11 Normal subgroups

March 10, 2016

11.5

1. H un sous-groupe de G
2. $K \triangleleft G$

$\diamond$ $H \cap K \triangleleft H$

Car $H \triangleleft H$ et donc le résultat suit par **ex. 11.4**.

11.6

1. H un sg de G

$\diamond$ $H \triangleleft G$ **ssi** $\forall x, y \in G$ **on a** $xy \in H \Leftrightarrow yx \in H$

Soit $H \triangleleft G$ et soit de plus $x, y \in G$ tel que $xy \in H$. Alors $y \in x^{-1}H$. Or $x^{-1}H = Hx^{-1}$ (**thm. 11.1**). Donc $y \in Hx^{-1} \Leftrightarrow yx \in H$.

Soit alors $xy \in H$ ssi $yx \in H$. Alors $x^{-1}y \in H$ ssi $yx^{-1}H$, c'est-à-dire $y \in xH$ ssi $y \in Hx$. Donc $xH = Hx$ et donc $H \triangleleft G$ (**thm. 11.1**).

11.7

1. $H, K \triangleleft G$
2. $H \cap K = \{e\}$

$\diamond$ $x \in H$ **et** $y \in K$ **alors** $xy = yx$

Car $yxy^{-1} \in H$ par **thm. 11.1**. Aussi, $x^{-1} \in H$. Donc $yxy^{-1}x^{-1} \in H$.

Mais de même, $xy^{-1}x^{-1} \in K$ et $y \in K$. Donc $yxy^{-1}x^{-1} \in K$.

Donc $yxy^{-1}x^{-1} \in H \cap K$ et donc $yxy^{-1}x^{-1} = e \Rightarrow yx = xy$.

11.8

1. $N \triangleleft G$
2. H un sous-groupe de G
3. $NH = \{nh : n \in N, h \in H\}$

$\diamond$ **NH est un sous-groupe de G**

Premièrement, que $NH = HN$. Car soit $nh \in NH$. Alors $nh \in Nh = hN$ (**hyp. 1**). Mais alors $nh \in HN$. Donc $NH \subseteq HN$ et de même dans l'autre direction.

Mais alors soit $nh \in NH$. Alors $h^{-1}n^{-1} = (nh)^{-1} \in HN = NH$. Donc tout élément de NH possède son inverse dans NH. Aussi, $e \in NH$, car N, H sont des groupes. Donc NH est un sous-groupe de G.

11.9

1. Mêmes hypothèses qu'en 11.8
2. H est normal

$\diamond$ **NH est normal**

Premièrement, que $gNHg^{-1} = (Ng)(g^{-}H)$.

Car $gNHg^{-1} = \{gnhg^{-1} : gn \in gN, hg^{-1} \in Hg^{-1}\} = \{gnhg^{-1} : gn \in Ng, hg^{-1} \in g^{-1}H\} = (Ng)(g^{-1}H)$.

Or, $hn = (ng)(g^{-1}h) \in (Ng)(g^{-1}H)$. Donc $NH \subseteq gNHg^{-1}$. Donc $NH = gNHg^{-1}$ par **thm. 11.4** et donc NH est normal par **thm 11.1**.

11.10

1. G un groupe tq $g \in G$
2. $o(G) = m$ fini
3. $H \triangleleft G$

$\diamond$ **$o(Hg)$ divise m où $Hg \in G/H$**

Car premièrement, on a que $o(G/H) = [G : H]$ et $o(Hg)$ divise $o(G/H)$ (**thm. 10.4**).

Or, $[G : H]|H| = |G| = m$ et donc $o(Hg)$ divise m par transitivité des diviseurs.

11.12

1. $G = D_4$

a)

$\diamond$ **Il existe H, K des sous-groupes de G tels que $K \triangleleft H$ et $H \triangleleft G$ mais K n'est pas normal dans G**

On a que $< f >$ est normal dans D_4 car $[D_4 :< f >] = 2$ (**thm. 11.3**).

Or, $< f^2 >$ est normal dans $< f >$ pour les mêmes raisons (et même d'autres).

Mais $g < f^2 > \neq < f^2 > g$ et donc $< f^2 >$ n'est pas normal dans G.

b)

$\diamond$ **Même chose pour $G = A_4$**

TODO, possiblement calculatoire car je ne crois pas qu'on ait de sous-groupe d'ordre 6.

