14.1 Measure space

February 24, 2016

14-1

1. M un ensemble

$\diamond$ **L'ensemble des $S \subseteq M$ tel que S est dénombrable où $M - S$ est dénombrable et une σ-algèbre**

Soit Σ cet ensemble. Alors il est clair que $\emptyset \in \Sigma$. Soit alors $S \in \Sigma$. Si S est dénombrable, alors $S' = M - S$ ne l'est pas. Mais $S'' = S$ l'est et donc $S' \in \Sigma$.

Finalement, par **thm. 7.16**, une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

14-2

1. M un ensemble

2. $\Sigma \subseteq \mathcal{P}$ une σ-algèbre

a)

1. $A_1, \cdots, A_N \in \Sigma$

$\diamond$ $\bigcap_{n=1}^{N} A_n \in \Sigma$

On pose $A_{N+i} = \emptyset$ pour $i \in \mathbb{N}$. Par **prop. 14.3**, on conclut.

b)

1. $A, B \in \Sigma$

$\diamond$ $A - B \in \Sigma$

On a $A - B = A \cap B'$. Or B' est dans Σ par **def. 14.1** et $A \cap B'$ est dans Σ par 14-2b.

14-3

1. M un ensemble
2. $\gamma_M : \mathcal{P}(M) \to [0, \infty]$ la mesure discrète sur M.

a)

$\diamond$ $\gamma_M(\emptyset) = 0$ **ssi** $A = \emptyset$

Si $A = \emptyset$ on a $\gamma_M(A) = |\emptyset| = 0$.

Soit $\gamma_M(A) = 0$. S'il existe un élément dans A, alors sa mesure discrète n'est pas 0. Donc il n'existe aucune élément dans A. Donc $A = \emptyset$.

b)

$\diamond$ γ_M **est une mesure.**

La première propriété à été vérifiée en 14-3a.

On suppose A, B disjoints. Supposons les finis dénombrables.

Alors il existe $f_A : A \to \{1 \cdots k\}$ $f_B : B \to \{1 \cdots m\}$ des bijections. On construit

$$h : A \cup B \to \{1 \cdots m + k\}$$
$$h(x) := \begin{cases} f_A(x) & \text{si } x \in A \\ f_B(x) + k & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Clairement, il s'agit d'une fonction injective. On montre facilement qu'il s'agit d'une fonction surjective.

On a donc que $\gamma_M(A \cup B) = \gamma_M(A) + \gamma_M(B)$ pour A, B finis dénombrables.

Soit alors $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ disjoints.

Soit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ indénombrable. Par **thm. 7.13**, il existe A_i tel que A_i est indénombrable. Donc $\gamma_M(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \infty$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_M(A_n) \geq \gamma_M(A_i) = \infty$.

Soit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ infini dénombrable. Supposons $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_M(A_n) < \infty$. Alors $\lim_{n\to\infty} \gamma_M(A_n) = 0$. Donc il existe un N tel que $n \geq N$ implique $\gamma_M(A_n) = 0$. De plus, pour $n < N$, tous les A_n sont finis. Mais alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{N-1} A_n$.

Par ce que l'on a plus haut, $\gamma_M(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \gamma_M(\bigcup_{n=1}^{N-1} A_n) = \sum_{n=1}^{N-1} \gamma_M(A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_M(A_n) < \infty$, une contradiction.

Soit alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ fini. Supposons A_i infinie. Alors, par **lem. 2.26**, $A_i - (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \emptyset$ est infinie, une contradiction. Alors tous les A_i sont finis.

Soit alors $A \subseteq B$ des ensembles finis. Alors $\gamma_M(B) = \gamma_M((B-A) \cup A) = \gamma_M(B-A) + \gamma_M(A)$. Donc $\gamma_M(B) - \gamma_M(A) = \gamma_M(B-A) \geq 0$.

Alors on a $\gamma_M(A) \leq \gamma_M(B)$.

On a donc que, pour tout N, $\gamma_M(\bigcup_{n=1}^N A_n) \leq \gamma_M(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$. Or, pour tout N, on a $\gamma_M(\bigcup_{n=1}^N A_n) = \sum_{n=1}^N \gamma_M(A_n)$. Donc $\sum_{n=1}^N \gamma_M(A_n) \leq \gamma_M(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$. Mais alors $\sum_{n=1}^\infty \gamma_M(A_n) \leq \gamma_M(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$.

Mais alors il existe N tel que $n > N$ implique $\gamma_M(A_n) = 0$ ie. $A_n = \emptyset$ par **ex. 14-3a**.

Alors $\sum_{n=1}^\infty \gamma_M(A_n) = \sum_{n=1}^N \gamma_M(A_n) = \gamma_M(\bigcup_{n=1}^N A_n) = \gamma_M(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$.

