《前沿数学方法及其在航天工程中的应用》

张量在流体力学中的应用

授课教师：陈 兵

北京航空航天大学 / 宇航学院 / 推进系 / 高超声速推进实验室
航天液体动力全国重点实验室

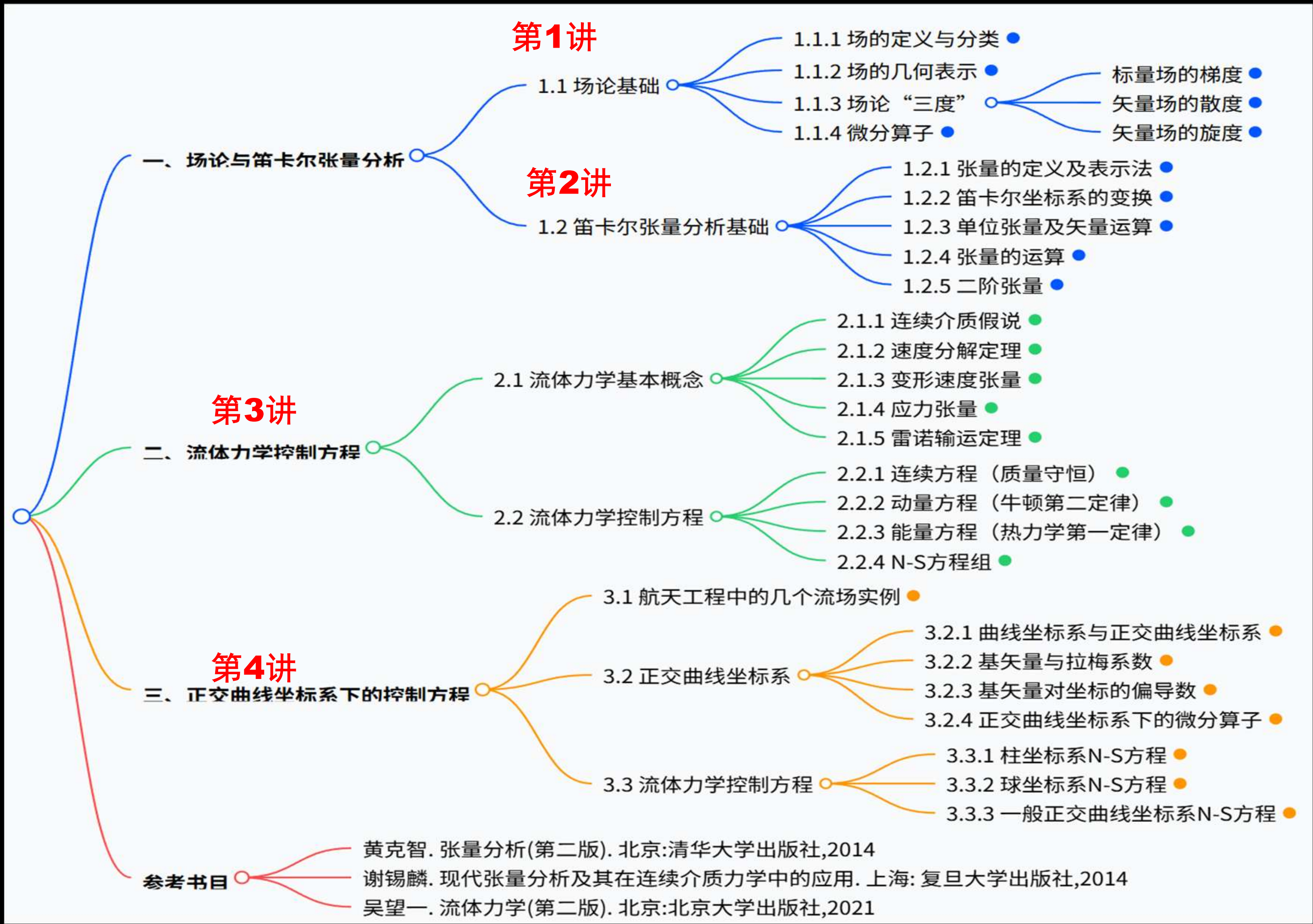
第二部分：张量在流体力学中的应用

一. 场论与笛卡尔张量分析

二. 流体力学控制方程

三. 正交曲线坐标系下的控制方程

第二部分教学内容的知识图谱



参考书目

1. 黄克智. **张量分析（第二版）**．北京：清华大学出版社，2014
2. 谢锡麟. **现代张量分析及其在连续介质力学中的应用**. 上海：复旦大学出版社，2014
3. 吴望一. **流体力学（第二版）**．北京：北京大学出版社，2021

一、场论与张量分析

- □ 场论基础
- □ 笛卡尔张量分析基础

1.1 场论基础

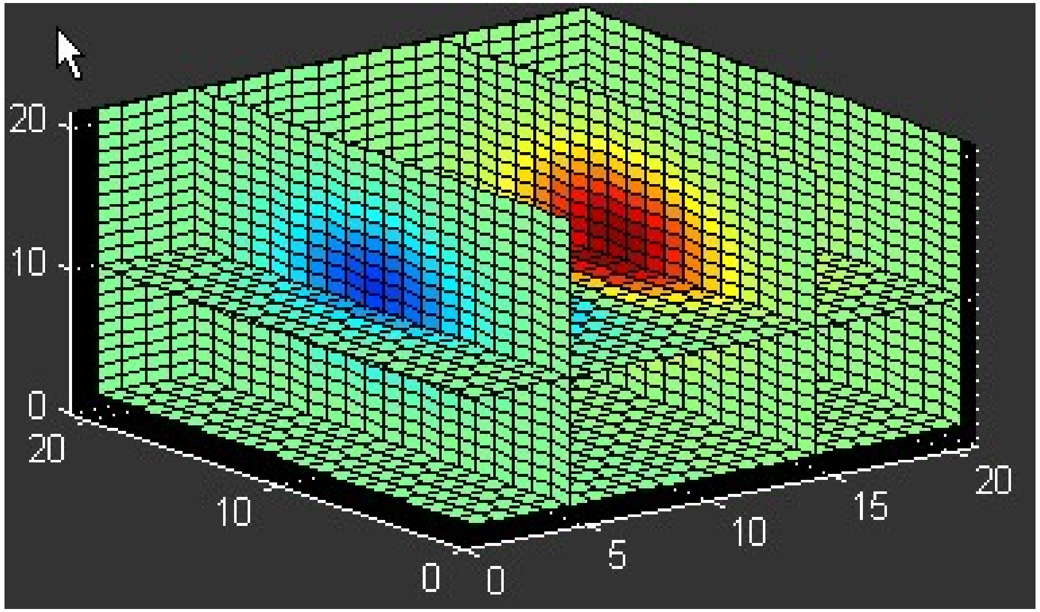
- 场的定义与分类
- 场的几何表示
- 标量场的梯度
- 矢量场的散度
- 矢量场的旋度
- 微分算子

场论“三度”

1.1 场论基础

① 场的定义

什么是场?



