9.4 The Lebesgue Integrals versus Riemann Integrals

February 22, 2016

9-31

1. f Riemann intégrable sur tous les sous-intervals fermés de $[a, b)$
2. $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
3. $|f|$ Riemann impropre sur $[a, b)$
4. $f_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_{\mathbb{R}}(x) = f(x)$ si $x \in [a, b)$ et 0 sinon.

a)

1. $a, b \in \mathbb{R}$
2. $a < b$
3. $M \geq 0$
4. s une fonction simple non négative tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\int_{\mathbb{R}} s\chi_{[a,b-\frac{1}{n}]} d\lambda \leq M$

$\diamond$ $\int_{\mathbb{R}} s d\lambda \leq M$

Soit $s = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$. Alors $\int_{\mathbb{R}} s\chi_{[a,b-\frac{1}{n}]} = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda(A_i \cap [a, b - \frac{1}{n}])$.

En prenant la limite, on a $\sum_{i=1}^{k} a_i \lambda(A_i \cap [a, b)) \leq M$ (**thm. 9.12**).

On a donc $\int_{\mathbb{R}} s\chi_{[a,b)} d\lambda \leq M$.

TODO. J'ignore si l'on a des supposition ou des hypothèses implicites provenant du contexte de la démonstration du thm. 9.27. A-t-on que $s = s\chi_{[a,b)}$? Ce serait trop simple et alors l'indice du livre n'aurait aucun sens. D'un autre côté, je peux construire un contre exemple à l'aide des hypothèses de la question. $a = 0, b = 2, M = 3, s = 1$. On aura que l'intégrale de s sera infinie sur $\mathbb{R}$ bien qu'elle soit inférieure à M sur $[0, 2]$.

b)

◇ **Prouvez le thm. 9.27 pour le cas où $b = \infty$.**

On définit s_L^n à la manière de la preuve du **thm. 9.27** et l'on suppose $f \geq 0$. On a que $f\chi_{[a,a+n]}$ est Riemann intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (**par hypothèse**). Soit A_n l'ensemble des point de $[a, a+n]$ tel que $f\chi_{[a,a+n]}$ est discontinue en $x \in A_n$.

Alors, par **thm. 8.12**, $f\chi_{[a,a+n]}$ est continue pp. pour tout n et donc A_n est de mesure nulle par définition. Soit alors A l'ensemble des x tel que f est discontinue. Alors je dis $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

La direction $\subseteq$ est évidente. Pour $x \in A$, on a que $x \in [a, a+n]$ pour un certain n, ce qui clot la preuve. Alors $\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = 0$ Donc $\lambda(A) = 0$.

Mais alors f est continue pp. et donc $s_L^n \to f$ pour presque tous les x.

On applique alors le même raisonnement que dans la preuve du **thm. 9.27** pour conclure que $f_{\mathbb{R}}$ est mesurable.

On peut alors supposer un $a < b < \infty$ et, en appliquant le même raisonnement que dans le **thm. 9.27** pour les fonctions $0 \leq s \leq |f|$, on a $\int_{\mathbb{R}} s d\lambda \leq \int_a^b |f| dx$ pour tout b. En prenant la limite vers l'infinie, on a le résultat voulu et alors on peut conclure que $|f_{\mathbb{R}}|$ et donc $f_{\mathbb{R}}$ sont Lebesgue intégrable par **thm. 9.23**.

Soit $c \in (a, \infty)$ tel que $\int_c^{\infty} |f| dx \leq \frac{\epsilon}{2}$ (par extrapolation de **thm. 8.26**).

On peut alors faire exactement le même raisonnement que dans **thm. 9.27**.

9-32

1. $f(x) := \frac{1}{x}\chi_{(0,1]}$

◇ **$\sqrt{f}$ est Lebesgue intégrables mais f ne l'est pas**

On a que $\sqrt{f} = |\sqrt{f}|$ et $\sqrt{f}$ est Riemann impropre sur tout $(0, 1]$ (**exemple 8.24**). De plus, $\sqrt{f}$ est intégrable sur tout $[a, 1]$ pour $0 < a < 1$ (**s.d.**). Donc par **thm. 9.27**, $\sqrt{f}$ est Lebesgue intégrable.

Sans démonstration, on a que, pour tout $0 < p < 1$, $(1-p)^{-1} \leq \lim_{b \to 0} \int_b^1 x^{-1} dx$. En prenant la limite $p \to 1$, on a que $\lim_{b \to 0} \int_b^1 x^{-1} dx = \infty$.

Donc, pour tout $M \in \mathbb{R}$, on a qu'il existe un $b \in (0, 1]$ tel que $\int_b^1 x^{-1} dx > M$.

Or, par **thm. 9.26**, pour tout $b \in (0, 1]$, on a $\int_{\mathbb{R}} f\chi_{[b,1]} d\lambda = \int_b^1 x^{-1} dx$ car x^{-1} est continue sur $[b, 1]$ et donc le critère de Lebesgue pour l'intégration de Riemann s'applique.

Donc, par **def. 9.22**, il existe $0 \leq s \leq f\chi_{[b,1]}$ une fonction escalier telle que $\int_{\mathbb{R}} f\chi_{[b,1]} d\lambda - \int_{\mathbb{R}} s d\lambda = \int_b^1 x^{-1}dx - \int_{\mathbb{R}} s\lambda < \epsilon$.

Or, on a que s est également une fonction escalier pour f.

Soit alors $M \in \mathbb{R}$ et $b \in (0,1]$ tel que $\int_b^1 x^{-1}dx > M$. On pose $\epsilon := \int_b^1 x^{-1}dx - M$. Alors il existe une fonction escalier telle que $M \leq \int_{\mathbb{R}} s d\lambda \leq \int_b^1 x^{-1}dx$.

Donc, pour tout $M \in \mathbb{R}$, on a une fonction escalier $0 \leq s \leq f$ tel que $\int_{\mathbb{R}} s d\lambda > M$. Donc le supremum est infini est l'intégral de Lebesgue de f n'existe pas.

9-33

1. $f = \frac{1}{x}\chi_{[1,\infty)}$

$\diamond$ **f^2 est Lebesgue intégrable mais f ne l'est pas**

Premièrement, on a que $|f^2| = f^2$ est Riemann impropre par **exemple 8.21**.

De plus, f^2 est Riemann sur tout sous-interval $[1,b] \subseteq [1,\infty)$ (**critère de Lebesgue**).

Donc f^2 est Lebesgue intégrable.

Toujours par **exemple 8.21**, on a que $\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}dx = \infty$.

Or, par le **critère de Lebesgue**, on a que $\frac{1}{x}$ est Riemann sur tout $[1,b]$. On applique alors un raisonnement analogue à celui de 9-32.

9-34

1. $f(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \chi_{[n,n+1)}$

$\diamond$ **f est Riemann impropre sur $[1,\infty)$ mais n'est pas Lebesgue intégrable.**

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_1^{k+1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \chi_{[n,n+1)} dx$$
$$=$$
$$\sum_{n=1}^{k+1} \int_n^{n+1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} dx$$
$$=$$
$$\sum_{n=1}^{k+1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Or, par **thm. 6.11**, cette série converge. Donc

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^{k+1} f dx = \int_1^{\infty} f dx < \infty$$

et donc f est Riemann impropre.

Par **thm. 9.23**, on a que f est Lebesgue ssi $|f|$ est Lebesgue.

Or $|f| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_{[n,n+1)}$. On a que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $s_k := \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \chi_{[n,n+1)}$ est une fonction simple tel que $0 \leq s_k \leq f$.

Par **thm. 9.23**, on a

$$\int_{\mathbb{R}} s_k d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda$$
$$=$$
$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \leq \int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda$$

En prenant la limite vers $k \to \infty$, on peut conclure que $|f|$, et donc f, ne sont pas Lebesgue intégrables. (**thm. 9.23, exemple 6.8**.)

9-35

⋄ Définir l'intégrable de Lebesgue impropre d'une fonction $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ où $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

f est Lebesgue impropre si $f\chi_{[a,c]}$ est Lebesgue pour tout $c \in (a, b)$ et si $\lim_{c\to b} \int_{\mathbb{R}} |f|\chi_{[a,c]} d\lambda$ est finie. (Ou sinon on ne prend pas la valeur absolue. Je l'ignore.)

9-36

1. $E \subseteq [a, b]$

2. $\mathcal{I}$ une famille des sous-intervals fermés de $[a, b]$
3. $E \subseteq \bigcup \mathcal{I}$

$\diamond$ **Il existe une sous-famille $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ finie d'ensembles disjoints tel que $\sum_{I \in \mathcal{F}} |I| \geq \frac{1}{6}\lambda(E)$**

a)

1. Pour tout I un interval fermé, on pose I^* un interval fermé ayant le même point milieu que I et tel que $5|I| = |I^*|$
2. $I, J \in \mathcal{I}$
3. $I \cap J \neq \emptyset$
4. $|I| \leq 2|J|$

$\diamond$ $I \subseteq J^*$

On pose $I := [a, b]$ et $J := [c, d]$.

On a que $J^* = [c - \frac{5}{2}(d - c), d + \frac{5}{2}(d - c)]$ (on ajoute cinq moités d'interval de chaque coté). Soit $x \in I \cap J$ et soit $|x - c|, |x - d| > |I|$.

SPDG, on pose $x < c$. Alors $c - x > b - a$. Supposons alors $c \leq b$. Puisque $a \leq x$, on a $-x \leq -a$. Alors $c - x \leq b - a$. Or $c - x > b - a$. On a donc une contradiction et alors $b < c$. Mais alors $a < b < c$ et alors $I \cap J = \emptyset$, une contradiction. Un raisonnement analogue s'applique si $x > d$. Donc, pour tout $x \in I$, on a $|x - c| < |I|$ ou $|x - d| < |I|$.

Soit alors $x \in I - J$. SPDG $x < c$. Alors $c - x \leq |I| \leq 2|J| \leq \frac{5}{2}|J| \Leftrightarrow -x \leq -c\frac{5}{2}|J| \Leftrightarrow c - \frac{5}{2}|J| \leq x$. Aussi, $x < c < d < d + \frac{5}{2}|J|$. Donc $x \in J^*$. Un raisonnement analogue s'applique si $x > d$. Si $x \in J$, alors $x \in J^*$ car $J \subseteq J^*$.

Donc $I \subseteq J^*$.

b)

1. $\delta_0 := \sup\{|I| : I \in \mathcal{I}\}$
2. $I_1 \in \mathcal{I}$ tel que $|I_1| > \frac{\delta_0}{2}$
3. $I_1 \cdots I_n$ disjoints tel que pour $A_n := \bigcup_{j=1}^{n} I_j$, pour tout $I \in \mathcal{I}$, on a $I \cap A_n = \emptyset$ ou $I \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} I_j^*$

$\diamond$ **S'il existe $I \in \mathcal{I}$ tel que $A_n \cap I = \emptyset$, on peut poursuivre la construction.**

On suppose qu'il existe $I \in \mathcal{I}$ tel que $I \cap A_n = \emptyset$.

On pose alors $\delta_{n+1} := \sup\{|I| : I \in \mathcal{I} \text{ et } I \cap A_n = \emptyset\}$. Par les proppriétés du supremum, on a qu'il existe $I \in \mathcal{I}$ tel que $I \cap A_n = \emptyset$ et $\delta_{n+1} - |I| \leq \frac{\delta_{n+1}}{2}$ ce qui est équivalent à $\frac{\delta_{n+1}}{2} \leq |I|$.

Ceci nous donne A_{n+1}.

c)

1. $\mathcal{J}$ la famille d'intervals construite à l'aide du processus 9-36b

$\diamond$ $\lambda(E) < 5 \sum_{I \in \mathcal{J}} |I|$

Soit $A^* = \bigcup_{I \in \mathcal{J}} I^*$. Alors, par exercice 9-36b, on a que, pour tout $I \in \mathcal{I}$, $I \subseteq A^*$. Mais alors $E \subseteq \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I \subseteq A^*$.

Donc $\lambda(E) \leq \lambda(A^*) \leq \sum_{I \in \mathcal{J}} |I^*| = 5 \sum_{I \in \mathcal{J}} |I|$.

d)

$\diamond$ **Montrer que de 9-36c suit la conclusion de la proposition.**

Prenant $\mathcal{J}$, on peut déduire $\frac{\lambda(E)}{6} < \sum_{I \in \mathcal{J}} |I|$. De plus, les I de $\mathcal{J}$ sont disjoints. Si $\mathcal{J}$ est finie, on a terminé.

Supposons alors $\mathcal{J}$ infinie. On a $\mathcal{J} = \{I_1, I_2, \cdots\}$. On a que, pour $\epsilon := \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| - \frac{\lambda(E)}{6}$, il existe N tel que $n \geq N$ implique $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| - \sum_{i=1}^{n} |I_i| < \epsilon$. Mais alors $-\sum_{i=1}^{n} |I_i| < -\frac{\lambda(E)}{6}$ ce qui est équivalent à $\frac{\lambda(E)}{6} < \sum_{i=1}^{n} |I_i|$.

On pose $\mathcal{F} := \{I_1, \cdots, I_n\}$.