流体团块外表面，大小与流体团块表面积成正比的接触力，如大气压力、流体内部的压力等。

2.4.2 质量力

1. **定义与特点**

质量力是指作用于隔离体内每一流体质点上的力，其大小与流体的质量成正比。对于均质流体（各点密度相同），质量力与流体体积成正比，因此质量力又称为体积力或彻体力。质量力的单位是牛顿（N）。

2. **单位质量力**

为了更方便地描述质量力的强度，引入单位质量力的概念。单位质量力是指单位质量流体所受到的质量力，其单位与重力加速度的单位相同，为m/s^2。 设隔离

体内某一流体质点的质量为Δm，所受到的质量力为$\Delta\vec{F}$，则单位质量力$\vec{R}$的数学表达式为：

$$\vec{R}=\lim_{\Delta m\to 0}\frac{\Delta\vec{F}}{\Delta m}|_{对固定点}=\lim_{\Delta m\to 0}\left(\frac{\Delta F_x}{\Delta m}\vec{\imath}+\frac{\Delta F_y}{\Delta m}\vec{\jmath}+\frac{\Delta F_z}{\Delta m}\vec{k}\right)|_{对固定点}=X\vec{\imath}+Y\vec{\jmath}+Z\vec{k}$$

其中，X、Y、Z分别是单位质量力在x、y、z方向上的分量，$\vec{\imath}$、$\vec{\jmath}$、$\vec{k}$是三个坐标轴方向的单位矢量。

3. **常见质量力的表达式**

- 重力：在重力场中，单位质量力的大小等于重力加速度g，方向竖直向下（若取z轴竖直向上，则重力方向与z轴相反），因此单位质量力的表达式为$\vec{R}=-g\vec{k}$。
- 惯性力：当流体做加速度为$\vec{a}$的非惯性运动时，单位质量流体所受到的惯性力为$\vec{R}=-\vec{a}$，负号表示惯性力的方向与加速度的方向相反。

2.4.3 表面力与表面应力

1. **表面力的定义**

表面力是指作用在流体隔离体表面上的力，它是由相邻流体或固体与所研究流体之间的相互作用产生的。表面力的作用点在所截取的流体隔离体的表面上。

2. **表面力的分解**

在流体隔离体的表面上取一微小面积ΔA，作用在该微小面积上的表面力为$\Delta\vec{F}$。将$\Delta\vec{F}$分解为两个分量：

- 法向分量ΔF_n：沿微小面积ΔA的法线方向，称为法向表面力，它与流体的压力有关。
- 切向分量ΔF_t：沿微小面积ΔA的切线方向，称为切向表面力，它与流体的粘性有关。 根据力的分解关系，有$\Delta F^2=\Delta F_n^2+\Delta F_t^2$。

3. **表面应力**

为了描述表面力的强度，引入表面应力的概念。表面应力是指单位面积上所受到的表面力，单位为帕斯卡（Pa）。

- 法向表面应力（正应力）：单位面积上的法向表面力，用p表示，其表达式为$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A}$。正应力通常表现为压力，当流体静止时，正应力在各个方向上的大小相等，即静压力。
- 切向表面应力（切应力）：单位面积上的切向表面力，用τ表示，其表达式为$\tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A}$。切应力只有在流体运动时才会产生，是流体粘性的体现。

表面应力的矢量形式可以表示为$\vec{\sigma} = p\vec{n} + \tau\vec{t}$，其中$\vec{n}$是微小面积$\Delta A$的单位法向量（指向流体外部），$\vec{t}$是单位切向量。

2.4.4 牛顿内摩擦定律

牛顿内摩擦定律描述了流体粘性引起的切应力与流体速度梯度之间的关系，是研究流体粘性流动的重要基础。

1. **实验背景（牛顿平板试验）**

考虑两无限大平行平板之间充满静止的液体，下板固定，上板在恒定外力作用下以速度U沿x方向做匀速运动。实验观察到以下现象：

- 紧贴上下壁面的流体与平板相对静止，即紧贴下板的流体速度为 0，紧贴上板的流体速度为U。
- 两板之间的流体，由于粘性作用，速度从下板的 0 逐渐变化到上板的U，形成连续的速度分布$u(y)$，其中y是垂直于平板的坐标。

2. **粘性与粘性力**

- 粘性：流体所具有的抵抗两层流体相对滑动速度（或抵抗剪切变形）的性质，称为粘性。粘性是流体的固有属性，无论是液体还是气体都具有粘性。
- 粘性力：由于流体的粘性，相邻两层流体之间会产生相互作用力，阻碍它们的相对运动，这种力称为粘性力（或内摩擦力）。 粘性产生的物理原因主要有两个方面：
- 分子间的作用力：当流体层发生相对运动时，分子间的引力和斥力会产生阻碍相对运动的力。

- 分子热运动：分子的无规则热运动导致不同速度流体层之间的分子交换，从而产生动量传递，宏观上表现为粘性力。

3. **牛顿内摩擦定律的表达式**

通过牛顿平板试验，牛顿提出了内摩擦定律：流体相对运动时引起的摩擦力F与流体的粘性系数μ、流体的速度梯度$\frac{du}{dy}$以及接触面积A成正比，即：

$$F = \mu \frac{du}{dy} A$$

将上式两边除以接触面积A，得到切应力的表达式：

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

其中：

- τ：流体的切应力，单位为 Pa。
- μ：流体的粘性系数（也称为动力粘度），单位为$N \cdot s/m^2$（或 Pa·s）。粘性系数的大小与流体的种类、温度和压力有关，通常液体的粘性系数随温度升高而减小，气体的粘性系数随温度升高而增大。
- $\frac{du}{dy}$：流体沿垂直于运动方向的速度梯度，它反映了流体速度在空间中的变化率，是流体剪切变形的度量。

4. **牛顿流体与非牛顿流体**

根据流体的切应力与速度梯度之间的关系，可将流体分为牛顿流体和非牛顿流体：

- 牛顿流体：凡是切应力与速度梯度符合牛顿内摩擦定律（即τ与$\frac{du}{dy}$成正比）的流体，称为牛顿流体，如大多数常见的液体（水、酒精等）和气体（空气、氧气等）。
- 非牛顿流体：切应力与速度梯度不符合牛顿内摩擦定律的流体，称为非牛顿流体，如血液、泥浆、高分子聚合物溶液等。非牛顿流体的切应力与速度梯度之间的关系较为复杂，通常需要用更复杂的本构方程来描述。

