Theoretische Informatik

Manuel Strenge

Aplhabete

Mächtig was ist die Decke der Menge: Unendlich=sehr mächtig

Ein Alphabet ist eine endliche, nichtleere Menge von Symbolen

{:),2} -> alphabet

{1,2,3} -> alphabet

{1,2,3,...} -> kein da nicht endlich

{a,...,b} -> alphabet

{a,a,a}-> ja

- $\Sigma = \{a, b, c\}$ ist die Menge der drei Symbole a, b und c.
- $\Sigma = \{-, +, \cdot, :\}$ ist die Menge der Symbole für die Grundrechenarten.
- $\Sigma_{\mathsf{Bool}} = \{0, 1\}$ ist das Boolesche Alphabet.
- $\Sigma_{\mathsf{lat}} = \{a, b, c, \ldots, z\}$ ist die Menge der lateinischen Kleinbuchstaben.
- $\mathbb{N}$ ist kein Alphabet (unendliche Mächtigkeit)

Wort

Ein Wort (Zeichenreihe, String) ist eine endliche Folge von Symbolen eines bestimmten Alphabets

- abc ist ein Wort über dem Alphabet Σ_{lat} (oder über $\Sigma = \{a, b, c\}$).
- 100111 ist ein Wort über dem Alphabet $\{0, 1\}$.

Leeres Wort

Das **leere** Wort ist ein Wort, das keine Symbole enthält. Es wird durch das Symbol ε dargestellt und ist ein Wort über jedem Alphabet.

Wörter

Die Länge eines Wortes w ist die Länge des Wortes als Folge, also die Anzahl der Symbole der Folge. Wir bezeichnen diese Länge mit $|w|$.

- $|abc| = 3$
- $|100111| = 6$
- $|\varepsilon| = 0$
- $|Informatik\ ist\ spannend| = 23$ *(Leerzeichen sind auch Symbole!)*

Definition (Häufigkeit eines Symbols in einem Wort)

$|w|_x$ bezeichnet die absolute Häufigkeit eines Symbols x in einem Wortes w.

- $|abc|_a = 1$
- $|100111|_1 = 4$
- $|\varepsilon|_0 = 0$
- $|Informatik\ ist\ spannend|_n = 4$

Definition (Spiegelung eines Wort)

Mit w^R wird das Spiegelwort zu w bezeichnet.

$$w^R = (x_1, x_2 ... x_n)^R = x_n ... x_2, x_1$$

Es gilt $|w| = |w^R| und |w|_x = |w^R|_x für alle x \in \sum$. Wenn $w = wR$ gilt, dann bezeichnet man w als Palindrom.

- $(abc)^R = cba$
- $(100111)^R = 111001$
- $\varepsilon^R = \varepsilon$
- $(Informatik\ ist\ spannend)^R = dnennaps\ tsi\ kitamrofnI$

Definition (Teilwort)

Wir sagen, dass v ein Teilwort (Infix) von w ist, wenn man w als

$$w = xvy$$

für beliebige Wörter x und y über $\sum$ schreiben kann

$$\underbrace{\boxed{\ x\ }\boxed{\quad v\quad }\boxed{\ y\ }}_{w}$$

Definition (echtes Teilwort)

Ein echtes Teilwort von w ist jedes Teilwort von w, das nicht identisch mit w ist (in diesem Falle ist x oder y nicht leer).

- ε, a, b, ab, abb, bb, $abba$, bba und ba sind die Teilwörter von $abba$.
- $abba$ ist kein echtes Teilwort von $abba$ (alle anderen ja).

In Programmiersprachen ist der Begriff substring gebräuchlich.

Präfix

Ein Wort v ist ein Präfix von w, wenn

$$w = xy$$

$$\underbrace{\boxed{\quad v \quad}\boxed{y}}_{w}$$

Ein echtes Präfix von w ist jedes Präfix von w, das nicht identisch mit w ist (in diesem Fall ist y leer).

- ε, a, ab, abb und $abba$ sind die Präfixe von $abba$.
- $abba$ ist kein echtes Präfix von $abba$ (alle anderen ja).

Definition (Suffix)

Ein Wort v ist ein Suffix von w, wenn

$$w = xv$$

$$\underbrace{\boxed{x}\boxed{\quad v \quad}}_{w}$$

Ein echtes Suffix von w ist jedes Suffix von w, das nicht identisch mit w ist (in diesem Fall ist x leer).

- $abba$, bba, ba, a und ε sind die Suffixe von $abba$.
- $abba$ ist kein echtes Suffix von $abba$ (alle anderen ja).