计算机模拟的**温度场**，红色表示高温，冷色表示低温

某飞机飞行时的流场

1.1 场论基础

① 场的定义及分类

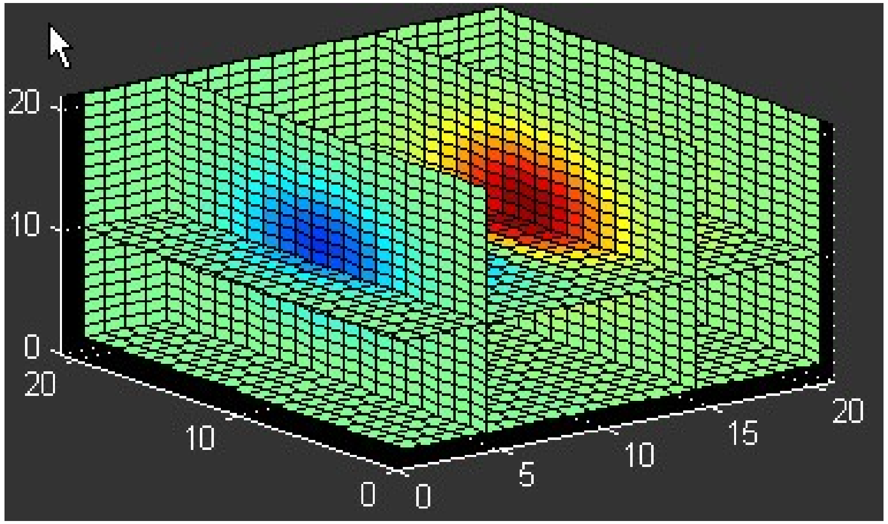
■场的定义

- □ 设在**空间某个区域内**的**任意一点**上，都定义了**某个物理量（函数）**，则称定义在该空间域内的**物理量（函数）为场。**

- □ 如果定义的是标量函数，则称之为**标量场**
  - ※ 如温度场，密度场，压力场

- □ 如果定义的是矢量函数，则称之为**矢量场**
  - ※ 如重力场，速度场，电磁场

- □ 如果定义的是张量，则称为**张量场**
  - ※ 如流体力学中的应变率场、应力场



温度场

1.1 场论基础

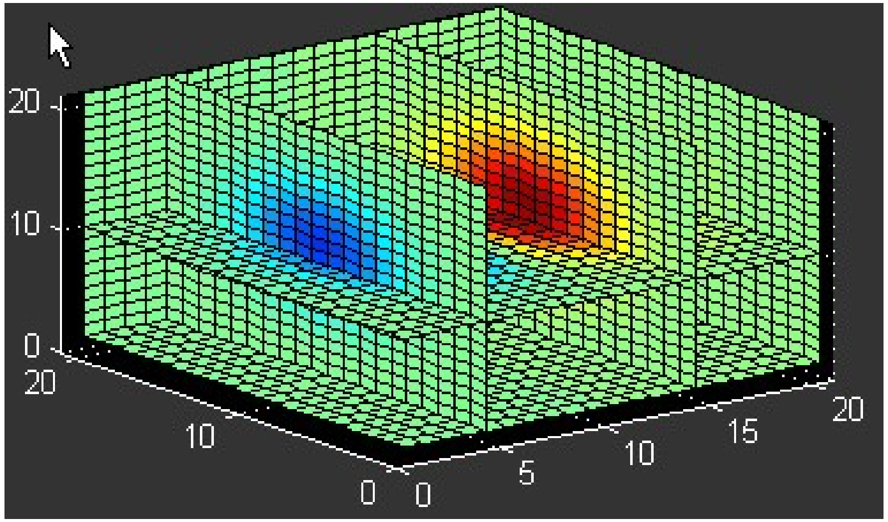
① 场的定义及分类

■场的两大要素

- □ 空间变量 $\mathbf{r}$ 或 x , y , z
- □ 时间变量 t

■ 定义举例：

- □ 矢量场$\mathbf{a}(\mathbf{r},t)$ 或是 $\mathbf{a}(x,y,z,t)$
- □ 标量场$\varphi(\mathbf{r},t)$或是 $\varphi(x,y,z,t)$



温度场

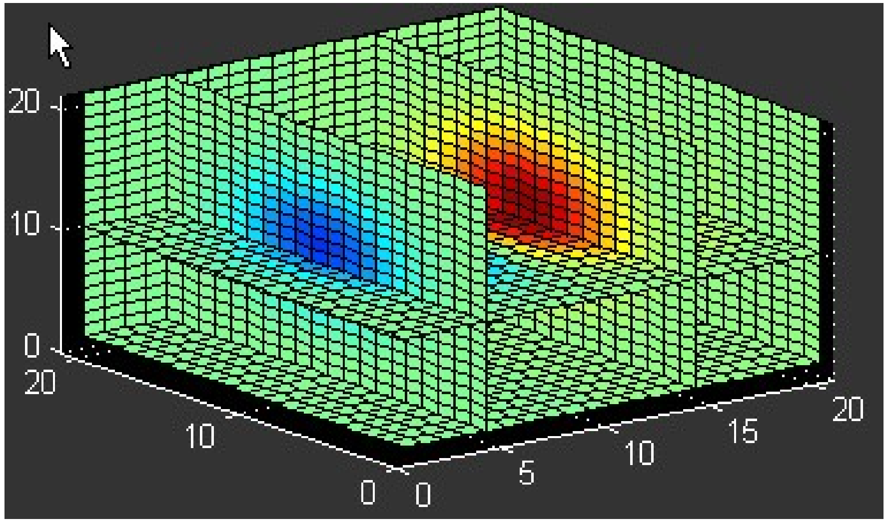
1.1 场论基础

① 场的定义及分类

■场的分类

- □ 场的**空间分布**特性
  - ※ 同一时刻场函数随空间坐标而变化
  - ※ 不随空间坐标而变的场称为**均匀场**，反之称为**非均匀场**

- □ 场的**时间分布**特性
  - ※ 同一点上场函数随时间而变化
  - ※ 如场内函数值不随时间变化而变化称为**定常场**，反之称为**非定常场**



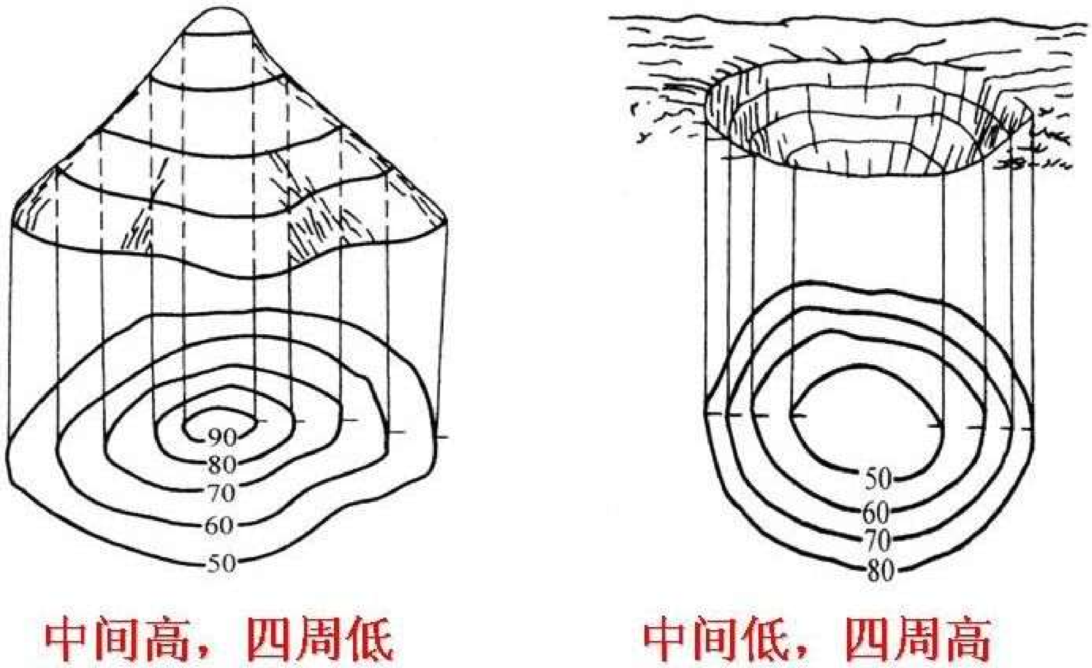
温度场

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

② 场的几何表示

■**标量场：等值线**

根据等高线的相对位置、疏密程度看出标量函数/高度的变化状况：**高度值**和**变化快慢。**

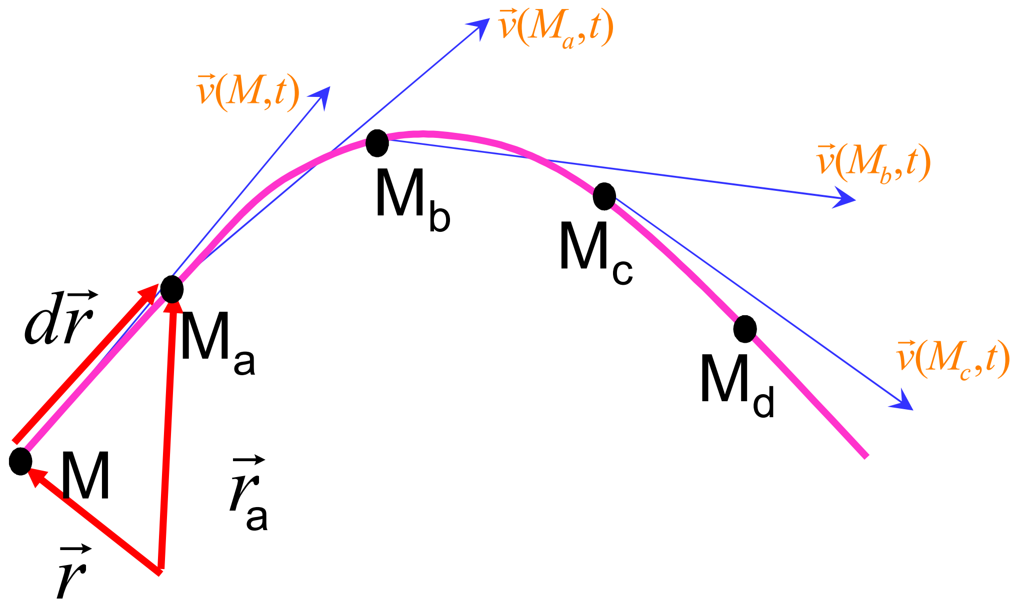


地形等高线图

② 场的几何表示

■**矢量场：矢量线**

- 矢量的大小是一个标量，可以用**等位面**的概念来几何表示，矢量的方向则采用**矢量线**来表示。
- <u>**矢量线**</u>**：**线上每一点的切线方向与该点的矢量方向重合（如流体力学中的流线）