2.4.5 应力张量的建立

为了全面描述流场中任意一点的应力状态，需要引入应力张量的概念。

1. **应力状态的描述**

在流场中任意取一点O，过O点作直角坐标系$Oxyz$，在O点附近取一流体微团，考虑微团表面上的应力。由于流体微团的表面具有不同的方向，不同方向表面上的应力也不同。 为了确定O点的应力状态，我们分析三个分别垂直于x、y、z轴的平面上的应力。设垂直于x轴的平面上的应力矢量为$\vec{p}_x$，垂直于y轴的平面上的应力矢量为$\vec{p}_y$，垂直于z轴的平面上的应力矢量为$\vec{p}_z$。 每个应力矢量都可以分解为三个坐标轴方向的分量，例如，$\vec{p}_x$可以分解为p_{xx}（x方向分量）、p_{xy}（y方向分量）、p_{xz}（z方向分量），其中第一个下标表示应力作用面的法线方向，第二个下标表示应力的方向。

2. **任意方向表面上的应力**

考虑过O点的任意方向的表面，设该表面的单位法向量为$\vec{n}$，其方向余弦为

$$\alpha = \cos(\vec{n}, \vec{i})$$

$$\beta = \cos(\vec{n}, \vec{j})$$

$$\gamma = \cos(\vec{n}, \vec{k})$$

在流体中取一个以该任意表面和三个坐标平面为界面的微小四面体流体微团，设任意表面的面积为dS，则三个坐标平面上的面积分别为

$$dS_x = \alpha dS$$

$$dS_y = \beta dS$$

$$dS_z = \gamma dS$$

由于流体微团非常小，体积力与表面力相比可以忽略不计（体积力与微团体积成正比，是三阶小量；表面力与微团表面积成正比，是二阶小量），根据流体微团的受力平衡，有：

$$\vec{p}_n dS + \vec{p}_{x}\text{-} dS_x + \vec{p}_{y}\text{-} dS_y + \vec{p}_{z}\text{-} dS_z = 0$$

其中，$\vec{p}_n$是任意方向表面上的应力矢量，$\vec{p}_x$-、$\vec{p}_y$-、$\vec{p}_z$-分别是三个坐标平面内侧（指向O点）的应力矢量。 由于应力的作用是相互的

$$\vec{p}_{x^-} = -\vec{p}_x$$

$$\vec{p}_{y^-} = -\vec{p}_y$$

$$\vec{p}_{z^-} = -\vec{p}_z$$

代入上式可得：

$$\vec{p}_n = \vec{p}_x\alpha + \vec{p}_y\beta + \vec{p}_z\gamma$$

这表明，流场中任意一点任意方向表面上的应力矢量$\vec{p}_n$都可以由三个坐标平面上的应力矢量$\vec{p}_x$、$\vec{p}_y$、$\vec{p}_z$线性表示。

3. **应力张量的定义**

将三个坐标平面上的应力分量按一定顺序排列，构成一个二阶张量，称为应力张量，用P表示，其表达式为：

$$P = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}$$

应力张量P是一个二阶张量，它完全描述了流场中任意一点的应力状态。任意方向表面上的应力矢量$\vec{p}_n$可以用应力张量与单位法向量的点积表示，即$\vec{p}_n = \vec{n} \cdot P$。

2.4.6 应力张量的对称性

通过分析流体微团的力矩平衡，可以证明应力张量是对称张量，即$p_{ij} = p_{ji}$（$i \neq j$）。考虑流体微团绕某一轴的力矩平衡，例如绕z轴的力矩平衡。取一个微小的平行六面体流体微团，边长分别为dx、dy、dz，分析作用在微团表面上的切应力对z轴的力矩。 作用在x方向前后两个表面上的切应力p_{xy}和$p_{xy} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x}dx$产生的力矩为：

$$\left(p_{xy} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x}dx\right)dydz \cdot \frac{dx}{2} - p_{xy}dydz \cdot \frac{dx}{2} \approx \frac{1}{2}\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}dx^2dydz$$

作用在y方向左右两个表面上的切应力p_{yx}和$p_{yx} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y}dy$产生的力矩为：

$$-\left(p_{yx} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y}dy\right)dxdz \cdot \frac{dy}{2} + p_{yx}dxdz \cdot \frac{dy}{2} \approx -\frac{1}{2}\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}dxdy^2dz$$

由于流体微团做平动和转动，惯性力矩与上述力矩相比是高阶小量，可以忽略不计。根据力矩平衡，总力矩为零，即：

$$\frac{1}{2}\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}dx^2dydz-\frac{1}{2}\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}dxdy^2dz=0$$

当dx、dy、dz趋近于 0 时，可得$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}=\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}$。但由于所取的流体微团是任意的，且流场是连续的，因此

$$p_{xy}=p_{yx}$$

同理，可以证明

$$p_{xz}=p_{zx}$$

$$p_{yz}=p_{zy}$$

因此，应力张量P是对称张量，其独立分量只有 6 个。

2.4.7 应力张量的性质

作为二阶对称张量，应力张量P具有二阶对称张量的基本性质：

1. **几何表示（应力二次曲面）**

应力张量P可以通过应力二次曲面来几何表示，其应力二次曲面方程为：$\vec{r}\cdot(P\cdot\vec{r})=1$ 通过应力二次曲面，可以直观地了解流场中不同方向上的应力大小和方向。

2. **主轴坐标系下的标准形式**

与变形速度张量类似，应力张量也存在三个相互垂直的主轴。在主轴坐标系中，应力张量的非对角线分量为零，只有对角线分量（称为主应力），其标准形式为：

$$P=\begin{pmatrix} {p_{11}}' & 0 & 0 \\ 0 & {p_{22}}' & 0 \\ 0 & 0 & {p_{33}}' \end{pmatrix}$$

其中，${p_{11}}'$、${p_{22}}'$、${p_{33}}'$是三个主应力。在主轴坐标系中，流体微团表面上只存在正应力，不存在切应力。

3. **三个基本不变量**

应力张量同样具有三个基本不变量，它们不随坐标系的变换而变化，分别为：

- 第一不变量：

$$I_1{}' = p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = p_{11}{}' + p_{22}{}' + p_{33}{}'$$

- 第二不变量：

$$I_2{}' = p_{yy}p_{zz} + p_{zz}p_{xx} + p_{xx}p_{yy} - p_{xy}^2 - p_{yz}^2 - p_{zx}^2$$

