8.3 More Integral Theorems

June 20, 2015

Abstract

Exercices de la secion 8.3 des théorèmes se rapportant à l'intégrale de Riemann dérivés à l'aide du critère d'intégrabilité de Lebesgue.

8-16

1. $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction riemann
2. $\exists \epsilon > 0$ tel que $|g(x)| > \epsilon$ pour tout $x \in [a, b]$

(a)

$\diamond$ (1) $\dfrac{f}{g}$ **est riemann**

Puisque g n'est jamais nulle sur $[a, b]$, on a que $\dfrac{1}{g}(x)$ est bien définie sur $[a, b]$.

Or, $\dfrac{1}{g}$ est continue pp puisque g est continue pp (**[1] + thm 8.12**).

On applique alors la partie 1 du **thm 8.14**.

(b)

$\diamond$ $|f|$ **est riemann et** $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Puisque $|x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et f est continue pp sur $[a, b]$, $|f|$ est continue pp sur $[a, b]$ car si f est continue en x, alors $|f|$ le sera aussi (**thm 3.30**). Donc $|f|$ est riemann (**thm 8.12**).

Par le **lemme 5.6**, puisque f est riemann, alors pour toutes suites de partition $\{P_k\}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} ||P_k|| = 0$ avec suite d'ensemble d'évaluation $\{T_k\}$ correspondant, on a $\lim\limits_{k\to\infty} R(f, P_k, T_k) = \int_a^b f$.

Par **2-12**, puisque la limite des sommes de riemann existe, on a $\left|\int_a^b f\right| = \left|\lim\limits_{k\to\infty} R(f, P_k, T_k)\right| = \lim\limits_{k\to\infty} |R(f, P_k, T_k)|$.

On déduit

$$\lim_{k\to\infty} |R(f, P_k, T_k)|$$
$$=$$
$$\lim_{k\to\infty} \left|\sum_{i=1}^{n_k} f(x_{k,i})\Delta x_{k,i}\right|$$
$$\leq$$
$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} |f(x_{k,i})|\Delta x_{k,i}$$
$$=$$
$$\lim_{k\to\infty} R(|f|, P_k, T_k)$$
$$=$$
$$\int_a^b |f|$$

où la dernière égalité est une autre application du **lemme 5.6**.

On peut terminer la preuve en considérant n'importe quelle partition dont la norme tend vers 0 et considérer sa somme supérieure ou inférieure.

(c)

⋄ Dans le but d'illustrer l'utilité du critère d'intégrabilité de Lebesgue, démontrez l'intégrabilité de $|f|$ sur $[a, b]$ à l'aide du critère de Riemann (**thm 5.25**).

Puisque f est riemann, pour tout $\epsilon > 0$ il existe P une partition de $[a, b]$ tel que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$ (**thm 5.25**).

Alors

$$U(|f|, P) - L(|f|, P)$$
$$=$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$
$$=$$
$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i$$

où $M_i = \sup\{|f(x)| : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ et $m_i = \inf\{|f(x)| : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

Soit $S_i := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ et $L_i := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

On a alors quelques cas. Si $S_i \geq 0$ et $L_i \geq 0$, alors $M_i = S_i$ et $m_i = L_i$

car $|f|([x_{i-1}, x_i]) = f([x_{i-1}, x_i])$ et donc $S_i - L_i = M_i - m_i$.

Si $S_i \geq 0$ et $L_i < 0$, alors $M_i = \max\{|S_i|, |L_i|\}$ et $m_i \geq 0$.

Si $S_i > |L_i|$, alors c'est que $S_i > 0$. SPDG, on ne considérera que des x tel que $f(x) > 0$. Supposons alors $L < S_i$ tel que L soit le supremum.On pose $\alpha := S_i - L$. Alors il existe $x \in [x_{i-1}, x_i]$ tel que $S_i - f(x) < \alpha = S_i - L$. Alors $f(x) > L$ et donc L ne peut pas être le supremum. En particulier $|L_i|$.