Definition (Menge aller Wörter der Länge k)

Die Menge aller Wörter der Länge k über einem Alphabet $\sum$ wird mit $\sum^k$ bezeichnet.

- Für $\Sigma = \{a, b, c\}$ ist $\Sigma^2 = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$.
- Für $\{0, 1\}$ ist $\{0, 1\}^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$.

Definition (Menge aller Wörter (Zeichenreihen))

Die Menge aller Wörter (Kleenesche Hülle) über einem Alphabet $\sum$ wird mit $\sum^*$ bezeichnet. $\sum + = \sum * \varepsilon$ ist die Menge aller nichtleeren Wörter (positive Hülle) über einem Alphabet $\sum$.

Regex definitionen ursprung von hier.

Für $\{0, 1\}$ ist $\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \ldots\}$. Wörter aus $\{0, 1\}^*$ nennt man *Binärwörter*.

Eigenschaften

- $\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \ldots$
- $\Sigma^+ = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \ldots$
- $\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \Sigma^0 = \Sigma^+ \cup \{\varepsilon\}$

Definition (Konkatenation)

Definition (Konkatenation) Seien x und y zwei beliebige Wörter. Dann steht

$x \circ y = xy := (x_1, x_2 ... x_n, y_1, y_2 ... y_m)$

für die Konkatenation (Verkettung) von x und y.

Seien $x = 01001$ und $y = 110$ zwei Wörter. Dann ist $xy = 01001110$ die Konkatenation der Wörter x und y.

Definition (Wortpotenzen)

Sei x ein Wort über einem Alphabet $\sum$. Für alle $n \in N$ sind Wortpotenzen wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} x^0 &:= \varepsilon \\ x^{n+1} &:= x^n \circ x = x^n x \end{aligned}$$

$a^3 = a^2 a = a^1 aa = a^0 aaa = aaa$

$bbababababbaaaabab = b^2(ab)^4 ba^4 bab = b(ba)^4 b^2 a^3 (ab)^2$

$abbabbabbabbabbabbabbabbabba = a(bba)^9$

Definition (Sprache)

Eine Teilmenge $L \subseteq \sum^*$ von Wörtern über einem Alphabet $\sum$ wird als Sprache über $\sum$ bezeichnet.

- *Deutsch* ist eine Sprache über dem Alphabet der lateinischen Buchstaben, Leerzeichen, Kommata, Punkte ...
- *Programmiersprachen* (wie C) sind Sprachen über dem Alphabet des ASCII-Zeichensatzes.
- $\{\varepsilon, 10, 01, 1100, 1010, 1001, 0110, 0011, \ldots\}$ ist die Sprache der Wörter über $\{0, 1\}$ mit der gleichen Anzahl von Nullen und Einsen.

Anmerkungen:

- Sprachen können aus unendlich vielen Wörtern bestehen.
- Wörter müssen aus einem festen, endlichen Alphabet gebildet werden.
- Wörter selber haben eine endliche Länge.

Definition (Konkatenation von Sprachen)

Sind $A \subset \sum^*$ und $B \subset \tau^*$ beliebige Sprachen, dann wird die Menge

$$AB = uv|u \in Aundv \in B$$

Die Sprachen A und B sind wie folgt gegeben:

- A enthält alle Binärwörter, die mit 1 beginnen.
- B enthält alle Binärwörter, die mit 0 enden.

Welche der folgenden Wörter sind Elemente von AB?

ε ✗	10 ✓	01010 ✗
1010 ✓	11 ✗	1100110010 ✓

Wie kann man die Elemente von AB einfach beschreiben?

$AB =$ Menge der geraden Binärzahlen ohne Null

Reguläre Ausdrücke

Reguläre Ausdrücke sind Wörter, die Sprachen beschreiben, also eine Möglichkeit (gewisse) Sprachen endlich zu repräsentieren.

- Die Syntax der regulären Ausdrücke befasst sich mit der Frage, welche Form diese Wörter haben.
- In der Semantik der regulären Ausdrücke wird erklärt, wie man reguläre Ausdrücke als Sprachen interpretiert.

Gegeben: Das Wort 101 über dem Aphabet $\Sigma = \{0, 1, 2, ..., 9\}$

- Die Syntax beschreibt, wie die Symbole des Alphabets zu einem Wort angeordnet bzw. aneinandergereiht werden.
- Aus der Semantik geht hervor, was diese Zeichenreihe bedeutet: Z.B. die Zahl 101 im Zehnersystem, die Zahl 5 im Dualsystem oder einfach nur eine Folge von Symbolen usw.