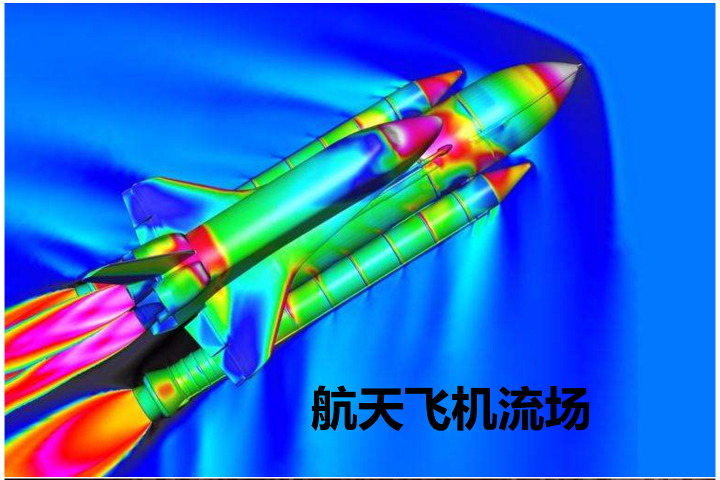
矢量场的矢量线

- 矢量线的方程

$$d\vec{r}\times\vec{V}=0 \Rightarrow \frac{dx}{V_x(x,y,z,t)}=\frac{dy}{V_y(x,y,z,t)}=\frac{dz}{V_z(x,y,z,t)}$$

