9.3 The Lebesgue Integral

February 12, 2016

9-20

a)

1. s une fonction simple non-négative
2. $y_1, \cdots, y_m \in (0, \infty)$ les valeurs non-nulles prisent par s
3. $a_1, \cdots, a_n \in [0, \infty)$ et $A_1, \cdots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ des ensembles Lebesgue mesurables deux à deux disjoints tel que $s = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$

$$\diamond \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda(A_k) = \sum_{j=1}^{m} y_j \lambda(s^{-1}(y_j))$$

Pour chaque a_k, soi $a_k = 0$, soi $a_k > 0$ et alors $a_k = y_i$ pour un certain $i \in \{1, \cdots, m\}$. On désigne par $\{a_{i_1}, \cdots, a_{i_l}\}$ les a_{i_k} tel que $a_{i_k} = y_i$. On définit de même $B_i := \bigcup_{j=1}^{l} A_{i_j}$.

Puisque les A_k sont deux à deux disjoints, on a $\lambda(B_i) = \sum_{j=1}^{l} A_{i_j}$. On peut donc réarranger

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \lambda(A_k)$$

$$=$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{l} a_{j_i} \lambda(A_{j_i})$$

$$= \quad < a_{j_i} = y_j \textbf{ par def} >$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{l} \lambda(A_{j_i})$$

$$=$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j \lambda(B_j)$$

On doit donc montrer que $B_j = s^{-1}(y_j)$. On a

$$x \in B_j$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x \in \bigcup_{i=1}^{l} A_{j_i}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$s(x) = a_{j_i} = y_j$$

b)

1. s_1, s_2 des fonctions simples

$\diamond$ $\int_{\mathbb{R}}(s_1 + s_2)d\lambda = \int_{\mathbb{R}} s_1 d\lambda + \int_{\mathbb{R}} s_2 d\lambda$

Si s_1, s_2 sont Lebesgue intégrales, on applique **thm. 9.25**.

Soit $s_1, s_2 \geq 0$ tq $\int_{\mathbb{R}} s_1 d\lambda = \infty$. On doit montrer que $\int_{\mathbb{R}}(s_1 + s_2)d\lambda = \infty$.

Premièrement, on a qu'il existe B_i tel que $\lambda(B_i) = \infty$ et $b_i \neq 0$.

On définit $A_j := (s_1 + s_2)^{-1}(y_j)$ pour des y_j non nulle et on a donc $\int_{\mathbb{R}}(s_1 + s_2)d\lambda = \sum_{j=1}^{n} y_j \lambda(A_j)$ par **ex. 9-20a**.

Soit $A_{j_1} \cdots A_{j_k}$ les ensembles tels que $B_i \cap A_{j_l} \neq \emptyset$.

Alors je dis qu'il existe $m \in \{1 \cdots k\}$ tel que $\lambda(A_m) = \infty$.

Car sinon, ces ensembles sont tous de mesure finie. Or $B_i \subseteq \bigcup_{l=1}^{k} A_{j_l}$.

Car soit $x \in B_i$. Alors $(s_1 + s_2)(x) = y_t$ pour un certain t. Mais alors $x \in A_t$ et donc $x \in \bigcup_{l=1}^{k} A_{j_l}$.

Donc $B_i \subseteq \bigcup_{l=1}^{k} A_{j=l}$ et donc $\lambda(B_i) = \infty \leq \lambda(\bigcup_{l=1}^{k} A_{j_l}) \leq \sum_{l=1}^{k} \lambda(A_{j_l})$ par **thm. 8.6**.

Si on permet les fonctions négatives, je crois que le théorème est faux. On pose $s_1 := -\chi_{\mathbb{R}}$ et $s_2 := \chi_{\mathbb{R}}$. Alors $s_1 + s_2 = 0$. On a donc $\int_{\mathbb{R}}(s_1 + s_2)d\lambda = 0$. Or $\int_{\mathbb{R}} s_1 d\lambda + \int_{\mathbb{R}} s_2 d\lambda = -\infty + \infty$, qui est une forme indeterminée.

