8.4 Improper Riemann Integrals

August 15, 2015

8-33

1. $p > 0$ un rationnel
2. $f(x) := \dfrac{1}{x^p}$

$\diamond$ f **est riemann impropre sur** $(0,1]$ **ssi** $p < 1$

Si $p = 1$, alors $\int_0^1 f = \lim_{c\to 0}(-\log(c))$ qui tend vers $-\infty$.

Soit alors $p < 1$. On a

$$\lim_{t\to 0}\int_t^1 f$$
$$=$$
$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{1-p} - \frac{t^{1-p}}{1-p}\right)$$
$$=$$
$$\frac{1}{1-p}(1 - \lim_{t\to 0} t^{1-p})$$

Or $1-p$ est positif est donc $\lim_{t\to 0} t^{1-p} = 0$ (**s.d.**).

Mais cette limite ne peut converger si $p \geq 1$ est donc si f est riemann impropre, $p < 1$ (**s.d.**).

8-35

1. $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ où $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
2. f riemann pour tout $[a,c] \subseteq [a,b)$

$\diamond$ f **est riemann impropre ssi pour tout** $c \in [a,b)$ f **est riemann impropre sur** $[c,b)$ **et alors** $\int_a^b f = \int a^c f + \int c^b f$ Soit f riemann impropre sur $[c,b)$ pour tout $c \in [a, b)$. Alors

$$\int_a^c f + \int_c^b f$$
$$=$$
$$\lim_{t \to c} \int_a^t f + \lim_{t \to c} \int_c^b f$$
$$=$$
$$\lim_{t \to c} (\int_a^t f + \int_t^b f)$$
$$=$$
$$\lim_{t \to c} (\int_a^b f) = \int_a^b f$$

par des applications de **thm. 3.10** et **thm. 5.8**.

Soit alors f riemann impropre sur $[a, b)$. Supposons de plus qu'il existe un c tel que f n'est pas riemann impropre sur $[c, b)$.

Alors $h(z) := \int_a^c f$ est bornée puisque f est riemann sur tout $[a, c] \subseteq [a, b)$.

Soit alors $g(z) := \int_c^z f$. Alors (**spdg**) $\lim_{z \to b} g(z) = \infty$. On donc

$$\int_a^b f = \lim_{z \to b} \int_a^z f$$
$$=$$
$$\lim_{z \to b} (\int_a^c f + \int_c^z f)$$
$$=$$
$$\lim_{z \to b} (h(z) + g(z))$$

Or, par **ex. 3-22**, cette limite est égale à ∞. Donc, $\int_a^b f = \infty$, une contradiction.

Donc pour tout $c \in [a, b)$, f est riemann impropre sur $[c, b)$.

L'argument présenté plus haut est alors applicable pour montrer que

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

.

8-37

1. $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ où $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
2. f riemann sur tout $[a, c] \subseteq [a, b)$

3. $|f|$ riemann impropre sur $[a,b)$

◇ f **est riemann impropre sur** $[a,b)$ **et** $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

On a

$$\begin{aligned}
& 0 \leq f + |f| \leq 2|f| \\
\Rightarrow & \\
& 0 \leq \int_a^c f + |f| \leq 2\int_a^c |f| \\
\Rightarrow & \\
& -\int_a^c |f| \leq \int_a^c f \leq \int_a^c |f| \\
\Rightarrow & \\
& -\int_a^b |f| \leq \lim_{c\to b}\int_a^c f \leq \int_a^b |f|
\end{aligned}$$

par **prop. 5.21 (monotonie de l'intégrale)**. Donc $\int_a^b f$ existe.

Alors

$$\left|\int_a^c f\right| \leq \int_a^c |f| \quad \text{pour tout } c \in [a,b)$$

(thm. 8.14) et donc

$$\lim_{c\to b}\left|\int_a^c f\right| \leq \int_a^b |f|$$

Or, puisque $\int_a^b f$ existe, on a que $\lim_{c\to b}\left|\int_a^c f\right| = \left|\lim_{c\to b}\int_a^c f\right|$ par **ex. 2-12**.

8-38

◇ **Construire** $f : [1,\infty) \to [0,1]$ **tq** f **est riemann impropre mais** $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$

On définit

$$\begin{aligned}
I_i &:= [i, i + \frac{1}{2^{i+1}}) \text{ où } i \in \{1\cdots\} \\
f_i &:= \begin{cases} (x-i)2^{i+1} \text{ si } x \in I_i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\
f &:= \sum_{i=1}^{\infty} f_i
\end{aligned}$$

f définit une série de triangle de base $\frac{1}{2^{i+1}}$ et de hauteur 1, donc d'air $\frac{1}{2^i}$ (**s.d.**).

De plus, f ne tend pas vers 0 lorsque $x \to \infty$. Car $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ssi

$\forall \{a_n\}$ tq $a_i \to \infty$ $(i \to \infty)$, on a $\lim_{i\to\infty} f(a_i) = 0$ (**def. 3.1**).

Soit alors $a_i := i + \frac{1}{2^{i+1}}$. Alors on a $f(a_i) = (i + \frac{1}{2^{i+1}} - i)2^{i+1} = 1$ pour tout i (**def.**). De plus, $a_i \to \infty$ $(i \to \infty)$, car $a_i > i$ (**def.**).

Soit alors $c \in [1, \infty)$. Alors il existe $i(c) \in \mathbb{N}$ minimum tel que $i(c) \geq c$ (**thm. 1.32, thm. 1.27**).