Si $|L_i| > S_i$. Supposons $L < |L_i|$ le supremum. On pose $\alpha := |L_i| - L$. Puisque L_i est l'infimum de $\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, il existe x tel que $f(x) - L_i < \alpha = |L_i| - L = -L_i - L$. Alors $f(x) < -L$. SPDG, $f(x) < 0$. Alors $|f(x)| > L$ et donc L ne peut pas être le supremum. À plus forte raison S_i.

Si alors $M_i = S_i$, alors $S_i - L_i \geq S_i$ car $-L_i > 0$. Si $M_i = |L_i|$, alors $S_i - L_i = S_i + |L_i| = M_i + S_i \geq M_i - m_i$ car $m_i \geq 0$.

Si $S_i < 0$ et $L_i < 0$, alors $M_i = |L_i|$ et $m_i = |S_i|$. Car alors $|f|([x_{i-1}, x_i]) = -f([x_{i-1}, x_i])$ et donc $sup(|f|([x_{i-1}, x_i])) = -inf(f([x_{i-1}, x_i])) = |L_i|$ et analoguement pour l'infimum.

Alors $M_i - m_i = |L_i| - |S_i| = -L_i - (-S_i) = S_i - L_i$.

On conclut

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \\
\leq \\
&\sum_{i=1}^{n} (S_i - L_i)\Delta x_i \\
= \\
&U(f, P) - L(f, P) < \epsilon
\end{aligned}$$

Ainsi $U(|f|, P) - L(|f|, P) \leq U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$.

8-17

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
2. $m \in (a, b)$

$\diamond$ f **est riemann sur** $[a, b]$ **ssi f est riemann sur** $[a, m]$ **et sur** $[m, b]$ **et alors**

$$\int_a^b f = \int_a^m f + \int_m^b f$$

$(\Rightarrow)$

Supposons f riemann sur $[a, b]$. Alors f est continue pp sur $[a, b]$ (**thm 8.12**) et donc continue pp sur $[a, m]$ et sur $[m, b]$ et donc riemann sur chacun de ces intervalles (**thm 8.12**).

Puisque f est riemann sur chacun des intervalles $[a, m]$ et $[m, b]$ alors pour toutes suites de partitions $\{P_k\}$ de $[a, m]$, $\{D_k\}$ de $[m, b]$ on a

$$\lim_{k\to\infty} R(f, P_k, T_k) = \int_a^m f$$
$$\lim_{k\to\infty} R(f, D_k, T_k^*) = \int_m^b f$$

Alors

$$\begin{aligned}
&R(f, P_k, T_k) + R(f, D_k, T_k^*) \\
=& \\
&\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{m} f(t_i^*)\Delta x_i \\
=& \\
&\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i + \sum_{i=n}^{n+m} f(t_{n+i}^*)\Delta x_{n+i} \\
=& \\
&\sum_{i=1}^{n+m} f(t_i)\Delta x_i \\
=& \\
&R(f, P_k \cup D_k, T_k \cup T_k^*)
\end{aligned}$$

car $P_k \cup D_k$ forme une partition de $[a, b]$ où P_k termine en m et D_k y débute. De plus, il est clair que $\lim\limits_{k\to\infty} ||P_k \cup D_k|| = 0$.

Puisque f est riemann sur $[a, b]$, on applique à répétition le **lemme 5.6** pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\int_a^m f + \int_m^b f \\
=& \\
&\lim_{k\to\infty} R(f, P_k, T_k) + \lim_{k\to\infty} R(f, D_k, T_k^*) \\
=& \\
&\lim_{k\to\infty} (R(f, P_k, T_k) + R(f, D_k, T_k^*)) \\
=& \\
&\lim_{k\to\infty} R(f, P_k \cup D_k, T_k \cup T_k^*) \\
=& \\
&\int_a^b f
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$)

Supposons f intégrable sur $[a,m]$ et sur $[m,b]$. Alors f est continue pp sur chacun de ces intervalles considérés individuellement.

