前沿数学方法及其在航天工程中的应用

第二讲 张量知识

余文斌

沙河校区主楼D座923

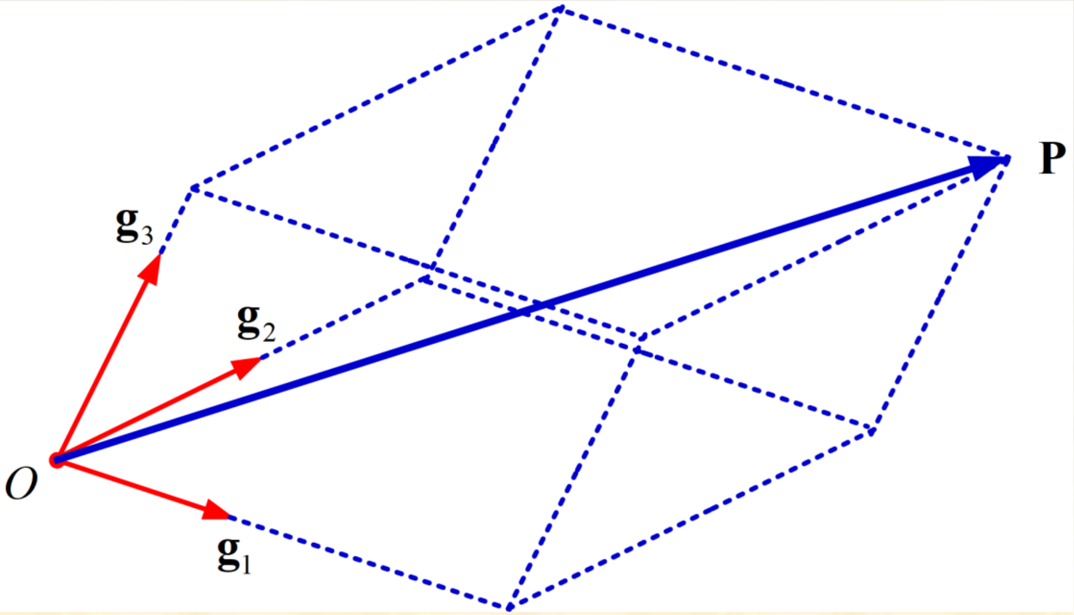
邮箱：yuwenbin@buaa.edu.cn

一、张量（见《张量分析》）

- **知识回顾**

1、三维斜角直线坐标系

- 基矢量$\{g_1, g_2, g_3\}$之间互不垂直，模值也不为1
- 求解广义坐标$\{P^1, P^2, P^3\}$满足：　$\mathbf{P} = P^1\mathbf{g}_1 + P^2\mathbf{g}_2 + P^3\mathbf{g}_3$



一、张量（见《张量分析》）

- **知识回顾**

1、三维斜角直线坐标系（基矢量$\{g_1, g_2, g_3\}$） → 协变基矢量

2、引入对偶基矢量$\{g^1, g^2, g^3\}$ → 逆变基矢量

$$\begin{cases} \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_i = 1 \ (i = 1,2,3) \\ \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = 0 \ (i \neq j) \end{cases}$$

→ 锐角、模值

→ 正交

3、如何求解逆变基矢量

- 先定方向、再定模值

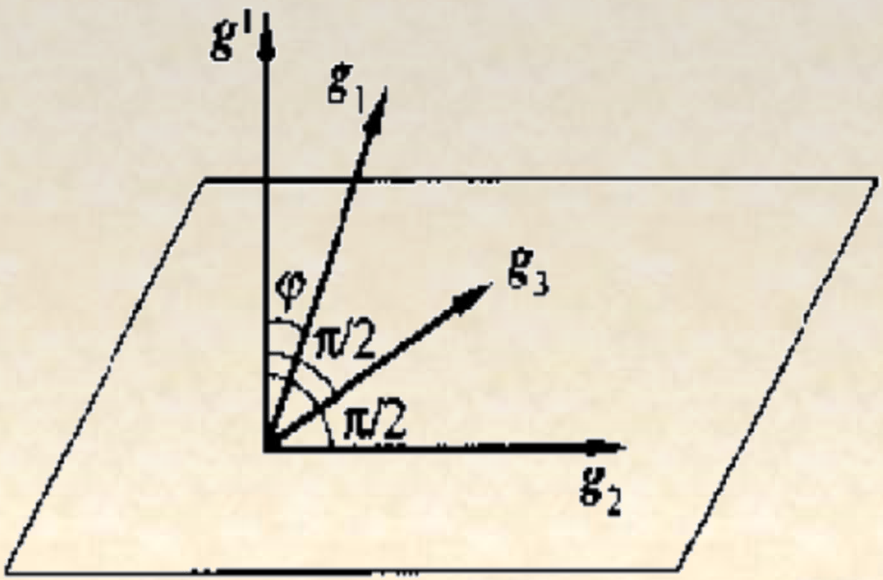
4、逆变分量和协变分量

逆变分量

$$P^1 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}^1$$
$$P^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}^2$$
$$P^3 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}^3$$

协变分量

$$P_1 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}_1$$
$$P_2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}_2$$
$$P_3 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}_3$$



一、张量（见《张量分析》）

- **斜角坐标系下的坐标变换（pp. 14-17）**

1、有新旧两组协变基矢量：

$$\left\{\mathbf{g}_{1'},\mathbf{g}_{2'},\mathbf{g}_{3'}\right\},\quad \left\{\mathbf{g}_{1},\mathbf{g}_{2},\mathbf{g}_{3}\right\}$$

2、任意矢量v对这两组基矢量分解：

$$\mathbf{v}=v^{1'}\mathbf{g}_{1'}+v^{2'}\mathbf{g}_{2'}+v^{3'}\mathbf{g}_{3'}=v^{1}\mathbf{g}_{1}+v^{2}\mathbf{g}_{2}+v^{3}\mathbf{g}_{3}$$

3、$\left\{v^{1'},v^{2'},v^{3'}\right\}$ 与 $\left\{v^{1},v^{2},v^{3}\right\}$之间的转换关系如何?

代入

- 将 $\left\{\mathbf{g}_{1},\mathbf{g}_{2},\mathbf{g}_{3}\right\}$ 对 $\left\{\mathbf{g}_{1'},\mathbf{g}_{2'},\mathbf{g}_{3'}\right\}$进行分解

$$\mathbf{g}_1=\beta_1^{1'}\mathbf{g}_{1'}+\beta_1^{2'}\mathbf{g}_{2'}+\beta_1^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$
$$\mathbf{g}_2=\beta_2^{1'}\mathbf{g}_{1'}+\beta_2^{2'}\mathbf{g}_{2'}+\beta_2^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$
$$\mathbf{g}_3=\beta_3^{1'}\mathbf{g}_{1'}+\beta_3^{2'}\mathbf{g}_{2'}+\beta_3^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$

其中：$\beta_i^{j'}=\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}^{j'}$

一、张量（见《张量分析》）

- **斜角坐标系下的坐标变换（pp. 14-17）**
  - 可得

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v^1\mathbf{g}_1 + v^2\mathbf{g}_2 + v^3\mathbf{g}_3 \\ &= \left(v^1\beta_1^{1'} + v^2\beta_2^{1'} + v^3\beta_3^{1'}\right)\mathbf{g}_{1'} \\ &\quad + \left(v^1\beta_1^{2'} + v^2\beta_2^{2'} + v^3\beta_3^{2'}\right)\mathbf{g}_{2'} \\ &\quad + \left(v^1\beta_1^{3'} + v^2\beta_2^{3'} + v^3\beta_3^{3'}\right)\mathbf{g}_{3'}\end{aligned}$$

  - 因此有

$$\begin{bmatrix} v^{1'} \\ v^{2'} \\ v^{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'} \\ \beta_1^{2'} & \beta_2^{2'} & \beta_3^{2'} \\ \beta_1^{3'} & \beta_2^{3'} & \beta_3^{3'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

