Analysis 2

Manuel Strenge

Gebiet	Problemstellung	math. Grundlagen
Simlulationen	Haare	Differentialgleichungen
Comp. Grafik	2D render Tasse	Integralrechnung
Scientific Computing	Daten ana	Taylor-Reihen

Integrationsmethoden

Einsatzgebiet: modelieren: z.B. $v(t) = t^2$

Im Allgemeinen: $\int u(x) \cdot v(x) dx \neq \int u(x) dx \cdot \int v(x) dx$

Repetition:

Produktregel: $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Kettenregel: $(F(u(x)))' = F'(x) \cdot u'(x)$

Integration durch Substitution

Diese Integrationsmethode beruht auf der Kettenregel für die Ableitung:

$(F(u(x))) = \int (F(u(x)))' dx = \int F'(x) \cdot u'(x) dx$

Im Folgenden sind die einzelnen Schritte dieser Integrationsmethode angegeben. Diese werden jeweils gleich auf die beiden folgenden Beispiele angewendet.

- $\int \cos\left(x^2\right) \cdot x \; \mathrm{d}x \quad$ (unbestimmtes Integral)
- $\int_0 \cos\left(x^2\right) \cdot x \; \mathrm{d}x \quad$ (bestimmtes Integral)

1. Schritt: Substitutionsgleichung für $x : u = g(x)$

$u(x) = x^2$

2. Schritt: Substitutionsgleichung für dx: $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x) \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$

Dabei tun wir so, als ob die Ableitung $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ ein Bruch wäre. [1]

- Beispiele (a) und (b): $\frac{du}{dx} = u'(x) = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$

3. Schritt: Integralsubstitution: $\int f(x) \mathrm{d}x = \int \varphi(u) \mathrm{d}u$

Wir ersetzen nun im Integral $g(x)$ und dx gemäss den Substitutionsgleichungen. In dem resultierenden Integral kommen dann beide Variablen x und u vor; es ist somit streng genommen gar nicht wohldefiniert. Die Variable x muss nun durch Kürzen zum Verschwinden gebracht werden! Ist dies nicht möglich, so haben wir den falschen Ansatz gewählt.

$$\int \cos\left(x^2\right) \cdot x dx - \int \cos(u) \cdot x \frac{du}{\underline{2}x} = \int \frac{1}{2} \cos(u) du$$

Beim bestimmten Integral muss die Funktion g auch auf die Integrationsgrenzen angewendet werden (denn diese bezogen sich im Anfangsintegral auf die Variable x und müssen nun in Abhängigkeit von u ausgedrückt werden)

Beispiel (b) $\int_{x=0}^{\sqrt{\pi/2}} \cos\left(x^2\right) \cdot x dx = \int_{u=0^2}^{(\sqrt{\pi/2})^2} \cos(u) \cdot x \cdot \frac{du}{2x} = \int_{u=0}^{\pi/2} \frac{1}{2} \cos(u) du$

4. Schritt: Integration: $\int \varphi(u) \mathrm{d}u = \Phi(u) + C$

Im Idealfall können wir das Integral von $\varphi(u)$ (z.B. mit bekannten Regeln) nun bestimmen.

Beispiel (a)

$\int \frac{1}{2} \cos(u) du = \frac{1}{2} \int \cos(u) du = \frac{1}{2} \sin(u) + C$

Beispiel (b)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \cos(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(u) du &= \frac{1}{2} [\sin(u))_0]^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

5. Schritt: Rücksubstition

Dieser Schritt ist nur bei unbestimmten Integralen nötig. Bei bestimmten Integralen bleibt der Integralwert durch die Substitution der Integralgrenzen erhalten.

$\frac{1}{2} \sin(u) + C = \frac{1}{2} \sin\left(x^2\right) + C$

Integration durch Substitution 1. Substitutionsgleichung für $x : u = g(x)$ 2. Substitutionsgleichung für dx : $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x) \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$ 3. Integralsubstitution 4. Integration 5. Rücksubstitution (nur für unbestimmte Integrale)

> Wichtig! nicht vergessen die substitutionsgleichung auf die integral grenzwerte anzuwenden.

Satz

Für eine Funktion f und Konstanten a, b gilt:

$$\int f(ax+b) \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b)$$