Lineare Algebra

Manuel Strenge

Vektoren

Sinn

Wenn eine Grösse mit einem wert dargestellt werden kann, wie z.B. Temperator, dann wird es skalar genannt. *skalare* = reele zahlen.

Gewisse physische faktoren können nicht nur mit einer nummer dargestellt werden. z.B. Richtung.

Ein Vektor R^3 kann durch 3 reele Zahlen, ein 3-Tupel beschrieben werden.

> Für 2- oder 3-Tupel lassen sich die Rechenoperationen auch geometrisch veranschaulichen. Für allgemeine n-Tupel ist das nicht möglich, trotzdem ist die geometrische Anschauung für n = 2 oder n = 3 oft der Schlüssel zur Lösung komplizierter Probleme.

Definition

Ein n-Tupel $(a_1, a_2, ..., a_n) \in R^n$ nennt man auch Vektor. Die reellen Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ heissen die Koordinaten oder Komponenten des Vektors.

Die Komponenten eines Vektors schreiben wir häufig als Spalten:

$$\underset{a}{\rightarrow} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} = R^n$$

Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie koordinatenweise übereinstimmen. Die Vektorgleichung $\underset{a}{\rightarrow} = \underset{b}{\rightarrow}$ ist also nichts anderes als eine abkürzende Schreibweise für die n Gleichungen.

$$a_1 = b_1 a_2 = b_2 ... a_n = b_n$$

Vektoren in R^2 bzw. in R^3 können wir uns als Pfeile vorstellen und der Pfeil darf vom beliebigen Punkt eingezeichnet werden.

Um einen Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ in R^2 einzuzeichnen:

1. wählt man einen Anfangspunkt,
2. geht ax Schritte entlang der x-Achse und ay Schritte entlang der y-Achse,
3. erreicht so den Endpunkt des Vektors.

Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ wird auch als Pfeil ausgehend vom Ursprung O

Seine Spitze beschreibt den Ort jenes Punktes, dessen Koordinaten gleich den Komponenten des Vektors sind. Um zu betonen, dass es der Ortsvektor des Punktes P ist, schreibt man $\vec{OP}$.

Siehe bild unter definition vektor

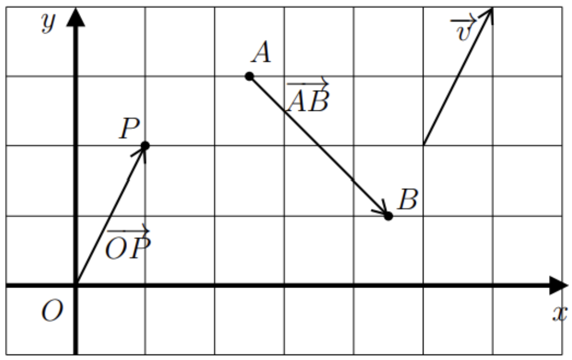


Figure 1: Eingezeichnete Ortsvektoren

Zusammenfassend darf der Pfeil in R^2 bzw. R^3 beliebig parallel verschoben werden. Es bleibt immer der gleiche Vektor: $\vec{v} = \vec{OP}$

In der Ebene: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, mit $P(x; y)$

Im Raum: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, mit $P(x; y; z)$

In $\mathbb{R}^n$: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, mit $P(x_1; \ldots; x_n)$

Figure 2: Insbesondere lautet dieser Zusammenhang für den Ortsvektor

Definition

Der Vektor, dessen Anfangspunkt und Endpunkt übereinstimmen, heisst der Nullvektor und wird durch $\vec{0}$ bezeichnet.

Addition, Subtraktion und Skalarmultiplikation

Definition Die Summe zweier Vektoren der gleichen Dimension n ist komponentenweise definiert und ergibt wieder einen n-dimensionalen Vektor:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Figure 3: vector addition

Geometrische betrachtungsweise

Die geometrische Addition der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

1. Der Vektor $\vec{b}$ wird parallel zu sich selbst verschoben, bis sein Anfangspunkt auf den Endpunkt des Vektors $\vec{a}$ trifft
2. Der Anfangspunkt des Vektors $\vec{a}$ wird mit dem Endpunkt des Vektors $\vec{b}$ verbunden. Der resultierende Pfeil repräsentiert den Summenvektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

