

Laborheft

Versuchsleiter: Alex Murray
Assistentin: Yohannes Measho

Datum Durchführ ung	Versuch	Datum Abgabe	Note
30.09	Computerversuch (C)	14.10	
14.10	Lichtgeschwindigkeit (O2)	28.10	
28.10	Schallgeschwindig-keit in Gasen (W8)	11.11	
11.11	MTM Tensor (M6)	02.12	
02.12	Kraft auf einen Permanentmagnet (E4.3)	16.12	

FORMELSAMMLUNG

Alex Murray

4. November 2015

1 Fehler

1.1 Fehlertypen

Es ist zwischen den folgenden Fehlertypen zu unterscheiden.

Systematische Fehler sind kontrollierte Fehler bzw. systematische Unsicherheiten. Sie sind von der Umgebung oder vom Messvorgang selbst verursacht und verursachen entweder eine systematische Abweichung des Messergebnisses vom “wahren Wert” oder lediglich eine Unsicherheit der Messgrösse. Beispiele sind Massstäbe (messen nur bei einer bestimmten Temperatur richtig), Fehler von Messinstrumenten, Eichunsicherheiten oder Eichfehler von Messinstrumenten, oder verborgene, äussere Einflüsse auf das Experiment.

Zufällige Fehler sind unkontrollierte Fehler die sich bei jeder Messung ändern. Sie verursachen, dass die Messwerte bei mehrmaliger Messung statistisch um den “wahren Wert” schwanken. Beispiele sind Rauschen, Streuung, Genauigkeit der Sinnesorgane des Beobachters, Gebäudeschütterungen, Luftströme usw.

1.2 Genauigkeit

Die Anzahl der Ziffer muss übereinstimmen, z.B. $T = (14.38 \pm 0.15)$ oder $T = (100 \pm 2)$ und *nicht* $T = (14.36 \pm 2)$.

Zufällige Fehler werden mit s gekennzeichnet, Unsicherheiten und Abschätzungen werden mit Δ gekennzeichnet.

Beispiele:

- $\bar{T} = 15.6\text{s}$ (mittelwert)
- $s_T = 0.5\text{s}$ (absoluter Fehler)
- $r_T = \frac{s_T}{\bar{T}} = \%$ (relativer Fehler)

Relative Fehler können mit %, ‰, oder ppm angegeben werden.

2 Fehlerrechnung

2.1 Unter gleichen Bedingungen wiederholt gemessene Grössen

Arithmetischer Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1)$$

Standardabweichung

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} \quad (2)$$

Fehler des Mittelwertes

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}} \quad (3)$$

2.2 Mittelwertbildung mit Gewichten

Durch verschiedene Messmethoden bestimmte Messgrößen

$$\begin{aligned}x_1 &= \bar{x}_1 \pm s_{\bar{x}_1} \\x_2 &= \bar{x}_2 \pm s_{\bar{x}_2} \\&\dots \\x_n &= \bar{x}_n \pm s_{\bar{x}_n}\end{aligned}$$

kann \bar{x} und $s_{\bar{x}}$ folgendermassen bestimmt werden.

Den wahrscheinlichsten Wert von \bar{x}

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N g_{\bar{x}_i} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^N g_{\bar{x}_i}} \quad \text{mit} \quad g_{\bar{x}_i} = \frac{1}{s_{\bar{x}_i}^2} \quad (4)$$

Fehler des gewogenen Mittels

$$s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N g_{\bar{x}_i}}} \quad (5)$$

3 Fehlerfortpflanzung

3.1 Gesetz von Gauss

In der Mehrzahl der Fälle liefern physikalische Versuche nicht unmittelbar das gesuchte Messergebnis, sondern die Resultatgrösse R ist eine Funktion von mehreren Größen $R(x, y, z, \dots)$ wobei

$$\begin{aligned}x &= \bar{x} \pm s_{\bar{x}} \\y &= \bar{y} \pm s_{\bar{y}} \\z &= \bar{z} \pm s_{\bar{z}}\end{aligned}$$

Den Mittelwert \bar{R} erhält man, indem man einfach die Mittelwerte der verschiedenen Messgrößen in der Funktion R einsetzt.

$$\bar{R} = R(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots) \quad (6)$$

Der mittlere, absolute Fehler $S_{\bar{R}}$ ergibt sich aus dem *Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz*:

$$S_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial R}{\partial x}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{x}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial y}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{y}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial z}\right|_{\bar{R}} \cdot s_{\bar{z}}\right)^2 + \dots} \quad (7)$$

3.2 Häufige Fälle

3.2.1 Addition und Subtraktion

Sie $R = x + y$ oder $R = x - y$ so ergibt sich wegen $\frac{\partial R}{\partial x} = 1$ und $\frac{\partial R}{\partial y} = 1$ nach Einsetzen ins Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$s_{\bar{R}} = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + s_{\bar{y}}^2} \quad (8)$$

3.2.2 Multiplikation und Division

Sei $R = x \cdot y$ oder $R = \frac{x}{y}$ so ergeben die partiellen Ableitungen $\frac{\partial R}{\partial x} = y$ resp. $\frac{\partial R}{\partial y} = x$.

nach Einsetzen ins Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$s_{\bar{R}} = \sqrt{(y \cdot s_{\bar{x}})^2 + (x \cdot s_{\bar{y}})^2} \quad \text{resp.} \quad s_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\frac{1}{y} \cdot s_{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{x}{y^2} \cdot s_{\bar{y}}\right)^2} \quad (9)$$

Für den relativen Fehler von R gilt bei beiden Operationen

$$r_R = \frac{s_{\bar{R}}}{R} = \sqrt{\left(\frac{s_{\bar{x}}}{x}\right)^2 + \left(\frac{s_{\bar{y}}}{y}\right)^2} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \quad (10)$$

3.2.3 Potenzen

Es sei die gemessene Grösse $R = x^n$, so ergibt die partielle Ableitung $s_R = n \cdot x^{n-1} \cdot s_x = n \frac{s_x}{x} x^n$ und es folgt für den relativen Fehler

$$r_R = \frac{s_R}{R} = n \cdot r_x \quad (11)$$

Dies bedeutet dass z.B. beim Wurzelziehen der relative Fehler kleiner wird, beim Quadrieren wird er verdoppelt. Will man z.B. die Boltzmannkonstante σ aus der spezifischen Emission und der Temperatur eines Hohlraumstrahlers bestimmen ($M_s = \sigma T^4$), so bewirkt ein relativer Fehler von 5% in der Temperaturmessung einen Fehler von 20% in σ !

4 Histogramm

Ein Histogramm verleiht einen Überblick über die Streuung der N Messwerte x_i um den arithmetischen Mittelwert.

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{wobei} \quad \begin{array}{ll} x_0: & \text{Erwartungswert} \\ \sigma: & \text{Standardabweichung für } N \rightarrow \infty \end{array} \quad (12)$$

5 Regression

Für eine gegebene Gesetzmässigkeit $f(x, a_0, a_1, \dots)$ werden hierzu Messwertpaare (x_i, y_i) gemessen und die Parameter (a_0, a_1, \dots) so angepasst, bis die Summe der quadratischen Abweichungen minimal werden.

$$\chi^2(a_1, a_2, \dots) = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - f(x_i, a_1, a_2, \dots))^2}{\sigma_i^2} \rightarrow \min \quad (13)$$

Wobei σ_i die Standardabweichung der Einzelmessungen ist. In vielen praktischen Fällen ist σ_i **konstant – aber unbekannt**. In diesen Fällen kann sie mit folgender Formel nach der Regression berechnet werden.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i, a_1, a_2, \dots))^2}{N - m}} \quad (14)$$

5.1 Linear Regression

Es sei die lineare Funktion $\bar{y} = b\bar{x} + a$ für die Messpaare (x_i, y_i) gesucht.

$$\sum_{i=1}^N (y_i - (a + bx_i))^2 \rightarrow \min \quad (15)$$

b lässt sich mit der folgenden Formel errechnen:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (16)$$

a kann danach direkt durch Auflösen der Funktion $\bar{y} = b\bar{x} + a$ berechnet werden, oder sonst über die erste Ableitung der Formel 15 berechnet werden:

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2} \quad (17)$$

COMPUTERVERSUCH

Alex Murray

October 13, 2015

1 Schallgeschwindigkeit

1.1 Arbeitsgrundlagen

Die Schallgeschwindigkeit c kann mit

$$c = \frac{s}{t} \quad (1)$$

berechnet werden, wobei s die Messstrecke ist und t die Laufzeit.

1.2 Durchführung

Versuchsanordnung

Zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit wurde die Laufzeit eines Schallpulses über eine Strecke der Länge $s = (2.561 \pm 0.003)m$ mehrfach gemessen (die geschätzte Unsicherheit der Strecke $\pm 3mm$ kommt daher, dass die genaue Lage der Mikrophon-Membran nicht festgestellt werden konnte). Die Temperatur im Experimentierraum betrug $\vartheta = 23^\circ C$.

Messergebnisse

Die gemessene Größen sind in der Tabelle 1 ersichtlich.

Table 1: Gemessene Größen

Messung	Laufzeit t_i	Messung	Laufzeit t_i
1	6.83	11	7.36
2	7.41	12	7.31
3	7.32	13	7.56
4	7.31	14	7.14
5	7.23	15	6.94
6	7.68	16	7.32
7	7.33	17	7.34
8	7.7	18	7.28
9	7.93	19	7.01
10	7.54	20	7.76

Hinweis: Daten wurden vom Auftragsdokument kopiert.

Es soll die mittlere Laufzeit \bar{t} sowie die Schallgeschwindigkeit c (mitsamt Fehler) ermittelt werden.

Mittlere Laufzeit

Die mittlere Laufzeit wird berechnet mit

$$\bar{t} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} t_i = \frac{7.36 + 7.31 + 7.56 + 7.14 + 6.94 + \dots}{20} = 7.37ms \quad (2)$$

Die Standardabweichung wird berechnet mit

$$s_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20} (t_i - \bar{t})^2}{20 - 1}} = 0.28 \quad (3)$$

und der Fehler mit

$$s_{\bar{t}} = \frac{s_t}{\sqrt{20}} = 0.06 \quad (4)$$

Somit ergibt sich die mittlere Laufzeit mit Unsicherheit als $\underline{\underline{t = (7.37 \pm 0.06) \text{ ms.}}}$

Schallgeschwindigkeit

Die Schallgeschwindigkeit wird mit $c = \frac{s}{t}$ berechnet. Wir wissen dass $s = \bar{s} + s_{\bar{s}} = (2.561 \pm 0.003) \text{ m}$ und $t = \bar{t} + s_{\bar{t}} = (7.37 \pm 0.06) \text{ ms}$.

Da die Schallgeschwindigkeit eine Funktion von mehreren Messgrößen ist, muss mit Hilfe der Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes der Fehler berechnet werden. Dazu wird die Formel $c = \frac{s}{t}$ partiell abgeleitet nach s und t

$$\frac{\partial c}{\partial s} = \frac{1}{t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{-s}{t^2} \quad (5)$$

und in die Formel des Fehlerfortpflanzungsgesetzes eingesetzt

$$s_{\bar{c}} = \sqrt{\left(\frac{1}{t} \cdot s_{\bar{s}}\right)^2 + \left(\frac{-s}{t^2} \cdot s_{\bar{t}}\right)^2} = 2.86 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (6)$$

Die mittlere Schallgeschwindigkeit berechnet sich mit

$$\bar{c} = \frac{\bar{s}}{\bar{t}} = 347.73 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (7)$$

Somit ergibt sich die Schallgeschwindigkeit $\underline{\underline{c = (347.7 \pm 2.9) \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$

