9.2 Lebesgue measurable functions

December 18, 2015

9-9

1. $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ a bounded function

$\diamond$ **f is Lebesgue measurable iff there is a sequence $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ of simple functions $s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for all $x \in \mathbb{R}$ the sequence $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ is non-increasing and $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$**

Soit $f \leq M$ pour tout x (f **bornée**). On pose

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{\lceil M \rceil 2^n} \frac{k}{2^n}(\chi_{\{f(x) \geq \frac{k-1}{2^n}\}} - \chi_{\{f(x) \geq \frac{k}{2^n}\}})(x)$$

Soit alors fixé x. Alors il existe un k tel que $f(x) \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$ (**on a une partition de** $[0, \lceil M \rceil]$) et $s_n(x) = \frac{k}{2^n}$.

Donc $f(x) \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}) \cup [\frac{k-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{k}{2^n}] = [\frac{2(k-1)}{2^{n+1}}, \frac{2(k-1)+1}{2^{n+1}}) \cup [\frac{2(k-1)}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}]$.

Si $f(x)$ est dans le membre de gauche, alors $s_{n+1}(x) = \frac{2(k-1)}{2^{n+1}} < \frac{k}{2^n} = s_n(x)$, sinon $s_{n+1}(x) = s_n(x)$.

Donc $s_{n+1} \leq s_n$ et donc la séquence est non croissante.

Il est aisé de voir que la séquence tend en tout point vers $f(x)$.

9-10

1. $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ a Lebesgue measurable function

$\diamond$ **Use 9.19 to prove that** $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \infty\}$ is Lebesgue measurable

On a que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < n\}$ est Lebesgue mesurable. Alors, par **lem. 9.9**, l'union

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} : f(x) < n\}$$

est Lebesgue mesurable.

Par le **thm. 9.10**, on a que

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x\in\mathbb{R}: f(x)<n\}\right)'$$
$$=$$
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{x\in\mathbb{R}: f(x)<n\}'$$
$$=$$
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{x\in\mathbb{R}: f(x)\geq n\}$$

est Lebesgue mesurable.

Or,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{x\in\mathbb{R}: f(x)\geq n\}$$
$$=$$
$$\{x\in\mathbb{R}: f(x)=\infty\}$$

La chose est triviale pour $\supseteq$. Soit alors $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{x\in\mathbb{R}: f(x)\geq n\}$ et soit $f(x)=M<\infty$. Alors il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $n>M$ et alors $x\notin\{x\in\mathbb{R}: f(x)\geq n\}$, ce qui est impossible.

9-11

1. $f, g, : \mathbb{R}\to[-\infty,\infty]$ Lebesgue measurable
2. $f+g$, $f-g$ and fg defined everywhere

a)

$\diamond$ **$f-g$ is Lebesgue measurable**

Puisque g est Lebesgue mesurable, on a que g^+ et g^- sont Lebesgue mesurables par **def. 9.18**.

On pose $h := -g$.

Alors $h^+ = \max\{h(x),0\} = \max\{-g(x),0\} = -\min\{g(x),0\} = g^-$. Donc h^+ est Lebesgue mesurable.

De même, $h^- = -\min\{h(x),0\} = -\min\{-g(x),0\} = \max\{g(x),0\} = g^+$, une fonction Lebesgue mesurable.

Donc h est Lebesgue mesurable par **def. 9.18**.

Donc, par **thm. 9.20** partie 1, $f+h$ est Lebesgue mesurable, c'est dire $f-g$ est Lebesgue mesurable.

b)

$\diamond$ fg **is Lebesgue measurable**

On prouve d'abord la chose pour $f, g \geq 0$.

Puisque f, g sont Lebesuge mesurables par hypothèse, il existe $\{s_n\}, \{s'_n\}$ des séquences de fonctions non décroissantes tel que leur limite tend vers f et g respectivement (**def. 9.18**).

On considère la séquence $h_n(x) := s_n s'_n(x)$ et on fixe un certain x.

Si $g(x), f(x) < \infty$, alors par **thm. 2.14**, $\lim_{n\to\infty} s_n s'_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \lim_{n\to\infty} s'_n(x) = f(x)g(x)$.