- 第三不变量：

$$I_3{}' = p_{xx}p_{yy}p_{zz} + 2p_{xy}p_{yz}p_{zx} - p_{xx}p_{yz}^2 - p_{yy}p_{zx}^2 - p_{zz}p_{xy}^2$$

2.4.8 广义牛顿定律

广义牛顿定律建立了应力张量与变形速度张量之间的关系，是粘性流体力学的核心本构方程。

1. **基本假设**

广义牛顿定律基于以下几个基本假设：

- 流体是各向同性的，即流体的粘性性质在各个方向上相同。
- 应力张量与变形速度张量之间是线性关系。
- 当流体静止时（变形速度张量为零），应力张量退化为静压力张量，即只有正应力，且各方向正应力相等（静压力p）。

2. **广义牛顿定律的表达式**

根据上述假设，结合应力张量的对称性和变形速度张量的对称性，广义牛顿定律的表达式为：

$$P = -pI + 2\mu\left(S - \frac{1}{3}Idiv\vec{V}\right)$$

其中：

- I是单位张量

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $-pI$是静压力部分，表示流体静止时的应力状态，p是流体的静压力。

- $2\mu S$是粘性引起的应力部分，与变形速度张量S成正比，μ是流体的粘性系数。
- $-\frac{2}{3}\mu I div\vec{V}$是由于流体体积膨胀或压缩而产生的粘性应力修正项，称为体积粘性项（或第二粘性项），$\frac{2}{3}\mu$称为体积粘性系数（或第二粘性系数）。对于不可压缩流体，$div\vec{V}=0$，该项消失。

3. **应力分量的表达式**

将广义牛顿定律的表达式展开，可以得到各个应力分量的具体表达式：

- 正应力分量：

$$p_{xx}=-p+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu div\vec{V}$$

$$p_{yy}=-p+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu div\vec{V}$$

$$p_{zz}=-p+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\mu div\vec{V}$$

- 切应力分量：

$$p_{xy}=p_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$p_{xz}=p_{zx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$p_{yz}=p_{zy}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

其中，u、v、w分别是流体速度在x、y、z方向的分量，

$$div\vec{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

4. **静止流体或理想流体的应力状态**

对于静止流体，流体的速度梯度为零，变形速度张量$S=0$，因此应力分量的表达式简化为：

$$p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=-p$$

$$p_{xy}=p_{xz}=p_{yz}=0$$

这表明，静止流体中只有正应力（静压力），且各方向的静压力相等，没有切应力。 对于理想流体（忽略粘性的流体），粘性系数$\mu=0$，应力分量的表达式同样

简化为上述静止流体的情况，即理想流体中也只有静压力，没有粘性引起的切应力和附加正应力。

2.5 雷诺输运定理

2.5.1 体系与控制体

在流体力学中，为了应用物理守恒定律（如质量守恒、动量守恒、能量守恒），需要明确研究的对象，引入了体系和控制体的概念。

1. **体系（闭口系）**
   - 定义：体系是指确定的物质集合，即由大量流体质点组成的流体团块。在研究过程中，体系的质量保持不变，体系内的流体质点也不会与外界发生交换。
   - 边界特性：体系的边界是随着流体的运动而运动的，体系与外界之间可以进行力的作用和能量的交换，但没有质量的交换。
   - 适用方法：体系的概念适用于拉格朗日法，拉格朗日法通过追踪体系内每个流体质点的运动，来描述整个流体的运动规律。
2. **控制体（开口系）**
   - 定义：控制体是指固定在空间中的一个确定体积，它是我们进行流体力学分析时所选取的特定空间区域。
   - 边界特性：控制体的边界称为控制面，控制面是固定不动的（也可以是运动的或变形的，但在基础流体力学中通常考虑固定控制体）。流体可以通过控制面流入或流出控制体，控制体与外界之间可以进行力的作用、能量的交换和质量的交换。
   - 适用方法：控制体的概念适用于欧拉法，欧拉法通过描述控制体内不同空间点上流体的运动参数随时间的变化，来研究流体的运动规律。

体系和控制体是两个不同的研究对象，但它们之间存在密切的联系。雷诺输运定理就是建立了体系的物理量随时间的变化率与控制体相关物理量之间的关系，从而将基于体系的物理守恒定律转化为基于控制体的表达式，便于在欧拉法中应用。

2.5.2 随流物理量与单位质量物理量

设N代表流体体系所具有的某种随流物理量，如质量m、动量$m\vec{V}$、能量E等。为了描述该物理量在流体中的分布，引入单位质量流体所具有的该物理量，用符号σ表示，即：

$$\sigma = \frac{dN}{dm}$$

其中，dm是体系内某一流体质点的质量，dN是该质点所具有的物理量N。 根据N的不同，σ的表达式也不同：

- 当$N = m$（质量）时，$\sigma = 1$（单位质量的质量为 1）。
- 当$N = m\vec{V}$（动量）时，$\sigma = \vec{V}$（单位质量的动量等于速度）。
- 当$N = E$（能量）时，$\sigma = \frac{1}{2}V^2 + u$（单位质量的能量等于单位质量的动能$\frac{1}{2}V^2$与单位质量的内能$u$之和）。

2.5.3 雷诺输运定理的推导

雷诺输运定理的核心是建立体系物理量的随流导数与控制体物理量变化率之间的关系。

1. **随流导数的定义**

体系物理量N的随流导数（也称为物质导数）$\frac{DN_s}{Dt}$表示体系所具有的物理量N随时间的变化率，其中下标s表示体系。

2. **控制体物理量的组成**

考虑时刻t，体系与控制体重合，此时体系的物理量$N_s(t)$等于控制体内流体的物理量$N_{CV}(t)$。 到时刻$t + \delta t$，体系由于运动而离开原来的位置，此时体系的物理量$N_s(t + \delta t)$可以分为两部分：

- 一部分是时刻$t + \delta t$仍留在控制体内的流体所具有的物理量$N_2(t + \delta t)$。
- 另一部分是在δt时间内流出控制体的流体所具有的物理量$N_3(t + \delta t)$。
  而时刻t控制体内的流体物理量$N_{CV}(t)$也可以分为两部分：
- 一部分是时刻$t + \delta t$仍留在控制体内的流体所具有的物理量$N_2(t)$。
- 另一部分是在δt时间内流入控制体的流体所具有的物理量$N_1(t)$。

3. **随流导数的展开**

根据随流导数的定义：

$$\frac{DN_s}{Dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{N_s(t+\delta t) - N_s(t)}{\delta t}$$
$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{[N_2(t+\delta t) + N_3(t+\delta t)] - [N_1(t) + N_2(t)]}{\delta t}$$