QtiPlot

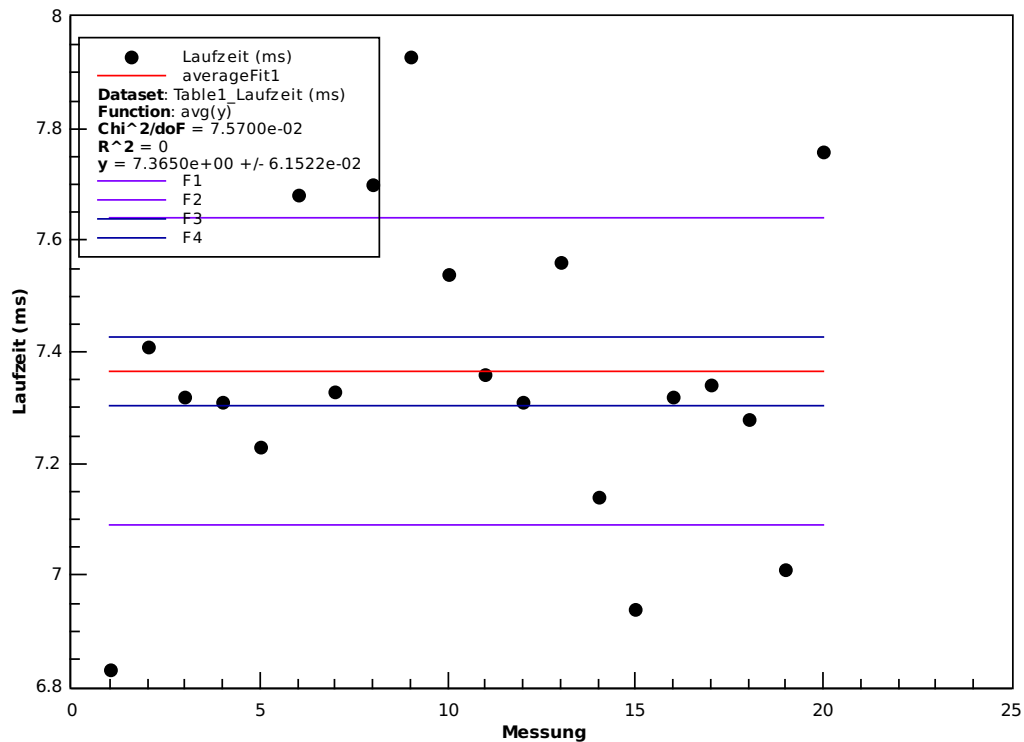


Figure 1: Visualisierung der Standardabweichung und Fehler

1.3 Resultate und Diskussion

Das Endresultat von $(347.7 \pm 2.9) \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist ein wenig höher als der Literaturwert¹ von $344 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Wahrscheinlich liegt diese Abweichung daran, dass der Literaturwert bei $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ auf Meereshöhe gemessen wurde anstatt bei $\vartheta = 23^\circ\text{C}$ (und höchstwahrscheinlich auch auf einer anderen Höhe). Die Schallgeschwindigkeit nimmt ab bei höherem Druck und tieferer Temperatur ab.

In der Figur 1 sind die Einzelnen messwerte in einer XY-Scatter-Plot dargestellt. Die Standardabweichung (Violett) sollte die Stelle markieren, wo statistisch 67% aller Messwerte fallen werden. Wenn man nachzählt, wie viele Punkte innerhalb und ausserhalb des Bandes liegen – 13 innerhalb und 8 ausserhalb – so kommt man grob auf $\frac{8}{13} \simeq 67\%$.

¹Horst Kuchling, *Taschenbuch der Physik* (2015) 642.

2 Eisengehalt

2.1 Arbeitsgrundlagen

(Siehe Formelsammlung)

2.2 Durchführung

Versuchsanordnung

Der Eisengehalt in einer Legierung wurde mit verschiedene Messmethoden bestimmt.

Messergebnisse

Table 2: Gemessene Grössen

Messung	Eisengehalt (%)	Absoluter Fehler (%)
1	20.3	1.2
2	21.9	1.3
3	21.1	1.1
4	19.6	0.8
5	19.9	1.3
6	18.0	1.3
7	19.4	1.0
8	22.2	2.0
9	21.6	0.8

Hinweis: Daten wurde vom Auftragsdokument kopiert.

Es soll der einfache sowohl auch der gewichtete Mittelwert berechnet werden. Weiterhin soll auch der einfache und gewichtete Fehler berechnet werden.

Mittelwert

Der einfache Mittelwert berechnet sich mit der Formel

$$\bar{x}_{\text{einfach}} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i = \underline{\underline{20.4\%}} \quad (8)$$

wobei x_i das Eisengehalt in Prozent ist.

Der gewichtete Mittelwert lässt sich mit der Formel

$$\bar{x}_{\text{gewichtet}} = \frac{\sum_{i=1}^9 g_{\bar{x}_i} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^9 g_{\bar{x}_i}} = \underline{\underline{20.4\%}} \quad (9)$$

berechnen, wobei

$$g_{\bar{x}_i} = \frac{1}{s_{\bar{x}_i}^2} \quad (10)$$

und x_i der Eisengehalt in Prozent ist und $g_{\bar{x}_i}$ der absoluter Fehler in Prozent ist.

Fehler

Der einfache Fehler berechnet sich mit der Formel

$$s_{\bar{x}_{einfach}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^9 (x_i - s_{\bar{x}})^2}{9 \cdot (9 - 1)}} = \underline{\underline{0.5\%}} \quad (11)$$

wobei x_i der Eisengehalt in Prozent ist und $s_{\bar{x}}$ der *einfache* Mittelwert ist.

Der gewichtete Fehler berechnet sich mit der Formel

$$s_{\bar{x}_{gewichtet}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^9 g_{\bar{x}_i}}} = \underline{\underline{0.4\%}} \quad (12)$$

wobei $g_{\bar{x}_i}$ wieder mit der Formel 10 berechnet wird.

QtiPlot

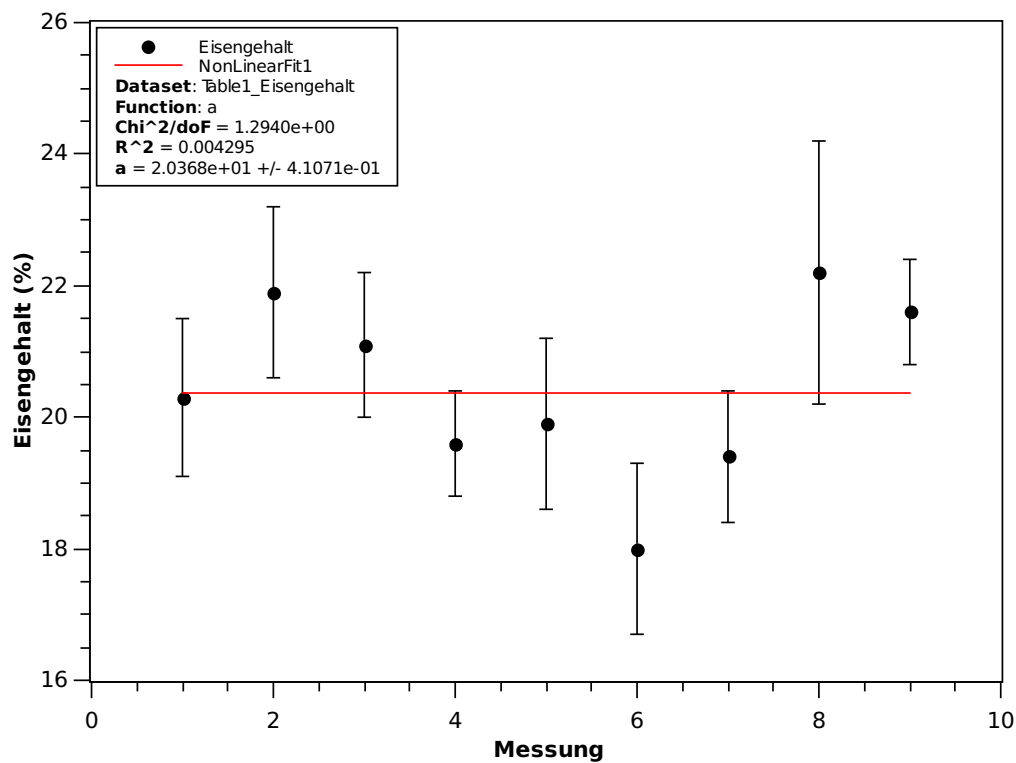


Figure 2: XY-Scatter der gemessenen Eisengehalte mit Fehler

2.3 Resultate und Diskussion

Von QtiPlot in der Figur 2 kann der berechnete Wert von $a = (20.4 \pm 0.4)\%$ ausgelesen werden. Dieser Wert vergleicht sich ganz gut mit den Resultaten der Formeln 9 und 12 von $(20.4 \pm 0.4)\%$.

3 Federkonstante

3.1 Arbeitsgrundlagen

Eine Stahlfeder kann mit der Formel

$$F = F_0 + kz \quad (13)$$

beschrieben werden, wobei k die Federkonstante ist, z die Auslenkung in meter ist, F_0 die Vorspannung ist, und F die benötigte Kraft ist.

3.2 Durchführung

Versuchsanordnung

Die Kraft und die Distanz einer Stahlfeder wurde bei verschiedenen Auslenkungen gemessen.

Messergebnisse

Table 3: Gemessene Grössen

$F(N)$	$z(m)$
3.83	0.20
7.89	0.35
8.08	0.42
9.80	0.46
10.58	0.51
12.33	0.54
12.23	0.59
14.43	0.67
15.51	0.81
17.09	0.80

Hinweis: Daten wurden vom Auftragsdokument kopiert.

Die Federkonstante k und die Vorspannkraft F_0 soll durch lineare Regression ermittelt werden.

Berechnung mit dem Taschenrechner

Es werden zwei unbekannte Grössen k und F_0 in der linearen Funktion $\bar{F} = \bar{z}k + F_0$ für die Messpaare (F_i, z_i) gesucht. k lässt sich mit der Formel

$$k = \frac{\sum_{i=1}^N (z_i - \bar{z})(F_i - \bar{F})}{\sum_{i=1}^N (z_i - \bar{z})^2} = \underline{\underline{22.28 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} \quad (14)$$

berechnen, wobei F_i und z_i die Messpaare von der Tabelle 3 sind, $N = 10$, und \bar{F} und \bar{z} die Mittelwerte aller Werte F_i und z_i sind. Die Mittelwerte von F_i und z_i können mit der Formel der Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (15)$$

berechnet werden.

Durch Umformen der linearen Funktion in der Formel 13 kann nun auch F_0 berechnet werden.

