HM1 SW 11 PRAKTIKUMSNOTIZEN / adel

Vorbesprechung Serie 10

Hinweise

Eigene (Teil-)Lösungen sind bis Di, 5. Dez., 14:00 Uhr auf Moodle abzugeben

Aufgabe 1e) und 2e) sowie Aufgaben 3b) und 3c) müssen nicht gelöst werden.

Aufgabe 1 (ca. 45 Minuten): Jacobi-Verfahren von Hand

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \\ 34 \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie, ob das obige System bzgl. dem Jacobi-Verfahren konvergiert. → $\|B\|_\infty < 1$ und/oder Diagonal-dominant

b) Berechnen Sie auf vier Stellen nach dem Komma die Näherung $x^{(3)}$ mit dem Jacobi-Verfahren ausgehend vom Startvektor $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Schreiben Sie alle benötigten Matrizen sowie die verwendete Iterationsgleichung explizit auf. Die Iterationen selber führen Sie aber natürlich mit Python durch.

c) Wie gross ist gemäss der a-posteriori Abschätzung der absolute Fehler von $x^{(3)}$?

d) Schätzen Sie a-priori die Anzahl Iterationsschritte ab, damit der berechnete Näherungsvektor in jeder Kompnente maximal um 10^{-4} von der exakten Lösung $x = (2, -1, 4)^T$ abweicht.

Im ganzer Aufgabe mit $\boxed{\infty\text{-Norm}}$ rechnen.

Aufgabe 2 (ca. 30 Minuten): Gauss-Seidel-Verfahren von Hand

Wiederholen Sie die obige Aufgabe, diesmal für das Gauss-Seidel Verfahren. Sie dürfen (ausnahmsweise) die Inverse von $D + L$ benutzen (müssen aber nicht, wenn Sie nicht wollen).

$$Ax = b \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \\ 34 \end{pmatrix}.$$

a) $\|B\|_\infty < 1$ oder Diagonaldominant

A ist Zeilendominant

$$8 > 5 + 2$$
$$9 > 5 + 1$$
$$7 > 4 + 2$$

b) $x^{(3)}$ berechnen $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$x^{(m+1)} = -D^{-1}(L+R)x^{(m)} + D^{-1}b$$

$$A = L + D + R$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot x^{(m)} - \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \\ 34 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -0.625 & -0.25 \\ -0.5556 & 0 & -0.111 \\ -0.5714 & -0.2857 & 0 \end{pmatrix} X^{(m)} + \begin{pmatrix} 2.3750 \\ 0.5556 \\ 4.8571 \end{pmatrix} \qquad \cancel{\ldots} = B$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2.25 \\ -0.3\overline{3} \\ 4.5714 \end{pmatrix} \qquad x^2 = \begin{pmatrix} 1.4405 \\ -1.2024 \\ 3.6667 \end{pmatrix} \qquad x^3 = \begin{pmatrix} 2.2008 \\ -0.6521 \\ 4.3776 \end{pmatrix}$$

c) $$\|x^{(3)} - \overline{x}\|_\infty \leq \frac{\|B\|_\infty}{1-\|B\|_\infty} \| x^{(3)} - x^{(2)} \|_\infty$$

$$\|B\|_\infty = \frac{7}{8} = 0.8750 < 1$$

$$\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0.7693 \\ 0.5503 \\ 0.7109 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.7693$$

$$\frac{0.8750}{0.125} \cdot 0.7693 = 5.3857$$

d) $$\|x^1 - x^0\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 1.25 \\ 0.672 \\ 1.5714 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 15\ 74$$

2) a)

Aufgabe 2 (ca. 30 Minuten): Gauss-Seidel-Verfahren von Hand

Wiederholen Sie die obige Aufgabe, diesmal für das Gauss-Seidel Verfahren. Sie dürfen (ausnahmsweise) die Inverse von $D + L$ benutzen (müssen aber nicht, wenn Sie nicht wollen).

// übersprungen

Zum Beispiel 'J' und 'GS'

Jacobi-Verfahren und Gauss-Seidel-Verfahren mit Python

Aufgabe 3 (ca. 75 Minuten):

a) Implementieren Sie das Jacobi- und Gauss-Seidel-Verfahren zusammen in einer Funktion als `[xn, n, n2] = Name_S10_Aufg3a(A,b,x0,tol,opt)`. Sie können dabei die Matrix-Funktionen von `numpy` und `numpy.linalg` in Python benutzen, (z.B. `triu(A), diag(diag(A)), tril(A), inv(D+L)`), ohne aber `inv(A)` zu berechnen. Dabei soll `xn` der Iterationsvektor nach `n` Iterationen sein, zusätzlich soll `n2` die Anzahl benötigter Schritte gemäss der a-priori Abschätzung angeben. Über den Parameter `opt` soll gesteuert werden, ob das Jacobi- oder das Gauss-Seidel Verfahren zur Anwendung kommt. Überlegen Sie sich, wie die Abbruchbedingung für Ihre while-Schleife lauten muss, um die Iteration bei Erreichen einer vorgegebenen Fehlertoleranz `tol` abzubrechen. Sie werden dafür die Norm brauchen: `norm(...,np.inf)`. ~~Achten sie darauf, dass Sie Matrizen, die Sie in ihrer Funktion nicht mehr brauchen, gleich wieder löschen, um Speicher freizugeben[1]~~.

Ziel: Abbruch, wenn $\|\underline{x}^{(n)} - \underline{x}^*\|_\infty < tol$

Problem: exakte Lösung $\underline{x}^*$ nicht bekannt

Hilfe: A-posteriori-Abschätzung

$$\|\underline{x}^{(n)} - \underline{x}^*\|_\infty \leq \underbrace{\frac{\|B\|_\infty}{1-\|B\|_\infty} \cdot \|\underline{x}^{(n)} - \underline{x}^{(n-1)}\|_\infty}_{\text{Abbruch, wenn } < tol}$$

Vorlage: Vorlesungsnotizen Woche 10, Seite 5

Zusatz: Test mit Aufgaben 1 und 2