Zusammenfassung Synthese von kanonischen Reaktanzeintoren

Alex Murray

Sei eine Übertragungsfunktion eines LC-Filters bekannt, sollen die L- und C-Elemente numerisch berechnet werden. Diese “synthetisierung” erfolgt durch bestimmung der Leerlaufeingangsreaktanz und/oder die Kurzschlusseingangsreaktanz des Netzwerkes aus der Übergangsfunktion.

Mit diesen sogenannten Reaktanzfunktionen werden anschliessend die Netzwerkelemente berechnet. Bei der Verwendung von sogenannten Tabellenfiltern sind alle diese Schritte vorher schon durchgeführt worden (offline) und die normierten Werte der Elemente findet man in “Tabellen” (früher verwendete man Papier, heute sind sie elektronisch abgelegt). Damit spielen Reaktanzeintore (RET) und Reaktanzfunktionen eine wichtige Rolle in der Netzwerktheorie und in der Synthese von LC-Filtern.

Zu einer LC-Impedanz- oder Admittanzfunktion mit der höchsten Potenz n gehören Schaltungen mit *mindestens* n Elementen. Das heisst dass Schaltungen auch mit mehr Elementen dieselbe Reaktanzfunktion haben können. Solche Schaltungen sind als RET bekannt (Reaktanzeintore). Liegen nur n Elemente vor, so ist die Schaltung als MRET (Minimum-Reaktanzeintor) bekannt. Eine interessante Eigenschaft von MRETs ist, dass die Zahl der Induktivitäten gegenüber der Kapazitäten höchstens um 1 verschieden sein kann. Ist dies nicht der Fall, dann ist die Schaltung ein RET und kein MRET. Jede RET kann zu einer MRET reduziert werden. Dabei geht man wie folgt vor:

- Man sucht bei *offenen* Klemmen alle Kreise, die nur Kapazitäten oder nur Induktivitäten enthalten (C-Kreise und L-Kreise).
- Man reduziert das Netzwerk, indem sukzessiv Elemente in den L- und C-Kreisen weggelassen werden. Dabei dürfen beim weglassen keine anderen Zweige stromlos werden.
- Nun schliesst man die Klemmen kurz und sucht nach C- oder L-Trennbündel. Existieren solche, so schliesst man Elemente kurz, bis keine C- oder L-Trennbügel mehr existieren. Dabei dürfen keine anderen Elemente kurzgeschlossen werden.

Besitzt das Netzwerk keine Kreise und Trennbündel mehr, die aus nur L oder C bestehen, so ist es minimal in seiner Anzahl von Elementen.

Reaktanzeintore lassen sich in vier Typen einteilen (L-Typ, C-Typ, P-Typ und S-Typ) und jeder dieser Typen lässt sich mit vier sog. kanonischen Schaltungen realisieren. L-Typen sind bei $\omega = 0$ ein Kurzschluss und bei $\omega \to \infty$ ein Unterbruch. C-Typen sind bei $\omega = 0$ ein Unterbruch und bei $\omega \to \infty$ ein Kurzschluss. P-Typen sind bei $\omega = 0, \infty$ ein Kurzschluss und S-Typen sind bei $\omega = 0, \infty$ ein Unterbruch. Die zugehörigen Reaktanzfunktionen sind rational gebrochene Funktionen in s mit ganz bestimmten Eigenschaften. Zum Auffinden der kanonischen Schaltungen und zur Berechnung der Elemente benötigt man Methoden/Verfahren wie die Partialbruchzerlegung und die Kettenbruchzerlegung. Bei diesen numerischen Verfahren ist die Genauigkeit (signifikante Stellen) sehr wichtig und stellt ein zentrales Thema dar. Vor allem ist die “robuste und genaue” Nullstellensuche von Polynomen (root finding) eine sehr grosse Herausforderung. In verschiedenen Tools wie Matlab, Maple, usw. stehen zum Teil Befehle zur Verfügung, welche eine Partial- oder Kettenbruchzerlegung durchführen.