为了将上式与控制体的物理量联系起来，对分子进行变形：

$$[N_2(t+\delta t) + N_3(t+\delta t)] - [N_1(t) + N_2(t)]$$
$$= [N_2(t+\delta t) - N_2(t)] + [N_3(t+\delta t) - N_1(t)]$$

当δt趋近于 0 时，

$$N_1(t+\delta t) \approx N_1(t)$$

$$N_3(t+\delta t) - N_1(t) \approx N_3(t+\delta t) - N_1(t+\delta t)$$

而

$$N_3(t+\delta t) - N_1(t+\delta t)$$

表示在δt时间内通过控制面的净流出物理量。

4. **控制体物理量的变化率与净流出率**

控制体内物理量的变化率：

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{N_2(t+\delta t) - N_2(t)}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \sigma \, \rho d\tau$$

其中ρ是流体密度，$d\tau$是控制体内的体积微元，该积分表示控制体内流体物理量的总量随时间的变化率。

物理量通过控制面的净流出率：

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{N_3(t+\delta t) - N_1(t+\delta t)}{\delta t} = \oiint_{CS} \sigma \, \rho \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

其中$d\vec{S}$是控制面上的面积微元，$\vec{V}$是流体速度，$\vec{V}\cdot d\vec{S}$表示单位时间内通过面积微元$d\vec{S}$的流体体积，$\sigma\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}$表示单位时间内通过$d\vec{S}$的物理量$N$，该面积分表示单位时间内通过控制面的净流出物理量。

5. **雷诺输运定理的表达式**

综合以上分析，雷诺输运定理的表达式为

$$\frac{DN_s}{Dt}=\iiint_{CV}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma\rho)d\tau+\oiint_{CS}\sigma\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}$$

该式的物理意义是：某瞬间控制体内的流体所构成的体系，它所具有的物理量的随流导数，等于同一瞬间控制体中所含同一随流物理量的增加率（右端第一项，体积分）与该物理量通过控制面的净流出率（右端第二项，面积分）之和。

2.5.4 雷诺输运定理的应用

雷诺输运定理是连接拉格朗日法和欧拉法的桥梁，它将基于体系的物理守恒定律转化为基于控制体的表达式，是推导流体力学控制方程（连续方程、动量方程、能量方程）的重要工具。 例如，对于质量守恒定律，体系的质量是恒定的，即

$$\frac{DN_s}{Dt}=\frac{Dm}{Dt}=0$$

将$\sigma=1$代入雷诺输运定理，即可得到质量守恒方程（连续方程）的积分形式；对于动量守恒定律，体系的动量变化率等于作用在体系上的外力合力，结合雷诺输运定理可得到动量方程的积分形式；同理，利用能量守恒定律和雷诺输运定理可得到能量方程的积分形式。

三、流体力学控制方程

3.1 连续方程（质量守恒方程）

3.1.1 积分形式的连续方程

根据质量守恒定律，流体体系在运动过程中，其质量始终保持不变，即体系质量的随流导数为零：

$$\frac{DN_s}{Dt}=\frac{Dm}{Dt}=0$$

在雷诺输运定理中，取$N = m$（体系质量），$\sigma = 1$（单位质量的质量），代入雷诺输运定理的表达式：

$$\frac{DN_s}{Dt} = \iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\sigma\rho)d\tau \oiint_{CS} \sigma\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}$$

由于$\sigma = 1$，且$\frac{DN_s}{Dt} = 0$，可得积分形式的连续方程：

$$\iiint_{CV} \frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau + \oiint_{CS} \rho\,\vec{V}\cdot d\vec{S} = 0$$

物理意义：

控制体内质量的增加率等于通过控制面的质量流入率。具体来说，右端第一项$\iiint_{CV} \frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau$表示控制体内流体质量随时间的变化率，若该项为正，说明控制体内的质量在增加；若为负，说明质量在减少。右端第二项$\oiint_{CS} \rho\,\vec{V}\cdot d\vec{S}$表示单位时间内通过控制面的净流出质量，当$\vec{V}$与$d\vec{S}$的夹角小于 90°时，$\vec{V}\cdot d\vec{S}$为正，对应流体流出控制体；当夹角大于 90°时，$\vec{V}\cdot d\vec{S}$为负，对应流体流入控制体。因此，积分形式的连续方程表明，控制体内质量的变化是由流体通过控制面的流入或流出引起的。

3.1.2 微分形式的连续方程

为了得到微分形式的连续方程，需要将积分形式的连续方程中的面积分转换为体积分，这可以通过奥-高定理（高斯定理）来实现。 奥-高定理指出，对于任意矢量场$\vec{A}$，有：

$$\oiint_{CS} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_{CV} d\,iv\vec{A}d\tau$$

在积分形式的连续方程中，令$\vec{A} = \rho\vec{V}$，则：

$$\oiint_{CS} \rho\,\vec{V}\cdot d\vec{S} = \iiint_{CV} d\,iv\left(\rho\vec{V}\right)d\tau$$

将其代入积分形式的连续方程：

$$\iiint_{CV} \frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau + \iiint_{CV} d\,iv\left(\rho\vec{V}\right)d\tau = 0$$

由于该式对任意控制体CV都成立，且被积函数是连续的（根据连续介质假说），因此被积函数本身必须为零，即：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{V}) = 0$$

或写成梯度算子形式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

这就是微分形式的连续方程，也称为质量守恒方程。

展开形式：

在笛卡尔坐标系中，速度

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

散度

$$div(\rho \vec{V}) = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$$

因此微分形式的连续方程可以展开为：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

特殊情况：

1. 不可压缩流体：

对于不可压缩流体，流体的密度ρ为常数，不随时间和空间变化，即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

且

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

此时微分形式的连续方程简化为

$$div\vec{V} = 0$$

或展开为：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

这表明，不可压缩流体的速度散度为零，流体的体积膨胀率为零。

2. 定常流动：

对于定常流动，流体的所有物理量（包括密度ρ）都不随时间变化，即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

此时微分形式的连续方程简化为

$$div(\rho\vec{V}) = 0$$

或展开为：

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

这表明，在定常流动中，通过任意控制面的质量流量是恒定的，即质量守恒表现为空间上的质量通量守恒。

3.2 动量方程（动量守恒方程）

3.2.1 积分形式的动量方程

根据牛顿第二定律，流体体系的动量变化率等于作用在体系上的外力合力，即：

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{\tau_s}\rho\,\vec{V}d\tau = \sum\vec{F}$$