$$F_0 = \bar{F} - k\bar{z} = \underline{\underline{-0.54\text{N}}} \quad (16)$$

QtiPlot

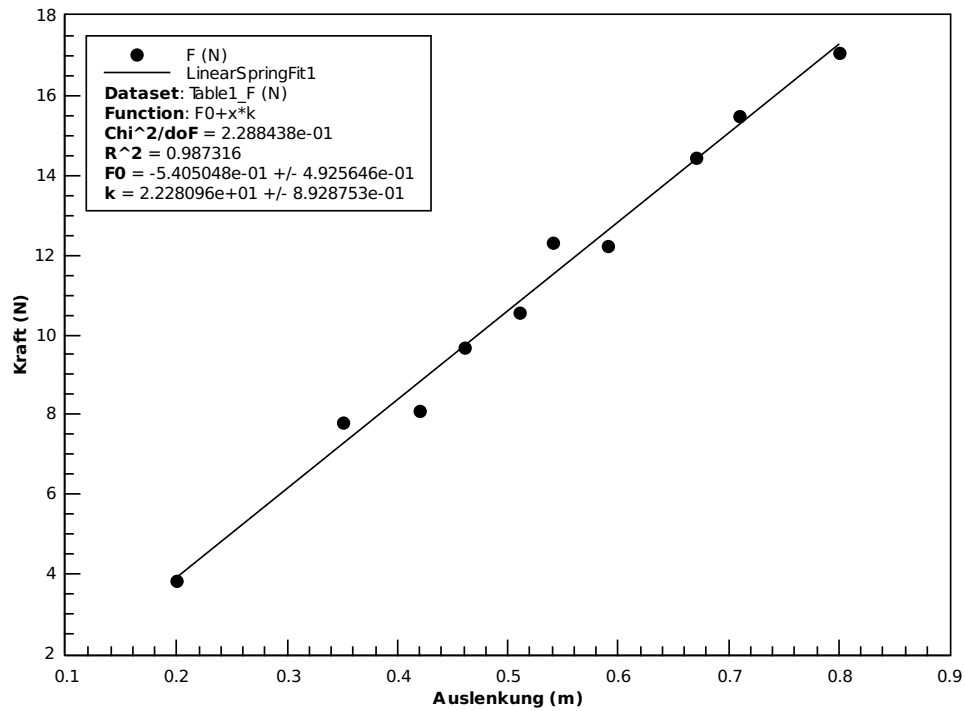


Figure 3: Lineare Regression zur Bestimmung von k und F_0

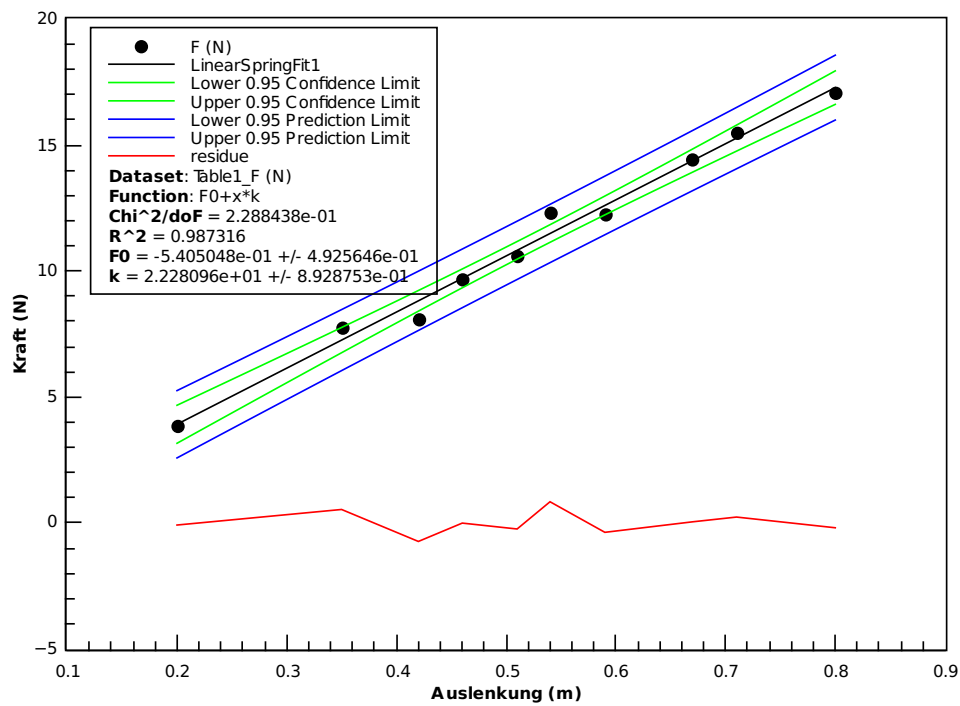


Figure 4: 95% Confidence- und Prediction-bands sowie Residuals

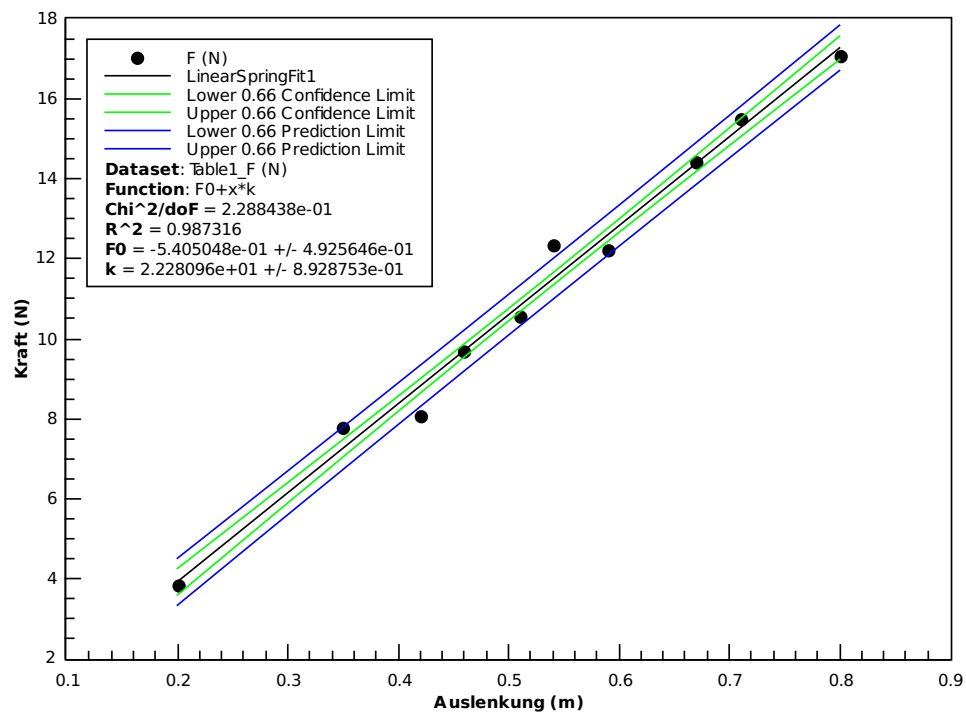


Figure 5: 66% Confidence- und Prediction-bands sowie Residuals

3.3 Resultate und Diskussion

Die mit dem Taschenrechner erhaltenen Werte stimmen mit den Werten von QtiPlot überein.

Ein Fehler, den ich zuerst gemacht habe, war es, die X und Y Achsen in QtiPlot zu vertauschen, sprich, F_i auf die X-Achse und z_i auf die Y-Achse. Dadurch sind zuerst die falschen Werte von k und F_0 berechnet worden.

4 Offset, Amplitude, Frequenz und Phase eines Pendels

4.1 Arbeitsgrundlagen

Die gedämpfte Schwingung eines Pendels kann mit der Formel

$$y = A \cdot e^{-\Gamma \cdot t} \cdot \sin(2\pi f t - \delta) + y_0 \quad \text{wobei} \quad \begin{array}{ll} A: & \text{Amplitude} \\ \Gamma: & \text{Abklingkonstante} \\ f: & \text{Frequenz in Hz} \\ \delta: & \text{Phase} \\ y_0: & \text{Offset} \end{array} \quad (17)$$

beschrieben werden.

4.2 Durchführung

Versuchsanordnung

Die gedämpfte Schwingung eines Pendels wurde mittels Ultraschallsensor vermessen. Die Zeitabhängige Positionsdaten sind in der Tabelle 4 aufgezeichnet.

Messergebnisse

Table 4: Gemessene Grössen

$t(s)$	$y(m)$	$t(s)$	$y(m)$	$t(s)$	$y(m)$	$t(s)$	$y(m)$	$t(s)$	$y(m)$	$t(m)$	$y(m)$
0.5	-0.418	8.0	0.594	15.5	-0.577	23.0	0.417	30.5	-0.132	38.0	0.152
1.0	-0.07	8.5	0.632	16.0	-0.48	23.5	0.423	31.0	-0.123	38.5	0.058
1.5	0.082	9.0	0.435	16.5	-0.414	24.0	0.45	31.5	-0.075	39.0	0.193
2.0	0.19	9.5	0.366	17.0	-0.46	24.5	0.389	32.0	-0.373	39.5	0.070
2.5	0.494	10	0.123	17.5	-0.187	25.0	0.488	32.5	-0.146	40.0	0.235
3.0	0.566	10.5	0.064	18.0	-0.171	25.5	0.317	33.0	-0.176	40.5	0.084
3.5	0.753	11.0	-0.084	18.5	-0.03	26.0	0.344	33.5	-0.193	41.0	0.248
4.0	0.913	11.5	-0.152	19.0	-0.072	26.5	0.363	34.0	-0.138	41.5	0.319
4.5	0.869	12.0	-0.299	19.5	-0.011	27.0	0.218	34.5	-0.259	42.0	0.052
5.0	0.977	12.5	-0.506	20.0	0.082	27.5	0.084	35.0	-0.078	42.5	0.159
5.5	0.956	13.0	-0.479	20.5	0.109	28.0	0.113	35.5	0.018	43.0	0.134
6.0	0.996	13.5	-0.576	21.0	0.25	28.5	0.166	36.0	-0.059	43.5	0.079
6.5	0.971	14.0	-0.662	21.5	0.404	29.0	0.02	36.5	0.056	44.0	0.097
7.0	0.827	14.5	-0.498	22.0	0.272	29.5	-0.032	37.0	0.004	44.5	0.162
7.5	0.784	15.0	-0.654	22.5	0.317	30.0	0.011	37.5	0.042	45.0	0.030

Hinweis: Daten wurden vom Auftragsdokument kopiert.

Die Amplitude A , Abklingkonstante Γ , Frequenz f , Phase δ und Offset y_0 sollen ermittelt werden.

QtiPlot

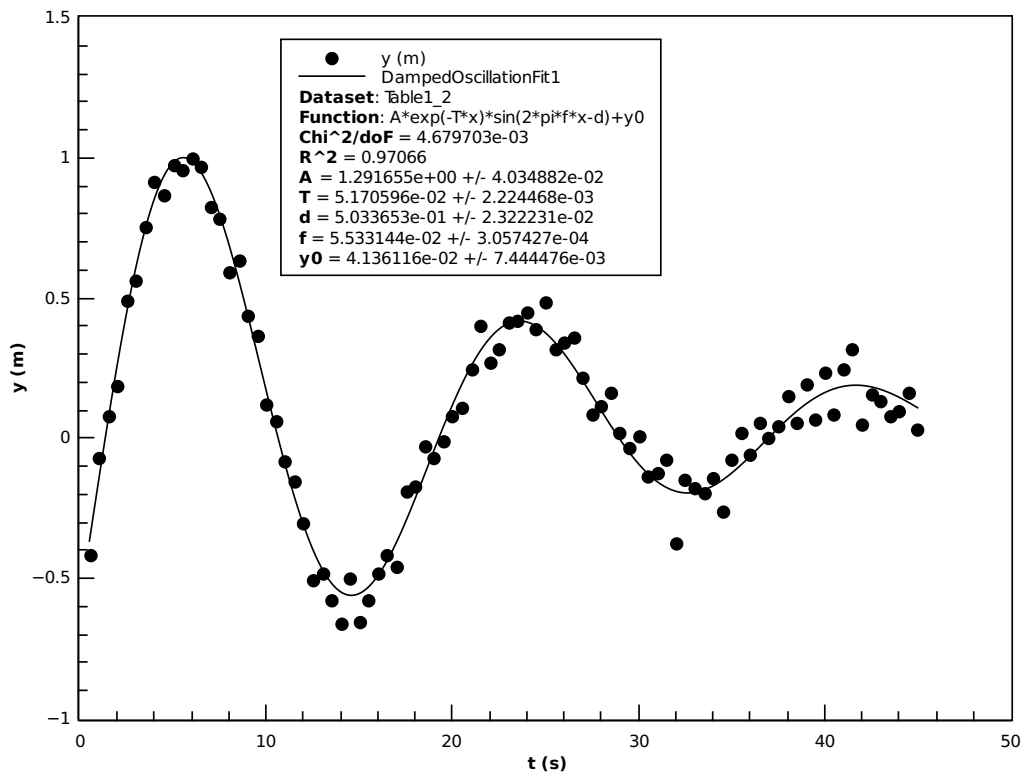


Figure 6: Nicht-lineare Regression zur Bestimmung von A , Γ , f , δ und y_0

Die Formel 17 wird in QtiPlot als Fit-Funktion eingegeben. Die gesuchten Parameter können mittels nicht-linearer Regression ermittelt werden. Angrund der nicht-linearen Art der Formel müssen vor dem Fitten gute Startwerte von Hand eingestellt werden. Dazu wird der Checkbox "Preview" eingeschaltet und mit den Parametern gespielt, bis die Kurve ungefähr passt.

4.3 Resultate und Diskussion

Von der Figur 6 können die gesuchten Parameter abgelesen werden. Diese sind:

Amplitude A :	(1.29 ± 0.04)
Abklingkonstante Γ :	$(51.7 \pm 2.2)\text{E-}3$
Phase δ :	$(503 \pm 23)\text{E-}3$
Frequenz f :	$(55.3 \pm 0.3)\text{E-}3$
Offset y_0 :	$(41.4 \pm 7.4)\text{E-}3$

5 RC-Glied

5.1 Arbeitsgrundlagen

Gemäss Theorie berechnet sich die Ausgangsspannung U_A mit

$$U_A = U_E \cdot \frac{X_C}{\sqrt{X_C^2 + R^2}} = \frac{U_E}{\omega C \sqrt{\frac{1}{(\omega C)^2} + R^2}} = \frac{U_E}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \quad (18)$$

und die Phase φ mit

$$\varphi = \arctan(-\omega RC) \quad (19)$$

5.2 Durchführung

Versuchsanordnung

Am Eingang eines RC-Tiefpassfilters wurde eine sinusförmige Wechselspannung mit Amplitude $U_E = 4V_{pp}$ und variabler Frequenz angelegt. Gemessen wurde die Ausgangsspannung U_A sowie die Phasenverschiebung φ in Funktion der Frequenz f mit Hilfe eines Kathodenstrahloszilloskopes (KO). Der Widerstand R wurde zu $R = 500\Omega$ bestimmt. Die Messwerte wurden in der Tabelle 5 aufgezeichnet.