Ein regulärer Ausdruck, der die Sprache aller Binärwörter der Länge 4 beschreibt:

$$\underbrace{(0|1)}_{\text{0 oder 1}}\ \underbrace{(0|1)}_{\text{nochmals}}\ \underbrace{(0|1)}_{\text{dreimal}}\ \underbrace{(0|1)}_{\text{genug}}$$

Ein passender regulärer Ausdruck ist also

$$(0|1)(0|1)(0|1)(0|1)$$

Ein regulärer Ausdruck für die Sprache der Binärwörter, die das Teilwort 00 enthalten:

$$\underbrace{(0|1)^*}_{\text{0 oder 1 beliebig oft}}\quad \underbrace{00}_{\text{das Teilwort}}\quad \underbrace{(0|1)^*}_{\text{0 oder 1 beliebig oft}}$$

Ein passender regulärer Ausdruck ist also

$$(0|1)^*00(0|1)^*$$

Definition (Reguläre Ausdrücke)

Es sei $\sum$ ein beliebiges Alphabet. Die Sprache $RA\sum$ der regulären Ausdrücke über $\sum$ ist wie folgt definiert:

- $\varnothing, \epsilon \in \mathsf{RA}_\Sigma$
- $\Sigma \subset \mathsf{RA}_\Sigma$
- $R \in \mathsf{RA}_\Sigma \Rightarrow (R^*) \in \mathsf{RA}_\Sigma$
- $R, S \in \mathsf{RA}_\Sigma \Rightarrow (RS) \in \mathsf{RA}_\Sigma$
- $R, S \in \mathsf{RA}_\Sigma \Rightarrow (R|S) \in \mathsf{RA}_\Sigma$

Erläuterungen zur Definition

- Die Sonderzeichen ε und $\varnothing$ sind reguläre Ausdrücke.
- Jedes Symbol aus dem Alphabet $\sum$ ist auch ein regulärer Ausdruck über $\sum$.

- Ist R ein regulärer Ausdruck über $\sum$, dann ist auch (R^*) ein regulärer Ausdruck über $\sum$.
- Sind R und S reguläre Ausdrücke über $\sum$, dann sind auch (RS) und $(R|S)$ Ausdrücke über $\sum$.

Eigenschaften und Konventionen:

- Die **Menge** RA_Σ **der regulären Ausdrücke** über dem Alphabet Σ ist **eine Sprache** über dem Alphabet $\{\varnothing, \epsilon, ^*, (,), |\} \cup \Sigma$.

  Elemente von RA_Σ sind z.B. $\varnothing, \epsilon, a, a^*, a|b, aba, ..$
- Der Lesbarkeit halber werden "überflüssige" Klammern weggelassen.
- Damit reguläre Ausdrücke auch mit (teilweise) weggelassenen Klammen eindeutig lesbar bleiben, gilt folgende Rangfolge der Operatoren:
  a) "*" vor "Konkatenation" und
  b) "Konkatenation" vor "|".

  Der Ausdruck $ab^*|c$ wird beispielsweise als $((a(b^*))|c)$ gelesen.

Einige reguläre Ausdrücke über dem Alphabet $\{a, b\}$.

- a^*b
- $(aa)^*b^*aba$
- $(a|(ab))^*$
- $(ab)|(ba)$
- $a(b(ba))|b$

Reguläre Sprachen

Satz (Rechenregeln für reguläre Ausdrücke)

- L(R|S) = L(S|R)
- L(R(ST)) = L((RS)T)
- L(R|(S|T)) = L((R|S)|T)
- L(R(S|T)) = L(RS|RT)
- L((R*)*) = L(R*)
- L(R|R) = L(R)

