



Um curso de Grafos

Versão: 2 de junho de 2015, às 10 37

Notas de aula de Teoria dos Grafos

Yoshiko Wakabayashi alunos tomadores de notas

segundo semestre de 2012

compilado 2 de junho de 2015

Notas de aula escritas conjuntamente pelos alunos da turma de 2012 da disciplina (Teoria dos Grafos, MAC 5771). Eventuais erros, confusões e gafes são de nossa autoria.

O curso não segue um livro propriamente dito, mas algumas referências são feitas no decorrer das notas.

Muitas pessoas garantiram que este projeto pudesse ser levado tão longe. Destacamos o trabalho e dedicação de Yoshiko Wakabayashi, Eric Ossami Endo, Fábio Happ Botler, Leonardo Nagami Coregliano, Rafael Santos Coelho, e Tássio Naia dos Santos. Obrigado!

Este é um trabalho em progresso. Quaisquer inconsistências, incorreções, sugestões, fique à vontade para nos contactar. Este projeto é mantido em <https://gitorious.org/notas-grafoes-2012-ii>.

SUMÁRIO

Sumário 3

1	Introdução e notação	5
1.1	Grafos	5
1.2	Digrafos	8
1.3	Operações	9
1.4	Multigrafos	9
1.5	Referências Bibliográficas	10
2	Emparelhamentos	11
2.1	Emparelhamentos perfeitos	11
2.2	Emparelhamentos máximos e a deficiência de um grafo	13
2.3	Defeito em grafos arbitrários	13
2.4	Um algoritmo para encontrar um emparelhamento	15
2.5	Algoritmo de Edmonds–Gallai	17
2.6	Exercícios	20
2.7	Referências Bibliográficas	20
3	Conexidade	22
3.1	Teorema de Menger	22
3.2	2-conexidade e 2-aresta-conexidade	25
3.3	3-conexidade	30
3.4	Alta aresta-conexidade	33
3.5	Exercícios	33
3.6	Referências Bibliográficas	34
4	Planaridade	35
4.1	Menores	38
4.2	Menores Topológicos	39
4.3	Caracterizações de grafos planares	40
4.4	Exercícios	46
4.5	Referências Bibliográficas	46
5	Coloração	48
5.1	Coloração de vértices	48
5.2	Grafos k -construtíveis	49
5.3	Lista-coloração	52
5.4	Grafos Perfeitos	54
5.5	Classes de grafos perfeitos	57
5.6	Exercícios	58
5.7	Referências Bibliográficas	59
6	Problemas Extremais	61
6.1	Introdução	61
6.2	Problema da proibição de G	61
6.3	Exercícios	66
6.4	Referências Bibliográficas	66
7	Números de Ramsey	69

7.1	Teoria de Ramsey	69
7.2	Teorema de Ramsey	69
7.3	Número de Ramsey para grafos arbitrários	74
7.4	Aplicações do Teorema de Ramsey	77
7.5	Exercícios	83
7.6	Referências Bibliográficas	84
8	Decomposição arbórea / Largura arbórea 85	
8.1	Decomposição arbóreas e grafos cordais	90
8.2	Exercícios	92
8.3	Referências Bibliográficas	92
9	Menores, Árvores e Quase Boa Ordem 95	
9.1	Relações	95
9.2	O ‘Minor Theorem’ para grafos com largura arbórea limitada	98
9.3	Decomposições arbóreas e menores proibidos	99
9.4	O ‘Minor Theorem’	102
9.5	Exercícios	102
9.6	Referências Bibliográficas	103

1 INTRODUÇÃO E NOTAÇÃO

Este texto foi construído a partir de notas de aula¹. Ele foi concebido tendo em mente alunos de pós-graduação e alunos de graduação interessados na teoria dos grafos. Por uma questão de brevidade, resultados mais simples da teoria são mencionados, mas não demonstrados.

Entendemos que os conceitos e construções empregados na demonstração de teoremas são tão importantes e valiosos quanto os resultados que sustentam. Assim, exibimos mais de uma demonstração para vários dos resultados enunciados. Um certo número de exercícios é parte central do texto, uma das mais divertidas!

A teoria dos grafos é uma área rica em resultados e bastante desenvolvida da matemática. Mesmo uma seleção bastante rigorosa de tópicos contém material para anos de estudo. Um esforço foi feito no sentido colher algumas referências úteis para o leitor interessado em explorar temas mencionados aqui, mas é preciso dizer que as referências estão longe de serem exaustivas.

A maior parte da notação usada é padrão na literatura teoria de grafos. Referimos o leitor a [Die05, Bol98] para exemplos.

1.1 GRAFOS

Dado um conjunto V , possivelmente infinito, e um conjunto E de pares de elementos de V , dizemos que o par ordenado $G = (V, E)$ é um **grafo**. Neste caso, dizemos que V é o conjunto de **vértices** de G e E é o conjunto de **arestas** de G . Para evitar sobrecarga de notação, muitas vezes substituímos $\{u, v\} \in E$ por $uv \in E$. Se $v \in V$ e $e \in E$ são tais que $v \in e$, dizemos que v **incide** em e e que e **incide** em v . Se $u, v \in V$ e $\{u, v\} \in E$, dizemos que u é **adjacente** a v , ou que u é **vizinho** de v . Dado $v \in V$, denotamos por $N(v)$ o conjunto de vértices de G que são adjacentes a v . Dizemos que $N(v)$ é a **vizinhança** de v e que $d(v) = |N(v)|$ é o **grau** de v . Para evitar ambiguidade, indicamos por $N_G(v)$ a vizinhança de v no grafo G .

Denotamos por $V(G)$ e por $E(G)$ o conjunto de vértices e de arestas de G , respectivamente.

Exemplo 1.1 Seja $V = \{0, 1, \dots, n\}$ e $E = \{0i : i = 1, 2, \dots, n\}$. O grafo $G = (V, E)$ é chamado de **estrela**. (Veja a figura 1.1.)

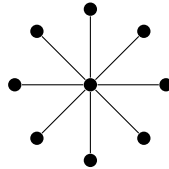
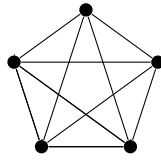


Figura 1.1: Estrela com 9 vértices.

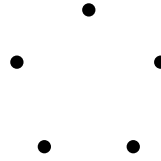
Exemplo 1.2 Seja $G = (V, E)$ um grafo tal que para todo par de vértices distintos $u, v \in V$ temos que $uv \in E$. Dizemos que G é um grafo **completo**. Denotamos o grafo completo em n vértices por K_n . (Veja a figura 1.2a.)

¹Prof. Dra. Yoshiko Wakabayashi, Teoria dos Grafos, agosto–novembro de 2013, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Exemplo 1.3 Se G é um grafo tal que $E(G) = \emptyset$, dizemos que G é um grafo **vazio**. (Veja a figura 1.2b.)



(a) K_5 , grafo completo em 5 vértices.



(b) Grafo vazio em 5 vértices.

Figura 1.2: Exemplos de grafos especiais.

Exemplo 1.4 Seja $G = (V, E)$ é um grafo e defina $\overline{E} = \{uv : u, v \in V\} \setminus E$. O grafo $\overline{G} = (V, \overline{E})$ é dito o grafo **complementar** de G . (Veja figuras 1.3a e 1.3b.)



(a) Um grafo arbitrário G .



(b) \overline{G} , grafo complementar de G .

Figura 1.3: Exemplo da operação de complemento.

Exemplo 1.5 Se G é um grafo tal que $d(u) = d(v) = r$ para todo $u, v \in V(G)$, dizemos que G é um grafo **regular**, **r -regular**, ou regular **de grau r** . (Veja a figura 1.4.)

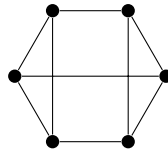


Figura 1.4: Grafo 3-regular.

Exemplo 1.6 Seja G um grafo tal que $V(G) = A \cup B$, onde $A \cap B = \emptyset$, e tal que toda aresta de G tem um vértice em A e um vértice em B . Dizemos que G é um grafo **bipartido** ou **(A, B) -bipartido**. (Veja a figura 1.5.) Um grafo (A, B) -bipartido é dito bipartido **completo** se seu conjunto de arestas é $E = \{\{a, b\} : a \in A, b \in B\}$. Se $|A| = m$ e $|B| = n$, denotamos o grafo (A, B) -bipartido completo por $K_{m,n}$.

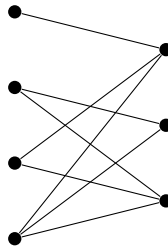


Figura 1.5: Grafo bipartido.

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dizemos que um grafo $H = (V', E')$ é um **subgrafo** de G , denotado por $H \subseteq G$, se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Dado um subconjunto V' de vértices de G o subgrafo de G **induzido** por V' , denotado por $G[V']$, é o subgrafo de G no conjunto de vértices V' que contém todas as arestas que tem dois vértices em V' . Em outras palavras, $G[V']$ é o subgrafo de G no conjunto de vértices V' com o maior número de arestas.

Dado um subconjunto E' de arestas de G , o subgrafo de G induzido por E' , denotado por $G[E']$, é o subgrafo de G formado pelas arestas em E' e vértices incidentes a arestas em E' . Ou seja, $V(G[E']) = \bigcup_{e \in E'} e$. (Veja figuras 1.6a e 1.6b.)

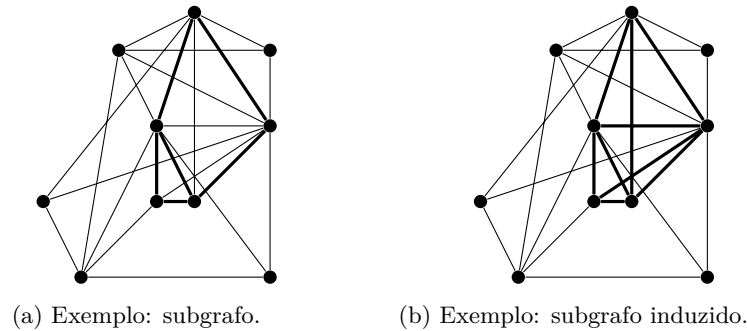


Figura 1.6: Exemplos de subgrafo e subgrafo induzido.

Um **isomorfismo** entre dois grafos G e H é uma função $f: V(G) \rightarrow V(H)$ bijetora tal que $vw \in E(G) \Leftrightarrow f(v)f(w) \in E(H)$. Nesse caso, também dizemos que G e H são **isomorfos**.

Passeios, Trilhas, circuitos e caminhos

Dado um grafo $G = (V, E)$, um **passeio** é uma sequência $P = v_0v_1 \cdots v_k$ de vértices de G tal que $v_i v_{i+1} \in E$ para $i = 0, 1, \dots, k-1$. Dizemos que P é **fechado** se $v_0 = v_k$, caso contrário dizemos que P é **aberto**. Se $v_i \neq v_j$ para todo $i, j \in \{0, 1, \dots, k\}$ com $i \neq j$, dizemos que P é **simples** (ou **vértice-simples**). Se $1 \leq i \leq k-1$, dizemos que v_i é um vértice **interior** de P , caso contrário, v_i é dito vértice **extremo** de P . Se P é simples e fechado, dizemos que P é um **circuito**, e, se P é simples e aberto, dizemos que P é um **caminho**. Dizemos que o **comprimento** de P é k e o denotamos por $|P|$. (Veja figuras 1.7a, 1.7b, 1.7c e 1.7d.)

Se $\{v_i, v_{i+1}\} \neq \{v_j, v_{j+1}\}$ para todo $i \neq j$ com $i, j \in \{1, \dots, k-1\}$, dizemos que P é **aresta-simples**. Um passeio aresta-simples é também chamado de **trilha**. Dada uma trilha $T = v_0v_1 \cdots v_k$, podemos nos referir a T como o subgrafo dado por $V(T) = \{v_i : i = 0, \dots, k\}$ e $E(T) = \{v_i v_{i+1} : i = 0, \dots, k-1\}$. Um grafo é dito **euleriano** se contém uma trilha que contém todas as suas arestas.

Dado um passeio P , uma **seção** de P é qualquer subsequência de P .

Dados dois passeios $P = v_0v_1 \cdots v_n$ e $Q = w_0w_1 \cdots w_m$ tais que $v_n = w_0$, a concatenação de P e Q (denotada por PQ) é $v_0v_1 \cdots v_nv_1w_2 \cdots w_m$.

Dizemos que dois caminhos P e Q são internamente disjuntos nos vértices se não existe v vértice interno de ambos os caminhos P e Q . Dizemos ainda que P e Q são disjuntos nas arestas se $E(P) \cap E(Q) = \emptyset$.

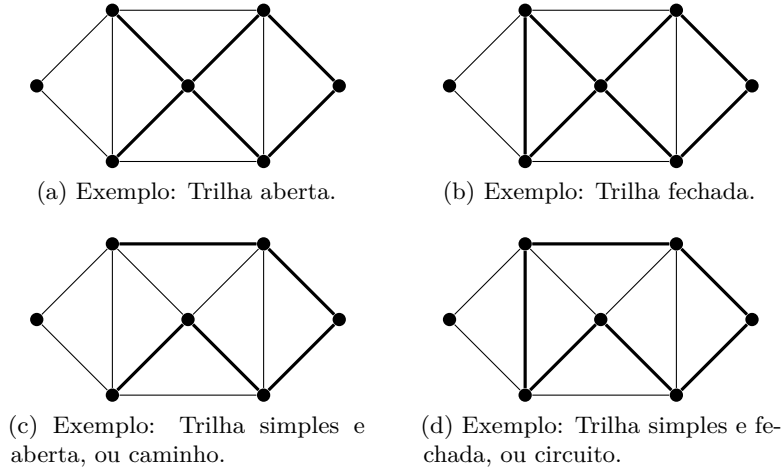


Figura 1.7: Exemplos de passeios especiais.

Grafos conexos

Um grafo G é dito **conexo** se para todo par de vértices $u, v \in V(G)$ existe caminho contendo u e v , caso contrário dizemos que G é **desconexo**. Um subgrafo conexo H de G é dito uma **componente conexa** de G se não existe $H' \subseteq G$ conexo tal que $H \subseteq H'$ e $H \neq H'$. Se v é um vértice de G tal que $d(v) = 0$, dizemos que v é um **vértice isolado** de G . Neste caso, o subgrafo de G contendo apenas o vértice v é uma componente conexa de G . O **grafo trivial** é o único (a menos de isomorfismo) grafo de ordem 1.

Dados dois vértices u, v de G , seja P_{uv} um caminho de menor comprimento contendo u e v . Dizemos que a **distância** de u para v (ou entre u e v), denotada por $d(u, v)$, é o comprimento de P_{uv} .

Uma propriedade P sobre a classe dos pares ordenados que representam grafos é dita uma **propriedade de grafos** se é invariante sob isomorfismo de grafos, isto é, se $P(G)$ e G isomorfo a H implicam $P(H)$ para todos grafos G e H .

Seja B alguma propriedade sobre grafos. Por vezes dizemos que um grafo G é **hipo- B** se G não possui a propriedade B , mas $G - v$ possui a propriedade B , para todo vértice v de G .

1.2 DIGRAFOS

Definimos o conceito de grafo **orientado** (ou **dirigido**) da seguinte forma. Seja V um conjunto de vértices e considere um conjunto A de pares *ordenados* de elementos de V . O par ordenado $D = (V, A)$ é dito um **digrafo**. Os elementos de A são ditos **arcos** de D . Novamente, para evitar sobrecarga na notação, substituiremos $(u, v) \in A$ por $uv \in A$. Observe que neste caso $uv \neq vu$. Dado um arco $a = (u, v) \in A$, dizemos que a **sai** de u e **aponta** para v . O **grau de entrada** de v , denotados por $d^{(-)}(v)$ é o número de arcos em A que apontam para v . O **grau de saída** de v , denotado por $d^{(+)}(v)$, é o número de arcos em A que saem de v .

Um **passeio orientado** em D é uma sequência $P = v_0 v_1 \cdots v_k$ de vértices de D tal que $v_i v_{i+1} \in A$ para todo $i = 0, 1, \dots, k-1$. Trilhas orientadas, caminhos orientados e circuitos orientados e termos relacionados são definidos analogamente ao caso anterior.

O **grafo subjacente** de um dígrafo D é o grafo G tal que $V(G) = V(D)$ e há uma aresta em G entre os vértices v e w se e só se há um arco de v para w ou um de w para v .

Um dígrafo é dito **fracamente conexo** se seu grafo subjacente for conexo e ele é dito **fortemente conexo** se, para todos vértices v e w , existe um passeio orientado de v para w (note que também haverá um de w para v trocando a escolha do par).

As noções de conexidade de dígrafos são definidas analogamente, mas sempre enfatizando o tipo de conexidade exigida (fraco ou forte).

Vale lembrar o seguinte teorema sobre dígrafos eulerianos.

Teorema 1.7 Seja D um dígrafo fortemente conexo. Nessa situação temos D é euleriano se e somente $\forall v \in V(D), d^+(v) = d^-(v)$.

1.3 OPERAÇÕES

Dados dois grafos G, H no mesmo conjunto de vértices V , definimos a **união** e a **interseção** de G e H , respectivamente por $G \cup H = (V, E(G) \cup E(H))$ e $G \cap H = (V, E(G) \cap E(H))$.

Para um grafo G e um conjunto S de vértices de G denotamos por $G \setminus S$ (ou simplesmente $G - S$) o grafo obtido de G pela **remoção** dos vértices em S e das arestas de G incidentes a algum vértice de S . No caso em que S contém apenas um elemento v , escrevemos apenas $G - v$. Para um conjunto E' de arestas de G o grafo $G \setminus E'$ (ou $G - E'$) é o grafo obtido de G pela remoção das arestas em E' . (Veja figuras 1.8a e 1.8b.)

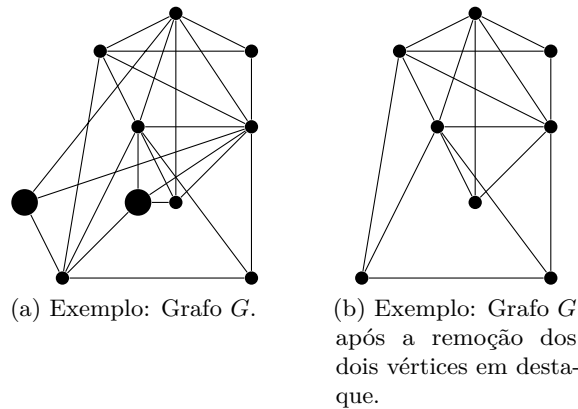


Figura 1.8: Exemplo de remoção de vértices.

Dados dois grafos G e H no mesmo conjunto de vértices, a **diferença simétrica** de G e H , denotada por $G \Delta H$, é dada por $(G \cup H) - E(G \cap H)$.

1.4 MULTIGRAFOS

Um **multigrafo** é um par ordenado (V, E) onde V é um conjunto (chamado conjunto de vértices) e E é um multiconjunto (um conjunto com elementos possivelmente repetidos) tal que todo elemento de E é da forma $\{v, w\} \subseteq V$ e não temos necessariamente $v \neq w$.

Em outras palavras, um multigrafo é um grafo em que permitimos multiplicidade nas arestas e arestas com as extremidades iguais (estas são chamadas **laços**).

Muitas vezes chamaremos multigrafos apenas de grafos por abuso e quando quisermos enfatizar que um grafo não é um multigrafo, diremos que é um **grafo simples**.

1.5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Bol98] B. Bollobás. *Modern graph theory*. Graduate Texts in Mathematics Series. Springer-Verlag GmbH, 1998.
- [Die05] Reinhard Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.

2 EMPARELHAMENTOS

Um conjunto de arestas M de um grafo G é chamado de **emparelhamento** se para cada vértice $v \in V(G)$ existe no máximo uma aresta de M incidente a v . A teoria de emparelhamentos em grafos é uma área bastante estabelecida, com resultados em várias direções [PL86, CCPS11] e generalizações¹. Nestas notas apresentamos alguns resultados clássicos com o objetivo de compreender a decomposição de Edmonds–Gallai e o algoritmo de Edmonds para obter emparelhamentos máximos em grafos quaisquer.

Dado um emparelhamento M e um vértice v , dizemos que M **cobre** (ou **satura**) v se alguma aresta de M incide em v . Caso contrário, dizemos que v é um vértice **descoberto** (ou **exposto**) por M . Dizemos que um emparelhamento M sobre G é **maximal** se não existe emparelhamento $M' \supset M$ que contém M propriamente. Um emparelhamento é dito **máximo** se sua cardinalidade é máxima.

Em geral, estamos interessados em determinar condições para a existência de emparelhamentos que cobrem todos os vértices do grafo. Tais emparelhamentos são ditos **perfeitos**. Apresentamos ainda fórmulas explícitas para o cálculo da cardinalidade $\text{Emp } G$ de um emparelhamento máximo de G , e um algoritmo para obter um emparelhamento de cardinalidade máxima.

Dado um emparelhamento M de um grafo G , um **caminho M -alternante** em G é um caminho cujas arestas estão alternadamente em M e em $E(G) \setminus M$. Um tal caminho com extremos descobertos por M é chamado **caminho aumentador**, nome que deriva do teorema de Berge, enunciado a seguir.

Teorema 2.1 (Berge, 1957). Seja G um grafo e M um emparelhamento em G . Então M é um emparelhamento máximo se e só se G não tem nenhum caminho M -alternante com ambos os extremos descobertos.

2.1 EMPARELHAMENTOS PERFEITOS

Teorema 2.2 (Hall, 1935). Seja G um grafo (A, B) -bipartido. Então G tem um emparelhamento que cobre A se e somente se $|\text{Adj } X| \geq |X|$ para todo $X \subseteq A$.

Demonstração. Demonstramos apenas uma das implicações. Suponha que não existe emparelhamento que cubra A , e seja M um emparelhamento máximo de G . Então existe vértice $v \in A$ que não é coberto por M . Considere $A' \cup B'$ ($A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$) o conjunto de vértices de G que são atingíveis a partir de v por caminhos M -alternantes. Como G é bipartido, todo caminho de v até $a \in A'$ tem comprimento par. Logo a é emparelhado com o vértice que vem exatamente antes dele em todos esses caminhos que o atingiram. Assim, todo vizinho de a está em B' e, portanto, $\text{Adj}(A') = B'$. Por hipótese temos $|\text{Adj}(A')| \geq |A'|$ logo $|B'| \geq |A'|$ e, assim, como $v \in A'$ não está coberto por M , existe pelo menos um vértice b em B' que não está coberto por M . O caminho M -alternante de v a b tem comprimento ímpar e, portanto, é aumentador. \square

Corolário 2.3 Seja G um grafo (A, B) -bipartido. Se $|\text{Adj}(X)| \geq |X| - k$ para todo $X \subseteq A$ e algum inteiro fixo k , então G possui um emparelhamento de cardinalidade $|A| - k$.

Demonstração (sugestão). Adicione k vértices a B , conectados cada um a todos vértices de A . \square

Um conjunto S de vértices de um grafo G é dito uma **cobertura** (por vértices) se toda aresta de G é incidente a pelo menos um vértice de S . O tamanho de uma menor cobertura de G é denotado por $\text{Cob}(G)$. É fácil ver que $|S| \geq |M|$, para qualquer emparelhamento M . O seguinte teorema estabelece a célebre relação min–max entre coberturas e emparelhamentos [Die05, BM08].

Teorema 2.4 (Kőnig, 1931). Seja G um grafo bipartido. A cardinalidade de um emparelhamento máximo de G é igual à cardinalidade de uma cobertura mínima de G .

Demonstração. Demonstramos que $\text{Emp } G \geq \text{Cob}(G)$. A outra desigualdade é um exercício. Seja G um grafo (A, B) -bipartido e C uma cobertura mínima de G . Definimos os conjuntos

$$A_C = A \cap C, \quad B_C = B \cap C, \quad A_{\overline{C}} = A \setminus C, \quad \text{e} \quad A_{\overline{C}} = A \setminus C.$$

Seja H o subgrafo de G induzido por $A_C \cup B_{\overline{C}}$. É claro que H é $(A_C, B_{\overline{C}})$ -bipartido. Mostramos a seguir que a minimalidade de C garante que H satisfaz a hipótese do teorema de Hall.

Seja X um subconjunto qualquer de A_C . O conjunto $C \setminus X \cup \text{Adj}_H(X)$ é uma cobertura de G , pois toda aresta que tem uma ponta em X também tem uma ponta em $\text{Adj}_H(X)$. Como a cardinalidade dessa cobertura é $|C| - |X| + |\text{Adj}_H(X)|$, a minimalidade de C garante que $|\text{Adj}_H(X)| \geq |X|$.

Pelo teorema de Hall, existe um emparelhamento F em H que cobre A_C . De maneira análoga, podemos concluir que o subgrafo H' de G induzido por $B_C \cup A_{\overline{C}}$ possui um emparelhamento F' que cobre B_C . Ademais, $F \cup F'$ é um emparelhamento em G e

$$\text{Emp } G \geq |F \cup F'| = |F| + |F'| = |A_C| + |B_C| = |C|. \quad \square$$

Dado um grafo H , denotamos por $c_o(H)$ o número de componentes conexas de H que têm um número ímpar de vértices. O teorema a seguir fornece uma condição para a existência de emparelhamentos perfeitos em grafos arbitrários em termos do número de tais componentes.

Exercício 2.1. Demonstre o teorema de Hall de duas formas:

- i) dividindo em casos: 1. existe conjunto de vértices S com $|\text{Adj } S| = |S|$, e 2. para todo $S \in V(G)$ vale $|\text{Adj } S| > |S|$; e
- ii) usando o teorema de Kőnig.

Teorema 2.5 (Tutte, 1947). Um grafo $G = (V, E)$ tem um emparelhamento perfeito se e só se $c_o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V$.

Exercício 2.2. Deduza o teorema de Hall do teorema de Tutte.

Exercício 2.3. Um **grafo cúbico** é um grafo em que todo vértice possui grau 3. Prove que todo grafo cúbico sem arestas-de-corte tem um emparelhamento perfeito (Petersen, 1891). *Sugestão:* mostre que tal grafo satisfaz a condição do teorema 2.5.

2.2 EMPARELHAMENTOS MÁXIMOS E A DEFICIÊNCIA DE UM GRAFO

Dado um grafo (A, B) -bipartido G e um conjunto $X \subseteq A$, dizemos que $|X| - |\text{Adj } X|$ é a **deficiência** de X (com relação a A), e a denotamos por $\text{Def}_A(X)$. Definimos a deficiência de G por $\text{Def}_A(G) = \max_{X \subseteq A} \text{Def}_A(X)$. Note que a deficiência de G é não-negativa, uma vez que, para $X = \emptyset$, temos $\text{Def}_A(X) = 0$.

Em 1955, Ore [Ore55] publicou uma “versão defectiva” do *teorema de Hall* para grafos bipartidos. Em 1958, Berge obteve uma versão generalizada para grafos arbitrários, tendo como base o teorema de Tutte.

Teorema 2.6 (Ore, 1955). Se G é um grafo (A, B) -bipartido, então

$$\text{Emp}(G) = |A| - \text{Def}_A(G).$$

Demonstração. A desigualdade $\text{Emp } G \leq |A| - \text{Def}_A(G)$ segue diretamente da definição de $\text{Def}_A(G)$; a desigualdade $\text{Emp } G \geq |A| - \text{Def}_A(G)$ segue do corolário 2.3. \square

O teorema 2.6 conclui que a deficiência de um grafo bipartido G é o número de vértices descobertos por um emparelhamento máximo, isto é, $\text{Def}(G) = |V| - 2\text{Emp}(G)$. Esta última igualdade motiva uma definição de defeito para grafos arbitrários.

2.3 DEFEITO EM GRAFOS ARBITRÁRIOS

Seja M um emparelhamento em G . Definimos o **defeito de M** como sendo o número de vértices não cobertos por M . Definimos a **deficiência de G** como sendo o número de vértices não cobertos por um emparelhamento máximo, isto é,

$$\begin{aligned} \text{Def}(G) &= |V| - 2\text{Emp}(G), \\ &= \min_{M \in \mathcal{M}} \{|V| - 2|M|\}, \end{aligned}$$

onde \mathcal{M} é o conjunto dos emparelhamentos de G . Em 1958, Berge [B] provou o teorema a seguir, conhecido como **fórmula de Berge**.

Teorema 2.7 (Fórmula de Berge). Seja G um grafo. Então

$$\text{Def}(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \{c_o(G - S) - |S|\}. \quad (2.1)$$

O teorema 2.7 é consequência do teorema a seguir, que quantifica o tamanho do emparelhamento máximo em grafos quaisquer.

Teorema 2.8 (Fórmula de Tutte-Berge). Seja G um grafo. Então

$$\text{Emp}(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \left\{ \frac{|V| + |S| - c_o(G - S)}{2} \right\}. \quad (2.2)$$

Demonstração. Primeiramente, demonstramos que $\text{Emp}(G) \leq \frac{1}{2} \min_{S \subseteq V(G)} \{|V| + |S| - c_o(G - S)\}$. Observe que se existe $S \subseteq V$ tal que $c_o(G - S) > |S|$, então pelo menos $c_o(G - S) - |S|$ vértices devem ficar desemparelhados em qualquer emparelhamento. Assim, temos no máximo $\frac{1}{2}(|V| - c_o(G - S) + |S|)$ arestas em um emparelhamento, e segue que $\text{Emp}(G) \leq \frac{1}{2} \min_{S \subseteq V} \{|V| + |S| - c_o(G - S)\}$.

A demonstração de $\text{Emp}(G) \geq \frac{1}{2} \min_{S \subseteq V(G)} \{|V| + |S| - c_o(G - S)\}$ segue por indução no número de vértices $|V(G)|$. Se $|V(G)| = 1$ a fórmula é óbvia, e ambos os lados resultam 0. Suponha então que $|V(G)| > 1$ e que o teorema vale para todo grafo G' com $|V(G')| < |V(G)|$. Consideramos dois casos.

Caso 1. Existe um vértice v que é coberto por todo emparelhamento máximo de G . Seja M um tal emparelhamento. Considere o grafo $G' = G - v$ obtido de G pela remoção do vértice v e as arestas incidentes em v . Seja e a aresta de M que cobre v e tome o emparelhamento $M' = M - e$ de G' . Se existe emparelhamento de G' de tamanho $|M'| + 1 = |M| = \text{Emp}(G)$, então existe emparelhamento máximo em G que não emparelha v . Logo $\text{Emp}(G') = \text{Emp}(G) - 1$. Pela hipótese de indução, existe $S' \subseteq V(G')$ tal que $|V'| + |S'| - c_o(G' - S') = 2|M'|$. Considere o conjunto $S = S' \cup \{v\} \subseteq V(G)$ e observe que, uma vez que $G' = G - v$, temos $G' - S' = G - v - S' = G - S$. Logo, temos $c_o(G' - S') = c_o(G - S)$ e, portanto,

$$\begin{aligned} |M| &= |M'| + 1 = \frac{|V'| + |S'| - c_o(G' - S')}{2} + 1 \\ &= \frac{(|V'| + 1) + (|S'| + 1) - c_o(G' - S')}{2} \\ &= \frac{|V| + |S| - c_o(G - S)}{2} \\ &\geq \min_{S \subseteq V} \left\{ \frac{|V| + |S| - c_o(G - S)}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Caso 2. Todo vértice de G é descoberto por algum emparelhamento máximo. Vamos provar que *exatamente* um vértice fica descoberto em cada emparelhamento máximo.

Suponha que para todo emparelhamento máximo, existam dois vértices que não são cobertos. Tome então um emparelhamento máximo M tal que a distância $d(u, v)$ entre dois vértices descobertos u e v seja mínima. A distância entre u e v não pode ser 1, caso contrário podemos adicionar a aresta uv a M e obter um emparelhamento maior. Além disso, todo vértice interior num caminho de menor comprimento entre u e v deve ser coberto por M , caso contrário existiria um par de vértices não cobertos com distância menor que $d(u, v)$. Tome s um tal vértice e tome N um emparelhamento máximo de G que não cobre s e tal que $M \cap N$ seja o maior possível. Note, em particular, que u e v são cobertos por N (e *não* são cobertos por M). Ora, como a cardinalidade de M e N é a mesma, existe um vértice $x \neq s$ que é coberto por M , mas não é coberto por N .

Seja $y \in V(G)$ o vértice emparelhado com x em M . Se y não for coberto por N podemos adicionar a aresta xy a N , entrando em contradição com a maximalidade de N . Se y for coberto por N , podemos retirar de N a aresta que o cobre e adicionar xy em seu lugar, obtendo um emparelhamento N' com uma interseção maior com M . \square

No caso 2 da demonstração do teorema 2.8, encontramos um grafo G tal que $G - v$ possui um emparelhamento perfeito para todo $v \in V(G)$. Neste caso, dizemos que G é **hipoemparelhável**. Mais geralmente, se \mathcal{B} é uma propriedade sobre grafos, dizemos que um grafo G é **hipo- \mathcal{B}** se $G \notin \mathcal{B}$, e $G - v \in \mathcal{B}$ para todo vértice v de G .

Na busca de um emparelhamento com cardinalidade máxima, nos deparamos com a questão de saber, dado um emparelhamento M , se é possível encontrar um emparelhamento maior. O teorema 2.7 nos dá uma ideia de

como proceder. Note que, para todo conjunto S , a fórmula fornece um limitante inferior para o número de vértices descobertos por um emparelhamento máximo. Sabemos que não é possível encontrar emparelhamento que deixa menos do que $c_o(G - S) - |S|$ vértices descobertos. Portanto, se M deixa exatamente $c_o(G - S) - |S|$ vértices descobertos, para algum S , então M é máximo.

Estruturas como o conjunto S , que definem condições necessárias para alguma propriedade, são chamados de **certificados**. O conjunto S , por exemplo, é um certificado de que *ao menos* certa quantidade de vértices é deixada desemparelhada por um emparelhamento em G .

Outro conceito que será útil adiante é o de *testemunha*. Dado um emparelhamento máximo M em um grafo G , o teorema 2.8 garante a existência de um conjunto S tal que $|M| = \frac{1}{2}(|V| + |S| - c_o(G - S))$. Um tal conjunto S é dito **testemunha** de G .

Teorema 2.9 (Decomposição de Edmonds–Gallai). Dado um grafo $G = (V, E)$, sejam

$$\begin{aligned} D_G &= \{v \in V : \text{existe emparelhamento máx. em } G \text{ que não cobre } v\}, \\ A_G &= \{v \in V \setminus D_G : v \text{ é adjacente a algum vértice de } D_G\}, \\ C_G &= V \setminus (D_G \cup A_G). \end{aligned}$$

Então

- a) $S = A_G$ é testemunha de G ;
- b) C_G é a união de componentes pares de $G - A_G$;
- c) D_G é a união de componentes ímpares de $G - A_G$;
- d) Todo componente ímpar de $G - A_G$ é hipoemparelhável.

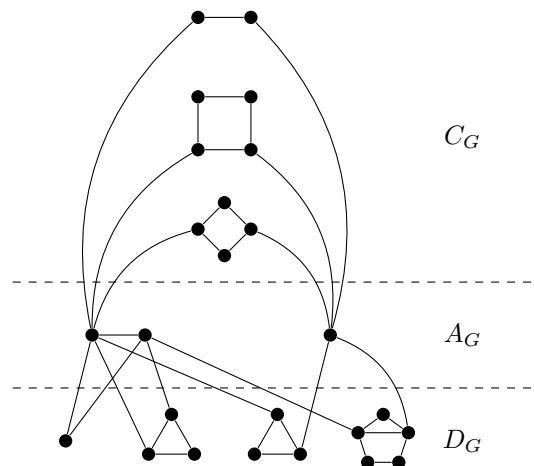


Figura 2.1: Decomposição de Edmonds–Gallaide um grafo. Note que a deficiência é $\text{Def}(G) = \max\{0, c_o(D_G) - |A_G|\}$, e o tamanho do emparelhamento máximo é $\text{Emp}(G) = (|V| + |A_G| - c_o(D_G))/2$.

2.4 UM ALGORITMO PARA ENCONTRAR UM EMPARELHAMENTO

O teorema 2.1 sugere que podemos construir um emparelhamento máximo iterativamente. Partimos de um emparelhamento qualquer e enquanto houver um caminho M -aumentador P , substituímos o emparelhamento corrente M

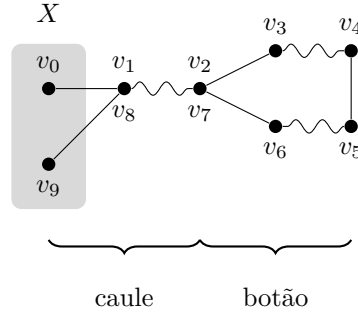


Figura 2.2: Um emparelhamento $M = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}\}$ e uma flor $v_0v_1 \cdots v_7$.

por $M \triangle P$. Descrevemos nessa seção algumas estratégias que podem ser usadas para encontrar tal caminho.

Seja $G = (V, E)$ um grafo, M um emparelhamento em G , e X o conjunto de vértices descobertos por M . Um *passeio M -alternante* (v_0, v_1, \dots, v_t) é chamado de *M -flor* (figura 2.2) se satisfaz

- a) $v_0 \in X$;
- b) v_0, \dots, v_{t-1} são distintos;
- c) t é ímpar; e
- d) $v_t = v_i$ para algum i ímpar.

Seja $T = v_0v_1 \cdots v_k$ um passeio M -alternante em G entre vértices distintos de X . Se T é vértice-simples, então T é um caminho M -aumentador. Caso contrário, seja j o menor inteiro tal que $v_i = v_j$, para $i < j$. É fácil ver que $v_0v_1 \cdots v_j$ é uma M -flor. A parte da M -flor de v_0 a v_i é chamada **caule** (“**stem**”) e a parte de v_i a v_t é chamada de **botão** (“**blossom**”). Dizemos que v_0 é a **raiz** da flor ou do botão. Se B é um M -botão, definimos o grafo G/B (chamado G **contraído** de B), com emparelhamento M/B , como o grafo que resulta da substituição do botão por um vértice. Mais formalmente, temos

- $V(G/B) = (V \setminus B) \cup \{b\}$, onde $b \notin V$ é um vértice novo;
- $E(G/B) = (E \setminus \{e \in E : e \text{ incide em } B\}) \cup \{vb : v \in V(G/B), vz \in E(G), z \in B\}$;
- $M/B = (M \setminus \{e \in E : e \text{ incide em } B\}) \cup \{vb : v \in V(G/B), vz \in M, z \in B\}$.

