

# Lineare Algebra

Manuel Strenge

## Vektoren

### Sinn

Wenn eine Grösse mit einem Wert dargestellt werden kann, wie z.B. Temperatur, dann wird es skalar genannt. *skalare* = reelle Zahlen.

Gewisse physikalische Faktoren können nicht nur mit einer Nummer dargestellt werden. z.B. Richtung.

**Ein Vektor  $R^3$  kann durch 3 reelle Zahlen, ein 3-Tupel beschrieben werden.**

Für 2- oder 3-Tupel lassen sich die Rechenoperationen auch geometrisch veranschaulichen.

Für allgemeine  $n$ -Tupel ist das nicht möglich, trotzdem ist die geometrische Anschauung für  $n = 2$  oder  $n = 3$  oft der Schlüssel zur Lösung komplizierter Probleme.

### Definition

Ein  $n$ -Tupel  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^n$  nennt man auch Vektor. Die reellen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  heissen die Koordinaten oder Komponenten des Vektors.

Die Komponenten eines Vektors schreiben wir häufig als Spalten:

$$\underset{a}{\vec{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \in R^n$$

Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie koordinatenweise übereinstimmen. Die Vektorgleichung  $\underset{a}{\vec{a}} = \underset{b}{\vec{b}}$  ist also nichts anderes als eine abkürzende Schreibweise für die  $n$  Gleichungen.

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$$

Vektoren in  $R^2$  bzw. in  $R^3$  können wir uns als Pfeile vorstellen und der Pfeil darf vom beliebigen Punkt eingezeichnet werden.

Um einen Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$  in  $R^2$  einzuzeichnen:

1. wählt man einen Anfangspunkt,
2. geht  $a_x$  Schritte entlang der x-Achse und  $a_y$  Schritte entlang der y-Achse,
3. erreicht so den Endpunkt des Vektors.

Der Vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  wird auch als Pfeil ausgehend vom Ursprung  $O$

Seine Spitze beschreibt den Ort jenes Punktes, dessen Koordinaten gleich den Komponenten des Vektors sind. Um zu betonen, dass es der Ortsvektor des Punktes  $P$  ist, schreibt man  $\vec{OP}$ .

Siehe Bild unter Definition Vektor

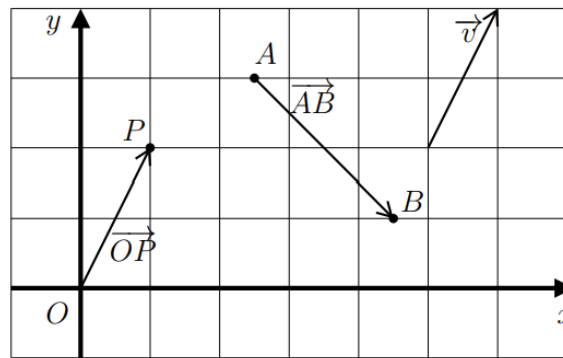


Figure 1: Eingezeichnete Ortsvektoren

Zusammenfassend darf der Pfeil in  $R^2$  bzw.  $R^3$  beliebig parallel verschoben werden. Es bleibt immer der gleiche Vektor:  $\vec{v} = \vec{OP}$

$$\begin{array}{ll} \text{In der Ebene:} & \vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ mit } P(x; y) \\ \\ \text{Im Raum:} & \vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ mit } P(x; y; z) \\ \\ \text{In } \mathbb{R}^n : & \vec{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ mit } P(x_1; \dots; x_n) \end{array}$$

Figure 2: Insbesondere lautet dieser Zusammenhang für den Ortsvektor

### Definition

Der Vektor, dessen Anfangspunkt und Endpunkt übereinstimmen, heisst der Nullvektor und wird durch  $\vec{0}$  bezeichnet.

### Addition, Subtraktion und Skalarmultiplikation

**Definition** Die Summe zweier Vektoren der gleichen Dimension  $n$  ist komponentenweise definiert und ergibt wieder einen  $n$ -dimensionalen Vektor:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Figure 3: vector addition

### Geometrische betrachtungsweise

Die geometrische Addition der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ :

1. Der Vektor  $\vec{b}$  wird parallel zu sich selbst verschoben, bis sein Anfangspunkt auf den Endpunkt des Vektors  $\vec{a}$  trifft
2. Der Anfangspunkt des Vektors  $\vec{a}$  wird mit dem Endpunkt des Vektors  $\vec{b}$  verbunden. Der resultierende Pfeil repräsentiert den Summenvektor  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ .

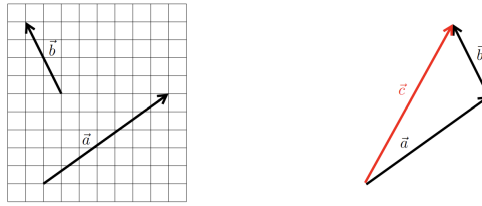


Figure 4: vector addition geometrisch visualisiert

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

### Kommutativgesetz

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

### Assoziativgesetz

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

### Der Nullvektor ist das Neutralelement der Addition

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

**Zu jedem Vektor  $\vec{a}$  gibt es genau einen Gegenvektor  $-\vec{a} \in R^n$  mit**

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

Die Subtraktion zweier Vektoren lässt sich wie bei den reellen Zahlen als Umkehrung der Addition auffassen und damit auf die Addition zweier Vektoren zurückführen:

### Definition

Die Subtraktion oder die Differenz von zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist definiert als die Summe von  $\vec{a}$  und  $-\vec{b}$ , dem Gegenvektor zu  $\vec{b}$ , also:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

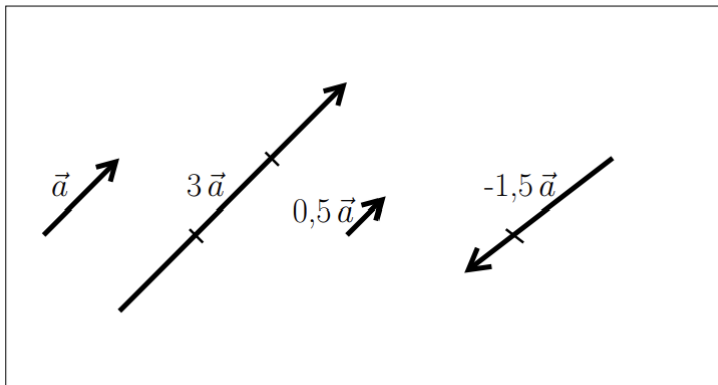
### Multiplikation

Bei der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar  $\lambda$  wird jede Komponente mit  $\lambda$  multipliziert:

$$\lambda \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis ist wieder ein Vektor im  $R^n$ .

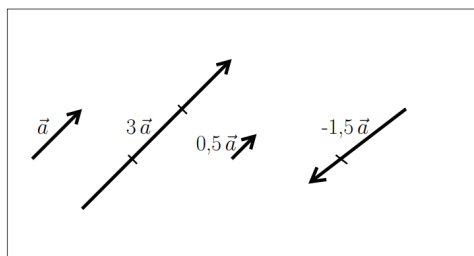
Die Anschauung der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar im  $R^2$ :



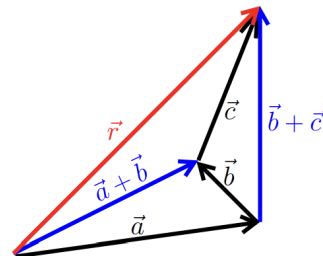
## Kollineare und windschiefe Vektoren

### Definition

2 Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  heissen kollinear, wenn es eine reelle Zahl  $\lambda$  gibt, so dass  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ . Dies bedeutet, dass  $\vec{a}$  ein Vielfaches von  $\vec{b}$  ist. Existiert keine solche Zahl, dann sagen wir, dass  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  windschief oder nichtkollinear sind.



Kollineare Vektoren



Windschiefe Vektoren

Vektoren sind also kollinear, wenn sie in der **Richtung** übereinstimmen.

Der Nullvektor ist zu jedem Vektor kollinear, denn:  $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a}, \forall \vec{a}$ .

## Linearkombination

### Definition

Seien  $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$  Vektoren und  $a_1, \dots, a_m$  reellen Zahlen, wobei  $m \in \mathbb{N}$ . Der folgende Vektor

$$\vec{v} = a_1 \vec{w}_1 + a_2 \vec{w}_2 + a_3 \vec{w}_3 + \dots + a_m \vec{w}_m =: \sum_{i=1}^m a_i \vec{w}_i$$

heisst eine **Linearkombination** von den Vektoren  $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$ . Die Zahlen  $a_1, \dots, a_m$  heissen Koeffizienten.

## Weitere Rechengesetze für Vektoren

Für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  und für alle Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \quad (\text{Distributivgesetz}) \quad (1)$$

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \quad (\text{Distributivgesetz}) \quad (2)$$

$$(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) \quad (\text{Assoziativgesetz}) \quad (3)$$

## Betrag

Der Betrag eines Vektors ist eine reelle Zahl, die  $\geq 0$  ist und der Länge dieses Vektors entspricht.

Sei  $\vec{a}$  ein beliebiger Vektor im  $\mathbb{R}^n$ . Der **Betrag** oder die **Länge** (oder die **Norm**) von  $\vec{a}$  ist:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}.$$

Ist der Vektor  $\vec{a}$  durch den Anfangspunkt  $P_1 = (x_1; x_2; \dots; x_n)$  und den Endpunkt  $P_2 = (y_1; y_2; \dots; y_n)$  gegeben, so lautet sein Betrag wie folgt:

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

cc ## Rechenregeln

Für alle reellen Zahlen  $\lambda$  und für alle Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  gelten:

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}| \quad (4)$$

$$|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \quad (5)$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \quad (6)$$

## Einheitsvektoren

Jeder Vektor  $\vec{e}$  mit Betrag Eins,  $|\vec{e}| = 1$ , wird als **Einheitsvektor** oder **Einsvektor** bezeichnet.