Soit alors $x \in [a,b]$ tel que $f : [a,b]$ est discontinue. Alors $x \in [a,m]$ ou $x \in [m,b]$. SPDG, $x \in [a,m]$. Alors $f(x) = f|_{[a,m]}(x)$. Mais alors $f|_{[a,m]}(x)$ doit être discontinue, car sinon $f(x)$ serait continue. Donc les points de discontinuité de f forment un sous-ensemble des points de discontinuité de $f|_{[a,m]}$ et de $f|_{[m,b]}$. Or la mesure de l'union de ces ensembles est nulle, car la mesure de chacun d'entre eux l'est également, donc f est continue pp sur $[a,b]$ donc riemann sur $[a,b]$ (**thm 8.12**).

Alors, en appliquant le **lemme 5.6** pour $f|_{[a,m]}$ et $f|_{[m,b]}$, on effectue un raisonnement similaire à celui fait plus haut.

8-18

1. f Riemann sur $[a,b]$
2. $x_0 \in [a,b]$
3. $G(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$

$\diamond$ $G(x)$ **est uniformément continue sur** $[a,b]$
$\diamond$ **Si** f **est continue en** $x \in (a,b)$ **alors** $\frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right) = f(x)$

On a que

$$\int_a^x f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^{x} f$$

et donc $G(x) = \int_a^x f - \int_a^{x_0} f$. Or, le premier terme de cette différence est uniformément continue (**thm 8.17**) et le deuxième, étant une constante, l'est également. Donc $G(x)$ est une différence de fonctions continues sur $[a,b]$. Elle est donc continue sur $[a,b]$ (**thm 3.27**) et donc uniformément continue sur cet interval (**lm 5.19**).

Supposons alors f continue en $x \in (a,b)$. Alors

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f - \int_a^{x_0} f\right) = f(x)$$

puisque la dérivé de $\int_a^x f$ est $f(x)$ (**thm 8.17**) et que celle de $\int_a^{x_0} f$ est 0, étant une constante.

8-19

1. f, g Riemann sur $[a,b]$

$\diamond$ fg **est Riemann sur** $[a, b]$ **à l'aide du critère de Riemann (thm 5.25)**

On suppose d'abord que f et g sont non négatives.

Supposons ϵ^* et $\epsilon := \epsilon^* M^{-1}$ où $M := \sup_{[a,b]} f + \sup_{[a,b]} g + 1$. On suppose de plus une partition P tel que $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$ et $U(P, g) - L(P, g) < \epsilon$ (**lemme 5.6**).

On a alors que $M_{fg} \leq M_f M_g$ et que $m_{fg} \geq m_f m_g$. Donc $|M_{fg} - m_{fg}| \leq |M_f M_g - m_f m_g|$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} |M_{fg} - m_{fg}|_i \Delta x_i$$

$$\leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} |M_f M_g - m_f m_g|_i \Delta x_i$$

$$\leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} |M_f|_i |M_g - m_g|_i \Delta x_i + |m_g|_i |M_f - m_f|_i \Delta x_i$$

$$\leq$$

$$\sup f \sum_{i=1}^{n} |M_g - m_g|_i \Delta x_i + \sup g \sum_{i=1}^{n} |M_f - m_f|_i \Delta x_i$$

$$\leq$$

$$\epsilon(\sup f + \sup g)$$

$$\leq$$

$$\epsilon^*$$

Alors, si f et g sont positives supérieures à 1, la théorèmes et prouvé.

Soit alors des fonctions générales f et g. Puisqu'elles sont intégrables, elles sont bornées (**par définition**) et donc on pose $B := |\min\{f, g\}| + 1$ et on considère $(f + B)(g + B)$, un produit de fonctions positives supérieures à 1, dont intégrables.

Or, $(f + B)(g + B) = fg + B(f + g) + B^2$ où $B(f + g)$ et B^2 sont intégrables (**thm. 5.8**). Donc $-B(f + g) - B^2$ est intégrables (**thm. 5.8**). Alors $(f + B)(g + B) - B(f + g) - B^2 = fg$ est intégrable (**thm. 5.8**).

8-21

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue
2. $g : [a, b] \to [0, \infty)$ riemann

$\diamond$ $\exists c \in [a, b]$ tel que $\int_b^a fg = f(c) \int_a^b g$

Car $\min fg(x) \leq fg(x) \leq \max fg(x)$ et alors $\min f \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq \max f \int g$ (**prop. 5.21**).