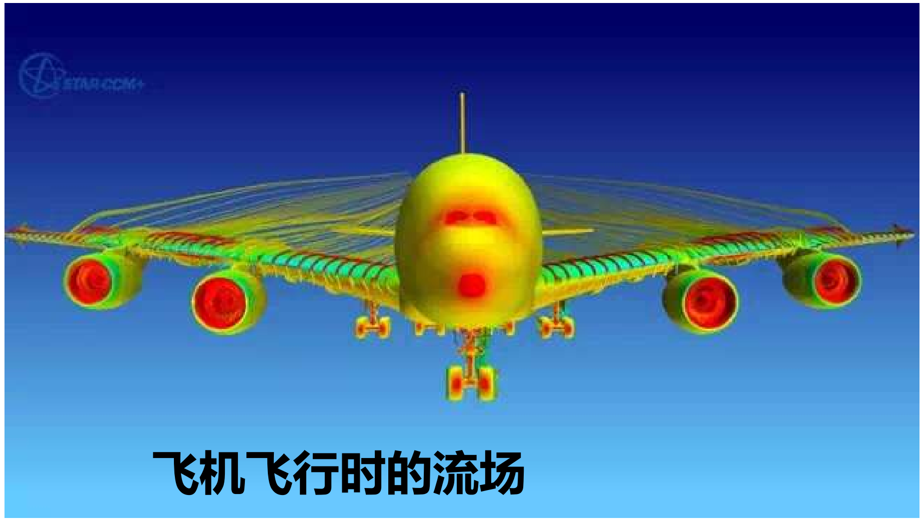
1.1 场论基础

② 场的几何表示

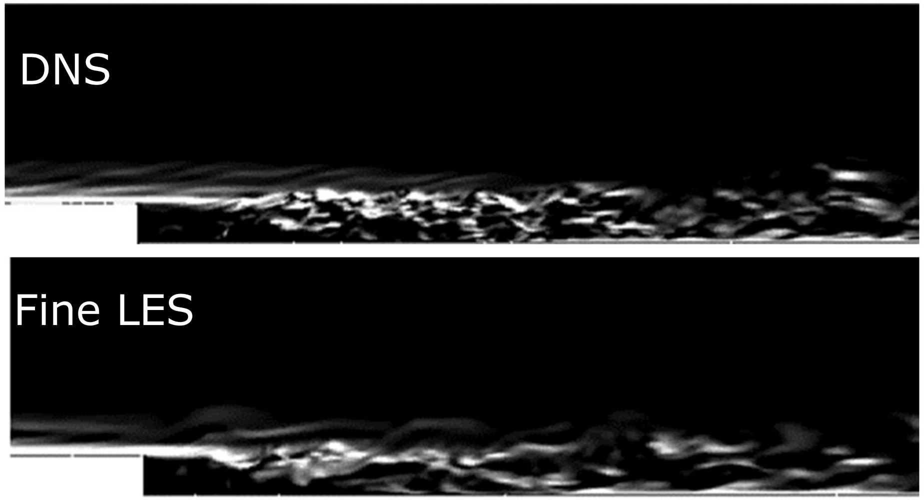


航天飞机流场

协和飞机着陆时的流场



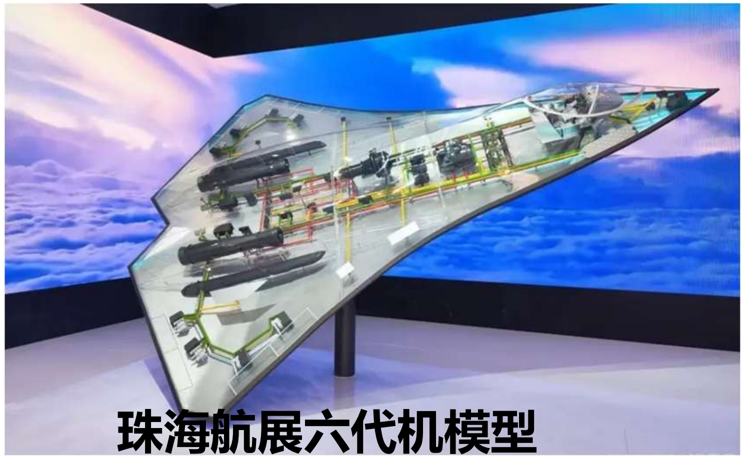
飞机飞行时的流场



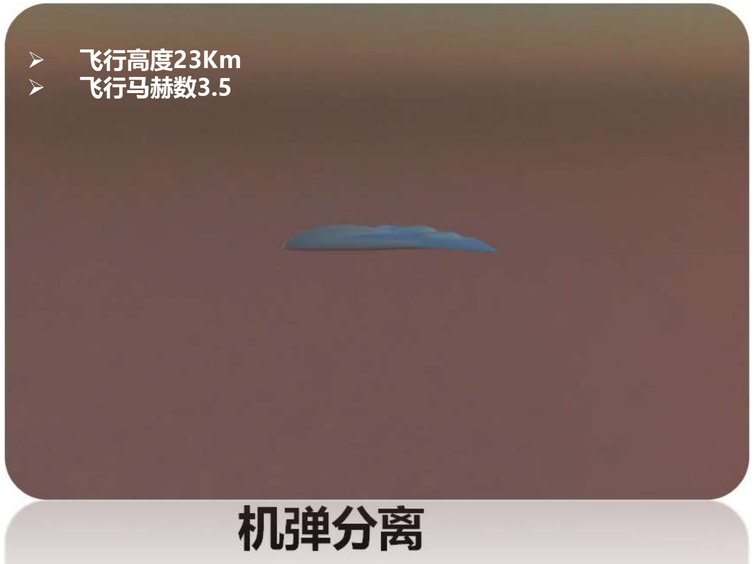
后台阶流动 CTR,Stanford

1.1 场论基础

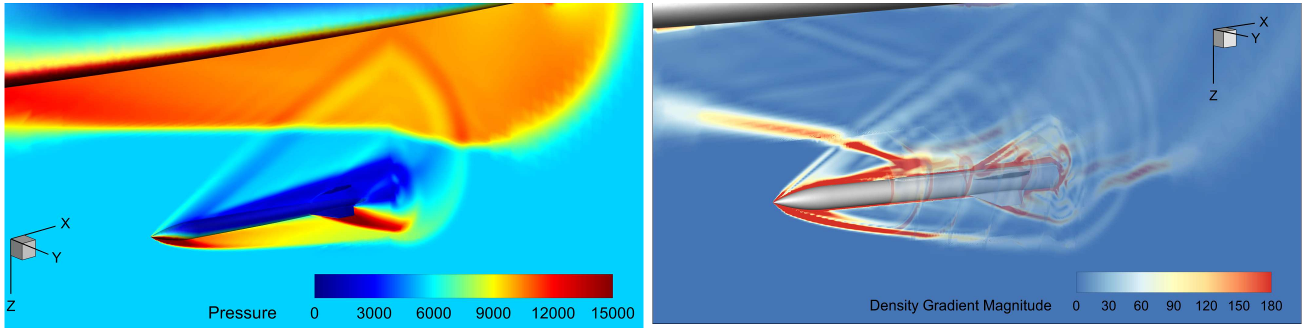
② 场的几何表示



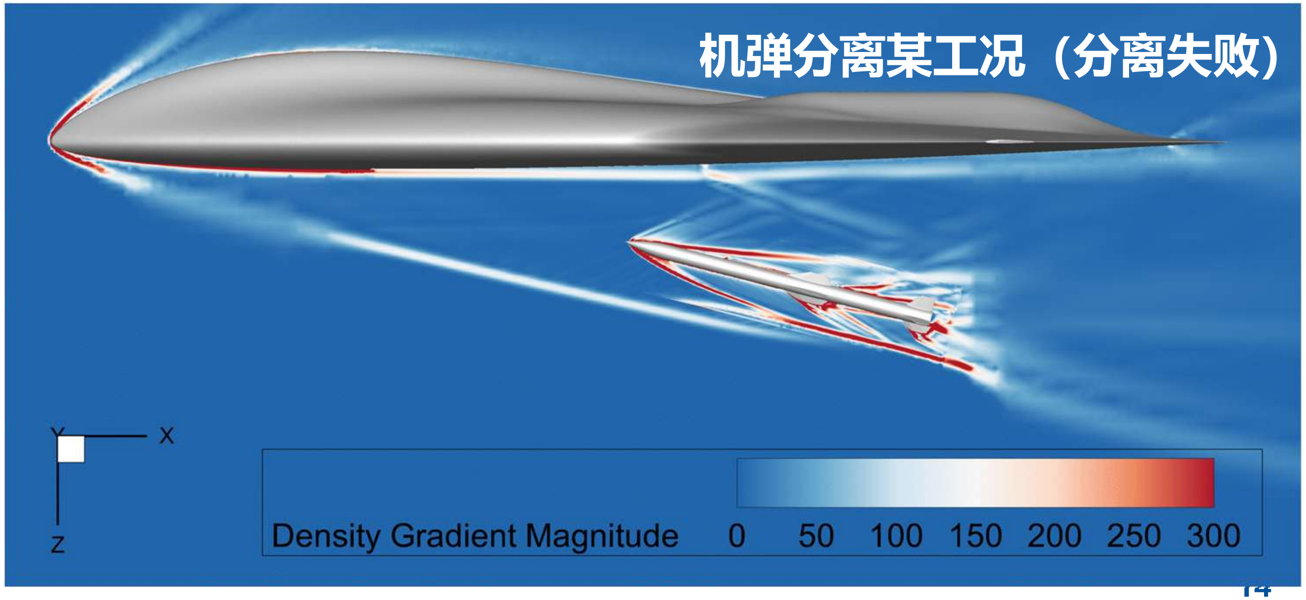
珠海航展六代机模型



机弹分离

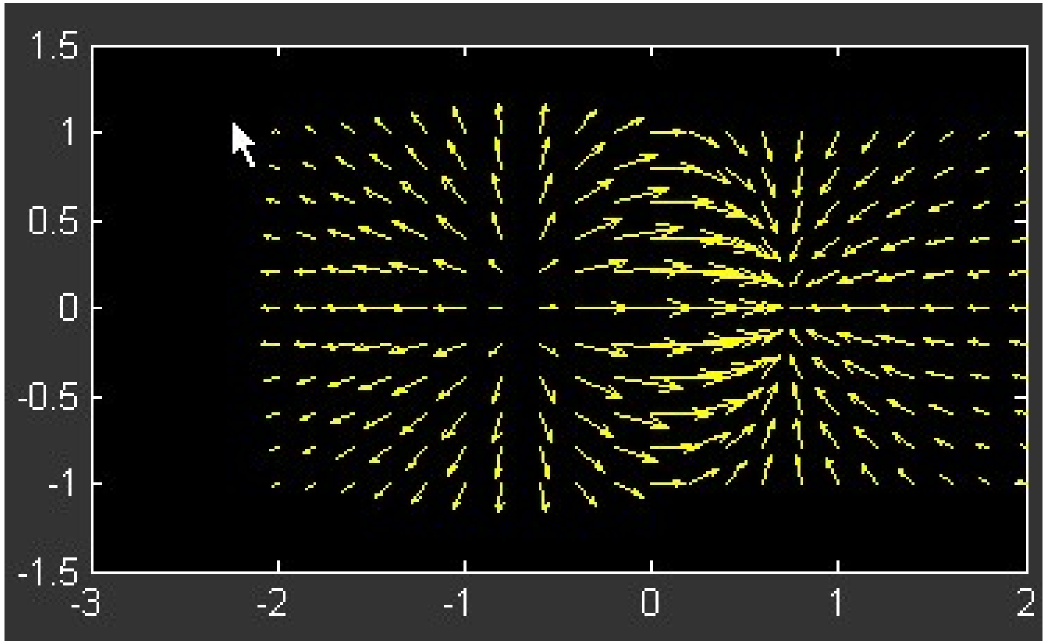


机弹分离典型流场

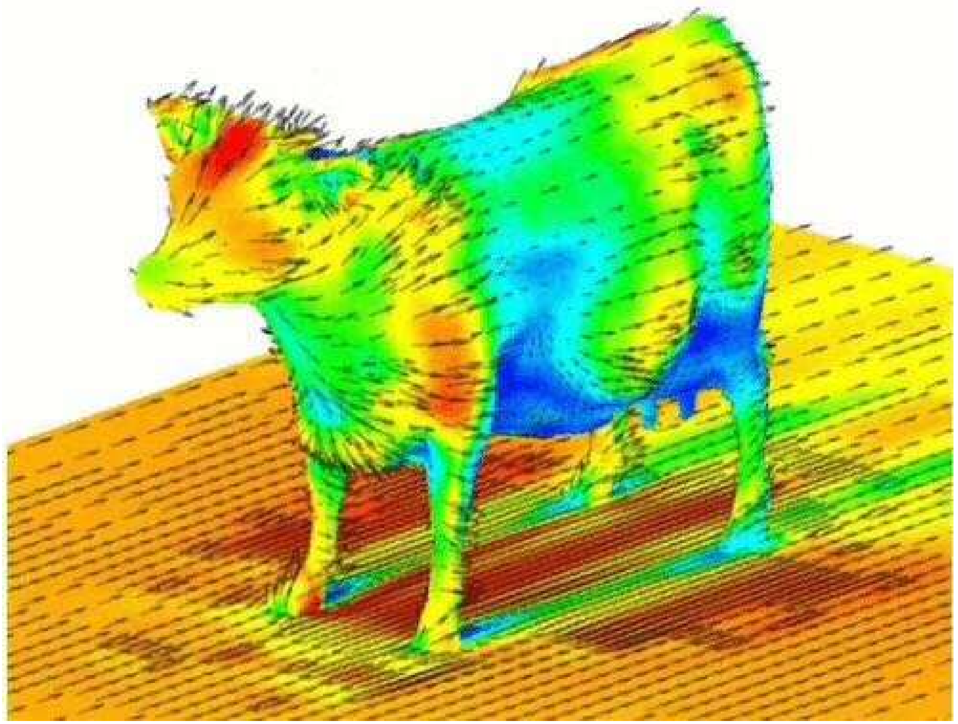


1.1 场论基础

② 场的几何表示



用速度矢量表示的速度场



“科学吹牛”

1.1 场论基础

➢ 场论“三度”

■研究场时，有三个重要量 —— **“三度”**

- □ 标量场：**梯度**
  - ※ 方向导数
  - ※ 梯度
- □ 矢量场：**散度**
  - ※ 矢量的**通量**
  - ※ 奥-高定理
- □ 矢量场：**旋度**
  - ※ 矢量的**环量**
  - ※ 斯托克斯定理

③ 标量场的梯度

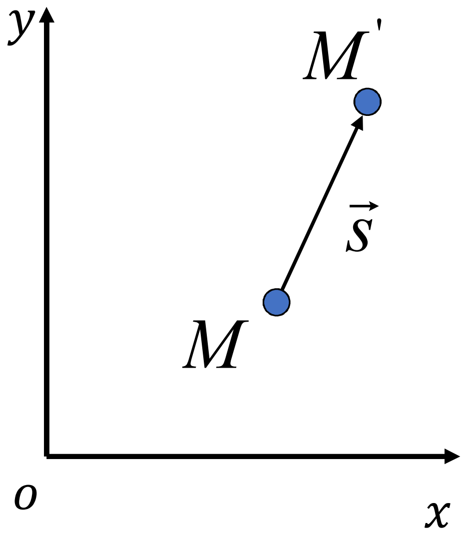
■方向导数

有空间点M和一个方向$\vec{s}$。对于数量场ϕ，若下面极限存在

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{s}} = \lim_{MM' \to 0} \frac{\phi(M') - \phi(M)}{MM'}$$

称$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{s}}$是场$\phi$在$M$处沿$\vec{s}$方向的**方向导数**。

这里$\vec{s}$方向是任意方向。$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{s}}$表明场函数$\phi(\vec{r},t)$在$M$点、沿曲线$\vec{s}$方向的变化率。



