4.2 Residue system

May 3, 2016

3

a)

1. $A := \{a_1, \cdots, a_k\}$ un système de résidus complet
2. k premier

$\diamond$ **Pour tout** n, s **il existe** $b_1, \cdots b_j \in A$ **tel que** $n \equiv \sum_{j=0}^{s} b_j k^j (\textbf{ mod } k^{s+1})$

La chose est vraie pour $s = 0$ par définition. Soit la chose prouvé pour s.

Alors on a que $n - \sum_{j=0}^{s} b_j k^j = d_s k^{s+1}$ pour un certain d_s.

Mais on a que $d_s = d_{s+1}k + b_{s+1}$ (puisque l'on a un système de résidue complet) où $b_{s+1} \in A$. Donc $d_s k^{s+1} = d_{s+1}k^{s+2} + b_{s+1}k^{s+1} \Leftrightarrow d_s k^{s+1} - b_{s+1}k^{s+1} = d_{s+1}k^{s+2}$. On substitut $d_s k^{s+1}$ et on obtient $n - \sum_{j=0}^{s} b_j k^j - b_{s+1}k^{s+1} = n - \sum_{j=0}^{s+1} b_j k^j = d_{s+1}k^{s+2}$.

4

1. $w(n) := |\{p : p \text{ premier et } p \not| n\}|$

$\diamond$ **A-t-on** $w(n) < \phi(n)$**? Existe-t-il un** n **tel que** $w(n) = \phi(n) - 1$

Premièrement, on a que tout p ne divisant pas n sera co-premier à n et donc $w(n) \leq \phi(n)$. Par contre, 1 est co-premier à tout n sans être premier et donc $w(n) < \phi(n)$.

De plus, si $n = 3$, on a que $w(n) = 1$ et $\phi(n) = 2$.