Lineare Algebra

Manuel Strenge

Vektoren

Sinn

Wenn eine Grösse mit einem wert dargestellt werden kann, wie z.B. Temperator, dann wird es skalar genannt. *skalare* = reele zahlen.

Gewisse physische faktoren können nicht nur mit einer nummer dargestellt werden. z.B. Richtung.

Ein Vektor R^3 kann durch 3 reele Zahlen, ein 3-Tupel beschrieben werden.

> Für 2- oder 3-Tupel lassen sich die Rechenoperationen auch geometrisch veranschaulichen. Für allgemeine n-Tupel ist das nicht möglich, trotzdem ist die geometrische Anschauung für n = 2 oder n = 3 oft der Schlüssel zur Lösung komplizierter Probleme.

Definition

Ein n-Tupel $(a_1, a_2, ..., a_n) \in R^n$ nennt man auch Vektor. Die reellen Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ heissen die Koordinaten oder Komponenten des Vektors.

Die Komponenten eines Vektors schreiben wir häufig als Spalten:

$$\underset{a}{\rightarrow} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = R^n$$

Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie koordinatenweise übereinstimmen. Die Vektorgleichung $\underset{a}{\rightarrow} = \underset{b}{\rightarrow}$ ist also nichts anderes als eine abkürzende Schreibweise für die n Gleichungen.

$$a_1 = b_1 a_2 = b_2 ... a_n = b_n$$

Vektoren in R^2 bzw. in R^3 können wir uns als Pfeile vorstellen und der Pfeil darf vom beliebigen Punkt eingezeichnet werden.

Um einen Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ in R^2 einzuzeichnen:

1. wählt man einen Anfangspunkt,
2. geht ax Schritte entlang der x-Achse und ay Schritte entlang der y-Achse,
3. erreicht so den Endpunkt des Vektors.

Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ wird auch als Pfeil ausgehend vom Ursprung O

Seine Spitze beschreibt den Ort jenes Punktes, dessen Koordinaten gleich den Komponenten des Vektors sind. Um zu betonen, dass es der Ortsvektor des Punktes P ist, schreibt man $\vec{OP}$.

Siehe bild unter definition vektor

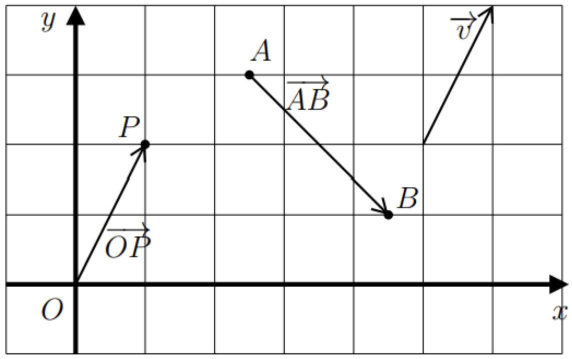

Figure 1: Eingezeichnete Ortsvektoren

Zusammenfassend darf der Pfeil in R^2 bzw. R^3 beliebig parallel verschoben werden. Es bleibt immer der gleiche Vektor: $\vec{v} = \vec{OP}$

In der Ebene: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, mit $P(x; y)$

Im Raum: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, mit $P(x; y; z)$

In $\mathbb{R}^n$: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, mit $P(x_1; \ldots; x_n)$

Figure 2: Insbesondere lautet dieser Zusammenhang für den Ortsvektor

Definition

Der Vektor, dessen Anfangspunkt und Endpunkt übereinstimmen, heisst der Nullvektor und wird durch $\vec{0}$ bezeichnet.

Addition, Subtraktion und Skalarmultiplikation

Definition Die Summe zweier Vektoren der gleichen Dimension n ist komponentenweise definiert und ergibt wieder einen n-dimensionalen Vektor:

Geometrische betrachtungsweise

Die geometrische Addition der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

1. Der Vektor $\vec{b}$ wird parallel zu sich selbst verschoben, bis sein Anfangspunkt auf den Endpunkt des Vektors $\vec{a}$ trifft
2. Der Anfangspunkt des Vektors $\vec{a}$ wird mit dem Endpunkt des Vektors $\vec{b}$ verbunden. Der resultierende Pfeil repräsentiert den Summenvektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Figure 3: vector addition

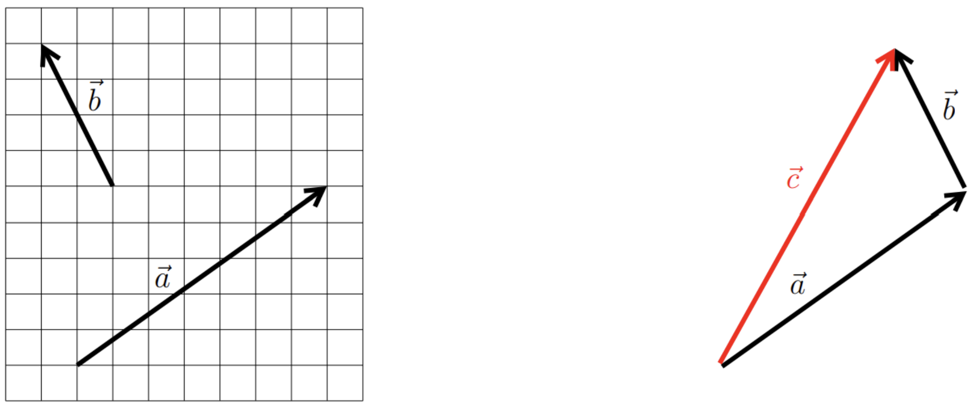

Figure 4: vector addition geomoetrisch visualisiert

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$