14.2 Outer measures

March 7, 2016

14-11

◇ **La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ est une outer measure**

On suppose $d > 1$ car la chose est déjà prouvée pour $d = 1$. Soit alors $A \subseteq B$. Alors il est clair que tous les recouvrement de B sont des recoubrement de A. Par le même raisonnement que dans la preuve de **thm. 8.6**, on peut déduire $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.

On a de même que $\emptyset \subseteq (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})^d$. Alors $\lambda(\emptyset) \leq \lambda([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]^d) \leq (\frac{2}{n})^d$, qui est arbitrairement petit. Donc $\lambda(\emptyset) = 0$.

Pour la dernière partie de la preuve, on peut recopier mot à mot la démonstration du **thm. 8.6** en imaginant que les I_j^n sont des boites ouvertes.

14-12

1. M un ensembles
2. $\mu : \mathcal{P}(M) \to [0, \infty]$ une outer measure

◇ **Pour tout $S, T \subseteq M$, on a $\mu(T) \leq \mu(T \cap S) + \mu(T \cap S')$**

Car on a que $T \subseteq (T \cap S) \cup (T \cap S')$. Par **def. 14.16**, on a $\mu(T) \leq \mu((T \cap S) \cup (T \cap S')) \leq \mu(T \cap S) + \mu(T \cap S')$ (la subadditivité du cas où la séquence est fini est triviale).

14-13

1. M un ensemble
2. $\mu : \mathcal{P}(M) \to [0, \infty]$ une outer measure

◇ **$\mu(S) = 0$ alors S est μ-mesurable**

Soit $T \subseteq M$. On a $\mu(T) \leq \mu(T \cap S) + \mu(T \cap S') = \mu(T \cap S')$ par **prop. 14.21, def. 14.16**.

Or, $T \cap S' \subseteq T$. Donc $\mu(T \cap S') \leq \mu(T)$ par **def. 14.16**. Donc $\mu(T) = \mu(T \cap S') = \mu(T \cap S') + \mu(T \cap S)$.

14-14

1. M un ensemble
2. $\mu : \mathcal{P}(M) \to [0, \infty]$ une outer measure
3. $A, B \subseteq M$

$\diamond$ **Si A, B sont μ-mesurables, alors $A \cap B$ l'est aussi.**

Même preuve que **lem. 9.8**.

14-15

Une copie de la preuve de **lem. 9.9**.

14-16

1. M un ensemble
2. $\mu\mathcal{P}(M) \to [0, \infty]$ une outer measure
3. Σ_μ l'ensemble des ensembles μ-mesurables

$\diamond$ (M, Σ_μ, μ) **est un espace mesuré**

Par **prop. 14.22**, $\emptyset \in \Sigma_\mu$.

Soit alors $S \in \Sigma_\mu$ et $T \subseteq M$. On a $\mu(T) = \mu(T \cap S) + \mu(T \cap S') = \mu(T \cap (S')') + \mu(T \cap S')$ et donc S' est μ-mesurable ie. $S' \in \Sigma_\mu$.

De plus, par **lem. 14.24**, on a que $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \Sigma_\mu$ si $A_n \in \Sigma_\mu$.

Donc Σ_μ est une σ-algèbre. On a que μ est une outer measure sur certains sous-ensembles de M, mais on veut une mesure sur Σ_μ. On doit avoir l'additivité pour des ensembles disjoints.

Soit alors $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \Sigma_\mu$ des ensembles disjoints. Par le **lem. 14.24**, on a

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu\left(A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)\right) + \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)' \cap \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \mu\left(A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)\right)$$

$$= \quad < \textbf{pour tout } n, A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty A_i >$$

$$\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$$

et donc on a l'additivité.

14-17

1. $d \leq 1$ et pour $i = 1, \cdots, d$ on pose $a_i < b_i$ des nombres rationnelles dyadiques
2. $D := \prod_{i=1}^{d}(a_i, b_i)$ une boite dyadique ouverte de $\mathbb{R}^d$

$\diamond$ **Pour tout $S \subseteq \mathbb{R}^d$ on a**

$$\lambda(S) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|D_n| : S \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n, \text{ où chaque } D_n \text{ est une boite dyadique ouverte de } \mathbb{R}^d\right\}$$

On montre par induction que, pour toutes boites ouvertes B il existe une boite ouverte dyadique D telle que $|D| - |B| < \delta$ pour $\delta > 0$.