其中，τ_s是体系的体积，$\rho\vec{V}$是单位体积流体的动量，$\iiint_{\tau_s}\rho\,\vec{V}d\tau$是体系的总动量，$\sum\vec{F}$是作用在体系上的外力合力。

利用雷诺输运定理，将体系动量的随流导数转换为控制体的相关积分。在雷诺输运定理中，取$N = m\vec{V}$（体系动量），$\sigma = \vec{V}$（单位质量的动量），则：

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{\tau_s}\rho\,\vec{V}d\tau=\iiint_{CV}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V})d\tau+\oiint_{CS}(\rho\vec{V})\,(\vec{V}\cdot d\vec{S})$$

其中，右端第一项是控制体内流体动量随时间的变化率，称为局部动量变化率；右端第二项是单位时间内通过控制面流出的动量与流入的动量之差，称为对流动量变化率（或动量通量）。

作用在流体上的外力包括质量力和表面力：

1. **质量力**：

作用在控制体内所有流体质点上的非接触力，用$\vec{F}_b$表示。单位质量力为$\vec{R}$，则控制体内流体所受到的总质量力为：

$$\vec{F}_b=\iiint_{CV}\rho\,\vec{R}d\tau$$

其中，ρ为流体密度，$d\tau$为控制体内的体积微元，$\vec{R}=X\vec{\imath}+Y\vec{\jmath}+Z\vec{k}$（$X,Y,Z$分别为单位质量力在$x,y,z$方向的分量）。

2. **表面力**：

作用在控制体表面（控制面）上的接触力，用$\vec{F}_s$表示。根据应力张量的定义，控制面上的表面力可通过应力张量与面积微元的点积积分得到

$$\vec{F}_s=\oiint_{CS}P\cdot d\vec{S}$$

其中，P为应力张量，$d\vec{S}$为控制面上的面积微元（方向沿控制面外法线）。

结合牛顿第二定律与雷诺输运定理，积分形式的动量方程为：

$$\iiint_{CV}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V})d\tau+\oiint_{CS}(\rho\vec{V})\,(\vec{V}\cdot d\vec{S})=\iiint_{CV}\rho\,\vec{R}d\tau+\oiint_{CS}P\cdot d\vec{S}$$

物理意义：

方程左端表示控制体内流体动量的总变化率（局部变化率+对流动化率），右端表示作用在控制体内流体上的外力合力（质量力+表面力）。该方程表明，控制体内流体动量的变化是由外力作用引起的，符合牛顿第二定律的基本思想。

3.2.2 微分形式的动量方程

为推导微分形式的动量方程，需将积分形式中的面积分转换为体积分，借助张量奥-高定理：

1. 对流动量通量项的转换：

$$\oiint_{CS}(\rho\vec{V})\left(\vec{V}\cdot d\vec{S}\right)=\iiint_{CV}d\,iv\left(\rho\vec{V}\vec{V}\right)d\tau$$

其中$\rho\vec{V}\vec{V}$为动量通量张量（二阶张量）。

2. 表面力项的转换

$$\oiint_{CS}P\cdot d\vec{S}=\iiint_{CV}d\,ivPd\tau$$

其中$divP$为应力张量的散度（矢量）。

将上述转换代入积分形式的动量方程，由于方程对任意控制体成立，被积函数必须相等，因此微分形式的动量方程为：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\vec{V}\right)+div\left(\rho\vec{V}\vec{V}\right)=\rho\vec{R}+divP$$

笛卡尔坐标系下的分量形式：

在笛卡尔坐标系中，速度$\vec{V}=u\vec{\imath}+v\vec{\jmath}+w\vec{k}$（$u,v,w$分别为$x,y,z$方向速度分量），应力张量$P$的分量为$p_{ij}$（$i,j=1,2,3$对应$x,y,z$方向），则$x$方向动量方程分量为：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho uv)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho uw)=\rho X+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{xz}}{\partial z}$$

同理，y方向和z方向分量分别为：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho vu)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vv)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho vw)=\rho Y+\frac{\partial p_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho wu)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho wv)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho ww)=\rho Z+\frac{\partial p_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}$$

结合广义牛顿定律的简化：

根据广义牛顿定律，应力张量P与变形速度张量S的关系为

$$P = -pI + 2\mu\left(S - \frac{1}{3}Idiv\vec{V}\right)$$

p为静压力，μ为粘性系数，I为单位张量。将其代入动量方程的散度项$divP$，可进一步得到粘性流体动量方程的具体形式，即纳维-斯托克斯（N-S）方程的动量部分。

3.3 能量方程（能量守恒方程）

3.3.1 积分形式的能量方程

能量守恒定律的核心是：单位时间内外界传给体系的热量，等于体系总能量的增加率与体系对外界做功功率之和，用功率形式表述为：$\dot{Q} = \frac{DE}{Dt} + \dot{W}$ 其中，$\dot{Q}$为外界对流体的换热功率，$\frac{DE}{Dt}$为体系总能量的随流导数，$\dot{W}$为流体对外界的做功功率。

1. **换热功率$\dot{Q}$：**

包括传导换热和非传导换热（如辐射、化学反应生热等）：

$$\dot{Q} = \oiint_{CS} k\, gradT \cdot d\vec{S} + \iiint_{CV} \rho\, q d\tau$$

其中，k为流体导热系数，T为温度，$gradT$为温度梯度（传导换热项）；q为单位质量流体的非传导换热率（非传导换热项）。

2. **体系总能量的随流导数$\frac{DE}{Dt}$：**

体系总能量E包括动能$\frac{1}{2}mV^2$和内能mu（u为比内能），单位质量总能量$\sigma = \frac{1}{2}V^2 + u$。结合雷诺输运定理：

$$\frac{DE}{Dt} = \iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}V^2 + u\right)\right] d\tau + \oiint_{CS} \rho\left(\frac{1}{2}V^2 + u\right)\vec{V} \cdot d\vec{S}$$

其中，左端为体系总能量的变化率，右端分别为控制体内能量的局部变化率和通过控制面的能量通量（对流动化率）。

3. **流体对外做功功率$\dot{W}$：**

包括质量力做功和表面力做功，均为流体对外输出的功率，故取负号：

$$\dot{W} = -\iiint_{CV} \left(\rho\vec{R} \cdot \vec{V}\right) d\tau - \oiint_{CS} \left(P \cdot \vec{V}\right) \cdot d\vec{S}$$