Note que $\{vb : v \in V(G/B), vz \in M, z \in B\}$ possui apenas uma aresta.

O teorema 2.1 diz que se não houver caminho M -aumentador, então M é um emparelhamento máximo, e todo passeio M -alternante entre vértices distintos de X possui uma flor. A utilidade da operação de **contração**, definida acima, fica aparente quando enunciamos o teorema a seguir.

Teorema 2.10 (Edmonds, 1965). Seja $G = (V, E)$ um grafo, M um emparelhamento em G e B um M -botão. Então M é um emparelhamento máximo em G se e somente se M/B é um emparelhamento máximo em G/B .

Demonstração. Vamos provar que existe um caminho M -aumentador em G se e somente se existe um caminho M/B -aumentador em G/B .

Seja F a flor de botão B . Para todo vértice v de B , denote por P_v o caminho de comprimento par em F que vai de v até a raiz de B .

Note que se existe um caminho M -aumentador P em G que não possui aresta de B , então P também é um caminho aumentador em G/B .

Por outro lado, se existe um caminho M -aumentador P em G contendo arestas de B , então existe um caminho M -aumentador com extremo na raiz de B . De fato, tome u um extremo de P diferente da raiz de B e v o primeiro vértice do botão em P quando seguimos P partindo de u . Seja Q o subcaminho de P de u até v . O caminho procurado é dado pela união de Q com P_v .

Observe que a aresta de v em Q não é aresta de M e, portanto, $(Q \cup P)/B$ é um caminho M/B -aumentador em G/B .

Suponha então que existe um caminho M/B -aumentador P em G/B . Se P não contém b então P é um caminho M -aumentador em G . Se P contém b então seja u um extremo de P diferente da raiz de B e $v \in V(G)$ o primeiro vértice do botão em P . Como antes, tome Q o caminho em P de u a v e então $Q \cup P_v$ é um caminho M -aumentador em G . \square

(*Prova alternativa de uma das implicações.*) Suponhamos que M/B não é um emparelhamento máximo em G/B . Seja N um emparelhamento máximo em G/B , temos $|N| > |M/B|$.

Considere o emparelhamento $N^+ = \tilde{N} \cup \tilde{M}$, onde \tilde{N} é um emparelhamento em G que não possui arestas de B e tal que $N/B = \tilde{N}$ e \tilde{M} é um emparelhamento quase-perfeito em B compatível com \tilde{N} , isto é, existe exatamente um vértice em B livre de \tilde{M} e N^+ é um emparelhamento em G . Temos

$$|N^+| = |N| + |\tilde{M}| > |M/B| + |\tilde{M}| = |M|.$$

Portanto $|N^+| > |M|$, uma contradição. \square

Observação 2.11 Note que nem todo circuito ímpar hipoemparelhado é um botão. Além disso, se C é um circuito ímpar, e M/C é um emparelhamento máximo em G/C , então *não* necessariamente M emparelhamento máximo em G ; onde a contração é definida analogamente.

O teorema 2.10 motiva o seguinte algoritmo para encontrar um emparelhamento máximo partindo de um grafo G com emparelhamento M . Buscamos passeios M -alternantes entre vértices distintos de X . Se não existe tal passeio, o emparelhamento é máximo, pelo teorema 2.1. Se encontramos um tal passeio P *sem* flor, aplicamos o algoritmo a G com emparelhamento $M' = M \triangle P$. Se encontramos um passeio *com* uma flor de botão B , aplicamos o algoritmo a G/B com emparelhamento $M' = M/B$.

O procedimento acima atinge um grafo G com emparelhamento máximo. Uma vez que G pode conter vértices resultantes de contrações, podemos usar o teorema 2.10 para desfazê-las preservando a maximalidade do emparelhamento. Na próxima seção descrevemos o algoritmo que esboçamos.

2.5 ALGORITMO DE EDMONDS–GALLAI

Dado um emparelhamento M em G , desejamos encontrar um emparelhamento maior do que M , ou constatar que M é máximo. No processo, rotulamos os vértices do grafo, de modo a obter a decomposição de Edmonds–Gallai.

Para encontrar o emparelhamento, fazemos uso de caminhos alternantes. A grosso modo, partimos de um emparelhamento M , e construímos uma floresta M -alternante, a partir de algum vértice não coberto (raiz). A árvore “cresce” por meio da adição de arestas do emparelhamento. Nesse processo, rotulamos os vértices da árvore. Quando não pudermos prosseguir, o algoritmo termina,

e as classes de vértices definidas pelos rótulos (ou sua ausência) definem as componentes da *decomposição de Edmonds–Gallai* 2.9.

Existem outros algoritmos para encontrar emparelhamentos máximos.²

Nosso objetivo é construir uma floresta M -alternante F , e rotulamos seus vértices PAR ou ÍMPAR. Seja X o conjunto de vértices não cobertos por M . Inicialmente rotulamos de PAR os vértices de X . Cada vértice de X é raiz de uma das árvores de F . O crescimento de F é sempre feito a partir de um vértice PAR, digamos u . Temos os seguintes casos.

Caso 1. Existe uma aresta uv onde v não está rotulado. Rotulamos v de ÍMPAR e o seu companheiro w ($vw \in M$) de PAR.

Caso 2. Existe uma aresta uv com v rotulado PAR tal que v pertence a uma árvore distinta da que u pertence. Neste caso, encontramos um caminho M -aumentador $R = P(uv)Q$, onde P é o caminho em F de r_u , raiz da árvore que contém u , até u , e Q é o caminho em F de v até r_v , raiz da árvore que contém v . Fazemos $M = M \triangle R$ e repetimos o processo da construção de F (do início!).

Caso 3. Existe uma aresta uv com v rotulado PAR e v pertencente à mesma árvore à qual pertence u . Neste caso, temos uma M -flor em G , com um M -botão, digamos B (circuito ímpar que existe em $F + uv$). Rotulamos de PAR os vértices do botão B , contraímos B e consideramos o grafo G/B com o emparelhamento M/B nesse grafo. Continuamos o processo de expansão da floresta F resultante. (Usamos então o teorema provado na aula passada.) Recursivamente, continuamos...

Fato 2.12 Se nenhum dos três casos ocorre, então afirmamos que encontramos um emparelhamento máximo M' no grafo corrente $G' = (V', E')$ que foi obtido do grafo original após zero ou mais contrações.

Demonstração. Considere a rotulação PAR/ÍMPAR feita conforme a M' -floresta foi construída. Seja $X' = \{x \in V' : x \text{ não é coberto por } M'\}$, e sejam

$$\begin{aligned} \text{PAR} &= \{v \in V' : \text{rótulo de } v \text{ é PAR}\}, \\ \text{ÍMPAR} &= \{v \in V' : \text{rótulo de } v \text{ é ÍMPAR}\}. \end{aligned}$$

Note que não há flores em G' , e portanto $|X'| = |\text{PAR}| - |\text{ÍMPAR}|$. Para para todo subconjunto $S \subseteq V'$ vale $\text{Def } G' \geq c_o(G - S) - |S|$ e em particular, tomando $S = \text{ÍMPAR}$, temos que

$$\text{Def } G' \geq c_o(G - \text{ÍMPAR}) - |\text{ÍMPAR}| = |\text{PAR}| - |\text{ÍMPAR}| = |X'|.$$

Como M' não cobre exatamente $|X|$ vértices, segue que M' é máximo. \square

(*Prova alternativa.*) Sabemos, pela fórmula de Tutte–Berge,

$$\text{Emp}(G') \leq \frac{1}{2}(|V'| + |S| - c_o(G' - S))$$

para todo $S \subseteq V'$. Tomando $S = \text{ÍMPAR}$, temos

$$\text{Emp}(G') \leq \frac{1}{2}(|V'| + |\text{ÍMPAR}| - |\text{PAR}|).$$

O algoritmo descrito constroi uma floresta, composta pelo conjunto de vértices rotulados. Como na outra demonstração, considere a rotulação PAR/ÍMPAR

feita conforme a M' -floresta foi construída. Seja $X' = \{x \in V' : x \text{ não é coberto por } M'\}$, e sejam

$$\begin{aligned}\text{PAR} &= \{v \in V' : \text{rótulo de } v \text{ é PAR}\}, \\ \text{ÍMPAR} &= \{v \in V' : \text{rótulo de } v \text{ é ÍMPAR}\}.\end{aligned}$$

Pela rotulação feita pelo algoritmo, o número de arestas do emparelhamento M' que estão fora da floresta é $(|V'| - (|\text{ÍMPAR}| + |\text{PAR}|))/2$, e o das que estão na floresta é $|\text{ÍMPAR}|$. De fato, o conjunto de vértices $X' \subseteq V'$ expostos por M' está na floresta, e assim os vértices não rotulados (isto é, fora da floresta) devem estar cobertos pelo emparelhamento M' .

A quantidade de vértices fora da floresta é $|V'| - (|\text{ÍMPAR}| + |\text{PAR}|)$, e o número de arestas do emparelhamento M' na floresta é igual ao número de vértices rotulados ÍMPAR, pois cada ÍMPAR é ponta de exatamente uma aresta de M' . Portanto

$$\begin{aligned}|M'| &= \frac{1}{2}(|V'| - (|\text{ÍMPAR}| + |\text{PAR}|)) + |\text{ÍMPAR}| \\ &= \frac{1}{2}(|V'| + |\text{ÍMPAR}| - |\text{PAR}|).\end{aligned}$$

Logo, o emparelhamento M' é máximo. \square

Já vimos que o emparelhamento máximo em G' corresponde a um emparelhamento máximo no grafo G inicial, obtido segundo o teorema 2.10 (os botões são descontraídos na ordem inversa de sua contração).

Observamos agora como identificar a decomposição de Edmonds-Gallai do teorema 2.9 partindo da rotulação de G fornecida pelo algoritmo. Lembramos que D_G é o conjunto dos vértices que são descobertos por algum emparelhamento máximo, e A_G é o conjunto de vizinhos de D_G em $V \setminus D_G$. Note que PAR é o conjunto dos vértices v tais que existe em G um caminho M -alternante de comprimento par de X até v . Analogamente, ÍMPAR é o conjunto de vértices $v \in V(G) \setminus \text{PAR}$ alcançáveis por um caminho M -alternante de comprimento ímpar.

Proposição 2.13 Seja M um emparelhamento máximo em $G = (V, E)$, X o conjunto dos vértices não cobertos por M e sejam PAR e ÍMPAR como acima. Então $\text{PAR} = D_G$ e $\text{ÍMPAR} = A_G$.

Consideramos que um caminho de comprimento zero é um caminho M -alternante. Ou seja, PAR contém o conjunto X .

Demonstração. Demonstramos a igualdade $\text{PAR} = D_G$, o fato $\text{ÍMPAR} = A_G$ é um exercício.

(*Prova de $\text{PAR} \subseteq D_G$.*) Seja v um vértice em PAR, e seja P um caminho M -alternante de X para v . Considere $M' = M \triangle P$ (diferença simétrica de M e P). Então M' é um emparelhamento máximo que não cobre v . Portanto, v pertence a D_G .

(*Prova de $D_G \subseteq \text{PAR}$.*) Seja v um vértice em D_G . Se v pertence a X então v pertence a PAR. Suponha que v é coberto por M . Seja M' um emparelhamento máximo que não cobre v (M' existe pois v pertence a D_G). Os componentes de $M' \triangle M$ são circuitos ou caminhos pares com arestas alternadamente em M' e em M . Como v é coberto por M , existe um caminho alternante par que começa em v , com uma aresta de M , e termina num vértice w , chegando por uma aresta de M' . Como w não é coberto por M ,

então w pertence a X . Neste caso, temos um caminho M -alternante par que começa em x e termina em w . Logo, w pertence a PAR. \square

Um corolário que segue imediatamente do Algoritmo de Edmonds–Gallai é o seguinte.

Corolário 2.14 Se M é um emparelhamento máximo em um grafo G , então para todo vértice w em D_G , existe um vértice v descoberto em M e um caminho M -alternante par de v a w .

2.6 EXERCÍCIOS

Exercício 2.4. Seja k um inteiro positivo, e seja G um grafo simples com $|V(G)| \geq 2k$, e tal que $d(v) \geq k$ para todo $v \in G$. Mostre que G tem um emparelhamento com pelo menos k arestas.

Exercício 2.5. Prove que todo grafo bipartido com pelo menos uma aresta tem um emparelhamento que cobre todos os vértices de grau máximo.

Observação 2.15 Note que uma consequência imediata desse resultado é o fato de que o conjunto das arestas de um grafo bipartido pode ser particionado em $\Delta(G)$ emparelhamentos. (Ou seja, o índice cromático de um grafo bipartido é precisamente $\Delta(G)$).

Exercício 2.6. Seja E um emparelhamento maximal e E^* um emparelhamento máximo num grafo. Mostre que $|E| \geq |E^*|/2$.

Exercício 2.7. Prove o Teorema de Hall usando o Teorema de Tutte 2.5.

Exercício 2.8. Prove que se $G = (V, E)$ é um grafo com $|V|$ par e tal que

$$|\text{Adj}(X)| \geq \min \left\{ |V|, \frac{4}{3}|X| - \frac{2}{3} \right\} \quad \text{para todo } X \subseteq V,$$

então G tem um emparelhamento perfeito.

NOTAS DO CAPÍTULO 2

1. O conceito de emparelhamento pode ser generalizado com o conceito de fatores. Um k -fator de G é um subgrafo gerador $H \subseteq G$ em que todo vértice possui grau k . Assim, um emparelhamento perfeito é um 1-fator.

Fatores são comuns no estudo de grafos regulares. Por exemplo, todo grafo bipartido regular (com ao menos uma aresta) possui um 1-fator, e todo grafo euleriano regular possui um 2-fator.

2. No livro do Lovász há um algoritmo, usando orelhas, de complexidade $O(n^3)$. Existe algoritmo $O(\sqrt{nm})$, de vários autores [], para o caso em que maximiza a cardinalidade do emparelhamento (em oposição a maximizar o peso das arestas no emparelhamento, caso em que a complexidade talvez seja outra).

2.7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [BM08] A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2008.
- [CCPS11] W.J. Cook, W.H. Cunningham, W.R. Pulleyblank, and A. Schrijver. *Combinatorial Optimization*. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley, 2011.

- [Die05] Reinhard Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.
- [Ore55] Oystein Ore. Graphs and matching theorems. *Duke Math. J.*, 22:625–639, 1955.
- [PL86] D. Plummer and L. Lovász. *Matching Theory*. North-Holland Mathematics Studies. Elsevier Science, 1986.

3 CONEXIDADE

Seja G um grafo. Dizemos que G é **k -conexo** se, para todo $S \subseteq V(G)$ e $|S| < k$, temos que o grafo $G - S$ é conexo e possui ao menos dois vértices.

Analogamente, dizemos que G é **k -aresta-conexo** se, para todo $F \subseteq E(G)$, com $|F| < k$, temos que $G - F$ é conexo e possui ao menos dois vértices.

Além disso, convencionamos que todo grafo é 0-conexo e 0-aresta-conexo.

Finalmente, definimos a **conexidade** de G (**connectivity** of G), denotada por $K(G)$, como o maior natural k tal que G é k -conexo e definimos a **aresta-conexidade** de G (**edge connectivity** of G), denotada por $K'(G)$, como o maior natural k tal que G é k -aresta-conexo.

Exercício 3.1. Mostre que $K(G) \leq K'(G) \leq \delta(G)$.

Para provar as várias versões do teorema de Menger, vamos agora considerar digrafos (grafos orientados), em particular, permitimos aqui arestas múltiplas. Note que isso é diferente de uma **orientação** de um grafo, quando partimos de um grafo e orientamos suas arestas.

Para facilitar a notação, se G é um grafo (ou digrafo) e s e t são dois de seus vértices, então chamamos de **st -caminho** qualquer caminho (orientado, no caso de digrafos) de s a t .

Um digrafo D é dito **fortemente conexo** se para quaisquer dois vértices u, v existe em D um uv -caminho (Isto significa que existe também um vu -caminho).

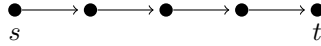


Figura 3.1: Um st -caminho, *i.e.*, um caminho orientado de s para t . Os arcos em um tal caminho devem ter “mesma” orientação.

Além disso, definimos k -conexidade forte, k -aresta-conexidade forte, $K(D)$ e $K'(D)$ analogamente, trocando “conexo” por “fortemente conexo”.

Finalmente, se G é um grafo conexo (ou digrafo fortemente conexo) e $S \subseteq V(G)$ é tal que $G - S$ é desconexo, então dizemos que S é um **conjunto separador** de G .

3.1 TEOREMA DE Menger

O teorema de Menger caracteriza a noção de conexidade através de caminhos disjuntos.

Teorema 3.1 (Menger, 1927). Seja $D = (V, E)$ um digrafo, $s, t \in V$, e $s \neq t$. O número *máximo* de st -caminhos em D disjuntos nos arcos é igual ao número *mínimo* de arcos cuja remoção destrói todos os st -caminhos.

A prova tradicional é por *maxflow*. Faremos outra. Se $X \subseteq V$, denotamos por $\delta^+(X)$ o conjunto dos arcos de D que saem de X (*i.e.*, têm a cauda em X e a cabeça em $\bar{X} = V \setminus X$). Chamamos $\delta^+(X)$ de **corte de X** ; dizemos que X é um **corte st -separador** se $s \in X$ e $t \in \bar{X}$.

Demonstração. A seguinte prova é devido a András Frank, e usa funções submodulares definidas abaixo.

Primeiramente, uma função $f : 2^X \mapsto \mathbb{R}$ das partes de X nos reais é dita **submodular** se $f(U \cup V) + f(U \cap V) \leq f(U) + f(V)$. Se há igualdade em vez de “ \leq ” a função é **modular**, e se há “ \geq ” a função é **supermodular**.

O teorema 3.1 é um corolário do seguinte.

Teorema 3.2 Seja $D = (V, E)$ um digrafo, $s, t \in V$, e $s \neq t$. Em D existem pelo menos k st -caminhos disjuntos nos arcos se e só se $\delta^+(X) \geq k$ para todo $X \subseteq V$ que é corte st -separador (i.e., $s \in X$ e $t \notin X$).

Vamos provar inicialmente que o teorema 3.2 de fato implica o teorema 3.1.

Seja k o número máximo de st -caminhos disjuntos nos arcos, então, pelo teorema 3.2, existe um $X \subseteq V$ corte st -separador tal que $\delta^+(X) < k + 1$. A remoção de $\delta^+(X)$ certamente desconecta s de t . Por outro lado a remoção de $k - 1$ arestas certamente não desconecta s de t , pois todo corte X st -separador passa a ter ao menos um arco em $\delta^+(X)$.

Vamos agora provar o teorema 3.2.

Suponha que D é k -conexo, então cada corte intercepta ao menos uma aresta de cada caminho, e os caminhos são disjuntos, donde $|X| \geq k$.

Exercício 3.2. Mostre que a função $f(X) = |\delta^+(X)|$ é submodular.

A prova da recíproca é por indução no número de arcos. Dizemos que um corte st -separador é **justo** se $|\delta^+(X)| = k$. Suponha que $|\delta^+(X)| \geq k$ para todo corte st -separador.

Observe que

$$|\delta^+(X)| + |\delta^+(Y)| \geq |\delta^+(X \cup Y)| + |\delta^+(X \cap Y)| \geq k + k.$$

Donde segue que se X e Y são justos, então $X \cup Y$ e $X \cap Y$ são justos.

Vamos supor que todo arco de D pertence a um conjunto justo (senão podemos deletá-lo e usar a hipótese indutiva).

Tome $v \neq s$ e X tais que $vt \in \delta^+(X)$ e X é justo (Figura 3.2). Observe que se não existisse tal v , então todos os arcos de D seriam da forma st e o resultado seguiria trivialmente.

Seja S a interseção de todos os conjuntos justos X tais que $\delta^+(X)$ contém vt (note que S é justo). Vamos provar que existe $u \in S$ com $uv \in E(D)$.

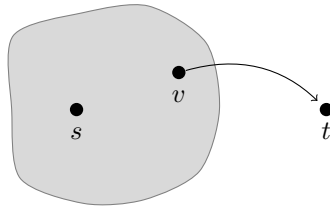


Figura 3.2: Exemplo de escolha do vértice v e do conjunto justo X da demonstração do Teorema 3.2.

Suponha que não há tal u e observe que $\delta^+(S \setminus \{v\})$ deve possuir ao menos k arcos pois $S \setminus \{v\}$ é corte st -separador, mas isso significa que $\delta^+(S)$ possui ao menos $k + 1$ arcos, o que contradiz sua definição.

Tomemos então $u \in S$ com $uv \in E(D)$ e D' o digrafo definido a partir de D removendo os arcos uv e vt e incluindo um novo arco ut (Figura 3.3), note que essa operação poderá gerar arcos múltiplos.

Certamente $|E(D')| = |E(D)| - 1$. Vamos mostrar que D' satisfaz a hipótese do teorema.

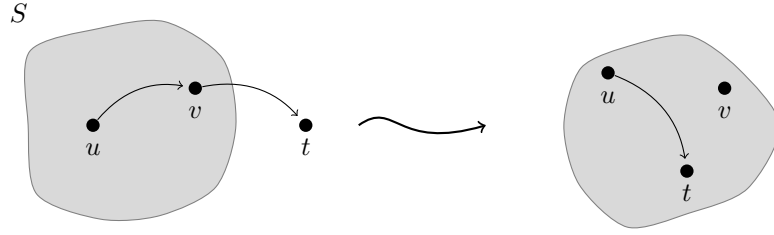


Figura 3.3: À esquerda, um exemplo de digrafo D da demonstração do Teorema 3.2. À direita, o digrafo D' construído.

Tome X um corte st -separador em D' arbitrário e suponha por absurdo que $|\delta_{D'}^+(X)| < k$.

Observe que, se $u, v \notin X$, então $\delta_{D'}^+(X) = \delta_D^+(X)$, logo $|\delta_{D'}^+(X)| \geq k$.

Por outro lado, se $u \in X$ e $v \notin X$, então também temos $|\delta_{D'}^+(X)| = |\delta_D^+(X)| \geq k$, já que a remoção do arco uv foi compensada pela adição do arco ut .

O mesmo vale para o caso $u, v \in X$, pois a remoção do arco vt foi compensada pela adição do arco ut .

Resta apenas o caso $u \notin X$ e $v \in X$. Mas então $k > |\delta_{D'}^+(X)| = |\delta_D^+(X)| - 1 \geq k$, logo $|\delta_D^+(X)| = k$, i.e. X é justo em D . Observe que $vt \in \delta_D^+(X)$, mas X não contém u , o que contradiz a escolha de S , pois $u \in S$.

Portanto podemos aplicar a hipótese indutiva para D' , então temos k st -caminhos em D' disjuntos nos arcos. Para obter os st -caminhos em D , basta substituir o arco adicionado ut pelos arcos removidos uv e vt . \square

A partir do teorema 3.1, podemos deduzir as seguintes outras versões.

Teorema 3.3 Seja $D = (V, E)$ um digrafo, $s, t \in V$, $s \neq t$ e $st \notin E$. O número *máximo* de st -caminhos em D internamente disjuntos nos vértices é igual ao número *mínimo* de vértices em $V \setminus \{s, t\}$ cuja remoção destrói todos os st -caminhos.

Demonstração. Certamente não há como destruir todos os st -caminhos removendo menos vértices do que o número máximo de st -caminhos.

Considere D' o digrafo tal que $V(D') = \{v^+ : v \in V(D)\} \cup \{v^- : v \in V(D)\}$ e $E(D') = \{x^+y^- : xy \in E(D)\} \cup \{v^-v^+ : v \in V(D)\}$.

Observe que caminhos disjuntos nos arcos em D' correspondem a caminhos internamente disjuntos nos vértices em D .

Além disso, remover um vértice v de D corresponde a remover o arco v^-v^+ de D' .

Logo o teorema 3.1 aplicado a D' nos dá o resultado para D . \square

Teorema 3.4 Seja $G = (V, E)$ um grafo, $s, t \in V$, e $s \neq t$. O número *máximo* de st -caminhos disjuntos nas arestas em D é igual ao número *mínimo* de arcos cuja remoção destrói todos os st -caminhos.

Demonstração. Seja D o digrafo obtido a partir de G trocando cada aresta uv pelos arcos (u, v) e (v, u) . Porém, não basta apenas aplicar o teorema para o digrafo e remover a orientação dos arcos, pois nada impede que ambos os arcos do par sejam usados, cada uma por um caminho diferente.

Para resolver esse problema, consideramos o digrafo induzido pelos arcos contidos nos caminhos e adicionamos k arcos da forma ts , observe que todo vértice desse digrafo possui grau de entrada igual ao grau de saída e que essa propriedade é mantida se eliminarmos todos os pares de arcos (u, v) e (v, u) sucessivamente correspondentes a orientações opostas de uma mesma aresta.

Ao final desse procedimento, obtemos um digrafo D' euleriano pelo teorema 1.7. Cada seção da trilha euleriana entre duas ocorrências sucessivas de arcos da forma ts corresponde a um dos k st -caminhos. \square

Teorema 3.5 Seja $G = (V, E)$ um grafo, $s, t \in V$, $s \neq t$ e $st \notin E$. O número *máximo* de st -caminhos em G internamente disjuntos nos vértices é igual ao número *mínimo* de vértices em $V \setminus \{s, t\}$ cuja remoção destrói todos os st -caminhos.

Demonstração. Análoga à prova do teorema 3.3, mas usando o teorema 3.4 ao invés do teorema 3.1. \square

A partir dos teoremas 3.1, 3.3, 3.4 e 3.5, seguem os seguintes corolários.

Corolário 3.6 Um digrafo D é k -fortemente-arco-conexo se e somente se para todo par de vértices distintos v e w existem k caminhos orientados disjuntos nos arcos de v a w .

Corolário 3.7 Um digrafo D é k -fortemente-conexo se e somente se para todo par de vértices distintos v e w existem k caminhos orientados internamente disjuntos nos vértices de v a w .

Corolário 3.8 Um grafo G é k -aresta-conexo se e somente se para todo par de vértices distintos v e w existem k caminhos disjuntos nas arestas de v a w .

Corolário 3.9 Um grafo G é k -conexo se e somente se para todo par de vértices distintos v e w existem k caminhos internamente disjuntos nos vértices de v a w .

3.2 2-CONEXIDADE E 2-ARESTA-CONEXIDADE

Seja G um grafo e H um subgrafo de G , um **H -caminho** em G é um caminho P em G não-trivial que intersecta H precisamente nos seus extremos. Dado um grafo G e um subgrafo $H \subseteq G$, uma **H -orelha** é um H -caminho ou um circuito em G onde *exatamente um* de seus vértices pertence a H .

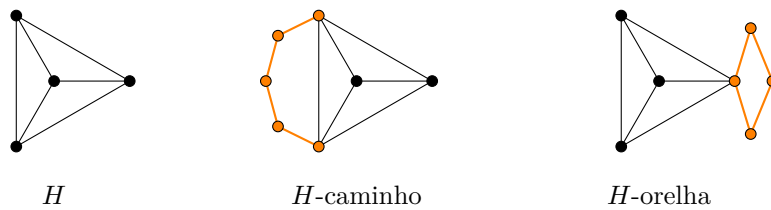


Figura 3.4: Exemplo de H -caminho e H -orelha.

Observação: Para diferenciar os dois tipos de H -orelhas há autores que usam os termos "open ear" e "closed ear" quando é um circuito.

Um vértice v de um grafo G é dito **vértice de corte** de G se existe uma partição de $E(G)$ em dois conjuntos não-vazios A e B tal que se $a \in A$ e $b \in B$ são arestas adjacentes, então ambas incidem em v .

No caso em que G é um grafo simples, então v é vértice de corte se e somente se a remoção do vértice v aumenta o número de componentes conexos.

Dada uma aresta $e = xy$ de um grafo G , o grafo obtido pela **subdivisão da aresta** e é o grafo obtido de G pela remoção da aresta e , e pela adição de um novo vértice w vizinho a x e y .

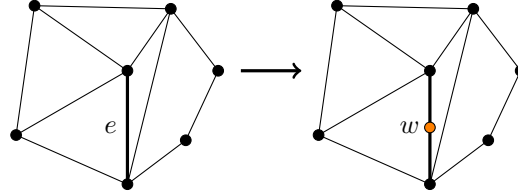


Figura 3.5: Exemplo de subdivisão da aresta e .

Dada uma aresta $e = xy$ de um grafo $G = (V, E)$, o grafo obtido pela **contração da aresta** e , denotado por G/e , é o grafo obtido de G pela remoção dos vértices x e y , e pela adição de um novo vértice v_e vizinho aos vizinhos de x e y em $G - x - y$. Dado um conjunto $U \subseteq V$ de um grafo G , o grafo obtido de G pela **contração do conjunto de vértices** U , denotado por G/U , é o grafo obtido de G pela remoção dos vértices de U , e pela adição de um novo vértice v_U vizinho aos vizinhos dos vértices de U em $G - U$.

Mais formalmente, dado um conjunto de vértices $U \subseteq V$, o grafo G/U é o grafo (V', E') onde

- $V' = (V \setminus U) \cup \{v_U\}$ ($v_U \notin V(G)$); e
- $E' = \{uv \in E : \{u, v\} \cap U = \emptyset\} \cup \{v_U w : \text{existe } x \in U \text{ tal que } xw \in E \setminus E(G[U])\}$.

Observação: A contração de uma aresta $e = xy$ pode ser vista como um caso especial de contração de conjunto de vértices U onde $U = \{x, y\}$.

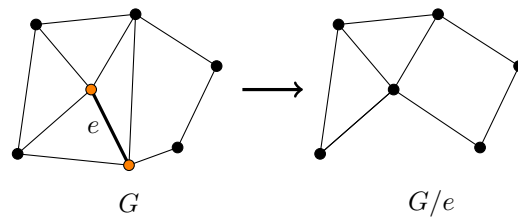


Figura 3.6: Exemplo de contração da aresta e .

Teorema 3.10 Seja G um grafo com ao menos 3 vértices. São equivalentes

- G é 2-conexo;
- Quaisquer dois vértices de G pertencem a um circuito comum;
- Quaisquer duas arestas de G pertencem a um circuito comum;
- G pode ser construído a partir de um circuito (*não* um laço) com a adição sucessiva de H -caminhos a grafos H já construídos (decomposição em orelhas que é “própria”).

Demonstração. $(a \Leftrightarrow b)$ Consequência direta do teorema 3.5.

(b \Rightarrow c) Se e e f são duas arestas, subdivida cada uma em duas e observe que o grafo resultante G' é 2-conexo (pois não possui vértice de corte). Portanto, como $a \Rightarrow b$, então G' contém um circuito com ambos os vértices novos, o que significa que G possui um circuito contendo as duas arestas.

(c \Rightarrow d) Seja $G' \subseteq G$ um subgrafo construído como no item d com o maior número de arestas possível. Se $G' = G$, não há o que fazer.

Suponha então que G' é um subgrafo próprio de G .

Vamos mostrar que todo vértice v de G está em G' . Suponha, por absurdo, que não e tome em G um circuito C envolvendo uma aresta adjacente a v e alguma aresta de G' (existe devido a c). Tome então o caminho maximal nas arestas de $(G - G') \cap C$ que contém v e contém no máximo dois vértices em G' . Ele é um G' -caminho (note que a presença de uma aresta de G' em C garante que há mais de um vértice de G' em C), o que contradiz a maximalidade de G' .

Logo todo vértice de G está em G' .

Mas então G' é um subgrafo gerador de G , isso significa que toda aresta de G' que não é aresta de G é um G' -caminho, novamente contradizendo a maximalidade de G' .

(d \Rightarrow a) Consequência direta da construção de G : para desconectar G é necessário remover ao menos dois vértices (isso é verdade em um circuito e permanece verdade com a adição sucessiva de H -caminhos a G). \square

Teorema 3.11 Seja G um grafo com ao menos 3 vértices. São equivalentes:

- (a) G é 2-aresta-conexo;
- (b) Para quaisquer dois vértices de G existem dois caminhos arestas-disjuntos ligando-os;
- (c) G é conexo e qualquer aresta de G pertence a um circuito;
- (d) G pode ser construído a partir de um vértice com a adição sucessiva de H -orelhas a grafos H já construídos (decomposição em orelhas).
- (e) G pode ser construído a partir de um circuito acrescentando sequencialmente arestas (podem ser laços) e subdividindo arestas;

Demonstração. (a \Leftrightarrow b) Consequência direta do teorema 3.4.

(b \Rightarrow c) Certamente todo par de vértices está conectado, logo G é conexo.

Além disso, se xy é aresta de G , então há dois caminhos disjuntos nas arestas entre x e y . Certamente um deles, digamos P , não usa a aresta xy . Mas então o circuito formado pela adição da aresta xy a P possui a aresta xy .

(c \Rightarrow d) Seja $G' \subseteq G$ um subgrafo construído como no item d com o maior número de arestas possível. Se $G' = G$, não há o que fazer.

Suponha então que G' é um subgrafo próprio de G .

Vamos mostrar que todo vértice v de G está em G' . Suponha, por absurdo, que não e tome em G um circuito C envolvendo uma aresta adjacente a v (existe devido a c). Tome então a trilha maximal nas arestas de $(G - G') \cap C$ que contém v e contém no máximo dois vértices de G' (note que tal trilha pode ser o circuito inteiro). Ela é uma G' -orelha, o que contradiz a maximalidade de G' .

Logo todo vértice de G está em G' .

Mas então G' é um subgrafo gerador de G , isso significa que toda aresta de G' que não é aresta de G é um G' -caminho (e consequentemente, uma G' -orelha), novamente contradizendo a maximalidade de G' .

(d \Rightarrow e) Basta observar que cada orelha da decomposição de G pode ser obtida adicionando uma aresta e subdividindo-a sucessivamente.

(e \Rightarrow a) Consequência direta da construção de G : para desconectar G é necessário remover ao menos duas arestas (isso é verdade em um circuito e permanece verdade com a adição sucessiva de arestas a G e com a subdivisão de arestas de G). \square

Teorema 3.12 (Lovász). Um grafo G é hipoemparelhável se e somente se G tem uma decomposição em orelhas ímpares, i.e. G pode ser obtido a partir de um vértice com a adição sucessiva de H -orelhas com número ímpar de arestas a grafos H já construídos.

Demonstração. Suponha que G é um grafo hipoemparelhável com menor número de arestas o possível que não pode ser obtido pelo procedimento do teorema. Observe que G é conexo com um número ímpar de vértices (pois a remoção de qualquer vértice de G deve resultar em um grafo com apenas componentes conexos com número par de vértices) e certamente G não possui apenas um vértice.

Como G é hipoemparelhável, temos que $D_G = V(G)$ na decomposição de Edmonds–Gallai (teorema 2.9).

Seja M um emparelhamento máximo em G e observe que há apenas um vértice v em G que não é coberto por M . Como $D_G = V(G)$, sabemos que, se rodarmos o algoritmo da seção 2.5, obteremos sequências G_0, G_1, \dots, G_n , B_0, B_1, \dots, B_{n-1} e M_0, M_1, \dots, M_n tais que $G_0 = G$, $M_0 = M$, G_n possui apenas um vértice e , para todo $i < n$, B_i é um M_i -botão, $G_{i+1} = G_i/B_i$ e $M_{i+1} = M_i/B_i$.

Observe que, para todo $i < n$, temos que G_i é hipoemparelhável e que há apenas um vértice em G_i , digamos v_i descoberto em M_i . Isso significa que, para todo vértice t_i em G_i existe um caminho M_i -alternante $P_{t_i, i}$ de v_i a t_i em G_i de comprimento par.

Observe também que, para todo $i < n$, temos que cada caminho M_{i+1} -alternante em G_{i+1} com início em v_{i+1} corresponde a um caminho M_i -alternante em G_i com início em v_i .

Vamos provar que, para todo $i < n$, temos $G_i[V(B_i)] = B_i$.

Suponha que não, isto é, suponha que existe uma aresta $e \in G[V(B_i)] \setminus E(B_i)$, e note que todo caminho M_{i+1} -alternante de G_{i+1} pode ser transformado em um caminho M_i -alternante de $G_i - e$.

Mas então, a existência dos caminhos $P_{t_{i+1}, i+1}$ garante que, para todo vértice t_i de G_i existe um caminho M_i -alternante em $G_i - e$ de comprimento par de v_i a t_i , isso significa que $G_i - e$ é hipoemparelhável.

Tome então uma aresta f de G responsável pela existência de e em G_i e observe que, como $G_i - e$ é hipoemparelhável, temos que $G - e$ é hipoemparelhável. Pela minimalidade de G , sabemos que $G - e$ pode ser obtido pelo procedimento descrito no teorema, mas e forma uma $(G - e)$ -orelha de comprimento ímpar, contradizendo a escolha de G .

Logo, para todo $i < n$, temos $G_i[V(B_i)] = B_i$.

Vamos provar agora que, para todo $i < n$, não existem arestas distintas e e f em G_i que correspondem a uma mesma aresta de G_{i+1} .

Suponha que não e observe que $\{e, f\} \cap M_i = \emptyset$. Além disso, observe que e e f têm de ser adjacentes com suas pontas distintas no botão B_i . Novamente a existência dos caminhos $P_{t_{i+1}, i+1}$ garante que, para todo vértice t_i de G_i

existe um caminho M_i -alternante em $G_i - e$ de comprimento par de v_i a t_i , isso significa que $G_i - e$ é hipoemparelhável.

Mais uma vez, tome então uma aresta g de G responsável pela existência de e em G_i e observe que, como $G_i - e$ é hipoemparelhável, temos que $G - e$ é hipoemparelhável. Pela minimalidade de G , sabemos que $G - e$ pode ser obtido pelo procedimento descrito no teorema, mas e forma uma $(G - e)$ -orelha de comprimento ímpar, contradizendo a escolha de G .

Para todo $i < n$, seja u_i o vértice de G_{i+1} proveniente da contração de B_i .

Certamente $n > 1$, caso contrário G seria um circuito ímpar (pois seria um botão), que pode ser obtido pelo procedimento descrito no teorema. Isso significa que, para todo $i < n - 1$, o vértice u_i possui grau pelo menos dois em G_{i+1} e certamente u_{n-2} possui grau dois em G_{n-1} . Seja então i_0 o menor i tal que u_i possui grau igual a 2 em G_{i+1} .

Como não há duas arestas em G_{i_0} correspondentes a uma mesma aresta de G_{i_0+1} e $G_{i_0}[B_{i_0}] = B_{i_0}$, sabemos que B_{i_0} possui exatamente dois vértices, digamos r_1 e r_2 de grau três em G_{i_0} . Note que um desses vértices não é coberto por $M_{i_0} \cap E(B_{i_0})$ e, sem perda de generalidade, suponha que esse vértice é r_1 .