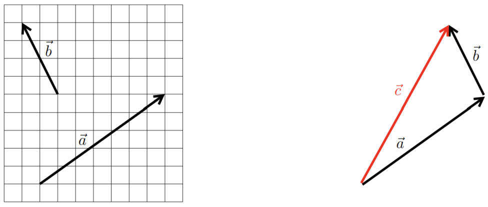


Figure 4: vector addition geomoetrisch visualisiert

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Kommutativgesetz

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Assoziativgesetz

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Der Nullvektor ist das Neutralelement der Addition

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

Zu jedem Vektor $\vec{a}$ gibt es genau einen Gegenvektor $-\vec{a} \in R^n$ mit

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Die Subtraktion zweier Vektoren lässt sich wie bei den reellen Zahlen als Umkehrung der Addition auffassen und damit auf die Addition zweier Vektoren zurückführen:

Definition

Die Subtraktion oder die Differenz von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert als die Summe von $\vec{a}$ und $-\vec{b}$, dem Gegenvektor zu $\vec{b}$, also:

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

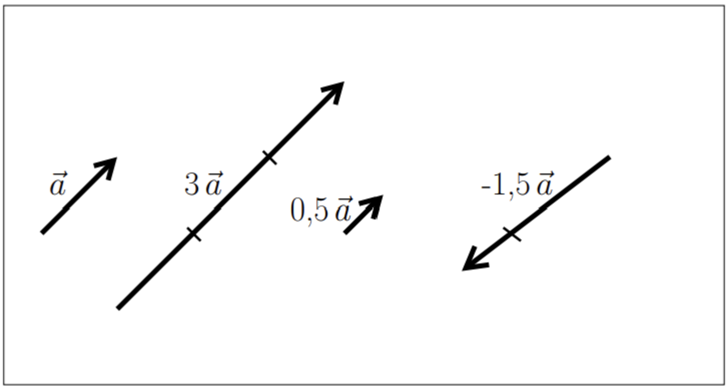
Multiplikation

Bei der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar λ wird jede Komponente mit λ multipliziert:

$$\lambda \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis ist wieder ein Vektor im R^n.

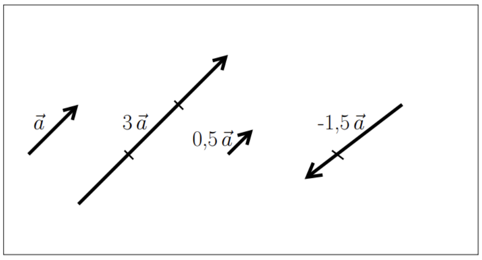
Die Anschauung der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar im R^2:



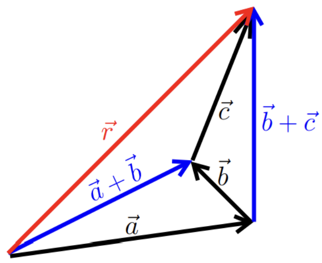
Kollineare und windschiefe Vektoren

Definition

2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heissen kollinear, wenn es eine reelle Zahl λ gibt, so dass $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Dies bedeutet, dass $\vec{a}$ ein Vielfaches von $\vec{b}$ ist. Existiert keine solche Zahl, dann sagen wir, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ windschief oder nichtkollinear sind.



Kollineare Vektoren



Windschiefe Vektoren

Vektoren sind also kollinear, wenn sie in der **Richtung** übereinstimmen.
Der Nullvektor ist zu jedem Vektor kollinear, denn: $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a}, \forall \vec{a}$.

Linearkombination

Definition

Seien $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ Vektoren und $a_1, \ldots, a_m$ reellen Zahlen, wobei $m \in \mathbb{N}$. Der folgende Vektor

$$\vec{v} = a_1\vec{w}_1 + a_2\vec{w}_2 + a_3\vec{w}_3 + \ldots + a_m\vec{w}_m =: \sum_{i=1}^{m} a_i\vec{w}_i$$

heisst eine **Linearkombination** von den Vektoren $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$. Die Zahlen $a_1, \ldots, a_m$ heissen Koeffizienten.