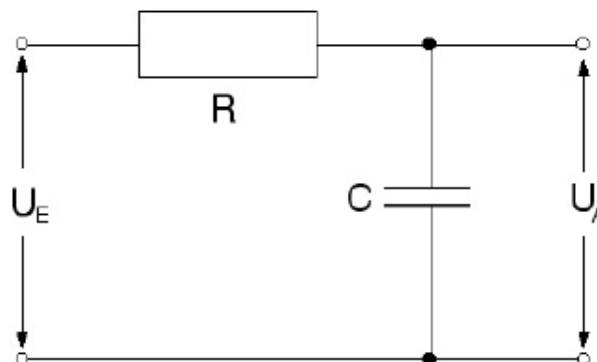


Figure 7: RC-Tiefpassfilter

Messergebnisse

Table 5: Gemessene Größen

$f(\text{Hz})$	$U_a(\text{V})$	ϕ
100	4.000	-3.24
500	3.800	-16.9
1000	3.300	-31.3
1500	2.800	-43.6
5000	1.140	-72.4
10000	0.580	-82.5
100000	0.075	-90.0
1592	2.700	-44.0

Messprotokoll "Tiefpass"

Datum: 1. Okt. 1999

Versuchsleiterin: Ruth Metzler

Hinweis: Daten wurden vom Auftragsdokument kopiert.

Gesucht ist die Kapazität C .

QtiPlot

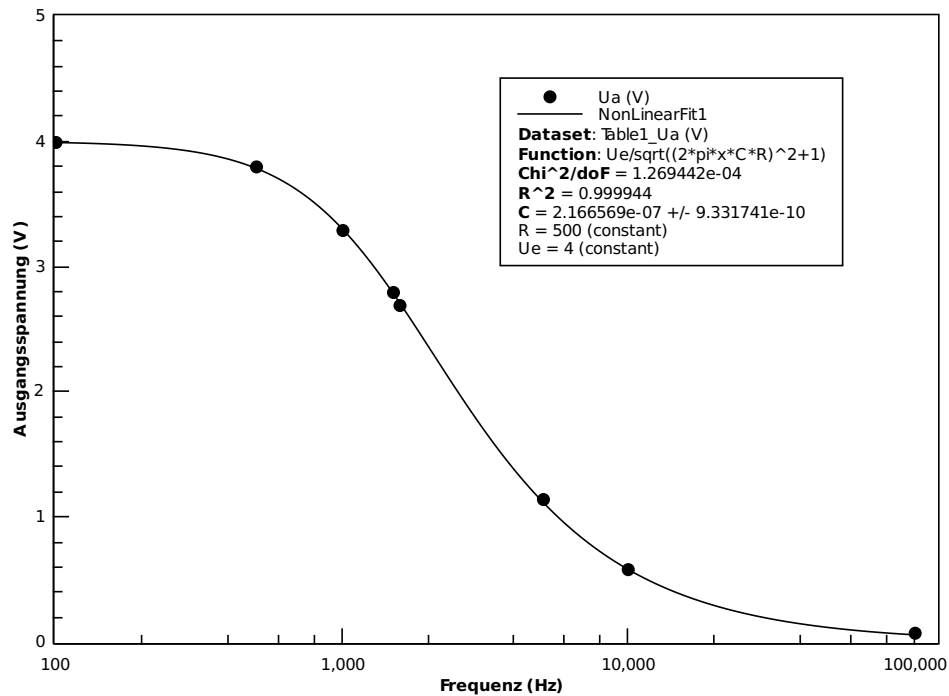


Figure 8: Nicht-lineare Regression zur Bestimmung von C anhand der Ausgangsspannung

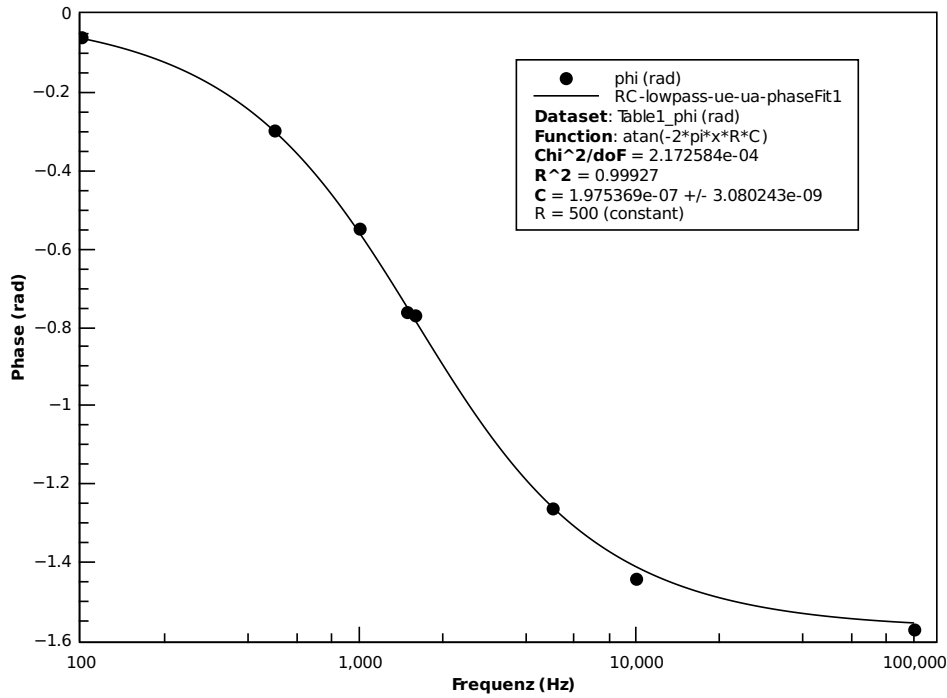


Figure 9: Nicht-lineare Regression zur Bestimmung von C anhand der Phase

Die Kapazität C kann auf zwei Arten ermittelt werden.

- In der Figur 8 wird die Ausgangsspannung U_A in Funktion der Frequenz dargestellt. Durch Regression mit der Formel 18 kann C bestimmt werden. Der Wert beträgt somit $C_1 = (216.7 \pm 0.9)\text{nF}$ (aus dem Plot von QtiPlot abgelesen).
- In der Figur 9 wird der Phasenwinkel φ in Funktion der Frequenz dargestellt. Durch Regression mit der Formel 19 kann C auch bestimmt werden. Der Wert beträgt somit $C_2 = (197.5 \pm 3.1)\text{nF}$ (aus dem Plot von QtiPlot abgelesen).

5.3 Resultate und Diskussion

Der Wert von C_1 weicht recht stark vom Wert C_2 ab. Es liegen sicher Messungenauigkeiten zugrunde. Die Methode mit der Phase ist sicher ungenauer als die Methode mit der Ausgangsspannung, weil die Phase φ viel grober gemessen wurde. Dies reflektiert sich auch wenn man den Fehler anschaut.

Um an einen genaueren Wert von C zu gelangen könnte man jetzt C_1 und C_2 gewichtet mitteln mit

$$\bar{C} = \frac{\sum_{i=1}^N g_{\bar{C}_i} \cdot C_i}{\sum_{i=1}^N g_{\bar{C}_i}} = \frac{\frac{1}{0.9^2} \cdot 216.7 + \frac{1}{3.1^2} \cdot 197.5}{\frac{1}{0.9^2} + \frac{1}{3.1^2}} = 215.2\text{nF} \quad (20)$$

und den Fehler des gewogenen Mittels berechnen mit

$$s_{\bar{C}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N g_{\bar{C}_i}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{0.9^2} + \frac{1}{3.1^2}}} = 0.9\text{nF} \quad (21)$$

Somit ergibt sich der genauere Wert $C = (215.2 \pm 0.9)\text{nF}$

Es ist zu beachten, dass der berechnete Fehler der Kapazität nur den statistischen Fehler darstellt. Als systematischer Fehler müsste noch die Unsicherheit des Widerstandwertes mitberücksichtigt werden.

Appendices

A Excel-Tabellen

Schallgeschwindigkeit

Messung	Laufzeit (ms)	
	1	6.83
	2	7.41
	3	7.32
	4	7.31
	5	7.23
	6	7.68
	7	7.33
	8	7.7
	9	7.93
	10	7.54
	11	7.36
	12	7.31
	13	7.56
	14	7.14
	15	6.94
	16	7.32
	17	7.34
	18	7.28
	19	7.01
	20	7.76
Mittelwert Laufzeit		7.37
Std. Laufzeit		0.28
Unsicherheit Laufzeit		0.06
Mittlere Laufzeit in s		0.007365
Unsicherheit Laufzeit in s		6.15223536610881E-005
Mittlere Distanz		2.561
Unsicherheit Distanz		0.003
Mittlere Schallgeschwindigkeit		347.7
Unsicherheit Schallgeschwindigkeit		2.9

Eisengehalt

Messung	Eisengehalt (%)	Absoluter Fehler (%)	Gewichte
1	20.3	1.2	0.6944444444
2	21.9	1.3	0.5917159763
3	21.1	1.1	0.826446281
4	19.6	0.8	1.5625
5	19.9	1.3	0.5917159763
6	18	1.3	0.5917159763
7	19.4	1	1
8	22.2	2	0.25
9	21.6	0.8	1.5625
Einfacher Mittelwert	20.4		
Gewichteter Mittelwert	20.4		
Einfache Unsicherheit	0.5		
Gewichtete Unsicherheit	0.4		

Gewichteter Eisengehalt

14.0972222222
12.9585798817
17.4380165289
30.625
11.775147929
10.650887574
19.4
5.55
33.75

Federkonstante

F (N)	z (m)		X_i^2	Y_i^2	$X_i - x$
3.83	0.2		0.04	14.6689	-0.325
7.79	0.35		0.1225	60.6841	-0.175
8.08	0.42		0.1764	65.2864	-0.105
9.7	0.46	$F = k \cdot z + F_0$	0.2116	94.09	-0.065
10.58	0.51		0.2601	111.9364	-0.015
12.33	0.54		0.2916	152.0289	0.015
12.23	0.59		0.3481	149.5729	0.065
14.43	0.67		0.4489	208.2249	0.145
15.51	0.71		0.5041	240.5601	0.185
17.09	0.8		0.64	292.0681	0.275

k	22.2809615
F0	-0.54050479

Sheet1

Yi-y	(xi-x)(yi-y)	(xi-x)^2	(yi-y)^2	yi*xi
-7.327	2.381275	0.105625	53.684929	0.766
-3.367	0.589225	0.030625	11.336689	2.7265
-3.077	0.323085	0.011025	9.467929	3.3936
-1.457	0.094705	0.004225	2.122849	4.462
-0.577	0.008655	0.000225	0.332929	5.3958
1.173	0.017595	0.000225	1.375929	6.6582
1.073	0.069745	0.004225	1.151329	7.2157
3.273	0.474585	0.021025	10.712529	9.6681
4.353	0.805305	0.034225	18.948609	11.0121
5.933	1.631575	0.075625	35.200489	13.672

B Handgeschriebenes

LICHTGESCHWINDIGKEIT

Murray, Alex

`alexander.murray@students.fhnw.ch`

Measho, Yohannes

`yohannes.measho@students.fhnw.ch`

November 5, 2015

1 Arbeitsgrundlagen

1.1 Messung der Lichtgeschwindigkeit nach Michelson

In diesem Versuch wird die Lichtgeschwindigkeit nach der Methode von Michelson (Abbildung 1) gemessen. Dabei wird ein Laserstrahl durch verschiedene Linsen, Spiegeln und Blenden hin- und zurückgeschickt. Ein Spiegel, DS , wird mit einem Motor bei verschiedenen, bekannten Drehzahlen rotiert. Da das Licht endlich schnell ist, wird der Drehspiegel einen anderen Winkel haben nach Zurückreflektieren des Lichtstrahls vom Endspiegel ES und verursacht somit eine Verschiebung des Zurückkommenden Laserstrahls. Ist die Distanz zwischen Endspiegel und Drehspiegel $D_2 + S_2$ sowie die Drehzahl ω bekannt, so kann durch Messung der Verschiebung die Lichtgeschwindigkeit berechnet werden.