Como B_{i_0} é um circuito ímpar, existe um caminho Q de r_1 a r_2 em B_{i_0} de comprimento ímpar.

Observe que u_{i_0} pertence a um botão B_j tal que $j > i_0$, logo existe um caminho M_{i_0+1} -alternante \tilde{R} de comprimento ímpar em G_{i_0+1} de v_{i_0+1} a u_{i_0} . Sabemos que \tilde{R} corresponde a um caminho M_{i_0} -alternante R de comprimento ímpar em G_{i_0} de v_{i_0} a r_2 .

Considere então o grafo $G' = G - (V(Q) \setminus \{r_1, r_2\})$ e vamos mostrar que para todo vértice t' de G' , existe um caminho M_{i_0} -alternante em G' de comprimento par de v_{i_0} a t' .

Caso 1. $t' \in V(G_{i_0+1})$. Nesse caso consideramos P_{t', i_0+1} e observamos que esse caminho corresponde a o caminho desejado em G' , usando o caminho Q para passar por B_{i_0} se necessário.

Caso 2. t' está no grafo $H = B_{i_0} - (V(Q) \setminus \{r_1, r_2\})$ e está a uma distância par em H de r_1 . Observe que o caminho testemunha dessa distância par é um caminho M_{i_0} -alternante. Por outro lado, sabemos que P_{r_1, i_0} não usa nenhum vértice de $Q - r_1$. Logo a concatenação desses dois caminhos gera o caminho desejado.

Caso 3. t' está no grafo $H = B_{i_0} - (V(Q) \setminus \{r_1, r_2\})$ e está a uma distância ímpar em H de r_1 . Isso significa que t' também está a uma distância ímpar de r_2 em H . Observe que o caminho testemunha dessa distância par a r_2 é um caminho M_{i_0} -alternante. Por outro lado, sabemos que R não usa nenhum vértice de $Q - r_2$. Logo a concatenação desses dois caminhos gera o caminho desejado.

Portanto, para todo vértice t' de G' , existe um caminho M_{i_0} -alternante em G' de comprimento par de v_{i_0} a t' . Isso significa que G' é hipoemparelhável e, pela minimalidade de G , sabemos que G' pode ser obtido pelo procedimento descrito no teorema, mas Q forma uma (G') -orelha de comprimento ímpar, contradizendo a escolha de G .

Para provar a recíproca, observe primeiramente que, como um vértice (K_1) é hipoemparelhável, basta provar que a adição de uma G -orelha a um grafo G hipoemparelhável preserva essa propriedade.

Então seja G um grafo hipoemparelhável e G' um grafo obtido a partir de G através da adição de uma G -orelha P com extremos u e w em G (esses vértices podem ser iguais).

Seja M um emparelhamento máximo em G e seja v o único vértice de G descoberto em M . Seja $M' = M \cup \tilde{M}$ onde \tilde{M} é o maior emparelhamento em P que deixa u e w descobertos.

Observe que M' é emparelhamento máximo em G' deixando apenas v descoberto e vamos provar que, para todo vértice t de G' , existe um caminho M' -alternante em G' de comprimento par de v a t .

Caso 1. t é vértice de G . Então, como G é hipoemparelhável, sabemos que existe caminho M -alternante em G de comprimento par de v a t e esse caminho também é caminho M' -alternante em G' .

Caso 2. t não é vértice de G . Então t pertence a P e como P tem comprimento ímpar, então t tem de estar a distância par em P de um vértice, digamos r , dentre u e w . Seja Q o caminho testemunha dessa distância par e observe que Q é M' -alternante.

Por outro lado, sabemos que r é vértice de G , então, como G é hipoemparelhável, sabemos que existe caminho M -alternante R em G de comprimento par de v a r . Daí a concatenação de R com Q nos dá o caminho desejado.

Portanto, para todo vértice t de G' , existe um caminho M' -alternante em G' de comprimento par de v a t , isso significa que G' é hipoemparelhável. \square

Observação: Os teoremas a e 3.12 garantem que todo grafo hipoemparelhável é 2-aresta-conexo.

3.3 3-CONEXIDADE

Teorema 3.13 Se G é 3-conexo e $|V(G)| \geq 5$, então G tem uma aresta α tal que G/α é 3-conexo.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que o resultado não vale. Então para toda aresta $\alpha = xy \in E(G)$, existe $S \subseteq V(G/\alpha)$ com $|S| \leq 2$ tal que $G/\alpha - S$ é desconexo.

Observe que a cardinalidade de tais S é sempre dois, caso contrário G não seria 3-conexo, ou seja, G/α é sempre 2-conexo.

Além disso, o vértice v_{xy} resultante da contração de α pertence a S , caso contrário S seria subconjunto de $V(G)$ e $G - S$ seria desconexo. Seja então z o vértice de S que não é v_{xy} .

Observe que cada componente C de $G' - S$ é um subgrafo de G . Vamos mostrar agora que C está ligada a todos os vértices em $\{x, y, z\}$ em G . Suponha que C não está ligada a $t \in \{x, y, z\}$, então a remoção de $\{x, y, z\} \setminus t$ desconecta C do resto do grafo G , o que contradiz sua 3-conexidade. Logo C está ligada a todos os vértices em $\{x, y, z\}$.

Considere $\alpha \in E(G)$ e S' conjunto separador em G/α tais que a cardinalidade do menor componente de $G/\alpha - S'$ é a menor possível e seja $G' = G/\alpha$.

Seja C o menor componente conexo de $G' - S'$. Seja também $v \in V(C)$ um vizinho de z em G' e $\beta = vz$.

Vamos mostrar que C possui ao menos dois vértices. Suponha que não (i.e. $V(C) = \{v\}$) e considere o grafo G/β . Como $K(G/\beta) = 2$, sabemos que G/β possui um conjunto separador S_β de cardinalidade dois que contém o vértice v_β proveniente da contração de β . Isso significa que o conjunto $(S_\beta \cup z) \setminus v_\beta$ é separador em G , contradizendo sua 3-conexidade. Logo C possui pelo menos dois vértices.

Observe agora que, como $K(G/\beta) = 2$, sabemos que há um $w \in V(G)$ tal que $S = \{v, z, w\}$ é separador em G . Observe que todo componente de G/β está conectado a v em G . Mas então qualquer componente de G/β que não contém x (e consequentemente não contém y) está propriamente contido em C , pois deve ser vizinho de v . Isso contradiz a escolha de α (Figura 3.7). \square

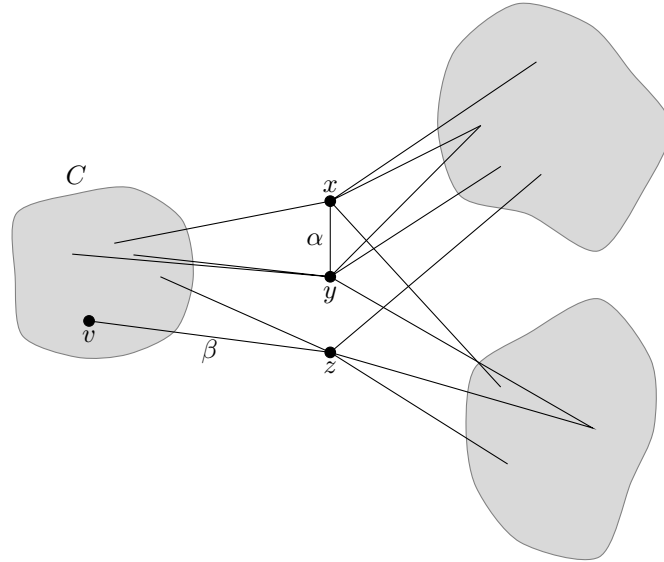


Figura 3.7: Exemplo de configuração dos componentes conexos de G na demonstração do Teorema 3.13.

Exercício 3.3. Estudar o que acontece com o teorema acima caso a hipótese $|V(G)| \geq 5$ seja removida. Em que momento(s) da demonstração essa hipótese foi usada?

Teorema 3.14 (Tutte, 1961). Um grafo é 3-conexo se e somente se existe uma sequência G_0, G_1, \dots, G_n de grafos com as propriedades

- (a) $G_0 \cong K_4$ e $G_n \cong G$;
- (b) G_{i+1} tem uma aresta xy tal que $d(x) \geq 3$, $d(y) \geq 3$ e $G_i \cong G_{i+1}/xy$, para $i < n$.

Demonstração. Se G é um grafo 3-conexo, o teorema 3.13 nos garante que podemos sucessivamente encontrar uma aresta que pode ser contraída mantendo a 3-conexidade até chegar em um grafo com menos que cinco vértices. Como o único grafo (a menos de isomorfismo) 3-conexo com menos que cinco vértices é K_4 , o resultado segue.

Suponha que temos uma sequência G_0, G_1, \dots, G_n satisfazendo as hipóteses mencionadas e vamos provar que para todo $i < n$, G_i é 3-conexo implica que G_{i+1} é 3-conexo.

Suponha que não e seja $i < n$ o menor possível tal que essa implicação é falsa. Sejam também $x, y \in V(G_{i+1})$ tais que $G_i \cong G_{i+1}/xy$. Então G_{i+1} possui um conjunto separador S com no máximo dois elementos.

Certamente $S \cap \{x, y\} \neq \emptyset$, caso contrário, S seria conjunto separador de G_i , contradizendo sua 3-conexidade. Por outro lado, se $S = \{x, y\}$, então o vértice v_{xy} resultante da contração de xy é vértice separador em G_i , o que também contradiria sua 3-conexidade.

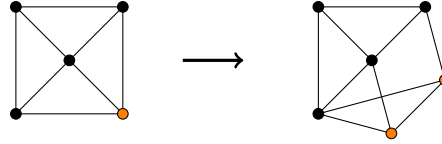


Figura 3.8: Exemplo de splitting.

Portanto, sem perda de generalidade, podemos assumir que $x \in S$ e $y \notin S$.

Seja C_y o componente conexo de y em $G_{i+1} - S$ e observe que, como $d(y) \geq 3$, há ao menos um vértice, digamos w , em $C_y - y$. Mas isso significa que o conjunto $S - x + v_{xy}$ separa w do resto do grafo G_i , contradizendo sua 3-conexidade. \square

Uma **roda (wheel)** é um supergrafo $G = (V, E)$ de C_n :

- $V = V(C_n) \cup \{v\}$, e
- $E = E(C_n) \cup \{uv : u \in V(C_n)\}$,

onde $v \notin V(C_n)$.

Seja G um grafo e $v \in V(G)$. Um **splitting** de v (em G) é um grafo H tal que:

1. $V(H) = \{v', v''\} \cup (V(G) \setminus \{v\})$,
2. $E(H) \supseteq \{v'v''\} \cup (E(G) \setminus \{e \in E(G) : e \text{ incide em } v\})$,
3. $d_H(v') \geq 3$,
4. $d_H(v'') \geq 3$, e
5. $N_G(v) = (N_H(v') \cup N_H(v'')) \setminus \{v', v''\}$.

Observação: Um modo de generalizar o *splitting* é notar que nessa operação estamos trocando um vértice por K_2 . Podemos trocar um vértice por K_n , sob a restrição de cada vértice novo apresentar grau mínimo maior do que certo valor e a vizinhança deve ser distribuída entre os novos vértices.

Teorema 3.15 (Tutte). (Wheel Theorem) Um grafo é 3-conexo se e somente se ele pode ser obtido a partir de uma roda repetidamente acrescentando-se arestas ligando vértices não-adjacentes e/ou aplicando a operação de splitting.

Demonstração. Suponha que G é um grafo 3-conexo que não pode ser obtido a partir do procedimento descrito no teorema com o menor número de arestas o possível.

Certamente G possui pelo menos cinco vértices, pois o único (a menos de isomorfismo) grafo 3-conexo com menos de cinco vértices é K_4 . Mas então o teorema 3.13 nos garante que existe uma aresta α em G tal que $G' = G/\alpha$ é 3-conexo.

Seja v_α o vértice de G' proveniente da contração de α e observe que G' possui menos arestas que G . Pela minimalidade de G , sabemos que G' pode ser obtido pelo procedimento descrito no teorema.

Porém G é splitting de v_α em G' , o que é uma contradição.

Para provar a recíproca, como a adição de arestas preserva a 3-conexidade de um grafo, basta provar que a operação de splitting também preserva a 3-conexidade de um grafo.

Então sejam G um grafo 3-conexo, v um vértice de G e H um splitting de v em G e suponha por absurdo que H não é 3-conexo.

Então existe um S conjunto separador de H de cardinalidade menor ou igual a dois.

Certamente $S \cap \{v', v''\} \neq \emptyset$, caso contrário, S também seria conjunto separador em G . Além disso, sabemos que $S \neq \{v', v''\}$, caso contrário, v seria vértice de corte em G . Finalmente, sabemos que S não possui apenas um vértice, caso contrário, esse vértice seria um dentre v' e v'' , o que significaria que v seria vértice de corte em G .

Sem perda de generalidade, suponha que $S = \{v', r\}$, com $r \neq v''$. Seja C o componente conexo de v'' em H . Observe que, como $\{v, r\}$ não é conjunto separador de G , temos que $H - (S \cup \{v''\})$ é conexo, o que significa que $V(C) = \{v''\}$, mas isso é um absurdo, pois v'' possui grau pelo menos 3 em H , ou seja, possui grau pelo menos 1 em C . \square

3.4 ALTA ARESTA-CONEXIDADE

Teorema 3.16 (Tutte). Se G é um multigrafo $2k$ -aresta-conexo, então G tem k árvores geradoras disjuntas nas arestas.

3.5 EXERCÍCIOS

Nos exercícios seguintes, suponha que os grafos considerados são simples.

Exercício 3.4. Prove que se G é um grafo 2-conexo com ao menos 4 vértices, então para toda aresta f de G temos que $G - f$ é 2-conexo ou G/f é 2-conexo.

Exercício 3.5. Prove que se G é um grafo 2-conexo tal que $\delta(G) \geq 3$, então G tem um vértice v tal que $G - v$ é 2-conexo.

Exercício 3.6. Seja G um grafo 2-conexo tal que $G - s - t$ é desconexo para quaisquer dois vértices não-adjacentes s, t . Prove que G é um circuito.

Exercício 3.7. Sejam $G = (V, E)$ um grafo e s, t dois vértices de G que distam d . Suponha que, para todo $S \subset V \setminus \{s, t\}$ tal que $|S| < k$, existe em $G - S$ um caminho entre s e t , de comprimento d . Mostre que em G existem k caminhos entre s e t , todos de comprimento d , que são vértice-disjuntos exceto pelos extremos.

Exercício 3.8.

- a) Estude o Teorema de Mader sobre H -caminhos (veja Seção 3.4 do livro do Diestel [Die05]).

Teorema 3.17 Dado um grafo $G = (V, E)$ e um subgrafo induzido H de G . O maior número de H -caminhos internamente vértice-disjuntos é o menor valor $M_G(H)$ de

$$|X| + \sum_{C \in \mathcal{C}_F} \left\lfloor \frac{1}{2} |\partial(C)| \right\rfloor,$$

onde $X \subseteq V \setminus V(H)$ e $F \subseteq E(G - V(H) - X)$ são tomados de forma que todo H -caminho contém pelo menos um vértice de X ou uma aresta de F e onde \mathcal{C}_F é o conjunto de componentes conexas do grafo $(V \setminus (V(H) \cup X), F)$ e $\partial(C)$ é o conjunto de vértices de C com vizinhos em $G - X - V(C)$.

- b) Prove o Teorema de Tutte (que caracteriza grafos com emparelhamentos perfeitos) usando o Teorema de Mader. *Sugestão:* Veja o Exercício 19 do Capítulo 3 do livro do Diestel [Die05].

Exercício 3.9. Exiba um grafo tal que quaisquer 3 de seus vértices pertencem a um mesmo circuito, e que tenha 4 vértices que não pertencem a um mesmo circuito.

NOTAS DO CAPÍTULO 3

3.6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Die05] Reinhard Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.

4 PLANARIDADE

Um grafo $G = (V, E)$ é dito **planar** se pode ser desenhado no plano de forma que suas arestas se interceptam apenas nos extremos. Um tal desenho no plano é chamado uma **imersão plana** ou **representação plana** ou um **mapa** de G . Dizemos também que G é **imersível no plano** (**embeddable** in the plane). Um **grafo plano** é um grafo planar que está imerso no plano.

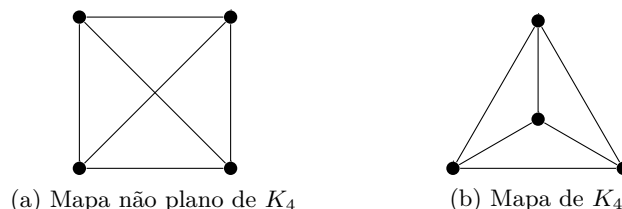


Figura 4.1: Exemplos de representações de K_4 no plano.

Seja G um grafo plano. Ao remover do plano as curvas e os pontos de seu mapa que representam as arestas e os vértices G , as regiões conexas obtidas são ditas **faces**. Observe que exatamente uma face é ilimitada. Esta face é chamada de **face externa** (ou infinita).

O conjunto das arestas no fecho de uma face F de um grafo G é dito a **fronteira** de F . Um circuito de um grafo plano é chamado **circuito facial** se é uma fronteira de uma face. Dizemos que duas imersões planas são **equivalentes** se a fronteira de uma face em uma imersão sempre corresponde à fronteira de uma face em outra imersão.

Exemplo 4.1 O grafo da Figura 4.2 possui duas representações que não são equivalentes.

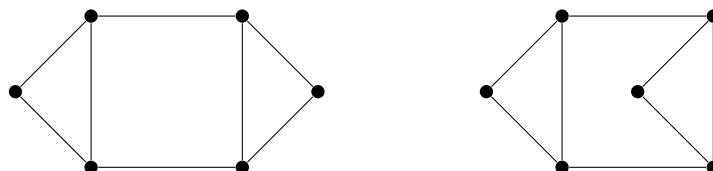


Figura 4.2: Apenas um dos mapas acima possui um circuito facial com 6 arestas.

Se todas as imersões planas de G são equivalentes, dizemos que G tem uma **única** imersão plana.

Exemplo 4.2 O grafo completo em 4 vértices tem uma única imersão plana (Figura 4.3).

O seguinte resultado será usado na prova do teorema de Kuratowski 4.14. Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [NC88].

Teorema 4.3 (Nishizeki & Chiba, 1988 [NC88]). Se G é um grafo planar 2-conexo e G não é um circuito, então G tem uma única imersão plana se e somente se G é uma subdivisão de um grafo 3-conexo ou de um $K_4 - e$.

Demonstração. Primeiramente vamos provar que se G é um grafo 2-conexo planar que não é nem um circuito, nem uma subdivisão de um grafo 3-conexo,

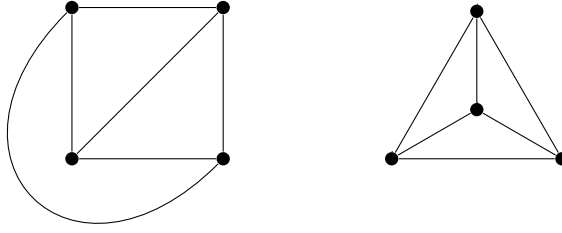


Figura 4.3: Dois mapas equivalentes de K_4

nem de um $K_4 - e$, então G possui duas imersões no plano não-equivalentes. Para isso, faremos o uso de multigrafos.

Seja θ o multigrafo no conjunto de vértices $\{x, y\}$ e com três arestas paralelas ligando x a y . Observe que $K_4 - e$ é uma subdivisão de θ . Aqui dizemos que um multigrafo G é **bom** se G é 2-conexo, não é um circuito, não é uma subdivisão de um grafo 3-conexo e não é uma subdivisão de θ . Note que se G é um grafo (sem arestas paralelas) bom, então G não é uma subdivisão de $K_4 - e$.

Suponha que a proposição não é verdadeira. Seja G um contraexemplo mínimo para a proposição. Isto é, o multigrafo G é bom, possui apenas uma imersão planar e contém o menor número possível de vértices.

Observe que se G possui um laço então G tem um vértice de corte ou é um circuito. Afirmamos também que G não contém vértices de grau 2. Caso contrário, seja x um vértice de grau 2 e seja y um vizinho de x em G . Considere o multigrafo G' obtido de G pela contração da aresta xy (aqui permitimos arestas paralelas). Observe que G' possui k imersões planas não-equivalentes se e somente se G possui k imersões planas não-equivalentes. Logo temos que G' é um contraexemplo para a proposição com menos vértices que G .

Se G possui apenas dois vértices, então G possui pelo menos 4 arestas (paralelas). Caso contrário, temos que G é um circuito ou G é isomorfo a θ . Claramente G possui pelo menos duas imersões planas não-equivalentes. Analogamente, se G possui três vértices, então G possui pelo menos cinco arestas e, portanto, possui pelo menos duas imersões planas não-equivalentes.

Suponha que G possui pelo menos quatro vértices. Como G não é 3-conexo, então G possui um conjunto de corte S de tamanho 2, digamos $S = \{x, y\}$. Seja H um componente de G , e sejam $H_1 = G[V(H) \cup S]$ e $H_2 = G - V(H)$.

Considere uma imersão plana I de G . Considere as imersões planas I_1 e I_2 de H_1 e H_2 , respectivamente, induzidas por I . Seja f_1 a fronteira da face externa de H_1 em I_1 , e f_2 a fronteira da face externa de H_2 em I_2 . Note que $x, y \in V(f_1)$ e $x, y \in V(f_2)$. Podemos escrever $f_1 = P_1 \cup Q_1$ e $f_2 = P_2 \cup Q_2$, onde P_1, Q_1, P_2, Q_2 são caminhos com extremos em x e y .

Podemos supor, sem perda de generalidade, que a fronteira da face externa de G em I é $P_1 \cup P_2$. Além disso, sabemos que P_2 está no interior do circuito $P_1 \cup Q_2$ e Q_1 está no exterior do circuito $P_1 \cup Q_2$. Assim, temos que $P_1 \cup Q_2$ não é face em I . Podemos refletir a imersão de H_2 de forma a obter uma imersão plana de G com $P_1 \cup Q_2$ como face externa. Isso garante que a imersão plana obtida é diferente de I . Logo G possui duas imersões planas não-equivalentes.

Seja G um grafo planar 2-conexo diferente de um circuito. Precisamos mostrar que se G é uma subdivisão de um grafo 3-conexo, ou uma subdivisão de $K_4 - e$, então G admite uma única imersão planar. Essa afirmação é óbvia no caso em que G é uma subdivisão de $K_4 - e$.

Suponha que G é um grafo 3-conexo. Note que qualquer subdivisão de G tem o mesmo número de imersões planas não-equivalentes que G . Suponha que G é um grafo planar que admite pelo menos duas imersões planas I_1, I_2 . Existe circuito C em G que é uma face em I_1 , mas não é face em I_2 . Seja G' o subgrafo de G induzido pelas arestas imersas no interior de C em I_2 .

Se G' não contém vértices diferentes dos vértices de C , então G' é um conjunto de “pontes” de C e, portanto, contém pelo menos uma aresta, digamos xy , com $x, y \in V(C)$. Tome P_1, P_2 os dois caminhos em C com extremos em x e y . Sejam v_1, v_2 dois vértices diferentes de x e y em P_1 e P_2 , respectivamente. Afirmamos que $G - x - y$ é desconexo. Caso contrário, existe caminho Q conectando v_1 e v_2 usando arestas que estão fora de C em I_2 . Como C é uma face, digamos interna, em I_1 , o caminho Q deve cruzar e e, portanto, temos que I_1 não é uma imersão no plano.

Suponha então que G' contém um vértice $v_1 \notin V(C)$. Podemos supor que $G - V(G') - V(C)$ contém pelo menos um vértice v_2 , caso contrário cairíamos no caso anterior. Como G é 3-conexo, existem pelo menos 3 caminhos disjuntos nos vértices conectando v_1 a v_2 , digamos Q_1, Q_2, Q_3 . Sejam x_1, x_2, x_3 os vértices de Q_1, Q_2, Q_3 em $V(C)$, respectivamente, mais próximos de v_1 . Para cada $i = 1, 2, 3$ seja A_i a seção de Q_i entre v_1 e x_i , e B_i a seção de Q_i entre x_i e v_2 . Considere a imersão I'_1 de $H = C \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$ induzida por I_1 . Seja $R = \{v_1, x_1, x_2, x_3\}$. Observe que H é uma subdivisão de K_4 , e seus vértices de grau 3 são precisamente os vértices de R . Cada um dos vértices em R , portanto, está contido em 3 faces de I'_1 , e cada uma das faces de I'_1 não contém exatamente um dos vértices de R . Seja F a face de I'_1 que contém o vértice v_2 em seu interior. Como C é uma face em I_1 , não há vértices no interior de C em I_1 e, portanto, não há vértices no interior de C em I'_1 . Assim, a face que contém v_2 não é C e, portanto, temos $v_1 \in V(F)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $A_1, A_2 \subset F$ e, portanto, temos que F não contém x_3 . Como B_3 liga v_2 a x_3 , temos que B_3 deve conter algum vértice de F . Como Q_1, Q_2 e Q_3 são disjuntos nos vértices, temos que se B_3 contém algum vértice z em F , então z está em C , mas então B_3 deve passar pelo interior de C . Logo, temos que I_1 não é uma imersão no plano.

Portanto todo grafo 3-conexo planar possui uma única representação no plano. \square

Corolário 4.4 Se G é um grafo planar 3-conexo, então G tem uma única imersão plana.

Teorema 4.5 (Euler, 1750 – Fórmula de Euler). Seja G um grafo plano conexo, e sejam n o número de vértices de G , m o número de arestas de G , e f o número de faces de G . Temos que $n - m + f = 2$.

Demonstração. Fixe n arbitrário e vamos provar o teorema por indução em m .

O menor valor possível para m é $n - 1$. Nesse caso, o grafo G é uma árvore, então $m = n - 1$ e $f = 1$ (a face externa), logo $n - m + f = 2$.

Suponha então que G possui $m > n - 1$ arestas e que a asserção é válida para $m - 1$.

Seja e uma aresta de G que não é ponte e observe que em uma imersão plana I de G , a aresta e está na fronteira de duas faces distintas.

Considere $G' = G - e$ e a imersão plana I' de G' induzida por I e observe que I' possui uma face a menos que I .

Logo, pela hipótese de indução para G' , temos

$$n - m + f = |V(G)| - |E(G)| + |F(I)| = |V(G')| - (|E(G')| + 1) + |F(I') + 1| = 2.$$

□

Corolário 4.6 Seja G é um grafo planar *simples* com n vértices e m arestas, tal que $n \geq 3$. Temos que $m \leq 3n - 6$.

Corolário 4.7 Todo grafo planar simples tem um vértice de grau no máximo 5.

Exercício 4.1. Seja ℓ a cintura de um grafo planar, e sejam n e m seus números de vértices e arestas, respectivamente. Mostre que

$$m \leq \frac{\ell}{\ell - 2}(n - 2).$$

Em particular, mostre que $m \leq 2n - 4$ quando tal grafo é bipartido.

Corolário 4.8 Os grafos completos K_5 e $K_{3,3}$ não são planares.

Exercício 4.2. Seja G um grafo planar de n vértices e cintura ℓ . Mostre que existe um vértice $v \in V(G)$ com grau

$$d(v) \leq \left\lfloor 2 \frac{\ell(n - 2)}{n(\ell - 2)} \right\rfloor.$$

Exercício 4.3. Verifique que todo subgrafo próprio de K_5 e de $K_{3,3}$ é planar.

4.1 MENORES

Sejam X e G dois grafos. Se o conjunto $\{V_x : x \in V(X)\}$ é uma partição de $V(G)$ tal que $G[V_x]$ é conexo para todo $x \in V(X)$, e se para quaisquer dois vértices x, y em X , existe uma aresta de V_x para V_y em G se e somente se $xy \in E(X)$, então dizemos que G é um MX . Denotamos por MX a classe dos grafos com essa propriedade. Por abuso de notação, podemos dizer $G = MX$, quando $G \in MX$. Os conjuntos V_x ($x \in V(X)$) são chamados **branch sets** dessa MX . Intuitivamente, X pode ser obtido de G pela contração de cada branch set. A proposição a seguir mostra que, neste caso X também pode ser obtido por uma sequência de contrações de arestas.

Proposição 4.9 O grafo G é um MX se e somente se X pode ser obtido de G por uma sequência de contrações de arestas, isto é, se e somente se existem grafos G_0, \dots, G_p e arestas $e_i \in E(G_i)$ tais que $G_0 = G$, $G_p \cong X$ e $G_{i+1} = G_i / e_i$ para todo $i < p$.

Demonstração. Por indução em $|V(G)| - |V(X)|$. □

Se $G = MX$ é um subgrafo de um grafo Y , dizemos que X é um **menor** de Y e denotamos por $X \preceq Y$. Pela proposição 4.9, todo menor de um grafo G pode ser obtido de G pela remoção de vértices e arestas seguida da contração de arestas. Reciprocamente, todo grafo obtido de um grafo G através de remoções e contrações de arestas (em qualquer ordem) é um menor de G .

4.2 MENORES TOPOLÓGICOS

Se G pode ser obtido do grafo X a partir de uma série (possivelmente vazia) de subdivisões de arestas, dizemos que G é uma **subdivisão** de X . Denotamos por TX a classe dos grafos isomorfos a subdivisões de X . Por abuso de notação, podemos dizer $G = TX$, quando $G \in TX$. Se $G = TX$ é um subgrafo de um outro grafo Y , então dizemos que X é um **menor topológico** de Y e denotamos por $X \preceq_t Y$.

Dados os grafos X , G e H , dizemos que G é **homeomorfo a** H se existe um grafo X tal que G e H são ambos TX .

Proposição 4.10 A relação “homeomorfo a” é uma relação de equivalência sobre a classe dos grafos.

Assim, a classe de todos os grafos pode ser particionada de modo que dois grafos G e H pertençam à mesma parte quando são homeomorfos.

Exercício 4.4.

- (i) Todo TX é um MX . Logo, todo menor topológico de um grafo G é um menor de G .
- (ii) Se $\Delta(X) \leq 3$ então todo MX contém um TX . Logo, todo menor de grau máximo não maior que 3 de um grafo G é também um menor topológico de G .

Exercício 4.5. A relação *menor* \preceq (X é um menor de Y) e a relação *menor topológico* \preceq_t (X é um menor topológico de Y) são relações de *ordem parciais* sobre a classe dos grafos finitos (isto é, são reflexivas, anti-simétricas e transitivas).

Exercício 4.6. Prove que a relação de menor topológico não é anti-simétrica se considerarmos grafos infinitos.

Proposição 4.11 Um grafo contém K_5 ou $K_{3,3}$ como *menor se e somente se* contém K_5 ou $K_{3,3}$ como *menor topológico*

Observação 4.12 Não é verdade que não ter K_5 como menor é equivalente a não ter K_5 como menor topológico.

Demonstração. Se G contém K_5 ou $K_{3,3}$ como menor topológico, então o Item i do Exercício 4.4 garante que G contém K_5 ou $K_{3,3}$ como menor.

O Item ii do Exercício 4.4 garante que se G contém $K_{3,3}$ como menor então G contém $K_{3,3}$ como menor topológico. Assim, nos resta provar que se G contém K_5 como menor, então G contém K_5 ou $K_{3,3}$ como menor topológico.

Suponha que $G \succeq K_5$. Seja $H \subseteq G$ um subgrafo *minimal* de G tal que $H \succeq K_5$. Neste caso, todo branch set de H induz uma árvore em H , e entre quaisquer dois branch sets há exatamente uma aresta.

Seja V_x o branch set correspondente a $x \in K_5$. Seja T_x a árvore obtida tomando-se a subárvore de H induzida por V_x acrescida de 4 arestas, correspondentes às 4 arestas que ligam V_x a cada um dos outros branch sets.

Se $T_x \succeq_t K_{1,4}$ para todo branch set V_x , então segue que $H \succeq_t K_5$. Se algum T_x não contém $K_{1,4}$ como menor topológico, então tem exatamente 2 vértices de grau 3 em V_x . Contraindo V_x a esses 2 vértices, e todo outro branch set a um único vértice, obtemos um grafo com 6 vértices que contém o $K_{3,3}$ (Figura 4.4). Logo, $G \succeq K_{3,3}$, e portanto $G \succeq_t K_{3,3}$.

□

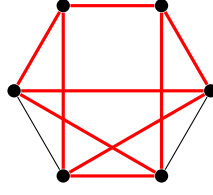


Figura 4.4: Grafo G após contraído de acordo com a demonstração.

O Teorema 3.13 e o Lema 4.13 serão usados na demonstração do teorema de Kuratowski.

Lema 4.13 Seja G um grafo e e uma aresta qualquer de G . Se G/e contém uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$, então G também contém uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$.

Demonstração. Seja $e = xy$ e z o vértice obtido pela identificação de x e y . Seja H uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$ contida em G/e . Se $z \neq V(H)$, então H é uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$ contida em G . Suponha então que $z \in V(H)$.

Seja H' um subgrafo de G tal que $H'/e = H$. Se z tem grau 2 em H , então claramente H' contém uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$. Podemos então assumir que o grau de z em H é pelo menos 3. Se x ou y tem grau 2 em H' , então H' tem uma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$. Se isso não ocorre, então H é uma subdivisão de K_5 e ambos x e y devem ter grau 3 em H' . Neste caso, H' tem uma subdivisão de $K_{3,3}$. \square

Exercício 4.7. Se G é um grafo 3-conexo com pelo menos 5 vértices, então G contém uma aresta e tal que $G - e$ é uma subdivisão de um grafo 3-conexo. (Veja pp 231 em [Tho81]).

4.3 CARACTERIZAÇÕES DE GRAFOS PLANARES

Dado um grafo planar G é imediato que todo subgrafo de G é também planar. Isto é, um grafo que é obtido de um grafo planar através da operação de remoção de um vértice ou aresta é também planar. Por outro lado, se H' é uma subdivisão de um grafo não-planar, então H' também não é planar. Portanto, nenhum grafo planar pode conter uma subdivisão de um grafo não-planar. Assim, uma condição *necessária* para que um grafo G seja planar é que G não contenha uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$. Kazimierz Kuratowski (1930) provou que esta condição é também *suficiente* para G ser planar.

Teorema 4.14 (Kuratowski, 1930). Um grafo G é planar se e somente se G não contém uma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$.

Este resultado foi descoberto independentemente por Frink & Smith e Pontrjagin, e a versão do teorema restrita a grafos cúbicos foi descoberta independentemente por Menger (em 1930) (Veja [Tho81]).

O teorema de Kuratowski apresenta uma caracterização de grafos planares em termos de um número essencialmente finito de subgrafos proibidos. Assim, ocupa uma posição de destaque entre os critérios de planaridade conhecidos, não apenas pela sua beleza e simplicidade, mas também porque implica facilmente o critério de planaridade de MacLane (1937) e o de Whitney (1932), além de outros. Diferentemente de outros critérios de planaridade, fornece uma

caracterização útil de grafos não planares, pois aparentemente quase todas as provas conhecidas do teorema podem ser transformadas em algoritmos polinomiais para testar planaridade de grafos. Hopcroft & Tarjan [HT74] desenvolveram um algoritmo linear para testar planaridade.

Um grafo conexo sem vértices-de-corte é chamado **bloco**. Um **bloco de um grafo** é um subgrafo que é um bloco e é maximal com relação a essa propriedade.

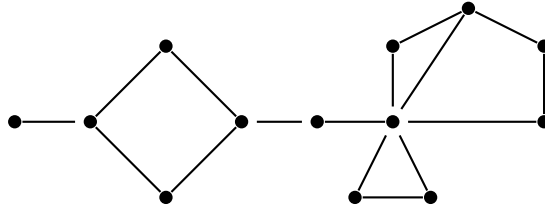


Figura 4.5: Grafo com 6 blocos: três K_2 , circuitos C_3 e C_4 e um bloco com 5 vértices. Blocos são grafos conexos sem vértices de corte.

Demonstração do Teorema de Kuratowski, veja [NC88]. Provaremos por indução em $n = |V(G)|$ que se G não contém uma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$ então G é planar. Como $K_5 - e$ é planar para qualquer aresta e em K_5 , a afirmação é verdadeira se $n \leq 5$. Suponha então que G tem $n \geq 6$ vértices e que a afirmação é verdadeira para grafos com menos de n vértices. Dividimos a prova em dois casos dependendo se G é ou não 3-conexo.

Suponha que G não é 3-conexo. É imediato que um grafo é planar se e somente se cada um de seus blocos (subgrafos 2-conexos maximais) é planar; Podemos então assumir que G seja 2-conexo. Neste caso, G tem um par-separador $\{x, y\}$.

Seja H_1 uma componente de $G - \{x, y\}$ e $H_2 = G - \{x, y\} - V(H_1)$. Tome $G_1 = G - V(H_1)$ e $G_2 = G - V(H_2)$. Claramente G_1 e G_2 têm menos vértices do que G , e também não contém subdivisões de K_5 e nem de $K_{3,3}$. Logo, pela hipótese de indução, G_1 e G_2 são planares. Além disso, ambos têm uma imersão plana na qual a aresta xy pertence à fronteira da face externa. Estas duas imersões planas podem ser acopladas em x e y de modo a produzir uma imersão plana de G . Portanto, G é planar.

Suponha então que G é 3-conexo. Pelo teorema 3.13 concluímos que G tem uma aresta $e = xy$ tal que G/e é 3-conexo. Seja z o vértice obtido indentificando-se os vértices x e y . Pelo lema 4.13, G/e não contém uma subdivisão de K_5 e nem de $K_{3,3}$ e, portanto, pela hipótese de indução, G/e é planar. Considere um mapa de G/e e o subgrafo $G' = G/e - z$. Como G/e é 3-conexo, o corolário 4.4 garante que sua imersão plana é única.

Seja F a face do grafo plano G' tal que em G/e contém o vértice z em seu interior, e seja C o circuito facial que é a fronteira da face F . É imediato que todos os vizinhos de x ou y , exceto eles próprios, devem pertencer a C . Sejam x_1, x_2, \dots, x_k os vizinhos de x que ocorrem em C em ordem cíclica, e seja P_i o caminho em C de x_i a x_{i+1} (onde $x_{k+1} = x_1$) que não contém nenhum x_j , com $j \neq \{i, i+1\}$. Se um destes caminhos contém todos os vizinhos de y diferentes de x , então uma imersão plana de G pode ser obtida a partir da imersão de G/e , donde segue que G é planar (Figura 4.6a).

