# 8.3 More Integral Theorems

May 30, 2015

**Abstract**

Exercices de la secion 8.3 des théorèmes se rapportant à l'intégrale de Riemann dérivés à l'aide du critère d'intégrabilité de Lebesgue.

## 8-16

1. $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction riemann
2. $\exists \epsilon > 0$ tel que $|g(x)| > \epsilon$ pour tout $x \in [a, b]$

### (a)

$\diamond$ (1) $\dfrac{f}{g}$ **est riemann**

Puisque $g$ n'est jamais nulle sur $[a, b]$, on a que $\dfrac{1}{g}(x)$ est bien définie sur $[a, b]$.

Or, $\dfrac{1}{g}$ est continue pp puisque $g$ est continue pp (**[1]** + **thm 8.12**).

On applique alors la partie 1 du **thm 8.14**.

### (b)

$\diamond$ $|f|$ **est riemann et** $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Puisque $|x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $f$ est continue pp sur $[a, b]$, $|f|$ est continue pp sur $[a, b]$ car si $f$ est continue en $x$, alors $|f|$ le sera aussi (**thm 3.30**). Donc $|f|$ est riemann (**thm 8.12**).

Par le **lemme 5.6**, puisque $f$ est riemann, alors pour toutes suites de partition $\{P_k\}$ telle que $\lim_{n\to\infty} ||P_k|| = 0$ avec suite d'ensemble d'évaluation $\{T_k\}$ correspondant, on a $\lim_{k\to\infty} R(f, P_k, T_k) = \int_a^b f$.

Par **2-12**, puisque la limite des sommes de riemann existe, on a $\left|\int_a^b f\right| = \left|\lim_{k\to\infty} R(f, P_k, T_k)\right| = \lim_{k\to\infty} |R(f, P_k, T_k)|$.

On déduit

$$\lim_{k\to\infty} |R(f, P_k, T_k)|$$

$$=$$

$$\lim_{k\to\infty} \left| \sum_{i=1}^{n_k} f(x_{k,i})\Delta x_{k,i} \right|$$

$$\leq$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} |f(x_{k,i})|\Delta x_{k,i}$$

$$=$$

$$\lim_{k\to\infty} R(|f|, P_k, T_k)$$

$$=$$

$$\int_a^b |f|$$

où la dernière égalité est une autre application du **lemme 5.6**.

On peut terminer la preuve en considérant n'importe quelle partition donc la norme tend vers 0 et considérer sa somme supérieure ou inférieure.

## (c)

$\diamond$ Dans le but d'illustrer l'utilité du critère d'intégrabilité de Lebesgue, démontrez l'intégrabilité de $|f|$ sur $[a, b]$ à l'aide du critère de Riemann (**thm 5.25**).

Puisque $f$ est riemann, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $P$ une partition de $[a, b]$ tel que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$ (**thm 5.25**).

Alors

$$U(|f|, P) - L(|f|, P)$$

$$=$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

$$=$$

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i$$

où $M_i = \sup\{|f(x)| : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ et $m_i = \inf\{|f(x)| : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

Soit $S_i := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ et $L_i := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

On a alors quelques cas. Si $S_i \geq 0$ et $L_i \geq 0$, alors $M_i = S_i$ et $m_i = L_i$

car $|f|([x_{i-1}, x_i]) = f([x_{i-1}, x_i])$ et donc $S_i - L_i = M_i - m_i$.

Si $S_i \geq 0$ et $L_i < 0$, alors $M_i = \max\{|S_i|, |L_i|\}$ et $m_i \geq 0$.

Si $S_i > |L_i|$, alors c'est que $S_i > 0$. SPDG, on ne considérera que des $x$ tel que $f(x) > 0$. Supposons alors $L < S_i$ tel que $L$ soit le supremum.On pose $\alpha := S_i - L$. Alors il existe $x \in [x_{i-1}, x_i]$ tel que $S_i - f(x) < \alpha = S_i - L$. Alors $f(x) > L$ et donc $L$ ne peut pas être le supremum. En particulier $|L_i|$.

Si $|L_i| > S_i$. Supposons $L < |L_i|$ le supremum. On pose $\alpha := |L_i| - L$. Puisque $L_i$ est l'infimum de $\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, il existe $x$ tel que $f(x) - L_i < \alpha = |L_i| - L = -L_i - L$. Alors $f(x) < -L$. SPDG, $f(x) < 0$. Alors $|f(x)| > L$ et donc $L$ ne peut pas être le supremum. À plus forte raison $S_i$.

Si alors $M_i = S_i$, alors $S_i - L_i \geq S_i$ car $-L_i > 0$. Si $M_i = |L_i|$, alors $S_i - L_i = S_i + |L_i| = M_i + S_i \geq M_i - m_i$ car $m_i \geq 0$.

Si $S_i < 0$ et $L_i < 0$, alors $M_i = |L_i|$ et $m_i = |S_i|$. Car alors $|f|([x_{i-1}, x_i]) = -f([x_{i-1}, x_i])$ et donc $sup(|f|([x_{i-1}, x_i])) = -inf(f([x_{i-1}, x_i])) = |L_i|$ et analoguement pour l'infimum.

