Feuille de TD 2 : Tests paramétriques à un échantillon

Exercice 1

En 2022, le don moyen au téléthon était de 38 euros dans la ville de Monvillage. Afin d'inciter les citoyens de la ville à faire un don supérieur en 2023, des bénévoles ont organisé des campagnes d'information sur diverses maladies génétiques et l'action d'associations combattant ces maladies, comme l'AFM. Sur un échantillon de 14 personnes ayant participé au téléthon en 2023 dans la ville de Monvillage, on a relevé les montants de don en euros suivants :

$$32 \quad 25 \quad 45 \quad 50 \quad 68 \quad 60 \quad 35 \quad 43 \quad 45 \quad 72 \quad 25 \quad 54 \quad 30 \quad 27.$$

On suppose que le montant d'un don au téléthon en 2023 dans cette ville est une variable aléatoire X de loi normale d'espérance μ inconnue et de variance $\sigma^2 = 246.49$.

1. Effectuer un test au niveau $\alpha = 2\%$ pour vérifier si la campagne d'action pour le téléthon 2023 des bénévoles de la ville de Monvillage est significativement efficace.
   On donne
   $$32 + 25 + 45 + 50 + 68 + 60 + 35 + 43 + 45 + 72 + 25 + 54 + 30 + 27 = 611$$
   On suppose que le montant d'u
2. Calculer la puissance de ce test lorsque μ est égal à 45 euros.
3. Même question pour $\mu = 55$ euros.
4. La puissance du test pour $\mu = 65$ euros sera-t-elle inférieure à celle obtenue pour $\mu = 45$? Justifier sans aucun calcul supplémentaire.

Exercice 2

Un négociant en jus de fruit s'intéresse à la contenance des bouteilles d'un jus déterminé. Il se demande si la contenance moyenne n'est pas inférieure à la contenance légale de 75 cl. Pour vérifier cela, il mesure le contenu de 10 bouteilles prises au hasard et obtient les valeurs suivantes :

73.2 cl 72.6 cl 74.5 cl 75 cl 75.5 cl 73.7 cl 74.1 cl 75.8 cl 74.8 cl 75 cl.

On suppose que la contenance est une variable aléatoire de loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 inconnues.

1. Donner un intervalle de confiance de la moyenne de la contenance des bouteilles à 99%. On donne

$$73.2 + 72.6 + 74.5 + 75 + 75.5 + 73.7 + 74.1 + 75.8 + 74.8 + 75 = 744.2$$

et

$$\begin{aligned}(73.2 - 74.42)^2 + (72.6 - 74.42)^2 + (74.5 - 74.42)^2 + (75 - 74.42)^2 + \\ (75.5 - 74.42)^2 + (73.7 - 74.42)^2 + (74.1 - 74.42)^2 + (75.8 - 74.42)^2 + \\ (74.8 - 74.42)^2 + (75 - 74.42)^2 = 9.316\end{aligned}$$

2. On suppose que le producteur est honnête et que le négociant doit prouver la fraude qu'il soupçonne. Effectuer un test de niveau 1% pour vérifier si le contenu moyen est inférieur à 75 cl.
3. A l'aide d'un logiciel statistique, on a trouvé que la p-valeur de ce test était égale à 0.0525. Expliquer comment cette p-valeur a été calculée. Ce résultat semble-t-il surprenant compte tenu du résultat de la question précédente ?

Exercice 3

Un fabricant de rillettes d'oie affirme que ses boîtes de 190 grammes (poids net) contiennent au moins 133g de viande d'oie en moyenne. On notera μ_0 cette valeur minimale garantie. Une organisation de consommateurs désire prouver que le fabricant ne dit pas la vérité. On suppose que la teneur en viande d'oie est distribuée selon une loi normale d'écart-type $\sigma = 10$ grammes. On décide de prélever un échantillon de n boîtes pour vérifier l'affirmation du fabricant.

1. Définir les hypothèses (H_0) et (H_1).
2. Construire la règle de décision pour un test de niveau 5% et une taille d'échantillon n quelconque.
3. L'organisation de consommateurs souhaite être capable de détecter avec une probabilité d'au moins 99% que l'affirmation du fabricant est fausse si les boîtes ne contiennent en moyenne que 127g de viande d'oie ou moins, le risque de première espèce consenti étant de $\alpha = 5\%$. Dans ces conditions, calculer la taille d'échantillon nécessaire associée.

Exercice 4

Une entreprise reçoit un lot de pièces d'un fournisseur. L'accord entre l'entreprise et son fournisseur stipule que si la proportion de pièces ne satisfaisant pas aux normes convenues est $p = 0.05$, l'entreprise acceptera le lot de pièces. Si cette proportion est $p = 0.10$, le fournisseur doit reprendre sa livraison. Pour déterminer la décision à prendre, on procède à l'examen d'un échantillon de n pièces.

Dans un premier temps, on teste :

$$(H_0) \;\; p_0 = 0.10 \;\; \text{contre} \;\; (H_1) \;\; p_1 = 0.05.$$

1. Que signifie ce choix ?

2. Quelle est la région critique du test correspondant à un risque de premier espèce $\alpha = 10\%$ pour $n = 100$?
3. Si l'on observe 7 mauvaises pièces dans cet échantillon, quelle décision doit-on prendre ?

Dans un second temps, on veut tester :

$$(H_0) \;\; p_0 = 0.05 \;\; \text{contre} \;\; (H_1) \;\; p_1 = 0.10.$$

4 Répondre aux mêmes questions avec les hypothèses ainsi définies.

5 Comparer les deux décisions pour les deux versions du test.

6 Pour quelles valeurs de n les décisions sont-elles compatibles ?

Exercice 5

Un homme politique a remporté les dernières élections avec 52% de voix. Un sondage effectué un an après son élection auprès de 1000 personnes indiquent que 508 d'entre elles voteront pour lui si de nouvelles élections ont lieu.

1. Donner un intervalle de confiance à 95% de la proportion de votants pour cet hommes politique dans la population.
2. Si de nouvelles élections avaient lieu, son score serait-il différent ? Répondre à la question en faisant un test statistique.

Exercice 6

En 2018, 45% des clients d'une agence de voyage sont partis pendant les vacances de Noël aux Antilles. Des professionnels du tourisme pensent qu'en 2019 cette destination attirera moins de touristes. L'agence décide alors d'effectuer un sondage auprès de ses clients : sur $n = 500$ personnes interrogées, 201 ont l'intention de choisir la destination des Antilles à Noël.

L'agence peut-elle conclure que la destination des Antilles à Noël sera significativement moins prisée en 2019 qu'en 2018 ?

Exercice 7

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un médicament dont la teneur, en un certain composant par unité de fabrication, est assurée avec un écart-type de 8 milligrammes. Le service de recherche a mis au point un nouveau procédé de fabrication qui sera adopté s'il assure une réduction substantielle de la dispersion. On a fait 10 mesures de teneur sur des unités fabriquées par la nouvelle méthode et obtenus les résultats suivants, exprimés en milligrammes :

$$725 \;\; 722 \;\; 727 \;\; 718 \;\; 723 \;\; 731 \;\; 719 \;\; 724 \;\; 726 \;\; 725.$$

On suppose que chaque mesure est une réalisation d'une variable aléatoire normale. Peut-on adopter la nouvelle méthode ?