IUT de Paris Rives de Seine - Département STID **Tests paramétriques**
2AFI
2021-2022

Feuille de TD 1 : Introduction aux tests statistiques

Exercice 1

Soit X la v.a "quantité de salmonelle dans un pot de glace". On suppose que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où μ est inconnue et $\sigma^2 = 0.08$.

1. On souhaite tester les hypothèses :

$$(H_0) \quad : \quad \mu = 0.3 \quad \text{contre} \quad (H_1) \quad : \quad \mu = 0.4,$$

au niveau $\alpha = 5\%$.
La **statistique de test** est définie par :

$$T_n = \frac{\bar{X}_n - 0.3}{\sigma/\sqrt{n}},$$

dont la loi sous (H_0) est connue :

$$T_n \sim_{H_0} \mathcal{N}(0,1).$$

La **règle de décision** est alors la suivante :
— si $T_n > c_\alpha$, on rejette (H_0),
— si $T_n \leq c_\alpha$, on ne rejette pas (H_0),
où c_α est le $1-\alpha$ quantile de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, défini par :

$$\mathbb{P}(Z \leq c_\alpha) = 1 - \alpha, \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Un tel c_α nous assure en effet que le risque de première espèce soit égal à α :

$$\mathbb{P}_{H_0}(T_n > c_\alpha) = \mathbb{P}_{H_0}(\text{rejetter } (H_0)) = \alpha.$$

Pour $\alpha = 5\%$, on lit sur la table de loi la valeur du $1 - \alpha = 0.95$ quantile c_α (16-ième ligne, 1ère colonne) : 1.645.
Avant de conclure, nous calculons la réalisation t_n de T_n sur l'échantillon :

$$t_n = \frac{\sum_{i=1}^{9} x_i - 0.3}{\sqrt{0.08}/\sqrt{9}} = 0.85.$$

Sur cet échantillon, $t_n \leq c_\alpha$, on ne rejette donc pas (H_0) au niveau 5%.

2. Nous refaisons maintenant le test au niveau 10%. Les hypothèses du test, la statistique de test et la règle de décision restent les mêmes. Seul le seuil critique c_α associé à la règle de décision est modifié. Pour $\alpha = 10\%$, il s'agit du $1 - \alpha = 0.90$ quantile de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, qui est égal à 1.282 (lu sur la table).

   Sur cet échantillon, à nouveau, $t_n \leq c_\alpha$, on ne rejette donc pas (H_0) au niveau 10%.
3. Au risque 2% on aurait pas rejeter H_0. Car comme on ne rejette pas à 10% cela veut dire que la probabilité de rejeter H_0 à tort est supérieur à 10% donc elle est également supérieur à 2%.
4. La puissance du test est définie par :

   $$\pi = \mathbb{P}_{H_1}(\text{rejetter } (H_0)) = \mathbb{P}_{H_1}(T_n > c_\alpha),$$

   où c_α est le seuil critique associé à la règle de décision du test au niveau α. On ne connaît pas la loi de T_n sous (H_1) mais :

   $$\frac{\bar{X}_n - 0.4}{\sigma/\sqrt{n}} \sim_{H_1} \mathcal{N}(0, 1).$$

   Or,

   $$\begin{aligned}
   \pi = \mathbb{P}_{H_1}(T_n > c_\alpha) &= \mathbb{P}_{H_1}\left(\frac{\bar{X}_n - 0.3}{\sigma/\sqrt{n}} > c_\alpha\right) \\
   &= \mathbb{P}_{H_1}\left(\bar{X}_n > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} c_\alpha + 0.3\right) \\
   &= \mathbb{P}_{H_1}\left(\frac{\bar{X}_n - 0.4}{\sigma/\sqrt{n}} > c_\alpha + \frac{0.3 - 0.4}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
   &= 1 - \mathbb{P}_{H_1}\left(\frac{\bar{X}_n - 0.4}{\sigma/\sqrt{n}} \leq c_\alpha + \frac{0.3 - 0.4}{\sigma/\sqrt{n}}\right).
   \end{aligned}$$

   Si on calcule le membre de droite de l'inégalité, on trouve :

   $$c_\alpha + \frac{0.3 - 0.4}{\sigma/\sqrt{n}} = 1.645 + \frac{-0.1}{\sqrt{0.08}/\sqrt{9}} = 0.58,$$

   dans le cas où $\alpha = 5\%$. La valeur de la probabilité $\mathbb{P}(Z \leq 0.58)$ pour $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ est lue sur la table de loi (2ième page), elle vaut : 0.719. Ici,

   $$\frac{\bar{X}_n - 0.4}{\sigma/\sqrt{n}} \sim_{H_1} \mathcal{N}(0, 1).$$

   On en déduit donc :

   $$\pi = 1 - 0.719 = 0.281.$$

   La puissance du test au niveau 5% est donc de 28.1%.