方向导数

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

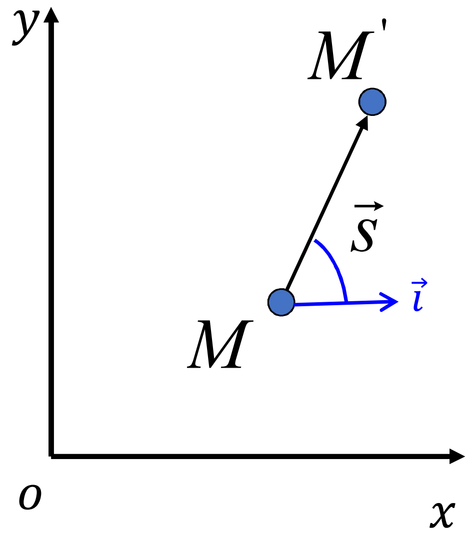
③ 标量场的梯度

■方向导数

可以在直角坐标系中，将方向导数展开，其表达式为:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\vec{s}}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\cos(\vec{s},\vec{i})+\frac{\partial\phi}{\partial y}\cos(\vec{s},\vec{j})+\frac{\partial\phi}{\partial z}\cos(\vec{s},\vec{k})$$

很显然，$\frac{\partial\phi}{\partial x}$、$\frac{\partial\phi}{\partial y}$和$\frac{\partial\phi}{\partial z}$分别表示在M点，沿着$\vec{i}$、$\vec{j}$和$\vec{k}$方向的变化率。



方向导数

1.1 场论基础

③ 标量场的梯度

■方向导数

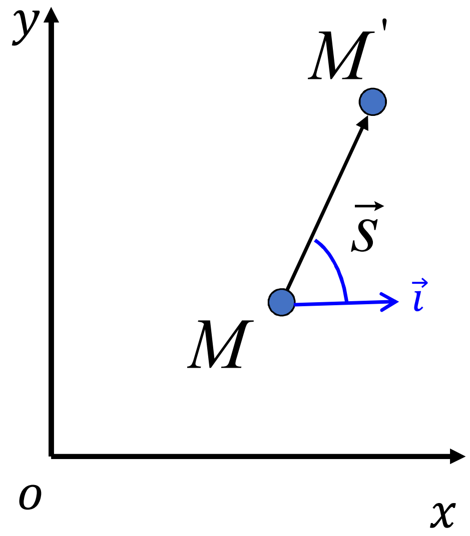
可以按定义，简单证明一下展开式:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\vec{s}}=\lim_{MM'\to0}\frac{\phi(M')-\phi(M)}{MM'}$$

$$=\lim_{\rho\to0}\frac{\phi(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-\phi(x,y,z)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}$$

$$=\lim_{\rho\to0}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\Delta x}{\rho}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\Delta y}{\rho}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\Delta z}{\rho}\right)$$

$$=\frac{\partial\phi}{\partial x}\cos(\vec{s},\vec{i})+\frac{\partial\phi}{\partial y}\cos(\vec{s},\vec{j})+\frac{\partial\phi}{\partial z}\cos(\vec{s},\vec{k})$$



方向导数

③ 标量场的梯度

■方向导数

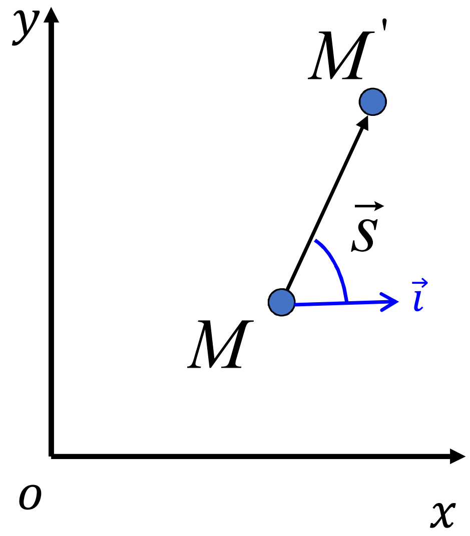
在直角坐标系中方向导数的表达式为:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\vec{s}}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\cos(\vec{s},\vec{i})+\frac{\partial\phi}{\partial y}\cos(\vec{s},\vec{j})+\frac{\partial\phi}{\partial z}\cos(\vec{s},\vec{k})$$

$$=\underbrace{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}\right)}_{grad\phi}\cdot\left(\cos(\vec{s},\vec{i})\vec{i}+\cos(\vec{s},\vec{j})\vec{j}+\cos(\vec{s},\vec{k})\vec{k}\right)$$

显然，$\vec{s}$方向的方向导数，等于一个矢量$grad\phi$在$\vec{s}$方向投影。这个矢量就是**梯度**。

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial\vec{s}}\right|=\|grad\phi\cdot\vec{s}^0\|\le\|grad\phi\|\,\|\vec{s}^0\|=\|grad\phi\|$$



方向导数

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

③ 标量场的梯度

■梯度的定义

数量场ϕ在M点处，存在这样一个**矢量**，其方向为场函数在M点处**变化率最大**的方向，其模是这个最大的变化率

$$grad\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k}$$

这个矢量为函数ϕ在M点的**梯度**，用它来描述M点邻域内函数的变化状况，是**标量场不均匀性的量度**。于是，方向导数可写为:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{s}} = grad\phi \cdot \vec{s}^0$$

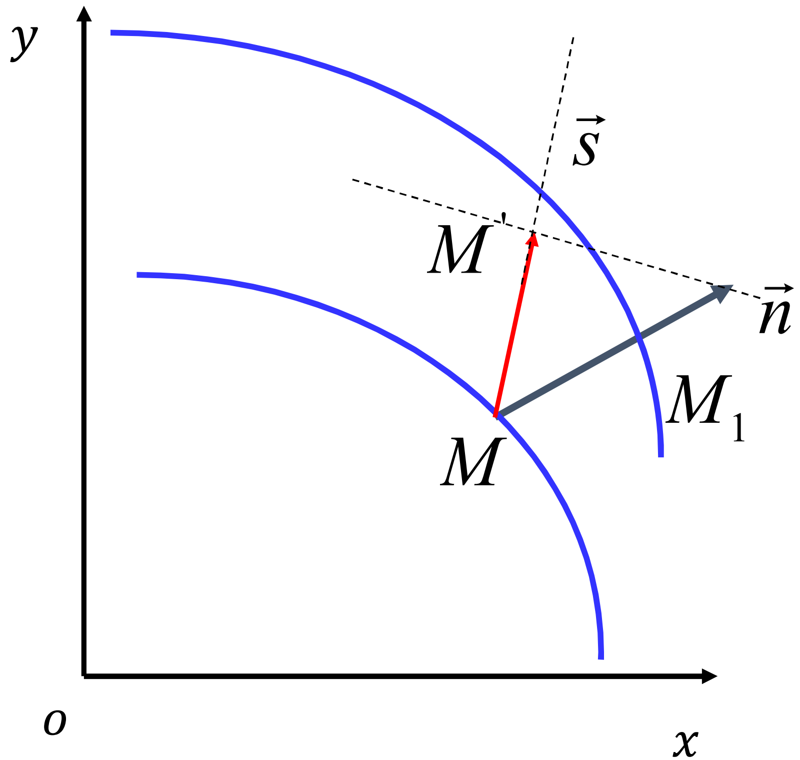
满足$\vec{a} = grad\phi$的矢量场称为**位势场**，ϕ称为**位势函数**。一个矢量场存在位势函数也叫“**有势**”。

③ 标量场的梯度

■梯度的性质一

梯度在任一方向上的投影等于该方向的方向导数。

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{s}} = grad\phi \cdot \vec{s}^{0}$$

