前沿数学方法及其在航天工程中的应用

第一讲 张量基础知识

余文斌

沙河校区主楼D座923

邮箱：yuwenbin@buaa.edu.cn

课程要求

- **教材**

黄克智:《张量分析》

Zipfel: 《**Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics**》

Jiri Blazek： 《COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS Principles and Applications (Third Edition)》

（大家可以加入课程群，我会把电子版教材和课件发到群里）

- **课程安排**

前8课时：余文斌老师

后8课时：陈兵老师

- **课程内容**

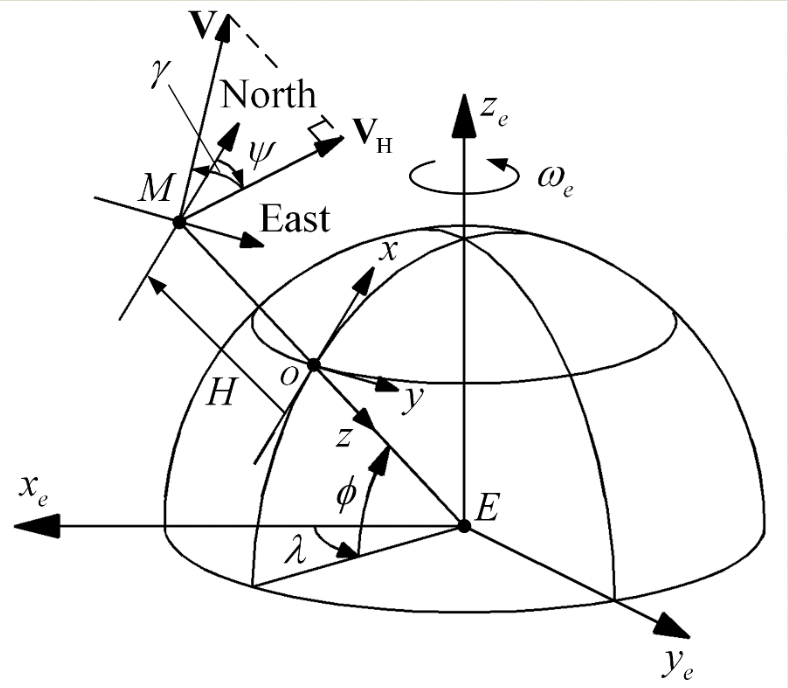
✓ 张量基础知识
✓ 张量在飞行力学中的应用
✓ 张量在流体力学中的应用

课程要求

- **考核方式**
  - ✓ 考勤
  - ✓ 平时作业
  - ✓ 期末考试（考期）

一、张量（见《张量分析》）

- **为什么要介绍张量**
  - ➢ **从飞行力学的角度，利用张量，可以高效简洁地建立基于广义坐标的动力学模型，且推导过程不易出错**



例如：在飞行力学中，一般利用经度、纬度和海拔高度描述飞行器位置，这就是一种典型的广义坐标。

一、张量（见《张量分析》）

- **哑指标**

  - **书中，大量数学公式省略了求和符号Σ（爱因斯坦求和约定），并引入了哑指标**

哑指标，代表1、2

$$P^1\mathbf{g}_1 + P^2\mathbf{g}_2 = \sum_{\alpha=1}^{2} P^\alpha \mathbf{g}_\alpha = P^\alpha \mathbf{g}_\alpha$$

$$T^{i'\cdot k'}_{\cdot j'\cdot} = \beta^{i'}_{l} u^{l} \beta^{m}_{j'} v_{m} \beta^{k'}_{n} w^{n} = \beta^{i'}_{l} \beta^{m}_{j'} \beta^{k'}_{n} T^{l\cdot n}_{\cdot m\cdot} \qquad (i', j', k' = 1, 2, 3)$$

  - **缺点：不直观，对初学者容易造成困扰。**
  - **为了便于理解，课件里尽量不用哑指标**

这里省略了

$$\sum_{i'=1}^{3}\sum_{j'=1}^{3}\sum_{k'=1}^{3}$$

一、张量（见《张量分析》）

- **平面斜角直线坐标系（pp. 5-6）**

（在介绍张量之前，先看一种特殊的非直角坐标系）

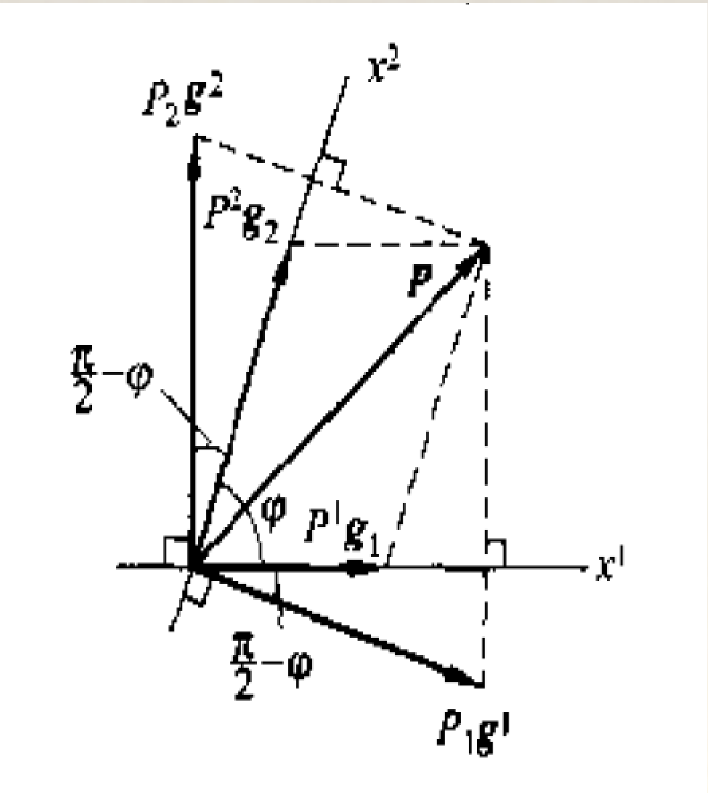
1、与笛卡尔直角坐标系不同，基矢量g_1和g_2并不相互垂直，夹角为φ；并且g_1和g_2的模值不一定为1

2、将矢量P沿g_1和g_2分解

$$\mathbf{P} = P^1\mathbf{g}_1 + P^2\mathbf{g}_2$$

如何求解P^1和P^2？

$$\cancel{\begin{cases} P^1 = \mathbf{P}\cdot\mathbf{g}_1 \\ P^2 = \mathbf{P}\cdot\mathbf{g}_2 \end{cases}}$$



一、张量（见《张量分析》）

- **平面斜角直线坐标系（pp. 5-**

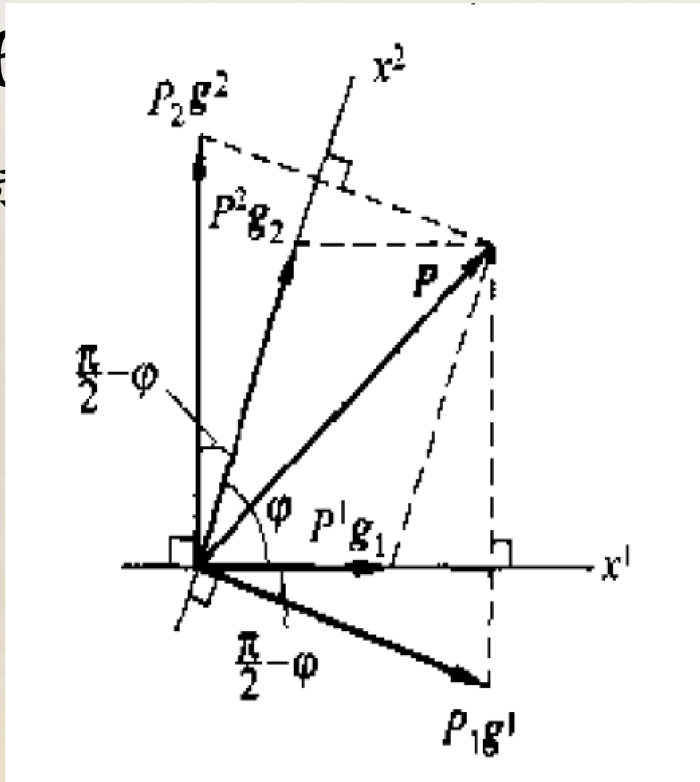
（在介绍张量之前，先看几个特殊的非直角坐

1、与直角坐标系不同，基矢量g_1和g_2**并不相互垂直**，夹角为φ；并且g_1和g_2的**模值不一定为1**

2、将矢量P沿g_1和g_2分解

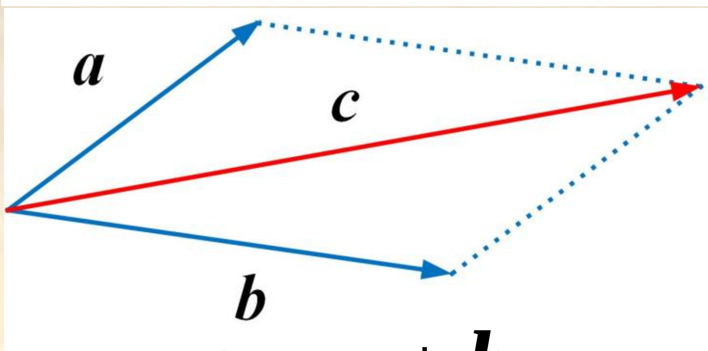
$$\mathbf{P} = P^1\mathbf{g}_1 + P^2\mathbf{g}_2$$

如何求解P^1和P^2？



我们知道：

- 矢量相加符合平行四边形法则；
- 反之，矢量分解同样符合平行四边形法则
- 因此，$P^1\mathbf{g}_1$和$P^2\mathbf{g}_2$满足如图所示的平行四边形



$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

一、张量（见《张量分析》）

- **平面斜角直线坐标系（pp. 5-6）**

4、记沿 g_1和g_2方向的单位向量为i_1和i_2

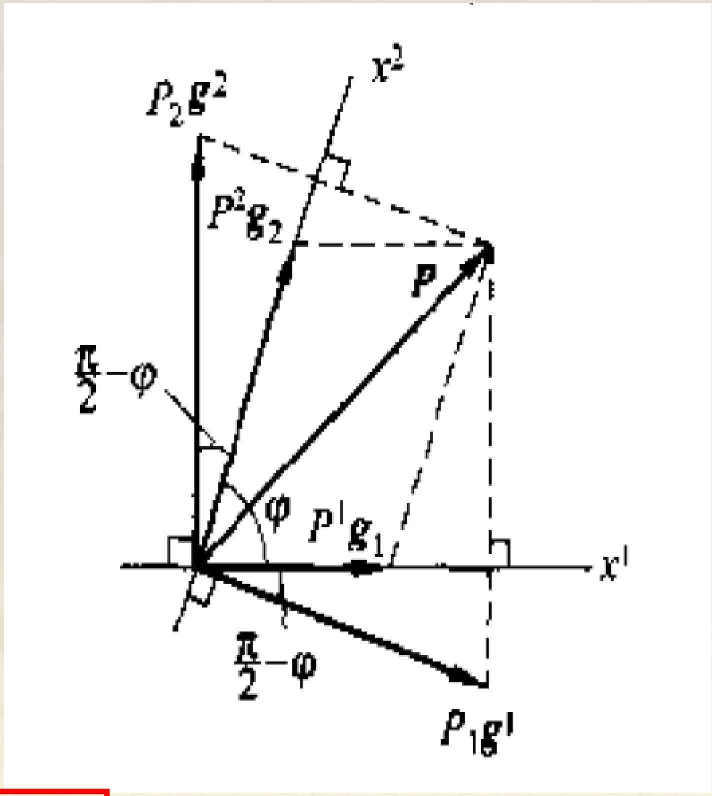
$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{i}_1 = P^1\|\mathbf{g}_1\| + P^2\|\mathbf{g}_2\|\cos\varphi$$