Si $d = 1$, la chose est évidente car, par **ex. 1-29c**, les nombres dyadiques sont denses dans $\mathbb{R}$.

On suppose la chose prouvée pour d quelconque. On pose $\delta > 0$ quelconque. On considère

$$\prod_{n=1}^{d+1}(b_n^* - a_n^*) - \prod_{n=1}^{d+1}(b_n - a_n)$$
$$=$$
$$(b_{d+1}^* - a_{d+1}^*)\prod_{n=1}^{d}(b_n^* - a_n^*) - \prod_{n=1}^{d+1}(b_n - a_n)$$

On pose $(b_{d+1}^* - a_{d+1}^*) - (b_{d+1} - a_{d+1}) \leq \frac{\delta}{2\prod_{n=1}^{d}(b_n - a_n)}$ et on pose de plus $\delta^* := \frac{\delta}{2(b_{d+1}^* - a_{d+1}^*)}$. (**hypothèse d'induction**).

On peut de plus, toujours par **hypothèse d'induction**, poser $\prod_{n=1}^{d}(b_n^* - a_n^*) \leq$

$\delta^* + \prod_{n=1}^{d}(b_n - a_n)$. On a donc

$$(b^*_{d+1} - a^*_{d+1}) \prod_{n=1}^{d}(b^*_n - a^*_n) - \prod_{n=1}^{d+1}(b_n - a_n)$$

$$\leq$$

$$(b^*_{d+1} - a^*_{d+1})\delta^* + (b^*_{d+1} - a^*_{d+1}) \prod_{n=1}^{d}(b_n - a_n) - (b_{d+1} - a_{d+1}) \prod_{n=1}^{d}(b_n - a_n)$$

$$=$$

$$(b^*_{d+1} - a^*_{d+1})\delta^* + \left(\prod_{n=1}^{d}(b_n - a_n)\right)((b^*_{d+1} - a^*_{d+1}) - (b_{d+1} - a_{d+1}))$$

$$\leq$$

$$\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

Ainsi donc, pour tout $d \in \mathbb{N}$ et pour toutes boites ouvertes B il existe une boite ouverte dyadique D tel que $|D| - |B| < \delta$ où $\delta > 0$.

On a que tout recouvrement de boites dyadiques ouvertes est un recouvrement et donc l'infimum des recouvrements dyadiques est $\geq$ à l'infimum des recouvrement de boites ouvertes.

Supposons alors que l'infimum est $>$. Alors il exste ϵ la distance entre les deux. Soit alors $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ un recouvrement de boites ouvertes tel que $\lambda(S) - \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| < \frac{\epsilon}{2}$.

On veut construire un recouvrement de boites dyadique D_n tel que $\sum_{n=1}^{\infty} |D_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \leq \frac{\epsilon}{2}$, car alors $|\lambda(S) - \sum_{n=1}^{\infty} |D_n|| < \epsilon = \lambda^*(S) - \lambda(S)$ où $\lambda^*(S)$ est l'infimum des recouvrements dyadiques. On aura alors $\sum_{n=1}^{\infty} |D_n| < \lambda^*(S)$, une contradiction.

Or, pour tout B_n, il existe D_n tel que $|D_n| - |B_n| \leq \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$. Alors on a $\sum_{n=1}^{\infty} |D_n| - |B_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \frac{\epsilon}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\epsilon}{2}$.

14-18

1. $A, B \subseteq \mathbb{R}$
2. $\lambda(A) = 0$

$\diamond$ **$\lambda(A \times B) = 0$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$**

On suppose d'abord que $\lambda(B) < \infty$. On pose $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ tel que $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |J_n| - \lambda(B) < \epsilon^*$ pour un $\epsilon^* > 0$.

Soit alors $\epsilon > 0$. On pose $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ tel que $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \frac{\epsilon}{\lambda(B)+\epsilon^*}$.

Alors on a que $A \times B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \times \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} I_n \times J_j = \bigcup_{n,j=1}^{\infty} I_n \times J_j$

et $\sum_{n,j=1}^{\infty} |I_n||J_j| \leq \frac{\epsilon}{\lambda(B)+\epsilon^*} \sum_{j=1}^{\infty} |J_j| \leq \epsilon$.

Alors l'infimum est arbitrairement proche de 0 et donc $\lambda(A \times B) = 0$.