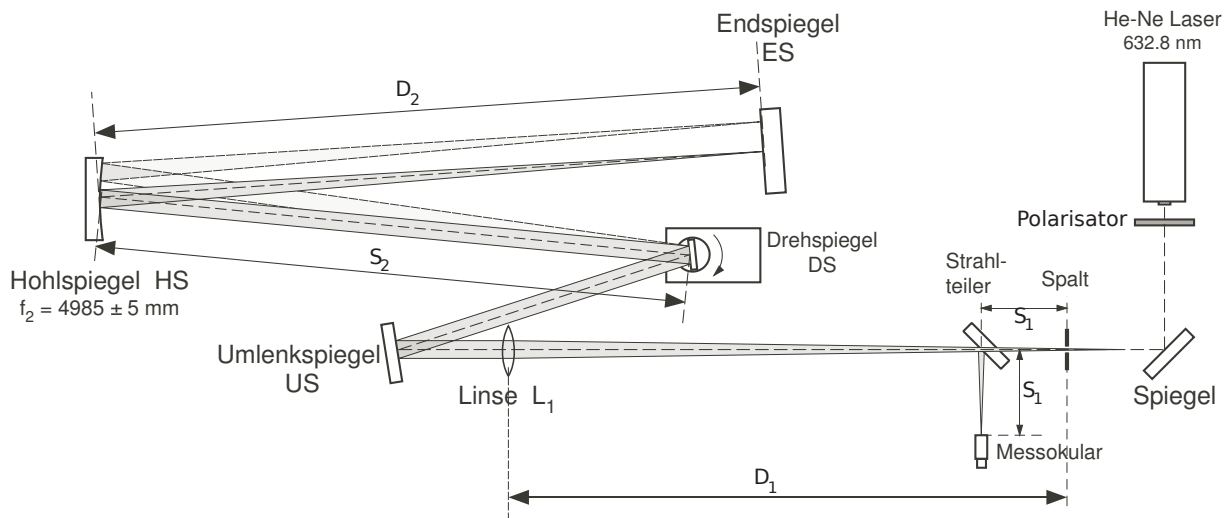


Figure 1: Versuchsaufbau nach Michelson. Auszug aus der Aufgabenstellung.

Der Versuch nach Michelson kann mit einer Äquivalenten Linsenkonfiguration dargestellt werden, wie in der Abbildung 2 ersichtlich ist.

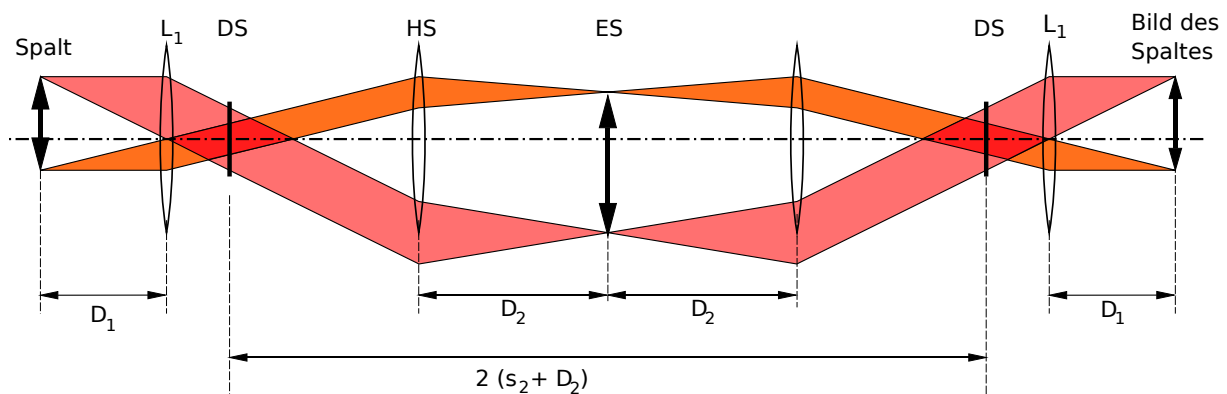


Figure 2: Äquivalente Linsenkonfiguration des Versuchs. Auszug aus der Aufgabenstellung

Bei rotierendem Spiegel findet das vom Endspiegel zurückkehrende Licht den Drehspiegel wegen der endlichen Laufzeit um einen kleinen Winkel δ gedreht

$$\delta = \omega \cdot \Delta t = \omega \cdot \frac{2(S_2 + D_2)}{c} \quad (1)$$

wobei ω die Kreisfrequenz des Drehspiegels und Δt die Laufzeit des Lichtes vom Drehspiegel zum Endspiegel und zurück bezeichnen. Diese Drehung des Spiegels hat eine Richtungsänderung der Bündelachse um den Winkel 2δ (Reflexionsgesetz, Abbildung 3, $\alpha = \alpha' \rightarrow 2\delta$) und damit eine seitliche Verschiebung x des Bildes des Spaltes zur Folge.

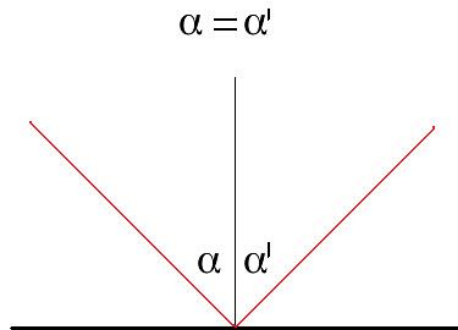


Figure 3: Reflexionsgesetz

Für das Verständnis des Strahlenganges benötigen wir die Abbildungsgleichung und den Abbildungsmaßstab β für dünne Linsen.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (2)$$

Wobei f die Brennweite, g die Gegenstandsweite (Abstand Linse - Gegenstand), b die Bildweite, B die Bildgröße und G die Gegenstandsgröße bezeichnen.

Da die Kleinwinkelnäherung $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ in unserem Falle sicher zulässig ist, gilt

$$2\delta = \frac{x}{D_1} \quad (3)$$

und damit

$$c = 4\omega \cdot \frac{(S_2 + D_2)D_1}{x} \quad (4)$$

Diese Formel muss für die lineare Regression umgeformt und mit einem Offset x_0 angepasst werden, weil die Millimeterschrauben einen unbekannten Offset hat.

$$x = \frac{1}{c} \cdot 8\pi f \cdot D_1(S_2 + D_2) + x_0 \quad \text{oder} \quad x = b \cdot f + x_{02} \quad (5)$$

Wobei f die Drehfrequenz des Motors ist und $b = \frac{1}{c} \cdot 8\pi \cdot D_1(S_2 + D_2)$.

Eine schöne Visualisierung der Verschiebung in Abhängigkeit des einstrahlwinkels kann in der Abbildung 4 gesehen werden¹. Die weißen Linien strahlen mit einem anderen Winkel als die gelbe Linien in die Linse und verursachen dementsprechend eine vertikale Verschiebung des Bildes.

¹Simulation einer Linse. https://phet.colorado.edu/sims/geometric-optics/geometric-optics_de.html. Abgerufen, 25-10-2015 17:20.

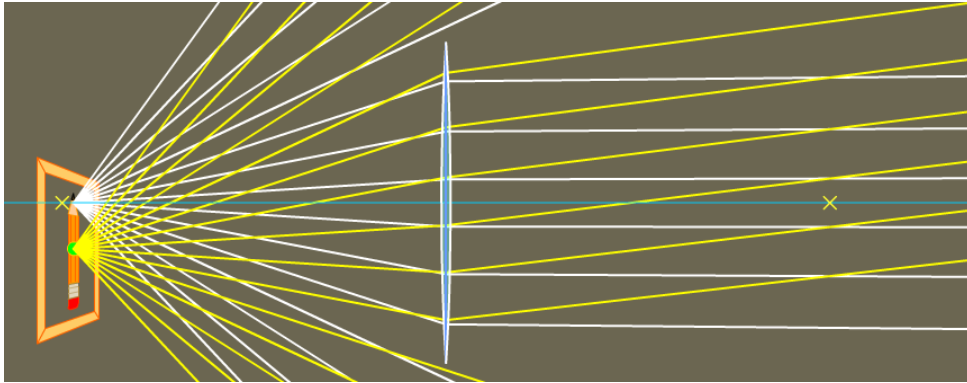


Figure 4: Verhalten von Lichtstrahlen bei unterschiedlichen Einstrahlwinkel

Der grösste Beitrag zur Unsicherheit der Lichtgeschwindigkeitsmessung stammt von der Brennweite der Linse f_1 respektiv der Einstellung von D_1 . Aus diesem Grunde wird die Verschiebung des Okulars in Funktion des Winkels, um den der rückkehrende Laserstrahl verdreht ist, gemessen. Auf einem Arm der Länge $l_{Arm} = (0.50000 \pm 0.00005)\text{m}$ ist ein planer Spiegel montiert. Mit Hilfe einer Mikrometerschraube wird der Arm und damit der Spiegel kontrolliert um die entsprechende Achse verdreht. Bei einer Verstellung der Mikrometerschraube um z resultiert damit ein Winkel

$$\varphi_{Spiegel} = \arctan \frac{z}{l} \approx \frac{z}{l} \quad (6)$$

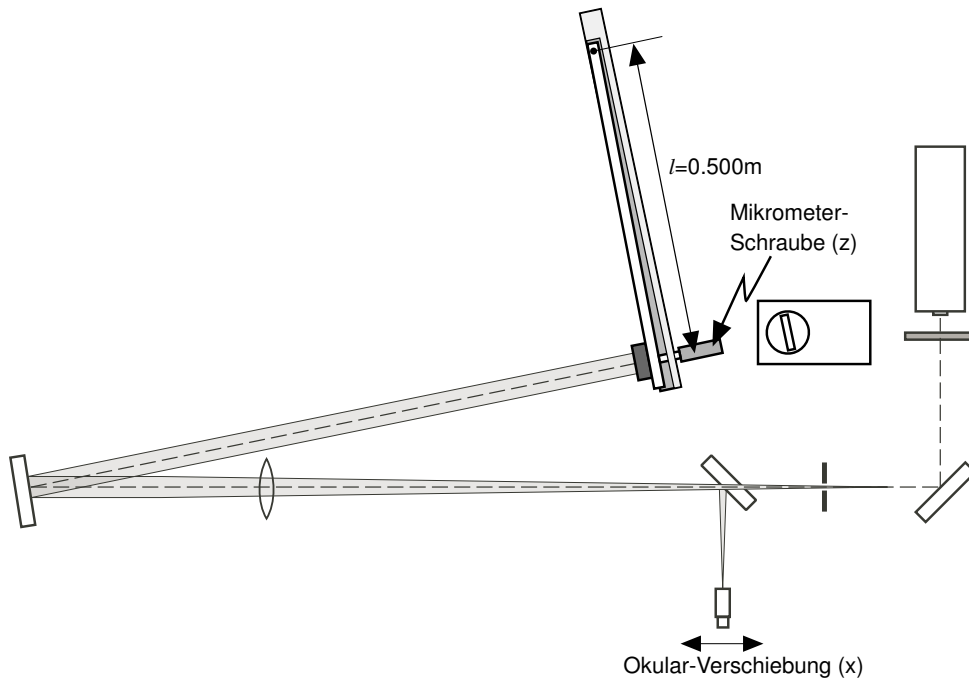


Figure 5: Messanordnung Kalibration

Auch hier gilt für die lineare Regression die Formel

$$x = a \cdot \varphi_{Spiegel} + x_{01} = \frac{a}{l} + x_{01} \quad (7)$$

Setzt man das in der Formel 5 ein, erhält man mit $\delta = \varphi_{Spiegel}$

$$\delta = \frac{x - x_{01}}{a} = \frac{b \cdot f + x_{02} - x_{01}}{a} = \frac{b}{a} \cdot f + \frac{x_{02} - x_{01}}{a} \quad (8)$$

Gemäss Formeln 3 und 4 gilt:

$$\delta = 4\pi f \cdot \frac{S_2 + D_2}{c} + \delta_0 \quad (9)$$

und folglich

$$\frac{b}{a} \cdot f = 4\pi f \cdot \frac{S_2 + D_2}{c} \quad (10)$$

Löst man nach c auf, kriegt man die endgültige Formel:

$$c = 4\pi \frac{a}{b} (S_2 + D_2) \quad (11)$$

Damit konnte die **geschätzte**, systematische Unsicherheit von D_1 ausgeschlossen werden – sie wurde ersetzt durch die zusätzliche statistisch **berechnete** Unsicherheit der Steigung a .

2 Durchführung

2.1 Versuchsanordnung Lichtgeschwindigkeitsmessung

Der Laser wurde eingeschaltet und der Umlenkspiegel wurde so angepasst, bis der Laserstrahl parallel zur langen Tischkante verliefte, was in der Abbildung 6 links ersichtlich ist. Weiter wurde die Höhe h vom Laser zum Tisch gemessen und der Strahl nach dem Umlenkspiegel an die gleiche Höhe h angepasst, was in der Abbildung 6 illustriert ist.