Mais de même on a $\min f \int_a^b g \leq f(x) \int_a^b g \leq \max f \int_a^b g$ sur $[a, b]$. Or, f est continue est l'intégral de g est une constante. Par le **TVI**, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) \int_a^b g = \int_a^b fg$.

8-22

1. $g : [a, b] \to [0, \infty)$ riemann
2. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ non décroissante

$\diamond$ $\exists c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b fg = f(a) \int_a^c g + f(b) \int_c^b g$

$h(t) := f(a) \int_a^t g + f(b) \int_t^b g$ une fonction non décroissante.

Par l'hypothèse [2], $f(a) = \min f$ et $f(b) = \max f$.

Alors $f(a)g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(b)g(x)$ et donc par monotonie de l'intégrale on a $f(a) \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq f(b) \int_a^b g$.

Mais $f(a) \int_a^b g = h(b)$ et $f(b) \int_a^b g = h(a)$.

Or $\int_a^t g$ et $\int_t^b g$ sont continues en t (**thm. 8.17**) et donc $h(t)$ l'est également (**thm. 3.27**). On applique le **TVI**.

8-23

1. $[a, b] \subset (c, d)$
2. $F, g : (c, d) \to \mathbb{R}$ différentiable tq $F' = f$
3. f, g' riemann sur $[a, b]$

$\diamond$ $\int_a^b fg = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b Fg'$

Premièrement, que fg est riemann. Car f est riemann par hypothèse et g est différentiable sur (c, d), donc sur $[a, b]$, donc continue sur $[a, b]$, donc riemann sur $[a, b]$. Donc fg est riemann sur $[a, b]$. (**ex. 8-19**).

On a

$$F(b)g(b) - F(a)g(a)$$
$$=$$
$$F(x)g(x)|_a^b$$
$$=$$
$$\int_a^b fg + Fg'$$
$$=$$
$$\int_a^b fg + \int_a^b Fg'$$

En substituant cette expression dans le membre de droite de ce qu'il faut prouver, on obitent le résultat voulu.

Note : je vois l'application du **thm. 5.23**, mais pas de **thm. 8.17**. C'est une généralisation d'un exercice précédent ou l'on supposait que f et g' était continue sur $[a, b]$, alors qu'ici on ne suppose que la continuité presque partout. Mais il me semble que l'exercice aurait pû être fait avec exactement les mêmes hypothèses à la section 5.

8-24

1. $[a, b] \subset (c, d)$
2. $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ différentiable
3. g' riemann sur $[a, b]$
4. $g([a, b]) \subseteq (u, v)$
5. $F : (u, v) \to \mathbb{R}$ dans C^1 tq $F' = f$

$\diamond$ $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a))$

J'ai juste l'impression d'avoir à appliquer **thm. 5.23**. Car $F(g(x))$ est différentiable par **thm. 4.10**.

On montre facilement que le membre de gauche de l'identité est riemann...

8-25

1. $a > 0$
2. $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$

(a)

$\diamond$ **Si f est pairs et riemann, alors $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$**

Car $\int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -\int_a^0 f(-y)dy + \int_0^a f(x)dx = -\int_a^0 f(y)dy + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(y)dy + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f$.

On applique le **thm. 8.16** puis pose $-y := x$.

Note : La raison pour laquelle on fait cette exercice dans cette section est que l'on avait pas de **thm. 8.16** pour le faire à la section 5.

(b)

$\diamond$ **Si f est impaire et riemann, alors $\int_{-a}^{a} f = 0$**

Car $\int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -\int_a^0 f(-y)dy + \int_0^a f(x)dx = \int_a^0 f(y)dy + \int_0^a f(x)dx = -\int_0^a f(y)dy + \int_0^a f(x)dx = 0$

Pour des raisons similaires à (a).