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{i}_2 = P^1\|\mathbf{g}_1\|\cos\varphi + P^2\|\mathbf{g}_2\|$$

5、通过求解上式可得

$$P^1\|\mathbf{g}_1\| = \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{i}_1 - \mathbf{P}\cdot\mathbf{i}_2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$$

$$P^2\|\mathbf{g}_2\| = \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{i}_2 - \mathbf{P}\cdot\mathbf{i}_1\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$$



如果是三维（或更高维）斜角直线坐标系，采用上述几何法求解将比较困难

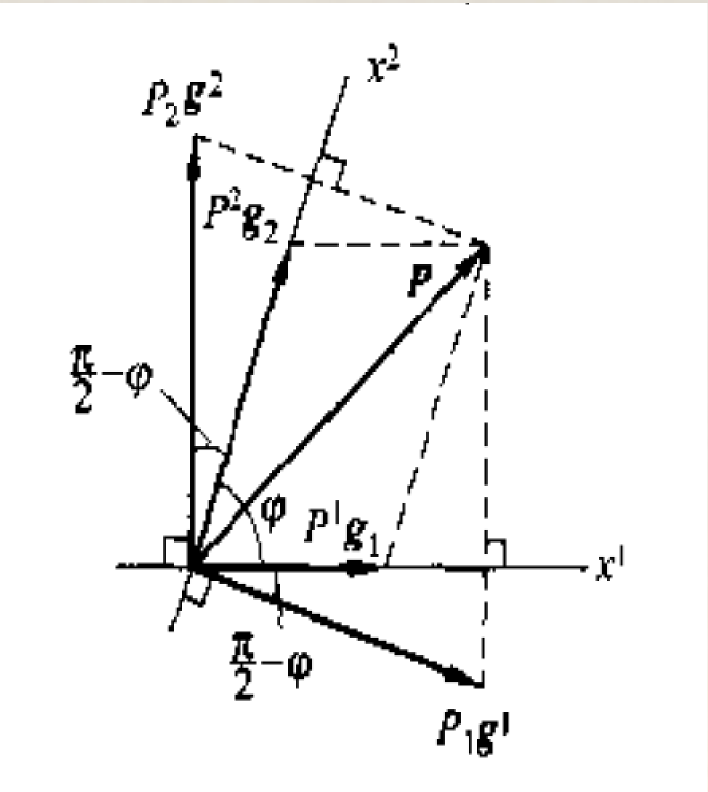
一、张量（见《张量分析》）

- **平面斜角直线坐标系（pp. 5-6）**

6、为了克服高维难题，引入对偶基矢量$\mathbf{g}^1$和$\mathbf{g}^2$

$$\mathbf{g}^1\cdot\mathbf{g}_1=\mathbf{g}^2\cdot\mathbf{g}_2=1 \rightarrow \text{夹角为锐角}$$

$$\mathbf{g}^1\cdot\mathbf{g}_2=\mathbf{g}^2\cdot\mathbf{g}_1=0 \rightarrow \text{正交}$$



确定$\mathbf{g}^1$和$\mathbf{g}^2$的方向和模值

$$\|\mathbf{g}^1\|=\frac{1}{\|\mathbf{g}_1\|\sin\varphi},\|\mathbf{g}^2\|=\frac{1}{\|\mathbf{g}_2\|\sin\varphi}$$

称：

$\mathbf{g}^1$和$\mathbf{g}^2$为逆变基矢量

$\mathbf{g}_1$和$\mathbf{g}_2$为协变基矢量

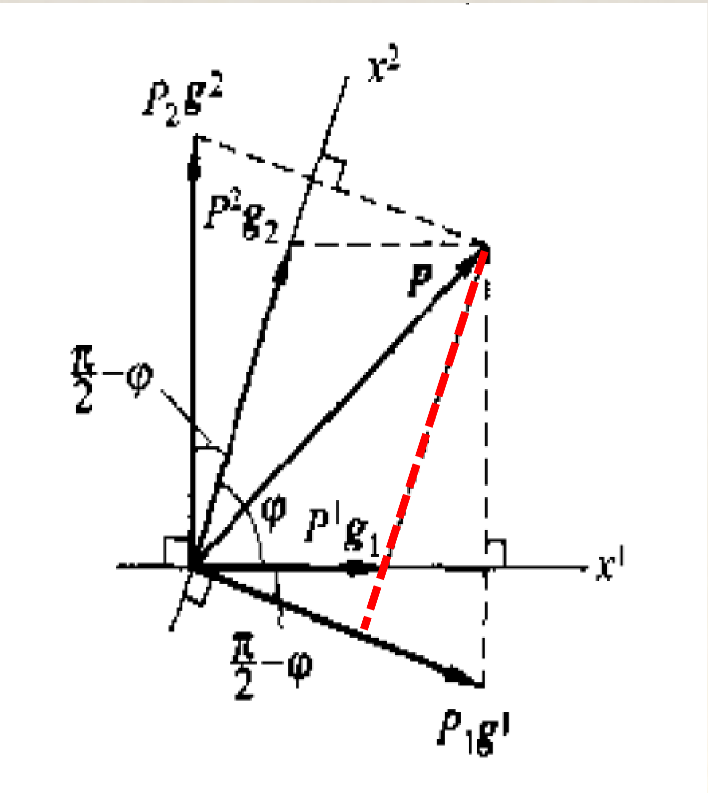
一、张量（见《张量分析》）

- **平面斜角直线坐标系（pp. 5-6）**

7、计算

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{g}^1=\left\|\mathbf{g}^1\right\|\mathbf{P}\cdot\mathbf{i}^1=\frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{i}^1}{\|\mathbf{g}_1\|\sin\varphi}=\frac{1}{\|\mathbf{g}_1\|}\cdot\frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{i}^1}{\sin\varphi}$$

$$=\frac{1}{\|\mathbf{g}_1\|}\cdot\frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{i}^1}{\cos\left(\pi/2-\varphi\right)}=P^1$$



同理 $\mathbf{P}\cdot\mathbf{g}^2=P^2$

- 可见，利用逆变基矢量可以十分方便地求解P^1和P^2;
- 这里称P^1和P^2为逆变分量

一、张量（见《张量分析》）

- **平面斜角直线坐标系（pp. 5-6）**

8、特殊情况：笛卡尔直角坐标系

此时，g_1和g_2是相互垂直的单位正交向量，因此有

$$\mathbf{g}^1 = \mathbf{g}_1, \mathbf{g}^2 = \mathbf{g}_2$$

显然有

$$P^1 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}_1$$

$$P^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}_2$$

一、张量（见《张量分析》）

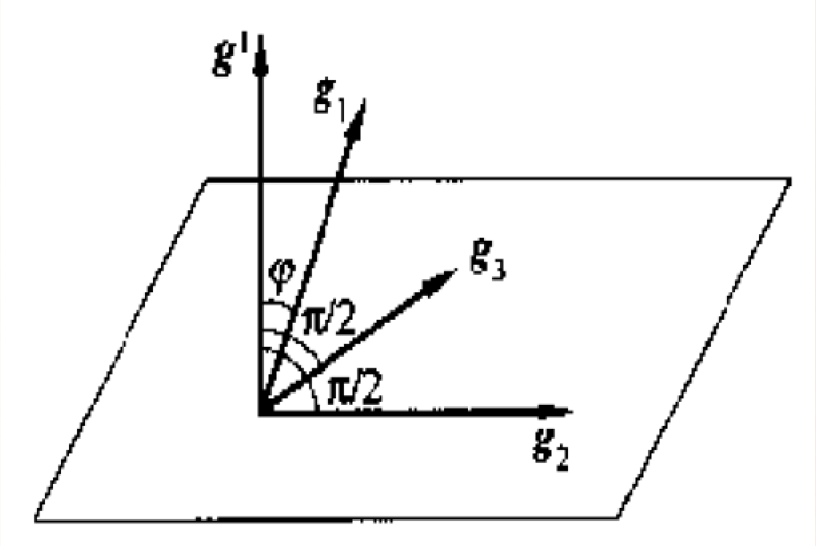
- **三维斜角直线坐标系（pp. 7-10）**

1、在三维空间中，令逆变基矢量满足：

$$\begin{cases} \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_i = 1 \ \ (i = 1,2,3) \\ \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = 0 \ \ (i \neq j) \end{cases}$$

→ 夹角为锐角

→ 正交



2、求解逆变基矢量

- 由正交关系，可假设

$$\mathbf{g}^1 = a(\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3)$$

- 进而

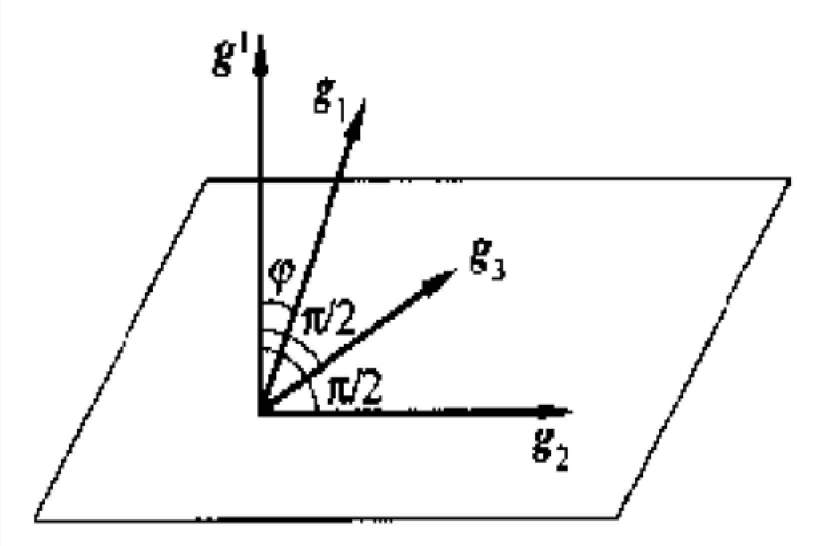
$$\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{g}_1 = a(\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3) \cdot \mathbf{g}_1 = 1$$

一、张量（见《张量分析》）

- **三维斜角直线坐标系（pp. 7-10）**

2、求解逆变基矢量

$$\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{g}_1 = a(\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3) \cdot \mathbf{g}_1 = 1$$



- 由空间几何知识可知：

$(\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3) \cdot \mathbf{g}_1$ 为如下行列式

$$(\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3) \cdot \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3)$$

$$= \begin{vmatrix} g_{1x} & g_{1y} & g_{1z} \\ g_{2x} & g_{2y} & g_{2z} \\ g_{3x} & g_{3y} & g_{3z} \end{vmatrix} \triangleq \sqrt{g}$$

思考：有没有物理意义?