其中，$\rho\vec{R} \cdot \vec{V}$为单位体积流体的质量力做功功率，$P \cdot \vec{V}$为应力张量与速度的点积（表面力做功的功率密度）。

将$\dot{Q}$、$\frac{DE}{Dt}$、$\dot{W}$代入能量守恒定律，整理得到积分形式的能量方程：

$$\iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}V^2 + u\right)\right] d\tau + \oiint_{CS} \rho\left(\frac{1}{2}V^2 + u\right)\vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint_{CV} \left(\rho\vec{R} \cdot \vec{V}\right) d\tau + \oiint_{CS} \left(P \cdot \vec{V}\right) \cdot d\vec{S} + \oiint_{CS} k\, gradT \cdot d\vec{S} + \iiint_{CV} \rho\, q d\tau$$

物理意义：

方程左端为控制体内流体总能量的变化率（局部变化率+对流动化率），右端为外界对流体的能量输入（质量力做功+表面力做功+换热）。该方程表明，控制体内流体能量的变化源于外界的能量输入，符合能量守恒定律。

3.3.2 微分形式的能量方程

利用奥-高定理将积分形式中的面积分转换为体积分：

1. 能量通量项：

$$\oiint_{CS} \rho\left(\frac{1}{2}V^2 + u\right)\vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint_{CV} d\,iv\left[\rho\left(\frac{1}{2}V^2 + u\right)\vec{V}\right] d\tau$$

2. 表面力做功项：

$$\oiint_{CS} \left(P \cdot \vec{V}\right) \cdot d\vec{S} = \iiint_{CV} d\,iv\left(P \cdot \vec{V}\right) d\tau$$

3. 传导换热项：

$$\oiint_{CS} k\, gradT \cdot d\vec{S} = \iiint_{CV} d\,iv(kgradT) d\tau$$

代入积分形式的能量方程，由于方程对任意控制体成立，被积函数相等，得到微分形式的能量方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}V^2 + u\right)\right] + div\left[\rho\left(\frac{1}{2}V^2 + u\right)\vec{V}\right] = \rho\vec{R} \cdot \vec{V} + div\left(P \cdot \vec{V}\right) + div(kgradT) + \rho q$$

简化形式：

通过连续性方程和动量方程对能量方程进行化简，可得到以不同能量形式（如内能、焓）为核心的简化方程。例如，对于理想流体（$\mu = 0$）或定常流动（$\frac{\partial}{\partial t} = 0$），方程可进一步简化，突出关键能量传递过程（如对流换热、粘性耗散等）。

3.4 纳维-斯托克斯（N-S）方程组

3.4.1 N-S 方程组的积分形式

将连续方程、动量方程、能量方程整合，结合广义牛顿定律（应力张量与变形速度张量的关系），可得到完整的 N-S 方程组积分形式：

1. **连续方程**：

$$\iiint_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \oiint_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0$$

2. **动量方程**：

$$\iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) d\tau + \oiint_{CS} (\rho \vec{V})(\vec{V} \cdot d\vec{S}) = \iiint_{CV} \rho \vec{R} d\tau + \oiint_{CS} \left[-pI + 2\mu \left(S - \frac{1}{3} I div\vec{V}\right)\right] \cdot d\vec{S}$$

3. **能量方程**：

$$\iiint_{CV} \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}V^2 + u\right)\right] d\tau + \oiint_{CS} \rho\left(\frac{1}{2}V^2 + u\right)\vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint_{CV} (\rho \vec{R} \cdot \vec{V}) d\tau + \oiint_{CS} (P \cdot \vec{V}) \cdot d\vec{S} + \oiint_{CS} k\, gradT \cdot d\vec{S} + \iiint_{CV} \rho\, q d\tau$$

其中，

$$P = -pI + 2\mu\left(S - \frac{1}{3} I div\vec{V}\right)$$

为广义牛顿定律下的应力张量，S为变形速度张量，$div\vec{V}$为速度散度。

3.4.2 N-S 方程组的微分形式

在笛卡尔坐标系下，结合连续方程、动量方程、能量方程的微分形式与广义牛顿定律，N-S 方程组的微分形式（张量实体形式）为：

1. **连续方程：**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{V}) = 0$$

2. **动量方程：**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + div(\rho \vec{V}\vec{V}) = \rho \vec{R} + div\left[-pI + 2\mu\left(S - \frac{1}{3}Idiv\vec{V}\right)\right]$$

3. **能量方程：**

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}V^2 + u\right)\right] + div\left[\rho\left(\frac{1}{2}V^2 + u\right)\vec{V}\right]$$
$$= \rho\vec{R}\cdot\vec{V} + div(P\cdot\vec{V}) + div(kgradT) + \rho q$$

笛卡尔坐标系分量形式（以x方向为例）：

- 连续方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

- 动量方程（x方向）：

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z}$$
$$= \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3}div\vec{V}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$$

- 能量方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)+u\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho\left(\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)+u\right)u\right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho\left(\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)+u\right)v\right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\rho\left(\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)+u\right)w\right]$$
$$= \rho(Xu + Yv + Zw) + \frac{\partial}{\partial x}(p_{xx}u + p_{xy}v + p_{xz}w)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}(p_{yx}u + p_{yy}v + p_{yz}w) + \frac{\partial}{\partial z}(p_{zx}u + p_{zy}v + p_{zz}w)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \rho q$$

N-S 方程组的意义：

N-S 方程组是描述粘性流体运动的核心方程组，涵盖了质量、动量、能量三大守恒定律，通过张量工具将流体的宏观运动与微观应力、变形特性结合，可用于解决航空航天、水利工程、能源动力等领域的流体运动问题（如管道流动、机翼绕流、燃烧室流场等）。

四、关键概念、公式与表总结

4.1 基本概念

表 4-1 关键概念

概念	定义与核心特征	关联章节
连续介质假说	将流体视为流体质点无间隙充满空间的连续介质，物理量为空间坐标和时间的连续函数，由 Euler 于 1753 年提出	2.1
流体质点	微观无穷大（含大量分子）、宏观充分小（近似几何点）的分子团，物理量统计平均后稳定	2.1
易流动性	流体静止时不能承受切向力，微小切向力持续作用会导致任意大变形，源于分子间作用力较弱	2.1
速度分解定理	流体微团运动可分解为平移、转动、变形，通过二阶张量分解实现（对称张量S+反对称张量A）	2.2
变形速度张量S	二阶对称张量，描述流体微团的线变形率（对角线分量）与剪切变形角速度（非对角线分量）	2.3
应力张量P	二阶对称张量，描述流场中任意点的应力状态，含正应力（对角线）与切应力（非对角线），满足广义牛顿定律	2.4
雷诺输运定理	建立体系物理量随流导数与控制体物理量变化率、净流出率的关系，是守恒方程推导的核心工具	2.5
控制体/体系	控制体为固定空间体积（欧拉法），体系为确定物质集合（拉格朗日法），二者通过雷诺输运定理关联	2.5