(c)

$\diamond$ **f est une somme de fonctions paires et impaires**

On pose $g(x) := \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x) := \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$. Alors

$$g(-x) = \frac{f(-x)+f(--x)}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = g(x)$$

et

$$h(-x) = \frac{f(-x)-f(--x)}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = \frac{-(f(x)-f(-x))}{2} = -h(x)$$

et donc g est paire et h est impaire.

Or, $g + h = \dfrac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$.

8-27

1. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue
2. $l, u : (c,d) \to [a,b]$ différentiables

$\diamond$ $\dfrac{d}{dx}\left(\int_{l(x)}^{u(x)} f(t)dt\right) = f(u(x))u'(x) - f(l(x))l'(x)$

Par **thm. 8.17, thm. 5.20**, $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ et $G(x) := -\int_a^x f(t)dt$ sont uniformément continue et différentiables sur $[a,b]$.

Alors, par **thm. 4.10**, $F \circ u$ et $G \circ l$ sont différentiables sur (c, d) et

$$(F \circ u)' = (F' \circ u)u'(x)$$
$$(G \circ l)' = (G' \circ l)l'(x)$$

or

$$F \circ u(x) + G \circ l(x)$$
$$=$$
$$\int_a^{u(x)} f(t)dt - \int_a^{l(x)} f(t)dt$$
$$=$$
$$\int_a^{u(x)} f(t)dt + \int_{l(x)}^a f(t)dt$$
$$=$$
$$\int_{l(x)}^{u(x)} f(t)dt$$

par **thm. 8.16**.

Aussi,

$$(F' \circ u)u'(x) = ((\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt) \circ u)u'(x)$$
$$=$$
$$(f \circ u)u'(x)$$

par **thm. 8.17** et analoguement pour G.

Alors

$$\frac{d}{dx}(F \circ u(x) + G \circ l(x)) = \int_{l(x)}^{u(x)} f(t)dt$$
$$=$$
$$(F' \circ u)u'(x) + (G' \circ l)l'(x) = (f \circ u)u'(x) - (f \circ l)l'(x)$$

8-29

(a)

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ riemann

$\diamond$ $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ **ou** $G := \int_a^x f(t)dt$ **est absolument continue sur** $[a, b]$

La chose suit de **thm. 8.17** et de ce que les fonctions uniformément continues sont absolument continues.

Car soit f une fonction uniformément continue et ϵ, n et soit $\epsilon^* := \dfrac{\epsilon}{n}$.

Alors il existe un $\delta > 0$ tel que $|x - y| < \delta$ implique $|f(x) - f(y)| < \epsilon^*$.

Soit alors $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ une collection d'intervales ouverts disjoints deux à deux et supposons $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$. Alors $|b_i - a_i| < \delta$ pour tout i. Donc $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < n\epsilon^* = \epsilon$.

Donc pour tout ϵ il existe un δ tel que pour toutes suites $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ implique $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$.

(b)

$\diamond$ **Les fonctions absolument continues sont uniformément continues**

On n'a qu'à remarquer que les suites $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ d'intervales ouverts disjoints deux à deux sont une généralisation d'une paire (x, y) qui serait δ proches.

(c)

$\diamond$ $f(x) := \dfrac{1}{x}$ **est continue sur** $(0, 1]$ **mais pas absolument continue**

Car par (a),(b) on a montré que abs.cont. $\Leftrightarrow$ unif.cont.

Or, $\dfrac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $(0, 1]$ (**ex. 5-14**).

8-30

1. $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ non décroissantes
2. $f, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornées et riemann-stieltjes sur $[a, b]$ par rapport à g

(a)

$\diamond$ **Si** $|f|$ **est riemann-stieltjes par rapport à** g**, alors** $\left|\int_a^b f dg\right| \leq \int_a^b |f| dg$

On prouve une version du lemme 5.6 valide pour l'intégrale de Riemann-Stieltjes et alors l'argument devient le même que pour **ex. 8-16**.

Soit f riemann-stieltjes par rapport à g une fonction non décroissante. Alors pour tout ϵ il existe δ tel que pour toutes partitions P tel que $||P|| < \delta$ et pour toutes ensembles d'évaluations T, on a

$$\left| S_g(f, P, T) - \int_a^b f dg \right| < \epsilon$$

Soit alors P_k tel que $||P_k|| \to 0$ lorsque $k \to \infty$. Alors on montre facilement que $S_g(f, P_k, T_k) \to \int_a^b f dg$.

(b)

$\diamond$ $\forall m \in [a,b]$ $\int_a^m fdg$ **et** $\int_m^b fdg$ **sont riemann-stieltjes et** $\int_a^b fdg = \int_a^m fdg + \int_m^b fdg$

Car puisqe f est riemann-stieltjes par rapport à g, alors pour tout ϵ, il existe P tel que $U_g(f,P) - L_g(f,P) < \epsilon$.

On considère alors la partition P' un rafinement de P tel que $m \in P'$. Alors $U_g(f,P') - L_g(f,P') \leq U_g(f,P) - L_g(f,P) < \epsilon$ (**lm. 5.16**).

(**Note : Le lm. 5.16 tient pour riemann-stieltjes. On adapte très facilement l'argument.**)

On peut alors séparer $U_g(f,P') - L_g(f,P')$ en

$$(U_g(f,Q) - L_g(f,Q)) + (U_g(f,H) - L_g(f,H))$$

où $Q := \{a = x_0 < \cdots < x_k = m\}$ et $H := \{m = x_0 < \cdots < x_r = b\}$.

Puisque chaqun des termes de cette somme est positifs, on a

$$\begin{aligned} U_g(f,Q) - L_g(f,Q) < \epsilon \\ U_g(f,H) - L_g(f,H) < \epsilon \end{aligned}$$

et donc f est riemann-stieltjes sur $[a,m]$ et $[m,b]$.

Puisque le lemme 5.6 tient pour riemann-stieltjes, posons Q_k, H_k tel que

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} S(f,Q_k,T_k) = \int_a^m fdg \\ \lim_{k\to\infty} S(f,H_k,T_k) = \int_m^b fdg \end{aligned}$$

où $Q_k := \{a = x_0 < \cdots < x_k = m\}$,$H_k := \{x_0 = m < \cdots < x_r = b\}$ et $||Q_k|| \to 0$ et de même pour H_k.

Alors

$$\begin{aligned} & \int_a^m fdg + \int_m^b fdg \\ = & \\ & \lim_{k\to\infty} S(f,Q_k,T_k) + \lim_{k\to\infty} S(f,H_k,T_k) \\ = & \\ & \lim_{k\to\infty} (S(f,Q_k,T_k) + S(f,H_k,T_k)) \\ = & \\ & \lim_{k\to\infty} S(f,P_k,T_k) \end{aligned}$$

Or, P_k forme une suite de partitions de $[a, b]$ tel que $||P_k|| \to 0$ lorsque $k \to \infty$. Donc $\lim_{k\to\infty} S(f, P_k, T_k) = \int_a^b f dg$.

Note : Pourquoi ne pas se servir de 5.6 pour prouver directement l'égalité en plus de montrer que f est riemann-stieltjes sur $[a, m]$ et $[m, b]$? Car la définition de l'intégrabilité existe qu'il existe un epsilon tel que pour toute partition, on ait une petit distance par rapport à un certain I de $\mathbb{R}$. On aurait donc à construire la limite et ensuite montrer quelque chose à partir de toute partition de $[a, m]$ en fonction de partition de $[a, b]$. La construction de la limite est particulièrement problématique.

(c)

$\diamond$ fh **est riemann-stieltjes par rapport à** g

L'argument est essentiellement le même que 8-19, mais on se sert de **ex. 5-12** pour déduire que les sommes de fonctions sont intégrables. Puisque l'on a que $\int_a^b dg$ est bien défini peu importe le g, les constantes sont intégrables peu importe le g, donc le raisonnement de 8-19 tient ici.

Que les constantes soient intégrables, on le voit à ce que

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta g_i = \sum_{i=1}^{n} g_{i+1} - g_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g_{i+1} - g^* + g^* - g_i$$

d'où il suit que, peu importe la partition, sa somme est $g(b) - g(a)$ (puisque g est non-décroissante et x_i forme une partition).