3.4 Generating functions

April 21, 2016

3

1. $d_n := \binom{N}{n}\binom{M}{0} + \binom{N}{n-1}\binom{M}{1} + \cdots + \binom{N}{0}\binom{M}{n}$

$\diamond$ **À l'aide du théorème du binome, montrez que $(1+x)^N(1+x)^M$ est la fonction génératriec de d_n et montrez ensuite que $d_n = \binom{N+M}{n}$**

On a que $(1+x)^N(1+x)^M = \left(\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{M}\binom{M}{n}x^n\right)$ par le théorème du binome.

En présumant que $\binom{N}{N+1+j} = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\binom{N}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=1}^{M}\binom{M}{j}x^j\right)$$

$$=$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\binom{N}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=1}^{M}\binom{M}{j}x^j\right)$$

$$=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{N}{n-i}\binom{M}{i}\right)x^n$$

par la formule de multiplication des séries entières.

On a donc que $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = (1+x)^N(1+x)^M$.

On développe alors $(1+x)^N(1+x)^M = (1+x)^{N+M}$ à l'aide du théorème du binome et l'on obtient

$$(1+x)^{N+M} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{N+M}{n}x^n$$

On a donc $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{N+M}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ ce qui implique que $\sum_{n=0}^{\infty}(d_n - \binom{N+M}{n})x^n = 0$ pour tout x. En posant $x = 0$ et en remarquant que $d_n, \binom{N+M}{n} \geq 0$, on a l'égalité voulue.

4

$\diamond$ $\frac{1}{(1-x)^3}$ **est la fonction génératrice de la série des nombres triangulaires** $a_0 = 1, a_2 = 3, \cdots a_n = \binom{n+2}{2}$

En calculant la série de MacLaurin de $(1-x)^{-3}$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+n)!}{2!n!}x^n = \sum_{n=0} \frac{(n+2)(n+1)}{2!}x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n$$

Puisque l'expension en série de MacLaurin est unique, on a le résultat voulu.

5

$\diamond$ $\frac{x}{1-x-x^2}$ **est la fonction génératrice de la séquence de Fibonacci**

On montre que $(1-x-x^2)f_F = x$. On a

$$
\begin{aligned}
& f_F = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n \\
= \\
& x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2} x^n \\
= \\
& x + x^2 + x(f_F - x) + x^2 f_F \\
= \\
& x + x f_F + x^2 f_F \\
\Rightarrow \\
& f_F = x + x f_F + x^2 f_F \\
\Rightarrow \\
& f_F - x f_F - x^2 f_F = x \\
\Rightarrow \\
& (1-x-x^2) f_F = x
\end{aligned}
$$

6

$\diamond$ $\frac{1}{1-2x}$ **est la fonction génératrice de la séquence** $a_0 = 1, \cdots, a_n = 2^n$

On a que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$ une série géométrique. On a donc $f_a = \frac{1}{1-2x}$ pour $|x| > 2$.