Die Erste kanonische Schaltung besteht aus einer Kette von LC-Gliedern in Serie geschaltet. Je nach Typ (L, C, P oder S) ist zusätzlich auch noch ein C oder L in Serie mit der Kette geschaltet (bei P oder S eben nicht). Um die einzelnen LC Elemente zu berechnen wird die Impedanzfunktion partialbruchzerlegt. Dies gibt uns die Polstellen der einzelnen LC-Glieder. Die Nullstellen können berechnet werden, indem das Netzwerk in sein “Duales Gegenstück” transformiert wird. Das erfordert nichts anderes als die Zähler und Nenner zu tauschen. Die Partialbruchzerlegung dieser Admittanzfunktion ergibt die Nullstellen. Aus diesen Resultaten schliesst man auf die einzelen L’s und C’s.

Die zweite Art von kanonische Schaltung besteht aus mehreren in abwechslungsweise serie- und parallelgeschalteten L's und C's. Die Impedanzfunktion bzw. die Admittanzfunktion des dualen Gegenstücks wird diesmal Kettenbruchzerlegt, um die Pol und Nullstellen zu bestimmen.

Es wurden 5 verschiedene Impedanzfunktionen in der Aufgabe gegeben. Für jede Impedanzfunktion sollen die 4 kanonischen Schaltungen berechnet werden. Dies wurde in MATLAB implementiert und mit dem P2 Java-Tool verglichen. MATLAB kann mittels *residue()* eine Partialbruchzerlegung berechnen. Leider kann MATLAB aber kein Kettenbruch berechnen. Jedoch habe ich online eine Implementation gefunden.

Bei der ersten Aufgabe ergibt eine Kettenbruchzerlegung der Impedanzfunktion nur ganze Zahlen ($C_\infty = 5, L_1 = 4, C_1 = 3, L_2 = 2, C_2 = 1$).

Bei der zweiten Aufgabe ergibt die Partialbruchzerlegung der Admittanzfunktion nur ganze Zahlen ($L_1 = 6, C_1 = 5, L_2 = 4, C_2 = 3, L_3 = 2, C_3 = 1$).

Bei der dritten Aufgabe ergibt die Partialbruchzerlegung der Impedanzfunktion nur ganze Zahlen ($L_\infty = 4, C_1 = 4, L_1 = 3, C_2 = 3, L_2 = 2, C_3 = 2, L_3 = 1, C_4 = 1$).

Bei der vierten Aufgabe ergibt die Kettenbruchzerlegung der Impedanzfunktion nur ganze Zahlen ($C_\infty = 1, C_1 = 2, L_1 = 1, C_2 = 3, L_2 = 2, C_3 = 4, L_3 = 4$).

Bei der fünften Aufgabe ergibt die Kettenbruchzerlegung der Impedanzfunktion gute Zahlen ($L_\infty = 1e-5, C_1 = 2.5e-10, L_1 = 2e-5, C_2 = 1e-10, L_2 = 3e-5, C_3 = 5e-11$).

Die Polstellen und Nullstellen in der fünften Aufgabe sind recht extrem gewählt. MATLAB hatte bei der Partialbruchzerlegung ein bisschen Mühe, bzw. er hat zwei Polstellen und Zwei Nullstellen auf den gleichen Ort platziert, obwohl sie eigentlich nicht gleich sein sollten. Die Kettenbruchzerlegung hingegen hat gut funktioniert.

In diesem Versuch habe ich zum ersten mal die Kettenbruchzerlegung im "echten Welt" einsetzen können. Ich dachte bisher, dass es nicht wirklich Anwendungen hatte. Es ist immer interessant, wenn die Limitationen des verwendeten Rechentools überschritten werden (hier: Bei der fünften Aufgabe). Ich denke dabei immer wieder nach, wie viele Stunden verschwendet werden könnten wenn so etwas nicht gleich auffällt.