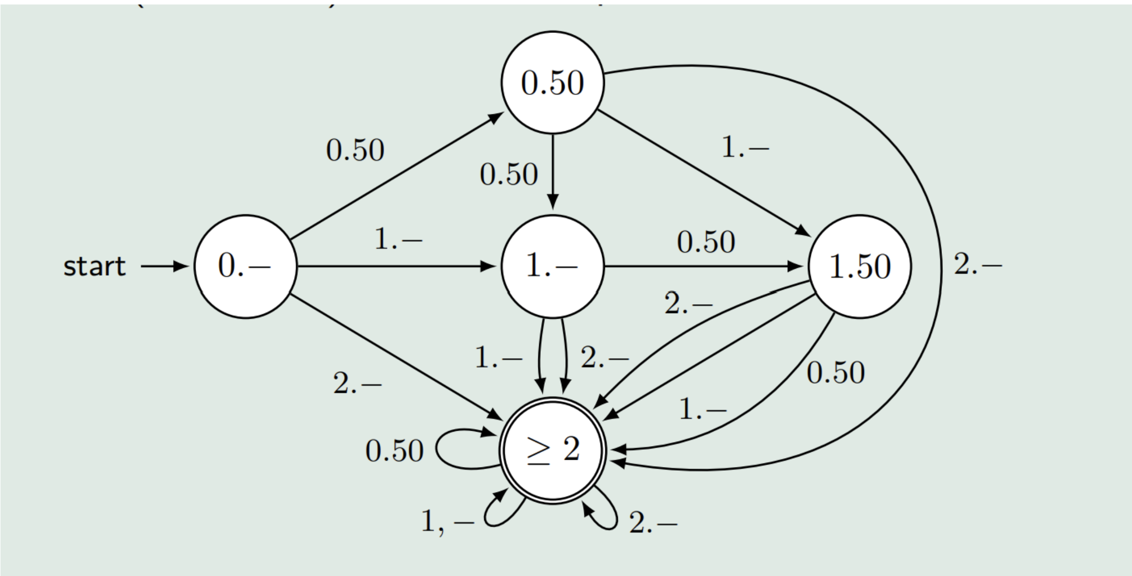
Anwendungen von regulären Ausdrücken:

- Mustersuche in Texten
- Lexikalische Analyse (in Compilern); Erkennung von Schlüsselwörtern ("Token")
- Syntax Test (bei einer einfachen Syntax)

Endliche Automaten

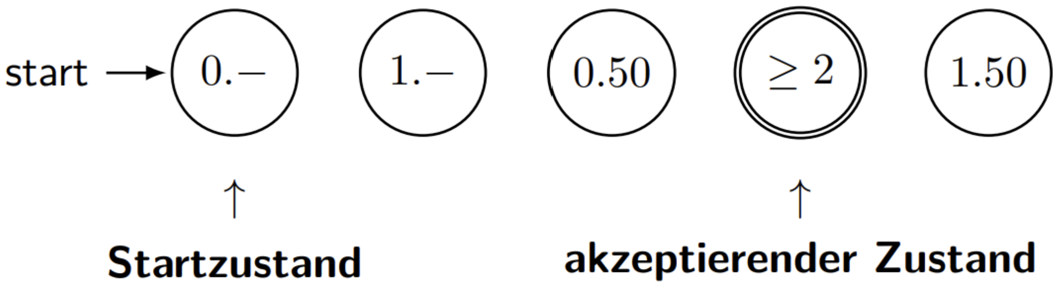
Beispiel (Einstiegsaufgabe: Eintrittskarte Schwimmbad)

Kosten 2.- (mindestens), Automat akzeptiert 0.50, 1.- und 2.-



Ein **endlicher Automat** besteht aus (elementare Bausteine):

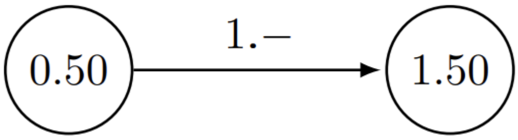
Zuständen



Eingabealphabet

0.50, 1.-,2.-

Übergangsfunktionen

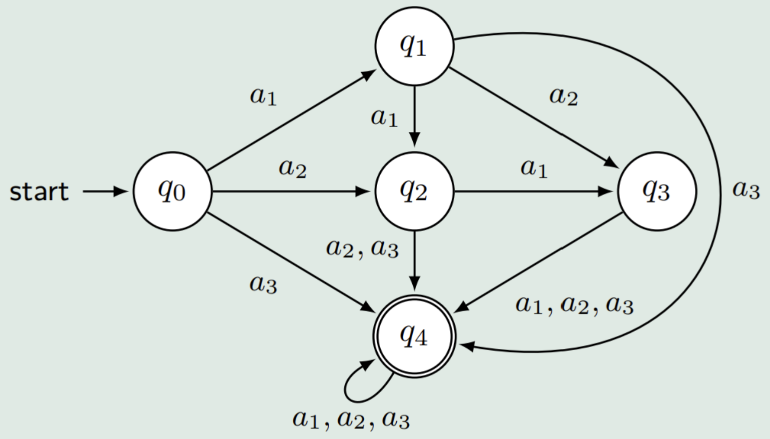


Wie wird die Eingabe eingegeben? -> Der endliche Automat liest das Wort von links nach rechts

Wieviel Speicher steht zur Verfügung? Wie geht man mit dem Speicher um? -> Es gibt keinen Speicher. -> Variablen dürfen nicht benutzt werden. -> Der einzige (gespeicherte) Information ist der aktuelle Zustand.