Si $g(x) = f(x) = \infty$, alors par **thm. 2.44**, on a $\lim_{n\to\infty} s_n s'_n(x) = \infty = f(x)g(x)$.

SPDG, supposons $f(x) = \infty$ et $g(x) < \infty$.

Soit $g(x) > 0$. Alors il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $n > N$ implique $s'_n > \epsilon$ (**s.d**). Alors, par **ex. 2.49**, $lim_{n\to\infty} s_n s'_n(x) = \infty = f(x)g(x)$.

Mais il s'agit du seul cas, car $g(x) = 0$ implique que fg ne serait pas définie, ce qui est exclu par hypothèse et par **def. 9.12**.

On a donc que la séquence h_n converge vers fg en tout point. On doit maintenant montrer que h_n est non décroissante, mais cela suit triviallement de ce que s_n, s'_n sont non-décroissantes. Donc fg est Lebesgue mesurable par la **def. 9.18**, si $f, g \geq 0$.

On veut maintenant prouver la chose pour f, g tel que fg est définie en tout point. On a $fg = (f^+ - f^-)(g^+ - g^-) = f^+g^+ - f^+g^- - f^-g^+ + f^-g^-$.

Premièrement, $f^+, g^+ \geq 0$ par définition et sont Lebesgue mesurables par **def. 9.18** et donc, par les considération précèdentes, f^+g^+ est Lebesgue mesurable. Le même raisonnement s'applique à f^-g^- ainsi qu'à f^+, g^-, f^-g^+.

Il suit de là et de l'exercice précèdent que fg est Lebesgue mesurable.

9-12

$\diamond$ **The sum of two simple functions is still a simple function**

Soit s, s' deux fonctions simples tel que $a_1, \cdots, a_n$ et $A_1, \cdots, A_n$ et $b_1, \cdots, b_m$

et $B_1, \cdots, B_m$ sont les nombres réels et les ensembles disjoints associés à s, s' respectivement(**def. 9.15**).

On considère les ensembles $C_{i,j} = A_i \cap B_j$ pour $i \in \{1 \cdots n\}$ et $j \in \{1 \cdots m\}$.

On pose alors $\{D_i\}_{i=1}^k \subseteq \{C_{i,j}\}$ un indexage des k ensembles $C_{i,j} \neq \emptyset$.

On définit $A'_i := A_i - \left(\bigcup_{n=1}^k D_n\right)$ et $B'_j := B_j - \left(\bigcup_{n=1}^k D_n\right)$, non-vide où $\{A'_i\}_{i=1}^{n'}$ et $\{B'_i\}_{i=1}^{m'}$.

Alors je dis que $(\bigcup_{i=1}^n A_i) \cup (\bigcup_{i=1}^m B_i) = (\bigcup_{i=1}^n A'_i) \cup (\bigcup_{i=1}^m B'_i) \cup \left(\bigcup_{i=1}^k D_i\right)$. De plus, je dis que les ensembles A'_i, B'_j, D_l sont deux à deux disjoints.

Car soit $x \in (\bigcup_{i=1}^n A_i) \cup (\bigcup_{i=1}^m B_i)$. S'il existe i, j tel que $x \in A_i \cap B_j$, alors $x \in C_{i,j} \neq \emptyset$ et donc il existe l tel que $x \in D_l$ et donc $x \in \bigcup_{i=1}^k D_i$.

S'il existe i tel que $x \in A_i$ et $x \notin \bigcup_{i=1}^m B_i$, alors $x \in A_i - \bigcup_{i=1}^k D_i = A'_i$, car sinon il existerait un l tel que $x \in A_i \cup D_l$. Mais alors il existe j tel que $x \in A_i \cap B_j$, ce qui est impossible. Donc il existe i tel que $x \in A'_i$ et donc $x \in \bigcup_{i=1}^n A'_i$.

Un raisonnement similaire s'applique pour $x \in B_j$ et $x \notin \bigcup_{i=1}^n A_i$.

Donc $(\bigcup_{i=1}^n A_i) \cup (\bigcup_{i=1}^m B_i) \subseteq (\bigcup_{i=1}^n A'_i) \cup (\bigcup_{i=1}^m B'_i) \cup \left(\bigcup_{i=1}^k D_i\right)$.

La direction $\supseteq$ est triviale, donc on a l'égalité.

On montre maintenant que A'_i, B'_j, D_l sont deux à deux disjoints.

Pour les pairs A'_i, A'_j et B'_i, B'_j, la chose est déjà prouvée. De plus, pour les pairs A'_i, D_l et B'_j, D_l, la chose suit par définition.

On considère donc le cas A'_i, B'_j. On a

$$\begin{aligned}
&A'_i \cap B'_j \\
=& \\
&\left(A_i - \bigcup_{i=1}^k D_i\right) \cap \left(B_j - \bigcup_{i=1}^k D_i\right) \\
=& \\
&(A_i \cap B_j) - \left(\bigcup_{i=1}^k D_i\right)
\end{aligned}$$

Or, $x \notin \bigcup_{i=1}^k D_i$ implique $x \notin A_i \cap B_j$ pour tout i, j par définition de D_l. Donc $A'_i \cap B'_j = \emptyset$.

Reste alors le cas de D_i, D_j. On a qu'il existe A_{i*}, B_{i*} et A_{j*}, B_{j*} tel que $D_i = A_{i*} \cap B_{i*}$ et $D_j = A_{j*} \cap B_{j*}$. Or, tous les A_i et B_i sont disjoints par définitions. On a donc que $D_i \cap D_j = A_{i*} \cap B_{i*} \cap A_{j*} \cap B_{j*} = (A_{i*} \cap A_{j*}) \cap (B_{i*} \cap B_{j*})$.

Or, on a que si $A_{i*} = A_{j*}$, alors $B_{i*} \neq B_{j*}$ et vice versa, car sinon $D_i = D_j$. Donc, SPDG, $A_{i*} \neq A_{j*}$ et donc $D_i \cap D_j = \emptyset$.

On définit alors $\{E_i\}_{i=1}^{k+n'+m'}$ où

$$\begin{cases} E_i = A'_i & 0 \leq i \leq n' \\ E_{n'+i} = B'_i & n'+1 \leq i \leq n'+m' \\ E_{n'+m'+i} = D_i & n'+m'+1 \leq i \leq n'+m'+k \end{cases}$$

On définit de même la suite $\{d_i\}_{i=1}^{n'+m'+k} \subset \mathbb{R}$ où

$$\begin{cases} d_i = a'_i & 0 \leq i \leq n' \\ d_{n'+i} = b'_i & n'+1 \leq i \leq n'+m' \\ d_{n'+m'+i} = a_{i*} + b_{j*} & n'+m'+1 \leq i \leq n'+m'+k \text{ où } E_{n'+m'+i} = A_{i*} \cap B_{j*} \end{cases}$$

(où a'_i, b'_i sont définit comme étant égal à a_i, b_i lorsque $A_i - \bigcup_{i=1}^k D_i \neq \emptyset$ et $B_i - \bigcup_{i=1}^k D_i \neq \emptyset$)

Alors il suit que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} + \sum_{i=1}^{m} b_i \chi_{B_i}$$
$$=$$
$$\sum_{i=1}^{n'+m'+k} d_i \chi_{E_i}$$

la preuve de cette dernière affirmation ressemble à la preuve d'égalité et de disjointure faite plus haut.

9-13

1. $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$

$\diamond$ **f is Lebesgue measurable iff for any two numbers $a < b$ the set $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [a, b)\}$ is Lebesgue measurable**

Supposons f Lebesgue mesurable. Alors, par **thm. 9.19**, $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a\}$ et $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < b\}$ sont mesurables pour tout $a, b \in \mathbb{R}$. En particulier, pour $a < b$.

Or, par **thm. 9.10**, $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a\} \cup \{x \in \mathbb{R} : f(x) < b\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [a, b)\}$ est Lebesgue mesurable.

Supposons alors $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [a, b)\}$ Lebesgue mesurable pour tout $a < b$.

On pose $B_n := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [a, n)\}$. Par hypothèse, tous les B_n sont

Lebesgue mesurable et donc, par **thm. 9.10**, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ est Lebesgue mesurable. Or,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

$$=$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [a, n)\}$$

$$=$$

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a\}$$

Par **thm. 9.19**, on déduit que f est Lebesgue mesurable.

9-14

1. $f, g : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ Lebesgue measurable

$\diamond$ **Use definition 9.18 to prove that $f + g$ is Lebesgue measurable**

Premièrement, il est clair que $(f + g)[\mathbb{R}] \subseteq [0, \infty]$.

Soit alors $s_n, s'n$ les suites non-décroissantes de fonctions tendant vers f, g respectivement. Il alors facile de montrer que $s_n + s'_n \to f + g$.

9-15

1. $f, h : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$
2. f Lebesgue measurable
3. $f = h$, a.e.

$\diamond$ **h is Lebesgue measurable**

On fixe $a \in \mathbb{R}$. Par **thm. 9.19**, on a que $\{f(x) > a\}$ est Lebesgue mesurable, c'est-à-dire, par **def. 9.4**, que pour tout $T \subseteq \mathbb{R}$,

$$\lambda(T) = \lambda(\{f(x) > a\} \cap T) + \lambda(\{f(x) \leq a\} \cap T)$$

Or, on a que

$$\lambda(\{h(x) > a\} \cap T)$$
$$=$$
$$\lambda(\{h(x) > a : f(x) = h(x)\} \cap T) + \lambda(\{h(x) > a : f(x) \neq h(x)\} \cap T)$$
$$=$$
$$\lambda(\{f(x) > a : f(x) = h(x)\} \cap T) + \lambda(\{h(x) > a : f(x) \neq h(x)\} \cap T)$$
$$=$$
$$\lambda(\{f(x) > a : f = h\} \cap T) + 0$$
$$=$$
$$\lambda(\{f(x) > a : f = h\} \cap T) + \lambda(\{f(x) > a : f \neq h\} \cap T)$$
$$=$$
$$\lambda(\{f(x) > a\} \cap T)$$

et un raisonnement analogue pour l'ensemble $\{h \leq a\}$. De la il suit que, pas **def. 9.4**, $\{h > a\}$ est Lebesgue mesurable et, par **thm. 9.19**, h est Lebesgue mesurable.

9-16

1. $f, g : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ Lebesgue measurable

a)

1. $f + g$ defined almost everywhere

◇

$$f + g := \begin{cases} f + g & \text{if } (f+g)(x) \text{ is defined} \\ 0 & \text{if } (f+g)(x) \text{ is not defined} \end{cases}$$

is Lebesgue measurable

On définit f^* par

$$\begin{cases} f^*(x) := f(x) & (f+g)(x) \text{ est définie} \\ f^*(x) := 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et g^* analoguement.

Alors $f^* = f$ presque partout car $f^*(x) \neq f(x)$ implique que $(f+g)(x)$ n'est pas définie. Or, l'ensemble des x satisfesant cette condition est nulle **par hypothèse**.

Donc, par **ex. 9-15**, f^* est Lebesgue mesurable et un raisonnement analogue permet de conclure qu'il en va de même de g^*.

On a alors que $f^* + g* = f + g$. Or, $f^* + g^*$ est définie partout et donc par **thm. 9.20**, $f^* + g^* = f + g$ est Lebesgue mesurable.

b)

1. $f(x) - g(x)$ defined almost everywhere

$\diamond$

$$(f-g)(x) := \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{if } f(x) - g(x) \text{ is defined} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

is Lebesgue measurable

La preuve est essentiellement la même qu'en a).

c)

1. $f(x)g(x)$ defined almost everywhere

$\diamond$

$$(fg)(x) := \begin{cases} f(x)g(x) & \text{if } f(x)g(x) \text{ is defined} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

is Lebesgue measurable

Même chose qu'en a).

9-17

1. $f, g : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ Lebesgue mesurables

a)

$\diamond$ **L'ensemble** $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ **est Lebesgue mesurable**

Premièrement, on a que

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\} = \\ &\{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x) \in (-\infty, \infty)\} \cup \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x) = -\infty\} \\ &\cup \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x) = \infty\} \end{aligned}$$

et les deux derniers termes de l'union sont Lebesgue mesurables par **ex. 9-10**. On doit donc montrer que le premier des termes est Lebesgue mesurable.

On pose

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=-n2^n+1}^{n2^n} \{f, g \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})\} \cup \{f, g \in (-\infty, -n) \cup [n, \infty)\} \right)$$

On montre que, si x est tel que $f(x) \neq g(x)$, alors $x \notin A$ et que, si $f(x) = g(x)$, alors $x \in A$.

Soit x tel que $f(x) \neq g(x)$ et, SPDG, $-\infty < f(x) < g(x) < \infty$. On considère n tel que $-n < f(x), g(x) < n$ et $\frac{1}{2^n} < g(x) - f(x)$.

Alors, pour tout $k \in \{-n2^n + 1, \cdots, n2^n\}$, $f, g \notin [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})$. Car sinon $g(x) - f(x) \leq \frac{1}{2^n}$. Or, $\frac{1}{2^n} < g(x) - f(x)$. De plus, $g, f \notin (-\infty, -n) \cup [n, \infty)$, en vertu de la façon dont n fut choisi.

Donc il existe n tel que

$$
\begin{aligned}
& x \notin \bigcup_{k=-n2^n+1}^{n2^n} \{f, g \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})\} \cup \{f, g \in (-\infty, -n) \cup [n, \infty)\} \\
\Rightarrow & \\
& x \notin A
\end{aligned}
$$

Supposons alors x tel que $f(x) = g(x)$. Supposons de plus N le plus petit nombre naturel tel que $-N < f(x) = g(x) < N$. Alors, pour tout $n \geq N$, il existe un $k \in \{-n2^n + 1, \cdots, n2^n\}$ tel que $g(x), f(x) \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})$. De plus, pour tout $n < N$, on a que $f(x), g(x) \in (-\infty, -n) \cup [n, \infty)$.

Donc, pour tout n, on a que

$$
\begin{aligned}
& x \in \bigcup_{k=-n2^n+1}^{n2^n} \{f, g \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})\} \cup \{f, g \in (-\infty, -n) \cup [n, \infty)\} \\
\Rightarrow & \\
& x \in A
\end{aligned}
$$

On a donc que $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x) \in (-\infty, \infty)\} = A$.

Or, par **ex. 9-13** et **lem. 9.8**, tous les ensembles sont $\{f, g \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})\} = \{f \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})\} \cap \{g \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})\}$ sont Lebesgue mesurables.

De plus, **thm. 9.19** nous assure que $\{f, g \in (-\infty, n) \cup [n, \infty)\} = \{f, g < -n\} \cup \{f, g \geq n\}$ est Lebesgue mesurable.

La mesurabilité de l'union et ensuite de l'intersection dénombrable suit de **thm. 9.10**.

c)

$\diamond$ **L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < g(x)\}$ est Lebesgue mesurable**

On a que

$$\{f \leq g\} = \{-\infty < f < g \leq \infty\} \cup \{-\infty = f < g = \infty\}$$

Le deuxième terme du membre de droite est mesurable par **ex. 9-10**.

On considère donc $\{-\infty < f < g < \infty\}$. Je dis que

$$\{-\infty < f < g < \infty\} = \bigcup_{\substack{r,s\in\mathbb{Q}\\ r-s<0}} \{f < r\} \cap \{g > s\}$$

Car soit $x \in \{-\infty < f \leq g < \infty\}$. Alors il existe $r, s \in (f(x), g(x)) \cap \mathbb{Q}$ tel que $f(x) < r < s < g(x)$ par densité de $\mathbb{Q}$.

Supposons alors $x \in \bigcup_{\substack{r,s\in\mathbb{Q}\\ r-s<0}} \{f < r\} \cap \{g > s\}$. Alors $f(x) < r < s < g(x)$ et donc $f(x) - g(x) < 0$. Alors $x \in \{-\infty < f < g < \infty\}$.

Or,

$$\bigcup_{\substack{r,s\in\mathbb{Q}\\ r-s<0}} \{f < r\} \cap \{g > s\}$$

est mesurable.

Donc $\{f < g\}$ est Lebesgue mesurable.

b)

$\diamond$ $\{f \leq g\}$ **est Lebesgue mesurable**

Par les exercices précèdents, $\{f = g\} \cup \{f < g\} = \{f \leq g\}$ est Lebesgue mesurable.

9-18

1. $f, g : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ Lebesgue mesurable

a)

$\diamond$ $\max\{f, g\}$ **est Lebesgue mesurable**

Soit $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\{\max\{f, g\} < a\} = (\{f < a\} \cap \{f \leq g\}) \cup (\{g < a\} \cap \{g \leq f\})$$

Car soit $x \in \{\max\{f, g\} < a\}$. Alors soit $f(x) \leq g(x)$ ou alors $g(x) \leq f(x)$ et, dans un cas comme dans l'autre, on a $f(x) < a$ ou $g(x) < a$.

Soit $x \in (\{f < a\} \cap \{f \leq g\}) \cup (\{g < a\} \cap \{g \leq f\})$. Si $x \in \{f < a\} \cap \{f \leq g\}$, alors $\max\{f, g\} = f(x) < a$ et donc $x \in \{\max\{f, g\} < a\}$. Similairement dans l'autre cas.

Donc on a l'égalité. Or, par **thm. 9.19**, **lem. 9.8**, **ex. 9-17** et **lem. 9.9**, le membre de droite de l'équation est Lebesgue mesurable.

Donc le membre de gauche est Lebesgue mesurable. Mais, par **thm. 9.19**, ceci signifie que $\max\{f, g\}$ est Lebesgue mesurable, car a était général.

b)

$\diamond$ $\min\{f,g\}$ **est Lebesgue mesurable**

Voir a).

9-19

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction non-décroissante

$\diamond$ f **est Lebesgue mesurable**

On prouve premièrement que f est continue presque partout. On a

$$\begin{aligned}&\{x\in\mathbb{R} : f \text{ n'est pas continue en } x\}\\ =&\\ &\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in[-n,n] : f \text{ n'est pas continue en } x\}\end{aligned}$$

Or, $f:[-n,n]\to\mathbb{R}$ est non décroissante et borné. Donc, par **ex. 7-23**, son nombre de discontinuité est dénombrable. Alors

$$\begin{aligned}&\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in[-n,n] : f \text{ n'est pas continue en } x\}\right)\\ \leq&\quad \textbf{<thm. 8.6>}\\ &\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(\{x\in[-n,n] : f \text{ n'est pas continue en } x\})\\ =&\quad \textbf{<prop. 8.3>}\\ &0\end{aligned}$$

On définit

$$s_n(x) := \begin{cases}\chi_{[-n2^n,n2^n]}f^+(x) & \text{si } f \text{ n'est pas continue en x}\\ \sum_{k=-n2^n+1}^{n2^n}\chi_{[\frac{k-1}{2^n},[\frac{k}{2^n}])}\inf_{[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n})}(f^+(x)) & \text{sinon}\end{cases}$$

Soit $x\in\mathbb{R}$, alors il existe n tel que $x\in[-n2^n,n2^n]$.

Si f^+ n'est pas continue en x, alors $s_m(x)=f^+(x)$ pour tout $m>n$. On suppose donc que f^+ est continue en x.

Soit $\epsilon>0$. Alors il existe $\delta>0$ tel que $d(x,y)<\delta$ implique $|f^+(y)-f^+(x)|<\epsilon$ par définition de la continuité. On pose n tel que $x\in[-n2^n,n2^n]$ et $\frac{1}{2^n}<\delta$.

Puisque f^+ est non-décroissante, on a que $\inf_{[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n})}(f^+(x))=f^+(\frac{k-1}{2^n})$.

Mais $x\in[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n})$ et donc $|s_n(x)-f^+(x)|=|f^+(\frac{k-1}{2^n})-f^+(x)|<\epsilon$ par continuité.

Donc $s_n(x) \to f^+(x)$ pour tout x. Un raisonnement analogue s'applique pour f^-.

On a finalement que la série est non-décroissante. Car

$$\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right) = \left[\frac{2(k-1)}{2^{n+1}}, \frac{2(k-1)+1}{2^{n+1}}\right) \cup \left[\frac{2(k-1)}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\right)$$

Si f^+ n'est pas continue en x, la chose est triviale. Sinon, si x est dans le membre de gauche, alors $s_n(x) = s_{n+1}(x)$. Sinon, $s_n(x) < s_{n+1}(x)$

Par **def. 9.18**, f est Lebesgue mesurable.