9 Equivalence relation; Cosets

April 23, 2015

9.15

1. G un groupe
2. $(a,b)R(c,d)$ ssi $ad = cb$

$\diamond$ **Trouver une condition sur G équivalente à R est un relation d'équivalence**

Si le groupe est abelien, on vérifie facilement qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

S'il s'agit d'une relation d'équivalence, alors les deux premières conditions sont satisfaites (réflexivité et symétrie).

On a alors

$$\begin{aligned} & (a,a)R(e,e) \Leftrightarrow a = a \text{ et } (e,e)R(b,b) \Leftrightarrow b = b \\ \Leftrightarrow & \\ & (a,a)R(b,b) \Leftrightarrow ab = ba \end{aligned}$$

9.16

1. G un groupe
2. H un sous-groupe de G
3. K un sous-groupe de H
4. $g_1 \dots g_n$ éléments de G tels que les cosets droits de H sont distincts
5. $h_1 \dots h_m$ éléments de H tels que les cosets droits de K sont distincts

$\diamond$ $i \neq s$ **ou** $j \neq t \Rightarrow Kh_ig_j \neq Kh_sg_t$

On montre la converse. Soit $Kh_ig_j = Kh_sg_t$. Alors $h_ig_jg_t^{-1}h_s^{-1} \in K$.

Puisque K est un sous-groupe de H, on a $h_ig_jg_t^{-1}h_s^{-1} \in H$. Donc $g_jg_t^{-1} \in H$ car $h_i^{-1}, h_s \in H$ un sous-groupe. Donc $Hg_t = Hg_j$ (**Cor. 9.4**). Ceci implique $g_t = g_j$ ([**4**]).

Alors $Kh_ig_j = Kh_sg_t \Leftrightarrow Kh_i = Kh_s$ et donc $h_i = h_s$ ([**5**]).