9-21

1. $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ bornée et Lebesgue mesurable
2. $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}) < \infty$

$\diamond$ **f est Lebesgue intégrable et**

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} s d\lambda : s \text{ est simple et } f \leq s \right\}$$

Puisque f est bornée, supposons M tel que $f(x) \leq M$ pour tout x.

On a de plus que $f(x) \leq M\chi_{\{f>0\}}$ pour tout x. Or, le membre de droit est une fonction simples et son intégral est donnée par $M\lambda(\{f>0\}) < \infty$.

Par **thm. 9.23**, on a $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda \leq M\lambda(\{f>0\})$ et donc f Lebesgue intégrable.

Il est clair que $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda \leq \inf\{\cdots\}$. On prouve donc qu'il ne peut pas être strictement plus grand.

On définit

$$h(x) := M\chi_{\{f>0\}} - f$$

Alors $h \leq M$ et $\{h>0\} = \{f>0\}$. De plus, $h \leq M\chi_{\{f>0\}}$ et donc, par **thm. 9.23**, h est Lebesgue intégrable.

Par **def. 9.22**, on a que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $s \leq h$ tel que $\int_{\mathbb{R}} h - s d\lambda < \epsilon$. Or

$$\begin{aligned} & h - s = M\chi_{\{f>0\}} - f - s \\ = & \\ & (M\chi_{\{f>0\}} - s) - f \\ \Rightarrow & \\ & \int_{\mathbb{R}} (M\chi_{\{f>0\}} - s) d\lambda - \int_{\mathbb{R}} f d\lambda < \epsilon \end{aligned}$$

Or $M\chi_{\{f>0\}} - s$ est une fonction escalier tel que $M\chi_{\{f>0\}} - s \geq f$ puisque $s \leq M\chi_{\{f>0\}} - f \Leftrightarrow M\chi_{\{f>0\}} - s \geq f$.

Donc, l'infimum considéré ne peut pas être plus grand que $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$, donc il est égal.

9-22

1. $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ Lebesgue mesurable

$\diamond$ **f est Lebesgue intégrable ssi**

$$S := \sup\left\{\int_{\mathbb{R}} \min(f, n)\chi_{[-n,n]} d\lambda : n \in \mathbb{N}\right\}$$

est fini et alors S est l'intégrale de Lebesgue de f

On suppose f Lebesgue intégrable.

Alors pour tout n on a $0 \leq \min(f, n)\chi_{[-n,n]} \leq f$. Par le **thm. 9.23**, $\min(f, n)\chi_{[-n,n]}$ est Lebesgue intégrable.

Puisque f est Lébesgue intégrable, on a que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un

$0 \leq s \leq f$ une f.e. tq $\int_{\mathbb{R}} f - sd\lambda < \epsilon$. (**def. 9.22**)

De plus, par **def. 9.15**, on a qu'il existe un n tel que $s \leq n$.

On a donc que $\min(f,n)\chi_{[-n,n]} - s \leq f - s$ et donc $\int_{\mathbb{R}} \min(f,n)\chi_{[-n,n]} - sd\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f - sd\lambda$.

On a

$$
\begin{aligned}
& |\min(f,n)\chi_{[-n,n]} - s| \\
\leq \\
& |f-s|\chi_{[-n,n]\cap\{f\leq n\}} + |n-s|\chi_{[-n,n]\cap\{f>n\}} \\
= \\
& (f-s)\chi_{[-n,n]\cap\{f\leq n\}} + (n-s)\chi_{[-n,n]\cap\{f>n\}} \\
\leq \\
& (f-s)\chi_{[-n,n]\cap\{f\leq n\}} + (f-s)\chi_{[-n,n]\cap\{f>n\}} \\
= \\
& (f-s)\chi_{[-n,n]} \\
\leq \\
& f-s = |f-s|
\end{aligned}
$$