Analisemos então o caso em que nem todos os vizinhos de y , exceto x , estão contidos em um único dos caminhos P_i . Como y tem 3 ou mais vizinhos incluindo x , há 3 possibilidades:

- (a) y tem 3 ou mais vizinhos em $\{x_1, \dots, x_k\}$ (Figura 4.6b);
- (b) y tem um vizinho u em $P_i - \{x_i, x_{i+1}\}$ para algum i e um vizinho v não pertencente a P_i (Figura 4.6c);
- (c) y tem 2 vizinhos x_i e x_j tais que $|i - j| \neq 1$ (Figura 4.6d).

No caso (a) o subgrafo de G induzido pelos vértices de C juntamente com x e y contém uma subdivisão de K_5 . Nos casos (b) e (c), o subgrafo de G induzido pelos vértices de C juntamente com x e y contém uma subdivisão de $K_{3,3}$ (Veja figura 4.6). \square

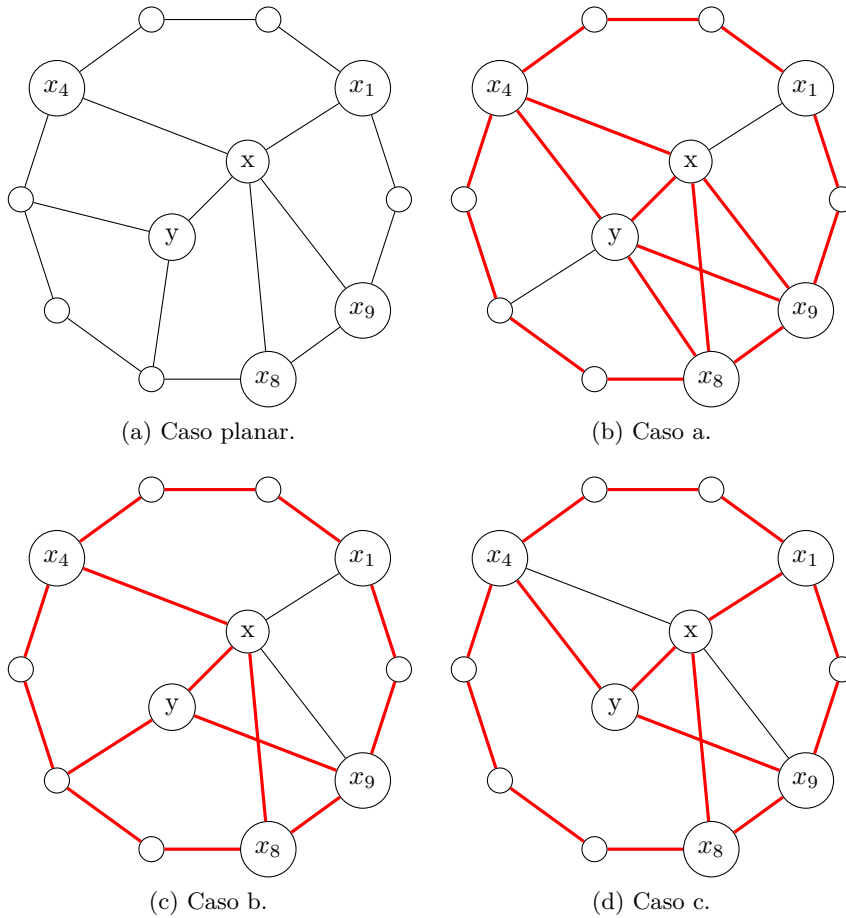


Figura 4.6: Diferentes casos da demonstração do Teorema de Kuratowski.

O teorema de Wagner segue como corolário do teorema de Kuratowski.

Teorema 4.15 (Wagner, 1937). Um grafo G é planar se e somente se G não contém K_5 nem $K_{3,3}$ como menores.

Demonstração. Basta usar o teorema de Kuratowski e a proposição 4.11. \square

Caracterização de MacLane

Dado um grafo $G = (V, E)$, um **ciclo** de G é um subgrafo de G cujos vértices possuem todos grau par. Seja \mathcal{E}_G o conjunto dos subconjuntos de E . O

par (\mathcal{E}_G, Δ) é um espaço vetorial sobre $GF_2 = \{0, 1\}$, onde a operação Δ é a *diferença simétrica*, definida por

$$F_1 \Delta F_2 = (F_1 \setminus F_2) \cup (F_2 \setminus F_1).$$

Assim, podemos ver um subconjunto de arestas F de E como seu vetor característico $\chi^F \in \{0, 1\}^m$, onde $\chi_i^F = 1$ se e somente se $e_i \in F$.

O subespaço (\mathcal{C}_G, Δ) de (\mathcal{E}_G, Δ) gerado pelos *circuitos* de G é dito o **espaço dos ciclos** de G . Afirmamos que se G é conexo, então a dimensão de \mathcal{C}_G é $\dim(\mathcal{C}_G) = m - n + 1$. Para observar isso, fixe uma árvore geradora T de G . Para cada $e \in E \setminus E(T)$ seja C_e o circuito fundamental de e com respeito a T . O conjunto $\mathcal{B} = \{C_e \mid e \in E \setminus E(T)\}$ dos circuitos fundamentais com respeito a T é independente, isto é, se C é o circuito fundamental de e com respeito a T , então C é o único destes circuitos fundamentais que contém e e, portanto, não pode ser gerado pelos demais circuitos em \mathcal{B} . Vamos provar que \mathcal{B} é uma base de \mathcal{C}_G .

Lema 4.16 Se T é uma árvore geradora de G e C_e é o circuito fundamental de e com respeito a T , para cada $e \notin E(G) \setminus E(T)$, então $\mathcal{B} = \{C_e : e \in E \setminus E(T)\}$ é uma base de \mathcal{C}_G .

Demonstração. Já vimos que os elementos de \mathcal{B} são linearmente independentes. Vamos provar que os elementos de \mathcal{B} podem gerar qualquer ciclo H . Suponha que $E(H) = \{e_1, \dots, e_j, e_{j+1}, \dots, e_k\}$ e suponha que $e_1, \dots, e_j \in E(T)$, $e_{j+1}, \dots, e_k \notin E(T)$.

Seja $F = C_{e_{j+1}} \Delta C_{e_{j+1}} \Delta \dots \Delta C_{e_k}$. O subgrafo $F \subseteq G$ é um ciclo e $H \Delta F$ é um ciclo tal que $E(H \Delta F) \subseteq E(T)$. Mas T é uma árvore. Logo, temos que $H \Delta F = \emptyset$. Isto é, $H = F$. Portanto, H pode ser gerado por \mathcal{B} . \square

Uma base \mathcal{B} de \mathcal{C}_G é dita uma **2-base** de G se cada aresta de G pertence a no máximo 2 elementos de \mathcal{B} . Se G é planar, então G tem uma 2-base. Basta considerar uma imersão plana de G e tomar os circuitos faciais dessa imersão, excluindo a face externa. Note que, pela fórmula de Euler, há precisamente $m - n + 1$ tais circuitos.

Iremos mostrar que se G não é planar, então G não tem uma 2-base. O teorema de Kuratowski 4.14 garante que se G não é planar, então G contém uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$. O seguinte lema nos reduz a prova para o caso onde G é uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$.

Lema 4.17 Seja G um grafo e seja f uma aresta de G . Se G tem uma 2-base, então $G - f$ tem uma 2-base.

Demonstração. Seja \mathcal{B} uma 2-base de G .

Se f for uma ponte de G , então trivialmente \mathcal{B} é uma 2-base de $G - f$.

Caso contrário f está contida em um ou dois circuitos de \mathcal{B} . Se f está contida em apenas um circuito C_f de \mathcal{B} , então $\mathcal{B} \setminus \{C_f\}$ é uma 2-base de $G - f$.

Caso contrário, seja $\mathcal{B} = \{C_1, \dots, C_k\}$ e suponha que $f \in C_1, f \in C_2$. Seja $C' = C_1 \Delta C_2$ e tome $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \{C_1, C_2\} \cup \{C'\}$ e observe que esse conjunto é linearmente independente. Também sabemos que $|\mathcal{B}'| = |\mathcal{B}| - 1$ e, portanto, \mathcal{B}' é uma base de $G - f$. \square

Exercício 4.8. Em que momento na demonstração acima foi usado a hipótese de que G é um grafo 2-aresta-conexo?

Lema 4.18 K_5 não tem uma 2-base.

Demonstração. Suponha que K_5 tenha uma 2-base \mathcal{B} . Então $|\mathcal{B}| = 10 - 5 + 1 = 6$. Suponha que $\mathcal{B} = \{C_1, C_2, \dots, C_6\}$. Temos para todo $i = 1, \dots, 6$ que $|C_i| \geq 3$. Logo, $\sum_{i=1}^6 |C_i| \geq 18$. Como \mathcal{B} é uma 2-base, então pelo menos 8 arestas pertencem a 2 circuitos. Seja $C = C_1 \Delta C_2 \cdots \Delta C_6$. Então C tem no máximo 2 arestas, uma contradição. \square

Corolário 4.19 Se G é uma subdivisão de K_5 então G não tem uma 2-base.

Exercício 4.9. Prove que se G é uma subdivisão de $K_{3,3}$ então G não tem uma 2-base.

Corolário 4.20 (Teorema de MacLane, 1937). Um grafo é planar se e somente tem uma 2-base.

Demonstração. Já vimos que se G é planar, então G tem uma 2-base, então basta provar a recíproca.

Seja então G um grafo que possui uma 2-base e vamos provar que G é planar. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que G é 2-conexo. O lema 4.17 nos diz então que todo subgrafo 2-aresta-conexo de G possui uma 2-base. Portanto, como todo $TK_{3,3}$ e todo TK_5 é 2-aresta-conexo, então G não possui $K_{3,3}$ nem K_5 como menores. Portanto pelo Teorema de Kuratowski 4.14, G é planar. \square

Caracterização de Whitney

Seja G um grafo conexo. O subespaço (\mathcal{D}_G, Δ) de (\mathcal{E}_G, Δ) gerado pelos cortes (também chamados de *cociclos*). de G é o **espaço dos cociclos** de G . Observe que qualquer corte $\delta(U)$ onde $U \subseteq V(G)$ pode ser escrito como a diferença simétrica dos cortes dos vértices, isto é: se $U = \{v_1, \dots, v_k\}$, então $\delta(U) = \delta(v_1) \Delta \cdots \Delta \delta(v_k)$

O conjunto dos cortes dos vértices não é linearmente independente pois $\delta(v_1) = \delta(v_2) \Delta \cdots \Delta \delta(v_n)$, mas o conjunto $\{\delta(v) \mid v \in V - u\}$ para cada $u \in V$ é uma base de \mathcal{D}_G . Logo, $\dim(\mathcal{D}_G) = n - 1$ e, portanto, temos que $\dim(\mathcal{D}_G) + \dim(\mathcal{C}_G) = m$, que é a dimensão do espaço de arestas de G . Provamos abaixo que \mathcal{D}_G é ortogonal a \mathcal{C}_G .

Proposição 4.21 Os subespaços \mathcal{C}_G e \mathcal{D}_G são ortogonais.

Demonstração. Basta usarmos o produto interno. Se F é um corte e H é um ciclo, então

$$\langle F, H \rangle = \sum_{i=1}^m (X_i^F \cdot X_i^H) = |F \cap H| = 0$$

Uma vez que a interseção de um corte com um ciclo é sempre um número par de arestas, resta observar que o produto interno é exatamente esta interseção. Isto é, $X_i^F \cdot X_i^H = 1$ se e somente se a aresta i está tanto em F quanto em H . \square

Note que, como $\dim \mathcal{C}_G + \dim \mathcal{D}_G = \dim \mathcal{E}_G$, temos que:

$$\mathcal{C}_G = (\mathcal{D}_G)^\perp \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_G = (\mathcal{C}_G)^\perp.$$

Dado um grafo plano G com conjunto de faces $F \subseteq \mathcal{E}_G$, o **dual geométrico** de G , denotado por G^* , é o multigrafo que tem F como conjunto de

(b) Arestas paralelas e laços

Proposição 4.22 Se G é um grafo plano e G^* é o seu dual geométrico, então C é um ciclo (respectivamente cociclo) de G se e somente se $\pi_G(C)$ é um cociclo (respectivamente ciclo) de G^* .

Lema 4.23 Se G tem um dual combinatório G^c , então todo bloco de G possui um dual combinatório.

Seja B um bloco de G e $H = G^c[f(E(B))]$. É imediato que $f|_{E(B)}$ leva ciclos de B em cociclos de H .

Suponha que não e seja D' um cociclo de G^e que contém D mas não está contido em $E(H)$. Certamente $C = G[f^{-1}(D)]$ não é um ciclo de G , então C possui pelo menos um vértice de grau ímpar. Podemos então adicionar sucessivamente arestas de $f^{-1}(D')$ a vértices de grau ímpar até que a quantidade dos mesmos diminua.

Versão: 2 de junho de 2015, às 10 37

Whitney provou que vale a recíproca, isto é, se G tem um dual combinatório, então G é planar.

Teorema 4.24 (Whitney). Um grafo é planar se e somente se tem dual combinatório.

Demonstração. Seja G um tal grafo. Suponha sem perda de generalidade que G é 2-conexo. Logo, quaisquer duas arestas e, e' de G pertencem a um mesmo circuito. Note que um circuito C é um ciclo minimal e, portanto, $f(C)$ é um cociclo minimal.

Afirmamos que G^c é 2-conexo. Suponha que não seja 2-conexo. Logo, G^c tem vértice de corte v e então existem G_1^c e G_2^c tais que $E(G^c) = E(G_1^c) \cup E(G_2^c)$. Tome e e e' em G_1^c e G_2^c , respectivamente. Como G é 2-conexo, temos que $f^{-1}(e)$ e $f^{-1}(e')$ estão em um mesmo circuito C de G . Porém, isso é uma contradição, já que $f(C)$ deveria ser um cociclo minimal, mas $f(C) \cap E(G_1^c)$ é um cociclo menor. Portanto, G^c é 2-conexo.

Logo, para todo $v \in V(G^c)$, temos que $\delta(v)$ é um corte *minimal* em G^c .

Seja $u \in V(G^c)$. Neste caso, $\mathcal{B} = \{\delta(v) : v \in V(G^c) \setminus \{u\}\}$ é uma base do espaço dos cociclos de G^c . Cada $\delta(v)$ corresponde a um circuito em G . O conjunto de tais circuitos define uma 2-base de G . Pelo teorema de MacLane, G é planar. \square

4.4 EXERCÍCIOS

Exercício 4.10. Considere o grafo G obtido pela adição de uma aresta qualquer a um grafo planar maximal de ordem pelo menos 6. Mostre que G contém um TK_5 e um $TK_{3,3}$. Ou seja, G sempre contém uma subdivisão de K_5 e de $K_{3,3}$.

Exercício 4.11. Para quais $n \geq 3$ a roda (*wheel*) W_n é exoplanar? Justifique.

Exercício 4.12. Um grafo é **exoplanar** (**outerplanar**) se tem uma representação plana na qual todo vértice fica na fronteira da face externa. Mostre que um grafo é exoplanar se e só se não contém nem o K_4 e nem o $K_{2,3}$ como menores.

Exercício 4.13. Faça ao menos duas provas distintas para a seguinte afirmação.

Considere uma triangulação plana G e uma coloração arbitrária de seus vértices em 3 cores. (Nessa coloração vértices adjacentes podem ter cores iguais.) Dizemos que uma face é tricolorida se os vértices de sua fronteira estão coloridos com 3 cores distintas. Prove que G tem um número par de faces tricoloridas.

Exercício 4.14. Leia o artigo [Mak97]. Rescreva-o à sua maneira, preferencialmente em inglês. Não é para copiar ou fazer uma tradução ao pé da letra. Comente o artigo.

Exercício 4.15. Estudar e entender a prova em [Tho81].

4.5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [HT74] John Hopcroft and Robert Tarjan. Efficient planarity testing. *Journal of the ACM (JACM)*, 21(4):549–568, 1974.
- [Mac37] Saunders MacLane. A combinatorial condition for planar graphs. *Fund. Math.*, 28:22–32, 1937.

- [Mak97] Yury Makarychev. A short proof of kuratowski's graph planarity criterion. *J. Graph Theory*, 25:129–131, 1997.
- [NC88] Takao Nishizeki and Norishige Chiba. *Planar graphs: Theory and algorithms*, volume 140. North Holland, 1988.
- [Tho81] Carsten Thomassen. Kuratowski's theorem. *Journal of Graph Theory*, 5:225–241, 1981.

5 COLORAÇÃO

5.1 COLORAÇÃO DE VÉRTICES

Resumo

Demonstramos resultados sobre de coloração de vértices (teoremas 5.4 e 5.6), grafos perfeitos (5.18 e 5.22) e lista-colorações (5.9 e 5.16). Resultados importantes mencionados são 5.3 e 5.21.

Uma **coloração** de um grafo $G = (V, E)$ é uma partição de V , isto é, uma família de subconjuntos de V disjuntos $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$, cuja união é V . Os conjuntos da partição são chamados de **classes de cor**, ou simplesmente **cores**. Dizemos que uma coloração é **própria** se toda aresta de G conecta vértices em conjuntos distintos da partição. Grafos que possuem coloração própria com k cores são ditos k -coloríveis. O **número cromático** de G , denotado $\chi(G)$, é o menor número de conjuntos que forma uma coloração própria de G . Quando o grafo subentendido estiver claro, escrevemos apenas χ para indicar seu número cromático. Em geral, o problema de encontrar uma coloração de um grafo G com $\chi(G)$ cores é NP-difícil.

É possível construir uma coloração própria de G usando um algoritmo guloso. Considere os vértices de G em uma ordem arbitrária (v_1, v_2, \dots) ; fixe a cor de v_1 , digamos $v_1 \in C_1$; e “coloque” $v_i \in C_{f(i)}$, onde

$$f(i) = \min_{1 \leq j \leq i} \{j : N(v_i) \cap C_j = \emptyset\}.$$

Como esse algoritmo sempre obtém uma coloração própria de G , é fácil ver que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. E essa delimitação é justa, no caso geral: existem grafos que apresentam $\chi = \Delta + 1$. Uma prova do seguinte teorema se apoia em uma estratégia análoga à da delimitação via algoritmo guloso.

Proposição 5.1 Todo grafo G satisfaz $\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(H) : H \subseteq G\}$.

Demonstração. Seja $k = \max_{H \subseteq G} \delta(H)$ e $n = |V(G)|$, e seja x_n um vértice de G que tem grau no máximo k . Considere $G_{n-1} = G - x_n$. Por hipótese, G_{n-1} tem um vértice, digamos x_{n-1} , de grau no máximo k . Defina

$$G_{n-2} = G_{n-1} - x_{n-1} = G - \{x_n, x_{n-1}\}.$$

Continuando este procedimento, enumeramos todos os vértices de G de x_n até x_1 . Claramente, a sequência x_1, x_2, \dots, x_n é tal que x_j é adjacente a no máximo k vértices que o precedem, para $1 \leq j \leq n$. Portanto, usando o algoritmo guloso (“greedy”) descrito acima, podemos colorir G com no máximo $k + 1$ cores. \square

Corolário 5.2 Todo grafo G tem um subgrafo H tal que $\delta(H) \geq \chi(G) - 1$.

O corolário 5.2 implica que grafos com χ alto têm Δ alto. Obtemos outro limitante observando que em toda coloração com χ cores existe ao menos uma aresta entre cada par de conjuntos da partição. Portanto, para um grafo com m arestas,

$$\binom{\chi}{2} \leq m, \quad \text{o que implica} \quad \chi \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

Neste capítulo abordamos algumas classes de grafos para os quais limitantes muito mais precisos são conhecidos. Talvez o resultado mais conhecido de

coloração, válido para grafos planares (capítulo 4), seja o teorema das 4 cores [AH89], cuja prova omitimos.

Teorema 5.3 (Teorema das 4 cores, Appel, Haken, 1976). Todo grafo planar é 4-colorível.

Circuitos ímpares e grafos completos são exemplos de grafos para os quais $\chi = \Delta + 1$. O teorema a seguir fornece um limitante melhor para os demais grafos.

Teorema 5.4 (Teorema de Brooks, 1941). Se G é um grafo conexo que não é completo e nem um circuito ímpar, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Um subgrafo H de um grafo G é dito **subgrafo gerador** de G se ele possui o mesmo conjunto de vértices que G (isto é, temos $V(G) = V(H)$).

A demonstração do teorema 5.4 abaixo usa árvores de busca em profundidade, ou **árvores BP**. Para construir a árvore de busca em profundidade $BP_G(r)$, que possui raiz $r \in V(G)$, especificamos o “ancestral” $a(v) \in N(v)$ de cada um dos demais vértices $v \in V(G) - r$ em uma certa ordem; A árvore não é única.

A busca em profundidade a partir de $r \in V(G)$ (*i.e.*, enraizada em r , é construída do seguinte modo. Defina $r = a(r)$. Selecione, arbitrariamente, um vizinho s de r tal que $a(s)$ ainda não tenha sido definido, e defina $a(s) = r$. Repita o procedimento partir de s (*i.e.*, tome um vizinho w de s sem ancestral, defina $a(w) = s$, e prossiga por $w \dots$). Quando todos os vizinhos de um vértice $t \neq r$ atingido pela busca tiverem ancestral definido, a busca procede por $a(t)$. O procedimento termina se $t = r$ e todos os vizinhos de r têm ancestral definido. A árvore BP de G é o grafo $BP_G(r) \subseteq G$ induzido pelas arestas $\{x, a(x)\}$

$$BP_G(r) = G[\{\{x, a(x)\} : x \in V(G) - r\}].$$

Note que, em uma árvore BP de raiz r , todo vizinho de uma folha f está contido no caminho entre f e r .

Exercício 5.1. Para quais grafos G e vértice $r \in V(G)$, a árvore $BP_G(r)$ é única?

Exercício 5.2. Seja G um grafo que possui um caminho hamiltoniano. Mostre que se os vértices extremos de todo caminho hamiltoniano em G são adjacentes, então $G \simeq C_n$, ou $G \simeq K_n$ ou $G \simeq K_{n,n}$ (veja [Fle14]).

Exercício 5.3. Mostre que se G é um grafo simples, finito e conexo, e qualquer árvore BP de G enraizada em v é um caminho com extremo em v , então $G \simeq C_n$, ou $G \simeq K_n$ ou $G \simeq K_{n,n}$ (veja [Fle14]).

Lema 5.5 (Lema da Busca em Profundidade). Os únicos grafos para os quais *toda* árvore BP (árvore de busca em profundidade) é um caminho hamiltoniano são os circuitos, os grafos completos e os grafos completos bipartidos regulares $K_{n,n}$.

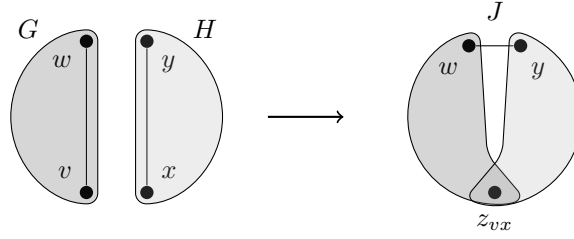
Exercício 5.4. Prove o Lema 5.5.

Duas curtas demonstrações do teorema de Brooks podem ser encontradas em [Lov75, Fle14].

5.2 GRAFOS k -CONSTRUTÍVEIS

Existe um procedimento simples para construir todos os grafos com número cromático maior ou igual a k , que detalhamos a seguir. Para isso precisamos definir uma operação sobre grafos.

Figura 5.1: Operação de Hajós: obtém grafo J a partir de G e H , com uma aresta cada, escolha arestas $vw \in E(G)$ e $xy \in E(H)$; identifique vértices $v \in V(G)$ e $x \in V(H)$; e troque arestas $\{vw, xy\}$ por wy .



Sejam G e H dois grafos simples ($V(G) \cap V(H) = \emptyset$), vw uma aresta de G , e xy uma aresta de H . A **operação de Hajós** sobre G e H produz o grafo $J = (V, E)$, identificando os vértices v e x , e substituindo as arestas $\{xy, wy\}$ por wy (veja figura 5.1).

Formalmente, seja z_{vx} o vértice correspondente à identificação de v e x ($z_{vx} \notin V(G) \cup V(H)$): temos $V = V(G) \cup V(H) + z_{vx} - v - x$ e

$$\begin{aligned} E = & \{ab: a, b \in V(G) \cup V(H) \setminus \{v, w, x, y\}\} \\ & \cup \{z_{vx}u: u \in N(v) \cup N(x) \setminus \{w, y\}\} \\ & \cup \{wy\}. \end{aligned}$$

Onde $N(v)$ e $N(x)$ denotam, respectivamente, a vizinhança de v em G , e a vizinhança de x em H . Definimos, para todo natural $k \in \mathbb{N}$, a classe \mathcal{C}_k dos grafos **k -construtíveis**, segundo as regras a seguir.

- i) o grafo completo K_k é k -construtível;
- ii) a aplicação da operação de Hajós a dois grafos k -construtíveis resulta em um grafo k -construtível; e
- iii) a identificação de vértices independentes de um grafo k -construtível produz um grafo k -construtível (isto é, se $G \in \mathcal{C}_k$ e $x, y \in V(G)$ são não-adjacentes, então $(G + xy)/xy \in \mathcal{C}_k$).

É fácil ver que todo grafo $G \in \mathcal{C}_k$ tem número cromático $\chi(G) \geq k$ (exercício 5.5). Por outro lado, esses grafos estão presentes em todo grafo com número cromático $\chi \geq k$, pelo seguinte teorema.

Teorema 5.6 (Hajós, 1961). Seja G um grafo e $k \in \mathbb{N}$. Então $\chi(G) \geq k$ se e somente se G contém um subgrafo H tal que $H \in \mathcal{C}_k$.

Dizemos que um grafo G é **k -crítico** se todo subgrafo próprio H de G satisfaz $\chi(H) < \chi(G)$. Note que o Teorema 5.6 é equivalente a afirmar que “todo grafo k -crítico é k -construtível”.

A demonstração a seguir pode ser lida em Diestel [Die05].

Demonstração. A demonstração segue por contradição: partimos de um contra-exemplo, e chegamos a um absurdo. Seja G um grafo tal que $\chi(G) \geq k$, que não é k -construtível, e que é aresta-maximal (isto é, ligando quaisquer vértices desconectados de G obtemos um grafo k -construtível). Podemos supor $k \geq 3$, pois caso contrário G atende o teorema.

Note também que G não é r -partido completo para algum $r \in \mathbb{N}$, caso contrário $\chi(G) = r$ e $K_r \subseteq G$.

Como $\chi(G) > 2$, o grafo contém ao menos uma aresta, e como G não é r -partido completo, a relação de não-vizinhança não é transitiva: isto é, existem vértices x, y_1 , e y_2 tais que $xy_1, xy_2 \notin E(G)$, e $y_1y_2 \in E(G)$.

Como G é aresta-maximal sem subgrafo k construtível, cada xy_i está em algum subgrafo k -construtível H_i de $G + xy_i$, para $i = 1, 2$.

Note que $H_1 \cap H_2$ contém x e possivelmente outros vértices e arestas de $G + xy_1 + xy_2$.

Seja H'_2 uma cópia isomórfica de H_2 que contém x e $H_2 - H_1$, e que é disjunta de G em seus demais vértices e arestas, e considere um mapa $v \mapsto v'$ que leva os vértices de H_2 a vértices de H'_2 , e que fixa os vértices em $H_2 \cap H'_2$ (isto é $v \mapsto v$ se $v \in V(H_2 \cap H'_2)$). Note que $H_1 \cap H'_2 = \{x\}$, então

$$H = (H_1 \cup H'_2) - xy_1 - xy'_2 + y_1y_2$$

é k -construtível por iii.

Um vértice por vez, identificamos em H cada $v' \in H'_2 - G$ com seu parceiro v ; como vv' nunca é uma aresta de H , cada uma dessas identificações é um passo do tipo ii. Prosseguindo assim, obteremos em algum ponto o grafo

$$(H_1 \cup H_2) - xy_1 - xy_2 + y_1y_2 \subseteq G,$$

que é um grafo k -construtível de G , um a contradição. \square

Ao contrário do que se poderia esperar, um grafo com χ alto não necessariamente contém um grafo completo. Erdős demonstrou (teorema 5.18) que existem grafos com número cromático $\chi(G)$ arbitrariamente alto e cintura $\text{Cintura}(G)$ arbitrariamente grande.

Dado um grafo G , definimos sua **cintura** $\text{Cintura}(G)$ (**girth**) como o comprimento de um menor circuito em G (caso G não possua circuitos, dizemos que sua cintura é infinita).

Uma **coloração justa** é uma coloração própria em que o número de vértices em classes de cor difere em até 1. Em 1964, Erdős conjecturou que todo grafo G possui uma coloração justa com até $\Delta(G) + 1$ cores. Essa conjectura foi demonstrada por Hajnal e Szemerédi [HS70] em 1970.

Exercício 5.5. Mostre que todo grafo $G \in \mathcal{C}_k$ possui número cromático $\chi(G) \geq k$.

Exercício 5.6. Mostre que o limitante da proposição 5.1 é ao menos tão bom quanto o do teorema 5.6

Exercício 5.7. Dizemos que um mapa plano é **cartográfico** se é 2-conexo e 3-regular. Prove que todo mapa cartográfico possui uma face (país) com até 5 arestas.

Exercício 5.8. Mostre que podemos colorir as faces de um mapa cartográfico com até 6 cores.

Exercício 5.9. Para cada item, apresente um contra-exemplo ou uma demonstração. (Claro, não faz sentido usar o teorema 5.3.)

1. todo grafo planar é 6-colorível (fácil)
2. todo grafo planar é 5-colorível (médio)
3. todo grafo planar é 4-colorível (difícil)
4. todo grafo planar é 3-colorível (fácil)

5.3 LISTA-COLORAÇÃO

Seja $G = (V, E)$ um grafo e L uma função que atribui a cada vértice $v \in V$ um conjunto $L(v)$ de inteiros positivos, chamada **lista de v**

$$L = (L(v))_{v \in V}$$

Uma coloração $C : V \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $c(v) \in L(v) \forall v \in V$ é chamada uma **lista-coloração de G com respeito a L** , ou uma **L -coloração**. Neste caso, dizemos que G é **L -colorível**.

Note que se $L(v) = \{1, 2, \dots, k\}$ para todo $v \in V$, então uma L -coloração é simplesmente uma k -coloração. Se $|L(v)| = 1$, estamos pré-colorindo v com a cor em $L(v)$.

Um grafo G é **k -lista-colorível** (ou **k -choosable**) se possui uma L -coloração, para *toda* lista-coloração $L = (L(v))_{v \in V}$ tal que a lista de qualquer vértice $v \in V$ tem $|L(v)| = k$ elementos,

O **menor k** tal que G é k -lista-colorível é o **número-lista-cromático de G** , $\chi_L(G)$ (ou $ch(G)$) (“list chromatic number” / “choice number”). Alguns limitantes para $\chi(G)$ são válidos para $\chi_L(G)$.

- é limitado uma função do grau mínimo em um subgrafo: $\chi_L(G) \leq 1 + \max\{\delta(H) : H \subseteq G\}$;
- se G não é nem um circuito nem um grafo completo, então $\chi_L(G) \leq \Delta(G)$;
e
- é limitado (inferiormente) pelo número cromático: $\chi(G) \leq \chi_L(G)$.

Definição 5.7 Um grafo plano G com pelo menos 3 vértices é um **disco triangulado** se todas as faces internas de G são triangulares e sua face externa tem como fronteira um circuito.

Lema 5.8 Seja $G = (V, E)$ um disco triangulado e seja $C = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ o circuito que é a fronteira de sua face externa. Seja $L = (L(v))_{v \in V}$ tal que

- $L(v_1) = \{1\}, L(v_2) = \{2\}$;
- $|L(v)| \geq 3 \quad \forall v \in V(C), v \neq v_1, v \neq v_2$;
- $|L(v)| \geq 5 \quad \forall v \in V \setminus V(C)$.

Então G admite uma L -coloração.

Demonstração. (em aula) □

Teorema 5.9 (Thomassen, 1994). G planar $\Rightarrow \chi_L(G) \leq 5$.

Conjectura $\chi'_L(G) = \chi'(G)$. Prova da conjectura quando G é bipartido.

Alguns autores denotam $\chi'_L(G) = ch'(G)$, para o **índice lista-aresta-cromático de G** (**choosability of the graph**).

Há uma conjectura que diz que $\chi'_L(G) = \chi'(G)$. O caso particular em que G é um grafo bipartido já foi resolvido. Apresentamos uma prova hoje.

Definição 5.10 Se u e v são vértices de um digrafo D , dizemos que u **domina (enxerga)** v se $uv \in A(D)$.

Definição 5.11 Um **núcleo (kernel)** de um digrafo D é um conjunto independente S de D tal que todo vértice em $V \setminus S$ domina algum vértice de S .

Note, em particular, que circuitos ímpares orientados (\vec{C}_n) não possuem núcleo.

Observação 5.12 Decidir se um digrafo tem um núcleo é NP-completo.

Mencionamos dois teoremas, cuja prova não veremos.

Teorema 5.13 Se D não tem circuito ímpar, então não tem kernel.

Teorema 5.14 (Richardson, 1946 [Ric46]). Se D não tem circuito orientado ímpar, então possui um núcleo.

Exercício 5.10. Prove o segundo teorema, por indução no número de componentes fortes do grafo.

Lema 5.15 Seja $D = (V, A)$ um digrafo tal que todo subgrafo induzido de D tem um núcleo, e seja $L = (L_v)_{v \in V}$ tal que L_v é um conjunto de cores. Se $|L_v| > d^+(v)$ para todo $v \in V$, então D tem uma L -lista-coloração.

Demonstração. Por indução em $|V|$. Seja α uma cor que ocorre em algumas listas, mas que não ocorre em todas. Seja $V_\alpha = \{v \in V : \alpha \in L_v\}$. Seja $D' = D[V_\alpha]$. Pela hipótese, temos que D' tem um núcleo, digamos, S . Seja $\hat{L} = (\hat{L}_v)_{v \in V}$, onde $\hat{L}_v = L_v \setminus \{\alpha\}$. Seja $\hat{D} = D - S$. Como $d_D^+(v) < |\hat{L}_v|$, para todo $v \in \hat{D}$, pela hipótese de indução, \hat{D} tem uma \hat{L} -lista-coloração. Esta \hat{L} -lista-coloração de \hat{D} , juntamente com a atribuição da cor α aos vértices de S é uma L -lista-coloração de D . \square

Teorema 5.16 (Galvin, 1995). Seja G um grafo bipartido. Então $\chi'_L(G) = \chi'(G)$.

Demonstração. Seja G um grafo (X, Y) -bipartido. dizemos que duas arestas de **encontram** em X (resp. Y) se elas têm extremo comum em X .

Seja $K = \chi'(G)$ e $C : E(G) \mapsto \{1, \dots, k\}$ uma k -aresta-coloração de G . Como $\chi'_L(G) \geq k$, vamos mostrar que $\chi'_L(G) \leq k$, obtendo assim que vale a igualdade.

Para isso, vamos considerar um digrafo D e usar o lema 5.15.

Seja H o **grafo-aresta (line-graph)** de G , e D uma orientação de H assim definida:

$$\begin{aligned} A(D) &= \{ee' : e, e' \text{ se encontram em } X \text{ e } C(e') > C(e)\} \\ &\cup \{ee' : e, e' \text{ se encontram em } Y \text{ e } C(e) > C(e')\} \end{aligned}$$

Seja $e \in V(D)$, e suponha que $C(e) = i$. Note que $d_D^+(e) < k$ (de um lado da partição, cores maiores do que i , e, de outro, cores menores).

Para usar o lema 5.15, precisamos mostrar que todo subgrafo induzido D' de D tem um núcleo. Provamos isso por indução em $V(D')$.

Se $V(D) = \emptyset$, o resultado segue.

Seja $E' = V(D') \subseteq E$. Para cada $x \in X$, sejam $\delta'(x) = \delta(x) \cap E'$ o conjunto de arestas incidentes a x FALTA COISA AQUI!

Para cada $x \in X$ tal que $\delta'(x) \neq \emptyset$, seja e_x a aresta com a menor C -cor. Seja $U = \{e_x : \delta'(x) \neq \emptyset\}$.

Então toda aresta $e' \in E' \setminus U$ encontra algum $e \in U$ em x , e, portanto, existe o arco $e'e$.

Assim, se U é independente, ele é núcleo de D' , e a prova está completa (usando o lema 5.15. Se U não é independente, então existem $e, e' \in U$ adjacentes. Suponha $C(e) < C(e')$, então e, e' se encontram em Y , e temos que $ee' \in A(D')$.

Pela hipótese de indução, $D' - e$ tem um núcleo, digamos U' .

- Se $e' \in U'$, então U é um núcleo de D' .
- Se $e' \notin U'$, então existe $e'' \in U$ tal que $e'e'' \in A(D')$.
 - Se e', e'' se encontram em X , então $C(e') > C(e'')$ pela definição de D , contrariando o fato de $e' \in U$.
 - Se e', e'' se encontram em Y , então $C(e') < C(e'')$. Como e, e' se encontram em Y , temos que $C(e) < C(e')$. Logo $C(e) < C(e') < C(e'')$.

Portanto, $e'e'' \in A(D)$ e U também é um núcleo de D' . \square

Observação 5.17 Existe uma prova para uma versão assintótica da conjectura.

5.4 GRAFOS PERFEITOS

Seja $\omega(G)$ = cardinalidade de uma clique máxima em G . Claramente $\chi(G) \geq \omega(G)$. Mas esse limitante não é justo, pois há grafos G que apresentam $\chi(G) \gg \omega(G)$.

Teorema 5.18 (Erdős, 1959). Dados $k, \ell \in \mathbb{N}$, existe grafo G tal que $\chi(G) > k$ e $\text{Cintura}(G) > \ell$.

