绪论：误差与范数

误差

不同类型的误差

数值计算时，存在集中不同类型的误差：

- 模型误差：与实际不符
- 观测误差：测不准
- 截断误差：用例如**泰勒展开公式**拟合函数时产生的误差
- 舍入误差：计算机存储限制导致的误差

绝对误差、相对误差

关于误差这里有几个公式：

$$e = x - a$$

$$|e| \leq \epsilon$$

x为**精确值**，a为**近似值**，e为**绝对误差**，ϵ称为**绝对误差限**
此时可以表示精确值和近似值的不确定性：

$$x = a \pm \epsilon$$

绝对误差无法进行相互比较，这里引入相对误差的概念：

$$e_r = \frac{e}{x} \approx \frac{e}{a}$$

$$|e_r| \leq \epsilon_r = \frac{\epsilon}{|a|}$$

e_r为**相对误差**，ϵ_r为**相对误差限**

有效数字

一般给出一个**绝对误差限**ϵ，以及某个**近似值**a，然后求a的有效数字。

这里有一个前提，**绝对误差限**ϵ必须首先小于**近似值**a，否则有效数字为0，真正的实际数据被误差噪声所淹没。

给出一个例子：

$a = 1.38$
$\epsilon = 0.005$

此时看ϵ与a的对齐的位，这里$a=1.38$这三位都是有效数字。

算法和计算复杂性

做数值计算时，需要避免这几个问题：

- 需要有数值稳定性
- 两数相加，需要避免较小的数无法加到较大的数
- 避免两个相近的数相减
- 除法运算中：a/b需要避免$|b| \ll |a|$

范数

范数的定义，满足下面三个条件，这里的$\mathbf{x}$与$\mathbf{y}$既可以是向量，也可以是矩阵

- 正定性：$||\mathbf{x}|| \geq 0$，当且仅当 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$时，$||\mathbf{x}||=\mathbf{0}$
- 齐次性：$k \in \mathbb{R}, ||k\mathbf{x}|| = |k| \cdot ||\mathbf{x}||$
- 成立三角不等式：$||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$

存在向量范数与矩阵范数，都存在p范数：

向量范数

一范数：即向量的每个元素求绝对值后求和：

$$||\mathbf{x}||_1 = \Sigma |x_i|$$

二范数：即向量的每个元素求平方相加后再开方：

$$||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{\Sigma x_i^2}$$

无穷范数：即直接取出向量每个元素的绝对值的最大：

$$||\mathbf{x}||_\infty = \max |x_i|$$

矩阵范数

一范数：即矩阵各**列元素**的绝对值之和的最大值，称为**列范数**：

$$||\mathbf{A}||_1 = \max_j \Sigma_i |a_{ij}|$$

二范数：即矩阵A^TA的最大特征值，称为**谱范数**：

$$||\mathbf{A}||_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$$

无穷范数：即矩阵各**行元素**的绝对值之和的最大值，称为**行范数**:

$$||\mathbf{A}||_\infty = \max_i \Sigma_j |a_{ij}|$$

F范数：类似地对应了向量的二范数，矩阵的每个元素开方后求和：

$$||\mathbf{A}||_{\mathrm{F}} = \sqrt{\Sigma\Sigma a_{ij}^2}$$

其他的一些概念：

向量与矩阵范数相容：

$$||\mathbf{A}\mathbf{x}|| \le ||\mathbf{A}|| \cdot ||\mathbf{x}||$$

范数为矩阵的算子范数：

$$||\mathbf{A}|| = \max_{||\mathbf{x}||=1} ||\mathbf{A}\mathbf{x}||$$