11.13

1. $A \triangleleft G$
2. $B \triangleleft H$

$\diamond$ $A \times B \triangleleft G \times H$

Soit $(g, h) \in G \times H$. Soit $x \in (g, h)A \times B(g, h)^{-1}$. Alors $x = (gag^{-1}, hbh^{-1})$ pour un certain $(a, b) \in A \times B$. Or, $gag^{-1} \in A$ et $hbh^{-1} \in B$ par **thm. 11.1**. Donc $(g, h)A \times B(g, h)^{-1} \subseteq A \times B$. Or $|(g, h)A \times B(g, h)^{-1}| = |A \times B|$ (**thm. 11.4**).

Donc $(g, h)A \times B(g, h)^{-1} = A \times B$ et alors $A \times B$ est normal par **thm. 11.1**.

11.14

1. $G = (\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}, +)$
2. $H =< (2, 2) >$

a)

$\diamond$ **Trouver l'ordre de $H + (5, 8)$ de G/H en justifiant votre réponse**

On a que $o(< (2, 2) >) = 6$ et donc $|G/H| = 2$. Par conséquent, l'ordre de $H + (5, 8)$ doit être 1 ou 2 puisqu'il doit diviser l'ordre du groupe (**thm. 10.5**).

Or, $(7, 10) \in H + (5, 8)$ bien que $(7, 10) \notin H$. Donc $H + (5, 8) \neq H$ et donc il ne s'agit pas de l'identité. Donc son ordre est 2.

b)

$\diamond$ **G/H est-il cyclique?**

Oui car tous les groupes d'ordre 2 sont cycliques (**sd.**).

11.15

$\diamond$ **Quel est le groupe dont le "comportement" est identique à $D_4/Z(D_4)$?**

On a que $o(Z(D_4))$ doit diviser $o(D_4)$ et donc $o(D_4) \in \{1, 2, 4, 8\}$. Or, $gf \neq fg$ et donc on ne peut pas avoir 8 éléments. On doit donc en avoir 1,2 ou 4.

On a

$$\begin{aligned}
&f^2 g = g f^2 \\
&f^2(fg) = f^{-2}(fg) = f^{-1}g = gf = gf^{-3} = (fg)f^2 \\
&f^2(f^2 g) = (f^2 g) f^2 \\
&f^2(f^3 g) = f^2(f f^2 g) = f^2(f g f^2) = (f^3 g) f^2
\end{aligned}$$

et donc $f^2 \in Z(D_4)$. Sans démonstration, il n'existe pas d'autres éléments dans $Z(D_4)$.

Donc l'ordre de $D_4/Z_(D_4)$ et de 4, et donc le groupe doit "se comporter comme" le groupe Klein 4, puisque ce dernier est unique à un isomorphisme près (ce que je ne suis pas sensé savoir à ce stade).

11.16

$\diamond$ $(\mathbb{Q}, +)/(\mathbb{Z}, +)$ **est un groupe d'ordre infinie dont chaque élément est d'ordre finie**

Soit $\frac{p}{q} + \mathbb{Z}$ un membre de $(\mathbb{Q}, +)/(\mathbb{Z}, +)$. Alors $(\frac{p}{q} + \mathbb{Z})^q = p + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ car $p \in \mathbb{Z}$ (**sd**). Donc l'ordre de $(\frac{p}{q} + \mathbb{Z})$ n'est pas infinie.

Soit alors $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\}$. On a que $\frac{1}{d} + \mathbb{Z} \neq \frac{1}{d'} + \mathbb{Z}$. Car sinon $\frac{1}{d'} \in (\frac{1}{d} + \mathbb{Z})$. Donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{1}{d} + n = \frac{1}{d'}$. Donc $n = \frac{1}{d'} - \frac{1}{d}$. Or, $\frac{1}{d}, \frac{1}{d'} \in (0, 1)$ et donc on a une contradiction.

11.17

1. G abelien
2. H un sous-groupe de G

$\diamond$ **G/H est abelien**

Car $(aH)(bH) = abH = (ba)H = (bH)(aH)$ puisque $ab = ba$.