A prova a seguir usa a desigualdade de Markov, que fornece um limitante para a probabilidade de uma variável aleatória não-negativa X assumir valores grandes relativamente à seu valor esperado $\mathbf{E}[X]$. Lembramos que o **valor esperado**, ou **esperança** de uma variável aleatória X , que assume valores em \mathcal{X} , é uma média dos valores $x \in \mathcal{X}$ ponderada pela probabilidade $\mathbf{P}[X = x]$ dos eventos “ X assume o valor x ”. Em símbolos,

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}} x \mathbf{P}[X = x].$$

Lema 5.19 (Desigualdade de Markov). Seja X uma variável aleatória não-negativa e $t > 0$. Temos

$$\mathbf{P}[X \geq t] \leq \frac{\mathbf{E}[X]}{t}.$$

Demonstração.

$$\mathbf{E}[X] = \sum_a a \mathbf{P}[X = a] \geq \sum_{a \geq t} t \mathbf{P}[X = a] = t \mathbf{P}[X \geq t]. \quad \square$$

Demonstração do teorema 5.18. Considere um grafo G , com n vértices, construído pelo seguinte procedimento aleatorizado: para cada par de vértices, a aresta que os une está presente em G com probabilidade p . Fixamos um valor $\lambda \in (0, 1/\ell)$ e tomamos $p = n^{\lambda-1}$. Seja X o número de circuitos de comprimento menor ou igual a ℓ em G . O número potencial de circuitos de comprimento j é inferior a n^j , e cada um desses circuitos está presente com probabilidade p^j . Assim, a o valor esperado (a esperança) de X é

$$\mathbf{E}[X] \leq \sum_j n^j p^j = \sum_j n^{\lambda j} = \frac{n^{\lambda \ell}}{1 - n^{-\lambda}}.$$

Como $\lambda \ell < 1$, a esperança é menor do que $n/4$ para n suficientemente grande. Pela desigualdade de Markov, temos $\mathbf{P}[X \geq n/2] \leq 1/2$. Note que ainda é possível que hajam ciclos de comprimento menor do que ℓ em G .

Consideramos agora o número cromático de G . Faremos isso por meio do número de independência $\alpha(G)$, isto é, o tamanho do maior conjunto independente em G . Como toda classe de cor forma um conjunto independente, temos que $\chi(G) \geq |V(G)|/\alpha(G)$. Tomamos $a = \lceil 3p^{-1} \ln n \rceil$ e consideramos o evento representando o evento “existe um conjunto independente de tamanho a em G ”. Como a probabilidade da união de eventos é limitada pela soma da probabilidade dos eventos (desigualdade da união), temos

$$\mathbf{P}[\alpha(G) \geq a] \leq \binom{n}{a} (1-p)^{\binom{a}{2}} \leq n^a e^{-pa(a-1)/2} \leq n^a n^{-3(a-1)/2} \rightarrow 0.$$

Para n suficientemente grande, esta probabilidade é menor do que $1/2$. Assim, mais uma vez pela desigualdade da união, temos

$$\mathbf{P}[X \geq n/2 \text{ ou } \alpha(G) \geq a] < 1.$$

De modo que existe um grafo em que o número de circuitos curtos é $X < n/2$ e número de independência $\alpha(G) < a$. Isso implica que podemos remover um vértice (arbitrário) de cada circuito curto, obtendo um grafo G' com ao menos $n/2$ vértices. Ademais, G' não possui circuito de comprimento menor ou igual a ℓ , e temos $\alpha(G') < a$. Assim o número cromático desse grafo é

$$\chi(G') \geq \frac{|V(G')|}{\alpha(G')} \geq \frac{n/2}{3n^{1-\lambda} \ln n} = \frac{n^\lambda}{6 \ln n}.$$

O resultado segue tomando n grande o bastante. \square

Corolário 5.20 Seja H um grafo, que não é uma floresta. Para todo $k \in \mathbb{N}$, existem grafos G com $\chi(G) \geq k$ tais que $H \not\subseteq G$.

Um resultado (assintótico) mais recente nessa direção foi apresentado por Osthus, Prömel and Taraz [OPT01]. Fixados $\ell \geq 3$ e $k \in \mathbb{N}$, existem constantes C_1 e C_2 tais que quase todo grafo com n vértices, m arestas e cintura maior ou igual a ℓ possui número cromático maior ou igual a k , dado que $C_1 n \leq m \leq C_2 n^{\ell/(\ell-1)}$. (A expressão “quase todo” aqui é usada para dizer que a fração dos grafos com n vértices e m arestas para os quais vale a propriedade tende a 1 quando n tende a infinito.)

Grafos com *cintura* (*girth*) grande “parecem árvores” localmente, e não parecem ter uma estrutura local que os obrigue a ter número cromático alto. Esses grafos comprovam que número cromático alto pode ocorrer por razões de “natureza global” e não “local”. O interesse por grafos onde essa dependência global não ocorre, isto é, grafos cujo número cromático alto é apenas por causa de alguma razão local (por exemplo, existência de uma clique grande) ocupa assim o outro extremo no estudo da relação entre $\chi(G)$ e $\omega(G)$.

Uma pergunta natural é se existem grafos não-completos G com número cromático $\chi(G) = \omega(G)$, e a resposta é afirmativa. Um exemplo é o grafo $G = (V, E)$, com $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e arestas $E = \{12, 23, 34, 45, 56, 13\}$. Outro exemplo é o circuito C_4 com quatro vértices. A parte sua existência, não se são conhecidas muitas propriedades desses grafos. Em 1960, Claude Berge introduziu uma outra classe relacionada, porém com mais estrutura e mais interessante. Trata-se da classe dos *grafos perfeitos*. Dizemos que um grafo G é **perfeito** se cada um de seus subgrafos induzidos H satisfaz $\chi(H) = \omega(H)$. Os grafos perfeitos constituem uma classe onde a exigência $\chi(G) = \omega(G)$ é levada ao extremo: um grafo é dito **perfeito** se todo subgrafo $H \subseteq G$

satisfaz $\chi(H) = \omega(H)$. Ao contrário do que pode parecer, a classe dos grafos perfeitos é grande, e seu estudo envolve uma série de problemas interessantes. Em particular a *Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos* (CFGP), de Berge, permaneceu em aberto por 40 anos. Ela foi demonstrada por Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas [CRST06]

Teorema 5.21 (Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas, 2006). Um grafo é perfeito se e somente se nem G nem \overline{G} contém um circuito ímpar de comprimento maior ou igual a 5 como subgrafo induzido.

Um importante resultado, anterior à prova dessa conjectura, é o teorema fraco dos grafos perfeitos 5.22, provado por Lovász em 1972, conhecido como o Teorema dos Grafos Perfeitos, cuja prova exibimos nestas notas.

Teorema 5.22 (Lovász, 1972). Um grafo G é perfeito se e somente se \overline{G} é perfeito.

Dado um vértice v de um grafo G e um grafo H , definimos o grafo da substituição de v por H (em G) como o grafo G' tal que $V(G') = V(H) \cup V(G - v)$ e $E(G') = E(H) \cup \{xy : x \in V(H), y \in N_G(v)\} \cup E(G - v)$ (assumindo que $V(G) \cap V(H) = \emptyset$).

Teorema 5.23 Se G é perfeito, substituindo-se um vértice de G por um grafo perfeito obtém-se um grafo perfeito.

Demonstração. Seja x um vértice qualquer de G e H um grafo perfeito e G' o grafo que resulta da substituição de x por H . É suficiente mostrar que $\chi(G') = \omega(G')$, já que para os subgrafos induzidos de G' que são construídos da mesma forma que G' o resultado segue analogamente. Faremos a prova por indução em $k = \omega(G')$. Suponha $k > 1$ (se $k = 1$ o resultado é óbvio).

É suficiente encontrar um conjunto independente I de G' que intercepta todos os cliques com k elementos. (note que podemos colorir esses vértices com a mesma cor e os vértices restantes com outras $k - 1$ cores. o que pode ser feito por hipótese, obtendo assim uma k -coloração de G' .)

Sejam $m = \omega(G)$, $l = \omega(H)$ e ainda p a cardinalidade máxima de um clique em G que contém x . Note que $k = \max\{m, l + p - 1\}$. Considere uma m -coloração de G e chame de X o conjunto dos vértices de G que possuem a mesma cor que x . Por fim, seja L o conjunto dos vértices independentes de H que intercepta toda clique de H com l elementos.

O conjunto $I = \cup(X - \{x\})$ é independente de G' , e I intercepta toda clique de G' com k elementos. De fato, se K é uma clique com k elementos de G' que intercepta H , então K contém uma clique com l elementos de H . Em particular, isso implica que K contém um vértice de L . Por outro lado, se K não intercepta H , então K deve ser uma clique com m elementos de $G - x$, e assim K contém um vértice de $X - \{x\}$. \square

Demonstração do teorema 5.22. Para provar que \overline{G} é perfeito é suficiente provar que \overline{G} contém um conjunto independente cuja remoção destrói as cliques máximas de \overline{G} . Ou seja, é suficiente provar que existe clique K em G tal que

$$\alpha(G - K) < \alpha(G)$$

onde $\alpha(G)$ = cardinalidade de um conjunto independente máximo de G .

Suponha que isto não ocorra: Para todo K existe um conjunto independente máximo que é disjunto de K . Seja K_1, K_2, \dots, K_r uma coleção das cliques de G . Para cada $i = 1, \dots, r$, denote por I_i um conjunto independente máximo

que é disjunto de K_i . Para cada vértice x de G , seja $\theta(x)$ o número de conjuntos independentes I_i que contêm x .

Seja G' o grafo obtido que obtemos substituindo x por $K_{\theta(x)}$, para todo $x \in V(G)$. Note que uma clique máxima de G' vem de uma clique, digamos K_i , obtida de um 'join' de $K_{\theta(x)}$ para cada $x \in V(K_i)$.

$$\omega(G') = \sum_{x \in V(K_i)} \theta(x) = \sum_{j=1}^r |I_j \cap K_i| \leq r - 1,$$

ou seja, temos $r \geq \omega(G') + 1$. Por outro lado,

$$|V(G')| = \sum_{x \in V(G')} \theta(x) = \sum_{i=1}^r |I_i| = r \cdot \alpha(G) \quad (5.1)$$

Como $\chi(G') \geq |V(G')|/\alpha(G')$, usando o teorema 5.18 e 5.1, temos que

$$\chi(G') \geq \frac{|V(G')|}{\alpha(G')} = \frac{|V(G')|}{\alpha(G)} = r \geq \omega(G') + 1,$$

E vale que $\chi(G') > \omega(G')$, uma contradição pois G' é perfeito. \square

Observação 5.24 Para todo grafo G , sabemos que

$$\chi(G) \geq \max \left\{ \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}, \omega(G) \right\}$$

Se G é perfeito, então para todo subgrafo induzido $H \subseteq_{\text{ind}} G$ vale $\chi(H) \geq |V(H)|/\alpha(H)$. Como H é perfeito, temos $\omega(H) = \chi(H)$, e portanto $\omega(H) = |V(H)|/\alpha(H)$, ou seja,

$$|V(H)| \leq \alpha(H) \cdot \omega(H).$$

Assim, temos que G perfeito implica que para todo subgrafo induzido $H \subseteq_{\text{ind}} G$, vale $|V(H)| \leq \alpha(H)\omega(H)$. Hajnal & Simonovits conjecturaram que vale a recíproca da afirmação acima. Em 1972, Lovász provou esse fato.

Teorema 5.25 (Lovász, 72). Se G é um grafo perfeito, então para todo subgrafo induzido $H \subseteq_{\text{ind}} G$ vale $|V(H)| \leq \alpha(H)\omega(H)$.

Note que o teorema 5.22 segue como corolário do teorema 5.25, tomando $\overline{H} \subseteq_{\text{ind}} \overline{G}$.

$$|V(\overline{H})| = |V(H)| \leq \alpha(H)\omega(H) = \omega(\overline{H})\alpha(\overline{H})$$

5.5 CLASSES DE GRAFOS PERFEITOS

Teorema 5.26 Todo grafo bipartido é perfeito.

Lema 5.27 (Konig). G é bipartido sem vértices isolados $\Leftrightarrow \text{cob}_a(G) = \alpha(G)$.

(Imediato de T.G.P)

Onde $\text{cob}_a(G)$ é cobertura mínima por arestas.

$$\text{Emp}(G) = \text{cob}(G)$$

Definição 5.28 Seja G um grafo. Se H é um grafo, então dizemos que G é livre de H se G não contém H como *subgrafo induzido*.

Teorema 5.29 Se G é livre de P_4 , então G é perfeito. ($P_4 \equiv$ caminho com 4 vértices)

Exercício 5.11. Se G é livre de P_4 então, para todo $S \subseteq V(G)$ temos que $G[S]$ ou $\overline{G}[S]$ é desconexo.

Definição 5.30 G é um grafo **triangulado** (ou **cordal**) se todo circuito de G de comprimento maior que 3 tem uma *corda*, ou equivalentemente, se G não tem circuito induzido de comprimento maior ou igual a 4.

Definição 5.31 Um vértice v de um grafo G é **simplicial** se $G[\text{Adj}(v)]$ é uma *clique* de G .

Definição 5.32 G tem uma p.e.o. (perfect elimination ordering) se existe uma ordenação v_n, \dots, v_1 de seus vértices tal que cada v_i para $i = n, \dots, 2$ é um vértice simplicial de $G[v_i, \dots, v_1]$.

Teorema 5.33 Todo grafo cordal é perfeito.

Outra propriedade de grafos cordais (? entendi que era de grafos cordais) é que todo conjunto minimal separador é uma clique.

Definição 5.34 Uma orientação é **transitiva** se $xy, yz \in E(G) \Rightarrow xz \in E(G)$.

Definição 5.35 Um grafo G é um **grafo de comparabilidade** se G tem uma orientação que é transitiva.

Teorema 5.36 Todo grafo de comparabilidade é perfeito.

Definimos $m(x)$ como o comprimento do caminho mais longo com origem em x . E atribuímos para cada vértice a cor $m(x)$. Se dois vértices vizinhos receberam a mesma cor, então um aponta para o outro e é possível construir um caminho mais longo do que a cor que eles receberam. Cada caminho iniciando em x induz uma clique de tamanho $m(x) + 1$. Logo, temos que $\chi(G) = \max_{x \in V} \{m(x)\} + 1$.

Teorema 5.37

$$G \text{ é de intervalo} \Leftrightarrow G \text{ é cordal e } \overline{G} \text{ é de comparabilidade.}$$

Com respeito a grafos que são cordais mas não são de intervalos, temos o grafo $G = (\{d, a, b, c, x, y, z\}, \{za, ad, yc, cd, xb, bd\})$. Uma subdivisão de uma estrela de 3 folhas.

Split graphs (grafos divididos)

Definição 5.38 G é um **grafo split** se existe uma bipartição de $V(G)$ em conjuntos A e B tal que $G[A]$ é uma *clique* e $G[B]$ é *independente*.

Teorema 5.39 Todo grafo split é perfeito.

É fácil notar que este grafo é perfeito, basta pegar A com o maior número possível de vértices. Obtemos que para todo vértice v de B existe pelo menos um vértice u em A que não é seu vizinho. Assim, dê para u a mesma cor de v . Logo, colorimos G com $|A|$ cores.

5.6 EXERCÍCIOS

Exercício 5.12. Mostre que se G é um grafo conexo com n vértices e m arestas, então $\chi(G) \geq n^2/(n^2 - 2m)$.

Exercício 5.13. Prove que $\chi(G) \leq \ell + 1$, onde ℓ é o comprimento de um caminho mais longo em G .

Exercício 5.14. Mostre que todo grafo bipartido planar é 3-lista-colorível.
Sugestão: Use o lema 5.15 e o teorema de Richardson 5.14.

Exercício 5.15. Um **grafo de intervalos** G é um grafo cujos vértices correspondem a um conjunto de intervalos fechados na reta real, e tal que dois vértices de G são adjacentes se e somente seus intervalos correspondentes se intersectam. Prove que todo grafo de intervalos é perfeito.

Exercício 5.16. Seis professores visitaram a biblioteca num dia em que um livro raro foi roubado. Cada um entrou uma vez, ficou por um tempo, e depois saiu. Para cada dois deles que estiveram na biblioteca ao mesmo tempo, pelo menos um deles viu o outro. Detetives interrogaram os professores e colheram o seguinte testemunho:

Professor	Afirmou que viu	
Astuto (A)	Begônio (B),	Esmeraldo (E)
Begônio (B)	Astuto (A),	Fúcsio (F)
Cemolino (C)	Desdêmono (D),	Fúcsio (F)
Desdêmono (D)	Astuto (A),	Fúcsio (F)
Esmeraldo (E)	Begônio (B),	Cemolino (C)
Fúcsio (F)	Cemolino (C),	Esmeraldo (E)

Nesta situação, “mentir” significa dar uma informação falsa, mas não significa omitir uma informação. Suponha que *o culpado tentou colocar a culpa em outro mentindo*. Se um professor mentiu, quem foi?

Resolva usando conceitos da teoria dos grafos.

NOTAS DO CAPÍTULO 5

5.7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [AH89] K.I. Appel and W. Haken. *Every Planar Map Is Four Colorable*. Contemporary mathematics, v. 98. American Mathematical Society, 1989.
- [CRST06] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, and Robin Thomas. The strong perfect graph theorem. *ANNALS OF MATHEMATICS*, 164:51–229, 2006.
- [Die05] Reinhard Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.
- [Fle14] Tamás Fleiner. Yet another proof for brooks’ theorem. Technical Report QP-2014-01, Egerváry Reserch Group, Budapest, 2014. www.cs.elte.hu/egres.
- [HS70] A. Hajnal and E. Szemerédi. Proof of a conjecture of P. Erdős. In *Combinatorial theory and its applications, II (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969)*, pages 601–623. North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [Lov75] L Lovász. Three short proofs in graph theory. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 19(3):269 – 271, 1975.
- [OPT01] Deryk Osthus, Hans Jürgen Prömel, and Anusch Taraz. Almost all graphs with high girth and suitable density have high chromatic number. *J. Graph Theory*, 37(4):220–226, August 2001.

- [Ric46] M. Richardson. On weakly ordered systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52:113–116, 1946.

6 PROBLEMAS EXTREMAIS

6.1 INTRODUÇÃO

Por problemas extremais, entendemos perguntas como as dos exemplos abaixo.

- (P1) Determine o número mínimo de arestas $\phi(n)$, tal que todo grafo G de ordem n e com pelo menos $\phi(n)$ arestas tem um circuito.
- (P2) Determine o menor natural $\delta(n)$ tal que todo grafo de ordem n e grau mínimo pelo menos $\delta(n)$ tem um circuito hamiltoniano.
- (P3) Determine o menor natural n tal que todo grafo de ordem pelo menos n tem um K_3 ou $\overline{K_3}$ como subgrafo induzido.
- (P4) Determine o número máximo de arestas em um grafo de ordem n que não contém K_3 .

Em particular, as respostas para as perguntas acima são:

- (P1) Temos $\phi(n) = n$.
- (P2) O Teorema de Dirac afirma que

$$\delta(n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

- (P3) O Teorema de Ramsey (para o caso $(3, 3)$) afirma que $n = 6$.
- (P4) Veremos mais adiante que tal número é $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

Tipicamente, dada uma propriedade P de grafos, e um invariante I e uma classe \mathcal{G} de grafos, procura-se determinar o menor valor m tal que todo grafo $G \in \mathcal{G}$ com $I(G) > m$ tem a propriedade P .

6.2 PROBLEMA DA PROIBIÇÃO DE g

Dado um grafo G , definimos, para todo natural n o número

$$\text{ex}(n, G) = \sup\{|E(H)| : H \text{ é um grafo de ordem } n \text{ com } H \not\supseteq G\}.$$

Nessa situação G é chamado **grafo proibido**.

Dizemos também que um grafo H de ordem n é um **grafo extremal** (relativo a G) se H tem $\text{ex}(n, G)$ arestas e $H \not\supseteq G$ e denotamos o conjunto de todos os grafos extremais de ordem n por $\text{EX}(n, G)$.

Chamamos o problema de determinar o número $\text{ex}(n, G)$ de $\mathcal{P}(G)$.

Proibindo grafos completos

Turán, em 1941, investigou o problema $\mathcal{P}(K_p)$.

Para simplificar, considere $G \equiv K_{p+1}$. Claramente, os grafos p -partidos completos K_{n_1, \dots, n_p} de ordem n (ou seja, temos $\sum_i n_i = n$) não contém K_{p+1} . Dentre todos os grafos desse tipo, o que tem o maior número possível de arestas é aquele que tem os blocos das partições o mais balanceado possível.

Ou seja, tomando $r = n \bmod p$ e $k = \lfloor n/p \rfloor$, o conjunto $\text{EX}(n, K_{p+1})$ contém o grafo p -partido completo com $p - r$ blocos com k vértices e r blocos com $k + 1$ vértices.

Chamamos tal grafo de Grafo de Turán e o denotamos por $T_{n,p}$ (extremal que não contém K_{p+1}). Definimos também $t_{n,p} = |E(T_{n,p})|$.

Observando que

$$|E(\overline{T_{n,p}})| = (p-r) \binom{k}{2} + r \binom{k+1}{2},$$

obtemos a seguinte fórmula

$$|E(T_{n,p})| = \binom{n}{2} - \left((p-r) \binom{k}{2} + r \binom{k+1}{2} \right) = \binom{n}{2} - \frac{k(n-p+r)}{2}.$$

Teorema 6.1 (Turán, 1941). Dentre todos os grafos de ordem n que não contêm K_{p+1} , existe exatamente um com número máximo de arestas, sendo esse o $T_{n,p}$.

Demonstração. (Técnica de “chopping”) Provaremos por indução em n .

Observe que para $n \leq p$ o resultado é trivial.

Suponha então que $n > p$ e que o resultado é válido para $n-1$.

Seja G um grafo extremal de ordem n (em relação a K_{p+1}). Como a adição de qualquer aresta à G cria uma cópia de K_{p+1} sabemos que existe uma cópia H de K_p em G .

Sejam $q_1 = |E(H)| = \binom{p}{2}$, $q_2 = |\{vw \in E(G) : v \in V(G) \setminus V(H), w \in V(H)\}|$ e $q_3 = |E(G - V(H))|$.

Como cada vértice de $V(G) \setminus V(H)$ é adjacente a no máximo $p-1$ vértices de H , temos $q_2 \leq (n-p)(p-1)$.

Além disso, pela hipótese de indução, sabemos que $q_3 \leq t_{n-p,p}$, pois $G - V(H)$ não possui uma cópia de K_{p+1} .

Tomando $r = n \bmod p$ e $k = \lfloor n/p \rfloor$, temos que

$$\begin{aligned} |E(G)| &= q_1 + q_2 + q_3 \leq \binom{p}{2} + (n-p)(p-1) + t_{n-p,p} \\ &= \binom{p}{2} + (n-p)(p-1) + \left(\binom{n-p}{2} - \left\lfloor \frac{n-p}{p} \right\rfloor \frac{(n-p-p+r)}{2} \right) \\ &= \binom{p}{2} + (n-p)(p-1) + \frac{(n-p)(n-p-1)}{2} - \frac{(k-1)(n-2p+r)}{2} \\ &= \binom{p}{2} + \frac{(n-p)(n+p-3)}{2} - \frac{k(n-p+r)}{2} + \frac{kp}{2} + \frac{n-2p+r}{2} \\ &= \frac{n^2 - 3n + 2p}{2} - \frac{k(n-p+r)}{2} + (n-p) \\ &= \binom{n}{2} - \frac{k(n-p+r)}{2} = t_{n,p}. \end{aligned}$$

Ou seja, temos $|E(G)| \leq t_{n,p}$. Como $T_{n,p}$ não possui nenhuma cópia de K_{p+1} e G é extremal, segue a outra desigualdade e, portanto, temos $|E(G)| = t_{n,p}$.

Isso significa também que temos $q_2 = (n-p)(p-1)$ e $q_3 = t_{n-p,p}$. Pela hipótese de indução, temos que $G - V(H) \cong T_{n-p,p}$. Ademais, o valor de q_2 nos garante que $vw \in E(G)$ para todo $v \in V(G) \setminus V(H)$ e todo $w \in V(H)$.

Portanto $G \cong T_{n,p}$ (G é balanceado pois $T_{n-p,p}$ é balanceado por hipótese de indução). \square

Demonstração. (Técnica da simetrização) Zykov (1949) Defina a operação de simetrização de um vértice u em relação a um vértice $v \neq u$ como a remoção das arestas incidentes a u , adição das arestas uw para todo $w \in N_G(v) \setminus \{u\}$.

Observe que se u e v são dois vértices distintos de um grafo G , temos:

- Se G não possui uma cópia de K_{p+1} , então após a operação de simetrização de u em relação a v , o novo grafo também não possui uma cópia de K_{p+1} .
- Se G' é o grafo obtido após a operação de simetrização de u em relação a v , então $|E(G')| = |E(G)| + |N_G(v) \setminus \{u\}| - d_G(u)$.

Seja H um grafo extremal com n vértices, então temos $\delta(H) + 1 \geq \Delta(H)$, caso contrário, poderíamos simetrizar um vértice de grau mínimo em relação a um de grau máximo e obter um grafo livre de K_{p+1} com mais arestas.

Ademais, também sabemos que se $\delta(H) < \Delta(H)$, então todos os vértices v de grau $\delta(H)$ são adjacentes a todos os vértices w de grau $\Delta(H)$, caso contrário, a simetrização de v em relação a w produziria um grafo livre de K_{p+1} com mais arestas.

Vamos provar agora que, se v e w são vértices de H de mesmo grau, mas vizinhanças distintas, então v é adjacente a w .

Suponha que não. Como v e w possuem vizinhanças distintas e mesmo grau, sabemos que existem $v_0 \in N_H(v) \setminus N_H(w)$ e $w_0 \in N_H(w) \setminus N_H(v)$, sem perda de generalidade, supomos $d_H(v_0) \leq d_H(w_0)$ (caso contrário, basta trocar os nomes v com w e v_0 com w_0).

Seja H' o grafo obtido a partir da simetrização de v em relação a w e observe que H' é livre de K_{p+1} e $|E(H')| = |E(H)|$, logo H' também é extremal.

Observe também que

$$d_{H'}(v_0) = d_H(v_0) - 1 \leq d_H(w_0) - 1 = d_{H'}(w_0) - 2.$$

Mas isso significa que a simetrização de v_0 em relação a w_0 no grafo H' produz um grafo livre de K_{p+1} com mais arestas que H' , o que é um absurdo.

Portanto, juntando à adjacência dos vértices de graus distintos, sabemos que, se v e w são vértices de H de vizinhanças distintas, então v é adjacente a w .

Considere a partição P do conjunto dos vértices de H de acordo com suas vizinhanças, isto é, se $N = \{N_H(v) : v \in V(H)\}$, então $P = \{\{w \in V(H) : N_H(w) = A\} : A \in N\}$.

A propriedade que acabamos de provar nada mais é do que o fato que H é $|P|$ -partido completo com partição P .

Certamente $|P| \leq p$, caso contrário, o grafo H não seria livre de K_{p+1} .

Ademais, como $\delta(H) + 1 \geq \Delta(H)$, segue que H é balanceado, ou seja, é isomorfo a $T_{n,k}$, para algum $k \leq p$.

A igualdade de k e p segue da maximalidade do valor de $|E(H)|$. \square

Corolário 6.2 Para todo natural $n \geq 3$, temos $\text{EX}(n, K_3) = \left\{K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil}\right\}$ e $\text{ex}(n, K_3) \leq \frac{n^2}{4}$.

Corolário 6.3 Se $n \geq p + 1$, então todo grafo com $t_{n,p-1} + 1$ arestas contém um $K_{p+1} - e$ (onde e é uma aresta qualquer de K_{p+1}).

Demonstração. Provaremos por indução em n .

Observe que para $n = p + 1$ o resultado é trivial (pois $t_{p+1,p-1} + 1 = \binom{p+1}{2} - 1$).

Suponha então que $n > p + 1$ e que o resultado é válido para $n - 1$.

Seja G um grafo de ordem n com $t_{n,p-1} + 1$ arestas.

Suponha que $\delta(G) > \delta(T_{n,p-1})$, então, como $|E(G)| = |E(T_{n,p-1})| + 1$, sabemos que G é um grafo $p - 1$ -partido completo, logo G contém um $K_{p+1} - e$.

Suponha então que $\delta(G) \leq \delta(T_{n,p-1})$, seja $x \in V(G)$ tal que $d_G(x) = \delta(G)$ e observe que

$$|E(G - x)| = t_{n,p-1} + 1 - \delta(G) \geq |E(T_{n,p-1})| + 1 - \delta(T_{n,p-1}) = |E(T_{n-1,p-1})| + 1 = t_{n-1,p-1}.$$

Portanto, pela hipótese de indução temos $G \supseteq G - x \supseteq K_{p+1} - e$. \square

Exercício 6.1. Temos

$$t_{n,p-1} \leq \frac{1}{2} n^2 \frac{p-2}{p-1},$$

e vale a igualdade quando $p-1$ divide n .

Corolário 6.4 Temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n,p-1}}{\binom{n}{2}} = \frac{p-2}{p-1}.$$

Na verdade, a proposição acima pode ser generalizada para um resultado que depende do Teorema de Erdős & Stone enunciado a seguir.

Informalmente, esse teorema diz que com apenas mais ϵn^2 arestas adicionais temos não apenas o K_p , mas um K_s^p , isto é, um p -partido completo com classes de ordem s .

Teorema 6.5 (Erdős & Stone, 1946). Para todo $p \geq 2$ e $s \geq 1$ inteiros, e para todo $\epsilon > 0$, existe um inteiro n_0 tal que todo grafo com $n \geq n_0$ vértices e pelo menos $t_{n,p-1} + \epsilon n^2$ arestas contém um K_s^p como subgrafo.

O seguinte corolário generaliza o Corolário 6.4.

Corolário 6.6 (Erdős & Stone). Para todo grafo G ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}(n, G)}{\binom{n}{2}} = \frac{\chi(G) - 2}{\chi(G) - 1}.$$

Demonstração. (Corolário 6.6) Seja $p = \chi(G)$. Como G não pode ser $(p-1)$ -colorido, temos que $G \not\subseteq T_{n,p-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e, portanto, temos $t_{n,p-1} \leq \text{ex}(n, G)$.

Por outro lado, para todo s suficientemente grande temos $G \subseteq K_s^p$ ($s \geq \Delta(G)$ é suficiente). Logo, temos $\text{ex}(n, G) \leq \text{ex}(n, K_s^p)$.

Vamos fixar um tal s . Para todo $\epsilon > 0$, o Teorema 6.5 implica que para n suficientemente grande temos $\text{ex}(n, K_s^p) < t_{n,p-1} + \epsilon n^2$.

Portanto, para n suficientemente grande temos que

$$\begin{aligned} \frac{t_{n,p}}{\binom{n}{2}} &\leq \frac{\text{ex}(n, G)}{\binom{n}{2}} \leq \frac{\text{ex}(n, K_s^p)}{\binom{n}{2}} < \frac{t_{n,p-1} + \epsilon n^2}{\binom{n}{2}} \\ &= \frac{t_{n,p-1}}{\binom{n}{2}} + \frac{2\epsilon}{1 - \frac{1}{n}} \leq \frac{t_{n,p-1}}{\binom{n}{2}} + 4\epsilon \end{aligned}$$

Usando o Corolário 6.4, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}(n, G)}{\binom{n}{2}} = \frac{p-2}{p-1} = \frac{\chi(G) - 2}{\chi(G) - 1}.$$

\square

Circuitos

Nesta seção, denotaremos por $s(n)$ o número mínimo de arestas tal que todo grafo com n vértices contém dois circuitos disjuntos nos vértices.

Teorema 6.7 Para todo $n \geq 6$, temos $s(n) = 3n - 5$.

Demonstração. Observe primeiramente que $K_{1,1,1,n-3}$ tem $3(n-3) + 3 = 3n - 6$ arestas e quaisquer dois circuitos se intersectam nos vértices, logo $s(n) \geq 3n - 5$.

Por indução em n , vamos provar que se G tem $3n - 5$ arestas, então existem dois circuitos de G que não se intersectam.

Se $n = 6$, então G tem 13 arestas. Isso significa que G é isomorfo a K_6 menos duas arestas e, portanto, tem duas cópias disjuntas de K_3 .

Suponha então que $n > 6$ e que o resultado é válido para $n - 1$.

Observe que $\delta(G) \leq 5$ e seja $v \in V(G)$ um vértice de grau mínimo.

Também sabemos que se algum conjunto de 6 vértices possuir pelo menos 13 arestas, então G possuirá duas cópias disjuntas de K_3 .

Caso 1: temos $d_G(v) = 5$.

Considere o grafo $G' = G - v$ e adicione duas arestas a um mesmo vértice de $N_G(v)$, observe que o novo grafo G'' possui $n - 1$ vértices e pelo menos $3n - 8$ arestas.

Pela hipótese de indução, existem dois circuitos disjuntos em G'' .

Se eles não usam as arestas novas, então o resultado vale para G' e portanto, para G .

Se um dos circuitos, digamos C , usa pelo menos uma das arestas novas, o outro não pode usar nenhuma aresta nova (pois os circuitos são disjuntos).

Portanto, podemos estender C para passar por v e evitar usar a aresta nova, obtendo assim dois circuitos disjuntos em G .

Caso 2: temos $d_G(v) = 4$.

Considere o grafo $G' = G - v$ e adicione uma aresta incidente a um vértice de $N_G(v)$, observe que o novo grafo G'' possui $n - 1$ vértices e pelo menos $3n - 8$ arestas.

Pela hipótese de indução, existem dois circuitos disjuntos em G'' .

Se um desses circuitos usar a aresta nova, podemos estendê-lo para passar por v e evitar usá-la, obtendo assim dois circuitos disjuntos em G .

Caso 3: temos $d_G(v) = 3$. Considere o grafo $G' = G - v$ e observe que ele possui $n - 1$ vértices e pelo menos $3n - 8$ arestas.

Logo, pela hipótese de indução, existem dois circuitos disjuntos em G' e, portanto, em G . \square

Teorema 6.8 Se G é um grafo com n vértices e m arestas e G não possui nenhuma cópia de C_4 , então $m \leq \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n - 3})$. Isto é, temos $\text{ex}(n, C_4) \leq \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n - 3})$.

Demonstração. Observe que se G é um grafo com n vértices e m arestas e não possui nenhuma cópia de C_4 , então para todo par de vértices x e y distintos, existe no máximo um z tal que $N_G(z) \supset \{x, y\}$.

Dessa observação, tiramos a seguinte desigualdade

$$\sum_{z \in V(G)} \binom{d(z)}{2} \leq \binom{n}{2}.$$

Observe agora que a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1; \\ \binom{x}{2}, & \text{se } x \geq 1; \end{cases}$$

é convexa, logo, pela Desigualdade de Jensen, temos

$$\frac{1}{n} \sum_{z \in V(G)} \binom{d(z)}{2} \geq \binom{2m/n}{2}.$$

Donde segue que

$$\frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{2m(2m-n)}{2n} = \frac{m(2m-n)}{n},$$

ou seja, temos

$$4m^2 - 2mn - n^3 + n^2 \leq 0.$$

Finalmente concluímos que

$$m \leq \frac{2n + \sqrt{4n^2 + 16(n^3 - n^2)}}{8} = \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n - 3}).$$

Portanto temos que $\text{ex}(n, C_4) \leq \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n - 3})$. □

6.3 EXERCÍCIOS

Exercício 6.2. Determine o valor de $\text{ex}(n, K_{1,r})$, para todos os naturais r, n .

Exercício 6.3. Prove que todo grafo com n vértices e $m = \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n - 3})$ arestas contém uma cópia de C_4 .

Exercício 6.4. Prove que $t_{n,p-1} \binom{n}{2}^{-1}$ converge para $(p-2)/(p-1)$ quando $n \rightarrow \infty$.
Sugestão: veja a sugestão dada no exercício 9 do livro de R. Diestel (Capítulo 7).

6.4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [AH89] K.I. Appel and W. Haken. *Every Planar Map Is Four Colorable*. Contemporary mathematics, v. 98. American Mathematical Society, 1989.
- [BM08] A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2008.
- [Bol98] B. Bollobás. *Modern graph theory*. Graduate Texts in Mathematics Series. Springer-Verlag GmbH, 1998.
- [Bro87] R.L. Brooks. On colouring the nodes of a network. In Ira Gessel and Gian-Carlo Rota, editors, *Classic Papers in Combinatorics*, Modern Birkhäuser Classics, pages 118–121. Birkhäuser Boston, 1987.
- [CCPS11] W.J. Cook, W.H. Cunningham, W.R. Pulleyblank, and A. Schrijver. *Combinatorial Optimization*. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley, 2011.

- [CRST06] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, and Robin Thomas. The strong perfect graph theorem. *ANNALS OF MATHEMATICS*, 164:51–229, 2006.
- [Die05] Reinhard Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.
- [ES35] P. Erdős and G. Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math.*, 2:463–470, 1935.
- [Fle14] Tamás Fleiner. Yet another proof for brooks’ theorem. Technical Report QP-2014-01, Egerváry Reserch Group, Budapest, 2014. www.cs.elte.hu/egres.
- [HS70] A. Hajnal and E. Szemerédi. Proof of a conjecture of P. Erdős. In *Combinatorial theory and its applications, II (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969)*, pages 601–623. North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [HT74] John Hopcroft and Robert Tarjan. Efficient planarity testing. *Journal of the ACM (JACM)*, 21(4):549–568, 1974.
- [Kru60] J. B. Kruskal. Well-quasi-ordering, the Tree Theorem, and Vazsonyi’s conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95:210–225, 1960.
- [Lov75] L Lovász. Three short proofs in graph theory. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 19(3):269 – 271, 1975.
- [Mac37] Saunders MacLane. A combinatorial condition for planar graphs. *Fund. Math.*, 28:22–32, 1937.
- [Mak97] Yury Makarychev. A short proof of kuratowski’s graph planarity criterion. *J. Graph Theory*, 25:129–131, 1997.
- [NC88] Takao Nishizeki and Norishige Chiba. *Planar graphs: Theory and algorithms*, volume 140. North Holland, 1988.
- [NRS06] Brendan Nagle, Vojtech Rödl, and Mathias Schacht. The counting lemma for regular k -uniform hypergraphs. *Random Struct. Algorithms*, 28(2):113–179, 2006.
- [OPT01] Deryk Osthus, Hans Jürgen Prömel, and Anusch Taraz. Almost all graphs with high girth and suitable density have high chromatic number. *J. Graph Theory*, 37(4):220–226, August 2001.
- [Ore55] Oystein Ore. Graphs and matching theorems. *Duke Math. J.*, 22:625–639, 1955.
- [PL86] D. Plummer and L. Lovász. *Matching Theory*. North-Holland Mathematics Studies. Elsevier Science, 1986.
- [Ric46] M. Richardson. On weakly ordered systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52:113–116, 1946.
- [Tho80] C. Thomassen. *Kuratowski’s Theorem*. Preprint series: Matematisk Institut. Matematisk Inst., Univ., 1980.
- [Tho81] Carsten Thomassen. Kuratowski’s theorem. *Journal of Graph Theory*, 5:225–241, 1981.
- [Tho88] Andrew Thomason. An upper bound for some Ramsey numbers. *J. Graph Theory*, 12(4):509–517, 1988.