4.2 核心公式

表 4-2 核心公式

公式名称	表达式	物理意义	关联章节
流体密度定义	$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$	单位体积流体的质量，定义在流体质点上	2.1

公式名称	表达式	物理意义	关联章节
流体压强定义	$p=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta F_n}{\Delta A}$	单位面积流体的法向力，定义在流体质点上	2.1
速度分解张量	$D=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=A+S$（$A$反对称，$S$对称）	将速度梯度张量分解为旋转（A）与变形（S）部分，揭示流体微团运动特性	2.2
变形速度张量分量	$\varepsilon_i=\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$（线变形率）；$\gamma_i=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)$（剪切变形角速度）	描述流体微团的线变形与角变形速率	2.3
变形速度张量第一不变量	$I_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=div\vec{V}$	表示流体微团的体积变化率，$I_1>0$膨胀，$I_1<0$压缩，$I_1=0$不可压缩	2.3
牛顿内摩擦定律	$\tau=\mu\frac{du}{dy}$	切应力与速度梯度成正比，μ为粘性系数，描述流体粘性大小	2.4
广义牛顿定律	$P=-pI+2\mu\left(S-\frac{1}{3}Idiv\vec{V}\right)$	建立应力张量与变形速度张量的关系，含静压力与粘性应力贡献	2.4
雷诺输运定理	$\frac{DN_s}{Dt}=\iiint_{CV}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma\rho)d\tau+\oint\!\!\oint_{CS}\sigma\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}$	关联体系物理量变化率与控制体物理量变化，是守恒方程推导基础	2.5
连续方程（微分）	$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\vec{V})=0$	质量守恒的微分形式，不可压缩流体简化为$div\vec{V}=0$	3.1
动量方程（微分）	$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V})+div(\rho\vec{V}\vec{V})=\rho\vec{R}+divP$	动量守恒的微分形式，结合广义牛顿定律为N-S动量方程	3.2
能量方程（微分）	$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}V^2+u\right)\right]+div\left[\rho\left(\frac{1}{2}V^2+u\right)\vec{V}\right]=\rho\vec{R}\cdot\vec{V}+div(P\cdot\vec{V})+div(kgradT)+\rho q$	能量守恒的微分形式，涵盖动能、内能、换热与做功的能量传递	3.3

4.3 关键表

表 4-3 流体与固体受力变形对比

类型	受力特点	变形特点	示意图（简化）
固体	可承受压力、拉力、剪切力，外力平衡后变形稳定	剪切力不变时，变形量恒定（无持续变形）	固体方块受切向力→微小形变后静止，变形角ϕ恒定
流体	仅能承受压力，不能承受拉力、剪切力，剪切力作用下持续变形	微小剪切力持续作用→任意大变形（流动），变形角ϕ随时间增大	流体受切向力→持续流动，变形角ϕ随时间递增

表 4-4 物质三态分子排列与力学特征

状态	分子间距	分子力与位置特征	压缩性	形状	受力能力	分子排列示意图（简化）
固体	约分子直径	引力斥力平衡，束缚于晶格结构	很难	固定形状	压力、拉力、剪切力	分子规则排列，形成晶格，间距均匀
液体	约分子直径	引力斥力平衡，平衡位置可动	难压缩	受容器限制	仅压力	分子无规则排列，间距接近，可自由移动
气体	10 倍分子直径	引力斥力极弱，无平衡位置	易压缩	受容器限制	仅压力	分子稀疏分布，无规则运动，间距大

表 4-5 流体微团运动分解（亥姆赫兹定理）

运动形式	速度分量表达式	物理效果	示意图（简化）
平移	$\vec{V}_0$（M_0点速度）	流体微团整体移动，无变形、无旋转	微团从位置M_0平移至M_1，形状、方向不变
转动	$\vec{\omega} \times \delta\vec{r}$（$\vec{\omega}$为旋转角速度）	流体微团绕M_0点旋转，无变形	微团绕轴旋转θ角，形状不变，方向改变
变形	$S \cdot \delta\vec{r}$（S为变形速度张量）	流体微团发生线变形（拉伸/压缩）与角变形（形状改变）	微团线变形→边长变化，角变形→夹角变化，形状改变

运动形式	速度分量表达式	物理效果	示意图（简化）
总运动	$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \delta\vec{r} + S \cdot \delta\vec{r}$	平移+转动+变形的叠加，完整描述流体微团运动	微团先平移、再旋转、最后变形，形成最终运动状态

五、应用与拓展思考

5.1 工程应用场景

1. **航空航天领域**：N-S 方程组可用于计算飞机机翼绕流场、火箭发动机喷管内气流运动，通过分析速度、压力分布，优化机翼形状与喷管设计，提升飞行效率与推力。
2. **水利工程领域**：连续方程与动量方程可用于计算河道水流速度、堤坝受力，结合能量方程分析水流的势能-动能转换，指导水利枢纽（如水电站）的设计。
3. **能源动力领域**：能量方程与 N-S 方程组可用于燃烧室流场模拟，分析燃料燃烧过程中的能量传递与流体运动，优化燃烧效率，减少污染物排放。

5.2 拓展思考

1. **不可压缩流体的简化**：当流体密度ρ为常数时，连续方程简化为$div\vec{V} = 0$，动量方程中的密度项可提出，此时 N-S 方程组如何进一步简化？结合具体工程案例（如管道水流）分析简化后的方程应用。
2. **理想流体与粘性流体的差异**：理想流体忽略粘性（$\mu = 0$），应力张量仅含静压力$P = -pI$，此时动量方程与粘性流体有何不同？为何实际工程中（如飞机飞行）需考虑粘性影响？
3. **定常流动与非定常流动的区别**：定常流动中$\frac{\partial}{\partial t} = 0$，N-S 方程组的局部变化率项消失，此时方程如何描述流体运动？对比定常管道流动与非定常水击现象（管道内压力骤变）的方程应用差异。