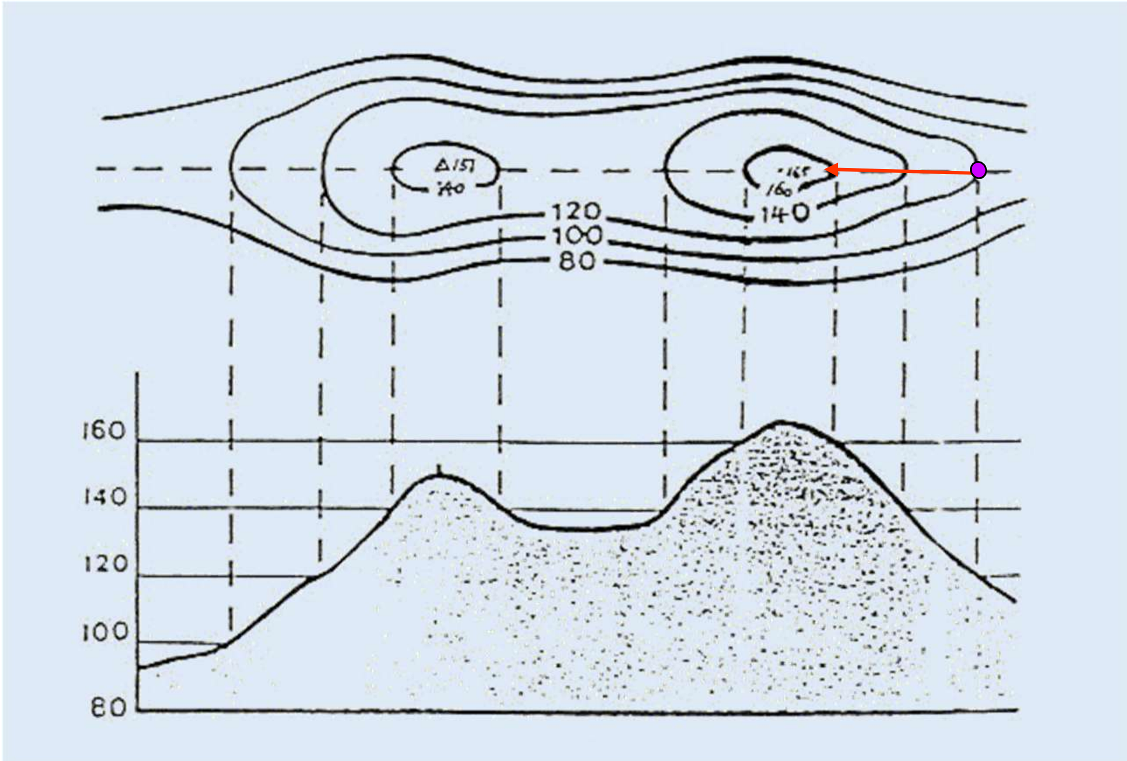


梯度与方向导数

③ 标量场的梯度

■梯度的性质二

梯度的方向，是等势面的法线方向，是位势函数变化最快的方向，且指向函数值增加的方向；大小是场函数沿等势面法线方向的方向导数的模。



梯度性质二

③ 标量场的梯度

■定理一

梯度$grad\phi$满足关系式:

$$d\phi = d\vec{r} \bullet grad\phi$$

反之，若

$$d\phi = d\vec{r} \bullet \vec{a}$$

则

$$\vec{a} = grad\phi$$

正定理证明:

$$\because \quad grad\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\therefore \ d\vec{r} \bullet grad\phi$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

$$= d\phi$$

③ 标量场的梯度

■定理一

梯度$grad\phi$满足关系式：

$$d\phi = d\vec{r} \cdot grad\phi$$

反之，若

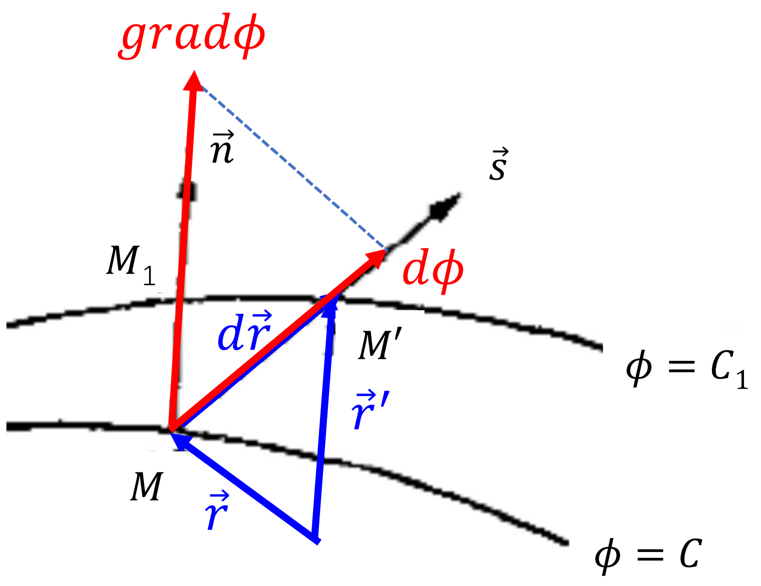
$$d\phi = d\vec{r} \cdot \vec{a}$$

则

$$\vec{a} = grad\phi$$

物理意义：

函数ϕ在M点沿$d\vec{r}$方向的增量，等于M点处的梯度在$d\vec{r}$方向的投影



③ 标量场的梯度

■定理二

若$\vec{a} = grad\phi$，且ϕ是矢径$\vec{r}$的**单值函数**，则沿**封闭曲线*L***的线积分：

$$\oint_L \vec{a} \bullet d\vec{r} = 0$$

反之，若

$$\oint_L \vec{a} \bullet d\vec{r} = 0$$

则$\vec{a}$必为某一标量函数的梯度，即$\vec{a} = grad\phi$。

正定理证明：

$\because \quad \vec{a} = grad\phi$

$\therefore \quad \oint_L \vec{a} \bullet d\vec{r} = \oint_L grad\phi \bullet d\vec{r} = \oint_L d\phi$

$\because$ ϕ是矢径$\vec{r}$的单值函数，则沿封闭曲线L的线积分

$\therefore \quad \oint_L d\phi = 0$

$\therefore \quad \oint_L \vec{a} \bullet d\vec{r} = 0$

③ 标量场的梯度

■练习题

A. 给定平面标量场ϕ,设在M点上已知两个方向的方向导数$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{s}_1}, \frac{\partial \phi}{\partial \vec{s}_2}$。试用几何方法求$M$点上的$grad\phi$。

B. 证明:

$a)\ \ grad(\vec{c}\cdot\vec{r}) = \vec{c}$, $\vec{c}$为常矢量

$b)\ \ grad\{\phi(r)\} = \phi'(r)gradr = \phi'(r)\vec{r}^0$

$c)\ \ grad\{\phi[u(\vec{r}), v(\vec{r})]\} = \frac{\partial \phi}{\partial u}gradu + \frac{\partial \phi}{\partial v}gradv$

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

④ 矢量场的散度

■矢量的通量

对于给定的矢量场$\vec{a}(\vec{r},t)$，在场内取一曲面S，并在S上取一面积元dS，在dS上取一点M，$\vec{n}$为S面上过M点的法线方向的单位矢量。在整个曲面上积分，得矢量$\vec{a}$通过$\vec{S}$面的**通量**(**函数的面积分**)

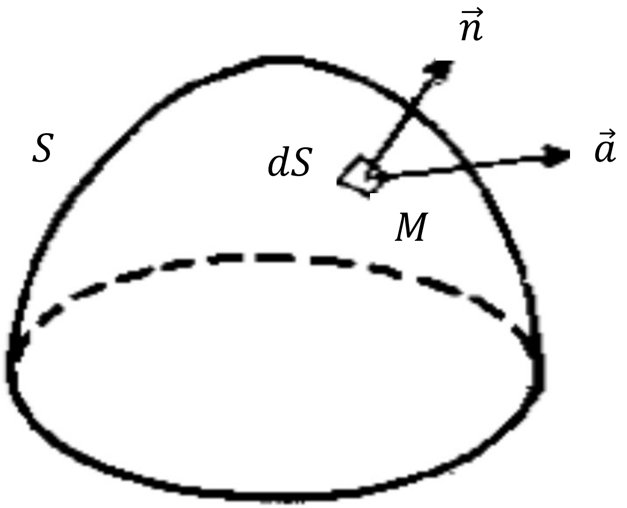
$$\int_S \vec{a}\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{a}\cdot\vec{n}dS = \int_S a_n\, dS$$

当$\vec{S}$面为**封闭曲面**时，通量为：

$$\oint_S \vec{a}\cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{a}\cdot\vec{n}dS = \oint_S a_n\, dS$$

A_n：矢量a在法线方向的投影

$a_n dS$：矢量a通过面积元dS的通量



矢量的通量

④ 矢量场的散度

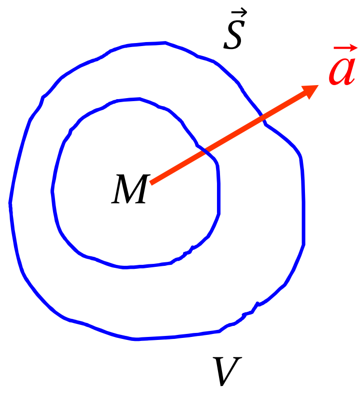
■矢量的散度

定义散度：在场内任取一点M，以体积V包之。若V界面外表面为$\vec{S}$，作矢量$\vec{a}$通过$\vec{S}$面的通量，然后用体积V除之。令体积$V\to$o，将如下极限定义为矢量$\vec{a}$的**散度**

$$div\vec{a} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint_S a_n ds}{V}$$

可以证明，当矢量$\vec{a}$具有连续一阶偏导数时，此极限存在。

散度的意义：矢 量$\vec{a}$通过单位体积元V的界面外表面$\vec{S}$的通量。



矢量的散度

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

④ 矢量场的散度

■ 奥-高定理

矢量$\vec{a}$通过**封闭面**$\vec{S}$的通量为

$$\oint_S a_n ds = \oint_S (a_x dydz + a_y dzdx + a_z dxdy)$$

$$= \int_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dV$$

函数在体积V上的积分

中值定理

$$= V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)_{M+\delta r}$$

在M点的领域内某点处的函数值

奥-高(Ostrogradsky-Gauss)定理

$$\oint_S a_n ds = \int_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dV$$