记：$\mathbf{T}^{ij'} = \begin{bmatrix} \boxed{\beta_1^{1'}} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'} \\ \boxed{\beta_1^{2'}} & \beta_2^{2'} & \beta_3^{2'} \\ \boxed{\beta_1^{3'}} & \beta_2^{3'} & \beta_3^{3'} \end{bmatrix}$

一、张量（见《张量分析》）

- **斜角坐标系下的坐标变换（pp. 14-17）**
  - 可得

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v^1\mathbf{g}_1 + v^2\mathbf{g}_2 + v^3\mathbf{g}_3\\ &= \left(v^1\beta_1^{1'} + v^2\beta_2^{1'} + v^3\beta_3^{1'}\right)\mathbf{g}_{1'}\\ &\quad + \left(v^1\beta_1^{2'} + v^2\beta_2^{2'} + v^3\beta_3^{2'}\right)\mathbf{g}_{2'}\\ &\quad + \left(v^1\beta_1^{3'} + v^2\beta_2^{3'} + v^3\beta_3^{3'}\right)\mathbf{g}_{3'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1 &= \beta_1^{1'}\mathbf{g}_{1'} + \beta_1^{2'}\mathbf{g}_{2'} + \beta_1^{3'}\mathbf{g}_{3'}\\ \mathbf{g}_2 &= \beta_2^{1'}\mathbf{g}_{1'} + \beta_2^{2'}\mathbf{g}_{2'} + \beta_2^{3'}\mathbf{g}_{3'}\\ \mathbf{g}_3 &= \beta_3^{1'}\mathbf{g}_{1'} + \beta_3^{2'}\mathbf{g}_{2'} + \beta_3^{3'}\mathbf{g}_{3'}\end{aligned}$$

  - 因此有

$$\begin{bmatrix} v^{1'}\\ v^{2'}\\ v^{3'}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'}\\ \beta_1^{2'} & \beta_2^{2'} & \beta_3^{2'}\\ \beta_1^{3'} & \beta_2^{3'} & \beta_3^{3'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v^1\\ v^2\\ v^3\end{bmatrix}$$

记：$\mathbf{T}^{ij'} = \begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'}\\ \beta_1^{2'} & \beta_2^{2'} & \beta_3^{2'}\\ \beta_1^{3'} & \beta_2^{3'} & \beta_3^{3'}\end{bmatrix}$

一、张量（见《张量分析》）

- **斜角坐标系下的坐标变换（pp. 14-17）**
  - 通过观察

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathbf{T}^{ij'} = \begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'} \\ \beta_1^{2'} & \beta_2^{2'} & \beta_3^{2'} \\ \beta_1^{3'} & \beta_2^{3'} & \beta_3^{3'} \end{bmatrix} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{互逆}"] \arrow[d, leftrightarrow, "?"'] \arrow[dr, leftrightarrow] & \mathbf{T}^{i'j} = \begin{bmatrix} \beta_{1'}^{1} & \beta_{2'}^{1} & \beta_{3'}^{1} \\ \beta_{1'}^{2} & \beta_{2'}^{2} & \beta_{3'}^{2} \\ \beta_{1'}^{3} & \beta_{2'}^{3} & \beta_{3'}^{3} \end{bmatrix} \arrow[d, leftrightarrow, "?"] \arrow[dl, leftrightarrow, "\text{转置}"] \\
\mathbf{T}_{ij'} = \begin{bmatrix} \beta_{1'}^{1} & \beta_{1'}^{2} & \beta_{1'}^{3} \\ \beta_{2'}^{1} & \beta_{2'}^{2} & \beta_{2'}^{3} \\ \beta_{3'}^{1} & \beta_{3'}^{2} & \beta_{3'}^{3} \end{bmatrix} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{互逆}"'] & \mathbf{T}_{i'j} = \begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_1^{2'} & \beta_1^{3'} \\ \beta_2^{1'} & \beta_2^{2'} & \beta_2^{3'} \\ \beta_3^{1'} & \beta_3^{2'} & \beta_3^{3'} \end{bmatrix}
\end{tikzcd}
$$

一、张量（见《张量分析》）

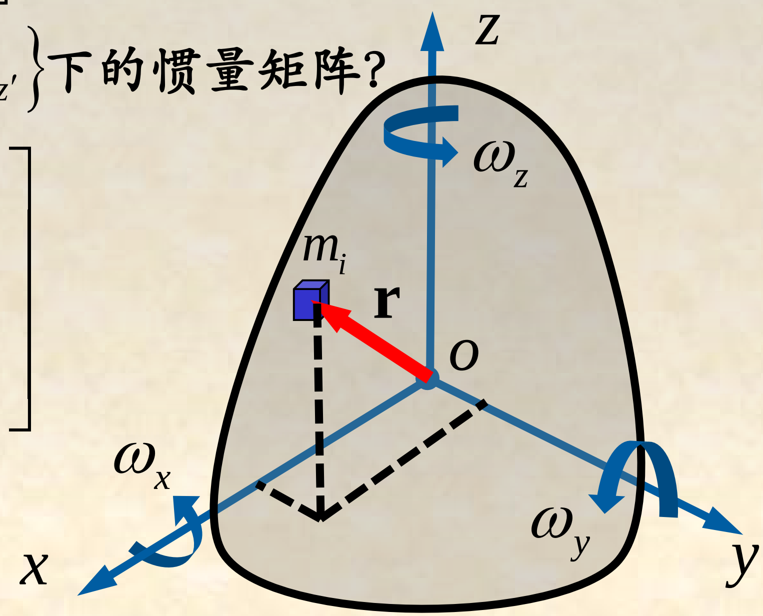
- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**

5、在单位正交基矢量 $\{\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z\}$（此时逆变/协变基矢量相同）下，已知某刚体有如下惯量矩阵：

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

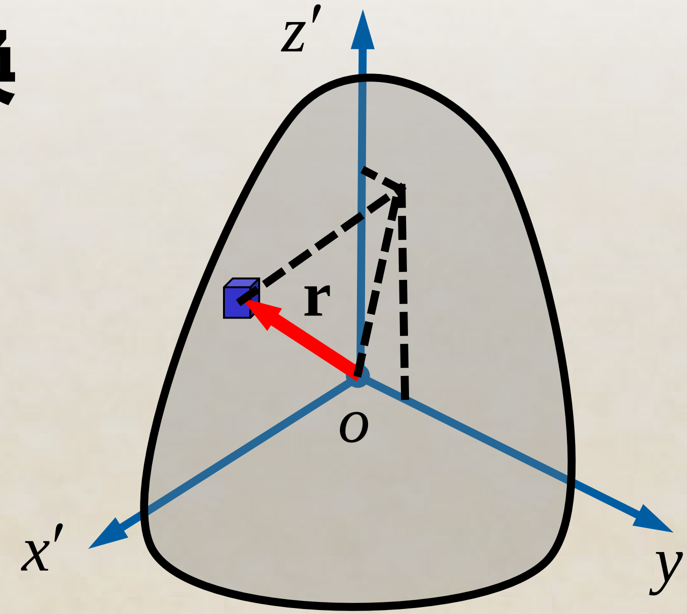
那么如何求解在新正交坐标系 $\{\mathbf{e}_{x'},\mathbf{e}_{y'},\mathbf{e}_{z'}\}$下的惯量矩阵？

$$\begin{bmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix}$$



一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**



解：分别看每一个元素

$$\begin{bmatrix} \color{red}{I_{x'x'}} & -I_{x'y'} & -I_{x'y'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix}$$

$$\color{red}{I_{x'x'}} = \int\left[\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_{y'}\right)^2 + \left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_{z'}\right)^2\right]\rho \mathrm{dV}$$