14-4

1. (M, Σ, μ) un espace mesuré
2. $\Omega \in \Sigma$
3. $\Sigma^\Omega := \{S \in \Sigma : S \subseteq \Omega\}$
4. $\mu_\Omega := \mu|_{\Sigma^\Omega}$

a)

$\diamond$ **Σ^Ω est une σ-algèbre**

Premièrement, $\emptyset \subseteq \Omega$ et donc $\emptyset \in \Sigma^\Omega$.

Soit alors $T \in \Sigma^\Omega$. Alors $T \subseteq \Omega$. Il est clair que le complément T' relativement à Ω est dans Σ^Ω.

Finalement, soit $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ une séquence d'ensembles de Σ^Ω. Alors $x \in \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ implique qu'il existe i tel que $x \in A_i$. Donc $x \in \Omega$. Donc $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \subseteq \Omega$. Puisque $A_n \in \Sigma$ par définition, on a $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \Sigma^\Omega$.

b)

$\diamond$ **μ_Ω est une mesure**

On a que $\emptyset \in \Sigma$ et donc $\mu_\Omega(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

De plus, soit $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ une séquence d'ensembles disjoints de Σ^Ω.

Alors on a que $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \Sigma^\Omega \subseteq \Sigma$ et donc $\mu_\Omega(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu_\Omega(A_n)$.

14-15

1. (M, Σ, μ) un espace mesuré
2. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ une séquence d'ensemble dans Σ telle que $A_n \subseteq A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\diamond$ $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

Carrément la même preuve que **thm. 9.12**.

14-6

1. (M, Σ, μ) un espace mesuré
2. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ une séquence dans Σ

$\diamond$ $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

On pose $B_1 = A_1$ et $B_i = A_i - (\bigcup_{n=1}^{i-1} A_n)$.

Alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_i$ et les B_i sont disjoints.

Donc $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n - (\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ par **def 14.6, prop. 14.12**.

14-7

1. M un ensemble
2. $\Sigma \subseteq \mathcal{P}$

$\diamond$ **Σ est une σ-algèbre ssi $\emptyset \in \Sigma$; si $S \in \Sigma$ alors $S' \in \Sigma$ et si pour tout $A_n \in \Sigma$ on a $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$**

Si Σ est une σ-algèbre, on a ce qu'il faut (**prop. 14.3**).

Supposons alors que $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ pour toutes séquences de $A_n \in \Sigma$. Alors $A'_n \in \Sigma$. Donc $\cap_{n=1}^{\infty} A'_n \in \Sigma$ et alors $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A'_n\right)' \in \Sigma$. Cela implique que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ et donc on a une σ-algèbre.

14-8

1. (M, Σ, μ) un espace mesuré
2. $A, B \in \Sigma$

$\diamond$ $\mu(A) - \mu(B) = \mu(A - B) - \mu(B - A)$

Cela est équivalent à $\mu(A) + \mu(B - A) = \mu(A - B) + \mu(B)$. De part et d'autre, il s'agit d'ensemble disjoints. Par **prop. 14.11**, on a $\mu(A) + \mu(B - A) = \mu(A \cup (B - A))) = \mu(A \cup B)$ et $\mu(A - B) + \mu(B) = \mu((A - B) \cup B) = \mu(A \cup B)$.

14-9

a)

1. (M, Σ, μ) un espace mesuré
2. A_n une séquence d'ensembles de Σ tel que $A_{n+1} \subseteq A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. Il existe un m tel que $\mu(A_m) < \infty$

$\diamond\ \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

On considère $(A_m, \Sigma^{A_m}, \mu_{A_m})$ qui, par **ex. 14-4** est un espace mesuré. On pose $\mu_{A_m}(A_m) = M \in \mathbb{R}$.

On a que, pour $A \in \Sigma^{A_m}$, $\mu_{A_m}(A_m) = \mu_{A_m}(A' \cup A) = \mu_{A_m}(A) + \mu_{A_m}(A')$ et donc $\mu_{A_m}(A') = M - \mu_{A_m}(A)$ (**prop. 14.4**).

On a $A_{m+k} \in \Sigma^{A_m}$ par hypothèse. Donc $A'_{m_k} \in \Sigma_{A_m}$ par **def. 14.1**. De même pour $\bigcup_{k=1}^{\infty} A'_{m+k}$. Or, on a aussi $A'_{m+k} \subseteq A'_{m+k+1}$.

Donc $\mu_{A_m}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A'_{m+k}) = \lim_{k\to\infty}(A'_{m+k})$ par **thm. 14.15**.

Or, on a $\mu_{A_m}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A'_{m+k}) = \mu_{A_m}((\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{m+k})') = M - \mu_{A_m}(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{m+k})$. De même, $\lim_{k\to\infty} \mu_{A_m}(A'_{m+k}) = M - \lim_{k\to\infty}(A_{m+k})$.

Donc $\mu_{A_m}(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{m+k}) = \lim_{k\to\infty} \mu_{A_m}(A_{m+k})$.