实质上是：面积分与体积分之间的关系！

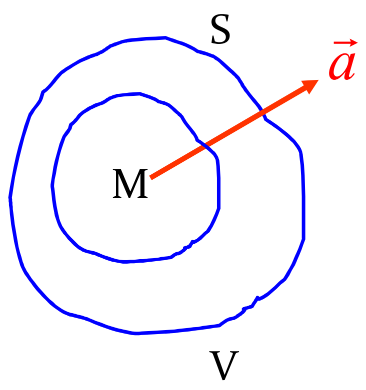
④ 矢量场的散度

■ 散度的表达式

当V趋近于M点时

$$div\vec{a} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint_S a_n ds}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{V\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)_{M+\delta r}}{V}$$

$$= \lim_{\delta r\to 0}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)_{M+\delta r} = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)_M$$



矢量的散度

矢量$\vec{a}$在M点的散度（**是个标量**）

$$div\vec{a} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint_S a_n ds}{V} = \frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

④ 矢量场的散度

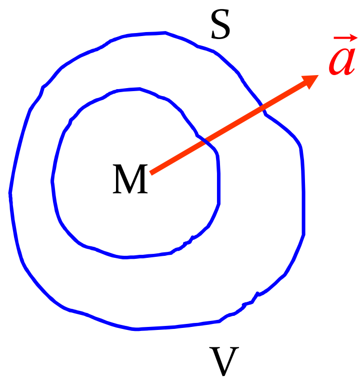
■ 散度的表达式

可以用散度表示奥-高定理

$$\oint_S a_n ds = \int_V \overbrace{\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)}^{\text{矢量}\vec{a}\text{在}M\text{点的散度}} dV$$

$$\Downarrow$$

$$\oint_S a_n ds = \int_V div\vec{a} dV$$



矢量的散度

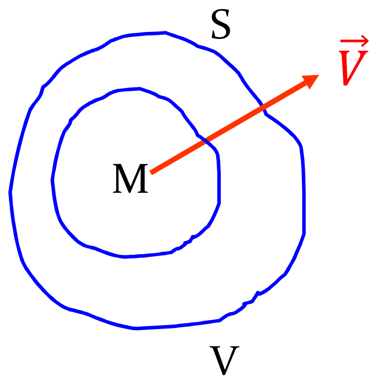
④ 矢量场的散度

■ 无源场及其性质

对速度场（矢量场）来讲，有

$$\oint_S V_n ds = \int_V div\vec{V}dV$$

- ✓ 通量为**正**，意味着通过S面有正的**源**；
- ✓ 通量为**负**，意味着通过S面有负的源（**汇**）；
- ✓ 散度为零的场，没有源和汇，称为**无源场**或**管形场。**

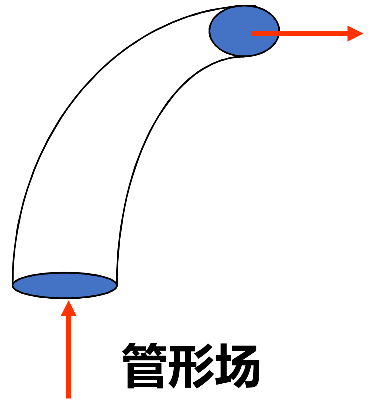


矢量的散度

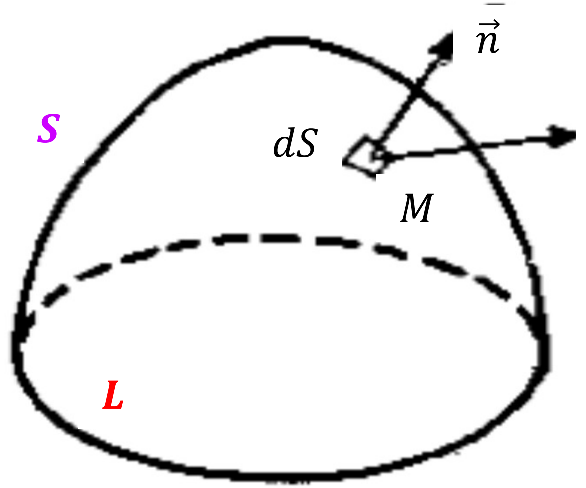
④ 矢量场的散度

■ 无源场及其性质

性质一：无源矢量经过矢量管任一横截面上的通量保持同一数值。


管形场

性质二：无源矢量$\vec{a}$经过张于已知周线L的所有曲面S上的通量均相同，此通量只依赖于周线L，与所张曲面S的形状无关。



矢量的通量

④ 矢量场的散度

■ 练习题

A. 证明以下结论：

a) $div(c \cdot \vec{a}) = c div\vec{a}$， c为常数（标量）

b) $div(\vec{a} + \vec{b}) = div\vec{a} + div\vec{b}$

c) $div(u\vec{a}) = udiv\vec{a} + gradu \cdot \vec{a}$

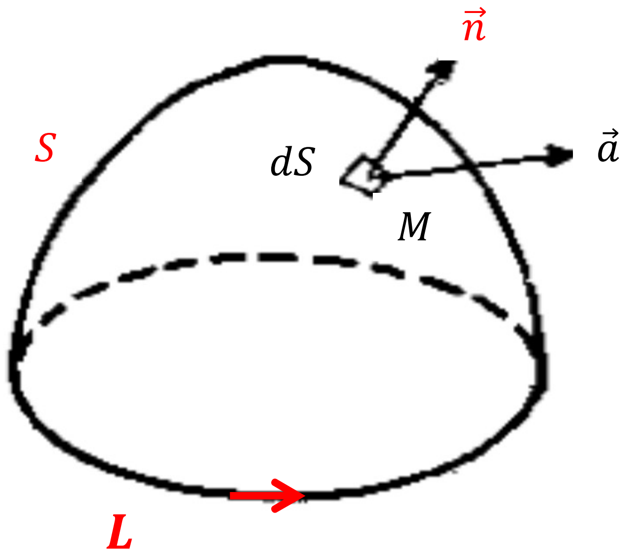
⑤ 矢量场的旋度

■ 矢量的**环量**

对于给定的矢量场$\vec{a}(\vec{r},t)$，在场内取在场内取任意一曲线L，张于L的曲面为S，按**右手螺旋法则**定义S的法线方向$\vec{n}$ 。沿着L做曲线积分

$$\Gamma = \oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} \quad = \oint_L \left(a_x dx + a_y dy + a_z dz\right)$$

则Γ称为矢量$\vec{a}(\vec{r}, t)$沿曲线L的**环量**。



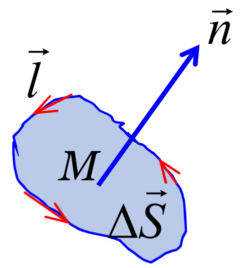
矢量的环量

⑤ 矢量场的旋度

■ 环量密度

对于给定的矢量场$\vec{a}(\vec{r},t)$，M为场中一点，在M处**右手螺旋法则**取定一个方向$\vec{n}$，再过M点以$\vec{n}$为法向做微元曲面$\Delta\vec{S}$。若如下极限存在

$$\mu_n=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\Gamma}{|\Delta\vec{S}|}$$



$$\Delta\Gamma=\oint_{\vec{l}}\vec{a}\cdot d\vec{r}$$

矢量的环量密度

则μ_n称为矢量$\vec{a}(\vec{r},t)$在M点沿$\vec{n}$方向的**环量密度**。

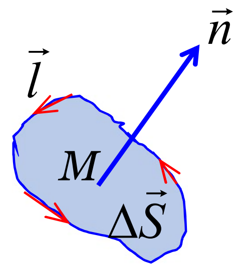
⑤ 矢量场的旋度

■ 环量密度的表达式

数学中的**斯托克斯公式**

$$\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{r} = \oint_L (a_x dx + a_y dy + a_z dz)$$

$$= \int_s \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos(\vec{n},\vec{i}) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos(\vec{n},\vec{j}) + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos(\vec{n},\vec{k})\right] dS$$



$$\Delta\Gamma = \oint_{\vec{l}} \vec{a}\cdot d\vec{r}$$

矢量的环量密度

Stockes公式：**线积分与面积分**的关系

⑤ 矢量场的旋度

■ 环量密度的表达式

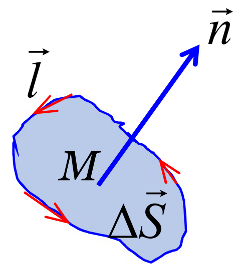
应用斯托克斯公式，可以得环量ΔΓ

$$\Delta\Gamma = \oint_L \vec{a}\cdot d\vec{r} = \oint_L (a_x dx + a_y dy + a_z dz)$$

$$= \int_{\Delta s}\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos(\vec{n},\vec{i}) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos(\vec{n},\vec{j}) + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos(\vec{n},\vec{k})\right] dS$$