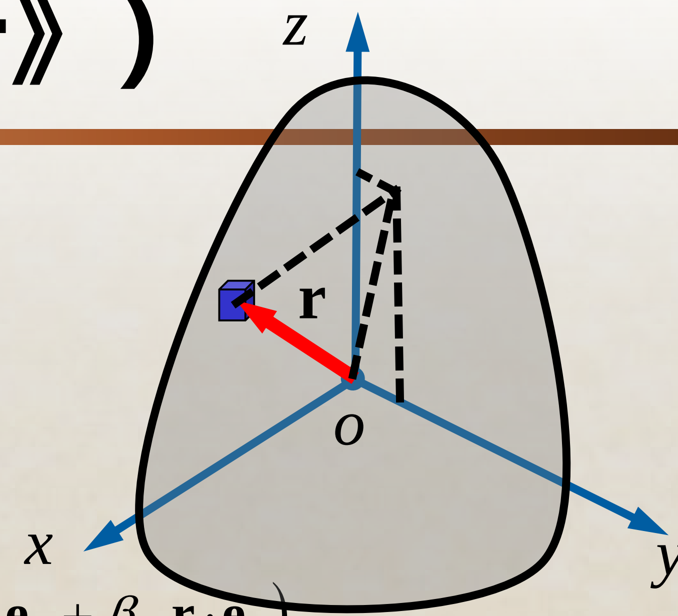
$$= \int\left[\|\mathbf{r}\|^2 - \left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_{x'}\right)^2\right]\rho \mathrm{dV}$$

$$= \int\|\mathbf{r}\|^2 \rho \mathrm{dV} - \int\left(\mathbf{r}\cdot\left(\beta_{x'x}\mathbf{e}_x + \beta_{x'y}\mathbf{e}_y + \beta_{x'z}\mathbf{e}_z\right)\right)^2 \rho \mathrm{dV}$$

不随坐标系变化，记为I

一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**



其中：

$$\left(\mathbf{r}\cdot\left(\beta_{x'x}\mathbf{e}_x+\beta_{x'y}\mathbf{e}_y+\beta_{x'z}\mathbf{e}_z\right)\right)^2$$

$$=\left(\beta_{x'x}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x+\beta_{x'y}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y+\beta_{x'z}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z\right)^2$$

$$=\left(\beta_{x'x}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x+\beta_{x'y}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y+\beta_{x'z}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z\right)\left(\beta_{x'x}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x+\beta_{x'y}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y+\beta_{x'z}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z\right)$$

$$=\begin{bmatrix}\beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x\\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y\\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x & \mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y & \mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{x'x}\\ \beta_{x'y}\\ \beta_{x'z}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x)^2 & (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y) & (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z)\\ (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x) & (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y)^2 & (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z)\\ (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x) & (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y) & (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{x'x}\\ \beta_{x'y}\\ \beta_{x'z}\end{bmatrix}$$

$$\int\left(\mathbf{r}\cdot\left(\beta_{x'x}\mathbf{e}_x+\beta_{x'y}\mathbf{e}_y+\beta_{x'z}\mathbf{e}_z\right)\right)^2\rho\mathrm{d}V$$

代入

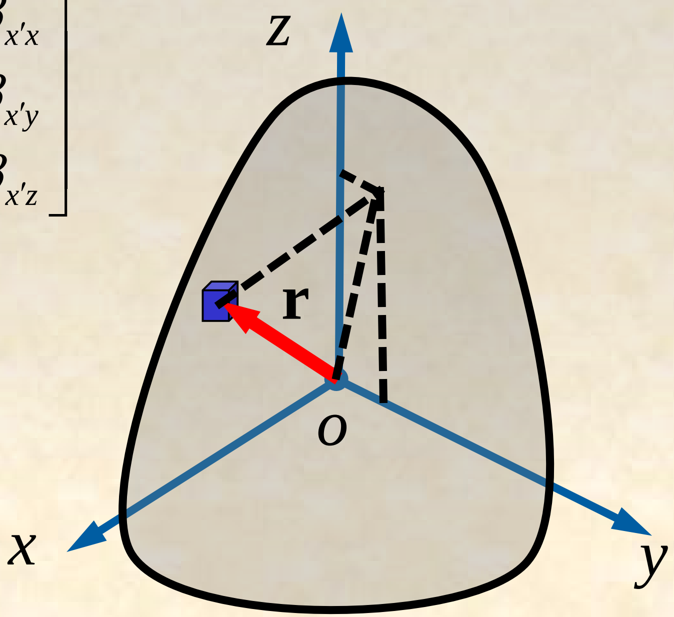
一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**

积分有：

$$
I_{x'x'} = I - \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x)^2 \rho \mathrm{d}V & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & \int (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y)^2 \rho \mathrm{d}V & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & \int (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z)^2 \rho \mathrm{d}V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{x'x} \\ \beta_{x'y} \\ \beta_{x'z} \end{bmatrix}
$$

$$
= I - \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - I_{xx} & I_{xy} & I_{xy} \\ I_{yx} & I - I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I - I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{x'x} \\ \beta_{x'y} \\ \beta_{x'z} \end{bmatrix}
$$



一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**

再看：

$$\begin{bmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'y'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix}$$

$$I_{x'y'} = \int \left[\left(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_{x'} \right) \left(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_{y'} \right) \right] \rho \mathrm{dV}$$

$$= \int \left(\mathbf{r} \cdot \left(\beta_{x'x} \mathbf{e}_x + \beta_{x'y} \mathbf{e}_y + \beta_{x'z} \mathbf{e}_z \right) \right) \left(\mathbf{r} \cdot \left(\beta_{y'x} \mathbf{e}_x + \beta_{y'y} \mathbf{e}_y + \beta_{y'z} \mathbf{e}_z \right) \right) \rho \mathrm{dV}$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - I_{xx} & I_{xy} & I_{xy} \\ I_{yx} & I - I_{xx} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I - I_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{y'x} \\ \beta_{y'y} \\ \beta_{y'z} \end{bmatrix}$$

一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**

类似地：

$$\begin{bmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix}$$

$$I_{x'z'} = \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I - I_{xx} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I - I_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{z'x} \\ \beta_{z'y} \\ \beta_{z'z} \end{bmatrix}$$

一、张量（见《张量分析》）

$$I_{x'x'}=I-\begin{bmatrix}\beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I-I_{xx} & I_{xy} & I_{xy}\\ I_{yx} & I-I_{yy} & I_{yz}\\ I_{zx} & I_{zy} & I-I_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{x'x}\\ \beta_{x'y}\\ \beta_{x'z}\end{bmatrix}$$

$$I_{x'y'}=\begin{bmatrix}\beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I-I_{xx} & I_{xy} & I_{xy}\\ I_{yx} & I-I_{xx} & I_{yz}\\ I_{zx} & I_{zy} & I-I_{xx}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{y'x}\\ \beta_{y'y}\\ \beta_{y'z}\end{bmatrix}$$

$$I_{x'z'}=\begin{bmatrix}\beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I-I_{xx} & I_{xy} & I_{xz}\\ I_{yx} & I-I_{xx} & I_{yz}\\ I_{zx} & I_{zy} & I-I_{xx}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{z'x}\\ \beta_{z'y}\\ \beta_{z'z}\end{bmatrix}$$

进而:

$$\begin{bmatrix}I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z'}\end{bmatrix}=?$$

$$\begin{bmatrix}I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z'}\\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'}\\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'}\end{bmatrix}$$

一、张量（见《张量分析》）

$$I_{x'x'}=I-\begin{bmatrix}\beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I-I_{xx} & I_{xy} & I_{xy}\\ I_{yx} & I-I_{yy} & I_{yz}\\ I_{zx} & I_{zy} & I-I_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{x'x}\\ \beta_{x'y}\\ \beta_{x'z}\end{bmatrix}$$

$$I_{x'y'}=\begin{bmatrix}\beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I-I_{xx} & I_{xy} & I_{xy}\\ I_{yx} & I-I_{xx} & I_{yz}\\ I_{zx} & I_{zy} & I-I_{xx}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{y'x}\\ \beta_{y'y}\\ \beta_{y'z}\end{bmatrix}$$

$$I_{x'z'}=\begin{bmatrix}\beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I-I_{xx} & I_{xy} & I_{xz}\\ I_{yx} & I-I_{xx} & I_{yz}\\ I_{zx} & I_{zy} & I-I_{xx}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{z'x}\\ \beta_{z'y}\\ \beta_{z'z}\end{bmatrix}$$