Weitere Rechengesetze für Vektoren

Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\lambda\,(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\,\vec{a} + \lambda\,\vec{b} \qquad \textit{(Distributivgesetz)} \tag{1}$$

$$(\lambda + \mu)\,\vec{a} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{a} \qquad \textit{(Distributivgesetz)} \tag{2}$$

$$(\lambda\mu)\,\vec{a} = \lambda(\mu\,\vec{a}) = \mu(\lambda\,\vec{a}) \qquad \textit{(Assoziativgesetz)} \tag{3}$$

Betrag

Der Betrag eines Vektors ist eine reelle Zahl, die >= 0 ist und der Länge dieses Vektors entspricht.

Sei $\vec{a}$ ein beliebiger Vektor im $\mathbb{R}^n$. Der **Betrag** oder die **Länge** (oder die **Norm**) von $\vec{a}$ ist:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

Ist der Vektor $\vec{a}$ durch den Anfangspunkt $P_1 = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ und den Endpunkt $P_2 = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$ gegeben, so lautet sein Betrag wie folgt:

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}.$$

cc ## Rechenregeln

Für alle reellen Zahlen λ und für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ gelten:

$$|\lambda\,\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}| \tag{4}$$

$$|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \tag{5}$$

$$|\,\vec{a} + \vec{b}\,| \leq |\,\vec{a}\,| + |\,\vec{b}| \qquad \textit{(Dreiecksungleichung)} \tag{6}$$

Einheitsvektoren

Jeder Vektor $\vec{e}$ mit Betrag Eins, $|\vec{e}| = 1$, wird als **Einheitsvektor** oder **Einsvektor** bezeichnet.

Skalarprodukte

Definition

Skalarprodukte treten z.B. im Zusammenhang mit den folgenden Grössen auf:

- Arbeit einer Kraft beim Verschieben einer Masse,
- Normalform einer Geraden in der Ebene oder einer Ebene.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^n$ ist ein Skalar $\vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$ (gelesen: a Punkt b), der auf zwei verschiedene Arten berechnet werden kann:

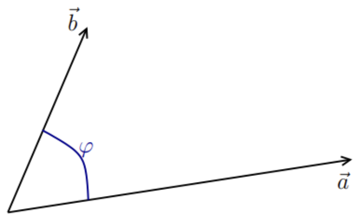
- aus den Beträgen der beiden Vektoren und dem Kosinus des von den Vektoren eingeschlossenen Winkels φ:

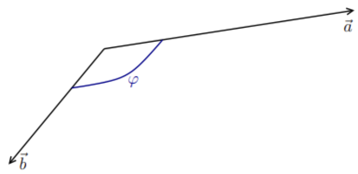
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\varphi)$$

- aus den Komponenten der beiden Vektoren:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

- Das Skalarprodukt ist eine skalare Grösse und wird auch als inneres Produkt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bezeichnet
- Das Skalarprodukt lässt sich auch als: $(\vec{a}, \vec{b})$, $\quad < \vec{a} \mid \vec{b} >$ oder $\vec{a}^\top \vec{b}$ schreiben
- Man beachte, dass der Winkel φ stets der kleinere der beiden Winkel ist, den die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ miteinander bilden.





Daraus folgt: $0° \leq \varphi \leq 180°$.

- Kommutativgesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$.
- Distributivgesetz:
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad \text{für alle } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n.$$
- Gemischtes Assoziativgesetz: $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) \quad$ für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zweier vom Nullvektor verschiedener Vektoren kann nur verschwinden, wenn $\cos(\varphi) = 0$, d.h. $\varphi = 90°$ $\left(\text{oder } \frac{\pi}{2}\right)$ ist. In diesem Fall stehen die Vektoren senkrecht. Diese Vektoren heissen orthogonale Vektoren, im Zeichen. $\vec{a} \perp \vec{b}$ Wir haben die Äquivalenz:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Berechnung des Winkels