中值定理

$$= \Delta s\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos(\vec{n},\vec{i}) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos(\vec{n},\vec{j}) \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos(\vec{n},\vec{k})\right]_{M+\delta r}$$



$$\Delta\Gamma = \oint_{\vec{l}} \vec{a}\cdot d\vec{r}$$

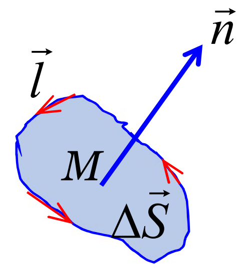
矢量的环量密度

⑤ 矢量场的旋度

■ 环量密度的表达式

当ΔS向M点收缩即（$\Delta S\to 0$）时

$$
\begin{aligned}
\mu_n &= \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\Gamma}{\left|\Delta\vec{S}\right|}\\
&= \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos(\vec{n},\vec{i}) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos(\vec{n},\vec{j})\right.\\
&\qquad \left.\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos(\vec{n},\vec{k})\right]_M
\end{aligned}
$$



$$\Delta\Gamma=\oint_{\vec{l}}\vec{a}\cdot d\vec{r}$$

环量面密度，依赖于所选**面的方向**，这一点和数量场的方向导数一致，人们还是希望找到**一个特定的量**（**类似于梯度**）来求环量面密度。

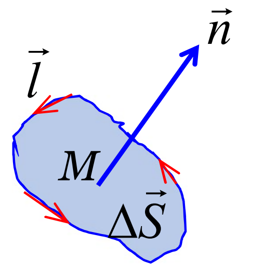
矢量的环量密度

⑤ 矢量场的旋度

■ 环量密度的表达式

当ΔS向M点收缩即（$\Delta S \to 0$）时

$$
\begin{aligned}
\mu_n &= \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \Gamma}{|\Delta \vec{S}|} \\
&= \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right] \\
&\quad \cdot \left[\cos(\vec{n},\vec{i})\vec{i} + \cos(\vec{n},\vec{j})\vec{j} + \cos(\vec{n},\vec{k})\vec{k}\right] \\
&= rot\vec{a} \cdot \vec{n}
\end{aligned}
$$



$$\Delta \Gamma = \oint_{\vec{l}} \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

显然，

$$|\mu_n| = \|rot\vec{a} \cdot \vec{n}\| \le \|rot\vec{a}\|\,\|\vec{n}\| = \|rot\vec{a}\|$$

矢量的环量密度

⑤ 矢量场的旋度

■旋度的定义

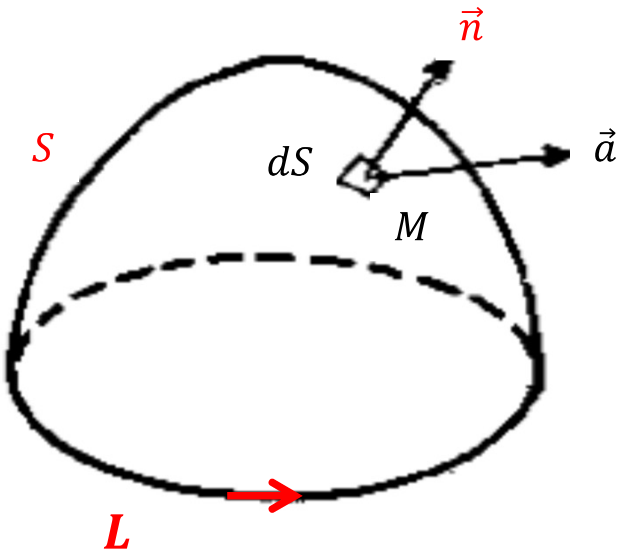
若在矢量场$\vec{a}$中有一点M处，存在这样一个矢量，沿其方向的**环量面密度最大**，这个最大值为该矢量的模，则称该矢量为矢量场$\vec{a}$在M处的**旋度**。记为

$$rot\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

于是，$Stokes$公式可写成

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_S rot\vec{a} \cdot d\vec{S}$$



矢量的环量

⑤ 矢量场的旋度

■ 无旋场

旋度为0的矢量场，称为**无旋场**。

若$\vec{a}$是某标量场的梯度场，

$$\vec{a} = grad\phi$$

则$\vec{a}$必为无旋场，即$rot\vec{a} = 0$。

反之，若$\vec{a}$是无旋场

$$rot\vec{a} = 0$$

则$\vec{a}$必为有势场，即$\vec{a} = grad\phi$。

无旋场⇔有势场

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

⑤ 矢量场的旋度

■练习题

a) 求矢量场的旋度：$A = xy^2z^2\vec{i} + z^2\sin y\,\vec{j} + x^2e^y\vec{k}$

b) 设一刚体绕过原点的某一轴转动，其角速度为$\vec{\omega} = \omega_1\vec{i} + \omega_2\vec{j} + \omega_3\vec{k}$，则刚体上的每一点处都有线速度v，从而构成一个线速度场。求该速度场的旋度。

c) 设一点源运动流场的速度为$\vec{v} = \frac{b}{r^2}\vec{r}$，求其旋度。

⑥ 微分算子

■ 哈密尔顿算子

用∇表示，这是一个具有**矢量**和**微分双重性质**的**符号**

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

- 一方面它具有**矢量的特性**，因此在运算时可以利用**矢量代数**和**矢量分析**中的所有法则。
- 另一方面它又是一个**微分算子**，因此可以按**微分法则**进行运算，但是必须注意它只对位于**算子∇右边**的量发生微分作用，而对算子左边的量不起作用。

⑥ 微分算子

■ 哈密尔顿算子——“三度”的表示

梯度：

$$\nabla\phi = \vec{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} = grad\phi$$

散度：

$$\nabla\cdot\vec{a} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z\right) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = div\vec{a}$$

旋度：

$$\nabla\times\vec{a} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(\vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = rot\vec{a}$$

⑥ 微分算子

■ 拉普拉斯算子

拉普拉斯**算子**用Δ表示，且$\Delta = \nabla^2$：

$$\nabla^2\phi = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi$$

$$= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$= \Delta\phi$$

⑥ 微分算子

■ 调和场

如果矢量场$\vec{a}$同时满足，

$$div\vec{a} = 0 \qquad rot\vec{a} = 0$$

则$\vec{a}$称为调和场（**既无源，又无旋的矢量场**）。

$$rot\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} = grad\phi \Rightarrow div(grad\phi) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \Delta\phi = 0$$

$\Delta\phi$叫调和量，调和函数。（**调和场的势函数必满足拉普拉斯方程**）

本节课内容总结

北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

- 场论基础（流体力学相关）
  - 一、场的定义与分类
    - 定义：空间区域内任意点定义物理量（函数）
    - 类型：标量场（温度/密度/压力场）、矢量场（重力/速度/电磁场）、张量场（流体应变率/应力场）
    - 要素：空间变量（r或x, y, z）、时间变量（t）
    - 分类：按空间分均匀/非均匀场，按时间分定常/非定常场
  - 二、场的几何表示
    - 标量场：等值线/面（如地形等高线，反映标量变化）
    - 矢量场：矢量线（切线与矢量同向，如流线，方程dr × V = 0）
  - 三、场论“三度”
    - 标量场梯度（gradϕ）
      - 基础：方向导数（沿s方向变化率，有直角坐标系表达式）
      - 定义：∂x∂ϕi + ∂y∂ϕj + ∂z∂ϕk，表变化率最
      - 性质：某方向投影=该方向导数；方向为等势面法线且指向函数增向
      - 定理：dϕ = dr · gradϕ；a = gradϕ（ϕ单值）则∮L a · dr = 0
    - 矢量场散度（diva）
      - 基础：矢量通量（通过曲面S的∮S and
      - 定义：limV→0 V ∮S ands，标量，表单位体
      - 表达式：∂x∂ax + ∂y∂
      - 定理：奥-高定理（∮S ands = ∫V divadV）
      - 无源场（diva = 0）：矢量管横截面通量相等，同周线曲面通量相同
    - 矢量场旋度（rota）
      - 基础：矢量环量（沿曲线L的∮L a · dr）
      - 环量密度：limΔS→0 ∣ Δ
      - 定义：沿其方向环量密度最大，模为最大环量密度（矢量）
      - 表达式：(∂y∂az − ∂z∂ay) i + (∂z∂ax − ∂x∂az) j + (∂x
      - 定理：斯托克斯公式（∮L a · dr = ∫S rota · dS）
      - 无旋场（rota = 0）：等价于有势场（a = gradϕ）
  - 四、微分算子
    - 哈密尔顿算子（∇）：i∂x∂ + j∂y∂ + k∂z∂，表∇ϕ = gradϕ、∇ · a = diva、∇ × a = rota
    - 拉普拉斯算子（Δ）：∇2 = ∂x2∂2 + ∂y2∂2 + ∂z2∂2，调和场（无源无旋）势函数

习题一：

1、8、9题

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

To be continued ...