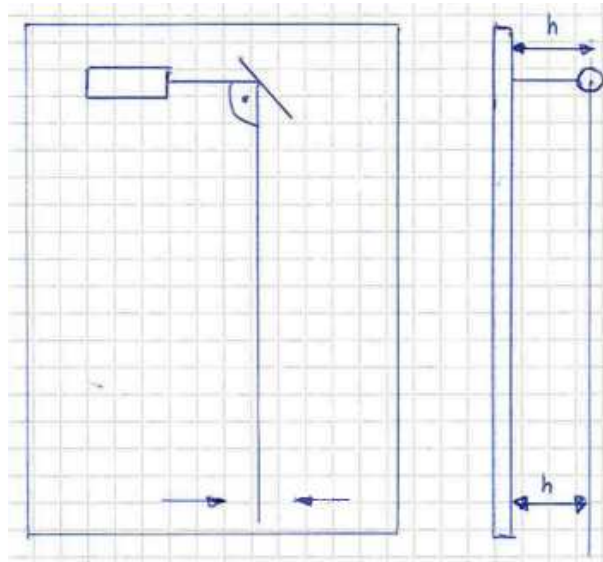


Figure 6: Tisch mit Laser von Oben (links) und von der Seite (rechts) gesehen

Der Laser und der Hohlspiegel HS befinden sich auf separate Tische. Die Höhen der Tische zum Boden h_3 und h_4 wurden gemessen. Die Höhe h_2 – also die Distanz zwischen dem Zentrum des Hohlspiegels und dem Tisch – wurde weiter durch Feinjustieren des Umlenkspiegels angepasst bis $h_1 + h_3 = h_2 + h_4$.

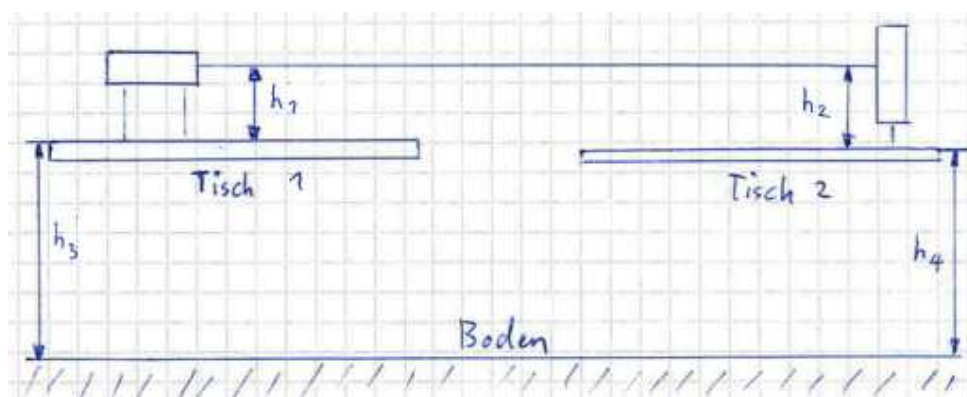


Figure 7: Abstand der beiden Tische vom Boden

Die gemessene Höhen betrugen nach der Anpassung

$$h_1 = (\bar{h}_1 \pm s_{\bar{h}_1}) = (256 \pm 3) \text{ mm}$$

$$h_2 = (\bar{h}_2 \pm s_{\bar{h}_2}) = (265 \pm 3) \text{ mm}$$

$$h_3 = (\bar{h}_3 \pm s_{\bar{h}_3}) = (904 \pm 1) \text{ mm}$$

$$h_4 = (\bar{h}_4 \pm s_{\bar{h}_4}) = (895 \pm 1) \text{ mm}$$

In der Abbildung 8 ist eine Skizze der Messeinrichtung.

Der Umlenkspiegel US wird nun in den Laserstrahl platziert und auf den Zentrum des Drehspiegels DS ausgerichtet. Durch Feinjustieren des Umlenkspiegels US kann der Laserstrahl genau auf den Zentrum des Drehspiegels DS ausgerichtet werden.

Der Motor des Drehspiegels wird von Hand rotiert bis der Drehspiegel den Laserstrahl genau auf den Zentrum des Hohlspiegels HS umlenkt.

Nun wird der Hohlspiegel HS angepasst und feinjustiert, bis er den Strahl auf dem Zentrum des Endspiegels ES umlenkt. Dabei ist es wichtig, dass die Distanz zwischen den Spiegeln HS und ES genau $f_2 = (4985 \pm 5)\text{mm}$ beträgt. Der Endspiegel ES wurde verschoben und mit einem Laserdistanzmessgerät wurde die Distanz auf $(4.988 \pm 3)\text{m}$ gemessen.

Nun wird der Endspiegel ES feinjustiert, bis der Laserstrahl wieder direkt auf den Hohlspiegel HS zurückreflektiert wird. Ist der Strahl auf den Hohlspiegel ausgerichtet, so schaut man auf den Drehspiegel um den zurückreflektierenden Laserstrahl weiter feiner einzustellen. Ist sie auf den Drehspiegel genug genau ausgerichtet, schaut man weiter auf den Umlenkspiegel US und kann somit wieder durch feinjustieren des Endspiegels ES den Strahl noch weiter genauer ausrichten.

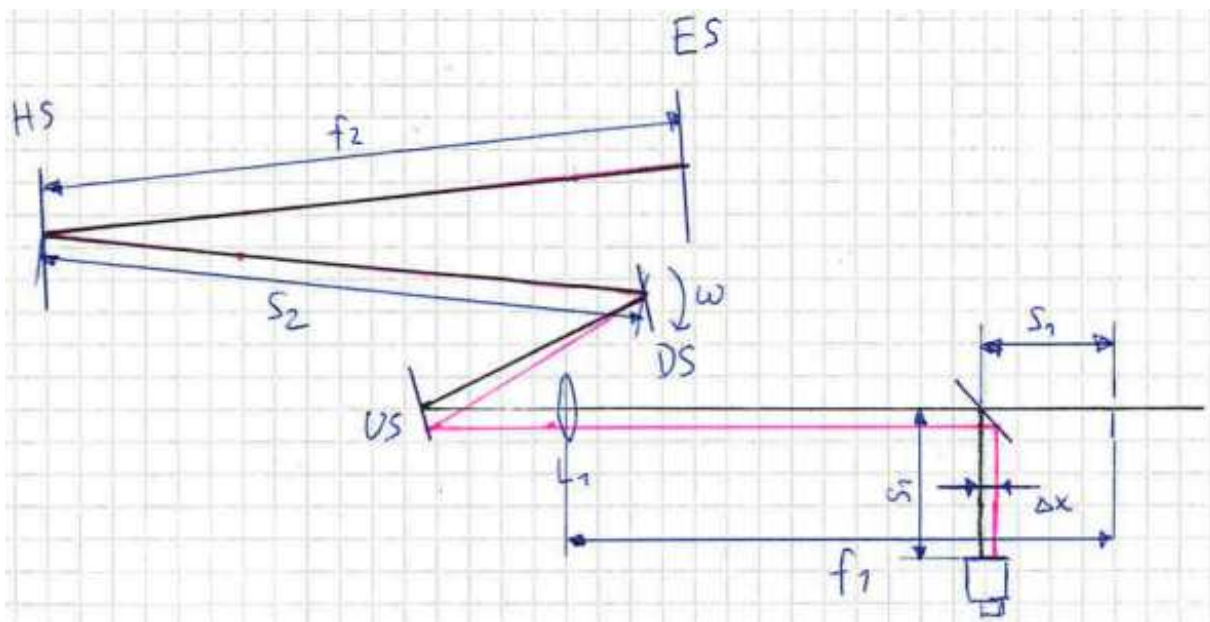


Figure 8: Vereinfachte Messeinrichtung mit relevanten Daten

Nun wird der Strahlteiler in den Laserstrahl eingefügt, in der Nähe des Messokulars. Wenn alles stimmt, müsste der zurückreflektierende Laserstrahl nun durch das Messokular strahlen und auf die Wand aufreffen.

Die Distanz S_1 vom Laserstrahl zum Okular wird gemessen und der Spalt wird verschoben, bis er auch mit der Distanz S_1 vom Strahlteiler entfernt ist.

Gemessen wurde $S_1 = (107 \pm 3)\text{mm}$.

Jetzt wird die Linse L_1 in den Laserstrahl eingefügt. Die Linse muss gleich der Brennweite $f_1 = 1000\text{mm}$ vom Spalt distanziert werden.

Gemessen wurde die Distanz von der Linse L_1 zum Spalt $(998 \pm 3)\text{mm}$.

Zur Übersicht sind die gemessene Größen hier nochmals zusammengefasst:

f_1	$(998 \pm 3)\text{mm}$
S_1	$(107 \pm 3)\text{mm}$
f_2	$(4988 \pm 5)\text{mm}$
S_2	$(4894 \pm 5)\text{mm}$

Als letztes wird der Spalt geschlossen bis die Distanz d des Interferenzmusters (siehe Abbildung 9) auf dem Drehspiegel DS in etwa so breit ist wie der Drehspiegel selbst.

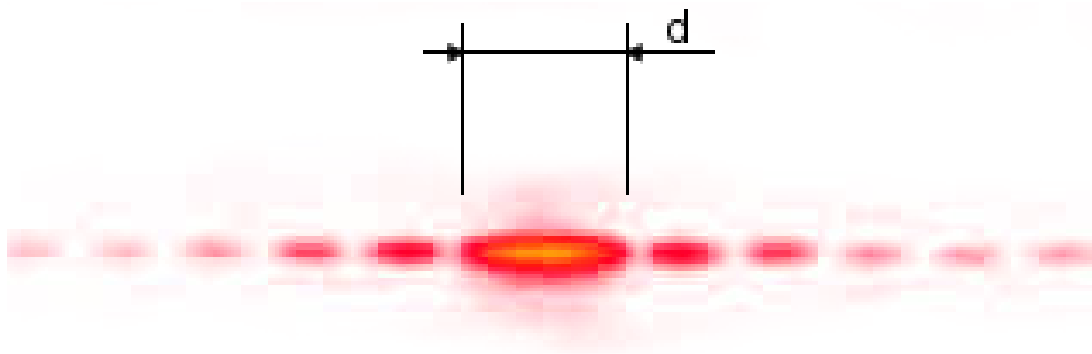


Figure 9: Beugungsmuster des Laserstrahls, verursacht durch den Spalt

Danach wird das Filter gedreht und der Laserstrahl abgeschwächt, damit der Messvorgang auch ohne Massensterben von Netzhautzellen erfolgen kann.

2.2 Versuchsanordnung Kalibrationsmessung

Für die Kalibrationsmessung wurde wie in der Abbildung 5 vorgegangen. Ein Spiegel, montiert auf einem hochpräzisen Arm, wurde in den Laserstrahl gestellt. Der Arm wurde zwischen $12.5\mu\text{m}$ und $17.5\mu\text{m}$ verstellt. Die Distanz wurde wieder dabei gemessen.

2.3 Messmethoden

In der Tabelle 1 sind alle Geräte aufgelistet, die gebraucht wurden, um die Distanzen zwischen den Optikelementen zu messen. Die Toleranzen sind grosszügig angegeben.

Table 1: Liste von Messgeräten

Bezeichnung	Genauigkeit
Disto 08 Laserdistanzmessgerät	$\pm 1\text{mm}$
30cm Lineal, Metall	$\pm 2\text{mm}$

Es ist zu beachten dass je nach Art der Messung die Toleranz nochmals zunimmt, wie zum Beispiel beim Messen des Abstands des Laserstrahls. Die geschätzten Toleranzen sind bei jeder Messung angegeben.

2.4 Messungen

Wegen nicht-genauem Lesen der Versuchsanleitung sind uns zwei Details entgangen: Die maximale Drehzahl des Motors haben wir bei der Lichtgeschwindigkeitsmessung überschritten; es wurde bis 1600 rpm gemessen obwohl der Motor unter 1000 rpm hätte betrieben werden sollen. Weiter wurde bei der

Kalibrationsmessung nicht im Bereich von den im Versuchsanleitung angegebenen $\pm 1\text{mm}$ gemessen, sondern im Bereich von $\pm 2.5\text{mm}$.

3 Auswertung

3.1 Lichtgeschwindigkeitsmessung

Table 2: Distanzmessungen bei Inkrementieren und Dekrementieren der Drehfrequenz

(a) Messung von Alex Murray		(b) Messung von Yohannes Measho	
Drehfrequenz (Hz)	Distanz (μm)	Drehfrequenz (Hz)	Distanz (μm)
498	0	1498	0
605	-83	1388	124
702	-169	1289	192
800	-250	1199	280
885	-324	1106	353
1008	-414	1009	431
1096	-499	912	516
1200	-586	807	590
1305	-666	708	682
1400	-741	603	771
1498	-839	502	851

In den Tabellen 2a und 2b sind die von Alex Murray und Yohannes Measho gemessene Distanzenverschiebungen in Funktion der Drehfrequenz f aufgezeichnet. Die Messungen in der Tabelle 2a wurden bei Inkrementieren der Drehfrequenz erfasst, die Messungen in der Tabelle 2b wurden bei Dekrementieren der Drehfrequenz erfasst.