Alors $\lim_{c\to\infty} i(c) = \infty$ (**s.d.**). Puisque $f \geq 0$ (**def.**) on a que $F(t) := \int_1^t f$ est non décroissante (**s.d.**). On a alors

$$\int_1^c f \leq \int_1^{i(c)} f$$

$$=$$

$$\sum_{j=1}^{i(c)} \int_j^{j+\frac{1}{2^{j+1}}} \sum_{i=1}^{\infty} f_i$$

$$=$$

$$\sum_{j=1}^{i(c)} \int_j^{j+\frac{1}{2^{j+1}}} f_j$$

$$=$$

$$\sum_{j=1}^{i(c)} \frac{1}{2^j}$$

Alors

$$\lim_{c\to\infty} \int_1^c f \leq \lim_{c\to\infty} \sum_{j=1}^{i(c)} \frac{1}{2^{j+1}}$$

$$=$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1$$

et donc l'intégrale impropre existe (**thm. 2.37 (thm. séquences monotones)**).

8-39 : Critère de Cauchy

1. $f : [a, b) \to [0, \infty)$ où $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
2. f riemann pour tout $[a, c] \subseteq [a, b)$

$\diamond$ **f est riemann impropre sur $[a, b)$ ssi pour tout $\epsilon > 0$ il existe $M \in [a, b)$ tel que pour tout $c, d \in (M, b)$ on a** $\left|\int_c^d f\right| < \epsilon$

On pose $F(t) := \int_a^t f$. On a que

$$\forall \epsilon \exists M \text{ tq } d(t,b) < M \Rightarrow \left| F(t) - \lim_{x \to b} \int_a^x f \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Soit alors $t_1, t_2 \in (M, b)$ et, spdg, $t_1 < t_2$. Alors

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{x \to b} \int_a^x f - F(t_1) \right| + \left| F(t_2) - \lim_{x \to b} \int_a^x f \right| < \epsilon \\ \Rightarrow & \\ & |F(t_2) - F(t_1)| < \epsilon \\ \Rightarrow & \\ & \left| \int_{t_1}^{t_2} f \right| < \epsilon \end{aligned}$$

8-40

1. $f, g : [a, b) \to [0, \infty)$ où $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
2. f, g riemann pour tout $[a, c] \subseteq [a, b)$
3. $\lim_{x \to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K > 0$

$\diamond$ $\int_a^b f$ **conversge ssi** $\int_a^b g$ **converge**

Indice : Près de b, on a que $g(x)(K - \epsilon) \leq f(x) \leq g(x)(K + \epsilon)$

On montre facilement l'énoncé donné par l'indice à partir de l'hyposthèse [3]. Supposons alors que $\int_a^b g$ existe et supposons de plus M tq pour tout $x \in (M, b)$, on ait $g(x)(K - \epsilon) \leq f(x) \leq g(x)(K + \epsilon)$. Alors

$$\begin{aligned} & (K - \epsilon) \int_M^t g \leq \int_M^t f \leq (K + \epsilon) \int_M^t g \\ \Rightarrow & \\ & (K - \epsilon) \int_M^b g \leq \int_M^b f \leq (K + \epsilon) \int_M^b g \end{aligned}$$

par **monotonicité de l'intégrale** et **monotonicité de la limite**. On a de plus, par [2], que $\int_a^M f$ est riemann. Alors

$$\int_a^M f + \int_M^b f$$
$$=$$
$$\int_a^M f + \lim_{x \to b} \int_M^x f$$
$$=$$
$$\lim_{x \to b} \int_a^M f + \lim_{x \to b} \int_M^x f$$
$$=$$
$$\lim_{x \to b} \left(\int_a^M f + \int_M^x f \right)$$
$$=$$
$$\lim_{x \to b} \int_a^x f = \int_a^b f$$

Supposons alors que $\int_a^b f$ existe. Alors pour tout M, $\int_M^b f$ existe (**s.d.**). Supposons alors M tel qu'il fut fait ci-haut. Alors

$$(K - \epsilon) \int_M^t g \leq \int_M^t f$$
$$\Rightarrow$$
$$(K - \epsilon) \int_M^b g \leq \int_M^b f$$

et donc $\int_M^b g$ existe. Puisque $\int_a^M g$ existe par [2], on peut conclure.

8-41

1. $f : (a, b] \to \mathbb{R}$
2. $g := x^{-2} f(a + \frac{1}{x})$

$\diamond$ f **est riemann impropre sur** $(a, b]$ **ssi** g **est riemann impropre sur** $[\frac{1}{b-a}, \infty)$ **et alors les intégrales sont égales**

Supposons alors f riemann impropre sur $(a, b]$. Alors, posant $y := \frac{1}{x-a}$, on a

$$\lim_{t \to a} \int_t^b f(x)dx$$
$$=$$
$$\lim_{t \to a} \int_{\frac{1}{t-a}}^{\frac{1}{b-a}} f(a + \frac{1}{y})(-y^{-2})dy$$

La fonction $-x^{-2}f(a+\frac{1}{x})$ est donc riemann impropre sur $[\frac{1}{b-a},\infty)$ (**def.**) et donc g est riemann impropre sur ce même interval (**thm. 8.25**).

La substitution inverse dans l'autre sens devrait nous asssurer que si g est riemann impropre, alors f l'est également.