进而有：

$$\begin{bmatrix}I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I-I_{xx} & I_{xy} & I_{xz}\\ I_{yx} & I-I_{xx} & I_{yz}\\ I_{zx} & I_{zy} & I-I_{xx}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{x'x} & \beta_{y'x} & \beta_{z'x}\\ \beta_{x'y} & \beta_{y'y} & \beta_{z'y}\\ \beta_{x'z} & \beta_{y'z} & \beta_{z'z}\end{bmatrix}$$

一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**
  - 其它元素具有类似结果，进而整理可得

$$
\begin{bmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'y'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} -
$$

$$
\begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z} \\ \beta_{y'x} & \beta_{y'y} & \beta_{y'z} \\ \beta_{z'x} & \beta_{z'y} & \beta_{z'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I-I_{xx} & I_{xy} & I_{xy} \\ I_{yx} & I-I_{xx} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I-I_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{y'x} & \beta_{z'x} \\ \beta_{x'y} & \beta_{y'y} & \beta_{z'y} \\ \beta_{x'z} & \beta_{y'z} & \beta_{z'z} \end{bmatrix}
$$

1、左边是旧坐标系向新坐标系的坐标转换矩阵，右边是左边矩阵的转置

2、由于基矢量相互正交，这两个矩阵是单位正交阵，因此互逆

一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**

  - 因此可以改写为

$$
\begin{bmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'y'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z} \\ \beta_{y'x} & \beta_{y'y} & \beta_{y'z} \\ \beta_{z'x} & \beta_{z'y} & \beta_{z'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{y'x} & \beta_{z'x} \\ \beta_{x'y} & \beta_{y'y} & \beta_{z'y} \\ \beta_{x'z} & \beta_{y'z} & \beta_{z'z} \end{bmatrix} -
$$

$$
\begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z} \\ \beta_{y'x} & \beta_{y'y} & \beta_{y'z} \\ \beta_{z'x} & \beta_{z'y} & \beta_{z'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I-I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I-I_{xx} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I-I_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{y'x} & \beta_{z'x} \\ \beta_{x'y} & \beta_{y'y} & \beta_{z'y} \\ \beta_{x'z} & \beta_{y'z} & \beta_{z'z} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z} \\ \beta_{y'x} & \beta_{y'y} & \beta_{y'z} \\ \beta_{z'x} & \beta_{z'y} & \beta_{z'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{xx} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{y'x} & \beta_{z'x} \\ \beta_{x'y} & \beta_{y'y} & \beta_{z'y} \\ \beta_{x'z} & \beta_{y'z} & \beta_{z'z} \end{bmatrix}
$$

一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**

$$\begin{bmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'y'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z} \\ \beta_{y'x} & \beta_{y'y} & \beta_{y'z} \\ \beta_{z'x} & \beta_{z'y} & \beta_{z'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_{xx} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{y'x} & \beta_{z'x} \\ \beta_{x'y} & \beta_{y'y} & \beta_{z'y} \\ \beta_{x'z} & \beta_{y'z} & \beta_{z'z} \end{bmatrix}$$

1、可见，惯量矩阵的坐标转换关系不同于矢量的坐标转换关系；

2、惯量矩阵的另一个名称叫惯量张量，是一个二阶张量；相比之下，矢量是一阶张量。

3、一、二阶张量分别需要满足如下坐标变换关系

$$\mathbf{X}^B = \mathbf{T}^{BA}\mathbf{X}^A \qquad \mathbf{I}^B = \mathbf{T}^{BA}\mathbf{I}^A[\mathbf{T}^{BA}]^T$$

一、张量（见《张量分析》）

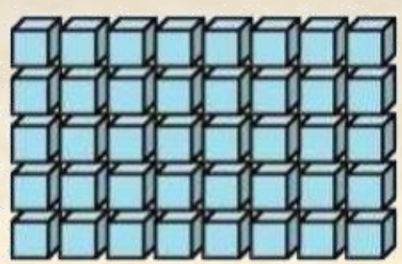
- **什么是张量（pp. 23）**

1、定义：由若干有序数组成的集合，并且当坐标系改变时满足相应的坐标转换关系

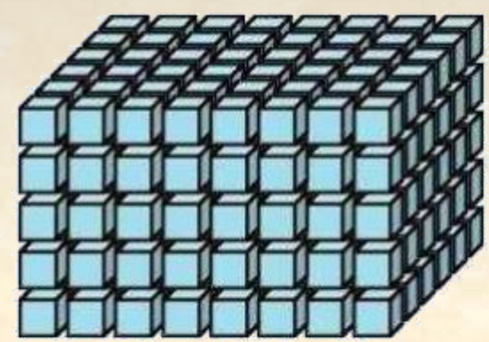
2、解读：

- 张量是矢量概念的推广，这意味着：矢量是一阶张量：位移矢量、速度矢量等均是张量
- 零阶张量是标量，二阶张量可以表示为矩阵的形式，三阶张量可以表示为三维数组的形式，等等
- 但是，反之并不成立

矢量
（一维数组）



矩阵



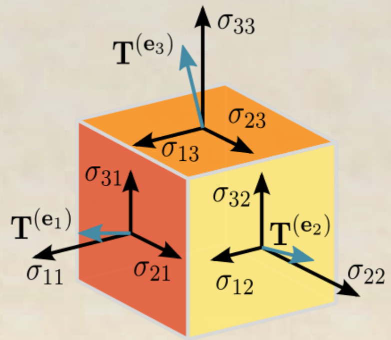
三维数组

一、张量（见《张量分析》）

• 什么是张量（pp. 23）

2、解读:

- 矢量的存在性不依赖于坐标系，因此张量的存在性同样不依赖坐标系



应力张量

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

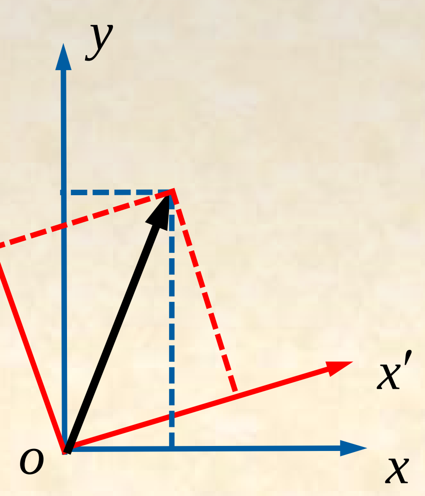
一、张量（见《张量分析》）

• 什么是张量（pp. 23）

2、解读:

- 与矢量类似，张量可以利用坐标系进行描述，并且在不同坐标系下的描述不相同，但是这种坐标变换需要保持张量的本质属性不变（不变性）：

  ✓ 举例：速度矢量在不同坐标系下可以用不同的坐标表示，但是其本质属性（速度大小和方向）不可改变



一、张量（见《张量分析》）

- **什么是张量（pp. 23）**

3、思考:

1）有新旧两组协变基矢量: $\{\mathbf{g}_{1'},\mathbf{g}_{2'},\mathbf{g}_{3'}\}$， $\{\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\mathbf{g}_3\}$

2）任意矢量v对这两组基矢量分解:

$$\mathbf{v}=v^{1'}\mathbf{g}_{1'}+v^{2'}\mathbf{g}_{2'}+v^{3'}\mathbf{g}_{3'}=v^{1}\mathbf{g}_{1}+v^{2}\mathbf{g}_{2}+v^{3}\mathbf{g}_{3}$$

3） 利用 $\{v^1,v^2,v^3\}$ 构造如下矩阵

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13}\\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23}\\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33}\end{bmatrix}$$

其中: $\beta^{ij}=v^i\cdot v^j$

那么这个矩阵是二阶张量吗?