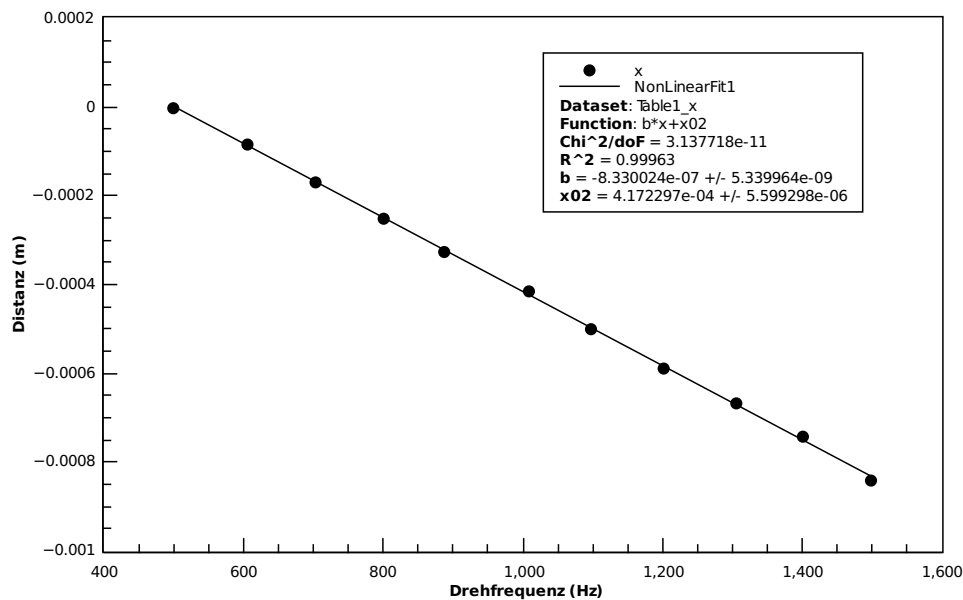


Figure 10: Lineare Regression zur Berechnung des Faktors b , Messdaten von Alex Murray

In der Abbildung 10 sind die Messpunkte von der Tabelle 2a als XY-Scatter Plot dargestellt. Die Punkte wurden nach der Formel 5 gefittet und damit ergibt sich der Faktor b_{Alex} als:

$$b_{Alex} = \overline{b_{Alex}} \pm s_{\overline{b_{Alex}}} = -(833.0024 \pm 5.3400) \cdot 10^{-9} \quad (12)$$

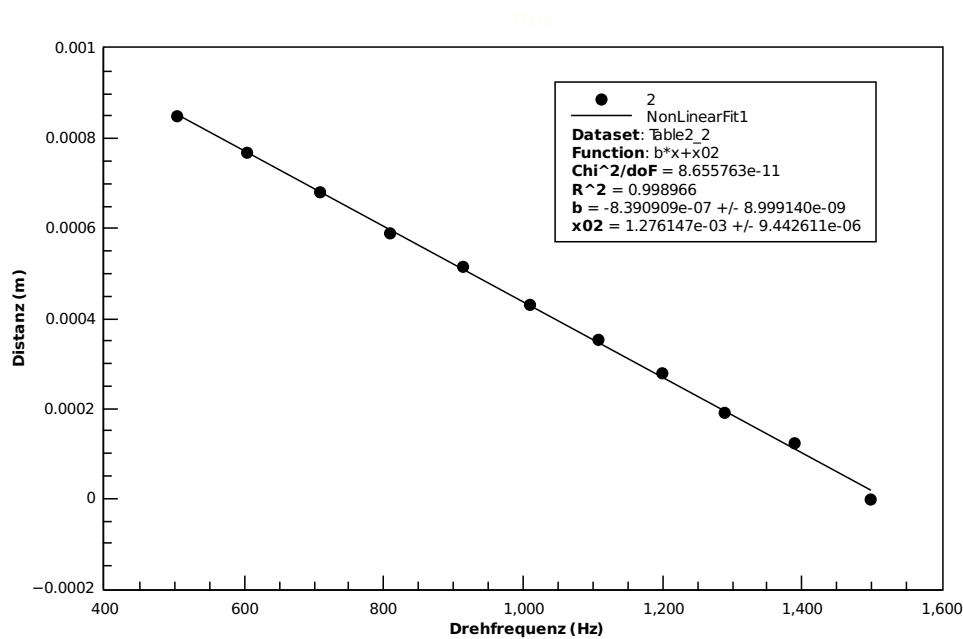


Figure 11: Lineare Regression zur Berechnung des Faktors b , Messdaten von Yohannes Measho

In der Abbildung 11 sind die Messpunkte von der Tabelle 2b als XY-Scatter Plot dargestellt. Die Punkte wurden nach der Formel 5 gefittet und damit ergibt sich der Faktor $b_{Yohannes}$ als:

$$b_{Yohannes} = \overline{b_{Yohannes}} \pm s_{\overline{b_{Yohannes}}} = -(839.0909 \pm 8.9991) \cdot 10^{-9} \quad (13)$$

3.2 Kalibrationsmessung

Table 3: Kalibrationsmessdaten

(a) Messung von Alex Murray

$x(mm)$	$z(mm)$
10.042	12.5
8.031	13.0
6.049	13.5
4.049	14.0
1.990	14.5
-0.019	15.0
-1.988	15.5
-3.955	16.0
-5.954	16.5
-7.973	16.5
-9.952	17.5

(b) Messung von Yohannes Measho

$x(mm)$	$z(mm)$
10.047	12.5
8.020	13.0
5.980	13.5
3.990	14.0
1.926	14.5
-0.053	15.0
-2.048	15.5
-4.030	16.0
-6.039	16.5
-7.997	17.0
-9.987	17.5

In den Tabellen 3a und 3b sind die Kalibrationsmessungen von Alex Murray und Yohannes Measho aufgeführt. Beide haben die gleiche Messung unabhängig von einander durchgeführt.

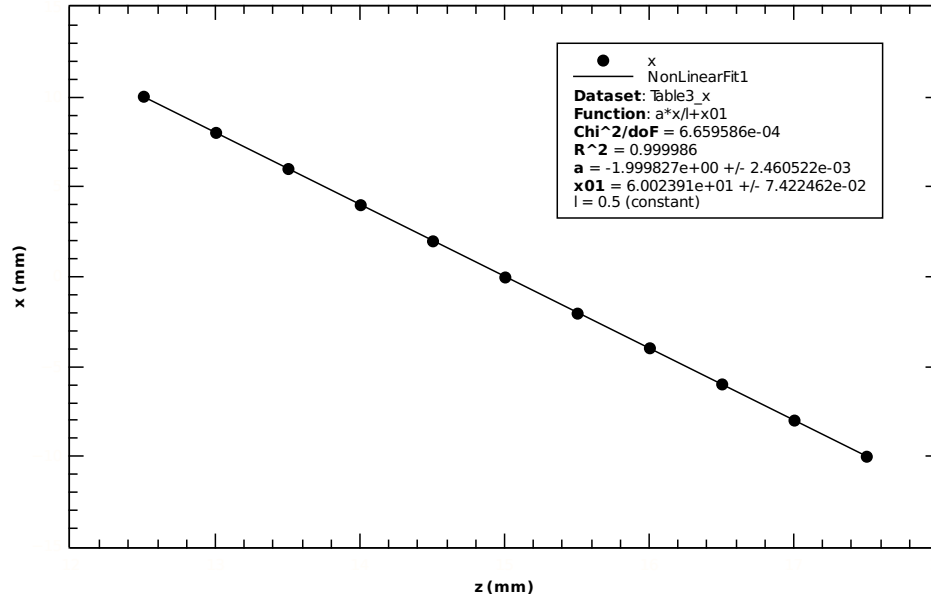


Figure 12: Lineare Regression zur Berechnung des Faktors a anhand der Kalibrationsmessung, Messdaten von Alex Murray

In der Abbildung 12 sind die Messpunkte von der Tabelle 3a als XY-Scatter Plot dargestellt. Die Punkte wurden nach der Formel 7 gefittet und somit ergibt sich der Faktor a_{Alex} als:

$$a_{Alex} = \overline{a_{Alex}} \pm s_{\overline{a_{Alex}}} = -(1999.827 \pm 2.461) \cdot 10^{-3} \quad (14)$$

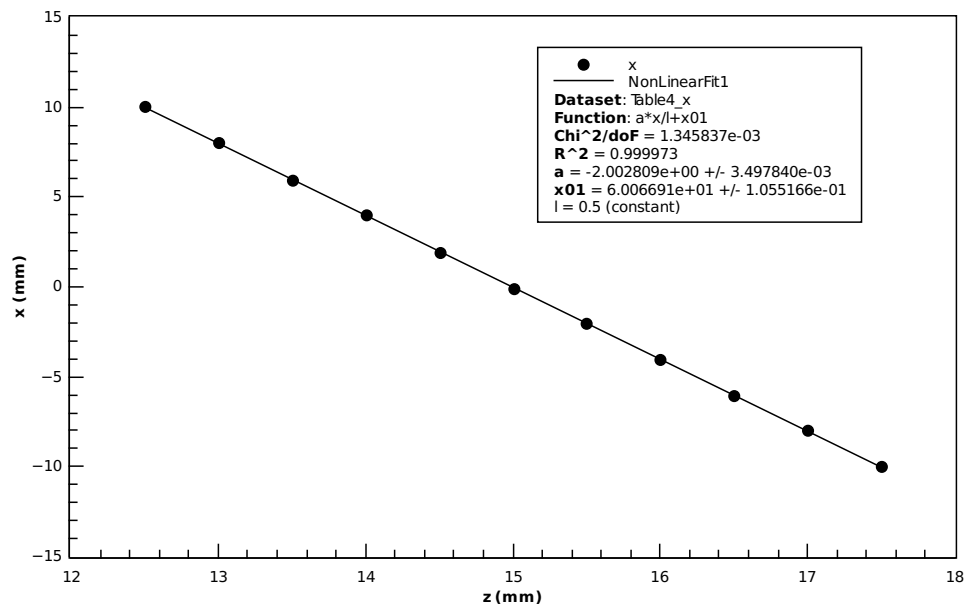


Figure 13: Lineare Regression zur Berechnung des Faktors a anhand der Kalibrationsmessung, Messdaten von Yohannes Measho

In der Abbildung 13 sind die Messpunkte von der Tabelle 3b als XY-Scatter Plot dargestellt. Die Punkte wurden nach der Formel 7 gefittet und somit ergibt sich der Faktor $a_{Yohannes}$ als:

$$a_{Yohannes} = \overline{a_{Yohannes}} \pm s_{\overline{a_{Yohannes}}} = -(2002.809 \pm 3.498) \cdot 10^{-3} \quad (15)$$

4 Fehlerrechnung

4.1 Lichtgeschwindigkeitsmessung

Die Daten von der Lichtgeschwindigkeitsmessung wurden nach der Formel 5 gefittet. Es gilt:

$$x = b \cdot f + x_{02} \quad \text{mit} \quad c = \frac{1}{b} \cdot 8\pi \cdot D_1(S_2 + D_2) \quad (16)$$

Da b für beide Messungen bekannt ist und die Distanzen zwischen den Linsen gemessen wurde, kann die Lichtgeschwindigkeit bestimmt werden. In der Tabelle 4 sind die relevanten Werte nochmals zusammengefasst.

