1 Aplicando o algoritmo EM

Sendo $f(x, y)$ uma amostra de um dos canais de cor da imagem CFA interpolada, assume-se que cada amostra $f(x, y)$ pertence a um dos grupos:

- M_1: se a amostra for linearmente correlacionada com suas amostras vizinhas, satisfazendo a relação:

$$f(x, y) = \sum_{u,v=-N}^{N} \alpha_{u,v} f(x+u, y+v) + n(x, y), \tag{1}$$

  onde os parâmetros do modelo são dados pelos coeficientes lineares $\vec{\alpha} = \{\alpha_{u,v} | -N \leq u, v \leq N\}$ (N é um inteiro e $\alpha_{0,0} = 0$) e $n(x, y)$ são amostras de ruído do tipo branco gaussiano de média zero e variância desconhecida σ^2;

- M_2: se a amostra não está correlacionada com suas amostras vizinhas, sendo, por exemplo, gerada por um processo externo.

O algoritmo EM apresenta dois passos: (1) no passo E, a probabilidade de cada amostra pertencer a um dos dois modelos é estimada dados os valores do vetor de parâmetros; e (2) no passo M, a forma específica da correlação entre amostras e novos valores dos parâmetros são estimados.

Mais especificamente, no passo E, a probabilidade de cada amostra $f(x, y)$ pertencer ao grupo M_1 é estimada utilizando a regra de Bayes:

$$\Pr\{f(x, y) \in M_1 | f(x, y)\} = \frac{\Pr\{f(x, y)|f(x, y) \in M_1\} \Pr\{f(x, y) \in M_1\}}{\sum_{i=1}^{2} \Pr\{f(x, y)|f(x, y) \in M_i\} \Pr\{f(x, y) \in M_i\}} \tag{2}$$

onde, como pode-se observar dos canais de cor sub-amostrados do arranjo de Bayer, as probabilidades a priori $\Pr\{f(x, y) \in M_1\}$ e $\Pr\{f(x, y) \in M_2\}$ são iguais a 1/2.

A probabilidade de observar uma amostra $f(x, y)$, sabendo que ela pertence ao grupo M_1, é dada por:

$$\Pr\{f(x, y)|f(x, y) \in M_1\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(f(x, y) - \sum_{u,v=-N}^{N} \alpha_{u,v} f(x+u, y+v))^2}{2\sigma^2}\right] \tag{3}$$

A variância σ^2 desta distribuição gaussiana é estimada no passo M. Assume-se uma distribuição uniforme para a probabilidade de se observar uma amostra do grupo M_2, por exemplo, $\Pr\{f(x, y)|f(x, y) \in M_2\}$ é igual ao inverso do intervalo de valores possíveis para $f(x, y)$. Note que o passo E requer uma estimativa dos coeficientes $\vec{\alpha}$, os quais na primeira iteração são escolhidos aleatoriamente. No passo M, uma nova estimativa de $\vec{\alpha}$ é computada utilizando o método dos mínimos quadrados, minimizando a seguinte função de erro quadrático:

$$E(\vec{\alpha}) = \sum_{u,v} w(x, y) \left(f(x, y) - \sum_{u,v=-N}^{N} \alpha_{u,v} f(x+v, y+v) \right)^2 \tag{4}$$

onde os pesos $w(x, y)$ são definidos como

$$w(x, y) \equiv \Pr\{f(x, y) \in M_1 | f(x, y)\} \tag{5}$$

Esta função de erro é minimizada computando o vetor gradiente em relação à cada componente do vetor $\vec{\alpha}$ de coeficientes, igualando a zero e avaliando o sistema linear de equações resultante. Avaliando a derivada parcial do erro em relação ao coeficiente $\alpha_{s,t}$, temos:

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_{s,t}} = 0$$

$$\sum_{x,y} w(x, y) f(x + s, y + t) \sum_{u,v=-N}^{N} \alpha_{u,v} f(x + u, y + v) = \sum_{x,y} w(x, y) f(x + s, y + t) f(x, y)$$

$$\sum_{u,v=-N}^{N} \alpha_{u,v} (\sum_{x,y} f(x + s, y + t) f(x + u, y + v)) = \sum_{x,y} w(x, y) f(x + s, y + t) f(x, y) \tag{6}$$

Este processo é repetido para cada componente $\alpha_{s,t}$ de $\vec{\alpha}$ para produzir um sistema de equações lineares que pode ser resolvido por métodos convencionais.

Os passos E e M são executados iterativamente até que uma estimativa estável de $\vec{\alpha}$ seja alcançada. Com isso os coeficientes $\vec{\alpha}$ finais tem a propriedade de maximizar o grau de verossimilhança entre as amostras observadas.

De posse de $\vec{\alpha}$ e de σ, utiliza-se da função $\Pr\{f(x, y) \in M_1 | f(x, y)\}$ para a criação de um mapa das estimativas de probabilidades dos valores de cada pixel observado tenha sido originado através de algum método de interpolação.

2 Parâmetros iniciais utilizadas nos testes

Os parâmetros escolhidos para o algoritmo EM foram:

- $N = 1$;
- $\sigma_0 = 0.75$;
- $\Pr\{f(x, y) | f(x, y) \in M_2\} = \frac{1}{256}$