一、张量（见《张量分析》）

- **什么是张量（pp. 23）**

3、思考：

- 问题：如下矩阵是二阶张量吗？

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13}\\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23}\\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33}\end{bmatrix}$$

其中：$\beta^{ij}=v^i\cdot v^j$

张量的定义：由若干有序数组成的集合，并且当坐标系改变时满足相应的坐标转换关系

一、张量（见《张量分析》）

- **什么是张量（pp. 23）**

关键：如果坐标系发生改变，是否满足相应的坐标转换关系？

- □ 在新基矢量 $\left\{\mathbf{g}_{1'},\mathbf{g}_{2'},\mathbf{g}_{3'}\right\}$ 下，矢量v有新坐标 $\left\{v^{1'},v^{2'},v^{3'}\right\}$
- □ 进而构造如下矩阵：

$$\boldsymbol{\beta}'=\begin{bmatrix}\beta^{1'1'} & \beta^{1'2'} & \beta^{1'3'}\\ \beta^{2'1'} & \beta^{2'2'} & \beta^{2'3'}\\ \beta^{3'1'} & \beta^{3'2'} & \beta^{3'3'}\end{bmatrix}$$

其中： $\beta^{i'j'}=v^{i'}\cdot v^{j'}$

那么这个新矩阵与之前的矩阵是否存在某种坐标转换关系？

一、张量（见《张量分析》）

- **什么是张量**

$$\mathbf{v}=v^{1'}\mathbf{g}_{1'}+v^{2'}\mathbf{g}_{2'}+v^{3'}\mathbf{g}_{3'}=v^{1}\mathbf{g}_{1}+v^{2}\mathbf{g}_{2}+v^{3}\mathbf{g}_{3}$$

下面逐一分析单个元素

$$\boldsymbol{\beta}'=\begin{bmatrix}\beta^{1'1'} & \beta^{1'2'} & \beta^{1'3'}\\ \beta^{2'1'} & \beta^{2'2'} & \beta^{2'3'}\\ \beta^{3'1'} & \beta^{3'2'} & \beta^{3'3'}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13}\\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23}\\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33}\end{bmatrix}$$

其中： $\beta^{ij}=v^{i}\cdot v^{j}$

$$\beta^{1'1'}=v^{1'}\cdot v^{1'}=\left(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^{1'}\right)\left(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^{1'}\right)$$

$$=\left[\boldsymbol{v}\cdot\left(\beta_1^{1'}\mathbf{g}^1+\beta_2^{1'}\mathbf{g}^2+\beta_3^{1'}\mathbf{g}^3\right)\right]\cdot\left[\boldsymbol{v}\cdot\left(\beta_1^{1'}\mathbf{g}^1+\beta_2^{1'}\mathbf{g}^2+\beta_3^{1'}\mathbf{g}^3\right)\right]$$

$$=\left[\beta_1^{1'}\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}^1+\beta_2^{1'}\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}^2+\beta_3^{1'}\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}^3\right]\left[\beta_1^{1'}\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}^1+\beta_2^{1'}\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}^2+\beta_3^{1'}\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}^3\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^1\\ \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^2\\ \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^1 & \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^2 & \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1^{1'}\\ \beta_2^{1'}\\ \beta_3^{1'}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v^1\cdot v^1 & v^1\cdot v^2 & v^1\cdot v^3\\ v^2\cdot v^1 & v^2\cdot v^2 & v^2\cdot v^3\\ v^3\cdot v^1 & v^3\cdot v^2 & v^3\cdot v^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1^{1'}\\ \beta_2^{1'}\\ \beta_3^{1'}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13}\\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23}\\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1^{1'}\\ \beta_2^{1'}\\ \beta_3^{1'}\end{bmatrix}$$

一、张量（见《张量分析》）

- **什么是张量（pp. 23）**

下面逐一分析单个元素

$\beta^{1'2'} = ?$

$$\boldsymbol{\beta}' = \begin{bmatrix} \beta^{1'1'} & \beta^{1'2'} & \beta^{1'3'} \\ \beta^{2'1'} & \beta^{2'2'} & \beta^{2'3'} \\ \beta^{3'1'} & \beta^{3'2'} & \beta^{3'3'} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13} \\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23} \\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33} \end{bmatrix}$$

其中： $\beta^{ij} = v^i \cdot v^j$

一、张量（见《张量分析》）

- **什么是张量**

$$\mathbf{v}=v^{1'}\mathbf{g}_{1'}+v^{2'}\mathbf{g}_{2'}+v^{3'}\mathbf{g}_{3'}=v^{1}\mathbf{g}_{1}+v^{2}\mathbf{g}_{2}+v^{3}\mathbf{g}_{3}$$

下面逐一分析单个元素

$$\begin{bmatrix} \beta^{1'1'} & \beta^{1'2'} & \beta^{1'3'} \\ \beta^{2'1'} & \beta^{2'2'} & \beta^{2'3'} \\ \beta^{3'1'} & \beta^{3'2'} & \beta^{3'3'} \end{bmatrix}$$

$$\beta^{1'2'}=v^{1'}\cdot v^{2'}=\left(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^{1'}\right)\left(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^{2'}\right)$$

$$=\left[\boldsymbol{v}\cdot\left(\beta_1^{1'}\mathbf{g}^1+\beta_2^{1'}\mathbf{g}^2+\beta_3^{1'}\mathbf{g}^3\right)\right]\cdot\left[\boldsymbol{v}\cdot\left(\beta_1^{2'}\mathbf{g}^1+\beta_2^{2'}\mathbf{g}^2+\beta_3^{2'}\mathbf{g}^3\right)\right]$$

$$=\left[\beta_1^{1'}\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^1+\beta_2^{1'}\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^2+\beta_3^{1'}\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^3\right]\left[\beta_1^{2'}\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^1+\beta_2^{2'}\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^2+\beta_3^{2'}\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^3\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^1\\ \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^2\\ \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^1 & \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^2 & \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{g}^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1^{2'}\\ \beta_2^{2'}\\ \beta_3^{2'}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v^1\cdot v^1 & v^1\cdot v^2 & v^1\cdot v^3\\ v^2\cdot v^1 & v^2\cdot v^2 & v^2\cdot v^3\\ v^3\cdot v^1 & v^3\cdot v^2 & v^3\cdot v^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1^{2'}\\ \beta_2^{2'}\\ \beta_3^{2'}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13}\\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23}\\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1^{2'}\\ \beta_2^{2'}\\ \beta_3^{2'}\end{bmatrix}$$

类似地，可以推导其它新元素与旧元素之间的坐标转换关系

一、张量（见《张量分析》）

- **什么是张量（pp. 23）**

下面将新元素排列起来，先看只有两个元素的简单情况：

$$\beta^{1'1'}=\begin{bmatrix}\beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13}\\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23}\\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1^{1'}\\ \beta_2^{1'}\\ \beta_3^{1'}\end{bmatrix}$$

$$\beta^{1'2'}=\begin{bmatrix}\beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13}\\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23}\\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1^{2'}\\ \beta_2^{2'}\\ \beta_3^{2'}\end{bmatrix}$$

如果将这两个元素排列成行向量，则有

$$\begin{bmatrix}\beta^{1'1'} & \beta^{1'2'}\end{bmatrix}=?$$

一、张量（见《张量分析》）

- **什么是张量（pp. 23）**

下面将新元素排列起来，先看只有两个元素的简单情况：

$$\beta^{1'1'}=\begin{bmatrix}\beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13}\\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23}\\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1^{1'}\\ \beta_2^{1'}\\ \beta_3^{1'}\end{bmatrix}$$

$$\beta^{1'2'}=\begin{bmatrix}\beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13}\\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23}\\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1^{2'}\\ \beta_2^{2'}\\ \beta_3^{2'}\end{bmatrix}$$

如果将这两个元素排列成行向量，则有

$$\begin{bmatrix}\beta^{1'1'} & \beta^{1'2'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13}\\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23}\\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1^{1'} & \beta_1^{2'}\\ \beta_2^{1'} & \beta_2^{2'}\\ \beta_3^{1'} & \beta_3^{2'}\end{bmatrix}$$

一、张量（见《张量分析》）

$$\begin{bmatrix} \beta^{1'1'} & \beta^{1'2'} & \beta^{1'3'} \\ \beta^{2'1'} & \beta^{2'2'} & \beta^{2'3'} \\ \beta^{3'1'} & \beta^{3'2'} & \beta^{3'3'} \end{bmatrix}$$