- [TT81] C. Thomassen and B. Toft. Non-separating induced cycles in graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 31(2):199–224, October 1981.
- [Wes] Douglas B. West. Ore, Berge–Tutte, and Gallai–Edmonds.
- [Wes11] Douglas B. West. A short proof of the Berge–Tutte Formula and the Gallai–Edmonds Structure Theorem. *European Journal of Combinatorics*, 32(5):674–676, 2011.

7 NÚMEROS DE RAMSEY

7.1 TEORIA DE RAMSEY

Em 1927, Frank Plumpton Ramsey [1903 - 1930], lógico inglês, provou no seu trabalho de teoria dos conjuntos o que se chama hoje de *Teorema de Ramsey*, um teorema que abriu novas portas para o estudo de combinatória. Atualmente, devido a vastas pesquisas sobre o assunto, a área conhecida como *Teoria de Ramsey* é bem estabelecida na matemática. Essa teoria procura encontrar regularidades dentro de uma estrutura larga e caótica. Segundo as palavras de Theodore S. Motzkin: “A completa desordem é impossível.”

Neste capítulo, apresentaremos o Teorema de Ramsey e vários corolários.

7.2 TEOREMA DE RAMSEY

Vamos lembrar o *Princípio da Casa dos Pombos*: se colocamos $n + 1$ pombos em n casas, então alguma casa vai receber mais de um pombo. Embora simples, este princípio é uma poderosa ferramenta para obter resultados de existência. O Teorema de Ramsey pode, a grosso modo, ser visto como uma generalização do princípio da casa dos pombos.

Teorema 7.1 (Teorema de Ramsey, versão para grafos). Dados inteiros positivos n e m , existe um inteiro positivo N tal que, se G é um grafo com pelo menos N vértices, então G contém uma cópia do grafo completo K_n ou contém uma cópia do grafo vazio $\overline{K_m}$.

Uma afirmação que descreve bem o Teorema de Ramsey é a seguinte: Dados inteiros positivos n e m existe um inteiro positivo N tal que, em qualquer conjunto de N pessoas, sempre existem n pessoas que se conhecem mutuamente ou m pessoas que se desconhecem mutuamente.

O **número de Ramsey**, denotado por $r(n, m)$, é o menor N que satisfaz a condição acima. Não é difícil ver que as seguintes propriedades valem para $r(n, m)$.

1. Para todo inteiro positivo n , valem $r(n, 1) = 1$ e $r(n, 2) = n$;
2. Para todo inteiro positivo n e m , vale $r(n, m) = r(m, n)$.

Uma outra forma de definir o número de Ramsey é utilizando colorações. Dado um inteiro positivo k , uma k -coloração de um grafo G é uma função $c: E(G) \rightarrow X$, onde X é um conjunto de cardinalidade k . Muitas vezes, vemos a coloração c como a partição $\{c^{-1}(x) : x \in X\}$ de $E(G)$ induzida pela pré-imagem de c . Os elementos de X são chamados **cores** da coloração c .

Dada uma coloração c de um grafo G , um subgrafo $H \subseteq G$ e uma cor i , dizemos que H é monocromático de cor i se toda aresta de H possui cor i em G .

Portanto $r(n, m)$ é o menor inteiro positivo p tal que para toda 2-coloração de K_p , digamos, em verde e azul, existe um subgrafo K_n monocromático de cor verde ou um subgrafo K_m monocromático de cor azul.

Exercício 7.1. Mostre que todo grafo com seis vértices contém uma cópia de K_3 ou uma cópia de $\overline{K_3}$ e mostre que não vale para grafos com menos que seis vértices. Conclua que $r(3, 3) = 6$.

O resultado afirma que o número $r(n, m)$ está bem definido para todos inteiros positivos n e m .

Teorema 7.2 Para todos inteiros positivos $m \geq 2$ e $n \geq 2$, existe $r(n, m)$ e

$$r(n, m) \leq r(n-1, m) + r(n, m-1).$$

Demonstração. Vamos demonstrar usando indução em $m+n$.

Note que, para $n = 1$ ou $n = 2$, temos $r(1, m) = 1$ e $r(2, m) = m$, para qualquer m .

Suponha que $n \geq 3$ e $m \geq 3$, e que, para todos n' e m' tais que $n' + m' < n + m$, existe $r(n', m')$.

Se G é um grafo com $r(n-1, m) + r(n, m-1)$ vértices, então vamos mostrar que G contém uma cópia do grafo completo K_n ou contém uma cópia do grafo vazio $\overline{K_m}$. Pelo princípio da casa dos pombos, existe um vértice v em G tal que $d_G(v) \geq r(n-1, m)$ ou $d_{\overline{G}}(v) \geq r(n, m-1)$.

Suponha que existe v em G tal que $d_G(v) \geq r(n-1, m)$. Seja $H = G[\text{Adj}(v)]$. Pela hipótese de indução, $H \supseteq K_{n-1}$ ou $H \supseteq \overline{K_m}$. No primeiro caso, basta tomar o K_{n-1} em H e adicionar v . O segundo caso é óbvio.

A demonstração para o caso em que existe v tal que $d_{\overline{G}}(v) \geq r(n, m-1)$ é análoga, tomando $H = G[\text{Adj}_{\overline{G}}(v)]$. \square

Teorema 7.3 (Erdős & Szekeres, 35 [ES35]). Para todos inteiros positivos m e n , vale que

$$r(n, m) \leq \binom{n+m-2}{n-1}.$$

Demonstração. Vamos demonstrar usando indução em $n+m$.

Já vimos que, para $n = 1$ ou $n = 2$, temos $r(1, m) = 1$ e $r(2, m) = m$, para qualquer m .

Suponha que $n \geq 3$ e $m \geq 3$, e que, para todos n' e m' tais que $n' + m' < n + m$, vale a desigualdade do enunciado.

Em particular, vale que

$$r(n-1, m) \leq \binom{n+m-3}{n-2} \quad \text{e} \quad r(n, m-1) \leq \binom{n+m-3}{n-1}.$$

É fácil ver que

$$\binom{k}{p} = \binom{k-1}{p-1} + \binom{k-1}{p}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} r(n-1, m) + r(n, m-1) &\leq \binom{n+m-3}{n-2} + \binom{n+m-3}{n-1} \\ &= \binom{n+m-2}{n-1}. \end{aligned}$$

\square

Um (n, m) -grafo de Ramsey é um grafo com $r(n, m) - 1$ vértices que não contém K_n e nem $\overline{K_m}$.

Não é difícil ver que C_5 é um $(3, 3)$ -grafo de Ramsey; e o Wagner graph, que é o grafo C_8 com cordas ligando vértices opostos é um $(3, 4)$ -grafo de Ramsey. Observe que ambos os grafos provam que $r(3, 3) > 5$ e $r(3, 4) > 8$.

Em geral, para mostrar o valor exato de $r(n, m)$, basta exibir um (n, m) -grafo de Ramsey com $r(n, m) - 1$ vértices. Porém, é difícil explicitar um (n, m) -grafo de Ramsey para quaisquer n e m .

Poucos valores de $r(n, m)$ são conhecidos. A tabela abaixo mostra alguns deles com $n \geq 3$ e $m \geq 3$.

	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	40–42
4		18	25	36–41	49–61	58–84	73–115	92–149
5			43–49	58–87	80–143	101–216	126–316	144–442
6				102–165	113–298	132–495	169–780	179–1171
7					205–540	217–1031	241–1713	289–2826
8						282–1870	317–3583	331–6090
9							565–6588	581–12677
10								798–23556

Valores de $r(n, m)$

Um problema famoso relacionado ao Teorema de Ramsey é determinar ou estimar o número $r(n) = r(n, n)$. Já sabemos que $r(1) = 1$, $r(2) = 2$ e $r(3) = 6$. É um bom exercício provar que $r(4) = 18$. Sabe-se somente que $43 \leq r(5) \leq 49$.

Pelo Teorema 7.3, obtemos

$$r(n) \leq \binom{2n-2}{n-1} \leq \frac{c}{\sqrt{n}} 4^n$$

para alguma constante $c > 0$.

A melhor estimativa inferior é devida a Erdős, que utilizou o que chamamos hoje de *método probabilístico*, um poderoso método que é utilizado fortemente em várias pesquisas atuais.

Teorema 7.4 (Erdős, 1947). Para todo inteiro positivo $n \geq 3$,

$$r(n, n) > \left\lfloor 2^{n/2} \right\rfloor.$$

Demonstração. Fixe um conjunto V , com cardinalidade $p = \left\lfloor 2^{n/2} \right\rfloor$ e seja \mathcal{G}_p a classe de todos os grafos sobre V .

Afirmamos que existe $G \in \mathcal{G}_p$ tal que $G \not\supseteq K_n$ e $G \not\supseteq \overline{K_n}$.

Seja \mathcal{H}_p a classe de grafos de \mathcal{G}_p que contêm K_n como subgrafo. Seja $N := \binom{p}{2}$ e $M := \binom{n}{2}$. Então $|\mathcal{G}_p| = 2^N$. Para cada $S \subseteq V$, com $|S| = n$, o número de grafos em \mathcal{G}_p nos quais S induz um subgrafo completo K_n é 2^{N-M} . Então

$$|\mathcal{H}_p| \leq \binom{p}{n} 2^{N-M} < \frac{p^n}{n!} 2^{N-M}.$$

Sabemos que $p \leq 2^{n/2}$. Logo $p^n \leq 2^{n^2/2}$. Para $n \geq 3$, temos $2^{n/2} < n!/2$.

Assim

$$\begin{aligned} \left(2^{n/2}\right)^{1/n} &< \left(\frac{1}{2}n!\right)^{1/n} \\ 2^{1/2} &< \left(\frac{1}{2}n!\right)^{1/n} \\ 2^{n/2} &< \left(\frac{1}{2}n!\right)^{1/n} 2^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$p^n \leq 2^{n^2/2} < \left(\frac{1}{2}n!\right) 2^M.$$

Portanto,

$$|\mathcal{H}_p| < p^n \frac{1}{n!} 2^{N-M} < \left(\frac{1}{2}n!\right) 2^M \frac{1}{n!} 2^{N-M} = 2^{N-1}.$$

Seja \mathcal{H} o conjunto dos grafos em \mathcal{H}_p e seus complementos, isto é, o conjunto dos grafos que contêm K_n ou \overline{K}_n . Como $|\mathcal{G}_p| = 2^N$ e $|\mathcal{H}| < 2^{N-1}$, temos que \mathcal{H} é um subconjunto próprio de \mathcal{G}_p . Ou seja, existe $G \in \mathcal{G}_p \setminus \mathcal{H}$, como queríamos. \square

Thomason, em 1988 [Tho88], provou que existe uma constante $c > 0$ tal que,

$$r(n) \leq n^{-1/2+c/\sqrt{\log n}} \binom{2n-2}{n-1}.$$

Algumas conjecturas na Teoria de Ramsey ainda estão em aberto.

Conjectura 7.5 Existe uma constante k (talvez $k = 1$) tal que $r(n) = 2^{(k+O(1))n}$, para todo n .

Conjectura 7.6 O limite $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n)^{1/n}$ existe.

Erdős já sabia as seguintes estimativas em 1947, que provamos anteriormente

$$\sqrt{2} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} r(n)^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} r(n)^{1/n} \leq 4.$$

Assim, ele propôs no mesmo ano o problema de encontrar o limite, caso ele exista. Erdős ofereceu 100 dólares para quem resolver a Conjectura 7.6 e 250 dólares para quem conseguir calcular o limite, caso exista.

Teorema de Ramsey com mais cores

O Teorema de Ramsey garante que ao colorirmos as arestas do grafo completo de ordem $r(n, m)$ com duas cores, digamos azul e verde, existe um subgrafo completo monocromático de cor verde de ordem n ou de cor azul de ordem m . A seguir, veremos que o Teorema de Ramsey continua verdadeiro no caso em que temos mais do que duas cores.

Teorema 7.7 (Teorema de Ramsey com k cores). Fixe p_1, \dots, p_k inteiros positivos quaisquer. Existe um inteiro positivo n tal que para toda k -coloração das arestas do grafo completo de ordem n existe um subgrafo completo de ordem p_i monocromático de cor i , para algum $1 \leq i \leq k$.

Demonstração. Seja $r(p_1, \dots, p_k)$ o menor n que satisfaz o Teorema de Ramsey com k cores. Por indução em $p_1 + p_2 + \dots + p_k$, mostremos que

$$r(p_1, p_2, \dots, p_k) \leq 2 + \sum_{1 \leq i \leq k} (r_i - 1),$$

onde $r_i = r(p_1, \dots, p_i - 1, \dots, p_k)$ para todo $1 \leq i \leq k$.

Observe que, se existe algum i tal que $p_i = 1$, então $r(p_1, p_2, \dots, p_k) = 1$.

Suponha que todos os p_i 's são maiores que 1 e que a afirmação vale para $p_1 + p_2 + \dots + p_k - 1$.

Seja $n = 2 + \sum_{1 \leq i \leq k} (r_i - 1)$. Fixe uma k -coloração das arestas de K_n e v um vértice de K_n . Pela escolha de n , existe i tal que o vértice v possui pelo menos r_i incidentes arestas de cor i . Considere o grafo $G' = G - v$. Pela hipótese de indução, temos dois casos:

1. O grafo G' contém uma cópia K_{p_i-1} monocromática de cor i ;
2. O grafo G' contém uma cópia K_{p_j} monocromática de cor $j \neq i$.

No segundo caso, não há nada para fazer. Suponha então que não ocorreu o segundo caso. Como v possui pelo menos r_i arestas de cor i incidentes, temos que K_n possui um subgrafo K_{p_i} monocromático da cor i , como queríamos. \square

Teorema de Ramsey para hipergrafos completos

Estenderemos a versão de grafos do Teorema de Ramsey para hipergrafos. Um l -grafo é um par de conjuntos $G = (V, E)$ tal que $E \subset \binom{V}{l} = \{U \subset V : |U| = l\}$. Um l -grafo completo de ordem n , denotado por $K_n^{(l)}$, é um l -grafo de ordem n e de tamanho $\binom{n}{l}$.

Lema 7.8 (Princípio da Casa dos Pombos). Sejam k, p_1, \dots, p_k naturais. Se $\sum_{i=1}^k (p_i - 1) + 1$ objetos são coloridos com k cores, então existe pelo menos p_i objetos monocromáticos da cor i .

Demonstração. Suponhamos que existe uma k -coloração dos $\sum_{i=1}^k (p_i - 1) + 1$ objetos tal que toda cor i possui no máximo $p_i - 1$ objetos coloridos com essa cor. Neste caso, há no máximo $\sum_{i=1}^k (p_i - 1)$ objetos, uma contradição. \square

Teorema 7.9 (Teorema de Ramsey para hipergrafos). Para todo inteiros positivos p_1, \dots, p_k existe um inteiro positivo n tal que para toda k -coloração das arestas do l -grafo completo $K_n^{(l)}$ existe um subgrafo $K_{p_i}^{(l)}$ monocromático da cor i .

Demonstração. Mostremos, por indução dupla em l e $p_1 + \dots + p_k$, que

$$R^{(l)}(p_1, p_2, \dots, p_k) \leq 1 + R^{(l-1)}(R_1, R_2, \dots, R_k), \quad (7.1)$$

onde $R_i = R^{(l)}(p_1, \dots, p_i - 1, \dots, p_k)$.

Para $l = 1$, temos, pelo Lema 7.8, que $R^{(1)}(p_1, p_2, \dots, p_k)$ existe e é igual a $\sum_{i=1}^k (p_i - 1) + 1$.

Suponhamos que o teorema vale para um k -coloração do $(l - 1)$ -grafo completo. Mostremos, por indução em $p_1 + \dots + p_k$, que o teorema vale para uma k -coloração do l -grafo completo.

Se algum p_i é menor que l , então o grafo completo $K_{p_i}^{(l)}$ tem cor i . Logo

$$R^{(l)}(p_1, p_2, \dots, p_k) = \min\{p_1, \dots, p_k\}.$$

Suponhamos que a desigualdade (7.1) vale para $p_1 + \dots + p_k - 1$. Pela hipótese de indução (tanto a interna quanto a externa), R_i existem, para todo $1 \leq i \leq k$.

Seja $n = 1 + R^{(l-1)}(R_1, \dots, R_k)$. Fixemos uma k -coloração das arestas de $K_n^{(l)}$ e v vértice de $K_n^{(l)}$. Pela escolha de n , temos que existe i tal que o vértice v possui pelo menos R_i arestas de cor i incidentes. Temos dois casos:

1. Existe um subgrafo $K_{p_i-1}^{(l)}$ tal que suas arestas tem cor i ;
2. Existe um subgrafo $K_{p_j}^{(l)}$ com $j \neq i$ tal que suas arestas possuem a cor j .

Se ocorrer o segundo caso, não há nada para fazer. Suponhamos que ocorreu o primeiro caso. Como v possui R_i arestas de cor i incidentes e não ocorreu o segundo caso, temos que $K_n^{(l)}$ possui um subgrafo $K_{p_i}^{(l)}$ monocromático da cor i . \square

7.3 NÚMERO DE RAMSEY PARA GRAFOS ARBITRÁRIOS

Pela definição do número de Ramsey $r(n, m)$, queremos encontrar grafos com quantidade de vértices suficientemente grande para conter uma cópia de K_n ou $\overline{K_m}$. Podemos generalizar o número de Ramsey substituindo K_n e $\overline{K_m}$ por dois grafos G_1 e G_2 com $|V(G_1)| = n$ e $|V(G_2)| = m$. Neste caso, definimos o número de Ramsey generalizado.

Definição 7.10 Sejam n e m inteiros positivos e G_1 e G_2 grafos com ordem n e m , respectivamente. O *número de Ramsey generalizado* $r(G_1, G_2)$ é o menor inteiro positivo p tal que qualquer grafo G de ordem p contém uma cópia de G_1 ou seu complemento contém uma cópia de G_2 .

Claramente $r(n, m) = r(K_n, K_m)$. Ademais, para todo grafo G_1 e G_2 com ordem n e m , respectivamente, vale $r(G_1, G_2) \leq r(n, m)$. Isto mostra que $r(G_1, G_2)$ está bem definido. Entretanto, pode ocorrer que $r(G_1, G_2)$ seja muito menor que $r(n, m)$ se G_1 e G_2 forem ‘esparsos’, isto é, a ordem de G_1 e G_2 sejam relativamente grande em relação às suas quantidades de arestas.

Uma outra forma de definir o número de Ramsey generalizado é utilizando colorações. De fato, o número $r(G_1, G_2)$ é o menor inteiro positivo p tal que para toda 2-coloração das arestas do grafo completo K_p existe um subgrafo monocromático de cor i .

Apresentaremos alguns resultados para particulares grafos.

Teorema 7.11 (Chvátal, 77). Seja T_m uma árvore qualquer de ordem $m \geq 1$ e seja n um natural não nulo. Então

$$r(T_m, K_n) = 1 + (m - 1)(n - 1).$$

Demonstração. Se $m = 1$ ou $n = 1$ o resultado é trivial. Considere $G = (n - 1)K_{m-1}$ uma união disjunta de $n - 1$ cópias de K_{m-1} . Note que G tem $(m - 1)(n - 1)$ vértices e não contém nem T_m e nem $\overline{K_n}$. Isso mostra que $r(T_m, K_n) \leq 1 + (m - 1)(n - 1)$.

Seja G um grafo com $1 + (m - 1)(n - 1)$ vértices. Suponhamos que $G \not\supseteq \overline{K_n}$. Mostremos que $G \supseteq T_m$. Notemos que $\alpha(G) \leq n - 1$. Como $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$, vale

$$\chi(G) \geq \frac{1 + (m - 1)(n - 1)}{n - 1} > m - 1.$$

Portanto $\chi(G) \geq m$. Seja G' um subgrafo de G que é criticamente m -cromático, isto é, $\chi(G') = m$ e $\chi(G' - v) = m - 1$. Neste caso $\delta(G') \geq m - 1$ (exercício), onde concluímos $G' \supseteq T_m$. Portanto $G \supseteq T_m$, como queríamos. \square

Exercício 7.2. Fazer uma outra prova do Teorema 7.11, usando a linguagem de 2-coloração de $K_{(m-1)(n-1)+1}$ e fazendo indução em $m + n$.

Teorema 7.12 Para $l \geq 1$ e $p \geq 2$ temos

$$r(lK_2, K_p) = 2l + p - 2.$$

Demonstração. O grafo $K_{2l-1} \cup E_{p-2}$ não contém l arestas independentes, e seu complementar, o grafo $E_{2l-1} + K_{p-2}$, não contém um grafo completo de ordem p . Logo $r(lK_2, K_p) \geq 2l + p - 2$.

Por outro lado, seja G um grafo de ordem $n = 2l + p - 2$. Suponhamos que G contém no máximo $s \leq l - 1$ arestas independentes. Mostremos que \bar{G} contém um subgrafo K_p .

Como $n - 2s \geq 2l + p - 2 - 2(l - 1) = p$, temos que existe K_p em \bar{G} . \square

Notemos que se H é um grafo qualquer de ordem h , pelo Teorema 7.12, segue que

$$r(lK_2, H) \leq r(lK_2, K_h) \leq 2l + h - 2.$$

O resultado a seguir fornece uma cota inferior para o número de Ramsey generalizado. Seja G um grafo. Como usual, denotemos por $\chi(G)$ o número cromático de G . Ademais, lembremos que $c(G)$ é o máximo das ordens dos componentes de G , e definimos $u(G)$ como sendo a cardinalidade mínima das classes de cores considerando-se todas as colorações próprias de G com $\chi(G)$ cores.

Teorema 7.13 Para quaisquer grafos H_1 e H_2 não-vazios temos

$$r(H_1, H_2) \geq (\chi(H_1) - 1)(c(H_2) - 1) + u(H_1).$$

Demonstração. Sejam $k = \chi(H_1)$, $u = u(H_1)$ e $c = c(H_2)$. Naturalmente,

$$r(H_1, H_2) \geq r(H_1, K_2) = |H_1| \geq \chi(H_1)u(H_1) = ku.$$

Assim, se $c \leq u$, então $r(H_1, H_2) \geq ku \geq (k - 1)c + u$. Por outro lado, se $c > u$, então o grafo $G = (k - 1)K_{c-1} \cup K_{u-1}$ não contém H_2 , e seu complementar não contém H_1 . Portanto,

$$r(H_1, H_2) \geq |G| + 1 = (k - 1)(c - 1) + u,$$

como queríamos. \square

Teorema 7.14 Para $l \geq 2$ temos

$$r(F_1, F_l) = r(K_3, F_l) = 4l + 1,$$

onde F_l é união de l triângulos K_3 com um vértice em comum.

Demonstração. Pelo Teorema 7.13, sabemos que $r(K_3, F_l) \geq 2(|F_l| - 1) + 1 = 4l + 1$.

Suponhamos por absurdo que não vale a desigualdade $r(K_3, F_l) \leq 4l + 1$ isto é, existe um grafo G livre de triângulos de ordem $4l + 1$ tal que seu complementar não contém F_l .

Fixemos v vértice de G e seja $U = \Gamma_G(v)$. Então U é um conjunto de vértices independentes, e, como \bar{G} não contém F_l , temos $d_G(v) = |U| \leq 2l$.

Por outro lado, observemos o grau de v em \bar{G} . Seja $W = \Gamma_{\bar{G}}(v) = V(G) - (U \cup \{v\})$. Temos que $\bar{G}[W]$ não contém l arestas independentes, e seu complementar $G[W]$ não possui triângulos. Então, pelo Teorema 7.12, $d_{\bar{G}}(v) = |W| \leq 2l$.

Logo concluímos que $d_G(v) = d_{\bar{G}}(v) = 2l$ para todo $v \in G$, isto é, G é um grafo livre de triângulos $2l$ -regular de ordem $4l + 1$. Mostremos que isso não pode ocorrer.

Suponhamos por absurdo que existe um grafo $G = (V, E)$ que satisfaz as condições acima. Notemos que G pode ser escrito como um grafo bipartido com $2l$ vértices mais um vértice w . Temos dois casos, ou os vizinhos de w estão somente em um dos lados da partição, ou w tem vizinhos nos dois lados da partição.

Se ocorrer o primeiro caso, vamos supor, sem perda de generalidade, que w incide suas arestas no lado esquerdo da partição. Temos que cada vértice da partição da esquerda incide $2l - 1$ arestas na partição da direita. Logo, existe um vértice do lado direito da partição com no máximo $2l - 1$ arestas incididas, uma contradição.

Se ocorrer o segundo caso, suponhamos que w incide a arestas no lado esquerdo da partição e b arestas no lado direito da partição, com $a + b = 2l$. Suponhamos que $a \leq b$, isto é, $a \leq l$.

Por definição de grafo bipartido, sejam os conjuntos de vértices independentes W e X disjuntos tais que $W \cup X = V \setminus \{w\}$. Sejam os conjuntos $A \subset W$ e $B \subset X$ tais que $|A| = a$ e $|B| = b$ que satisfaz a condição acima.

Fixemos um vértice u de A . Temos que u não pode incidir em algum vértice de B , pois teríamos um triângulo. Logo u só pode incidir em $2l - b = a \leq l$ vértices. Mas assim $d(u) \leq l + 1$, uma contradição. \square

A seguir, apresentaremos outros resultados, sem provas, sobre o número de Ramsey generalizado.

Teorema 7.15 (Lawrence, 73).

$$r(C_m, K_{1,n}) = \begin{cases} 2n + 1 & \text{se } m \text{ é ímpar e } m \leq 2n + 1 \\ m & \text{se } m \geq 2n \end{cases}$$

Teorema 7.16 (Chvátal & Harary, 72). Para qualquer grafo G de ordem m e sem vértices isolados,

$$r(G, P_3) = \begin{cases} m + 1 & \text{se } \bar{G} \text{ tem um emparelhamento perfeito,} \\ m & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Teorema 7.17 (Chvátal & Gyárfás, 67). Para naturais m, n com $2 \leq m \leq n$

$$r(P_m, P_n) = n + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1$$

Teorema 7.18 (Faudree & Schelp, 74). Sejam m, n naturais tais que $3 \leq m \leq n$.

(a) Se m é ímpar e $(m, n) \neq (3, 3)$, então

$$r(C_m, C_n) = 2n - 1.$$

(b) Se m e n são pares e $(m, n) \neq (4, 4)$, então

$$r(C_m, C_n) = n + \frac{m}{2} - 1$$

(c) Se n é ímpar e m é par, então

$$r(C_m, C_n) = \max\{n + \frac{m}{2} - 1, 2m - 1\}$$

(d) $r(C_3, C_3) = r(C_4, C_4) = 6$.

7.4 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE RAMSEY

A Teoria de Ramsey é uma área extensa. Encontra-se, por exemplo, resultados na teoria dos grafos, na teoria dos conjuntos, na teoria dos números, na teoria ergódica, em sistemas dinâmicos topológicos.

Nesta seção veremos alguns resultados o qual é aplicado o Teorema de Ramsey, e também teoremas que são do tipo Ramsey, isto é, teoremas envolvendo estruturas que são preservadas sob partição.

Primeiramente apresentaremos o lema de Kőnig, um resultado importante na teoria dos grafos.

Teorema 7.19 [Lema de Kőnig] Seja V_0, V_1, \dots uma sequência *infinita* de conjuntos finitos disjuntos, não vazios, e seja G um grafo cujo conjunto de vértices é a união desses conjuntos. Suponha que todo vértice $v \in V_i$, $i \geq 1$, tem um vizinho $f(v)$ em V_{i-1} . Então G contém um *caminho infinito* $v_0 v_1 \dots$ com $v_i \in V_i$ para todo i .

Demonstração. Seja \mathcal{P} o conjunto dos caminhos da forma $(v, f(v), f(f(v)), \dots)$ que termina num vértice de V_0 . Como \mathcal{P} é infinito e V_0 é finito, existe um vértice de V_0 , digamos v_0 , que é término de um número infinito de caminhos de \mathcal{P} . Dentre esses infinitos caminhos que terminam em V_1 , há um número infinito de caminhos cujo penúltimo vértice é um vértice, digamos v_1 de V_1 . Procedendo indutivamente, definimos $v_i \in V_i$ para todo $i \geq 1$. Portanto $v_0 v_1 \dots$ é um caminho infinito em G . \square

Agora veremos a versão infinita do Teorema de Ramsey.

Definição 7.20 Dados X um conjunto de cardinalidade infinita e $k \in \mathbb{N}$, definimos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\infty(X) &= \{Y \subset X : |Y| = \infty\}; \\ \mathcal{P}_k(X) &= \{Y \subset X : |Y| = k\}.\end{aligned}$$

Definição 7.21 Seja c, k inteiros positivos e X um conjunto infinito. Uma c -coloração em $\mathcal{P}_k(X)$ é uma partição de $\mathcal{P}_k(X)$ em no máximo k classes. Se (A_1, \dots, A_c) é uma coloração de $\mathcal{P}_k(X)$, para cada i , dizemos que cada elemento de A_i está *colorido* com a cor i .

Dado uma c -coloração em $\mathcal{P}_k(X)$, um conjunto $Y \in \mathcal{P}_\infty(X)$ é *monocromático* se todos os elementos de $\mathcal{P}_k(Y)$ estão coloridos com a cor i , para algum i .

Teorema 7.22 [Versão infinita do Teorema de Ramsey] Sejam k, c inteiros positivos e X um conjunto infinito. Para toda c -coloração em $\mathcal{P}_k(X)$ existe um conjunto $Y \in \mathcal{P}_\infty(X)$ monocromático.

Demonstração. A prova segue por indução em k . Se $k = 1$ o resultado é óbvio, pois $\mathcal{P}_1(X) = X$.

Suponhamos que o resultado vale para $k - 1$. Fixe uma c -coloração em $\mathcal{P}_k(X)$. Vamos construir uma sequência infinita X_0, X_1, X_2, \dots de subconjuntos *infinitos* de X , e escolher $x_i \in X_i$ com as seguintes propriedades.

- (a) $X_{i+1} \subseteq X_i \setminus \{x_i\}$;
- (b) Todos os conjuntos $\{x_i\} \cup Z \in \mathcal{P}_k(X_{i+1})$ com $Z \in \mathcal{P}_{k-1}(X_{i+1})$ têm a mesma cor.

Começamos com $X_0 = X$ e tomamos $x_0 \in X$ arbitrário. Por hipótese, sabemos que X_0 é infinito. Uma vez escolhido X_i e um elemento $x_i \in X_i$, definimos uma c -coloração de $\mathcal{P}_{k-1}(X_i \setminus \{x_i\})$, onde cada conjunto $Z \in \mathcal{P}_{k-1}(X_i \setminus \{x_i\})$ recebe a cor de $\{x_i\} \cup Z$ da c -coloração de $\mathcal{P}_k(X)$.

Pela hipótese de indução, temos que $X_i \setminus \{x_i\}$ tem um subconjunto $Y' \in \mathcal{P}_\infty(X_i \setminus \{x_i\})$ monocromático, que tomamos para ser X_{i+1} .

Notemos que tal construção satisfaz (a) e (b). Ademais, existe um $t \in \{1, \dots, c\}$ e uma subsequência $(x_{i_p})_{p \geq 0}$ de $(x_i)_{i \geq 0}$ tais que X_{i_p} é monocromático com a cor t . Pela Propriedade (a), todo conjunto $C \subset \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots\}$ está colorido com a cor i . Portanto (x_{i_p}) formam o conjunto Y procurado. \square

O teorema a seguir é o resultado obtido por Ramsey em 1927.

Teorema 7.23 [Teorema de Ramsey, 1927] Dados inteiros positivos c , t e k , existe um natural $p \geq k$ tal que para todo conjunto X com p elementos e uma c -coloração de $\mathcal{P}_k(X)$, existe um $Y \in \mathcal{P}_t(X)$ monocromático.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que a afirmação do teorema seja falsa para alguma tripla (c, t, k) . Assim, para todo $p \geq k$ existem um conjunto X com $|X| = p$, o qual podemos supor, sem perda de generalidade, que $X = [p]$, e uma c -coloração de $\mathcal{P}_k(X)$ tal que X não contém um $Y \in \mathcal{P}_t(X)$ monocromático. Denominemos tais colorações de “ruins”.

Mostremos que essas colorações ruins induzem uma coloração ruim de $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$, contrariando o Teorema 7.22.

Para todo $p \geq k$, seja V_p o conjunto das colorações ruins de $\mathcal{P}_k([p])$. Claramente, para todo $p > k$ temos que se $g \in V_p$ então a restrição $f(g)$ de g a $\mathcal{P}_k([p-1])$ é uma coloração ruim e, portanto, pertence a V_{p-1} .

Pelo Lema 7.19, existe uma sequência infinita $(g_p)_{p \geq k}$ de colorações ruins $g_p \in V_p$ tais que $f(g_p) = g_{p-1}$ para todo $p > k$. Para todo $m \geq k$, todas as colorações ruins g_p , com $p \geq m$ coincidem sobre $\mathcal{P}_k([m])$, e portanto para cada $Y \in \mathcal{P}_k(\mathbb{N}^*)$ o valor $g_p(Y)$ coincide para todo $p \geq \max Y$.

Defina $g(Y)$ como este valor comum $g_p(Y)$. Então g é uma coloração ruim de $\mathcal{P}_k(\mathbb{N}^*)$. De fato, pois todo subconjunto $T \subseteq \mathbb{N}^*$ com $|T| = t$ está contido em algum $[p]$ (basta tomar $p = \max T$) e, portanto, T não pode ser monocromático, pois g coincide sobre $\mathcal{P}_k([p])$ com a coloração ruim g_p . A existência dessa coloração ruim de $\mathcal{P}_k(\mathbb{N}^*)$ contradiz o Teorema 7.22, como queríamos. \square

O seguinte teorema pode ser provado com o auxílio do axioma da escolha.

Teorema 7.24 (Teorema de Ramsey fortalecido). Dados inteiros positivos m , r , k , existe um inteiro positivo n tal que para toda r -coloração de $\mathcal{P}_k([n])$ existe um conjunto $Y \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ monocromático com $|Y| \geq m$ e $|Y| > \min\{y : y \in Y\}$.

Demonstração. Fixe m , r , k inteiros positivos. Seja \mathcal{A} a família dos conjuntos finitos $A \subset [m, \infty)$ tais que $|A| > \min A$.

Fixe uma r -coloração em $\mathcal{P}_k([m, \infty))$. Pelo Teorema 7.22, existe um conjunto monocromático $T \in \mathcal{P}_\infty([m, \infty))$. Seja Y o conjunto formado pelos $\min(T) + 1$ primeiros elementos de T . Então

$$|Y| = \min(T) + 1 > \min(T) = \min(Y).$$

Portanto $Y \in \mathcal{A}$. A existência de n segue pelo princípio da compacidade. \square

O Teorema da Incompletude de Gödel afirma que existe uma proposição ϕ na teoria de primeira ordem da aritmética de Peano AP tal que se AP for consistente, então nem ϕ nem a negação de ϕ são demonstráveis em AP.

Em 1977, J. Paris e L. Harrington exibiram um exemplo de uma asserção do tipo Ramsey que satisfaz o teorema da incompletude de Gödel.

Teorema 7.25 (Paris – Harrington, 1977). O Teorema de Ramsey fortalecido não pode ser provada na aritmética de Peano.

Até este momento, estamos sempre trabalhando com um número finito de cores. Apresentaremos agora um exemplo mostrando que o Teorema 7.22 é falso quando colorimos subconjuntos de cardinalidade infinita.

Proposição 7.26 Existe uma 2-coloração de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ que não possui um subconjunto monocromático de cardinalidade infinita.

Demonstração. Construimos uma 2-coloração c tal que para todo $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ e $x \in M$ temos $c(M \setminus \{x\}) \neq c(M)$. Isto é claramente suficiente para provar a proposição.

Definimos uma relação \sim sobre $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ definida por $L \sim M$ se $|L \Delta M| < \infty$, onde $L \Delta M = (L \setminus M) \cup (M \setminus L)$. Mostremos que \sim é uma relação de equivalência.

- i) Claramente $L \sim L$ pois $|L \Delta L| = 0 < \infty$ para todo $L \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$;
- ii) Claramente $L \sim M$ se e somente se $M \sim L$, pois $|L \Delta M| = |M \Delta L|$ para todo $L, M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$;
- iii) Sejam $L, M, N \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, mostremos que se $L \sim M$ e $M \sim N$ então $L \sim N$.

Como $|L \Delta M| < \infty$, temos $L \setminus M$ e $M \setminus L$ finitos.

Como $|M \Delta N| < \infty$, temos $M \setminus N$ e $N \setminus M$ finitos.

Assim,

$$L \setminus N = (L \setminus (N \cup M)) \cup ((L \cap M) \setminus N) \subset (L \setminus M) \cup (M \setminus N).$$

e

$$N \setminus L = (N \setminus (L \cup M)) \cup ((M \cap N) \setminus L) \subset (N \setminus M) \cup (M \setminus L).$$

Logo $L \setminus N$ e $N \setminus L$ são finitos. E portanto $|L \Delta N| = |L \setminus N| + |N \setminus L| < \infty$.

Denotemos as classes de equivalências por $\{E_i : i \in I\}$. Para cada i escolhemos $M_i \in E_i$. Observemos que dado $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ existe único $i \in I$ tal que $M \sim M_i$.

Definimos $c : \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}) \rightarrow [2]$ dada por $c(M) = 1$ se $|M \Delta M_i|$ é par para algum $i \in I$ e $c(M) = 2$ se $|M \Delta M_i|$ é ímpar para algum $i \in I$.

Fixemos $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ e $x \in M$. Se $c(M) = 1$, então $|M \Delta M_i|$ é par para algum $i \in I$, logo $|M \setminus \{x\} \Delta M_i|$ é ímpar. Portanto $c(M \setminus \{x\}) = 2$. Analogamente, se $c(M) = 2$, então $c(M \setminus \{x\}) = 1$. \square

Apresentemos uma aplicação à geometria utilizando o Teorema de Ramsey, conhecida como *Happy Ending Problem*.

