11 Normal subgroups

September 6, 2015

11.5

1. H un sous-groupe de G
2. $K \lhd G$

$\diamond$ $H \cap K \lhd H$

Car $H \lhd H$ et donc le résultat suit par **ex. 11.4**.

11.6

1. H un sg de G

$\diamond$ $H \lhd G$ **ssi** $\forall x, y \in G$ **on a** $xy \in H \Leftrightarrow yx \in H$

Soit $H \lhd G$ et soit de plus $x, y \in G$ tel que $xy \in H$. Alors $y \in x^{-1}H$. Or $x^{-1}H = Hx^{-1}$ (**thm. 11.1**). Donc $y \in Hx^{-1} \Leftrightarrow yx \in H$.

Soit alors $xy \in H$ ssi $yx \in H$. Alors $x^{-1}y \in H$ ssi $yx^{-1}H$, c'est-à-dire $y \in xH$ ssi $y \in Hx$. Donc $xH = Hx$ et donc $H \lhd G$ (**thm. 11.1**).

11.7

1. $H, K \lhd G$
2. $H \cap K = \{e\}$

$\diamond$ $x \in H$ **et** $y \in K$ **alors** $xy = yx$

Car $yxy^{-1} \in H$ par **thm. 11.1**. Aussi, $x^{-1} \in H$. Donc $yxy^{-1}x^{-1} \in H$.

Mais de même, $xy^{-1}x^{-1} \in K$ et $y \in K$. Donc $yxy^{-1}x^{-1} \in K$.

Donc $yxy^{-1}x^{-1} \in H \cap K$ et donc $yxy^{-1}x^{-1} = e \Rightarrow yx = xy$.

11.8

1. $N \lhd G$
2. H un sous-groupe de G
3. $NH = \{nh : n \in N, h \in H\}$

$\diamond$ **NH est un sous-groupe de G**

Premièrement, que $NH = HN$. Car soit $nh \in NH$. Alors $nh \in Nh = hN$ (**hyp. 1**). Mais alors $nh \in HN$. Donc $NH \subseteq HN$ et de même dans l'autre direction.

Mais alors soit $nh \in NH$. Alors $h^{-1}n^{-1} = (nh)^{-1} \in HN = NH$. Donc tout élément de NH possède son inverse dans NH. Aussi, $e \in NH$, car N, H sont des groupes. Donc NH est un sous-groupe de G.

11.9

1. Mêmes hypothèses qu'en 11.8
2. H est normal

$\diamond$ **NH est normal**

Premièrement, que $gNHg^{-1} = (Ng)(g^{-}H)$.

Car $gNHg^{-1} = \{gnhg^{-1} : gn \in gN, hg^{-1} \in Hg^{-1}\} = \{gnhg^{-1} : gn \in Ng, hg^{-1} \in g^{-1}H\} = (Ng)(g^{-1}H)$.

Or, $hn = (ng)(g^{-1}h) \in (Ng)(g^{-1}H)$. Donc $NH \subseteq gNHg^{-1}$. Donc $NH = gNHg^{-1}$ par **thm. 11.4** et donc NH est normal par **thm 11.1**.