- **什么是张量（pp. 23）**

进一步可以得到

$$\begin{bmatrix} \beta^{1'1'} & \beta^{1'2'} & \beta^{1'3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13} \\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23} \\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_1^{2'} & \beta_1^{3'} \\ \beta_2^{1'} & \beta_2^{2'} & \beta_2^{3'} \\ \beta_3^{1'} & \beta_3^{2'} & \beta_3^{3'} \end{bmatrix}$$

类似地，有

$$\begin{bmatrix} \beta^{2'1'} & \beta^{2'2'} & \beta^{2'3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^{2'} & \beta_2^{2'} & \beta_3^{2'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13} \\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23} \\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_1^{2'} & \beta_1^{3'} \\ \beta_2^{1'} & \beta_2^{2'} & \beta_2^{3'} \\ \beta_3^{1'} & \beta_3^{2'} & \beta_3^{3'} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta^{3'1'} & \beta^{3'2'} & \beta^{3'3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^{3'} & \beta_2^{3'} & \beta_3^{3'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13} \\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23} \\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_1^{2'} & \beta_1^{3'} \\ \beta_2^{1'} & \beta_2^{2'} & \beta_2^{3'} \\ \beta_3^{1'} & \beta_3^{2'} & \beta_3^{3'} \end{bmatrix}$$

一、张量（见《张量分析》）

- **什么是张量（pp. 23）**

最终整理得

$$\begin{bmatrix} \beta^{1'1'} & \beta^{1'2'} & \beta^{1'3'} \\ \beta^{2'1'} & \beta^{2'2'} & \beta^{2'3'} \\ \beta^{3'1'} & \beta^{3'2'} & \beta^{3'3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'} \\ \beta_1^{2'} & \beta_2^{2'} & \beta_3^{2'} \\ \beta_1^{3'} & \beta_2^{3'} & \beta_3^{3'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13} \\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23} \\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_1^{2'} & \beta_1^{3'} \\ \beta_2^{1'} & \beta_2^{2'} & \beta_2^{3'} \\ \beta_3^{1'} & \beta_3^{2'} & \beta_3^{3'} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{ij'} = \begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'} \\ \beta_1^{2'} & \beta_2^{2'} & \beta_3^{2'} \\ \beta_1^{3'} & \beta_2^{3'} & \beta_3^{3'} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = v^{1'}\mathbf{g}_{1'} + v^{2'}\mathbf{g}_{2'} + v^{3'}\mathbf{g}_{3'} = v^{1}\mathbf{g}_{1} + v^{2}\mathbf{g}_{2} + v^{3}\mathbf{g}_{3}$$

符合： $\boldsymbol{\beta}' = \mathbf{T}^{ij'}\boldsymbol{\beta}[\mathbf{T}^{ij'}]^T$

因此该矩阵是二阶张量

一、张量（见《张量分析》）

- **什么是张量（pp. 23）**

最终整理得

$$\begin{bmatrix} \beta^{1'1'} & \beta^{1'2'} & \beta^{1'3'} \\ \beta^{2'1'} & \beta^{2'2'} & \beta^{2'3'} \\ \beta^{3'1'} & \beta^{3'2'} & \beta^{3'3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'} \\ \beta_1^{2'} & \beta_2^{2'} & \beta_3^{2'} \\ \beta_1^{3'} & \beta_2^{3'} & \beta_3^{3'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13} \\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23} \\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_1^{2'} & \beta_1^{3'} \\ \beta_2^{1'} & \beta_2^{2'} & \beta_2^{3'} \\ \beta_3^{1'} & \beta_3^{2'} & \beta_3^{3'} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{ij'} = \begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'} \\ \beta_1^{2'} & \beta_2^{2'} & \beta_3^{2'} \\ \beta_1^{3'} & \beta_2^{3'} & \beta_3^{3'} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = v^{1'}\mathbf{g}_{1'} + v^{2'}\mathbf{g}_{2'} + v^{3'}\mathbf{g}_{3'} = v^1\mathbf{g}_1 + v^2\mathbf{g}_2 + v^3\mathbf{g}_3$$

$$\mathbf{g}_1 = \beta_1^{1'}\mathbf{g}_{1'} + \beta_1^{2'}\mathbf{g}_{2'} + \beta_1^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$

$$\mathbf{g}_2 = \beta_2^{1'}\mathbf{g}_{1'} + \beta_2^{2'}\mathbf{g}_{2'} + \beta_2^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$

$$\mathbf{g}_3 = \beta_3^{1'}\mathbf{g}_{1'} + \beta_3^{2'}\mathbf{g}_{2'} + \beta_3^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$

符合： $\boldsymbol{\beta}' = \mathbf{T}^{ij'}\boldsymbol{\beta}[\mathbf{T}^{ij'}]^T$

因此该矩阵是二阶张量

一、张量（见《张量分析》）

- **什么是张量（pp. 23）**

4、思考：如何进一步构造三阶、或者更高阶张量?

张量的定义：由若干有序数组成的集合，并且当坐标系改变时满足相应的坐标转换关系

一、张量（见《张量分析》）

- **什么是张量（pp. 23）**

4、思考：如何进一步构造三阶、或者更高阶张量?

张量的定义：由若干有序数组成的集合，并且当坐标系改变时满足相应的坐标转换关系

以三阶张量为例，需要回答以下问题：

(1) 三阶张量是由多少个数组成的集合?

(2) 这些数按照什么顺序排列?

(3) 当坐标系改变时应该满足什么样的坐标转换关系?

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢（pp. 17-20）**

1、为了便于进一步定义三阶、或者更高阶张量，引入并矢运算（也称为张量积运算）

2、两个一阶张量a和b的并矢运算记为 **ab** （a与b的并矢、a并b）

3、并矢运算的定义

例如：a与b的并矢如下

$$
\begin{aligned}
\mathbf{ab} &= \left(a^1\mathbf{g}_1 + a^2\mathbf{g}_2 + a^3\mathbf{g}_3\right)\left(b^1\mathbf{g}_1 + b^2\mathbf{g}_2 + b^3\mathbf{g}_3\right) \\
&= a^1b^1\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1 + a^1b^2\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2 + a^1b^3\mathbf{g}_1\mathbf{g}_3 \\
&\quad + a^2b^1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_1 + a^2b^2\mathbf{g}_2\mathbf{g}_2 + a^2b^3\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3 \\
&\quad + a^3b^1\mathbf{g}_3\mathbf{g}_1 + a^3b^2\mathbf{g}_3\mathbf{g}_2 + a^3b^3\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3
\end{aligned}
$$

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢（pp. 17-20）**

3、并矢运算的定义

例如：a与b的并矢如下

这个并不是矢量的点乘，而是基矢量的并矢，代表每一个系数的顺序

按照“序”将每个系数排列起来

$$\mathbf{ab}=\left(a^1\mathbf{g}_1+a^2\mathbf{g}_2+a^3\mathbf{g}_3\right)\left(b^1\mathbf{g}_1+b^2\mathbf{g}_2+b^3\mathbf{g}_3\right)$$

$$=\boxed{a^1b^1}\boxed{\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1}+a^1b^2\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2+a^1b^3\mathbf{g}_1\mathbf{g}_3$$

$$+a^2b^1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_1+a^2b^2\mathbf{g}_2\mathbf{g}_2+a^2b^3\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3$$

$$+a^3b^1\mathbf{g}_3\mathbf{g}_1+a^3b^2\mathbf{g}_3\mathbf{g}_2+a^3b^3\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3$$

$$\begin{bmatrix} a^1b^1 & a^1b^2 & a^1b^3 \\ a^2b^1 & a^2b^2 & a^2b^3 \\ a^3b^1 & a^3b^2 & a^3b^3 \end{bmatrix}$$