On peut faire le même calcul pour $\alpha = 10\%$, on a alors $c_\alpha = 1.282$ et :

$$c_\alpha + \frac{0.3 - 0.4}{\sigma/\sqrt{n}} = 1.282 + \frac{-0.1}{\sqrt{0.08}/\sqrt{9}} = 0.22.$$

La valeur de la probabilité $\mathbb{P}(Z \leq 0.22)$ pour $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ est lue sur la table de loi (2ième page), elle vaut : 0.5871. La puissance du test au niveau 10% est donc de 41.29%.

5. On voudrait trouver n tel que la puissance du test soit de 95%. Si on reprend les calculs précédents, on veut donc que :

$$\pi = 1 - \mathbb{P}_{H_1}\left(\frac{\bar{X}_n - 0.4}{\sigma/\sqrt{n}} \leq c_\alpha + \frac{0.3 - 0.4}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0.95,$$

soit

$$\mathbb{P}_{H_1}\left(\frac{\bar{X}_n - 0.4}{\sigma/\sqrt{n}} \leq c_\alpha + \frac{0.3 - 0.4}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0.05.$$

On rappelle que :

$$\frac{\bar{X}_n - 0.4}{\sigma/\sqrt{n}} \sim_{H_1} \mathcal{N}(0,1).$$

Pour que la puissance soit de 95%, il suffit donc que $c_\alpha + \frac{0.3-0.4}{\sigma/\sqrt{n}}$ soit le 0.05-quantile d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$, c'est-à-dire qu'il vaille -1.645 (1ère page de la table de loi). Pour un test de niveau $\alpha = 5\%$, $c_\alpha = 1.645$ (voir question 1), il suffit donc que :

$$1.645 + \frac{0.3 - 0.4}{\sigma/\sqrt{n}} = -1.645.$$

On en déduit la valeur de n :

$$n = \left((-1.645 - 1.645) \times \frac{\sqrt{0.08}}{-0.1}\right)^2 = 86.6$$

Il faut donc au minimum $n = 87$ pour obtenir une puissance de 95% du test au niveau $\alpha = 5\%$.

On peut reprendre les calculs pour trouver une puissance de 99% :

$$\pi = 1 - \mathbb{P}_{H_1}\left(\frac{\bar{X}_n - 0.4}{\sigma/\sqrt{n}} \leq c_\alpha + \frac{0.3 - 0.4}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0.99,$$

donc $c_\alpha + \frac{0.3-0.4}{\sigma/\sqrt{n}}$ est cette fois le 0.01-quantile d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$ et vaut -2.326. Le niveau du test étant toujours égal à $\alpha = 5\%$, la valeur de c_α n'a pas changé (1.645). On en déduit :

$$n = \left((-2.326 - 1.645) \times \frac{\sqrt{0.08}}{-0.1}\right)^2 = 126.2.$$

Pour $n = 127$, la puissance du test au niveau 5% sera de 99% ;

Pour un test de niveau 10%, pour lequel $c_\alpha = 1.282$, il faut reprendre les calculs et on trouve :

$$n = \left((-1.645 - 1.282) \times \frac{\sqrt{0.08}}{-0.1} \right)^2 = 68.5,$$

qui assure une puissance de 95%, et :

$$n = \left((-2.326 - 1.282) \times \frac{\sqrt{0.08}}{-0.1} \right)^2 = 104.1,$$

qui assure une puissance de 99%.

Exercice 2

Soit X la v.a. “longueur des tiges métalliques”. On suppose que $X \sim (\mu, \sigma^2)$, où μ est inconnue et $\sigma^2 = 0.6^2$.

1. On souhaite tester les hypothèses :

$$(H_0) \quad : \quad \mu = 8.3 \quad \text{contre} \quad (H_1) \quad : \quad \mu = 8.9,$$

au niveau $\alpha = 5\%$.