Or, on a $\lim_{k\to\infty}(A_{m+k}) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

De plus, $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{m+k} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ puisque $A_{m+1} \subseteq \bigcap_{n=1}^{m} A_n$. De même, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ implique que $x \in A_{m+k}$ pour tout k.

Donc $\mu_{A_m}(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{m+k}) = \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{m+k}) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

b)

1. $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, \gamma_{\mathbb{N}})$ un espace mesuré
2. $A_n := \{i \in \mathbb{N} : i > n\}$

$\diamond$ **Il n'est pas possible d'abandonner l'hypothèse 3 de 14-9a. On montre qu'on a un contre-exemple.**

On a que $A_{n+1} \subseteq A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, on a $\gamma_{\mathbb{N}}(A_n) = \infty$ pour tout n. Donc $\lim_{n\to\infty} \gamma_{\mathbb{N}}(A_n) = \infty$.

Or, $i \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ implique que $i > n$ pour tout n, ce qui est impossible. Donc $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ et sa mesure est nulle. On a une contradiction.

14-10

1. (M, Σ, μ) un espace mesuré

a)

1. $\Sigma_\mu := \{A \subseteq M : (\exists E, F \in \Sigma : E \subseteq A \subseteq F, \mu(F - E) = 0)\}$

$\diamond$ **Σ_μ est une σ-algèbre**

On a que $\emptyset$ est dans Σ_μ puisque $\emptyset \subseteq M$ et $\emptyset \subseteq \emptyset \subseteq \emptyset$ et $\mu(\emptyset - \emptyset) = 0$.

Soit alors $S \in \Sigma_\mu$. Alors il existe $E, F \in \Sigma$ tel que $E \subseteq S \subseteq F$. Mais alors $F' \subseteq S' \subseteq E'$.

Or, $E \subseteq S$ et $F' \subseteq S'$ implique que $E \cap F' \subseteq A \cap A'$. Mais alors $E \cap F' = \emptyset$ et donc $\mu(E - F) = 0$.

Soit alors $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ une séquence d'ensembles de Σ_μ. Alors à chaque A_i on associe E_i, F_i. Alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_i$. Or, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_i$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_i \in \Sigma$ par **def. 14.1**.

De plus, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_i - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_i = (\bigcup_{n=1}^{\infty} F_i) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} E_i') = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_i \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} E_i'))$ par **distributivité** et **de Morgan**.

On a $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (F_i \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} E_i'))) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_i \cap (\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m'))$ par **ex 14-6**.

Or, $F_i \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} E_i') \subseteq F \cap E_i'$, qui est de mesure nulle. Donc on a une somme d'ensembles de mesure nulle.

b)

$\diamond$ **Pour tout $A \in \Sigma_\mu$ et ses E, F associés, on a $\mu(E) = \mu(F)$**

On a que $\mu(F - E) = 0$.

Donc $\mu(E) = \mu(E) + \mu(F - E) = \mu(F)$ car il s'agit d'ensembles disjoints.

c)

1. $A \in \Sigma_\mu$ avec $E, F \in \Sigma$ associés
2. $\bar{\mu}(A) := \mu(F)$

$\diamond$ **$\bar{\mu}$ est une mesure**

Pour $\emptyset$, on a $\emptyset \subseteq \emptyset$ et donc $\bar{\mu}(\emptyset) = 0$.

Soit alors E^*, F^* tel que $E^* \subseteq A \subseteq F^*$ et $\mu(F^* - E^*) = 0$.

Alors on a que $\bar{\mu}(A) = \mu(F^*) = \mu(E^*) \leq \mu(F) = \mu(E) \leq \mu(F^*)$ (**ex. précédent et monotonie des la mesure sur sous-ensembles**). Donc $\mu(F) = \mu(F^*)$.

Soit alors $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma_\mu$ disjoints avec les E_n, F_n associés. Alors on a que tous les E_i sont disjoints. Alors $\bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n)$ (μ **est une mesure et l'union infinie des** E_n **correspond aux** E **de l'union des** A_n **dans** Σ_μ).

d)

$\diamond$ **Pour tout** $B \in \Sigma$**, on a** $\bar{\mu}(B) = \mu(B)$

Car on a $B \subseteq B \subseteq B$ avec $\mu(B - B) = 0$. Donc $\bar{\mu}(B) = \mu(B)$.

e)

1. $N \in \Sigma_\mu$
2. $\mu(N) = 0$
3. $S \subseteq N$

$\diamond$ $S \in \Sigma_\mu$**. On dit alors que** Σ_μ **est complet.**

Soit $E \subseteq N \subseteq F$. Alors on a que $\bar{\mu}(N) = \mu(F) = \mu(E) = 0$.

On a $\emptyset \subseteq S \subseteq F$. De plus $\mu(F - \emptyset) = \mu(F) = 0$. Alors $S \in \Sigma_\mu$.

NOTE: Toute cette construction nous donne la complétion de Σ par rapport à μ et la complétion de μ.