Wie wird die Ausgabe bestimmt (und ausgegeben)? -> Die Ausgabe erfolgt über akzeptierende Zustände.

Automat A:



Zustände:

$q_0 =$ Start
$q_1 = 0.50$
$q_2 = 1.–$
$q_3 = 1.50$
$q_4 \geq 2$

Eingabealphabet:

$a_1 = 0.50$
$a_2 = 1.–$
$a_3 = 2.–$

Übergangsfunktionen:

$\delta(q_0, a_1) = q_1, \ \ldots$

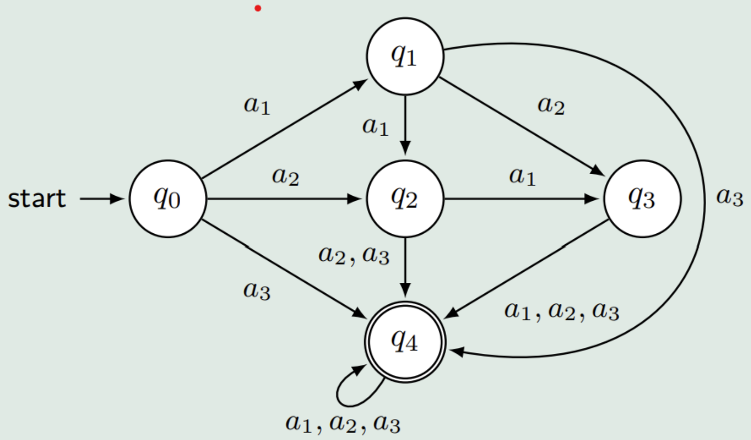
Definition (Endlicher Automat)

Ein (deterministischer) endlicher Automat (EA) ist ein Quintupel

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

- endlichen Menge von Zuständen $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$
- Eingabealphabet $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ $(m \in \mathbb{N})$
- Übergangsfunktion $\delta : Q \times N \to Q$
- Startzustand $q_0 \in Q$
- Menge der akzeptierenden Zustände $F \subseteq Q$

Automat A:



$\delta(q_0, a_1) = q_1$
$\delta(q_0, a_2) = q_2$
$\delta(q_0, a_3) = q_4$
$\delta(q_1, a_1) = q_2$
$\delta(q_1, a_2) = q_3$
$\delta(q_1, a_3) = q_4$
$\delta(q_2, a_1) = q_3$
$\delta(q_2, a_2) = q_4$
$\delta(q_2, a_3) = q_4$
$\delta(q_3, a_1) = q_4$
$\delta(q_3, a_2) = q_4$
$\delta(q_3, a_3) = q_4$

$\delta(q, a) = p$ bedeutet: EA wechselt zu p, falls in q Symbol a gelesen wird.

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit

- Zustandsmenge $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$
- Eingabealphabet $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3\}$
- Startzustand q_0
- akzeptierende Zustände $F = \{q_4\}$
- Übergangsfunktion δ:

	Eingabe		
Zustand	a_1	a_2	a_3
q_0	q_1	q_2	q_4
q_1	q_2	q_3	q_4
q_2	q_3	q_4	q_4
q_3	q_4	q_4	q_4
q_4	q_4	q_4	q_4

Sind NEAs mächtiger als DEAs?

Es gibt einen DEA, der die Sprache L akzeptiert.

vs

Es gibt einen NEA, der die Sprache L akzeptiert.

Jeder DEA ist ein NEA.

Teilmengenkonstruktion (siehe nächste Folie)

Beweiskonstruktion.

Sei $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ ein NEA

Der dazu äquivalente DEA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_0, F_D)$ wird konstruiert durch:

$$Q_D = \mathcal{P}(Q_N)$$

(Menge aller Teilmengen von Q_N)

$$F_D = \{S \in Q_D \mid S \cap F_N \neq \emptyset\}$$

(alle Mengen aus Q_D, die mindestens einen akzeptierenden Zustand aus F_N enthalten.)

$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$ für $S \in Q_D$ und $a \in \Sigma$ (Menge aller Zustände von D, die von den Zuständen aus S durch Lesen von a erreichbar sind.)

NEAs mit ϵ -Übergängen