La **statistique de test** est définie par :

$$T_n = \frac{\bar{X}_n - 8.3}{\sigma/\sqrt{n}},$$

dont la loi sous (H_0) est connue :

$$T_n \sim_{H_0} \mathcal{N}(0, 1).$$

La **règle de décision** est alors la suivante :
— si $T_n > c_\alpha$, on rejette (H_0),
— si $T_n \leq c_\alpha$, on ne rejette pas (H_0),
où c_α est le $1 - \alpha$ quantile de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, défini par :

$$\mathbb{P}(Z \leq c_\alpha) = 1 - \alpha, \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Un tel c_α nous assure en effet que le risque de première espèce soit égal à α :

$$\mathbb{P}_{H_0}(T_n > c_\alpha) = \mathbb{P}_{H_0}(\text{rejetter } (H_0)) = \alpha.$$

Pour $\alpha = 5\%$, on lit sur la table de loi la valeur du $1 - \alpha = 0.95$ quantile c_α (16-ième ligne, 1ère colonne) : 1.645.

Avant de conclure, nous calculons la réalisation t_n de T_n sur l'échantillon en utilisant les informations de l'énoncé :

$$t_n = \frac{8.57 - 8.3}{0.6/\sqrt{100}} = 4.5.$$

Sur cet échantillon, $t_n > c_\alpha$, on rejette donc (H_0) au niveau 5%. On dit que le test est significatif au niveau 5%. Le risque que l'on prend en déclarant que les tiges ne respectent pas les 8.30 cm déclarés est donc ainsi de 0.05.

On peut refaire le même test au niveau 1%. Pour cela, rien ne change sauf le seuil critique c_α, qui est alors le $1-\alpha = 0.99$ quantile d'une $\mathcal{N}(0,1)$ et vaut maintenant 2.326. Encore une fois, $t_n > c_\alpha$: on rejette donc (H_0) au niveau 5%.

2. On suppose maintenant que l'on a obtenu les mêmes observations mais avec uniquement $n = 25$. Le calcul de la réalisation t_n de T_n sur l'échantillon devient :
$$t_n = \frac{8.57 - 8.3}{0.6/\sqrt{25}} = 2.25.$$
Au niveau de test $\alpha = 5\%$, $t_n > c_\alpha = 1.645$, on rejette donc (H_0). Par contre, au niveau de test $\alpha = 1\%$, $t_n \le c_\alpha = 2.326$, on ne rejette donc pas (H_0).

3. La puissance du test est définie par :
$$\pi = \mathbb{P}_{H_1}(\text{rejetter } (H_0)) = \mathbb{P}_{H_1}(T_n > c_\alpha),$$
où $c_\alpha = 1.645$ est le seuil critique associé à la règle de décision du test au niveau $\alpha = 5\%$.

On ne connaît pas la loi de T_n sous (H_0) mais :
$$\frac{\bar{X}_n - 8.9}{\sigma/\sqrt{n}} \sim_{H_1} \mathcal{N}(0,1).$$
Or,
$$\begin{aligned}
\pi = \mathbb{P}_{H_1}(T_n > c_\alpha) &= \mathbb{P}_{H_1}\left(\frac{\bar{X}_n - 8.3}{\sigma/\sqrt{n}} > c_\alpha\right) \\
&= \mathbb{P}_{H_1}\left(\bar{X}_n > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} c_\alpha + 8.3\right) \\
&= \mathbb{P}_{H_1}\left(\frac{\bar{X}_n - 8.9}{\sigma/\sqrt{n}} > c_\alpha + \frac{8.3 - 8.9}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}_{H_1}\left(\frac{\bar{X}_n - 8.9}{\sigma/\sqrt{n}} \le c_\alpha + \frac{8.3 - 8.9}{\sigma/\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$
Si on calcule le membre de droite de l'inégalité, on trouve :
$$c_\alpha + \frac{8.3 - 8.9}{\sigma/\sqrt{n}} = 1.645 + \frac{-0.6}{0.6/\sqrt{25}} = -3.6,$$
dans le cas où $\alpha = 5\%$. La valeur de la probabilité $\mathbb{P}(Z \le -3.6)$ pour $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ ne peut pas être lue sur la table de loi (aucune valeur négative). Heureusement, la $\mathcal{N}(0,1)$ est une loi symétrique, on a donc :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z \le -3.6) &= \mathbb{P}(Z \ge 3.6) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Z < 3.6) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Z \le 3.6) \\
&= 1 - 0.99889 = 0.00111.
\end{aligned}$$

Ici,
$$\frac{\bar{X}_n - 8.9}{\sigma/\sqrt{n}} \sim_{H_1} \mathcal{N}(0,1).$$
On en déduit donc :
$$\pi = 1 - 0.00111 = 0.99889.$$
La puissance du test au niveau 5% est donc de 99.89%, ce qui est très bien !

4. Si il y a seulement n qui change plus n est grand plus la puissance l'est. Donc la puissance est supérieure pour $n = 100$.