

3.2 Fermat's little theorem

June 3, 2015

Abstract

Exercices de la section 3.2 Fermat's little theorem

1

[1] p premier

[2] $\text{pgdc}(p, n) = 1$

$\diamond p | n^{p-1} - 1$

Car $p | n^p - n$ (**FLT**), donc $p | n(n^{p-1} - 1)$. Or, $\text{pgdc}(p, n) = 1$ implique que $p \nmid n$. Donc $p | n^{p-1} - 1$ (**thm. 2.3**).

2

[1] $\text{pgdc}(6, n) = 1$

$\diamond 6 | n^2 - 1$

Car de [1] on a déduit que 2 divise $(n - 1)$ et $(n + 1)$. De plus, 3 doit diviser $(n - 1)$, n ou $(n + 1)$.

Il suit de là que $2 \cdot 3 = 6 | (n - 1)(n + 1) = n^2 - 1$.

3

$\diamond n^5$ et n possèdent le même dernier chiffre

Car 5 divise $n^5 - n$ (**FLT**) et donc soit $n^5 - n$ finit par 0, soit il finit par 5.

S'il finit par 0, alors c'est que les derniers chiffres sont égaux.

Supposons alors qu'il finit par 5 et notons b, d les derniers chiffres de n^5, n respectivement.

Alors $|b - d| = 5$, et b, d doivent nécessairement avoir parité différente. Or, b est le dernier chiffre de d^5 , et doit donc avoir même parité, une contradiction.