3.1 Permuations and combinations

June 1, 2015

Abstract

Exercices de la section 3.1 Permutations and combinations

1

[1] S un ensemble tel que $|S| = n$

$\diamond |\mathcal{P}(S)| = 2^n$

On observe premièrement que la cardinalité de l'ensemble puissance est donnée par la formule

$$\sum_{k=0}^{n} C_k^n$$

et que, pour l'ensemble vide, la chose est triviallement prouvée. Supposons la donc telle pour $|S| = n$.

On a que

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1} = 2^{n+1} = 2^n + 2^n$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1} - 2^n = 2^n$$

$\Leftrightarrow$

$$1 + \sum_{k=0}^{n} C_k^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} C_k^n = 2^n$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n} C_k^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} C_k^n$$

$$=$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+2)}{k!} - \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

$$=$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{k!} k$$

$$=$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1)+1)}{(k-1)!}$$

$$=$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

$$=$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_k^n$$

Ainsi

$$1 + \sum_{k=0}^{n} C_k^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} C_k^n$$

$$=$$

$$1 + \sum_{k=0}^{n-1} C_k^n = C_n^n + \sum_{k=0}^{n-1} C_k^n$$

$$=$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_k^n = 2^n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1} = 2^{n+1}$$

2

Utiliser le résultat du numéro 1 pour prouver

$$\sum_{k=0}^{n} C_k^n = 2^n$$

Déjà fait dans le numéro 1.

3

Utiliser le théorème 3.2 pour montrer

$$C_k^n = C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1}$$

On a que

$$\begin{aligned}
& C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1} \\
= \\
& \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!} + \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{(k-1)!} \\
= \\
& \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{(k-1)!}\left(\frac{n-k}{k}+1\right) \\
= \\
& \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{(k-1)!}\left(\frac{n}{k}\right) = C_k^n
\end{aligned}$$

4

Donner une preuve par induction du théorème 3.2 en employant le résultat du numéro 3. C'est à dire, montrer

$$C_k^n = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Pour $n = 0$, $C_k^n = 1$.

Supposons la chose prouvée pour n. Alors, pour $0 \leq k < n+1$

$$\begin{aligned}
& C_k^{n+1} = C_k^n + C_{k-1}^n \\
= \\
& \frac{n\dots(n-k+1)}{k!} + \frac{n\dots(n-k+2)}{(k-1)!} \\
= \\
& \frac{n\dots(n-k+2)}{(k-1)!}\left(\frac{n-k+1}{k}+1\right) \\
= \\
& \frac{n\dots(n-k+2)}{(k-1)!}\left(\frac{n+1}{k}\right) \\
= \\
& \frac{(n+1)\dots((n+1)-k+1)}{k!} = C_k^{n+1}
\end{aligned}$$

Pour $k = n+1$, on a $C_{n+1}^{n+1} = 1 = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)!}$.

4.1 Autre preuve

* Puisque l'algèbre des ensembles de tout ensemble fini est isomorphe un $\mathbb{B}^n$ pour $|S| = n$, on a que l'ensemble puissance de S est isomorphe à l'ensembles des chaînes binaires de longueur n, dont la cardinalité est évidemment 2^n.