On a donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lambda(A \times [-n, n]) = 0$. Alors $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A \times [-n, n]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \times [-n, n]) = 0$. Or $\bigcup_{n=1}^{\infty} A \times [-n, n] = A \times \mathbb{R}$.

Or $A \times B \subseteq A \times \mathbb{R}$. Donc $\lambda(A \times B) = 0$ pour tout $B \subseteq \mathbb{R}$.

14-19

1. $[a, b]$ un interval
2. $S \subseteq [a, b]$ on définit $J(S) := \inf\{\sum_{j=1}^{n} |I_j| : S \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ où I_j **des intervals ouverts**$\}$ le Jordan content.

a)

◇ $[c, d] \subseteq [a, b]$ **on a** $J([c, d]) = d - c$

Soit ϵ. Alors il existe $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ tel que $[c, d] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| - \lambda([c, d]) < \epsilon$. Par **Heine-Borel**, il existe $\{I_{n_j}\}_{j=1}^{m}$ une sous suite telle que $[c, d] \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} I_{n_j} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

Alors $\lambda([c, d]) \leq \sum_{j=1}^{m} |I_{n_j}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$ et donc $\sum_{j=1}^{m} |I_{n_j}| - \lambda([c, d]) \leq \epsilon$.

b)

◇ **Le Jordan content n'est pas une outer measure**

On pose $[a, b] = [0, 1]$. Par **ex. 9-7**, on a $J(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = J(\mathbb{Q}' \cap [0, 1]) = 1$.

Supposons que J était une outer measure. Alors $([0, 1], \mathcal{P}([0, 1]), J)$ serait un espace mesuré par **def. 14.7, exemple 14.2**.

Donc, par **prop. 14.11**, on a que $2 = J(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) + J(\mathbb{Q}' \cap [0, 1]) = J(\mathbb{Q} \cap [0, 1] \cup \mathbb{Q}' \cap [0, 1]) = J([0, 1]) = 1$, une contradiction.

Donc J n'est pas une outer measure.

c)

1. $J_i(S) := \sup\{\sum_{j=1}^{n} |b_j - a_j| : S \supseteq \bigcup_{j=1}^{n} [a_j, b_j], a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n\}$ le inner Jordan content de $S \subseteq [a, b]$.

◇ **Pour** $[c, d] \subseteq [a, b]$**, on a** $J_i([c, d]) = d - c$

Clairement, $|d - c| \leq J_i([c, d])$.

Aussi, je dis $b_i = a_{i+1}$.

Car sinon, on a $c = a_1 \leq b_1 \leq \cdots \leq a_i \leq b_i < a_{i+1} \leq \cdots \leq b_n = d$. Alors il existe $x \in [c, d]$ tel que $x \notin \bigcup_{j=1}^{n} [a_j, b_j]$ si $x \in (b_i, a_{i+1})$.

Donc $b_i = a_{i+1}$.

Mais alors $\sum_{j=1}^{n} |b_j - a_j| = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots (b_n - a_n) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots (b_n - a_n) = b_n - a_1 = d - c$. Par conséquent, toutes les partitions de cette forme donne $d - c$.

d)

$\diamond$ **Le inner Jordan content n'est pas une outer measure**

Car $J_i(\emptyset)$ n'est pas définie. Car supposons $J_i(\emptyset) = x \in \mathbb{R}$. Alors il existe $a_1 \leq b_1 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n$ tel que $\bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \subseteq \emptyset$ et $|J_i(\emptyset) - \sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i|| < \epsilon$.

Or, $\bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \subseteq \emptyset$ est une contradiction.

e)

1. Soit une **algèbre** un ensemble d'ensembles tel que les deux premières propriétés d'une σ-algèbre sont satisfaites mais où seule la fermeture sous l'union finie d'ensembles s'applique plutôt que l'union dénombrable

2. $S \subseteq \mathbb{R}$ jordan mesurable ssi $J(S) = J_i(S)$

$\diamond$ $\mathcal{J}_{[a,b]}$ **l'ensemble des sous-ensembles jordan mesurables de** $[a, b]$ **est une algèbre**

Et immédiatement j'ai un problème car j'ai dis plus haut que $J_i(\emptyset)$ ne pouvait pas être 0 alors que $J(\emptyset) = 0$. Donc l'ensemble vide ne serait pas dans $\mathcal{J}_{[a,b]}$ et donc il ne s'agirait pas d'une algèbre.

Soit alors $S \in \mathcal{J}_{[a,b]}$. Alors $J(S) = J_i(S)$.