Mit Hilfe der Gleichung

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

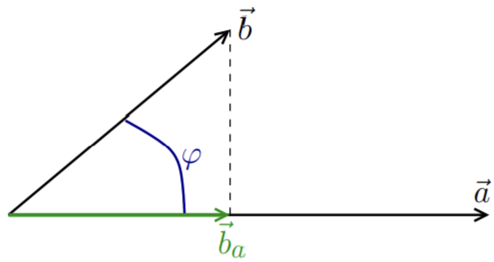
kann man den Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Wobei $\vec{a} \neq \overrightarrow{0}$ und $\vec{b} \neq \overrightarrow{0}$. Durch Umkehrung folgt schliesslich:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right), \text{ wobei } \vec{a} \neq \overrightarrow{0} \text{ und } \vec{b} \neq \overrightarrow{0}$$

Projektion eines Vektors auf einen zweiten Vektor



Der durch die Projektion erhaltene Vektor wird mit $\vec{ba}$ bezeichnet. Es gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\left|\vec{b}_a\right|}{|\vec{b}|}$$

wobei φ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist. Sein Betrag lautet somit:

$$\left|\vec{b}_a\right| = |\vec{b}| \cos(\varphi)$$

Aus dem Skalarprodukt erhalten wir: $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

Es folgt:

$$\left|\vec{b}_a\right| = |\vec{b}| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \Leftrightarrow \left|\vec{b}_a\right| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$$

Berechnung des Winkels φ

Mit Hilfe der Gleichung

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

kann man den Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen:

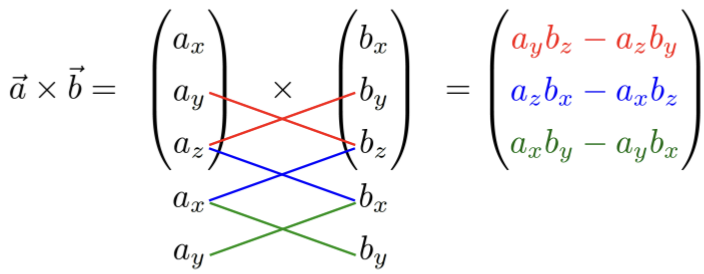
$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right), \text{ wobei } \vec{a} \neq \overrightarrow{0} \text{ und } \vec{b} \neq \overrightarrow{0}.$$

Unter dem Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^3$ versteht man den eindeutig bestimmten Vektor, der wie folgt berechnet wird:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Diese Formel kann man sich anhand des folgenden Schemas merken:



Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann kollinear, wenn ihr Vektorprodukt verschwindet:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \overrightarrow{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind kollinear}$$

Distributivgesetze: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ und $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

Anti-Kommutativgesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

Assoziativgesetz: $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$.

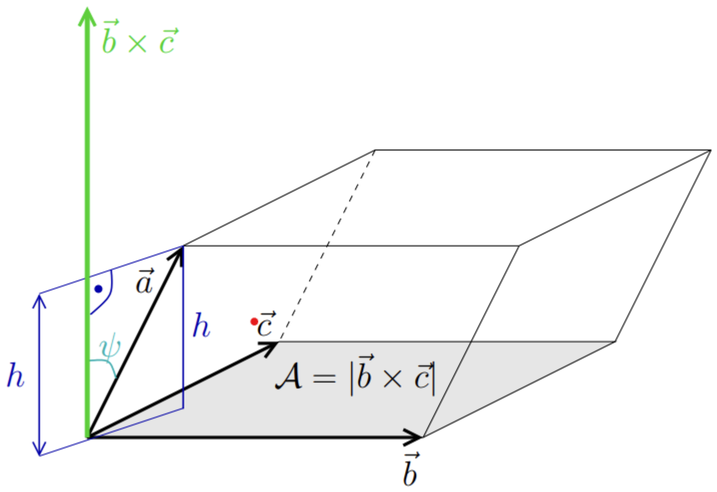
Spatprodukt

Unter dem Spatprodukt $\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{bmatrix}$ dreier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ in $\mathbb{R}^3$ versteht man das Skalarprodukt aus dem Vektor $\vec{a}$ und dem aus den Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gebildeten Vektorprodukt $\vec{b} \times \vec{c}$:

$$\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{bmatrix} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Spatprodukt und Volumen

Die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ spannen ein sogenanntes Parallelepiped (auch Spat, Parallelflach oder Parallelotop genannt) auf.



Dem Betrag des Spatproduktes $\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{bmatrix}$ kommt dabei die geometrische Bedeutung des Spatvolumens zu. Aus der Elementarmathematik haben wir die Formel: