14.2 Outer measures

June 19, 2017

14-11

◇ **La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ est une outer measure**

On suppose $d > 1$ car la chose est déjà prouvée pour $d = 1$. Soit alors $A \subseteq B$. Alors il est clair que tous les recouvrement de B sont des recoubrement de A. Par le même raisonnement que dans la preuve de **thm. 8.6**, on peut déduire $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.

On a de même que $\emptyset \subseteq (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})^d$. Alors $\lambda(\emptyset) \leq \lambda([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]^d) \leq (\frac{2}{n})^d$, qui est arbitrairement petit. Donc $\lambda(\emptyset) = 0$.

Pour la dernière partie de la preuve, on peut recopier mot à mot la démonstration du **thm. 8.6** en imaginant que les I_j^n sont des boites ouvertes.

14-12

1. M un ensembles
2. $\mu : \mathcal{P}(M) \to [0, \infty]$ une outer measure

◇ **Pour tout $S, T \subseteq M$, on a $\mu(T) \leq \mu(T \cap S) + \mu(T \cap S')$**

Car on a que $T \subseteq (T \cap S) \cup (T \cap S')$. Par **def. 14.16**, on a $\mu(T) \leq \mu((T \cap S) \cup (T \cap S')) \leq \mu(T \cap S) + \mu(T \cap S')$ (la subadditivité du cas où la séquence est fini est triviale).

14-13

1. M un ensemble
2. $\mu : \mathcal{P}(M) \to [0, \infty]$ une outer measure

◇ **$\mu(S) = 0$ alors S est μ-mesurable**

Soit $T \subseteq M$. On a $\mu(T) \leq \mu(T \cap S) + \mu(T \cap S') = \mu(T \cap S')$ par **prop. 14.21, def. 14.16**.

Or, $T \cap S' \subseteq T$. Donc $\mu(T \cap S') \leq \mu(T)$ par **def. 14.16**. Donc $\mu(T) = \mu(T \cap S') = \mu(T \cap S') + \mu(T \cap S)$.

14-14

1. M un ensemble
2. $\mu : \mathcal{P}(M) \to [0, \infty]$ une outer measure
3. $A, B \subseteq M$

$\diamond$ **Si A, B sont μ-mesurables, alors $A \cap B$ l'est aussi.**

Même preuve que **lem. 9.8**.

14-15

Une copie de la preuve de **lem. 9.9**.

14-16

1. M un ensemble
2. $\mu\mathcal{P}(M) \to [0, \infty]$ une outer measure
3. Σ_μ l'ensemble des ensembles μ-mesurables

$\diamond$ (M, Σ_μ, μ) **est un espace mesuré**

Par **prop. 14.22**, $\emptyset \in \Sigma_\mu$.

Soit alors $S \in \Sigma_\mu$ et $T \subseteq M$. On a $\mu(T) = \mu(T \cap S) + \mu(T \cap S') = \mu(T \cap (S')') + \mu(T \cap S')$ et donc S' est μ-mesurable ie. $S' \in \Sigma_\mu$.

De plus, par **lem. 14.24**, on a que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma_\mu$ si $A_n \in \Sigma_\mu$.

Donc Σ_μ est une σ-algèbre. On a que μ est une outer measure sur certains sous-ensembles de M, mais on veut une mesure sur Σ_μ. On doit avoir l'additivité pour des ensembles disjoints.

Soit alors $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma_\mu$ des ensembles disjoints. Par le **lem. 14.24**, on a

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) + \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)' \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right)$$

$$= \quad < \textbf{pour tout } n, A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i >$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

et donc on a l'additivité.

14-17

1. $d \leq 1$ et pour $i = 1, \cdots, d$ on pose $a_i < b_i$ des nombres rationnelles dyadiques
2. $D := \prod_{i=1}^{d}(a_i, b_i)$ une boite dyadique ouverte de $\mathbb{R}^d$

$\diamond$ **Pour tout $S \subseteq \mathbb{R}^d$ on a**

$$\lambda(S) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|D_n| : S \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n, \text{ où chaque } D_n \text{ est une boite dyadique ouverte de } \mathbb{R}^d\right\}$$

On montre par induction que, pour toutes boites ouvertes B il existe une boite ouverte dyadique D telle que $|D| - |B| < \delta$ pour $\delta > 0$.

Si $d = 1$, la chose est évidente car, par **ex. 1-29c**, les nombres dyadiques sont denses dans $\mathbb{R}$.

On suppose la chose prouvée pour d quelconque. On pose $\delta > 0$ quelconque. On considère

$$\prod_{n=1}^{d+1}(b_n^* - a_n^*) - \prod_{n=1}^{d+1}(b_n - a_n)$$
$$=$$
$$(b_{d+1}^* - a_{d+1}^*)\prod_{n=1}^{d}(b_n^* - a_n^*) - \prod_{n=1}^{d+1}(b_n - a_n)$$

On pose $(b_{d+1}^* - a_{d+1}^*) - (b_{d+1} - a_{d+1}) \leq \frac{\delta}{2\prod_{n=1}^{d}(b_n - a_n)}$ et on pose de plus $\delta^* := \frac{\delta}{2(b_{d+1}^* - a_{d+1}^*)}$. (**hypothèse d'induction**).

On peut de plus, toujours par **hypothèse d'induction**, poser $\prod_{n=1}^{d}(b_n^* - a_n^*) \leq$

$\delta^* + \prod_{n=1}^{d}(b_n - a_n)$. On a donc

$$(b_{d+1}^* - a_{d+1}^*)\prod_{n=1}^{d}(b_n^* - a_n^*) - \prod_{n=1}^{d+1}(b_n - a_n)$$

$$\leq$$

$$(b_{d+1}^* - a_{d+1}^*)\delta^* + (b_{d+1}^* - a_{d+1}^*)\prod_{n=1}^{d}(b_n - a_n) - (b_{d+1} - a_{d+1})\prod_{n=1}^{d}(b_n - a_n)$$

$$=$$

$$(b_{d+1}^* - a_{d+1}^*)\delta^* + \left(\prod_{n=1}^{d}(b_n - a_n)\right)((b_{d+1}^* - a_{d+1}^*) - (b_{d+1} - a_{d+1}))$$

$$\leq$$

$$\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

Ainsi donc, pour tout $d \in \mathbb{N}$ et pour toutes boites ouvertes B il existe une boite ouverte dyadique D tel que $|D| - |B| < \delta$ où $\delta > 0$.

On a que tout recouvrement de boites dyadiques ouvertes est un recouvrement et donc l'infimum des recouvrements dyadiques est $\geq$ à l'infimum des recouvrement de boites ouvertes.

Supposons alors que l'infimum est $>$. Alors il exste ϵ la distance entre les deux. Soit alors $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ un recouvrement de boites ouvertes tel que $\lambda(S) - \sum_{n=1}^{\infty}|B_n| < \frac{\epsilon}{2}$.

On veut construire un recouvrement de boites dyadique D_n tel que $\sum_{n=1}^{\infty}|D_n| - \sum_{n=1}^{\infty}|B_n| \leq \frac{\epsilon}{2}$, car alors $|\lambda(S) - \sum_{n=1}^{\infty}|D_n|| < \epsilon = \lambda^*(S) - \lambda(S)$ où $\lambda^*(S)$ est l'infimum des recouvrements dyadiques. On aura alors $\sum_{n=1}^{\infty}|D_n| < \lambda^*(S)$, une contradiction.

Or, pour tout B_n, il existe D_n tel que $|D_n| - |B_n| \leq \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$. Alors on a $\sum_{n=1}^{\infty}|D_n| - |B_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \frac{\epsilon}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{\epsilon}{2}$.

14-18

1. $A, B \subseteq \mathbb{R}$
2. $\lambda(A) = 0$

$\diamond$ **$\lambda(A \times B) = 0$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$**

On suppose d'abord que $\lambda(B) < \infty$. On pose $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ tel que $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty}|J_n| - \lambda(B) < \epsilon^*$ pour un $\epsilon^* > 0$.

Soit alors $\epsilon > 0$. On pose $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ tel que $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}|I_n| < \frac{\epsilon}{\lambda(B)+\epsilon^*}$.

Alors on a que $A \times B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \times \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} I_n \times J_j = \bigcup_{n,j=1}^{\infty} I_n \times J_j$

et $\sum_{n,j=1}^{\infty} |I_n||J_j| \leq \frac{\epsilon}{\lambda(B)+\epsilon^*} \sum_{j=1}^{\infty} |J_j| \leq \epsilon$.

Alors l'infimum est arbitrairement proche de 0 et donc $\lambda(A \times B) = 0$.

On a donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lambda(A \times [-n, n]) = 0$. Alors $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A \times [-n, n]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \times [-n, n]) = 0$. Or $\bigcup_{n=1}^{\infty} A \times [-n, n] = A \times \mathbb{R}$.

Or $A \times B \subseteq A \times \mathbb{R}$. Donc $\lambda(A \times B) = 0$ pour tout $B \subseteq \mathbb{R}$.

14-19

1. $[a, b]$ un interval
2. $S \subseteq [a, b]$ on définit $J(S) := \inf\{\sum_{j=1}^{n} |I_j| : S \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ où I_j **des intervals ouverts**$\}$ le Jordan content.

a)

◇ $[c, d] \subseteq [a, b]$ **on a** $J([c, d]) = d - c$

Soit ϵ. Alors il existe $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ tel que $[c, d] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| - \lambda([c, d]) < \epsilon$. Par **Heine-Borel**, il existe $\{I_{n_j}\}_{j=1}^{m}$ une sous suite telle que $[c, d] \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} I_{n_j} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

Alors $\lambda([c, d]) \leq \sum_{j=1}^{m} |I_{n_j}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$ et donc $\sum_{j=1}^{m} |I_{n_j}| - \lambda([c, d]) \leq \epsilon$.

b)

◇ **Le Jordan content n'est pas une outer measure**

On pose $[a, b] = [0, 1]$. Par **ex. 9-7**, on a $J(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = J(\mathbb{Q}' \cap [0, 1]) = 1$.

Supposons que J était une outer measure. Alors $([0, 1], \mathcal{P}([0, 1]), J)$ serait un espace mesuré par **def. 14.7, exemple 14.2**.

Donc, par **prop. 14.11**, on a que $2 = J(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) + J(\mathbb{Q}' \cap [0, 1]) = J(\mathbb{Q} \cap [0, 1] \cup \mathbb{Q}' \cap [0, 1]) = J([0, 1]) = 1$, une contradiction.

Donc J n'est pas une outer measure.

c)

1. $J_i(S) := \sup\{\sum_{j=1}^{n} |b_j - a_j| : S \supseteq \bigcup_{j=1}^{n} [a_j, b_j], a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n\}$ le inner Jordan content de $S \subseteq [a, b]$.

◇ **Pour** $[c, d] \subseteq [a, b]$**, on a** $J_i([c, d]) = d - c$

Clairement, $|d - c| \leq J_i([c, d])$.

Aussi, je dis $b_i = a_{i+1}$.

Car sinon, on a $c = a_1 \leq b_1 \leq \cdots \leq a_i \leq b_i < a_{i+1} \leq \cdots \leq b_n = d$. Alors il existe $x \in [c, d]$ tel que $x \notin \bigcup_{j=1}^{n} [a_j, b_j]$ si $x \in (b_i, a_{i+1})$.

Donc $b_i = a_{i+1}$.

Mais alors $\sum_{j=1}^{n} |b_j - a_j| = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots (b_n - a_n) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots (b_n - a_n) = b_n - a_1 = d - c$. Par conséquent, toutes les partitions de cette forme donne $d - c$.

d)

◇ Le inner Jordan content n'est pas une outer measure

Soit $S, S' \subseteq [a, b]$ dense dans $[a, b]$ et $\{[a_i, b_i]\}^n$ des intervals tq $a_1 \leq b_1 \leq a_2, ..., \leq b_n$ et $\bigcup^n [a_i, b_i] \subseteq [a, b] \cap S$.

Soit j tq $a_j < b_j$. Puisque S' est dense dans $[a, b]$, il existe $q \in S' \cap [a_j, b_j]$ par la densité de S'. Mais alors $q \notin [a, b] \cap S$ et donc $\bigcup^n [a_i, b_i] \not\subseteq [a, b] \cap S$, une contradiction.

Donc pour tout j, $a_j = b_j$. Mais alors $\sum^n b_j - a_j = 0$ pour tout $\{[a_i, b_j]\}^n$ tq $\bigcup^n [a_i, b_j] \in [a, b] \cap S$. On obtient un résultat similaire pour $[a, b] \cap S'$.

Or, $J_i([a, b]) = b - a$ par **ex. 14-9 (d)**. Mais $J_i([a, b]) = J_i([a, b] \cap S \cup [a, b] \cap S') > J_i([a, b] \cap S) + J_i([a, b] \cap S') = 0$.

Or, $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}'$ sont denses dans $[a, b]$.

e)

1. Soit une **algèbre** un ensemble d'ensembles tel que les deux premières propriétés d'une σ-algèbre sont satisfaites mais où seule la fermeture sous l'union finie d'ensembles s'applique plutôt que l'union dénombrable
2. $S \subseteq \mathbb{R}$ jordan mesurable ssi $J(S) = J_i(S)$

◇ $\mathcal{J}_{[a,b]}$ l'ensemble des sous-ensembles jordan mesurables de $[a, b]$ est une algèbre

On doit montrer que si S est jordan mesurable, alors $J(S') = J_i(S')$. On voit que si pour tout S, $J(S) + J_i(S') = b - a$, alors $J(S) = J_i(S) \Rightarrow J(S') = J_i(S')$. Car alors $J(S) + J_i(S') = J(S') + J_i(S)$ et en substituant $J(S)$ par $J_i(S)$ on obtient l'égalité voulue.

On doit donc montrer que $J(S) + J_i(S') = b - a$. Plus précisément, on montre

$$\forall \epsilon \forall [a_i, b_i] \text{ tq } \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \subseteq S' \text{ alors } \exists \{I_j\}_{j=1}^{m} \text{ tq } S \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} I_j \text{ tq}$$
$$\sum_{i=1}^{n} b_i - a_i + \sum_{j=1}^{m} |I_j| = b - a + \epsilon$$

Soit ϵ. Soit $[a_i, b_i]$ tq $\bigcup_{i=1}^{n} \subseteq S'$. On pose alors $I_1 := (a - \frac{\epsilon}{2}, a_1)$, $I_2 := (b_1, a_2)$, ... , $I_{n+1} := (b_n, b + \frac{\epsilon}{2})$.

Par contruction, on a que $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n+1} I_i$. (**<s.d.>**).

On a alors

$$\sum_{i=1}^{n} b_i - a_i + \sum_{i=2}^{n} a_i - b_{i-1} + a_1 - (a - \frac{\epsilon}{2}) + (b + \frac{\epsilon}{2}) - b_n$$
$$=$$
$$\left(\sum_{i=2}^{n} b_i - a_i + a_i - b_{i-1} \right) + a_1 - (a - \frac{\epsilon}{2}) + (b + \frac{\epsilon}{2}) - b_n + b_1 - a_1$$
$$=$$
$$\left(\sum_{i=2}^{n} b_i - b_{i-1} \right) + (b - a) - b_n + b_1 + \epsilon$$
$$=$$
$$((b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + ... + (b_n - b_{n-1})) + (b - a) + \epsilon - b_n + b_1$$
$$=$$
$$(b_n - b_1) + (b - a) + \epsilon - b_n + b_1$$
$$=$$
$$(b - a) + \epsilon$$

Soit alors $J(S) + J_i(S') \neq b - a$. Alors il existe ϵ tel que pour tout $[a_i, b_i]$ et tout $\{I_j\}$, $\sum b_i - a_i + \sum |I_j| - (b - a) > \epsilon$. Mais cela est impossible par ce qui fût montré ci-haut. Donc $J(S) + J_i(S') = b - a$.

Mais alors $J(S) = J_i(S) \Rightarrow J(S') = J_i(S')$.

On montre également que $\emptyset$ est jordan mesurable. On a que $J([a, b]) = J_i([a, b])$ par **ex. 14-19 c) ex. 14-19 a)**. Or, par ce qui fût montré ci-haut, on a que $[a, b]' = \emptyset$ est jordan mesurable.

On montre maintenant que pour tout $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ jordan mesurable, alors $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est jordan mesurable.

Soit $\{\omega_i\}^n$ tq $\omega_i := \bigcup_{j=1}^{m} I_j$ des ouverts et $A_i \subseteq \omega_i$ et soit $\{\alpha_i\}^n$ tq $\alpha_i := \bigcup_{j=1}^{k} [a_j, b_j]$ et $\alpha_i \subseteq A_i$ où, pour chaque α_i, $a \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k \leq b_k < b$. On pose de même $|\omega_i| := \sum_{j=1}^{m} |I_j|$ et $|\alpha_i| = \sum_{j=1}^{k} b_j - a_j$.

Supposons alors que $J(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |\omega_i|$ et $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq J_i(\bigcup_{i=i}^{n} A_i)$ pour tout $\{\omega_i\}^n$, $\{\alpha_i\}^n$. On a alors que $J(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) - J_i(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |\omega_i| - |\alpha_i|$.

On montre alors que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\{\omega_i\}^n$ et $\{\alpha_i\}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} |\omega_i| - |\alpha_i| < \epsilon$.

Soit A_n quelconque. Puisque $J(A_n) = J_i(A_n)$ **par hypothèse**, on a qu'il existe $\omega_i = \{I_j\}^m$, $\alpha_i = \{[a_j, b_j]\}^k$ tel que $\sum_{j=1}^m |I_j| - \sum_{j=1}^k b_j - a_j < \frac{\epsilon}{n}$.

Alors, pour chaque A_i, on pose ω_i, α_i tel que $|\omega_i| - |\alpha_i| \leq \frac{\epsilon}{n}$. On a donc que $J(\bigcup_{i=1}^n A_i) - J_i(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n |\omega_i| - |\alpha_i| \leq n\frac{\epsilon}{n} = \epsilon$.

Il ne reste donc plus qu'à montrer que $J(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n |\omega_i|$ et $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq J_i(\bigcup_{i=1}^n A_i)$ pour tout $\{\omega_i\}^n$ et $\{\alpha_i\}^n$.

Soit $\{\omega_i\}^n$. Puisque $A_i \subseteq \omega_i$ **par définition**, on a que $\bigcup_{i=1}^n A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^n \omega_i$. Or, $\bigcup_{i=1}^n \omega_i$ est une union d'intervals ouverts (à un ré-indexage près). Donc

$$\sum_{i=1}^n |\omega_i| \in \left\{ \sum_{j=1}^m |I_j| : \bigcup_{i=1}^n A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^m I_j \text{ tq } I_j \text{ sont des intervals ouverts} \right\}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \geq J\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)$$