4.1 Basic properties of congruence

April 22, 2016

2

a)

$\diamond$ **Existe-t-il un x tel que $6x \equiv 5(\textbf{mod } 4)$?**

Premièrement, on a qu'un nombre pair ne peut pas diviser un nombre impair. Car soit $\frac{2k+1}{2n} = d$. Alors $\frac{k}{n} + \frac{1}{2n} = d$ et donc $k + \frac{1}{2} = dn$, ce qui est impossible.

On a ensuite que $6x - 5 = 6(x-1) + 1$ pour $x > 1$. Or, $6(x-1)+1$ est impair et 4 est pair. Donc 4 ne divise pas $6(x-1)+1$ pour $x > 1$. Si $x = 1$, alors $6 - 5 = 1$ qui n'est pas divisible par 4.

b)

$\diamond$ **Existe-t-il un x tel que $10x \equiv 8(\textbf{mod } 6)$?**

Avec $x = 2$, on a $20 - 8 = 12$ divisible par 6.

c)

$\diamond$ **Existe-t-il un x tel que $12x \equiv 9(\textbf{mod } 6)$?**

Un raisonnement analogue à celui employé en $a)$ peut-être appliqué. On a que $12x - 9 = 12(x-1) + 3$ un nombre impair. Or 6 est pair et donc ne peut pas le diviser. Si $x = 1$, alors on a que $12 - 9 = 3$ n'est pas divisible par 6.

3

1. $x \equiv y (\text{mod } m)$
2. $a_0, a_1, \cdots, a_r \in \mathbb{Z}$

$\diamond$ $a_0x^r + a_1x^{r-1} + \cdots + a_r \equiv a_0y^r + \cdots a_r(\textbf{mod } m)$

On a que $a_i \equiv a_i (\text{mod } m)$ par **thm 4.1**. De plus, par **thm. 4.2**, on a que $x^i \equiv y^i(\text{mod } m)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Donc, par **thm. 4.2**, on a que $a_ix^{r-i} \equiv a_iy^{r-i}(\text{mod } m)$ et de même pour la somme $a_0x^r + \cdots a_r \equiv a_0y^r + \cdots a_r(\text{mod } m)$

4

1. $bd \equiv bd'(\text{mod } p)$
2. p premier et ne divise pas b

$\diamond$ $d \equiv d'(\textbf{mod } p)$

Puisque p est premier, on a que $(b, p) = 1$. On applique alors le **thm. 4.3**.

5

1. $|a|, |b| < \frac{k}{2}$
2. $a \equiv b(\text{mod } k)$

$\diamond$ $a = b$

On a que $\frac{a-b}{k} \leq \frac{|a-b|}{k} \leq \frac{|a|}{k} + \frac{|b|}{k} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Donc $\frac{a-b}{k} = 0$.