On déduit

$$
\begin{aligned}
& 2\epsilon \geq \int_{\mathbb{R}} |f-s| + |s - \min(f,n)\chi_{[-n,n]}|d\lambda \\
\geq \\
& \int_{\mathbb{R}} |f - \min(f,n)\chi_{[-n,n]}|d\lambda \\
= \\
& \int_{\mathbb{R}} f - \min(f,n)\chi_{[-n,n]}d\lambda
\end{aligned}
$$

Donc, pour tout ϵ, il existe un n tel que $\int_{\mathbb{R}} f - \min(f,n)\chi_{[-n,n]}d\lambda < \epsilon$. Donc $\int_{\mathbb{R}} \min(f,n)\chi_{[-n,n]}d\lambda$ tend vers $\int_{\mathbb{R}} fd\lambda$ et donc $\int_{\mathbb{R}} fd\lambda = S$ (**s.d.**).

Supposons alors $S < \int_{\mathbb{R}} fd\lambda$.

Alors il existe s tel que $S < \int_{\mathbb{R}} sd\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} fd\lambda$ (**def. 9.22**).

Or, il existe m tel que $s\chi_{[-m,m]} \leq \min(f,m)\chi_{[-m,m]}$ (**def. 9.15**). Donc $\int_{\mathbb{R}} s\chi_{[-n,n]}d\lambda \leq S < \int_{\mathbb{R}} fd\lambda$ et ce pour tout $n \geq m$.

Or, je dis qu'il existe $n > m$ tel que $S < \int_{\mathbb{R}} s\chi_{[-n,n]}d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} fd\lambda$.

Car $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} s\chi_{[-n,n]}d\lambda = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} a_i\lambda(A_i \cap [-n,n]) = \sum_{i=1}^{k} a_i \lim_{n\to\infty} \lambda(A_i \cap [-n,n])$ (**thm. 2.14**).

Or $A_i \cap [-n,n] \subseteq A_i \cap [-n-1, n+1]$ pour tout n. Donc, par **thm. 9.12**, on a $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_i \cap [-n,n]) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \cap [-n,n]\right) = \lambda\left(A_i \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,n]\right)\right) = \lambda(A_i \cap \mathbb{R}) = \lambda(A_i)$.

Ainsi il existe un $n > m$ tel que $S < \int_{\mathbb{R}} s\chi_{[-n,n]} d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$, ce qui est impossible.

Donc $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda \leq S$. Or, puisque $\min(f,n)\chi_{[-n,n]} \leq f$ pour tout f, on $\int_{\mathbb{R}} \min(f,n)\chi_{[-n,n]} d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$. En prenant le sup des deux côté, on a que $S \leq \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$. Donc $S = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$.

9-23

1. $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ Lebesgue intégrable
2. $a > 0$
3. $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue mesurable
4. $f - \chi_A \leq 0$

$\diamond$ $\int_{\mathbb{R}} f - a\chi_A d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f - a\lambda(A)$

On a que $a\chi_A$ est une fonction simple et son intégrale est donnée pas $a\lambda(A)$ (**def. 9.21**). Donc, par **thm. 9.25**, on peut conclure.

9-24

$\diamond$ **Construire deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $(f+g)^+ \neq f^+ + g^+$ et $(f+g)^- \neq f^- + g^-$**

$f := 1$ et $g := -1$.

9-25

1. $a_1 \cdots a_n \in \mathbb{R}$
2. $A_1 \cdots A_n \subseteq \mathbb{R}$ pas nécessairement disjoints des ensembles Lebesgue mesurables
3. $f := \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$

$\diamond$ $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda(A_k)$. **Expliquez en quoi ce résultat diffère de ce qui fut démontré en 9-20a et pour quelles raisons il aurait été impossible de s'en servir pour prouver 9-20b.**

Par **thm. 9.25**, on a immédiatement le résultat voulu.

TODO

9-26

1. $f, g : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ Lebesgue mesurables
2. $f = g$ pp

$\diamond$ **En se servant seulement du thm. 9.23, montrez que f est Lebesgue intégrables ssi g est Lebesgue intégrable et alors $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g d\lambda$**

Supposons f Lebesgue intégrable. On a que $f^+ = g^+$ pp et $f^- = g^-$ pp.