Teorema 7.27 (Erdős – Szekeres, 1935). Dado $m \geq 3$, existe o menor natural $f(m)$ tal que, para todo $f(m)$ pontos no plano três a três não-colineares existem m desses pontos que formam um polígono convexo.

Exercício 7.3. Prove o Teorema 7.27. Utilize e prove os seguintes lemas abaixo.

Lema 7.28 Entre cinco pontos do plano três a três não colineares, existem quatro que formam um quadrilátero convexo.

Lema 7.29 Se entre $m \geq 4$ pontos no plano, três a três não-colineares, cada quatro formam vértices de um quadrilátero convexo, então os m pontos são os vértices de um polígono convexo.

Claramente $f(3) = 3$. É um bom exercício provar que $f(4) = 5$ e $f(5) = 9$. Em 2006, Szekeres e Peters provaram que $f(6) = 17$. A partir desses números, é natural conjecturarmos que $f(m) = 2^{m-2} + 1$. Em 1961, Erdős e Szekeres provaram que $f(m) \geq 2^{m-2} + 1$. A melhor cota superior conhecida é devida a Tóth e Valtr, provada em 2005. Quando $m \geq 7$,

$$f(m) \leq \binom{2m-5}{m-2} = O\left(\frac{4^m}{\sqrt{m}}\right).$$

Teoremas tipo Ramsey na combinatória aditiva

A seguir, veremos uma aplicação do Teorema 7.23 para obter um resultado de combinatória aditiva. O resultado a seguir foi provado por Issai Schur em 1916.

Teorema 7.30 (Schur, 1916). Para todo inteiro positivo $n \geq 2$ existe um menor natural $\phi(n)$ tal que para qualquer partição do conjunto $\{1, \dots, \phi(n)\}$ em n classes, existem inteiros x, y, z numa mesma classe, tais que $x + y = z$.

Demonstração. Seja $(c, t, k) = (n, 3, 2)$. Pelo Teorema 7.23, existe um inteiro positivo $p \geq 2$ tal que para toda n -coloração de $\mathcal{P}_2([p])$ existe um conjunto $Y \subset X$ monocromático com $|Y| = 3$.

Considere uma n -coloração de $[p]$ em n classes X_1, \dots, X_n , e defina a seguinte partição de $\mathcal{P}_2([p])$.

$$\mathcal{C}_i = \{\{a, b\} \in \mathcal{P}_2([p]) : |a - b| \in X_i\},$$

para todo $1 \leq i \leq n$.

Como $(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n)$ é uma n -coloração de $\mathcal{P}_2([p])$, existe um conjunto $Y = \{a, b, c\}$ de X , tal que $\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\} \in \mathcal{C}_i$ para algum i .

Suponhamos que $a > b > c$. Sejam $x = b - a$, $y = c - b$ e $z = c - a$. Temos $x, y, z \in X_i$ e $x + y = z$, como queríamos. \square

Exercício 7.4. Mostre que para toda 2-coloração do conjunto $\{1, 2, \dots, 325\}$ existem inteiros positivos x, y, z distintos de mesma cor tais que $y = \frac{1}{2}(x + z)$.

Motivado pelo estudo do Último Teorema de Fermat, Schur demonstrou o seguinte teorema.

Teorema 7.31 (Schur, 1916). Para todo inteiro positivo n , existe um primo p_0 tal que, para todo primo $p \geq p_0$, a equação

$$x^n + y^n \equiv z^n \pmod{p}$$

possui uma solução não trivial em \mathbb{Z}_p .

Demonstração. Fixe um inteiro positivo n . Pelo Teorema 7.30, existe um primo p_0 tal que, para toda n -coloração de $[p_0]$ existem $x_0, y_0, z_0 \in [p_0]$ de mesma cor tais que $x_0 + y_0 = z_0$.

Fixe um primo $p \geq p_0$ qualquer e considere o grupo multiplicativo \mathbb{Z}_p^* . Sabemos que este grupo possui um gerador g , isto é, se $t \in \mathbb{Z}_p^*$, então $t = g^m$

para algum inteiro positivo m . Logo, todo elemento $t \in \mathbb{Z}_p^*$ pode ser escrito da forma $t = g^{kn+r}$, onde k é inteiro positivo e $0 \leq r \leq n-1$. Façamos uma n -coloração em \mathbb{Z}_p^* dada por $c(t) = r$. Pelo Teorema 7.30, existem $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_p^*$ tais que $c(x_1) = c(x_2) = c(x_3)$ e $x_1 + x_2 \equiv x_3 \pmod{p}$. Assim

$$g^{k_1n+r} + g^{k_2n+r} \equiv g^{k_3n+r} \pmod{p}.$$

Como g^r é inversível módulo p , tomando $x = g^{k_1}$, $y = g^{k_2}$ e $z = g^{k_3}$, obtemos

$$x^n + y^n \equiv z^n \pmod{p},$$

como queríamos. □

Segue agora um resultado clássico que foi conjecturado por Schur e que foi provado por Bartel L. van der Waerden em 1927.

Teorema 7.32 Para todo inteiros positivos r e k existe um inteiro positivo n tal que toda r -coloração de $[n]$ contém uma progressão aritmética monocromática de comprimento k .

Demonstração. Definimos $W(r, k)$ como o menor inteiro positivo n que satisfaz o teorema acima.

Mostremos que $W(r, k)$ está bem definido por indução dupla. Claramente para $k \leq 2$ é trivial, para todo inteiro positivo r . Suponhamos que $W(r, k-1)$ existe para todo inteiro positivo r . Denotemos por $A_i = PA(a_i, r_i, l)$ como o subconjunto dos inteiros positivos que forma uma progressão aritmética de comprimento l , primeiro elemento a_i e razão r_i . As progressões aritméticas A_1, \dots, A_t são ditas *focadas em* $z \in \mathbb{Z}$ se $a_i + lr_i = z$ para todo $1 \leq i \leq t$, e são ditas *focadas em cores* se todas são monocromáticas, e cada uma está colorido diferentemente das outras.

Mostremos a seguinte afirmação: Sejam k e r inteiros positivos. Para todo $s \leq r$ existe um inteiro positivo n tal que para toda r -coloração de $[n]$ existe ou uma progressão aritmética de comprimento k , ou s progressões aritméticas focadas em cores de comprimento $k-1$.

A prova é por indução em s . Se $s = 1$, pela hipótese de indução, podemos tomar $n = W(r, k-1)$, que claramente satisfaz a afirmação.

Seja $s > 1$, e suponhamos, por hipótese de indução, que existe um n para $s-1$. Mostremos que $N = 2nW(r^{2n}, k-1)$ é o inteiro que satisfará a afirmação para s . De fato, particionaremos $[N]$ em blocos de comprimento $2n$. Pela definição de n , cada bloco contém ou uma progressão aritmética de comprimento k (e neste caso o resultado segue), ou contém $s-1$ progressões aritméticas focadas em cores de comprimento $k-1$, cujo foco dessas progressões pertencem ao mesmo bloco.

Observe que a r -coloração em $[N]$ induz uma r^{2n} -coloração nos blocos. Pela definição de N , existe uma progressão aritmética monocromática $\{B(x), B(x+y), \dots, B(x+(k-2)y)\}$, onde $B(x+iy)$ são os blocos.

Seja $A_i = PA(a_i, r_i, k-1)$, com $1 \leq i \leq s-1$ as $s-1$ progressões aritméticas focadas em cores em $B(x)$, e seja z o foco. Observe que as seguintes s progressões aritméticas de comprimento $k-1$ são focadas em cores no foco $z + 2yn(k-1)$.

$$\tilde{A}_i = PA(a_i, r_i + 2yi, k-1),$$

com $1 \leq i \leq s-1$, e $PA(z, 2yn, k-1)$, isso prova a afirmação.

Tomando $r = s$, se existe uma progressão aritmética de comprimento k , o teorema segue. Se existem s progressões aritméticas focadas em cores de comprimento $k - 1$, então uma delas é uma progressão aritmética que possui a mesma cor do foco, e logo é uma progressão aritmética de comprimento k , como queríamos. \square

A *hierarquia de Ackermann* é uma família de funções $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ com n inteiro positivo dadas por $f_1(k) = 2k$, e $f_{n+1}(k) = f_n^k(1)$. Note que $f_2(k) = 2^k$ e $f_3(k)$ é uma torre de 2 de altura k .

A cota superior dada na demonstração acima é muito ruim. De fato, a função $W(2, k)$ cresce mais rápido que todas as funções da hierarquia de Ackermann. Mas em 1988, Shelah mostrou uma cota muito melhor, a saber,

$$W(r, k) \leq f_4(r + k).$$

Em 2001, Gower encontrou uma cota melhorada para duas cores, a saber,

$$W(2, k) \leq 2^{2^{2^{2^{k+9}}}}.$$

Graham conjecturou, oferecendo 1000 dólares a quem resolver a conjectura, que para todo k inteiro positivo, vale

$$W(2, k) \leq 2^{k^2}.$$

A conjectura está aberta há mais de 30 anos.

Berlekamp apresentou uma cota inferior para o número de van der Waerden. A saber,

$$W(2, p + 1) \geq p^{2^p},$$

para todo primo p .

Exercício 7.5. Prove ou dê um contra-exemplo. Para toda 2-coloração dos naturais existe uma progressão aritmética monocromática de comprimento infinito.

Apresentaremos a seguir o Teorema de van der Waerden fortalecido, onde a razão é monocromática juntamente com a progressão aritmética.

Teorema 7.33 (Teorema de van der Waerden fortalecido). Para todo inteiros positivos p e k , existe um inteiro positivo n tal que para toda k -coloração de $[n]$ existe uma progressão aritmética de comprimento p tal que seus elementos e sua razão possuem as mesmas cores.

Exercício 7.6. Prove o Teorema 7.33 a partir do Teorema 7.32.

Pode-se deduzir o Teorema de Schur utilizando o Teorema 7.33 tomando $p = 2$, pois obtemos uma progressão aritmética de comprimento dois tal que seus elementos e sua razão possuem as mesmas cores.

O resultado mais importante da combinatória aditiva é o Teorema de Szemerédi, o qual foi conjecturado por Erdős e Turán em 1936. A densidade superior é definida por

$$\bar{d}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap [n]|}{n}.$$

Teorema 7.34 (Szemerédi, 1975) Todo subconjunto dos naturais com densidade superior positiva contém uma progressão aritmética de comprimento arbitrariamente longo.

Em 2001, Gowers exibiu uma versão quantitativa do Teorema 7.34.

Teorema 7.35 (Gowers, 2001). Para todo $k > 0$, todo subconjunto de $[N]$ de cardinalidade no mínimo $N(\log \log N)^{-c(k)}$ contém uma progressão aritmética de comprimento k , onde $c(k) = 2^{-2^{k+9}}$.

Em 1977, Furstenberg exibiu uma prova alternativa do Teorema 7.34 utilizando métodos da teoria ergódica; Nagle, Rödl e Schacht, em 2006 [NRS06], provaram o resultado utilizando hipergrafos. O seguinte teorema foi provado por Green e Tao.

Teorema 7.36 (Green – Tao, 2008). Existem progressões aritméticas arbitrariamente longas no conjunto dos números primos.

Note que o resultado não segue do Teorema 7.34, pois se $\pi(n)$ é a quantidade de primos que tem entre 1 e n , pelo Teorema dos números primos,

$$\pi(n) = \frac{n}{\log n}.$$

Portanto, se P é o conjunto dos números primos,

$$\bar{d}(P) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n} = 0,$$

logo P não tem densidade superior positiva.

Antes de Green e Tao, já haviam resultados sobre progressões aritméticas de números primos, como o Teorema de van der Corput.

Teorema 7.37 (van der Corput, 1939). Existem infinitas progressões aritméticas de comprimento três no conjunto dos números primos.

Erdős e Turán conjecturaram a seguinte afirmação.

Conjectura 7.38 Se A é um subconjunto dos naturais satisfazendo

$$\sum_{a \in A} \frac{1}{a} = +\infty,$$

então A contém progressões aritméticas de comprimento arbitrariamente longos.

Observe que Teorema 7.36 e o Teorema 7.34 satisfazem a conjectura acima.

7.5 EXERCÍCIOS

Exercício 7.7. Vimos que $r(m, n) \leq r(m-1, n) + r(m, n-1)$ para todo $m, n > 2$. Mostre que se $r(m-1, n)$ e $r(m, n-1)$ são ambos pares, então vale a desigualdade estrita

$$r(m, n) < r(m-1, n) + r(m, n-1).$$

Exercício 7.8. Seja $n \geq 2$ um natural e considere o grafo K_p sobre o conjunto de vértices $\{1, 2, \dots, 3n-4\}$.

Faça uma coloração das arestas de K_p tal que

$$\text{cor}(ij) = \begin{cases} \text{vermelho} & \text{se } |i-j| \geq 1 \pmod{3} \\ \text{azul} & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Mostre que esse grafo colorido não tem um K_3 vermelho e nem um K_n azul. Deduza que $r(3, n) \geq 3(n - 1)$.

Exercício 7.9. Use os exercícios 7.7 e 7.8 acima para provar que

$$r(3, 4) = 9.$$

Exercício 7.10. Sejam m, n naturais tais que $m - 1$ divide $n - 1$. Seja T_m uma árvore qualquer de ordem m . Mostre que $r(T_m, K_{1,n}) = m + n - 1$.

Exercício 7.11. Seja (X, \leq) um conjunto totalmente ordenado, e seja $G = (V, E)$ o grafo com $V := \mathcal{P}_2 X$ e $E := \{(x, y)(x', y') : x < y = x' < y'\}$.

- (a) Mostre que G não contém triângulos.
- (b) Mostre que $\chi(G)$ se torna arbitrariamente grande se $|X|$ é suficientemente grande. [Sugestão: $r(c, 3; 2)$]

7.6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [ES35] P. Erdős and G. Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math.*, 2:463–470, 1935.
- [NRS06] Brendan Nagle, Vojtech Rödl, and Mathias Schacht. The counting lemma for regular k -uniform hypergraphs. *Random Struct. Algorithms*, 28(2):113–179, 2006.
- [Tho88] Andrew Thomason. An upper bound for some Ramsey numbers. *J. Graph Theory*, 12(4):509–517, 1988.

8 DECOMPOSIÇÃO ARBÓREA / LARGURA ARBÓREA

Uma **decomposição arbórea** (d.a.) de um grafo G é um par (T, \mathcal{W}) , onde

- T é uma árvore e
- $\mathcal{W} = \{W_t \subseteq V(G) : t \in V(T)\}$ é uma família de conjuntos de vértices de G indexada pelos vértices de T ;

E são tais que

- O conjunto \mathcal{W} cobre $V(G)$ (i.e., temos $\bigcup_{t \in V(T)} W_t = V(G)$), e toda aresta de G tem ambos os extremos em algum W_t (i.e., temos $\bigcup_{t \in V(T)} E(G[W_t]) = E(G)$); e
- se $t, t', t'' \in V(T)$ e t' está no (único) caminho de t para t'' em T então $W_t \cap W_{t''} \subseteq W_{t'}$.

A **largura** (width) da decomposição arbórea (T, \mathcal{W}) é definida como

$$\max\{|W_t| - 1 : t \in V(T)\}$$

e sua **ordem** como

$$\begin{cases} 0 & \text{se } E(T) = \emptyset; \text{ e} \\ \max\{|W_t \cap W_{t'}| : t, t' \text{ adjacentes em } T\} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplos. Considere $G = C_5$ com $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ e $E(G) = \{ab, bc, cd, de, ea\}$.

- Uma decomposição arbórea de C_5 : $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$, onde $V(T) = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, $E(T) = \{t_i t_{i+1} : i \in \{1, 2, 3\}\}$ e $W_{t_1} = \{a, b\}$, $W_{t_2} = \{a, b, c\}$, $W_{t_3} = \{a, b, c, d\}$, $W_{t_4} = \{a, b, c, d, e\}$.

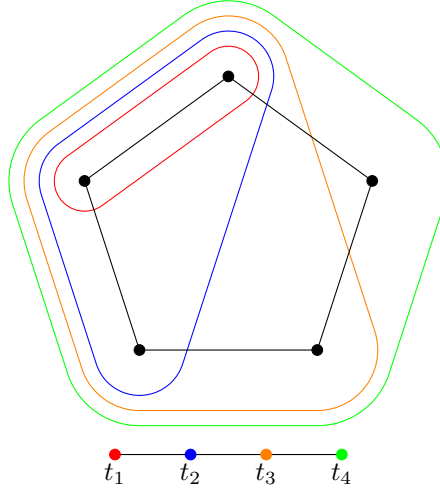


Figura 8.1: Exemplo a de decomposição arbórea do C_5 .

Essa decomposição tem largura 4 e ordem 4.

- Uma outra decomposição arbórea de C_5 : $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$, onde $V(T) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$, $E(T) = \{t_i t_{i+1} : i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$ e $W_{t_1} = \{a, b\}$, $W_{t_2} = \{a, b, c\}$, $W_{t_3} = \{a, c, d\}$, $W_{t_4} = \{a, d, e\}$, $W_{t_5} = \{a, e\}$.

Essa decomposição tem largura 2 e ordem 2.

- Outra decomposição arbórea de C_5 : $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$, onde $V(T) = \{t_1, t_2, t_3\}$, $E(T) = \{t_i t_{i+1} : i \in \{1, 2\}\}$ e $W_{t_1} = \{a, b, c\}$, $W_{t_2} = \{a, c, d\}$, $W_{t_3} = \{a, d, e\}$.

Essa decomposição tem largura 2 e ordem 2.

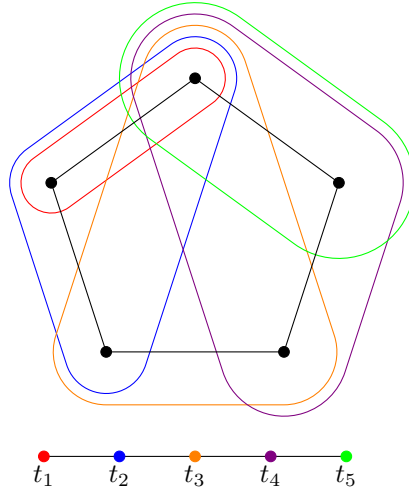


Figura 8.2: Exemplo b de decomposição arbórea do C_5 .

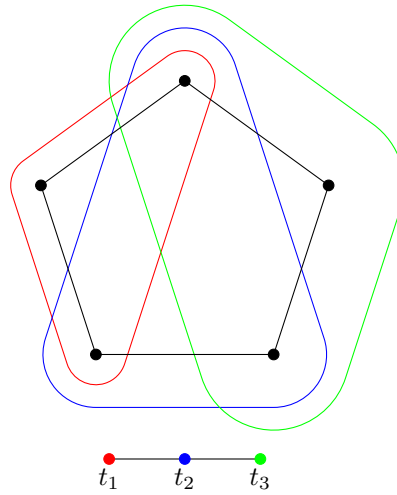


Figura 8.3: Exemplo c de decomposição arbórea do C_5 .

- (d) Outra decomposição arbórea de C_5 : $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$, onde $V(T) = \{t_1\}$, $E(T) = \emptyset$ e $W_{t_1} = V(G)$.

Essa decomposição é chamada de **Decomposição Arbórea Trivial** e tem largura $|V(G)| - 1$ e ordem 0. Todos os grafos possuem tal decomposição, elas não são de nenhum interesse.

Os exemplos acima foram todos dados com T um caminho, mas a estrutura de árvore pode ser útil para construirmos uma decomposição de largura pequena, como sugerido pelo exemplo a seguir.

Exemplo 8.1 Considere o grafo G definido por $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $E(G) = \{ab, ad, bc, bd, be, ce, df, ef\}$.

Uma decomposição arbórea de G é $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$, onde $V(T) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$, $E(T) = \{t_i t_4 : i \in \{1, 2, 3\}\}$ e $W_{t_1} = \{a, b, d\}$, $W_{t_2} = \{b, c, e\}$, $W_{t_3} = \{d, e, f\}$, $W_{t_4} = \{b, d, e\}$.

Esta decomposição tem largura 2 e ordem 2.

As decomposições arbóreas interessantes são as de largura pequena, pois muitos algoritmos exploram tal decomposição e levam tempo exponencial em sua largura.

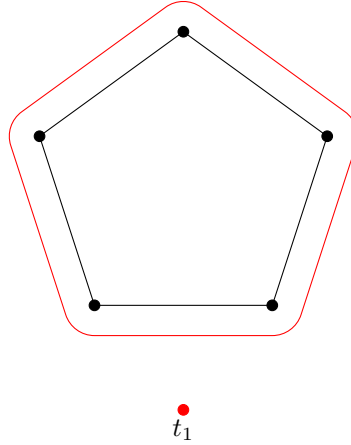


Figura 8.4: Exemplo d de decomposição arbórea do C_5 .

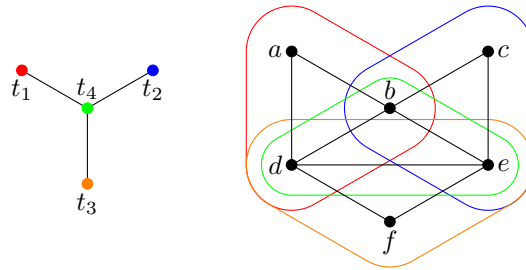


Figura 8.5: Exemplo 8.1 de decomposição arbórea.

Claramente é mais difícil conseguirmos uma decomposição arbórea em que a árvore em questão é um caminho, quando o fazemos, a decomposição obtida é chamada de **decomposição em caminho**.

Dada uma decomposição arbórea $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ de G , para cada $t \in T$ podemos escolher um subgrafo X_t de G com conjunto de vértices W_t tal que cada aresta de G está em precisamente um desses subgrafos. Tal escolha determina uma partição de $E(G)$ (note que X_t não precisa ser necessariamente conexo).

No caso do Exemplo 8.1, podemos ter $E(X_{t_1}) = \{ab, ad\}$, $E(X_{t_2}) = \{bc, be, ce\}$, $E(X_{t_3}) = \{df, ef\}$, $E(X_{t_4}) = \{bd, de\}$.

Dada uma decomposição arbórea $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ de G , para cada $v \in V(G)$ definimos T_v como o subgrafo de T gerado por todos os vértices t de T tais que $v \in W_t$.

Note que, das propriedades i e ii segue que T_v é uma árvore. No Exemplo 8.1, temos $V(T_a) = \{t_1\}$, $V(T_b) = \{t_1, t_2, t_4\}$, $V(T_c) = \{t_2\}$, $V(T_d) = \{t_1, t_3, t_4\}$, $V(T_e) = \{t_2, t_3, t_4\}$, $V(T_f) = \{t_3\}$.

Dizemos que $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ é uma **decomposição arbórea em cliques** se todo W_t induz uma clique em G . No Exemplo 8.1, a decomposição arbórea que exibimos é uma decomposição arbórea em cliques.

A **largura arbórea** de um grafo G (denotada por $la(G)$) é o menor inteiro k tal que G possui uma decomposição arbórea de largura k .

Analogamente, a **largura de caminho** ('path width') de um grafo G (denotada por $pw(G)$) é o menor inteiro k tal que G possui uma decomposição

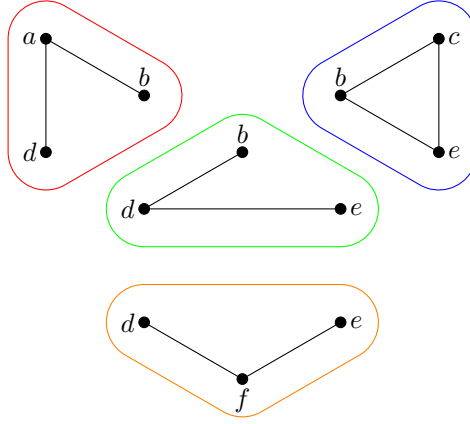


Figura 8.6: Partição das arestas do Exemplo 8.1.

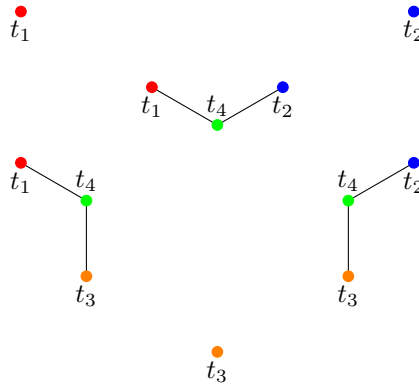


Figura 8.7: Subárvores T_v relativas ao Exemplo 8.1.

em caminho de largura k .

Exercício 8.1. Seja G um grafo simples. Prove que $\text{la}(G) \leq 1$ se e somente se G é uma floresta.

Um grafo é dito **série-paralelo** se não possui K_4 como menor.

Exercício 8.2. Prove que se G é série-paralelo, então $\text{la}(G) \leq 2$.

Proposição 8.2 Seja $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ uma decomposição arbórea de um grafo G , e $H \subseteq G$ (H um subgrafo de G). Então tomando $\mathcal{W}_H = \{W_t \cap V(H) : t \in V(T)\}$, temos que (T, \mathcal{W}_H) é uma decomposição arbórea de H .

Demonstração. Se $t' \in V(T)$ está no caminho entre t e t'' , então $W_t \cap W_{t''} \subseteq W_{t'}$, logo $(W_t \cap V(T)) \cap (W_{t''} \cap V(T)) \subseteq W_{t'} \cap V(T)$. \square

Convenção: Para simplificar, diremos “ $K \subseteq V(G)$ é uma clique”, devendo ficar implícito que “ $G[K]$ é uma clique”.

As proposições abaixo estudam o comportamento dos cliques em decomposições arbóreas de um grafo.

Proposição 8.3 Seja $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ uma decomposição arbórea de um grafo G , e seja $K \subseteq V(G)$ uma clique. Então existe $t \in V(T)$ tal que $K \subseteq W_t$.

Demonstração. Sejam $u, v \in K$ e considere T_u e T_v .

Claramente $V(T_u) \cap V(T_v) \neq \emptyset$ (pois existe $x \in V(T)$ tal que $W_x \supseteq \{u, v\}$).

Portanto, para todos $u, v \in K$, temos $V(T_u) \cap V(T_v) \neq \emptyset$.

Se $|K| \leq 2$, apenas essa propriedade já é suficiente para provar a proposição. Então suponha $|K| \geq 3$.

Seja $x \in V(T)$ com $|W_x \cap K|$ maior possível e suponha por absurdo que $|W_x \cap K| < |K|$. Então existe $v \in K \setminus W_x$.

Seja $y \in V(T_v)$ com $|W_y \cap W_x \cap K|$ maior possível e note que $x \neq y$ pois $x \notin V(T_v)$.

Pela escolha de x , temos que $|W_y \cap K| \leq |W_x \cap K|$, como $v \in K \cap W_y \setminus W_x$, então existe $u \in K \cap W_x \setminus W_y$.

Seja $z \in V(T_u) \cap V(T_v)$ (já vimos que esse conjunto não é vazio).

Se x estiver no caminho de y a z em T , teremos $v \in W_y \cap W_z \subset W_x \not\ni v$, um absurdo.

Se y estiver no caminho de x a z em T , teremos $u \in W_x \cap W_z \subset W_y \not\ni u$, também um absurdo.

Seja então z_0 o vértice mais próximo de z do caminho de x a y em T (possivelmente teremos $z_0 = z$). Observe que z_0 está também no caminho de x a z , logo $u \in W_{z_0}$.

Por outro lado, como z_0 está no caminho de x a y , temos $W_x \cap W_y \subset W_{z_0}$, logo $|W_{z_0} \cap W_x \cap K| \geq |W_y \cap W_x \cap K| + 1$, o que contradiz a escolha de y . \square

Proposição 8.4 Se G tem uma decomposição arbórea em cliques então G tem uma decomposição arbórea em cliques $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ onde cada W_t é uma clique maximal.

Demonstração. Seja (T, \mathcal{W}) , com $\mathcal{W} = \{W_t : t \in V(T)\}$ uma decomposição arbórea de G em cliques com $|V(T)|$ mínimo. Suponha que existe $t_1 \in V(T)$ tal que W_{t_1} não é uma clique maximal. Seja K uma clique maximal tal que $K \supseteq W_{t_1}$. Pela Proposição 8.3, existe $t_2 \in V(T)$ tal que $W_{t_2} \supseteq K$.

Seja t_3 um vértice adjacente a t_1 no caminho em T de t_1 a t_2 (possivelmente temos $t_3 = t_1$) e observe que $W_{t_1} \subset W_{t_3}$.

Tome $T' = T / \{t_1, t_3\}$ e $\mathcal{W}' = \{W_t : t \in V(T) \setminus \{t_1, t_3\}\} \cup \{W_{t_0}\}$, onde $W_{t_0} = W_{t_3}$ e t_0 é o vértice obtido da contração de $\{t_1, t_3\}$.

Observe que (T', \mathcal{W}') é uma decomposição arbórea de G em cliques com $|V(T')| < |V(T)|$, o que contradiz a escolha de (T, \mathcal{W}) . \square

A proposição abaixo mostra que a árvore de uma decomposição arbórea transfere a propriedade de separação para o grafo que ela decompõe.

Proposição 8.5 Seja $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ uma decomposição arbórea de um grafo G . Seja $e = t_1 t_2$ uma aresta de T e sejam T_1 e T_2 as componentes conexas de $T - e$ com $t_1 \in V(T_1)$ e $t_2 \in V(T_2)$ (T_1 e T_2 são árvores). Sejam também

$$U_1 = \bigcup_{t \in V(T_1)} W_t \quad U_2 = \bigcup_{t \in V(T_2)} W_t.$$

Então $W_{t_1} \cap W_{t_2} = U_1 \cap U_2$ e $W_{t_1} \cap W_{t_2}$ separa U_1 de U_2 em G .

Demonstração. Sejam $t \in V(T_1), t' \in V(T_2)$ e observe que todo caminho de t para t' em T contém t_1 e t_2 , logo temos

$$\begin{aligned} W_t \cap W_{t'} &\subseteq W_{t_1}, \text{ e} \\ W_t \cap W_{t'} &\subseteq W_{t_2}; \end{aligned}$$

o que significa que

$$W_t \cap W_{t'} \subseteq W_{t_1} \cap W_{t_2}.$$

Portanto, para todos $t \in T_1$ e $t' \in T_2$, temos $W_t \cap W_{t'} \subseteq W_{t_1} \cap W_{t_2}$.
Segue então que

$$U_1 \cap U_2 = \left(\bigcup_{t \in V(T_1)} W_t \right) \cap \left(\bigcup_{t' \in V(T_2)} W_{t'} \right) \subseteq W_{t_1} \cap W_{t_2}.$$

Por outro lado, como $W_{t_1} \subseteq U_1$ e $W_{t_2} \subseteq U_2$, temos $W_{t_1} \cap W_{t_2} \subseteq U_1 \cap U_2$.
Portanto $U_1 \cap U_2 = W_{t_1} \cap W_{t_2}$.

Para mostrar que $W_{t_1} \cap W_{t_2}$ separa U_1 de U_2 , vamos mostrar que não existe aresta $u_1 u_2$ em G com $u_1 \in U_1 \setminus U_2$ e $u_2 \in U_2 \setminus U_1$.

Se houvesse tal aresta $u_1 u_2$ em G , então existiria um $t \in V(T)$ tal que $W_t \supseteq \{u_1, u_2\}$. Mas $u_1 \in U_1 \setminus U_2$ e $u_1 \in W_t$ implicam que $t \in V(T_1) \setminus V(T_2)$ e $u_2 \in U_2 \setminus U_1$ e $u_2 \in W_t$ implicam que $t \in V(T_2) \setminus V(T_1)$, o que seria uma contradição. \square

Proposição 8.6 Seja $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ uma decomposição arbórea de um grafo G , e seja $Y \subseteq V(G)$. Então

- (a) ou existe $t \in V(T)$ tal que $Y \subseteq W_t$,
- (b) ou existem vértices $y_1, y_2 \in Y$ e uma aresta $t_1 t_2$ de T tais que $y_1, y_2 \notin W_{t_1} \cap W_{t_2}$ e y_1, y_2 são separados por $W_{t_1} \cap W_{t_2}$ em G .

8.1 DECOMPOSIÇÃO ARBÓREAS E GRAFOS CORDAIS

Lembremos a definição de grafos cordais e algumas de suas propriedades.

Um grafo é dito **cordal** ou **triangulado** se é simples e não possui nenhum circuito induzido de comprimento maior ou igual a 4.

Proposição 8.7 (Proposição C (pp. 111, Diestel)). Um grafo G é cordal se e somente se G é a união de grafos cordais estritamente menores G_1 e G_2 com $G_1 \cap G_2$ completo, isto é, existem subconjuntos próprios de vértices $X, Y \subsetneq V(G)$ distintos tais que $V(G) = X \cup Y$, o grafo $G[X \cap Y]$ é completo e os grafos $G[X]$ e $G[Y]$ são cordais.

Exercício 8.3. Todo conjunto separador minimal de um grafo cordal é um clique.

Proposição 8.8 Seja G um grafo simples. Então G é cordal se e somente se tem uma decomposição arbórea em cliques.

Demonstração. Por indução em $|V(G)|$.

- (a) Seja (T, \mathcal{W}) uma decomposição arbórea de G tal que W_t é uma clique para todo $t \in T$ e, além disso, com $|V(T)|$ mínimo.

Se $|V(T)| \leq 1$ então G é completo e, portanto, cordal. Suponha então $|V(T)| \geq 2$, tome $e = t_1 t_2 \in E(T)$ e considere as subárvores T_1 e T_2 de $T - e$, com $t_1 \in T_1$ e $t_2 \in T_2$ (como na Proposição 8.5).

Então $T = (T_1 \cup T_2) + t_1 t_2$. Seja, para $i \in \{1, 2\}$, o grafo $G_i = G[\cup_{t \in T_i} W_t]$, e observe que $V(G_1 \cap G_2) = W_{t_1} \cap W_{t_2}$, pela Proposição 8.5. Isso significa que $G_1 \cap G_2$ é completo.

Como $(T_i, \{W_t : t \in V(T_i)\})$ é uma decomposição arbórea de G_i em cliques, pela hipótese de indução, temos que G_1 e G_2 são cordais.

Note que, pela escolha de (T, \mathcal{W}) , nenhum dos G_i 's é um subgrafo de $G[W_{t_1} \cap W_{t_2}] = G_1 \cap G_2$ e, portanto, ambos são menores do que G . Portanto, pela Proposição 8.7, temos que G é cordal.

(b) Suponha que G seja cordal. Se G é completo, o resultado é imediato.

Se G não é completo, pela Proposição 8.7, sabemos que G é a união de grafos cordais menores G_1, G_2 com $G_1 \cap G_2$ completo.

Pela hipótese de indução, ambos G_1 e G_2 têm decomposições arbóreas $(T_1, \{W_t : t \in V(T_1)\})$ e $(T_2, \{W_t : t \in V(T_2)\})$ em cliques. Sem perda de generalidade, assumimos que $V(T_1) \cap V(T_2) = \emptyset$.

Pela Proposição 8.3, temos que $G_1 \cap G_2 \subseteq W_{t_1}$ e $G_1 \cap G_2 \subseteq W_{t_2}$ para algum $t_1 \in V(T_1)$ e algum $t_2 \in V(T_2)$. Neste caso, $((T_1 \cup T_2) + t_1 t_2, \{W_t : t \in V(T_1) \cup V(T_2)\})$ é uma decomposição arbórea de G em cliques. [Verificar isso].

□

Corolário 8.9 Para todo grafo G , temos $\text{la}(G) = \min\{\omega(H) - 1 \mid H \text{ cordal}; V(H) = V(G), E(H) \supseteq E(G)\}$.

Demonstração. Dado G , considere um grafo H cordal qualquer com $V(H) = V(G)$ e $E(H) \supseteq E(G)$. Pelas Proposições 8.3 e 8.8, o grafo H tem uma decomposição arbórea em cliques com largura $\omega(H) - 1$. Essa decomposição arbórea de H é também uma decomposição arbórea de G e, portanto,

$$\text{la}(G) \leq \omega(H) - 1.$$

Considere agora uma decomposição arbórea de (T, \mathcal{W}) de G , com largura $\text{la}(G)$ e, para cada $t \in T$, seja K_t o grafo completo com conjunto de vértices W_t , e defina $H = \cup_{t \in T} K_t$.

Então H é um grafo cordal com $V(H) = V(G)$ e $E(H) \supseteq E(G)$; além disso, sabemos que (T, \mathcal{W}) também é uma decomposição arbórea de H . Pela Proposição 8.3, temos que $\omega(H) - 1$ é igual à largura de (T, \mathcal{W}) , ou seja

$$\omega(H) - 1 \leq \text{la}(G).$$

□

Corolário 8.10 Todo grafo G tem uma decomposição arbórea (T, \mathcal{W}) de largura $\text{la}(G)$ e com $|V(T)| \leq |V(G)|$.

Demonstração. O Corolário 8.9 nos diz que existe um grafo cordal H tal que $V(H) = V(G)$ e $\text{la}(G) = \omega(H) - 1$. Pelas Proposições 8.3, 8.4 e 8.8, o grafo H possui uma decomposição arbórea (T, \mathcal{W}) em cliques maximais com largura $\omega(H) - 1 = \text{la}(G)$.

Como todos os cliques dessa decomposição são maximais, cada clique da decomposição contém pelo menos um vértice que não está em nenhum outro clique da decomposição. Logo temos $|V(T)| \leq |V(H)| = |V(G)|$.

Também sabemos que essa decomposição arbórea de H é também uma decomposição arbórea de G , de onde o resultado segue. \square

8.2 EXERCÍCIOS

Exercício 8.4. Prove que $la(K_n) = n - 1$.

Exercício 8.5. O grafo da grade de ordem n denotado por $G_{n \times n}$ é definido a partir de $V(G_{n \times n}) = [n] \times [n]$ e $E(G_{n \times n}) = \{(a, b)(c, d) : |a - c| + |b - d| = 1\}$.

Prove que, para $n \geq 2$, temos $la(G_{n \times n}) = n$.

Exercício 8.6. Mostre que um grafo G tem uma decomposição em caminhos (d.c.) em grafos completos se e só se G é isomorfo a um grafo de intervalos. (Veja Ex 21 do Cap. 12 do Diestel.)

Exercício 8.7. O jogo dos policiais e ladrão sobre um grafo G é jogado por dois jogadores, o primeiro jogador controla k policiais e o segundo jogador controla um ladrão.

O objetivo do primeiro jogador é colocar um policial no mesmo vértice do ladrão e o objetivo do segundo jogador é evitar isso.