- 因此有 $\mathbf{g}^1 = \dfrac{1}{\sqrt{g}}(\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3)$
- 类似地，有 $\mathbf{g}^2 = \dfrac{1}{\sqrt{g}}(\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1)$，$\mathbf{g}^3 = \dfrac{1}{\sqrt{g}}(\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2)$

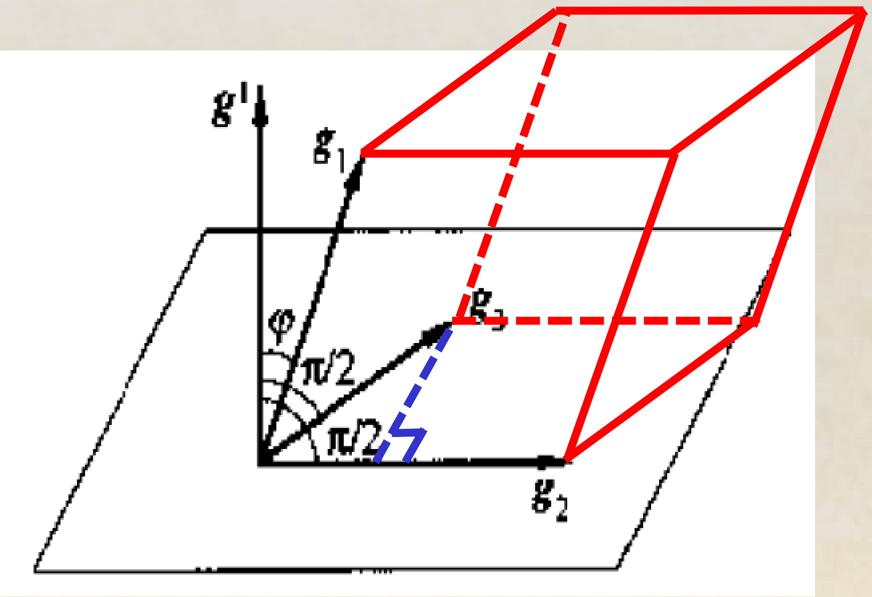
一、张量（见《张量分析》）

- **三维斜角直线坐标系（pp. 7-10）**

问题：$\sqrt{g}$的意义

$$
\begin{aligned}
\sqrt{g} &= \mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3) \\
&= \mathbf{g}_1 \cdot (\|\mathbf{g}_2\| \cdot \|\mathbf{g}_3\| \sin\theta \cdot \mathbf{n}) \\
&= \mathbf{g}_1 \cdot (S_{\text{底面}} \mathbf{n}) \\
&= S_{\text{底面}} (\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{n}) = V_{\text{立体体积}}
\end{aligned}
$$

底面积　　高　　立体图形体积



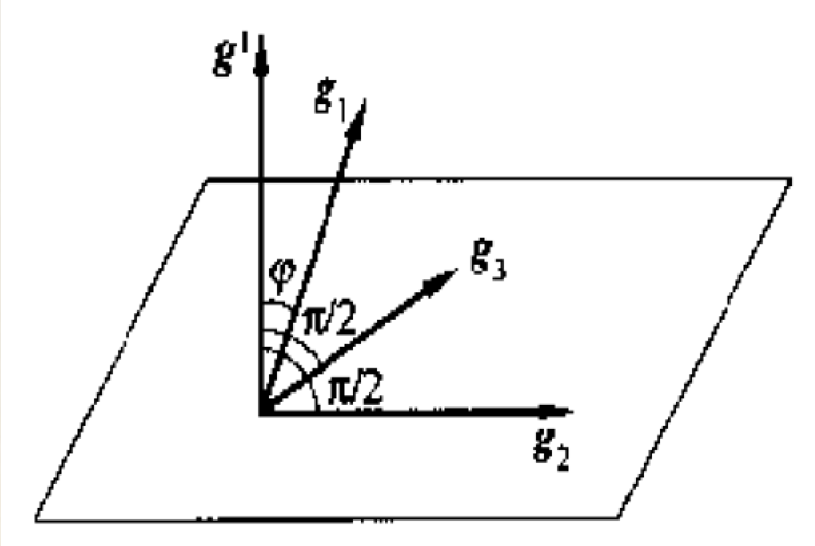
一、张量（见《张量分析》）

• 三维斜角直线坐标系（pp. 7-10）

3、逆变基矢量的应用

- 将任意矢量P沿协变基矢量分解：

$$\mathbf{P} = P^1\mathbf{g}_1 + P^2\mathbf{g}_2 + P^3\mathbf{g}_3$$



- 利用逆变基矢量，有

逆变分量

$$P^1 = \mathbf{P}\cdot\mathbf{g}^1$$
$$P^2 = \mathbf{P}\cdot\mathbf{g}^2$$
$$P^3 = \mathbf{P}\cdot\mathbf{g}^3$$

- 反之，如果将P沿逆变基矢量分解：

$$\mathbf{P} = P_1\mathbf{g}^1 + P_2\mathbf{g}^2 + P_3\mathbf{g}^3$$

- 则有：

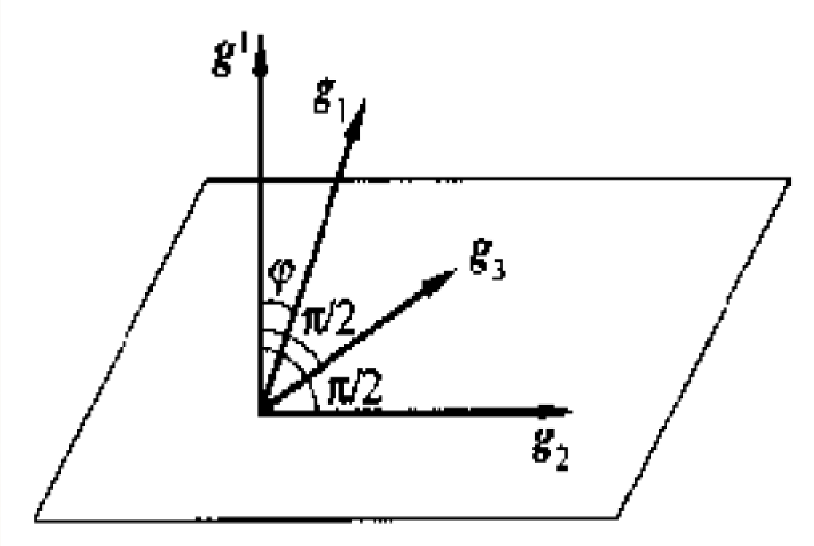
一、张量（见《张量分析》）

• 三维斜角直线坐标系（pp. 7-10）

3、逆变基矢量的应用

- 将任意矢量P沿协变基矢量分解：

$$\mathbf{P}=P^1\mathbf{g}_1+P^2\mathbf{g}_2+P^3\mathbf{g}_3$$



- 利用逆变基矢量，有

逆变分量

$$P^1=\mathbf{P}\cdot\mathbf{g}^1$$
$$P^2=\mathbf{P}\cdot\mathbf{g}^2$$
$$P^3=\mathbf{P}\cdot\mathbf{g}^3$$

- 反之，如果将P沿逆变基矢量分解：

$$\mathbf{P}=P_1\mathbf{g}^1+P_2\mathbf{g}^2+P_3\mathbf{g}^3$$

协变基矢量与逆变基矢量互偶

- 则有：$P_1=\mathbf{P}\cdot\mathbf{g}_1$， $P_2=\mathbf{P}\cdot\mathbf{g}_2$， $P_3=\mathbf{P}\cdot\mathbf{g}_3$

协变分量

一、张量（见《张量分析》）

- **三维斜角直线坐标系（pp. 7-10）**

4、习题

- 令一组协变基向量为

$$\mathbf{g}_1=\begin{bmatrix}-1\\ \sqrt{3}\\ -2\end{bmatrix},\quad \mathbf{g}_2=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 4\end{bmatrix},\quad \mathbf{g}_3=\begin{bmatrix}3\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$$

- 有一向量

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

- 将P沿协变基矢量分解：

$$\mathbf{P}=P^1\mathbf{g}_1+P^2\mathbf{g}_2+P^3\mathbf{g}_3$$

提示：利用逆变基矢量求解

$$\begin{cases}\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{g}_i=1 & (i=1,2,3)\\ \mathbf{g}^i\cdot\mathbf{g}_j=0 & (i\neq j)\end{cases}$$

$$\mathbf{g}^1=a(\mathbf{g}_2\times\mathbf{g}_3)$$

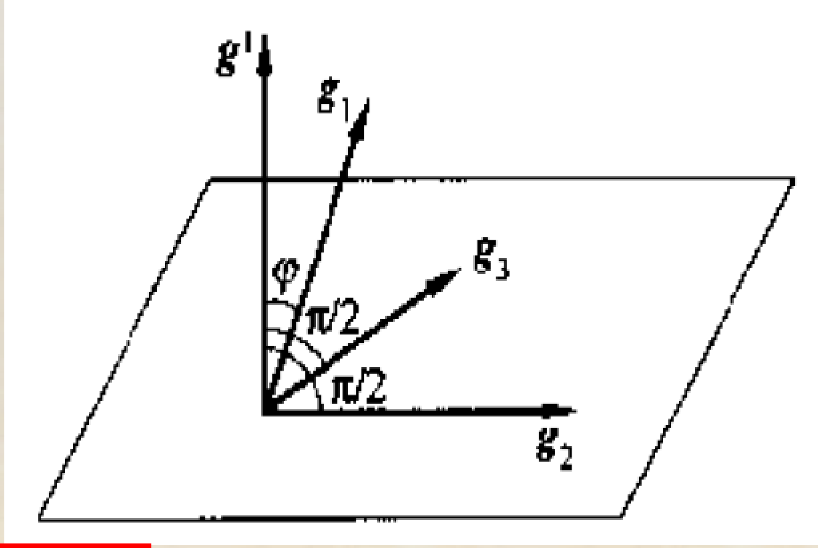
一、张量（见《张量分析》）

- **三维斜角直线坐标系（pp. 7-10）**

4、习题

- 解：首先计算逆变基矢量

$$\mathbf{g}^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}(\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3) = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$



- 其中

$$\sqrt{g} = \mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3) = \begin{vmatrix} -1 & \sqrt{3} & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5+10\sqrt{3}$$

立体体积

- 则有：

$$\mathbf{g}^1 = \frac{1}{5+10\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ -7 \end{bmatrix}$$

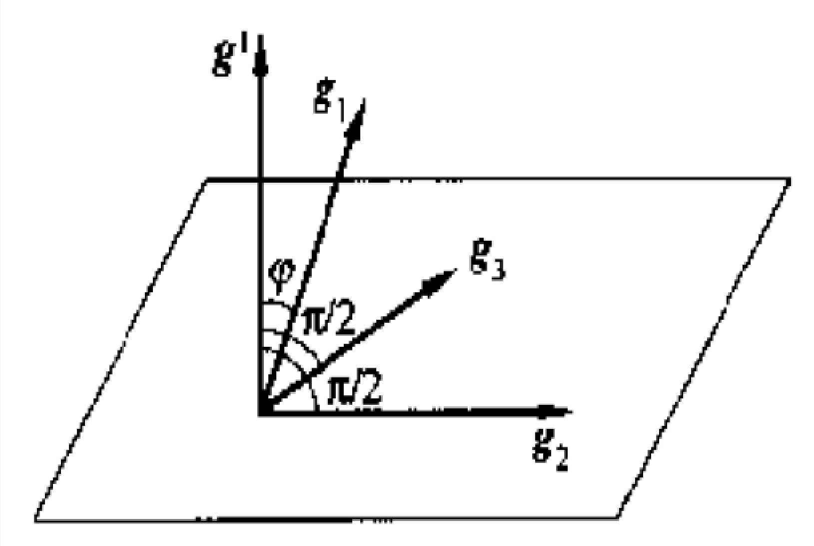
- 同理有：

$$\mathbf{g}^2 = \frac{1}{5+10\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 4-\sqrt{3} \\ 5 \\ 3\sqrt{3}-2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{g}^3 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

一、张量（见《张量分析》）

- **三维斜角直线坐标系（pp. 7-10）**

4、习题



- 进而可以求解逆变分量

$$P^1 = \mathbf{P}\cdot\mathbf{g}^1 = \frac{12}{5+10\sqrt{3}} \approx 0.5376$$

$$P^2 = \mathbf{P}\cdot\mathbf{g}^2 = \frac{7+2\sqrt{3}}{5+10\sqrt{3}} \approx 0.4688$$

$$P^3 = \mathbf{P}\cdot\mathbf{g}^3 = 0.2$$

- 即 $\mathbf{P} = 0.5376\mathbf{g}_1 + 0.4688\mathbf{g}_2 + 0.2\mathbf{g}_3$
- 同样，利用对偶关系，可解

$$\mathbf{P} = P_1\mathbf{g}^1 + P_2\mathbf{g}^2 + P_3\mathbf{g}^3$$

- 其中，协变分量为

$$P_1 = \mathbf{P}\cdot\mathbf{g}_1 = -1.2679$$

$$P_2 = \mathbf{P}\cdot\mathbf{g}_2 = 7$$

$$P_3 = \mathbf{P}\cdot\mathbf{g}_3 = 2$$

一、张量（见《张量分析》）

- **斜角坐标系下的坐标变换（pp. 14-17）**

1、有新旧两组协变基矢量：

$$\left\{\mathbf{g}_{1'},\mathbf{g}_{2'},\mathbf{g}_{3'}\right\},\quad \left\{\mathbf{g}_{1},\mathbf{g}_{2},\mathbf{g}_{3}\right\}$$

2、任意矢量v对这两组基矢量分解：

$$\mathbf{v}=v^{1'}\mathbf{g}_{1'}+v^{2'}\mathbf{g}_{2'}+v^{3'}\mathbf{g}_{3'}=v^{1}\mathbf{g}_{1}+v^{2}\mathbf{g}_{2}+v^{3}\mathbf{g}_{3}$$

3、$\left\{v^{1'},v^{2'},v^{3'}\right\}$ 与 $\left\{v^{1},v^{2},v^{3}\right\}$之间的转换关系如何?

一、张量（见《张量分析》）

- **斜角坐标系下的坐标变换（pp. 14-17）**

1、有新旧两组协变基矢量：

$$\{\mathbf{g}_{1'},\mathbf{g}_{2'},\mathbf{g}_{3'}\},\quad \{\mathbf{g}_{1},\mathbf{g}_{2},\mathbf{g}_{3}\}$$

2、任意矢量v对这两组基矢量分解：

$$\mathbf{v}=v^{1'}\mathbf{g}_{1'}+v^{2'}\mathbf{g}_{2'}+v^{3'}\mathbf{g}_{3'}=v^{1}\mathbf{g}_{1}+v^{2}\mathbf{g}_{2}+v^{3}\mathbf{g}_{3}$$

3、$\{v^{1'},v^{2'},v^{3'}\}$ 与 $\{v^{1},v^{2},v^{3}\}$之间的转换关系如何?

- 将 $\{\mathbf{g}_{1},\mathbf{g}_{2},\mathbf{g}_{3}\}$ 对 $\{\mathbf{g}_{1'},\mathbf{g}_{2'},\mathbf{g}_{3'}\}$进行分解

$$\mathbf{g}_1=\beta_1^{1'}\mathbf{g}_{1'}+\beta_1^{2'}\mathbf{g}_{2'}+\beta_1^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$

$$\mathbf{g}_2=\beta_2^{1'}\mathbf{g}_{1'}+\beta_2^{2'}\mathbf{g}_{2'}+\beta_2^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$

$$\mathbf{g}_3=\beta_3^{1'}\mathbf{g}_{1'}+\beta_3^{2'}\mathbf{g}_{2'}+\beta_3^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$

其中：$\beta_i^{j'}=?$

一、张量（见《张量分析》）

- **斜角坐标系下的坐标变换（pp. 14-17）**

1、有新旧两组协变基矢量：

$$\{\mathbf{g}_{1'},\mathbf{g}_{2'},\mathbf{g}_{3'}\},\quad \{\mathbf{g}_{1},\mathbf{g}_{2},\mathbf{g}_{3}\}$$

2、任意矢量v对这两组基矢量分解：

$$\mathbf{v}=v^{1'}\mathbf{g}_{1'}+v^{2'}\mathbf{g}_{2'}+v^{3'}\mathbf{g}_{3'}=v^{1}\mathbf{g}_{1}+v^{2}\mathbf{g}_{2}+v^{3}\mathbf{g}_{3}$$

3、$\{v^{1'},v^{2'},v^{3'}\}$ 与 $\{v^{1},v^{2},v^{3}\}$之间的转换关系如何？

代入

- 将 $\{\mathbf{g}_{1},\mathbf{g}_{2},\mathbf{g}_{3}\}$ 对 $\{\mathbf{g}_{1'},\mathbf{g}_{2'},\mathbf{g}_{3'}\}$进行分解

$$\mathbf{g}_1=\beta_1^{1'}\mathbf{g}_{1'}+\beta_1^{2'}\mathbf{g}_{2'}+\beta_1^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$

$$\mathbf{g}_2=\beta_2^{1'}\mathbf{g}_{1'}+\beta_2^{2'}\mathbf{g}_{2'}+\beta_2^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$

$$\mathbf{g}_3=\beta_3^{1'}\mathbf{g}_{1'}+\beta_3^{2'}\mathbf{g}_{2'}+\beta_3^{3'}\mathbf{g}_{3'}$$

其中：$\beta_i^{j'}=\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}^{j'}$

一、张量（见《张量分析》）

- **斜角坐标系下的坐标变换（pp. 14-17）**
  - 可得

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v^1\mathbf{g}_1 + v^2\mathbf{g}_2 + v^3\mathbf{g}_3 \\ &= \left(v^1\beta_1^{1'} + v^2\beta_2^{1'} + v^3\beta_3^{1'}\right)\mathbf{g}_{1'} \\ &\quad + \left(v^1\beta_1^{2'} + v^2\beta_2^{2'} + v^3\beta_3^{2'}\right)\mathbf{g}_{2'} \\ &\quad + \left(v^1\beta_1^{3'} + v^2\beta_2^{3'} + v^3\beta_3^{3'}\right)\mathbf{g}_{3'}\end{aligned}$$

  - 因此有

$$\begin{bmatrix} v^{1'} \\ v^{2'} \\ v^{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'} \\ \beta_1^{2'} & \beta_2^{2'} & \beta_3^{2'} \\ \beta_1^{3'} & \beta_2^{3'} & \beta_3^{3'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

记：$\mathbf{T}^{ij'} = \begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'} \\ \beta_1^{2'} & \beta_2^{2'} & \beta_3^{2'} \\ \beta_1^{3'} & \beta_2^{3'} & \beta_3^{3'} \end{bmatrix}$

一、张量（见《张量分析》）

- **斜角坐标系下的坐标变换（pp. 14-17）**
  - 思考：推导新坐标向旧坐标的转换关系？

$$\mathbf{v} = v^{1'}\mathbf{g}_{1'} + v^{2'}\mathbf{g}_{2'} + v^{3'}\mathbf{g}_{3'} = v^{1}\mathbf{g}_{1} + v^{2}\mathbf{g}_{2} + v^{3}\mathbf{g}_{3}$$

一、张量（见《张量分析》）

- **斜角坐标系下的坐标变换（pp. 14-17）**
  - 思考：推导新坐标向旧坐标的转换关系？

$$\mathbf{v} = \boxed{v^{1'}\mathbf{g}_{1'} + v^{2'}\mathbf{g}_{2'} + v^{3'}\mathbf{g}_{3'}} = v^{1}\mathbf{g}_{1} + v^{2}\mathbf{g}_{2} + v^{3}\mathbf{g}_{3}$$

代入

  - 将 $\{\mathbf{g}_{1'},\mathbf{g}_{2'},\mathbf{g}_{3'}\}$ 沿 $\{\mathbf{g}_{1},\mathbf{g}_{2},\mathbf{g}_{3}\}$ 进行分解

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathbf{g}_{1'} &= \beta_{1'}^{1}\mathbf{g}_{1} + \beta_{1'}^{2}\mathbf{g}_{2} + \beta_{1'}^{3}\mathbf{g}_{3} \\
\mathbf{g}_{2'} &= \beta_{2'}^{1}\mathbf{g}_{1} + \beta_{2'}^{2}\mathbf{g}_{2} + \beta_{2'}^{3}\mathbf{g}_{3} \\
\mathbf{g}_{3'} &= \beta_{3'}^{1}\mathbf{g}_{1} + \beta_{3'}^{2}\mathbf{g}_{2} + \beta_{3'}^{3}\mathbf{g}_{3}
\end{aligned}}$$

其中：$\beta_{i'}^{j} = \mathbf{g}_{i'} \cdot \mathbf{g}^{j}$

一、张量（见《张量分析》）

- **斜角坐标系下的坐标变换（pp. 14-17）**
  - 反之，可得新坐标向旧坐标的转换关系

$$\begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1'}^1 & \beta_{2'}^1 & \beta_{3'}^1 \\ \beta_{1'}^2 & \beta_{2'}^2 & \beta_{3'}^2 \\ \beta_{1'}^3 & \beta_{2'}^3 & \beta_{3'}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^{1'} \\ v^{2'} \\ v^{3'} \end{bmatrix}$$

其中：$\beta_{i'}^j = \mathbf{g}_{i'} \cdot \mathbf{g}^j$

记：$$\mathbf{T}^{i'j} = \begin{bmatrix} \beta_{1'}^1 & \beta_{2'}^1 & \beta_{3'}^1 \\ \beta_{1'}^2 & \beta_{2'}^2 & \beta_{3'}^2 \\ \beta_{1'}^3 & \beta_{2'}^3 & \beta_{3'}^3 \end{bmatrix}$$

一、张量（见《张量分析》）

- **斜角坐标系下的坐标变换（pp. 14-17）**
  - 如果以<u>逆变基矢量</u>为基底，则有如下协变坐标的转换关系

$$\begin{bmatrix} v_{1'} \\ v_{2'} \\ v_{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1'}^{1} & \beta_{1'}^{2} & \beta_{1'}^{3} \\ \beta_{2'}^{1} & \beta_{2'}^{2} & \beta_{2'}^{3} \\ \beta_{3'}^{1} & \beta_{3'}^{2} & \beta_{3'}^{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1} \\ v_{2} \\ v_{3} \end{bmatrix}$$

记：$\mathbf{T}_{ij'} = \begin{bmatrix} \beta_{1'}^{1} & \beta_{1'}^{2} & \beta_{1'}^{3} \\ \beta_{2'}^{1} & \beta_{2'}^{2} & \beta_{2'}^{3} \\ \beta_{3'}^{1} & \beta_{3'}^{2} & \beta_{3'}^{3} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} v_{1} \\ v_{2} \\ v_{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1}^{1'} & \beta_{1}^{2'} & \beta_{1}^{3'} \\ \beta_{2}^{1'} & \beta_{2}^{2'} & \beta_{2}^{3'} \\ \beta_{3}^{1'} & \beta_{3}^{2'} & \beta_{3}^{3'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1'} \\ v_{2'} \\ v_{3'} \end{bmatrix}$$

记：$\mathbf{T}_{i'j} = \begin{bmatrix} \beta_{1}^{1'} & \beta_{1}^{2'} & \beta_{1}^{3'} \\ \beta_{2}^{1'} & \beta_{2}^{2'} & \beta_{2}^{3'} \\ \beta_{3}^{1'} & \beta_{3}^{2'} & \beta_{3}^{3'} \end{bmatrix}$

一、张量（见《张量分析》）

- **斜角坐标系下的坐标变换（pp. 14-17）**
  - 坐标变换矩阵之间的关系？

$$\mathbf{T}^{ij'}=\begin{bmatrix}\beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'}\\ \beta_1^{2'} & \beta_2^{2'} & \beta_3^{2'}\\ \beta_1^{3'} & \beta_2^{3'} & \beta_3^{3'}\end{bmatrix}\qquad \mathbf{T}^{i'j}=\begin{bmatrix}\beta_{1'}^{1} & \beta_{2'}^{1} & \beta_{3'}^{1}\\ \beta_{1'}^{2} & \beta_{2'}^{2} & \beta_{3'}^{2}\\ \beta_{1'}^{3} & \beta_{2'}^{3} & \beta_{3'}^{3}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{ij'}=\begin{bmatrix}\beta_{1'}^{1} & \beta_{1'}^{2} & \beta_{1'}^{3}\\ \beta_{2'}^{1} & \beta_{2'}^{2} & \beta_{2'}^{3}\\ \beta_{3'}^{1} & \beta_{3'}^{2} & \beta_{3'}^{3}\end{bmatrix}\qquad \mathbf{T}_{i'j}=\begin{bmatrix}\beta_{1}^{1'} & \beta_{1}^{2'} & \beta_{1}^{3'}\\ \beta_{2}^{1'} & \beta_{2}^{2'} & \beta_{2}^{3'}\\ \beta_{3}^{1'} & \beta_{3}^{2'} & \beta_{3}^{3'}\end{bmatrix}$$

一、张量（见《张量分析》）

- **斜角坐标系下的坐标变换（pp. 14-17）**
  - 通过观察

$$\mathbf{T}^{ij'}=\begin{bmatrix}\beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'}\\ \beta_1^{2'} & \beta_2^{2'} & \beta_3^{2'}\\ \beta_1^{3'} & \beta_2^{3'} & \beta_3^{3'}\end{bmatrix}$$

互逆

$$\mathbf{T}^{i'j}=\begin{bmatrix}\beta_{1'}^{1} & \beta_{2'}^{1} & \beta_{3'}^{1}\\ \beta_{1'}^{2} & \beta_{2'}^{2} & \beta_{3'}^{2}\\ \beta_{1'}^{3} & \beta_{2'}^{3} & \beta_{3'}^{3}\end{bmatrix}$$

?

转置

?

$$\mathbf{T}_{ij'}=\begin{bmatrix}\beta_{1'}^{1} & \beta_{1'}^{2} & \beta_{1'}^{3}\\ \beta_{2'}^{1} & \beta_{2'}^{2} & \beta_{2'}^{3}\\ \beta_{3'}^{1} & \beta_{3'}^{2} & \beta_{3'}^{3}\end{bmatrix}$$

互逆

$$\mathbf{T}_{i'j}=\begin{bmatrix}\beta_1^{1'} & \beta_1^{2'} & \beta_1^{3'}\\ \beta_2^{1'} & \beta_2^{2'} & \beta_2^{3'}\\ \beta_3^{1'} & \beta_3^{2'} & \beta_3^{3'}\end{bmatrix}$$

一、张量（见《张量分析》）

- **斜角坐标系下的坐标变换（pp. 14-17）**
  - 如果新旧两组基矢量是两组单位正交的基矢量呢?

$$\mathbf{T}^{ij'}=\begin{bmatrix}\beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'}\\ \beta_1^{2'} & \beta_2^{2'} & \beta_3^{2'}\\ \beta_1^{3'} & \beta_2^{3'} & \beta_3^{3'}\end{bmatrix}$$

互逆

$$\mathbf{T}^{i'j}=\begin{bmatrix}\beta_{1'}^{1} & \beta_{2'}^{1} & \beta_{3'}^{1}\\ \beta_{1'}^{2} & \beta_{2'}^{2} & \beta_{3'}^{2}\\ \beta_{1'}^{3} & \beta_{2'}^{3} & \beta_{3'}^{3}\end{bmatrix}$$

?

转置

?

$$\mathbf{T}_{ij'}=\begin{bmatrix}\beta_{1'}^{1} & \beta_{1'}^{2} & \beta_{1'}^{3}\\ \beta_{2'}^{1} & \beta_{2'}^{2} & \beta_{2'}^{3}\\ \beta_{3'}^{1} & \beta_{3'}^{2} & \beta_{3'}^{3}\end{bmatrix}$$

互逆

$$\mathbf{T}_{i'j}=\begin{bmatrix}\beta_1^{1'} & \beta_1^{2'} & \beta_1^{3'}\\ \beta_2^{1'} & \beta_2^{2'} & \beta_2^{3'}\\ \beta_3^{1'} & \beta_3^{2'} & \beta_3^{3'}\end{bmatrix}$$

一、张量（见《张量分析》）

- **斜角坐标系下的坐标变换（pp. 14-17）**

4、如果将旧的逆变基矢量看作一个新坐标系的协变基矢量:

$$将\ \left\{\mathbf{g}^1,\mathbf{g}^2,\mathbf{g}^3\right\}\ 替代\ \left\{\mathbf{g}_{1'},\mathbf{g}_{2'},\mathbf{g}_{3'}\right\}$$

建立的协变坐标与逆变坐标之间的坐标转换关系?

$$\mathbf{v}=v_1\mathbf{g}^1+v_2\mathbf{g}^2+v_3\mathbf{g}^3=v^1\mathbf{g}_1+v^2\mathbf{g}_2+v^3\mathbf{g}_3$$

一、张量（见《张量分析》）

• 斜角坐标系下的坐标变换（pp. 14-17）

4、如果将旧的逆变基矢量看作一个新坐标系的协变基矢量:

将 $\left\{\mathbf{g}^1,\mathbf{g}^2,\mathbf{g}^3\right\}$ 替代 $\left\{\mathbf{g}_{1'},\mathbf{g}_{2'},\mathbf{g}_{3'}\right\}$

建立的协变坐标与逆变坐标之间的坐标转换关系?

$$\mathbf{v}=v_1\mathbf{g}^1+v_2\mathbf{g}^2+v_3\mathbf{g}^3=v^1\mathbf{g}_1+v^2\mathbf{g}_2+v^3\mathbf{g}_3$$

例如，要建立 $\{v^1,v^2,v^3\}\Rightarrow\{v_1,v_2,v_3\}$ 的坐标变换关系

- 需要将 $\left\{\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\mathbf{g}_3\right\}$ 沿 $\left\{\mathbf{g}^1,\mathbf{g}^2,\mathbf{g}^3\right\}$ 进行分解

代入

$$\mathbf{g}_1=\beta_{11}\mathbf{g}^1+\beta_{21}\mathbf{g}^2+\beta_{31}\mathbf{g}^3$$

$$\mathbf{g}_2=\beta_{12}\mathbf{g}^1+\beta_{22}\mathbf{g}^2+\beta_{32}\mathbf{g}^3$$

$$\mathbf{g}_3=\beta_{13}\mathbf{g}^1+\beta_{23}\mathbf{g}^2+\beta_{33}\mathbf{g}^3$$

一、张量（见《张量分析》）

- **斜角坐标系下的坐标变换（pp. 14-17）**

可得

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

其中：$\beta_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$

类似地，有

$$\begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^{11} & \beta^{12} & \beta^{13} \\ \beta^{21} & \beta^{22} & \beta^{23} \\ \beta^{31} & \beta^{32} & \beta^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

其中：$\beta^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j$

上式代表了指标升降关系

一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**

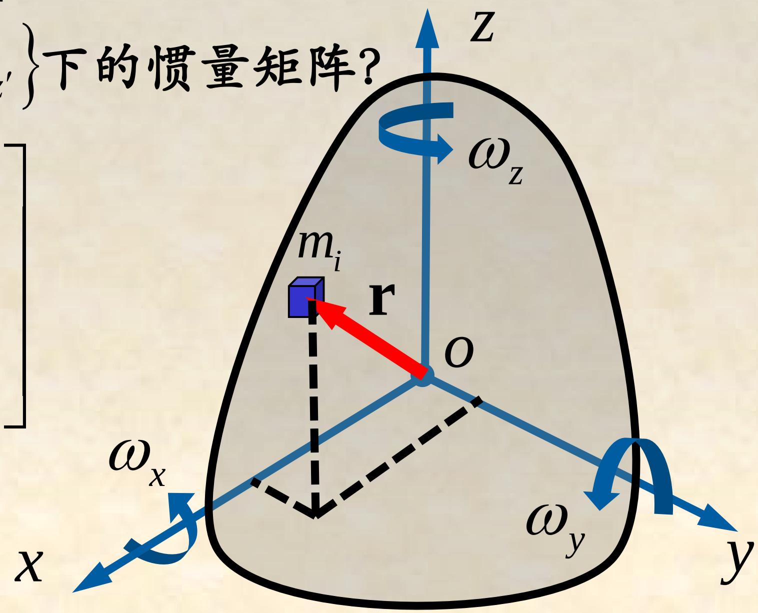
5、在单位正交基矢量 $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$（此时逆/协变基矢量相同）下，已知某刚体有如下惯量矩阵：

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

思考：为什么存在负号？

那么如何求解在新正交坐标系 $\{\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}, \mathbf{e}_{z'}\}$ 下的惯量矩阵？

$$\begin{bmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix}$$



一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**

下面通过推导刚体的角动量来解释惯量矩阵的定义，特别是为什么存在负号?

（1）有一个坐标系o-xyz，基矢量为 $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$

（2）有一个刚体相对惯性空间转动，转动角速度沿x, y, z轴的分量为ωx, ωy, ωz

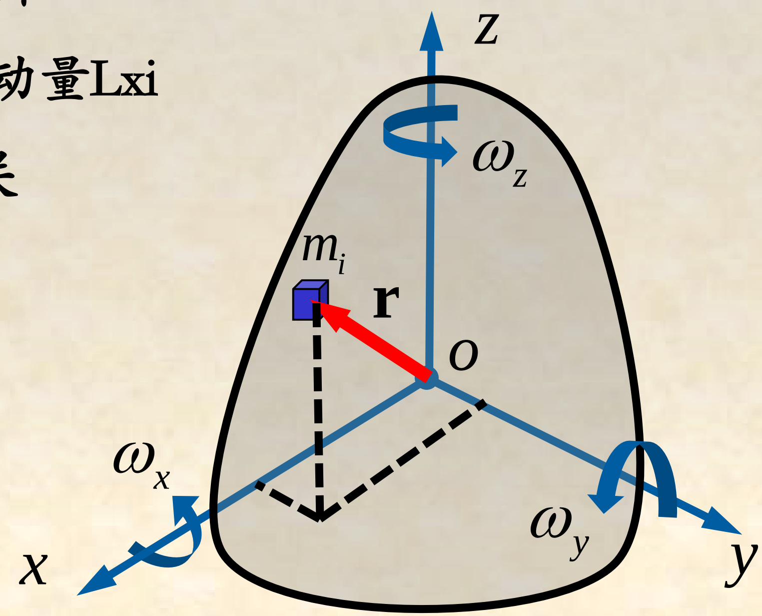
（3）刚体相对于O点的角动量可以分解为沿x, y, z三个轴的分量Lx, Ly, Lz

（4）刚体的角动量等于每一个质点的角动量之和

（5）这里，我们先观察第i个质点m_i绕x轴的角动量Lxi

（6）Lxi与m_i垂直于x轴的速度分量Vyi和Vzi有关

记：m_i点的位置（x_i, y_i, z_i）



一、张量（见《张量分析》）

• 拓展：惯量矩阵的坐标变换

下面通过推导刚体的角动量来解释惯量矩阵的定义，特别是为什么存在负号?

（1）有一个坐标系o-xyz，基矢量为 $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$

（2）有一个刚体相对惯性空间转动，转动角速度沿x, y, z轴的分量为ωx, ωy, ωz

（3）刚体相对于O点的角动量可以分解为沿x, y, z三个轴的分量Lx, Ly, Lz

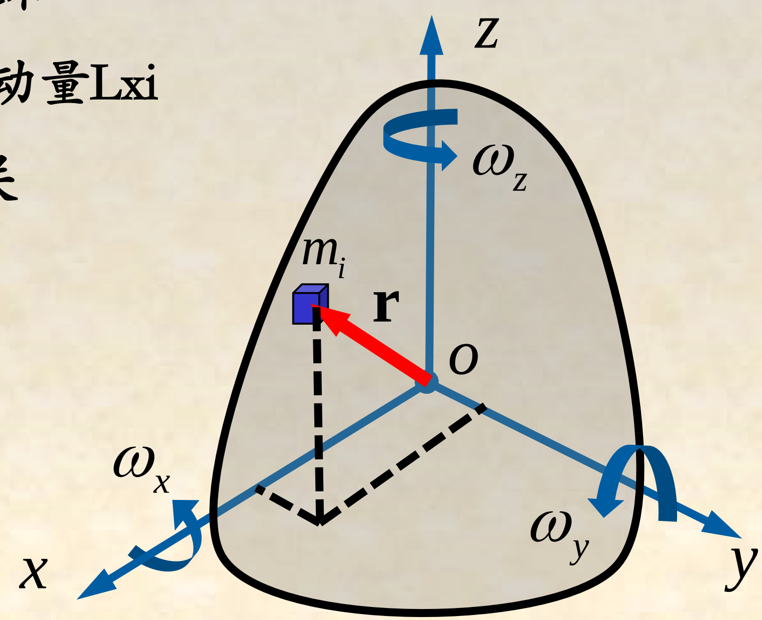
（4）刚体的角动量等于每一个质点的角动量之和

（5）这里，我们先观察第i个质点m_i绕x轴的角动量Lxi

（6）Lxi与m_i垂直于x轴的速度分量Vyi和Vzi有关

$$V_{yi} = -\omega_x z_i + \omega_z x_i$$

$$V_{zi} = \omega_x y_i - \omega_y x_i$$



一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**

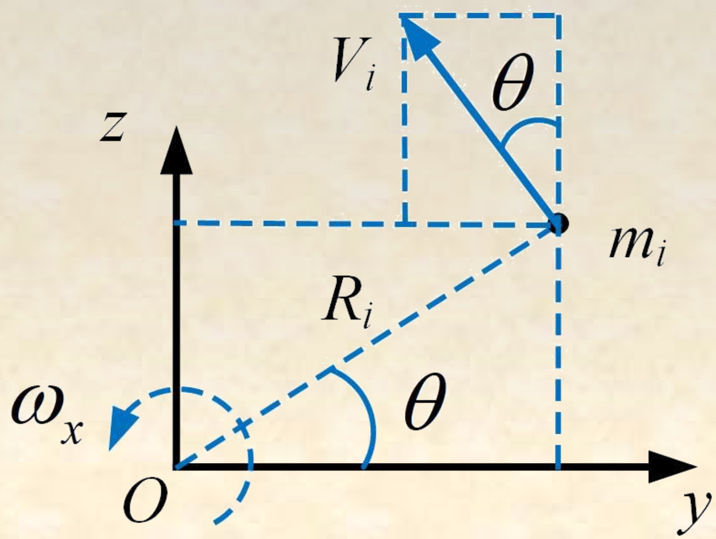
下面通过推导刚体的角动量介绍惯量矩阵：

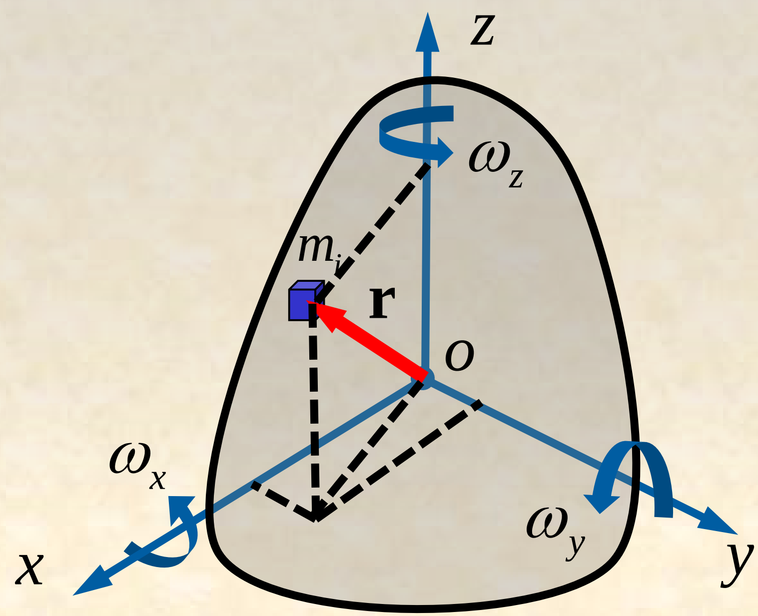
（5）这里，我们先观察第i个质点m_i相对于x轴的角动量Lxi

（6）Lxi与m_i垂直于x轴的速度分量Vyi和Vzi有关

$$V_{yi} = -V_i \sin\theta = -\omega_x R_i \sin\theta = -\omega_x z_i$$

$$V_{zi} = V_i \cos\theta = \omega_x R_i \cos\theta = \omega_x y_i$$





一、张量（见《张量分析》）

• 拓展：惯量矩阵的坐标变换

下面通过推导刚体的角动量来解释惯量矩阵的定义，特别是为什么存在负号?

（1）有一个坐标系o-xyz，基矢量为 $\left\{\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z\right\}$

（2）有一个刚体相对惯性空间转动，转动角速度沿x, y, z轴的分量为ωx, ωy, ωz

（3）刚体相对于O点的角动量可以分解为沿x, y, z三个轴的分量Lx, Ly, Lz

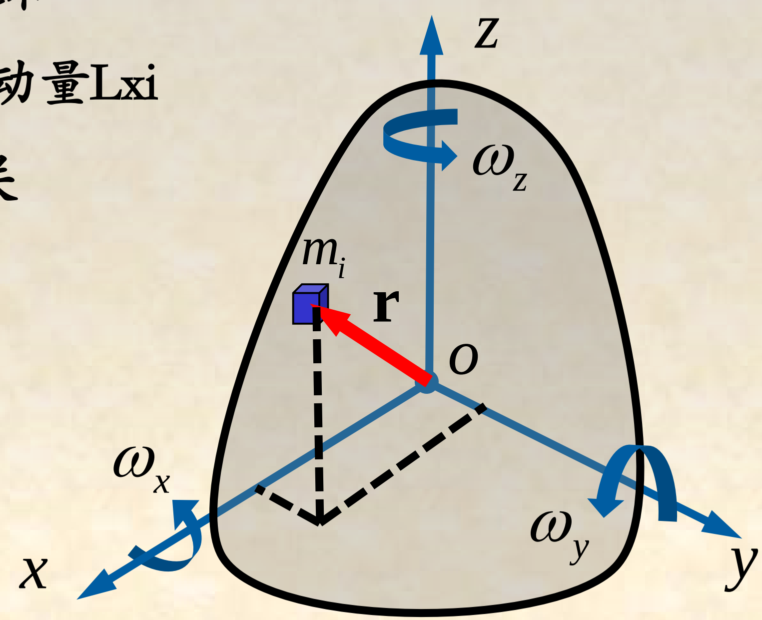
（4）刚体的角动量等于每一个质点的角动量之和

（5）这里，我们先观察第i个质点m_i绕x轴的角动量Lxi

（6）Lxi与m_i垂直于x轴的速度分量Vyi和Vzi有关

$$V_{yi}=-\omega_x z_i+\omega_z x_i$$

$$V_{zi}=\omega_x y_i-\omega_y x_i$$



一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**

下面通过推导刚体的角动量介绍惯量矩阵：

（1）有一个坐标系o-xyz，基矢量为 $\{\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z\}$

（2）有一个刚体相对惯性空间转动，转动角速度沿x, y, z轴的分量为ωx, ωy, ωz

（3）刚体相对于O点的角动量可以沿x, y, z三个轴分解为三个分量Lx, Ly, Lz

（4）刚体的角动量等于每一个质点的角动量之和

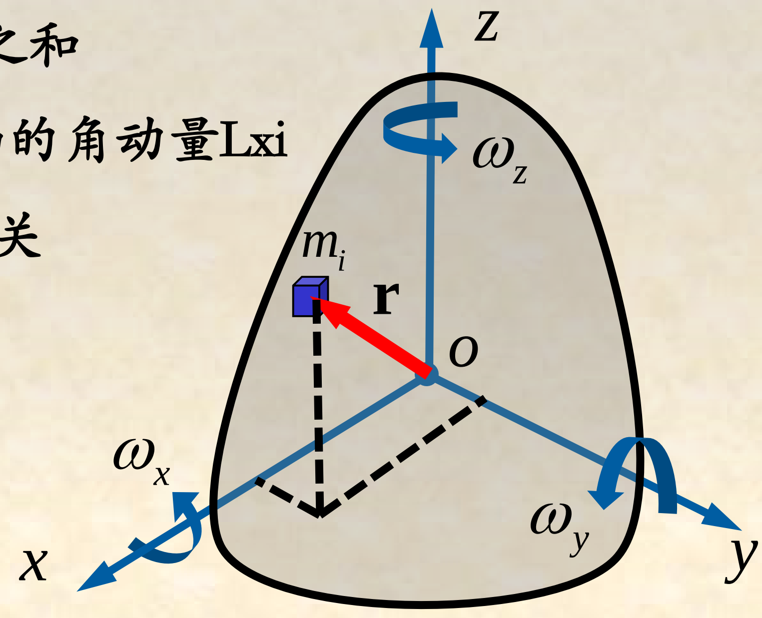
（5）这里，我们先观察第i个质点m_i相对于x轴的角动量Lxi

（6）Lxi与m_i垂直于x轴的速度分量Vyi和Vzi有关

$$L_{xi}=-m_iV_{yi}z_i+m_iV_{zi}y_i$$

$$=-m_i\left(-\omega_x z_i+\omega_z x_i\right)z_i+m_i\left(\omega_x y_i-\omega_y x_i\right)y_i$$

$$=m_i\left[\left(y_i^2+z_i^2\right)\omega_x-x_iy_i\omega_y-x_iz_i\omega_z\right]$$



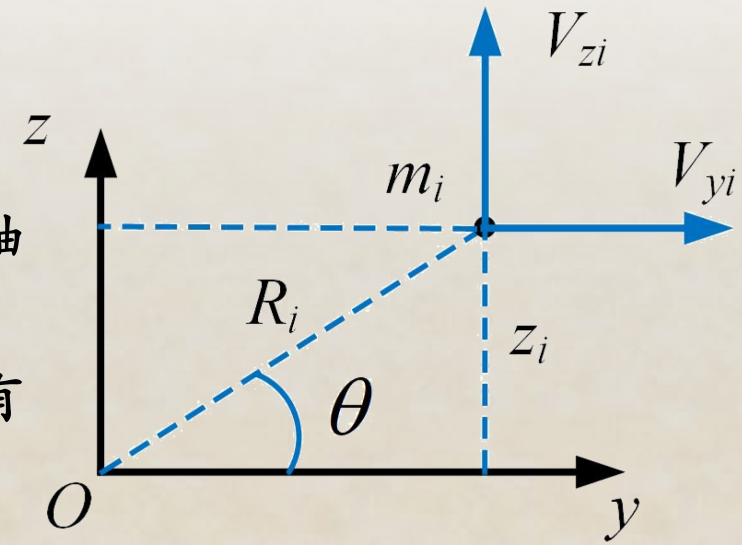
一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**

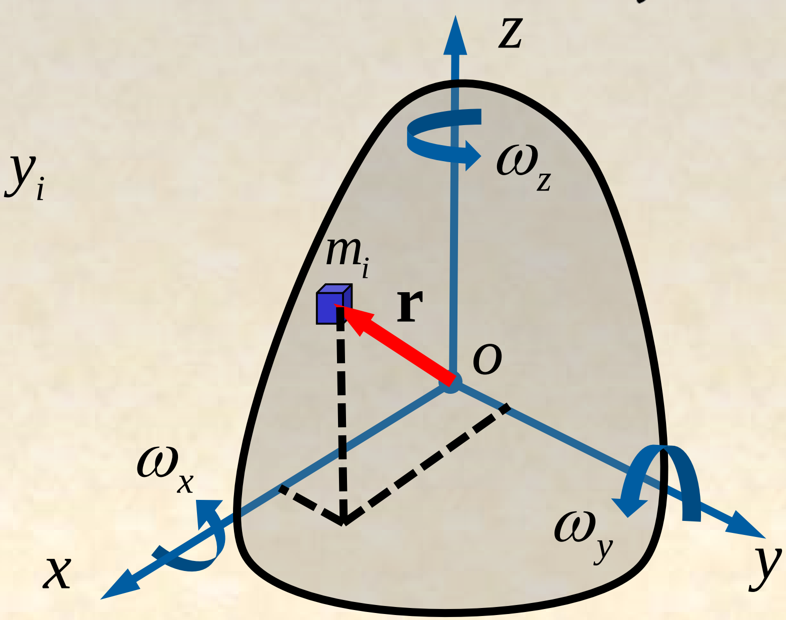
下面通过推导刚体的角动量介绍惯量矩阵：

（5）这里，我们先观察第i个质点m_i相对于x轴的角动量Lxi

（6）Lxi与m_i垂直于x轴的速度分量Vyi和Vzi有关



$$
\begin{aligned}
L_{xi} &= -m_i V_{yi} z_i + m_i V_{zi} y_i \\
&= -m_i\left(-\omega_x z_i + \omega_z x_i\right) z_i + m_i\left(\omega_x y_i - \omega_y x_i\right) y_i \\
&= m_i\left[\left(y_i^2 + z_i^2\right)\omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z\right]
\end{aligned}
$$



一、张量（见《张量分析》）

• 拓展：惯量矩阵的坐标变换

下面通过推导刚体的角动量介绍惯量矩阵：

（1）有一个坐标系o-xyz，基矢量为 $\left\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\right\}$

（2）有一个刚体相对惯性空间转动，转动角速度沿x, y, z轴的分量为ωx, ωy, ωz

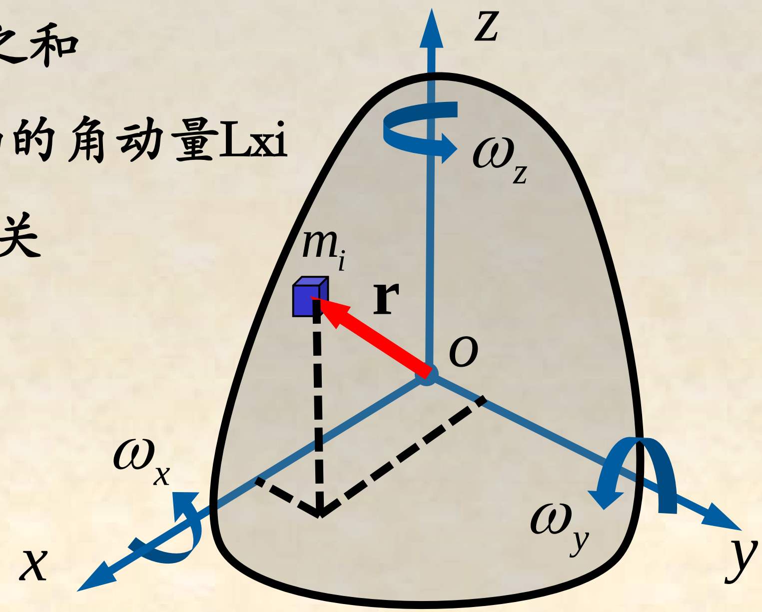
（3）刚体相对于O点的角动量可以沿x, y, z三个轴分解为三个分量Lx, Ly, Lz

（4）刚体的角动量等于每一个质点的角动量之和

（5）这里，我们先观察第i个质点m_i相对于x轴的角动量Lxi

（6）Lxi与m_i垂直于x轴的速度分量Vyi和Vzi有关

$$L_{xi} = m_i \begin{bmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$



一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**

下面通过推导刚体的角动量介绍惯量矩阵：

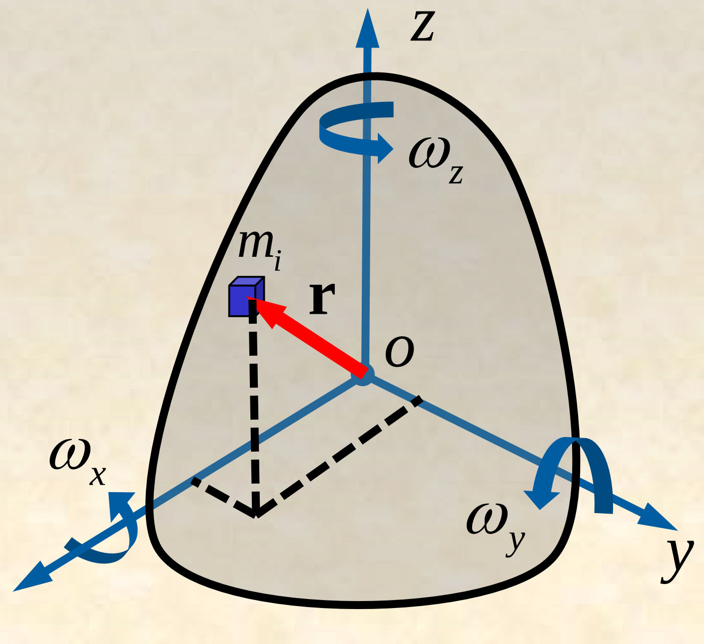
（7）类似地，有

$$L_{yi}=m_i\begin{bmatrix}-y_ix_i & x_i^2+z_i^2 & -y_iz_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}$$

$$L_{zi}=m_i\begin{bmatrix}-z_ix_i & -z_iy_i & x_i^2+y_i^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}$$

整理得：

$$\begin{bmatrix}L_{xi}\\ L_{yi}\\ L_{zi}\end{bmatrix}=m_i\begin{bmatrix}y_i^2+z_i^2 & -x_iy_i & -x_iz_i\\ -y_ix_i & x_i^2+z_i^2 & -y_iz_i\\ -z_ix_i & -z_iy_i & x_i^2+y_i^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}$$



一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**

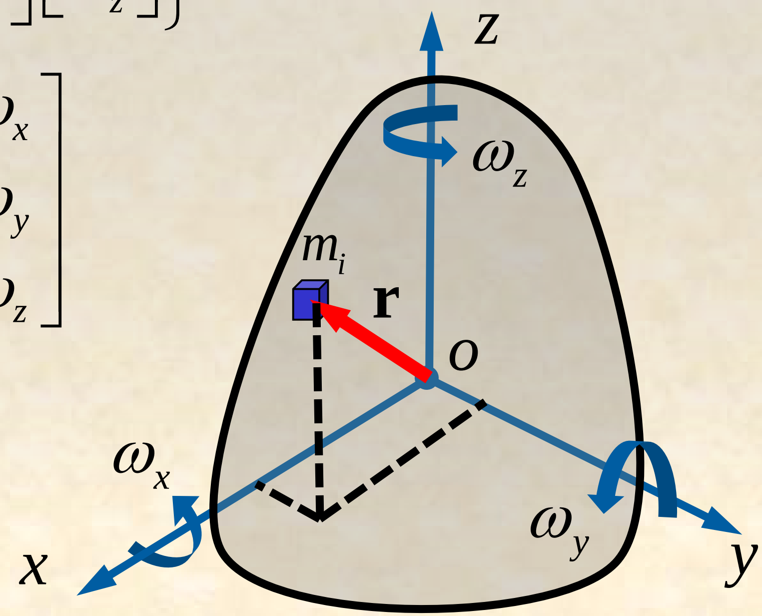
下面通过推导刚体的角动量介绍惯量矩阵：

（8）刚体的角动量等于每一个质点的角动量之和

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \sum \left\{ m_i \begin{bmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -y_i x_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & x_i^2 + y_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \boxed{\sum \left\{ m_i \begin{bmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -y_i x_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & x_i^2 + y_i^2 \end{bmatrix} \right\}} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$



一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**

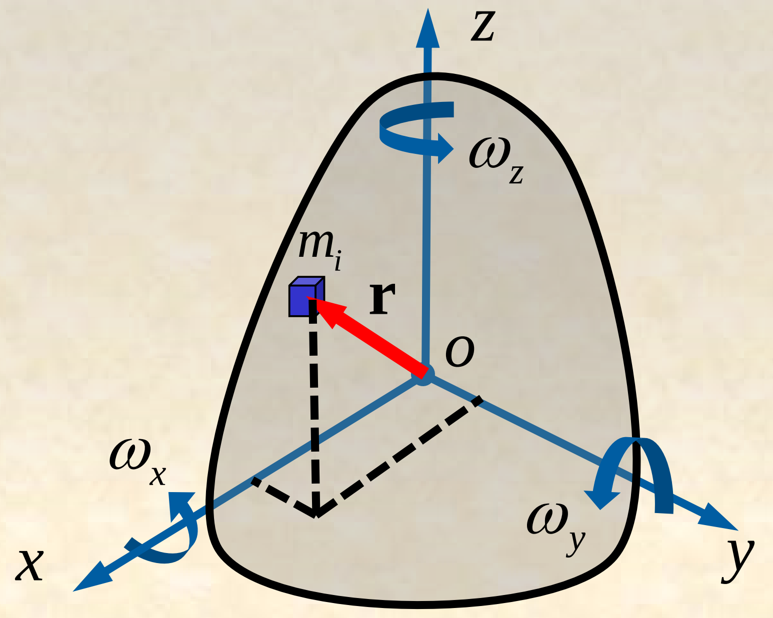
下面通过推导刚体的角动量介绍惯量矩阵：

（9）总结：为何有负号?

$$\begin{bmatrix} L_{xi} \\ L_{yi} \\ L_{zi} \end{bmatrix} = m_i \begin{bmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -y_i x_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & x_i^2 + y_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

单独分析这一项：

- 当xi和yi大于零的时候，ωy引起的垂直于x轴的速度分量沿z轴负方向；
- 由右手法则可知，这个速度分量引起的相对x轴的角动量分量沿x轴的负方向；
- 因此，该项中存在负号。



一、张量（见《张量分析》）

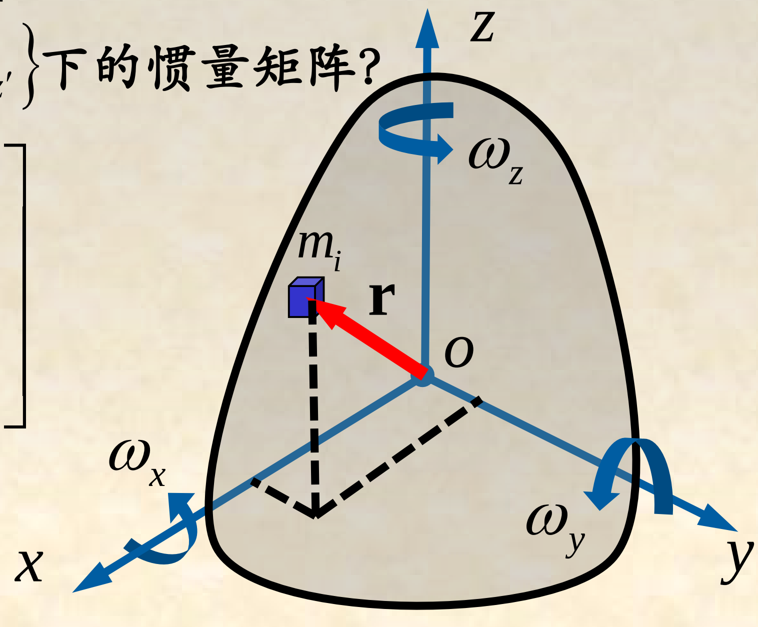
- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**