构造了一个矩阵

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢（pp. 17-20）**

4、可以证明这个矩阵就是一个矩阵形式的二阶张量

$$\begin{bmatrix} a^1b^1 & a^1b^2 & a^1b^3 \\ a^2b^1 & a^2b^2 & a^2b^3 \\ a^3b^1 & a^3b^2 & a^3b^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_1 = \beta_1^{1'}\mathbf{g}_{1'} + \beta_1^{2'}\mathbf{g}_{2'} + \beta_1^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$

$$\mathbf{g}_2 = \beta_2^{1'}\mathbf{g}_{1'} + \beta_2^{2'}\mathbf{g}_{2'} + \beta_2^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$

$$\mathbf{g}_3 = \beta_3^{1'}\mathbf{g}_{1'} + \beta_3^{2'}\mathbf{g}_{2'} + \beta_3^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{ab} &= \left(a^1\mathbf{g}_1 + a^2\mathbf{g}_2 + a^3\mathbf{g}_3\right)\left(b^1\mathbf{g}_1 + b^2\mathbf{g}_2 + b^3\mathbf{g}_3\right) \\ &= a^1b^1\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1 + a^1b^2\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2 + a^1b^3\mathbf{g}_1\mathbf{g}_3 \\ &\quad + a^2b^1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_1 + a^2b^2\mathbf{g}_2\mathbf{g}_2 + a^2b^3\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3 \\ &\quad + a^3b^1\mathbf{g}_3\mathbf{g}_1 + a^3b^2\mathbf{g}_3\mathbf{g}_2 + a^3b^3\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3\end{aligned}$$

代入

1、证明方法与前面类似：将旧的基矢量沿着新的基矢量分解，这里不再介绍

2、结论：两个一阶张量的并矢运算，可以得到一个二阶张量

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢（pp. 17-20）**

5、实际上，矩阵形式的二阶张量还可以分解成如下矩阵运算的形式

$$[\mathbf{ab}]=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}=[\mathbf{a}][\mathbf{b}]^T$$

另外，两个一阶张量的并矢也等同于向量的直积运算，记为$[\mathbf{a}]\otimes[\mathbf{b}]^T$

定义：设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{p\times q}$，称分块矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}_{mp\times nq}$$

为A与B的直积（张量积或Kronecker积）. 记为$A\otimes B=(a_{ij}B)_{mp\times nq}$.

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢（pp. 17-20）**

6、二阶张量的混变分量

$$\mathbf{ab} = \left(a^1\mathbf{g}_1 + a^2\mathbf{g}_2 + a^3\mathbf{g}_3\right)\left(b_1\mathbf{g}^1 + b_2\mathbf{g}^2 + b_3\mathbf{g}^3\right)$$

$$= a^1b_1\mathbf{g}_1\mathbf{g}^1 + a^1b_2\mathbf{g}_1\mathbf{g}^2 + a^1b_3\mathbf{g}_1\mathbf{g}^3$$

$$+a^2b_1\mathbf{g}_2\mathbf{g}^1 + a^2b_2\mathbf{g}_2\mathbf{g}^2 + a^2b_3\mathbf{g}_2\mathbf{g}^3$$

$$+a^3b_1\mathbf{g}_3\mathbf{g}^1 + a^3b_2\mathbf{g}_3\mathbf{g}^2 + a^3b_3\mathbf{g}_3\mathbf{g}^3$$

$$[\mathbf{ab}]^i_{\cdot j} = \begin{bmatrix} a^1b_1 & a^1b_2 & a^1b_3 \\ a^2b_1 & a^2b_2 & a^2b_3 \\ a^3b_1 & a^3b_2 & a^3b_3 \end{bmatrix}$$

思考：如何构造张量的协变分量?

先逆变、后协变

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢（pp. 17-20）**

7、利用并矢构造三阶张量

$$\mathbf{abc} = \left(a^1\mathbf{g}_1 + a^2\mathbf{g}_2 + a^3\mathbf{g}_3\right)\left(b^1\mathbf{g}_1 + b^2\mathbf{g}_2 + b^3\mathbf{g}_3\right)\left(c^1\mathbf{g}_1 + c^2\mathbf{g}_2 + c^3\mathbf{g}_3\right)$$

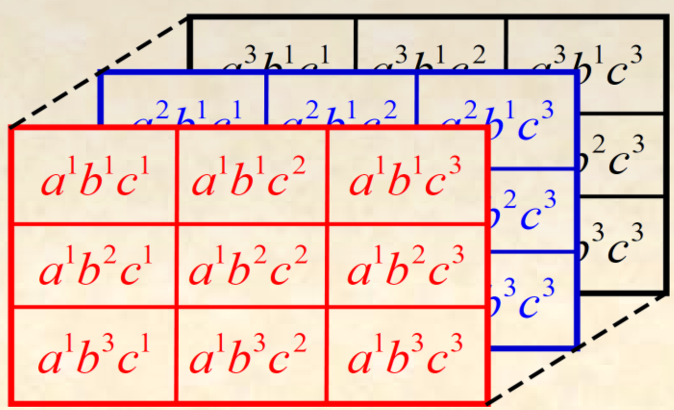
$$= a^1b^1c^1\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1 + a^1b^1c^2\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2 + a^1b^1c^3\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1\mathbf{g}_3 +$$

$$+a^1b^2c^1\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_1 + a^1b^2c^2\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_2 + a^1b^2c^3\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3$$

$$\cdots$$

$$+a^3b^3c^1\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3\mathbf{g}_1 + a^3b^3c^2\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3\mathbf{g}_2 + a^3b^3c^3\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3$$

$[\mathbf{abc}]^{ijk} =$



一、张量（见《张量分析》）

- **并矢**

8、三阶张量的坐标变换

将
$$\mathbf{g}_1=\beta_1^{1'}\mathbf{g}_{1'}+\beta_1^{2'}\mathbf{g}_{2'}+\beta_1^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$
$$\mathbf{g}_2=\beta_2^{1'}\mathbf{g}_{1'}+\beta_2^{2'}\mathbf{g}_{2'}+\beta_2^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$
$$\mathbf{g}_3=\beta_3^{1'}\mathbf{g}_{1'}+\beta_3^{2'}\mathbf{g}_{2'}+\beta_3^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$

代入下式

$$\mathbf{abc}=\left(a^1\mathbf{g}_1+a^2\mathbf{g}_2+a^3\mathbf{g}_3\right)\left(b^1\mathbf{g}_1+b^2\mathbf{g}_2+b^3\mathbf{g}_3\right)\left(c^1\mathbf{g}_1+c^2\mathbf{g}_2+c^3\mathbf{g}_3\right)$$

举例：某个新坐标分量的转换公式如下

$$a^{1'}b^{2'}c^{3'}=\left(a^1\beta_1^{1'}+a^2\beta_2^{1'}+a^3\beta_3^{1'}\right)\left(b^1\beta_1^{2'}+b^2\beta_2^{2'}+b^3\beta_3^{2'}\right)$$

对应的序？$\Updownarrow$

$$\mathbf{g}_{1'}\mathbf{g}_{2'}\mathbf{g}_{3'}$$

$$\times\left(c^1\beta_1^{3'}+c^2\beta_2^{3'}+c^3\beta_3^{3'}\right)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\beta_i^{1'}\beta_j^{2'}\beta_k^{3'}a^ib^jc^k$$

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢**

8、三阶张量的坐标变换

推广到一般情况

哑指标

$$a^{i'}b^{j'}c^{k'}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\beta_i^{i'}\beta_j^{j'}\beta_k^{k'}a^i b^j c^k=\beta_i^{i'}\beta_j^{j'}\beta_k^{k'}a^i b^j c^k$$

三阶或更高阶张量的坐标变换过程无法写成矩阵运算的形式。

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢**

9、并矢的运算律（pp. 18-19）

结合律	$m(ab)=(ma)b=a(mb)=mab$	
	$(ab)c=a(bc)=abc$	(1.5.4)
	$(ma)(nb)=(mn)(ab)$	

分配律	$a(b+c)=ab+ac$	
	$(a+b)c=ac+bc$	(1.5.5)
	$m(ab+cd)=mab+mcd$	
	$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$	

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢**

9、并矢的运算规律（pp. 19）

交换律不再成立　　$\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$

$$[\mathbf{ab}] = [\mathbf{a}][\mathbf{b}]^T = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{ba}] = [\mathbf{b}][\mathbf{a}]^T = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \end{bmatrix}$$

1、加上中括号[]以表示矩阵运算

2、可见：分量大小依然相同，但是序已经发生了变化

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢**

10、并矢的点积运算（pp. 19）

定义:

矢量点乘并矢: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{ab} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}$

并矢点乘矢量: $\mathbf{ab} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})$

矢量点乘三阶并矢: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{abc} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})\mathbf{bc}$

三阶并矢点乘矢量: $\mathbf{abc} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{ab}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{u})$

并矢点乘并矢: $\mathbf{ab} \cdot \mathbf{cd} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{ad}$

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢运算的应用**

  - 投影张量

计算矢量t沿单位矢量u的投影分量

$$\mathbf{r}=(\mathbf{t}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} \qquad [\mathbf{r}]=\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

把它写成矩阵运算的形式

$\boxed{\text{在坐标系A下}}$

$\boxed{\text{转置}}$

$$[\mathbf{r}]=([\bar{\mathbf{t}}][\mathbf{u}])[\mathbf{u}]=[\mathbf{u}]([\bar{\mathbf{t}}][\mathbf{u}])$$

$$=[\mathbf{u}]([\bar{\mathbf{u}}][\mathbf{t}])=([\mathbf{u}][\bar{\mathbf{u}}])[\mathbf{t}]$$

$$[\mathbf{u}]^A[\bar{\mathbf{u}}]^A=\begin{bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_3^A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^A & u_2^A & u_3^A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (u_1^A)^2 & u_1^A u_2^A & u_1^A u_3^A \\ u_2^A u_1^A & (u_2^A)^2 & u_2^A u_3^A \\ u_3^A u_1^A & u_3^A u_2^A & (u_3^A)^2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{并矢运算的矩阵形式}}$

$$\mathbf{P}=\mathbf{u}\mathbf{u}$$

$\boxed{\text{投影张量}}$

张量证明?

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢运算的应用**

  - 投影张量

计算矢量t沿单位矢量u的投影分量

$$\mathbf{r}=(\mathbf{t}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} \qquad [\mathbf{r}]=\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

把它写成矩阵运算的形式

转置

$$[\mathbf{r}]=([\bar{\mathbf{t}}][\mathbf{u}])[\mathbf{u}]=[\mathbf{u}]([\bar{\mathbf{t}}][\mathbf{u}])$$

$$=[\mathbf{u}]([\bar{\mathbf{u}}][\mathbf{t}])=([\mathbf{u}][\bar{\mathbf{u}}])[\mathbf{t}]$$

$$[\mathbf{u}]^A[\bar{\mathbf{u}}]^A=\begin{bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_3^A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^A & u_2^A & u_3^A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (u_1^A)^2 & u_1^A u_2^A & u_1^A u_3^A \\ u_2^A u_1^A & (u_2^A)^2 & u_2^A u_3^A \\ u_3^A u_1^A & u_3^A u_2^A & (u_3^A)^2 \end{bmatrix}$$

并矢的矩阵运算形式

$$\mathbf{P}=\mathbf{u}\mathbf{u}$$

投影张量

张量证明：

$$[\mathbf{P}]^B=[\mathbf{u}]^B[\bar{\mathbf{u}}]^B=\left([\mathbf{T}]^{BA}[\mathbf{u}]^A\right)\overline{\left([\mathbf{T}]^{BA}[\mathbf{u}]^A\right)}$$

$$=[\mathbf{T}]^{BA}[\mathbf{u}]^A[\bar{\mathbf{u}}]^A[\bar{\mathbf{T}}]^{BA}=[\mathbf{T}]^{BA}[\mathbf{P}]^A[\bar{\mathbf{T}}]^{BA}$$

一、张量（见《张量分析》）

• 并矢运算的应用

➢ 投影张量

实际上，前面推导过程是逆向运用并矢的点积运算

矢量t沿单位矢量u的投影分量

$$\mathbf{r} = (\mathbf{t}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}$$

矩阵运算形式

$$[\mathbf{r}] = ([\bar{\mathbf{t}}][\mathbf{u}])[\mathbf{u}] = [\mathbf{u}]([\bar{\mathbf{t}}][\mathbf{u}]) = [\mathbf{u}]([\bar{\mathbf{u}}][\mathbf{t}]) = ([\mathbf{u}][\bar{\mathbf{u}}])[\mathbf{t}]$$

$$\mathbf{r} = \boxed{(\mathbf{t}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}} = \mathbf{u}(\mathbf{t}\cdot\mathbf{u}) = \mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{t}) = \boxed{\mathbf{u}\mathbf{u}\cdot\mathbf{t}}$$

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢运算的应用**

  - 平面投影张量

应用：电视成像导引头将立体物体投影到聚焦平面上

$$\mathbf{s}=\mathbf{t}-(\mathbf{t}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}$$

写成矩阵形式:

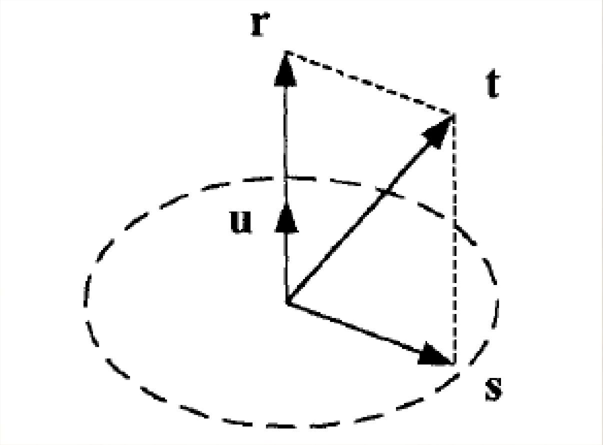
$$[\mathbf{s}]=[\mathbf{t}]-[\mathbf{u}][\bar{\mathbf{u}}][\mathbf{t}]$$

$$=\big([\mathbf{E}]-[\mathbf{u}][\bar{\mathbf{u}}]\big)[\mathbf{t}]$$

投影张量P

单位矩阵

平面投影张量N



平面投影张量

一、张量（见《张量分析》）

- **并矢运算的应用**
  - ➢ 平面投影张量

Example 2.8 Focal Plane Imaging

Problem. An aircraft is imaged on a focal plane array. To simulate that process, we need to develop the equations that project the aircraft's silhouette on the focal plane. We keep it simple by modeling the perspective of the aircraft with the displacement vectors of the tip, stern, right wing tip, and left wing tip wrt the geometrical center C, $\boldsymbol{t}_{B_1C}, \boldsymbol{t}_{B_2C}, \boldsymbol{t}_{B_3C}$, and $\boldsymbol{t}_{B_4C}$. The displacement of the aircraft center C wrt the focal plane center F is given by $\boldsymbol{t}_{CF}$ and the orientation of the planar array by the unit normal vector $\boldsymbol{u}$. Separation distance and optics reduce the scale of the projections on the focal plane by a factor f. Determine the aircraft attitude vectors $\boldsymbol{s}_{B_1C}, \boldsymbol{s}_{B_2C}, \boldsymbol{s}_{B_3C}$, and $\boldsymbol{s}_{B_4C}$ and the displacement vector $\boldsymbol{s}_{CF}$ in the focal plane. (To practice, make a sketch.)

Solution. Subjecting the displacement vectors to the plane projection tensor $N = E - u\bar{u}$ and reducing the magnitude by f produces the image

$$\boldsymbol{s}_{B_1C} = fN\boldsymbol{t}_{B_1C}, \quad \boldsymbol{s}_{B_2C} = fN\boldsymbol{t}_{B_2C}, \quad \boldsymbol{s}_{B_3C} = fN\boldsymbol{t}_{B_3C}, \quad \boldsymbol{s}_{B_4C} = fN\boldsymbol{t}_{B_4C}$$

优势：一个平面投影张量N就解决了不同矢量的投影问题

and the displacement of the aircraft from the focal plane center

$$\boldsymbol{s}_{CF} = fN\boldsymbol{t}_{CF}$$

For building the simulation, the vectors have to be converted to matrices. Most likely, the aircraft data are in geographic coordinates $]^G$, and the image should be portrayed in focal plane coordinates $]^F$. Therefore, a transformation between the two coordinate systems $[T]^{GF}$ will enter the formulation.