通过以上内容，可系统掌握流体力学的基本概念、控制方程推导与应用，为后续深入学习流体力学进阶知识（如边界层理论、湍流模型等）奠定基础。

作业题

一、填空题（共 10 题）

1. 在流体力学中，连续介质假说将流体视为由______无间隙地充满它所占据的整个空间的连续介质，其物理量是空间坐标和时间的连续函数，该模型由______于 1753 年提出。
2. 流体质点是指微观上______、宏观上______的分子团，其包含大量分子，少数分子的进出不影响整体参数的统计平均值。
3. 速度分解定理中，任意二阶张量$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$可分解为对称张量$S$和反对称张量$A$，其中对称张量$S$称为______，描述流体微团的______。
4. 变形速度张量S是二阶对称张量，其对角线分量$\varepsilon_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$表示______，非对角线分量$\gamma_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)$表示______、。
5. 应力张量P是二阶对称张量，在主轴坐标系下其标准形式为______，此时流体微团表面仅存在______，不存在切应力。
6. 牛顿内摩擦定律的表达式为$\tau = \mu\frac{du}{dy}$，其中τ是______，μ是______，$\frac{du}{dy}$是______、。
7. 广义牛顿定律建立了应力张量与变形速度张量的关系，其表达式为$P = -pI + 2\mu\left(S - \frac{1}{3}Idiv\vec{V}\right)$，其中$p$是______，$I$是______，$div\vec{V}$是______。
8. 雷诺输运定理中，体系物理量N的随流导数$\frac{DN_s}{Dt}$等于控制体内物理量的______与通过控制面的物理量______之和。
9. 连续方程的微分形式为$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\left(\rho\vec{V}\right) = 0$，对于不可压缩流体，该方程简化为______，表明流体的______为零。
10. 在笛卡尔坐标系下，动量方程的微分形式中，应力张量的散度$divP$展开后，x方向的表面力项包含$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}$、$\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}$和______，其中$p_{xx}$是______方向的正应力。

二、判断题（共 10 题，对的打“√”，错的打“×”）

1. 流体和固体的力学性能区别在于固体只能承受压力，不能承受拉力和剪切力，而流体既能承受压力，也能承受拉力和剪切力。（ ）

2. 连续介质假说适用于所有流体运动场景，无论分子间距大小均成立。（ ）
3. 流体质点的尺度满足宏观运动特征尺度L_3 ≫流体质点尺度L_2 ≫分子间距L_1，因此流体质点可视为几何点且包含大量分子。（ ）
4. 速度分解定理中，反对称张量A对应的旋转角速度$\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\vec{V}$，其描述流体微团的旋转运动，会引起微团变形、。（ ）
5. 变形速度张量S的第一不变量$I_1 = div\vec{V}$，其物理意义是流体微团的体积变化率，当$I_1 > 0$时流体微团压缩、。（ ）
6. 应力张量P是对称张量，因此$p_{ij} = p_{ji}$，其独立分量有 6 个、。（ ）
7. 牛顿流体是指剪应力与速度梯度符合牛顿内摩擦定律的流体，水和空气均属于牛顿流体。（ ）
8. 控制体是固定在空间的体积，体系是确定的物质集合，雷诺输运定理建立了二者物理量变化的联系、。（ ）
9. 定常流动中，连续方程的微分形式简化为$div(\rho\vec{V}) = 0$，表明通过任意控制面的质量流量恒定。（ ）
10. N-S 方程组仅包含动量方程和能量方程，不涉及连续方程、。（ ）

三、选择题（共 5 题，每题只有一个正确答案）

1. 下列关于流体易流动性的描述，正确的是（ ） A. 流体在静止时能承受微小切向力 B. 切向力作用下流体仅发生有限变形 C. 流体易流动性源于分子间作用力较强 D. 微小切向力持续作用会使流体发生任意大变形

2. 变形速度张量S的非对角线分量$\gamma_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$，其物理意义是（ ） A. x方向的线变形率 B. y方向的线变形率 C. $x - y$平面内的剪切变形角速度 D. $y - z$平面内的剪切变形角速度

3. 下列关于应力张量的说法，错误的是（ ）、 A. 应力张量是二阶张量，包含 9 个分量 B. 主轴坐标系下应力张量为对角矩阵，仅含主应力 C. 静止流体的应力张量仅含静压力，切应力为零 D. 应力张量的非对角线分量均为正应力

4. 雷诺输运定理中，当$N = m$（质量）时，单位质量物理量σ的值为（ ） A. $\vec{V}$ B. 1 C. $\frac{1}{2}V^2 + u$ D. u

5. 对于不可压缩流体的定常流动，连续方程的简化形式为（ ） A. $\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\vec{V})=0$ B. $div(\rho\vec{V})=0$ C. $div\vec{V}=0$ D. $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$

四、公式推导与计算题（共 3 题）

1. 已知流体质点的速度分量为$v_x=x+2y$，$v_y=2x-y$，$v_z=0$（直角坐标系），试推导该流场的速度梯度张量$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$，并将其分解为对称张量$S$（变形速度张量）和反对称张量$A$，同时计算旋转角速度$\vec{\omega}$的各分量、、。
2. 某不可压缩牛顿流体在平行平板间做定常层流运动，速度分布为$u(y)=\frac{U}{h}y$（y为垂直于平板的坐标，h为平板间距，U为上板速度），已知流体粘性系数为μ，试根据牛顿内摩擦定律计算流体中的切应力分布，并结合广义牛顿定律推导应力张量的各分量、、。
3. 对于不可压缩定常流动，在笛卡尔坐标系下，已知速度分量$u=2x$，$v=-2y$，$w=0$，密度ρ为常数，试验证该流场是否满足连续方程，并计算变形速度张量S的第一不变量I_1，说明其物理意义。

五、综合分析题（共 2 题）

1. 结合连续介质假说、速度分解定理和应力张量的相关知识，分析为何在流体力学研究中引入“流体质点”和“张量”工具是必要的？并说明连续介质假说的适用条件，以及当该条件不满足时（如稀薄气体），流体力学研究需做哪些调整？
2. 以管道内粘性流体的定常流动为例，综合运用连续方程、动量方程（含应力张量）和广义牛顿定律，分析：（1）管道内速度分布的主要影响因素（如粘性、压力梯度）；（2）应力张量在管道截面上的分布特征（正应力与切应力的变化）；（3）若忽略流体粘性（理想流体），管道内流动会呈现何种特点，与实际粘性流动的差异主要体现在哪些方面？