Or, par **thm. 9.23**, on a que $|f|$ est Lebesgue intégrable et $f^+ \leq |f|$. Par le même théorème, f^+ est intégrable. On résone analoguement pour f^-.

On a donc, par conséquence du **thm. 9.23**, que $\int_{\mathbb{R}} f^+ d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g^+ d\lambda$ et $\int_{\mathbb{R}} f^- d\lambda$. Ceci montre que g est Lebesgue intégrable par **def. 9.22**. Par la même définition, on déduit $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f^+ d\lambda - \int_{\mathbb{R}} f^- d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g^+ d\lambda - \int_{\mathbb{R}} g^- d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g d\lambda$.

9-27

1. $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ Lebesgue intégrable

$\diamond$ $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \infty\}$ **est de mesure nulle**

Car supposons le contraire. Alors $|f|$ est Lebesgue intégrable par **thm. 9.23** et de plus $|f|\chi_{\{f=\infty\}} \leq |f|$. Donc le membre de gauche de cette inéquation est intégrable par **thm. 9.23** et $\int_{\mathbb{R}} |f|\chi_{\{f=\infty\}} d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda$. Or $\int_{\mathbb{R}} |f|\chi_{\{f=\infty\}} d\lambda = \infty$.

En effet, la fonction $s_n := n\chi_{\{f=\infty\}}$ est une suite de fonctions simples tel que $0 \leq s_n \leq |f|\chi_{\{f=\infty\}}$ pour tout n. Or $\int_{\mathbb{R}} n\chi_{\{f=\infty\}} d\lambda = n\lambda(\{f = \infty\}) \to \infty$.

9-28

1. $f, g : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ des fonctions Lebesgues intégrables

a)

$\diamond$ $\max(f, g)$ **est Lebesgue intégrable**

On a que $\max(f, g) = f\chi_{\{f \geq g\}} + g\chi_{\{f<g\}}$. On a que $0 \leq f^+\chi_{\{f \geq g\}} \leq f^+$ et $0 \leq f^-\chi_{\{f \geq g\}} \leq f^-$ et donc par **thm. 9.23** on a deux fonctions intégrables. Donc, par **def. 9.22**, $f\chi_{\{f \geq g\}}$ est intégrable. De même pour $g\chi_{\{f<g\}}$.

Par **thm. 9.25**, la fonction $\max(f, g)$ est intégrable.

0.1 b)

$\diamond$ $\min(f, g)$ **est Lebesgue intégrable**

Même chose qu'en a).

c)

◇ **$f - g$ est Lebesgue intégrable et $\int_{\mathbb{R}} f - g d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda - \int_{\mathbb{R}} g d\lambda$**

Par **thm. 9.25**, $-g$ est intégrable et donc $f + (-g)$ l'est également. De plus, on a $\int_{\mathbb{R}} f + (-g) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda + \int_{\mathbb{R}} (-g) d\lambda$. On ré-applique **thm. 9.25** pour avoir le résultat voulu.

9-29

1. C^Q l'ensemble de Cantor.

◇ **χ_{C^Q} est Lebesgue intégrable**

On a qu'il s'agit d'une fonction simple et, de plus, par **ex. 9-6**, l'ensemble de Cantor est Lebesgue mesurable. Donc l'intégrale est égal à $\lambda(C^Q)$ par **def. 9.21-22**. Or, le Camtor est définie sur un interval fermé $[a, b]$ (**def. 7.22**). Donc la fonction est Lebesgue intégrable et l'intégrale est finie (**thm. 9.23**).

9-30

◇ **$\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ est Lebesgue intégrable**

Premièrement, $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est mesurable car $[0, 1]$ est mesurable par **prop. 9.13** et $\mathbb{Q}$ est mesurable car dénombrable et donc de mesure nulle (**prop. 8.3, prop. 9.7**). Donc l'intersection est Lebesgue mesurable par **lem. 9.8**.

On a que $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} \leq \chi_{[0,1]}$ qui est Lebesgue intégrable. On applique **thm. 9.23**.