5、在单位正交基矢量 $\{\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z\}$（此时逆/协变基矢量相同）下，已知某刚体有如下惯量矩阵：

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

那么如何求解在新正交坐标系 $\{\mathbf{e}_{x'},\mathbf{e}_{y'},\mathbf{e}_{z'}\}$下的惯量矩阵？

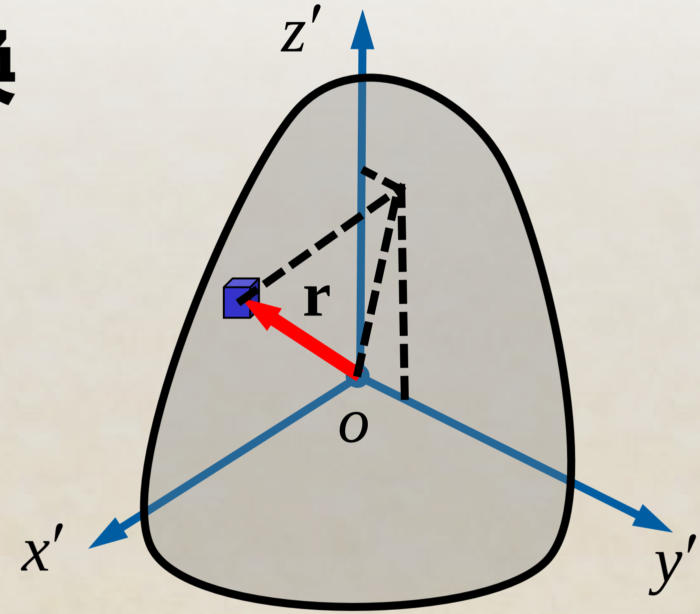
$$\begin{bmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix}$$



一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**

解：分别看每一个元素



$$\begin{bmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'y'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix}$$

$$I_{x'x'} = \int\left[\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_{y'}\right)^2 + \left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_{z'}\right)^2\right]\rho \mathrm{dV}$$

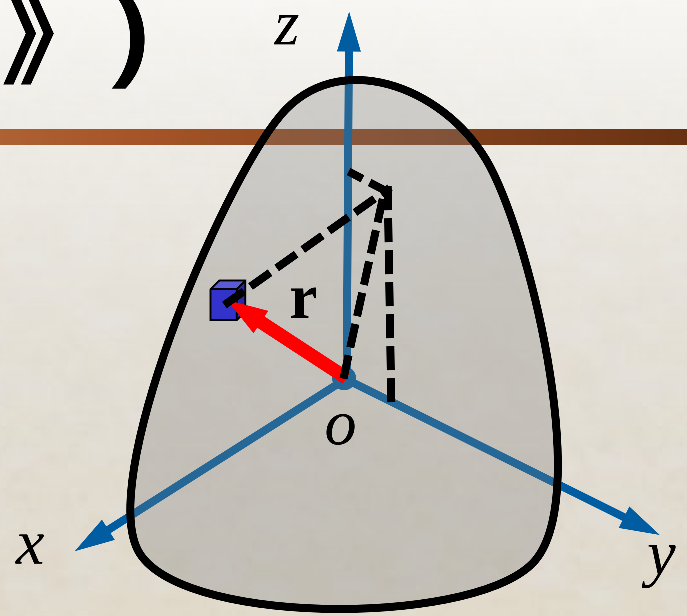
$$= \int\left[\|\mathbf{r}\|^2 - \left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_{x'}\right)^2\right]\rho \mathrm{dV}$$

$$= \underline{\int\|\mathbf{r}\|^2 \rho \mathrm{dV}} - \int\left(\mathbf{r}\cdot\left(\beta_{x'x}\mathbf{e}_x + \beta_{x'y}\mathbf{e}_y + \beta_{x'z}\mathbf{e}_z\right)\right)^2 \rho \mathrm{dV}$$

不随坐标系变化，记为I

一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**



其中：

$$\left(\mathbf{r}\cdot\left(\beta_{x'x}\mathbf{e}_x+\beta_{x'y}\mathbf{e}_y+\beta_{x'z}\mathbf{e}_z\right)\right)^2$$

$$=\left(\beta_{x'x}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x+\beta_{x'y}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y+\beta_{x'z}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z\right)^2$$

$$=\left(\beta_{x'x}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x+\beta_{x'y}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y+\beta_{x'z}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z\right)\left(\beta_{x'x}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x+\beta_{x'y}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y+\beta_{x'z}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z\right)$$

$$=\begin{bmatrix}\beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x\\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y\\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x & \mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y & \mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{x'x}\\ \beta_{x'y}\\ \beta_{x'z}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x)^2 & (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y) & (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z)\\ (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x) & (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y)^2 & (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z)\\ (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x) & (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y) & (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{x'x}\\ \beta_{x'y}\\ \beta_{x'z}\end{bmatrix}$$

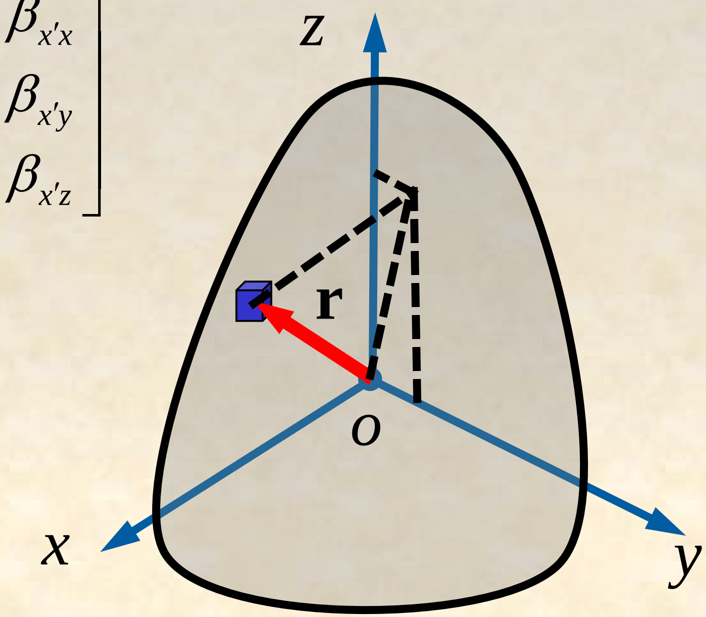
一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**

积分有：

$$I_{x'x'} = I - \begin{bmatrix}\beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\int(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_x)^2\rho\mathrm{d}V & I_{xy} & I_{xz}\\ I_{yx} & \int(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_y)^2\rho\mathrm{d}V & I_{yz}\\ I_{zx} & I_{zy} & \int(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z)^2\rho\mathrm{d}V\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{x'x}\\ \beta_{x'y}\\ \beta_{x'z}\end{bmatrix}$$

$$= I - \begin{bmatrix}\beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I-I_{xx} & I_{xy} & I_{xy}\\ I_{yx} & I-I_{yy} & I_{yz}\\ I_{zx} & I_{zy} & I-I_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{x'x}\\ \beta_{x'y}\\ \beta_{x'z}\end{bmatrix}$$



一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**

再看：

$$\begin{bmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'y'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix}$$

$$I_{x'y'} = \int \left[\left(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_{x'} \right) \left(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_{y'} \right) \right] \rho \mathrm{dV}$$

$$= \int \left(\mathbf{r} \cdot \left(\beta_{x'x} \mathbf{e}_x + \beta_{x'y} \mathbf{e}_y + \beta_{x'z} \mathbf{e}_z \right) \right) \left(\mathbf{r} \cdot \left(\beta_{y'x} \mathbf{e}_x + \beta_{y'y} \mathbf{e}_y + \beta_{y'z} \mathbf{e}_z \right) \right) \rho \mathrm{dV}$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - I_{xx} & I_{xy} & I_{xy} \\ I_{yx} & I - I_{xx} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I - I_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{y'x} \\ \beta_{y'y} \\ \beta_{y'z} \end{bmatrix}$$

一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**

类似地：

$$\begin{bmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix}$$

$$I_{x'z'} = \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I - I_{xx} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I - I_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{z'x} \\ \beta_{z'y} \\ \beta_{z'z} \end{bmatrix}$$

进而有：

$$\begin{bmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I - I_{xx} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I - I_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{y'x} & \beta_{z'x} \\ \beta_{x'y} & \beta_{y'y} & \beta_{z'y} \\ \beta_{x'z} & \beta_{y'z} & \beta_{z'z} \end{bmatrix}$$

一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**
  - 其它元素具有类似结果，进而整理可得

$$
\begin{bmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'y'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} -
$$

$$
\begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z} \\ \beta_{y'x} & \beta_{y'y} & \beta_{y'z} \\ \beta_{z'x} & \beta_{z'y} & \beta_{z'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I-I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I-I_{xx} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I-I_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{y'x} & \beta_{z'x} \\ \beta_{x'y} & \beta_{y'y} & \beta_{z'y} \\ \beta_{x'z} & \beta_{y'z} & \beta_{z'z} \end{bmatrix}
$$

1、左边是旧坐标系向新坐标系的坐标转换矩阵，右边是左边矩阵的转置

2、由于基矢量相互正交，这两个矩阵是单位正交阵，因此互逆

一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**

  - 因此可以改写为

$$\begin{bmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'y'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z} \\ \beta_{y'x} & \beta_{y'y} & \beta_{y'z} \\ \beta_{z'x} & \beta_{z'y} & \beta_{z'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{y'x} & \beta_{z'x} \\ \beta_{x'y} & \beta_{y'y} & \beta_{z'y} \\ \beta_{x'z} & \beta_{y'z} & \beta_{z'z} \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z} \\ \beta_{y'x} & \beta_{y'y} & \beta_{y'z} \\ \beta_{z'x} & \beta_{z'y} & \beta_{z'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I - I_{xx} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I - I_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{y'x} & \beta_{z'x} \\ \beta_{x'y} & \beta_{y'y} & \beta_{z'y} \\ \beta_{x'z} & \beta_{y'z} & \beta_{z'z} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z} \\ \beta_{y'x} & \beta_{y'y} & \beta_{y'z} \\ \beta_{z'x} & \beta_{z'y} & \beta_{z'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{xx} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{y'x} & \beta_{z'x} \\ \beta_{x'y} & \beta_{y'y} & \beta_{z'y} \\ \beta_{x'z} & \beta_{y'z} & \beta_{z'z} \end{bmatrix}$$

一、张量（见《张量分析》）

- **拓展：惯量矩阵的坐标变换**

$$\begin{bmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'y'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{x'y} & \beta_{x'z} \\ \beta_{y'x} & \beta_{y'y} & \beta_{y'z} \\ \beta_{z'x} & \beta_{z'y} & \beta_{z'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_{xx} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{x'x} & \beta_{y'x} & \beta_{z'x} \\ \beta_{x'y} & \beta_{y'y} & \beta_{z'y} \\ \beta_{x'z} & \beta_{y'z} & \beta_{z'z} \end{bmatrix}$$

1、可见，惯量矩阵的坐标转换关系不同于矢量的坐标转换关系；

2、惯量矩阵的另一个名称叫惯量张量，是一个二阶张量；相比之下，矢量是一阶张量。

3、一、二阶张量分别需要满足如下坐标变换关系

$$\mathbf{X}^B = \mathbf{T}^{AB}\mathbf{X}^A \qquad \mathbf{I}^B = \mathbf{T}^{AB}\mathbf{I}^A[\mathbf{T}^{AB}]^T$$