Alors $M_i - m_i = |L_i| - |S_i| = -L_i - (-S_i) = S_i - L_i$.

On conclut

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \\
\leq \\
&\sum_{i=1}^{n} (S_i - L_i)\Delta x_i \\
= \\
&U(f, P) - L(f, P) < \epsilon
\end{aligned}$$

Ainsi $U(|f|, P) - L(|f|, P) \leq U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$.

## 8-17

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
2. $m \in (a, b)$

$\diamond$ $f$ **est riemann sur** $[a, b]$ **ssi f est riemann sur** $[a, m]$ **et sur** $[m, b]$ **et alors**

$$\int_a^b f = \int_a^m f + \int_m^b f$$

### $(\Rightarrow)$

Supposons $f$ riemann sur $[a, b]$. Alors $f$ est continue pp sur $[a, b]$ (**thm 8.12**) et donc continue pp sur $[a, m]$ et sur $[m, b]$ et donc riemann sur chacun de ces intervalles (**thm 8.12**).

Puisque $f$ est riemann sur chacun des intervalles $[a, m]$ et $[m, b]$ alors pour toutes suites de partitions $\{P_k\}$ de $[a, m]$, $\{D_k\}$ de $[m, b]$ on a

$$\lim_{k\to\infty} R(f, P_k, T_k) = \int_a^m f$$
$$\lim_{k\to\infty} R(f, D_k, T_k^*) = \int_m^b f$$

Alors

$$R(f, P_k, T_k) + R(f, D_k, T_k^*)$$
$$=$$
$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{m} f(t_i^*)\Delta x_i$$
$$=$$
$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i + \sum_{i=n}^{n+m} f(t_{n+i}^*)\Delta x_{n+i}$$
$$=$$
$$\sum_{i=1}^{n+m} f(t_i)\Delta x_i$$
$$=$$
$$R(f, P_k \cup D_k, T_k \cup T_k^*)$$

car $P_k \cup D_k$ forme une partition de $[a, b]$ où $P_k$ termine en $m$ et $D_k$ y débute. De plus, il est clair que $\lim\limits_{k\to\infty} ||P_k \cup D_k|| = 0$.

Puisque $f$ est riemann sur $[a, b]$, on applique à répétition le **lemme 5.6** pour obtenir

$$\int_a^m f + \int_m^b f$$
$$=$$
$$\lim_{k\to\infty} R(f, P_k, T_k) + \lim_{k\to\infty} R(f, D_k, T_k^*)$$
$$=$$
$$\lim_{k\to\infty} (R(f, P_k, T_k) + R(f, D_k, T_k^*))$$
$$=$$
$$\lim_{k\to\infty} R(f, P_k \cup D_k, T_k \cup T_k^*)$$
$$=$$
$$\int_a^b f$$

($\Leftarrow$)

Supposons $f$ intégrable sur $[a, m]$ et sur $[m, b]$. Alors $f$ est continue pp sur chacun de ces intervalles considérés individuellement.

Soit alors $x \in [a, b]$ tel que $f : [a, b]$ est discontinue. Alors $x \in [a, m]$ ou $x \in [m, b]$. SPDG, $x \in [a, m]$. Alors $f(x) = f|_{[a,m]}(x)$. Mais alors $f|_{[a,m]}(x)$ doit être discontinue, car sinon $f(x)$ serait continue. Donc les points de discontinuité de $f$ forment un sous-ensemble des points de discontinuité de $f|_{[a,m]}$ et de $f|_{[m,b]}$. Or la mesure de l'union de ces ensembles est nulle, car la mesure de chacun d'entre eux l'est également, donc $f$ est continue pp sur $[a, b]$ donc riemann sur $[a, b]$ (**thm 8.12**).

Alors, en appliquant le **lemme 5.6** pour $f|_{[a,m]}$ et $f|_{[m,b]}$, on effectue un raisonnement similaire à celui fait plus haut.

# 8-18

1. $f$ Riemann sur $[a, b]$
2. $x_0 \in [a, b]$
3. $G(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$

$\diamond$ $G(x)$ **est uniformément continue sur** $[a, b]$
$\diamond$ **Si** $f$ **est continue en** $x \in (a, b)$ **alors** $\dfrac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right) = f(x)$

On a que

$$\int_a^x f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^{x} f$$

et donc $G(x) = \int_a^x f - \int_a^{x_0} f$. Or, le premier terme de cette différence est uniformément continue (**thm 8.17**) et le deuxième, étant une constante, l'est également. Donc $G(x)$ est une différence de fonctions continues sur $[a, b]$. Elle est donc continue sur $[a, b]$ (**thm 3.27**) et donc uniformément continue sur cet interval (**lm 5.19**).

Supposons alors $f$ continue en $x \in (a, b)$. Alors

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f - \int_a^{x_0} f\right) = f(x)$$

puisque la dérivé de $\int_a^x f$ est $f(x)$ (**thm 8.17**) et que celle de $\int_a^{x_0} f$ est 0, étant une constante.

# 8-19

1. $f, g$ Riemann sur $[a, b]$

$\diamond$ $fg$ **est Riemann sur** $[a, b]$ **à l'aide du critère de Riemann (thm 5.25)**