O primeiro jogador move um policial de cada vez utilizando um helicóptero (i.e., os policiais não tem nenhuma restrição de movimento), assim que o primeiro jogador decide qual será seu movimento, o segundo jogador pode mandar seu ladrão correr rapidamente para qualquer vértice adjacente, de forma que o ladrão consegue escapar mesmo se o policial estiver pousando no vértice dele. Portanto, para conseguir pegar o ladrão, o primeiro jogador deve primeiro ocupar todos os vértices adjacentes e pousar com um outro policial no vértice do ladrão.

Existem duas variações desse jogo, a com ladrão visível (i.e., o primeiro jogador sabe em todo momento onde está o ladrão) e a com ladrão invisível (i.e., o primeiro jogador não sabe onde está o ladrão).

- Prove que o resultado do jogo não se altera se removermos laços e arestas múltiplas. Prove também que podemos assumir sem perda de generalidade que o grafo é conexo.
- Prove que dois policiais conseguem capturar o ladrão visível em um grafo simples e conexo G se e somente se G é uma árvore.
- Prove que dois policiais conseguem capturar o ladrão invisível em um grafo simples e conexo G se e somente se G é um “caterpillar” (i.e., existe um caminho P em G tal que todo vértice de G está ou em P ou é adjacente a um vértice de P).
- Prove que, em um grafo simples e conexo G , o ladrão visível pode ser pego por $la(G)$ policiais.

8.3 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [AH89] K.I. Appel and W. Haken. *Every Planar Map Is Four Colorable*. Contemporary mathematics, v. 98. American Mathematical Society, 1989.

- [BM08] A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2008.
- [Bol98] B. Bollobás. *Modern graph theory*. Graduate Texts in Mathematics Series. Springer-Verlag GmbH, 1998.
- [Bro87] R.L. Brooks. On colouring the nodes of a network. In Ira Gessel and Gian-Carlo Rota, editors, *Classic Papers in Combinatorics*, Modern Birkhäuser Classics, pages 118–121. Birkhäuser Boston, 1987.
- [CCPS11] W.J. Cook, W.H. Cunningham, W.R. Pulleyblank, and A. Schrijver. *Combinatorial Optimization*. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley, 2011.
- [CRST06] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, and Robin Thomas. The strong perfect graph theorem. *ANNALS OF MATHEMATICS*, 164:51–229, 2006.
- [Die05] Reinhard Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.
- [ES35] P. Erdős and G. Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math.*, 2:463–470, 1935.
- [Fle14] Tamás Fleiner. Yet another proof for brooks’ theorem. Technical Report QP-2014-01, Egerváry Reserch Group, Budapest, 2014. www.cs.elte.hu/egres.
- [HS70] A. Hajnal and E. Szemerédi. Proof of a conjecture of P. Erdős. In *Combinatorial theory and its applications, II (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969)*, pages 601–623. North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [HT74] John Hopcroft and Robert Tarjan. Efficient planarity testing. *Journal of the ACM (JACM)*, 21(4):549–568, 1974.
- [Kru60] J. B. Kruskal. Well-quasi-ordering, the Tree Theorem, and Vazsonyi’s conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95:210–225, 1960.
- [Lov75] L Lovász. Three short proofs in graph theory. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 19(3):269 – 271, 1975.
- [Mac37] Saunders MacLane. A combinatorial condition for planar graphs. *Fund. Math*, 28:22–32, 1937.
- [Mak97] Yury Makarychev. A short proof of kuratowski’s graph planarity criterion. *J. Graph Theory*, 25:129–131, 1997.
- [NC88] Takao Nishizeki and Norishige Chiba. *Planar graphs: Theory and algorithms*, volume 140. North Holland, 1988.
- [NRS06] Brendan Nagle, Vojtech Rödl, and Mathias Schacht. The counting lemma for regular k -uniform hypergraphs. *Random Struct. Algorithms*, 28(2):113–179, 2006.
- [OPT01] Deryk Osthus, Hans Jürgen Prömel, and Anusch Taraz. Almost all graphs with high girth and suitable density have high chromatic number. *J. Graph Theory*, 37(4):220–226, August 2001.
- [Ore55] Oystein Ore. Graphs and matching theorems. *Duke Math. J.*, 22:625–639, 1955.

- [PL86] D. Plummer and L. Lovász. *Matching Theory*. North-Holland Mathematics Studies. Elsevier Science, 1986.
- [Ric46] M. Richardson. On weakly ordered systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52:113–116, 1946.
- [Tho80] C. Thomassen. *Kuratowski’s Theorem*. Preprint series: Matematisk Institut. Matematisk Inst., Univ., 1980.
- [Tho81] Carsten Thomassen. Kuratowski’s theorem. *Journal of Graph Theory*, 5:225–241, 1981.
- [Tho88] Andrew Thomason. An upper bound for some Ramsey numbers. *J. Graph Theory*, 12(4):509–517, 1988.
- [TT81] C. Thomassen and B. Toft. Non-separating induced cycles in graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 31(2):199–224, October 1981.
- [Wes] Douglas B. West. Ore, Berge–Tutte, and Gallai–Edmonds.
- [Wes11] Douglas B. West. A short proof of the Berge–Tutte Formula and the Gallai–Edmonds Structure Theorem. *European Journal of Combinatorics*, 32(5):674–676, 2011.

9 MENORES, ÁRVORES E QUASE BOA ORDEM

9.1 RELAÇÕES

Uma relação R sobre um conjunto X é um subconjunto de $A \times A$. Para enfatizar que estamos tratando de relações e não simplesmente de conjuntos, usamos a notação infixa xRy para denotar $(x, y) \in R$.

Fixada uma relação R sobre um conjunto X , dizemos que R é

- **Reflexiva**, se xRx para todo $x \in X$;
- **Transitiva**, se xRy e yRz implicam xRz para todos $x, y, z \in X$;
- **Antissimétrica**, se xRy e yRx implicam $x = y$, para todos $x, y \in X$;
- **Total**, se para todos $x, y \in X$, temos xRy ou yRx ;
- **Bem-fundada**, se para todo subconjunto não-vazio Y de X , existe um $y \in Y$ tal que nenhum $z \in Y$ satisfaz zRy e $\neg(yRz)$.

Em particular, uma relação é chamada de

- **Quase-ordem**, se for reflexiva e transitiva;
- **Ordem parcial**, se for reflexiva, transitiva e antissimétrica;
- **Ordem total** (ou **ordem**), se for reflexiva, transitiva, antissimétrica e total;
- **Quase-bom-ordem**, se for reflexiva, transitiva e bem-fundada;
- **Bom-ordem parcial**, se for reflexiva, transitiva, antissimétrica e bem-fundada;
- **Bom-ordem total** (ou **bom-ordem**), se for reflexiva, transitiva, antissimétrica, total e bem-fundada.

Estamos particularmente interessados em estudar quase-boas-ordens e, nesse contexto, é mais simples trabalhar com uma noção equivalente (sob o axioma da escolha) de relações bem-fundadas:

Proposição 9.1 Assumindo o axioma da escolha, uma relação R sobre um conjunto X é bem-fundada se e somente se para toda sequência infinita enumerável $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, existem índices $i < j$ tais que x_iRx_j .

A partir deste ponto, assumiremos verdadeiro o axioma da escolha implicitamente.

Dada uma relação R sobre um conjunto X , um subconjunto $A \subset X$ é dito uma **antidadeia** se não existem $x, y \in A$ distintos tais que xRy .

Usaremos frequentemente o símbolo \preceq no estudo de relações (tipicamente quase-ordens) e assumiremos sempre que as relações \prec , \succeq e \succ estão definidas como:

- Para todos x, y , temos $x \prec y$ se e somente se $x \preceq y$ e $\neg(y \preceq x)$;
- Para todos x, y , temos $x \succeq y$ se e somente se $y \preceq x$;
- Para todos x, y , temos $x \succ y$ se e somente se $x \succeq y$ e $\neg(y \succeq x)$;

Supondo que \preceq é uma quase-ordem, uma sequência $(x_i)_{i \in U}$ indexada por $U \subset \mathbb{N}$ é dita

- **Crescente**, se para todos índices $i < j$, temos $x_i \preceq x_j$;
- **Decrescente**, se para todos índices $i < j$, temos $x_j \succeq x_i$;
- **Estritamente crescente**, se para todos índices $i < j$, temos $x_i \prec x_j$;
- **Estritamente decrescente**, se para todos índices $i < j$, temos $x_j \succ x_i$.

Proposição 9.2 Seja \preceq uma quase-ordem sobre X . Então \preceq é quase-bom-ordem se e somente se X não contém nem uma antidadeia infinita nem uma sequência infinita estritamente decrescente $x_0 \succ x_1 \succ \dots$.

Demonstração. Observe que se A é uma anticadeia infinita, então qualquer sequência $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ em A de elementos distintos é tal que não existem $i < j$ com $x_i \preceq x_j$.

Por outro lado, se $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência infinita estritamente decrescente, então também temos que não existem $i < j$ com $x_i \preceq x_j$.

Portanto, se \preceq é quase-boa-ordem, então X não contém nem uma anticadeia infinita nem uma sequência infinita estritamente decrescente.

Seja x_0, x_1, \dots , uma sequência qualquer de X indexada pelos naturais. Considere o grafo completo (infinito) $K_{\mathbb{N}}$

Faça uma coloração das arestas ij de $K_{\mathbb{N}}$, com $i < j$ com 3 cores:

- Atribua a cor *verde*, se $x_i \preceq x_j$;
- Atribua a cor *amarela*, se x_i e x_j são incomparáveis;
- Atribua a cor *vermelha*, se $x_i \succ x_j$.

Pelo teorema de Ramsey, sabemos que $K_{\mathbb{N}}$ tem um subgrafo completo H infinito cujas arestas são todas da mesma cor. Pela hipótese da proposição, tais arestas não podem ser nem amarelas e nem vermelhas.

Portanto, são verdes. Logo, quaisquer dois vértices i, j (com $i < j$) de H são tais que $x_i \preceq x_j$ (bastava uma tal aresta).

Concluimos que \preceq é uma quase-boa-ordem. \square

Corolário 9.3 Se \preceq é quase-boa-ordem, então toda sequência infinita em X tem uma subsequência infinita crescente.

Uma quase-ordem \preceq sobre X induz uma quase-ordem natural sobre o conjunto dos subconjuntos finitos de X (denotado por $[X]^{<\omega}$). Essa quase-ordem é definida abaixo.

Para conjuntos finitos $A, B \subseteq X$, fazemos $A \preceq B$ se existe uma função injetora $f: A \rightarrow B$ tal que $a \preceq f(a)$ para todo $a \in A$.

O seguinte lema e a ideia de sua prova têm um papel importante na teoria da quase-boa-ordem.

Lema 9.4 Se \preceq é quase-boa-ordem sobre X , então \preceq é quase-boa-ordem sobre $[X]^{<\omega}$.

Demonstração. Suponha que \preceq seja uma quase-boa-ordem sobre X e que \prec não seja quase-boa-ordem sobre $[X]^{<\omega}$.

Chamaremos de sequências *ruins* aquelas que violam a propriedade de boa-fundação das relações, isto é, sequências infinitas $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ que são ou estritamente decrescentes ou tais que $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ é uma anticadeia. Naturalmente, chamaremos de sequências *boas* aquelas que não são ruins.

Vamos construir uma sequência ruim $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ especial em $[X]^{<\omega}$ recursivamente.

Dado $n \in \mathbb{N}$, suponha, indutivamente, que A_i foi definido para todo natural $i < n$, e que exista uma sequência ruim em $[X]^{<\omega}$ começando com A_0, A_1, \dots, A_{n-1} (para $n = 0$, temos que uma sequência ruim existe por \prec não ser quase-boa-ordem sobre $[X]^{<\omega}$)

Escolha então $A_n \in [X]^{<\omega}$ com $|A_n|$ mínimo e de forma que exista uma sequência ruim em $[X]^{<\omega}$ começando com A_0, A_1, \dots, A_n .

Claramente temos $A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (caso contrário teríamos $A_n \preceq A_{n+1}$). Escolha então, para cada $n \in \mathbb{N}$, um elemento $a_n \in A_n$ e tome $B_n = A_n \setminus \{a_n\}$.

Pelo Corolário 9.3, a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência infinita crescente $(a_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$.

Considere a sequência de conjuntos

$$(C_i)_{i \in \mathbb{N}} = (A_0, A_1, \dots, A_{n_0-1}, B_{n_0}, B_{n_1}, \dots)$$

Note que esta sequência é boa por construção (se a sequência fosse ruim, teríamos $|B_{n_0}| < |A_{n_0}|$, contradizendo a escolha de A_{n_0}).

Portanto, existe um par de índices $i_0 < j_0$ tal que $C_{i_0} \preceq C_{j_0}$.

Observe que não podemos ter $j_0 < n_0$, caso contrário, teríamos $A_{i_0} \preceq A_{j_0}$.

Também não podemos ter $i_0 < n_0 \leq j_0$, caso contrário, teríamos $A_{i_0} \preceq B_{j_0} \preceq A_{j_0}$.

Finalmente, se tivermos $n_0 \leq i_0$, então, como $a_{i_0} \preceq a_{j_0}$, temos que $B_{i_0} \preceq B_{j_0}$ implica $A_{i_0} \preceq A_{j_0}$ (basta estender a função de B_{i_0} para B_{j_0} fazendo a imagem de a_{i_0} ser a_{j_0}). Isso é uma contradição.

Portanto \preceq é quase-bom-ordem sobre $[X]^{<\omega}$. \square

Seja \mathcal{G} a classe de todos os grafos *finitos* a menos de isomorfismo e \preceq a relação de ‘menor (de)’ definida sobre \mathcal{G} . É fácil ver que \preceq é quase-ordem sobre \mathcal{G} (é inclusive uma ordem parcial).

O ‘Minor Theorem’ afirma que

“A relação \preceq é quase-bom-ordem sobre \mathcal{G} .”

Como obviamente uma sequência estritamente decrescente de menores não pode ser infinita, a Proposição 9.2 nos dá que o ‘Minor Theorem’ é equivalente a seguinte afirmação:

“Não existe uma anticadeia infinita em \mathcal{G} .”

Isto é, não existe um conjunto infinito de grafos em \mathcal{G} , dois-a-dois incomparáveis quanto à relação menor \preceq .

Restringindo-nos à classe das árvores, existe uma versão mais forte do ‘Minor Theorem’:

Teorema 9.5 Seja \mathcal{T} a classe das árvores *finitas* a menos de isomorfismo e \preceq a relação de menor topológico ($\preceq \equiv \preceq_t$). Então \preceq é quase-bom-ordem sobre \mathcal{T} .

A prova será baseada numa relação mais forte definida sobre árvores enraizadas.

Se T é uma árvore e r um vértice qualquer fixo, chamaremos o par (T, r) de *árvore enraizada*, e r sua *raiz* (algumas vezes escrevemos simplesmente T , em vez de (T, r)).

Dadas árvores enraizadas (T, r) e (T', r') , escrevemos

$$(T, r) \preceq (T', r')$$

se existe um isomorfismo φ entre alguma subdivisão de T e uma subárvore T'' de T' tal que o caminho de r' a $\varphi(r)$ em T' não contém nenhum outro vértice de T'' a não ser $\varphi(r)$. Dizemos que um tal isomorfismo *respeita* r' .

Seja \mathcal{T}^* o conjunto das árvores enraizadas finitas.

Provaremos então o teorema abaixo, do qual o Teorema 9.5 segue como corolário.

Teorema 9.6 (Kruskal, 1960 [Kru60]). A relação \preceq é quase-bom-ordem sobre \mathcal{T}^* .

Demonstração. Novamente adotaremos a terminologia de seqüências *ruins* para as que violam a propriedade de boa-fundação das relações e de seqüências *boas* para as que não são ruins.

Suponha que \preceq não seja quase-bom-ordenamento sobre \mathcal{T}^* e vamos construir uma seqüência ruim $(T_n, r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ especial em \mathcal{T}^* recursivamente.

Dado $n \in \mathbb{N}$, suponha indutivamente que (T_i, r_i) já foi construído para todo $i < n$, e que exista uma seqüência ruim começando com $(T_0, r_0), (T_1, r_1), \dots, (T_{n-1}, r_{n-1})$.

Escolha então (T_n, r_n) com $|V(T_n)|$ mínimo e de forma que exista uma seqüência ruim começando com $(T_0, r_0), (T_1, r_1), \dots, (T_n, r_n)$ (para $n = 0$, temos que uma seqüência ruim existe por \prec não ser quase-bom-ordenamento).

Observe que $|V(T_n)| > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja A_n o conjunto das árvores enraizadas (T, r) tal que T é um componente conexo de $T_n - r_n$ e r é adjacente a r_n em T_n .

Seja $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Vamos provar que \preceq é quase-bom-ordenamento sobre A .

Seja $((U_k, s_k))_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência qualquer de árvores enraizadas do conjunto A .

Para cada $k \in \mathbb{N}$ escolha $n = n(k)$ tal que $U_k \in A_n$ e seja $k^* = \arg \min\{n(k) : k \in \mathbb{N}\}$ ($n(k^*) \preceq n(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$).

Então a seqüência

$$(W_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((T_0, r_0), \dots, (T_{n(k^*)-1}, r_{n(k^*)-1}), (U_{k^*}, s_{k^*}), (U_{k^*+1}, s_{k^*+1}), \dots)$$

é boa, pois $U_{k^*} \subsetneq T_{n(k^*)}$ (caso contrário, teríamos uma contradição com a minimalidade de $|V(T_{n(k^*)})|$).

Ou seja, existem índices $i < j$ tais que $(W_i, t_i) \preceq (W_j, t_j)$.

Observe que não podemos ter $j \leq n(k^*) - 1$, caso contrário, teríamos $(T_i, r_i) \preceq (T_j, r_j)$.

Também não podemos ter $i < n(k^*) \leq j$, caso contrário, teríamos $(T_i, r_i) \preceq (U_j, s_j) \preceq (T_{n(j)}, r_{n(j)})$ (pois $U_j \in A_{n(j)}$).

Logo, temos $n(k^*) \leq i$, ou seja, temos $(U_i, s_i) \preceq (U_j, s_j)$, o que significa que a seqüência $(U_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é boa.

Portanto \preceq é quase-bom-ordenamento sobre A .

Pelo Lema 9.4, temos que \preceq é quase-bom-ordenamento sobre $[A]^{<\omega}$.

Em particular, isso significa que existem índices $i_0 < j_0$ tais que $A_{i_0} \preceq A_{j_0}$.

A partir da função $f: A_{i_0} \rightarrow A_{j_0}$, das subdivisões e isomorfismos que respeitam raiz que testemunham $A_{i_0} \preceq A_{j_0}$, segue que $(T_{i_0}, r_{i_0}) \preceq (T_{j_0}, r_{j_0})$.

Portanto \preceq é quase-bom-ordenamento sobre \mathcal{T}^* . \square

9.2 O ‘MINOR THEOREM’ PARA GRAFOS COM LARGURA ARBÓREA LIMITADA

Grafos com largura arbórea (la) limitada são suficientemente ‘semelhantes’ a árvores tornando possível adaptar a prova do Teorema de Kruskal (Teorema 9.6) para a classe desses grafos. Grosseiramente, a ideia é iterar o argumento da ‘seqüência minimal ruim’ $la(G)$ vezes. A prova desse resultado encontra-se no artigo “graph minors I”, de Robertson & Seymour, 1990.

Teorema 9.7 [Robertson & Seymour, 1990] Para todo natural k , os grafos com largura arbórea menor que k são quase-bem-ordenados pela relação de *menor*.

Este teorema nos leva um passo adiante em relação à prova do ‘Minor Theorem’ (para grafos arbitrários). Para chegar a esse resultado geral, a seguinte questão é de interesse.

Pergunta: Como são os grafos com *largura arbórea limitada*?

Mais precisamente, há algum fenômeno estrutural que ocorre num grafo se e somente se ele tem *la* grande?

Obstruções canônicas à largura arbórea pequena

Dizemos que $X \subseteq V(G)$ é um *subconjunto conexo* se $G[X]$ é conexo.

Seja \mathcal{C} um conjunto de subconjuntos conexos de $V(G)$.

Dizemos que um conjunto $U \subseteq V(G)$ *cobre* \mathcal{C} se U intersecta cada conjunto em \mathcal{C} .

Dizemos que dois elementos de \mathcal{C} se *toçam* ('touch') se eles se intersectam ou G contém uma aresta entre eles.

Exercício 9.1. Se \mathcal{C} é um conjunto de subconjuntos conexos de $V(G)$ e quaisquer dois elementos de \mathcal{C} se tocam, então em toda decomposição arbórea $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ de G existe $t \in V(T)$ tal que W_t cobre \mathcal{C} . [Sugestão: imitar a prova da Proposição 8.6]

Esse resultado prova o lado fácil (\Leftarrow) da seguinte caracterização de grafos com largura arbórea maior ou igual a k .

Teorema 9.8 [Seymour & Thomas, 1993] Seja k um inteiro. Um grafo G tem $\text{la}(G) \geq k$ se e somente se G contém uma coleção de conjuntos de vértices conexos que se tocam dois a dois e que não podem ser cobertos por até k vértices.

Outro teorema interessante faz uso de uma generalização de árvores:

Dizemos que um grafo é uma *k-árvore* se é um grafo cordal e tal que todas suas cliques maximais tem cardinalidade no máximo $k + 1$.

Dizemos que um grafo é uma *k-árvore-parcial* se é um subgrafo de uma *k-árvore*.

Teorema 9.9 Se G é uma *k-árvore-parcial*, então $\text{la}(G) \leq k$.

Interesse: Decomposição arbórea que dê mais informações sobre a estrutura arbórea do grafo (quão semelhante de uma árvore é o grafo). Exigir apenas largura arbórea pequena não captura como bolsas da decomposição se relacionam ao longo da árvore (da decomposição).

Dizemos que uma decomposição arbórea $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ de G é *interligada* ('linked') se, para todo $s \in \mathbb{N}$ e todos $t_1, t_2 \in V(T)$, existem s caminhos disjuntos de W_{t_1} a W_{t_2} .

Dizemos que uma decomposição arbórea $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$ de G é *enxuta* ('lean') se, para todo $s \in \mathbb{N}$ e e todos $t_1, t_2 \in V(T)$, existe t no caminho de t_1 para t_2 em T tal que $|W_t| < s$.

O teorema abaixo afirma que é possível encontrar decomposições arbóreas com largura mínima e que são também enxutas:

Teorema 9.10 [Thomas, 1990] Todo grafo G possui uma decomposição arbórea enxuta com largura $\text{la}(G)$.

9.3 DECOMPOSIÇÕES ARBÓREAS E MENORES PROIBIDOS

Seja \mathcal{X} uma classe de grafos. Considere a classe dos grafos sem um menor em \mathcal{X}

$$\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X}) = \{G \text{ grafo} : G \not\preceq X, \text{ para todo } X \in \mathcal{X}\}.$$

É fácil ver que $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ é uma *propriedade de grafos*, isto é, é fechada sob isomorfismo ($H \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ e $H \cong H'$ implicam $H' \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$).

Quando se tratar apenas de um grafo, escreveremos $\text{Forb}_{\preceq}(G)$ em vez de $\text{Forb}_{\preceq}(\{G\})$.

A classe $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ é expressa especificando-se os grafos $X \in \mathcal{X}$ como *menores proibidos* ('forbidden' ou 'excluded minors').

Exemplo 9.11 Se $\mathcal{X} = \{K_5, K_{3,3}\}$, então $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ é a classe dos grafos planares.

Se $\mathcal{X} = \{K_4\}$, então $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ é a classe dos grafos série-paralelos.

Se $\mathcal{X} = \{K_{2,3}, K_4\}$, então $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ é a classe dos grafos exoplanares.

Certamente $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ é fechada sob a operação de tomar menores, isto é, se $G \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ e $H \preceq G$, então $H \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$.

Propriedades de grafos que são fechadas sob tomada de menores são chamadas *hereditárias*.

A proposição abaixo afirma que as propriedades hereditárias coincidem exatamente com as classes de menores proibidos.

Proposição 9.12 Seja \mathcal{P} uma propriedade de grafos. A propriedade \mathcal{P} pode ser expressa através de menores proibidos se e somente se \mathcal{P} é hereditária.

Demonstração. Já vimos que $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ é uma propriedade hereditária para toda \mathcal{X} .

Por outro lado, sabemos que $\mathcal{P} = \text{Forb}_{\preceq}(\overline{\mathcal{P}})$, onde $\overline{\mathcal{P}}$ é o complemento de \mathcal{P} . □

Pergunta: Como representar melhor uma propriedade hereditária através de menores proibidos?

Resposta mais adiante.

Por ora, considere a propriedade hereditária: largura arbórea limitada ('bounded tree width').

Proposição 9.13 Para todo $k > 0$, a propriedade de ter $la < k$ é hereditária.

Demonstração. É suficiente provar que a largura arbórea de um grafo não aumenta quando contraímos uma aresta. O resultado segue da Proposição 8.2 e da propriedade de menores. □

Pelas proposições anteriores, a propriedade "ter largura arbórea menor que k " pode ser expressa por menores proibidos.

Seja $\mathcal{G}_{<k}$ = classe dos grafos com largura arbórea menor que k .

Para alguns valores fixos de k , já conhecemos essa classe:

- A classe $\mathcal{G}_{<2}$ é a classe das florestas (e coincide com $\text{Forb}_{\preceq}(K_3)$);
- A classe $\mathcal{G}_{<3}$ é a classe dos grafos série-paralelos (e coincide com $\text{Forb}_{\preceq}(K_4)$).

É natural perguntar se há outros grafos H para os quais os grafos em $\text{Forb}_{\preceq}(H)$ têm largura arbórea limitada e como são tais grafos.

Proposição 9.14 Se H é um grafo tal que os grafos de $\text{Forb}_{\preceq}(H)$ possuem largura arbórea limitada, então H é planar.

Demonstração. Sabemos que o grafo $G_{n \times n}$ da grade $n \times n$ possui largura arbórea $la(G_{n \times n}) = n$, ou seja, existem grafos planares com largura arbórea arbitrariamente grande.

Como todo menor de um grafo planar é planar, se H não for planar, então $G_{n \times n}$ não o terá como menor. □

Teorema 9.15 [Robertson, Seymour & Thomas, 94] Para todo grafo planar H existe um inteiro n tal que $H \preceq G_{n \times n}$.

Teorema 9.16 Para todo grafo planar H existe um inteiro k tal que se um grafo G tem largura arbórea maior ou igual a k , então $H \preceq G$.

Corolário 9.17 Se H é um grafo planar, então os grafos de $\text{Forb}_{\preceq}(H)$ têm largura arbórea limitada.

Corolário 9.18 [Robertson & Seymour] Grafos em $\text{Forb}_{\preceq}(H)$ têm largura arbórea limitada se e somente se H é planar.

Existe um resultado análogo: troca-se la por pw e planar por floresta.

Teorema 9.19 [Robertson & Seymour, 83] Grafos em $\text{Forb}_{\preceq}(H)$ têm pw limitada se e somente se H é uma floresta.

Demonstração. Se H não é uma floresta, isto é, se H tem um circuito, então $\text{Forb}_{\preceq}(H)$ contém todas as árvores.

Vamos provar então que árvores podem ter pw arbitrariamente grande.

Seja G um grafo conexo e $(P, \{W_t : t \in V(P)\})$ uma decomposição em caminho de G com largura $\text{pw}(G)$. Suponha que os vértices de P são $1, 2, \dots, k$ e $E(P) = \{ij : i - j = 1\}$.

Tome $v_1 \in W_1$ e $v_k \in W_k$ e seja Q um caminho de v_1 a v_k em G .

Então a decomposição em caminho $(P, \{W_t \setminus V(Q) : t \in V(P)\})$ de $G - Q$ possui largura $\text{pw}(G) - 1$, pois Q deve possuir pelo menos um vértice em cada bolsa (segue da Proposição 8.5).

Portanto todo grafo conexo G contém um caminho Q tal que $\text{pw}(G - Q) \leq \text{pw}(G) - 1$. Assim, se pudermos assumir (por alguma hipótese de indução apropriada) que $\text{pw}(G - Q)$ é grande para todo caminho $Q \subseteq G$, então $\text{pw}(G)$ também será grande.

Usando esse fato, vamos provar que árvores podem ter pw arbitrariamente grande.

Para todo $k \geq 1$, seja $T_3^k \equiv$ a árvore ternária com raiz r e todas suas folhas à distância k de r (a raiz possui grau 3, as folhas possuem grau 1 e todos os demais vértices possuem grau 4).

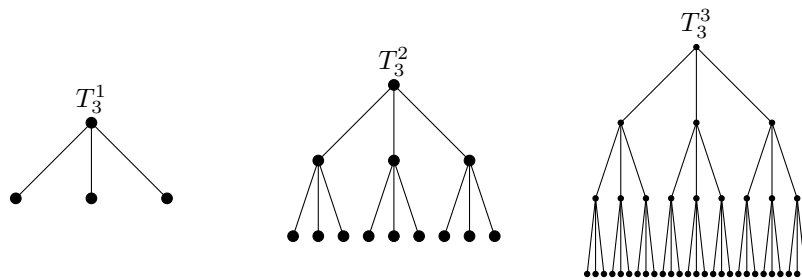


Figura 9.1: Árvores ternárias T_3^0 , T_3^1 e T_3^2 .

Observe que, se Q é um caminho em T_3^{k+1} , então Q contém no máximo duas das arestas incidentes a r . Logo temos $T_3^{k+1} - Q \supseteq T_3^k$, donde segue que $\text{pw}(T_3^{k+1}) \geq \text{pw}(T_3^k) + 1$ para todo $k \geq 1$.

Como $\text{pw}(T_3^2) \geq 1$, segue por indução que $\text{pw}(T_3^k) \geq k$ para todo $k \geq 1$.

Portanto existem árvores com pw arbitrariamente grande, logo grafos de $\text{Forb}_{\preceq}(H)$ têm pw limitada implica que H é uma floresta.

□

9.4 O ‘MINOR THEOREM’

Teoremas que caracterizam uma propriedade hereditária \mathcal{P} através de um conjunto \mathcal{X} de menores proibidos estão entre os resultados mais atraentes na teoria dos grafos.

Tais teoremas dão um sabor de coNP à propriedade \mathcal{P} , pois para certificar que um grafo G não satisfaz \mathcal{P} , basta apresentar o menor proibido que G possui.

Claramente, podemos caracterizar \mathcal{P} como $\text{Forb}_{\preceq}(\overline{\mathcal{P}})$, mas o interessante é caracterizar \mathcal{P} como $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ com \mathcal{X} menor possível.

Proposição 9.20 A classe $\mathcal{X} \subseteq \overline{\mathcal{P}}$ é minimal à propriedade $\mathcal{P} = \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ se e somente se \mathcal{X} contém exatamente uma cópia de cada grafo \preceq -minimal em $\overline{\mathcal{P}}$.

Demonstração. Claramente, se \mathcal{X} possuir um grafo H que não é \preceq -minimal em $\overline{\mathcal{P}}$ porque digamos $H \succeq K \in \overline{\mathcal{P}}$ e $H \neq K$, então teremos $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X}) = \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X} \setminus \{H\})$, pois todos os grafos que possuem H como menor também possuem K como menor.

Por outro lado, se um grafo \preceq -minimal H de $\overline{\mathcal{P}}$ não estiver em \mathcal{X} , então teremos $H \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$.

Logo \mathcal{X} é minimal implica que \mathcal{X} contém exatamente os grafos que são \preceq -minimais em $\overline{\mathcal{P}}$.

Por outro lado, se \mathcal{X} contém exatamente os grafos que são \preceq -minimais em $\overline{\mathcal{P}}$, então todo grafo $H \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ está em \mathcal{P} (caso contrário H possuiria um menor \preceq -minimal de $\overline{\mathcal{P}}$).

A outra inclusão segue da hereditariedade de \mathcal{P} . □

A proposição acima implica que existe um único conjunto minimal de menores proibidos (a menos de isomorfismo) para uma propriedade hereditária.

Ademais, os elementos desse conjunto são incomparáveis sob \preceq . O ‘Minor Theorem’ (enunciado a seguir) implica que qualquer conjunto de grafos \preceq -incomparáveis é finito.

Teorema 9.21 [Minor Theorem; Robertson & Seymour, 1986-97] Os grafos finitos são quase-bem-ordenados pela relação de menor \preceq .

Corolário 9.22 Toda propriedade de grafos que é fechada sob tomada de menores pode ser expressa como $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ com \mathcal{X} finito.

Como a propriedade de “ser imersível numa superfície” é fechada sob tomada de menores, o seguinte corolário segue.

Corolário 9.23 Para toda superfície S existe um conjunto finito de grafos \mathcal{X} tal que $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ contém precisamente os grafos não-imersíveis em S .

A título de curiosidade, a propriedade de imersibilidade no plano projetivo equivale a um total 35 menores proibidos.

9.5 EXERCÍCIOS

Exercício 9.2. Sejam \preceq_1 e \preceq_2 quase-boas-ordens sobre Q_1 e Q_2 respectivamente. Seja também $Q = Q_1 \times Q_2$ e defina a relação \preceq sobre Q da seguinte forma:

$$(q_1, q_2) \preceq (q'_1, q'_2) \text{ se } q_1 \preceq_1 q'_1 \text{ e } q_2 \preceq_2 q'_2.$$

Prove que \preceq é uma quase-bom-ordem sobre Q .

Exercício 9.3. Mostre que não vale um resultado análogo ao Lema 9.4 para subconjuntos infinitos de X , denotado por X^ω .

Para isso, seja Q o conjunto de todos os pares (i, j) de inteiros $1 \leq i < j$ e considere a relação \preceq sobre Q definida por

$$(i, j) \preceq (i', j') \quad \text{se} \quad (i = i' \quad \text{e} \quad j \leq j') \quad \text{ou} \quad (j < i'),$$

e defina $Q^\omega = \{A \subset Q : A \text{ é infinito}\}$ e a relação \preceq_ω sobre Q^ω definida por

$$A \preceq_\omega B, \quad \text{se existe uma função injetora } f: A \rightarrow B \\ \text{tal que } a \preceq f(a) \text{ para todo } a \in A.$$

Prove que \preceq é quase-bom-ordem sobre Q mas \preceq_ω não é quase-bom-ordem sobre Q^ω .

Exercício 9.4. Prove que a relação de subgrafo não é uma quase-bom-ordem sobre o conjunto das árvores finitas. (Veja Ex 7 do Cap. 12 do Diestel.)

Exercício 9.5. Prove que a relação de menor topológico não é uma quase-bom-ordem sobre o conjunto dos grafos finitos. (Veja sugestão no Ex do Cap 12 do Diestel.)

9.6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [AH89] K.I. Appel and W. Haken. *Every Planar Map Is Four Colorable*. Contemporary mathematics, v. 98. American Mathematical Society, 1989.
- [BM08] A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2008.
- [Bol98] B. Bollobás. *Modern graph theory*. Graduate Texts in Mathematics Series. Springer-Verlag GmbH, 1998.
- [Bro87] R.L. Brooks. On colouring the nodes of a network. In Ira Gessel and Gian-Carlo Rota, editors, *Classic Papers in Combinatorics*, Modern Birkhäuser Classics, pages 118–121. Birkhäuser Boston, 1987.
- [CCPS11] W.J. Cook, W.H. Cunningham, W.R. Pulleyblank, and A. Schrijver. *Combinatorial Optimization*. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley, 2011.
- [CRST06] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, and Robin Thomas. The strong perfect graph theorem. *ANNALS OF MATHEMATICS*, 164:51–229, 2006.
- [Die05] Reinhard Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.
- [ES35] P. Erdős and G. Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math.*, 2:463–470, 1935.
- [Fle14] Tamás Fleiner. Yet another proof for brooks’ theorem. Technical Report QP-2014-01, Egerváry Reserch Group, Budapest, 2014. www.cs.elte.hu/egres.
- [HS70] A. Hajnal and E. Szemerédi. Proof of a conjecture of P. Erdős. In *Combinatorial theory and its applications, II (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969)*, pages 601–623. North-Holland, Amsterdam, 1970.

- [HT74] John Hopcroft and Robert Tarjan. Efficient planarity testing. *Journal of the ACM (JACM)*, 21(4):549–568, 1974.
- [Kru60] J. B. Kruskal. Well-quasi-ordering, the Tree Theorem, and Vazsonyi’s conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95:210–225, 1960.
- [Lov75] L Lovász. Three short proofs in graph theory. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 19(3):269 – 271, 1975.
- [Mac37] Saunders MacLane. A combinatorial condition for planar graphs. *Fund. Math*, 28:22–32, 1937.
- [Mak97] Yury Makarychev. A short proof of kuratowski’s graph planarity criterion. *J. Graph Theory*, 25:129–131, 1997.
- [NC88] Takao Nishizeki and Norishige Chiba. *Planar graphs: Theory and algorithms*, volume 140. North Holland, 1988.
- [NRS06] Brendan Nagle, Vojtech Rödl, and Mathias Schacht. The counting lemma for regular k -uniform hypergraphs. *Random Struct. Algorithms*, 28(2):113–179, 2006.
- [OPT01] Deryk Osthus, Hans Jürgen Prömel, and Anusch Taraz. Almost all graphs with high girth and suitable density have high chromatic number. *J. Graph Theory*, 37(4):220–226, August 2001.
- [Ore55] Oystein Ore. Graphs and matching theorems. *Duke Math. J.*, 22:625–639, 1955.
- [PL86] D. Plummer and L. Lovász. *Matching Theory*. North-Holland Mathematics Studies. Elsevier Science, 1986.
- [Ric46] M. Richardson. On weakly ordered systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52:113–116, 1946.
- [Tho80] C. Thomassen. *Kuratowski’s Theorem*. Preprint series: Matematisk Institut. Matematisk Inst., Univ., 1980.
- [Tho81] Carsten Thomassen. Kuratowski’s theorem. *Journal of Graph Theory*, 5:225–241, 1981.
- [Tho88] Andrew Thomason. An upper bound for some Ramsey numbers. *J. Graph Theory*, 12(4):509–517, 1988.
- [TT81] C. Thomassen and B. Toft. Non-separating induced cycles in graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 31(2):199–224, October 1981.
- [Wes] Douglas B. West. Ore, Berge–Tutte, and Gallai–Edmonds.
- [Wes11] Douglas B. West. A short proof of the Berge–Tutte Formula and the Gallai–Edmonds Structure Theorem. *European Journal of Combinatorics*, 32(5):674–676, 2011.