Table 4: Zusammenfassung der relevanten Werte

D_1	$= \overline{D_1} \pm s_{\overline{D_1}}$	$= (998 \pm 3)\text{mm}$
D_2	$= \overline{D_2} \pm s_{\overline{D_2}}$	$= (4988 \pm 5)\text{mm}$
S_2	$= \overline{S_2} \pm s_{\overline{S_2}}$	$= (4894 \pm 5)\text{mm}$
b_{Alex}	$= \overline{b_{Alex}} \pm s_{\overline{b_{Alex}}}$	$= -(833.0024 \pm 5.3400) \cdot 10^{-9}$
$b_{Yohannes}$	$= \overline{b_{Yohannes}} \pm s_{\overline{b_{Yohannes}}}$	$= -(839.0909 \pm 8.9991) \cdot 10^{-9}$

Nun kann die mittlere Lichtgeschwindigkeit berechnet werden. Man beachte dass der Absolutwert von b für die Berechnungen verwendet wird, da eine negative Lichtgeschwindigkeit keinen Sinn macht.

$$\begin{aligned} \overline{c} &= \frac{1}{\overline{b}} \cdot 8\pi \cdot \overline{D_1}(\overline{S_2} + \overline{D_2}) \\ \overline{c_{Alex}} &= 297.5562 \cdot 10^6 \text{m/s} \\ \overline{c_{Yohannes}} &= 295.3971 \cdot 10^6 \text{m/s} \end{aligned}$$

Der Fehler wird mit dem *Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz* berechnet. c ist eine Funktion der gemessenen und gefitteten Werte b , D_1 , S_2 und D_2 . Die Partialableitungen der einzelnen Terme sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial b} &= -\frac{1}{b^2} \cdot 8\pi \cdot D_1(S_2 + D_2) \\ \frac{\partial c}{\partial D_1} &= \frac{1}{b} \cdot 8\pi \cdot (S_2 + D_2) \\ \frac{\partial c}{\partial D_2} &= \frac{1}{b} \cdot 8\pi \cdot D_1(S_2 + 1) \\ \frac{\partial c}{\partial S_2} &= \frac{1}{b} \cdot 8\pi \cdot D_1(1 + D_2) \end{aligned}$$

und somit ergeben sich die Fehler $s_{\overline{c_{Alex}}}$ und $s_{\overline{c_{Yohannes}}}$ als

$$s_{\bar{c}} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{b}}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{b}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{D}_1}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{D}_1}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{D}_2}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{D}_2}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{S}_2}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{S}_2}\right)^2}$$

$$s_{\bar{c}_{Alex}} = 2.46 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

$$s_{\bar{c}_{Yohannes}} = 3.52 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Die zwei unabhängig gemessene Lichtgeschwindigkeiten können nun gewichtet gemittelt werden um an einen genaueren Wert zu gelangen. Es gilt:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N g_{\bar{x}_i} \cdot \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^N g_{\bar{x}_i}} \quad \text{mit} \quad g_{\bar{x}_i} = \frac{1}{s_{\bar{x}_i}^2}$$

und somit

$$\bar{c} = \frac{\frac{1}{s_{\bar{c}_{Alex}}^2} \cdot \bar{c}_{Alex} + \frac{1}{s_{\bar{c}_{Yohannes}}^2} \cdot \bar{c}_{Yohannes}}{\frac{1}{s_{\bar{c}_{Alex}}^2} + \frac{1}{s_{\bar{c}_{Yohannes}}^2}}$$

$$= 296.85 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Für den Fehler des gewogenen Mittels gilt:

$$s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N g_{\bar{x}_i}}}$$

und somit

$$s_{\bar{c}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{s_{\bar{c}_{Alex}}^2} + \frac{1}{s_{\bar{c}_{Yohannes}}^2}}}$$

$$= 2.02 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Die Lichtgeschwindigkeit **ohne Kalibration** ergibt als:

$$c = \bar{c} + s_{\bar{c}} = \underline{\underline{(296.8 \pm 2.0) \cdot 10^6 \text{ m/s}}}$$

4.2 Kalibrationsmessung

Da a und b bekannt sind und die Distanzen zwischen den Linsen gemessen wurde, kann die genauere Lichtgeschwindigkeit bestimmt werden. In der Tabelle 5 sind die relevanten Werte nochmals zusammengefasst.

Table 5: Zusammenfassung der relevanten Werte

D_2	$= \overline{D_2} \pm s_{\overline{D_2}}$	$= (4988 \pm 5)\text{mm}$
S_2	$= \overline{S_2} \pm s_{\overline{S_2}}$	$= (4894 \pm 5)\text{mm}$
a_{Alex}	$= \overline{a_{Alex}} \pm s_{\overline{a_{Alex}}}$	$= (1999.827 \pm 2.461) \cdot 10^{-3}$
$a_{Yohannes}$	$= \overline{a_{Yohannes}} \pm s_{\overline{a_{Yohannes}}}$	$= (2002.809 \pm 3.498) \cdot 10^{-3}$
b_{Alex}	$= \overline{b_{Alex}} \pm s_{\overline{b_{Alex}}}$	$= -(833.0024 \pm 5.3400) \cdot 10^{-9}$
$b_{Yohannes}$	$= \overline{b_{Yohannes}} \pm s_{\overline{b_{Yohannes}}}$	$= -(839.0909 \pm 8.9991) \cdot 10^{-9}$

Die Daten von der Kalibrationsmessung wurden nach der Formel 7 gefittet. Die daraus gewonnene Steigung a kann verwendet werden um eine genauere Berechnung der Lichtgeschwindigkeit durchzuführen. Es gilt dabei die Formel 11.

Die mittlere Lichtgeschwindigkeiten berechnen sich wie folgt.

$$\begin{aligned}\bar{c} &= 4\pi \frac{\bar{a}}{\bar{b}} (S_2 + D_2) \\ \overline{c_{Alex}} &= 298.13 \cdot 10^6 \text{m/s} \\ \overline{c_{Yohannes}} &= 296.40 \cdot 10^6 \text{m/s}\end{aligned}$$

Der Fehler wird mit dem *Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz* berechnet. c ist eine Funktion der gemessenen und gefitteten Werte a , b , D_2 und S_2 . Die Partialableitungen der einzelnen Terme sind

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial a} &= 4\pi \frac{1}{b} (S_2 + D_2) \\ \frac{\partial c}{\partial b} &= -4\pi \frac{a}{b^2} (S_2 + D_2) \\ \frac{\partial c}{\partial S_2} &= 4\pi \frac{a}{b} (1 + D_2) \\ \frac{\partial c}{\partial D_2} &= 4\pi \frac{a}{b} (S_2 + 1)\end{aligned}$$

und somit ergeben sich die Fehler $s_{\overline{c_{Alex}}}$ und $s_{\overline{c_{Yohannes}}}$ als

$$\begin{aligned}s_{\bar{c}} &= \sqrt{\left(\left.\frac{\partial \bar{c}}{\partial a}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{a}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial \bar{c}}{\partial b}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{b}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial \bar{c}}{\partial S_2}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{S_2}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial \bar{c}}{\partial D_2}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{D_2}}\right)^2} \\ s_{\overline{c_{Alex}}} &= 2.32 \cdot 10^6 \text{m/s} \\ s_{\overline{c_{Yohannes}}} &= 3.46 \cdot 10^6 \text{m/s}\end{aligned}$$

Die zwei unabhängig gemessene Lichtgeschwindigkeiten können nun gewichtet gemittelt werden um an einen genaueren Wert zu gelangen. Es gilt:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N g_{\bar{x}_i} \cdot \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^N g_{\bar{x}_i}} \quad \text{mit} \quad g_{\bar{x}_i} = \frac{1}{s_{\bar{x}_i}^2}$$

und somit

$$\begin{aligned}\bar{c} &= \frac{\frac{1}{s_{\bar{c}Alex}^2} \cdot \bar{c}_{Alex} + \frac{1}{s_{\bar{c}Yohannes}^2} \cdot \bar{c}_{Yohannes}}{\frac{1}{s_{\bar{c}Alex}^2} + \frac{1}{s_{\bar{c}Yohannes}^2}} \\ &= 297.59 \cdot 10^6 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Für den Fehler des gewogenen Mittels gilt:

$$s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N g_{\bar{x}_i}}}$$

und somit

$$\begin{aligned}s_{\bar{c}} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{s_{\bar{c}Alex}^2} + \frac{1}{s_{\bar{c}Yohannes}^2}}} \\ &= 1.93 \cdot 10^6 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Die Lichtgeschwindigkeit **mit Kalibration** ergibt als:

$$c = \bar{c} + s_{\bar{c}} = \underline{\underline{(297.6 \pm 1.9) \cdot 10^6 \text{ m/s}}}$$

5 Resultate und Diskussion

Die berechneten Werte sind als Tabelle und grafisch zusammengefasst (siehe Tabelle 6 und Abbildung 14).

Table 6: Zusammenfassung der errechneten Werte

	Ohne Kalibration	Mit Kalibration
Alex Murray	$(297.6 \pm 2.5) \cdot 10^6 \text{ m/s}$	$(298.1 \pm 2.3) \cdot 10^6 \text{ m/s}$
Yohannes Measho	$(295.4 \pm 3.5) \cdot 10^6 \text{ m/s}$	$(296.4 \pm 3.5) \cdot 10^6 \text{ m/s}$
Gewichtete Mittelwerte	$(296.8 \pm 2.0) \cdot 10^6 \text{ m/s}$	$(297.7 \pm 1.9) \cdot 10^6 \text{ m/s}$

Es ist klar zu sehen dass Herr Murray genauer gemessen hat als Herr Measho, weil die Sicherheit bei allen Messungen kleiner ist. Die Kalibrationsmessung hat die Sicherheit nicht wesentlich verbessern können, jedoch hat sie die Resultate näher am “wahren Wert”, sprich, Literaturwert verschieben können, wie in der Abbildung 14 schön zu sehen ist.

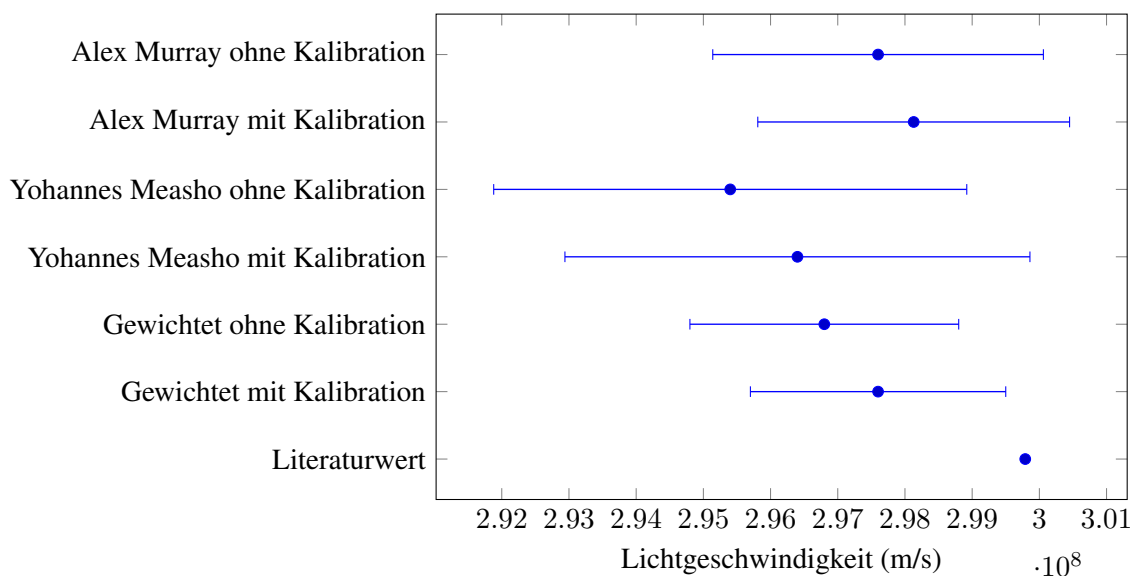


Figure 14: Grafische Darstellung der Einzelmessungen, mit und ohne Kalibration

Da die Messwerte alle unter dem Literaturwert liegen – und nicht wie statistisch erwartet oberhalb und unterhalb davon gleichmässig zerstreut sind – lässt sich daraus schliessen dass ein systematischer Fehler vorliegt. Die Messeinrichtung hat sich während den Messungen nie geändert. Es ist darauf zurückzuschliessen, dass die Abweichung von den gemessenen Distanzen D_1 , D_2 , und S_2 stammen.

Um den systematischen Fehler entgegenwirken zu können hätte man die Distanzen von mehreren Personen unabhängig voneinander messen lassen können.

Ein weiterer Systematischer Fehler ist natürlich die Unsicherheit des Brennpunktes der Linsen. Auch hier könnte man entgegenwirken indem man die ganzen Messungen mehrmals mit verschiedenen Linsen durchführen würde. Die Linsen nach jeder Messung neu zu konfigurieren würde die Unsicherheit zwar verkleinern, aber würde nicht ausreichen, den systematischen Fehler ganz zu eliminieren, weil der Brennpunkt trotzdem immer gleich bleibt.

Die Resultate mit und ohne Kalibration wurden absichtlich nicht auch noch gewichtet gemittelt. Dies wäre sinnlos, weil sie von einander abhängig sind, und es würde den “wahren Wert” nur verfälschen.