

LICHTGESCHWINDIGKEIT

Murray, Alex

`alexander.murray@students.fhnw.ch`

Measho, Yohannes

`yohannes.measho@students.fhnw.ch`

April 2, 2017

1 Arbeitsgrundlagen

1.1 Messung der Lichtgeschwindigkeit nach Michelson

In diesem Versuch wird die Lichtgeschwindigkeit nach der Methode von Michelson (Abbildung 1) gemessen. Dabei wird ein Laserstrahl durch verschiedene Linsen, Spiegeln und Blenden hin- und zurückgeschickt. Ein Spiegel, DS , wird mit einem Motor bei verschiedenen, bekannten Drehzahlen rotiert. Da das Licht endlich schnell ist, wird der Drehspiegel einen anderen Winkel haben nach Zurückreflektieren des Lichtstrahls vom Endspiegel ES und verursacht somit eine Verschiebung des Zurückkommenden Laserstrahls. Ist die Distanz zwischen Endspiegel und Drehspiegel $D_2 + S_2$ sowie die Drehzahl ω bekannt, so kann durch Messung der Verschiebung die Lichtgeschwindigkeit berechnet werden.

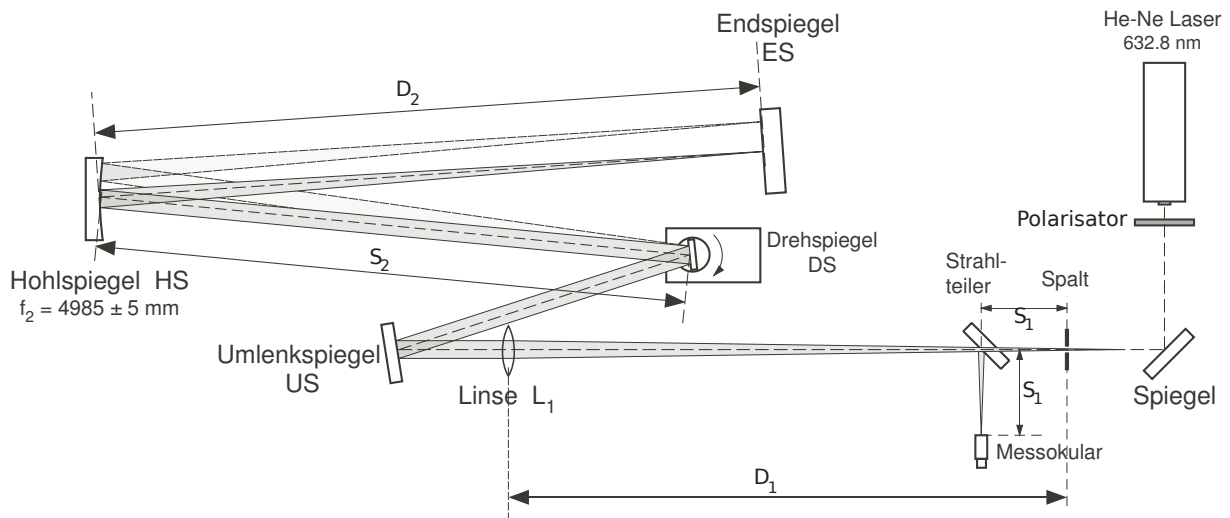


Figure 1: Versuchsaufbau nach Michelson. Auszug aus der Aufgabenstellung.

Der Versuch nach Michelson kann mit einer Äquivalenten Linsenkonfiguration dargestellt werden, wie in der Abbildung 2 ersichtlich ist.

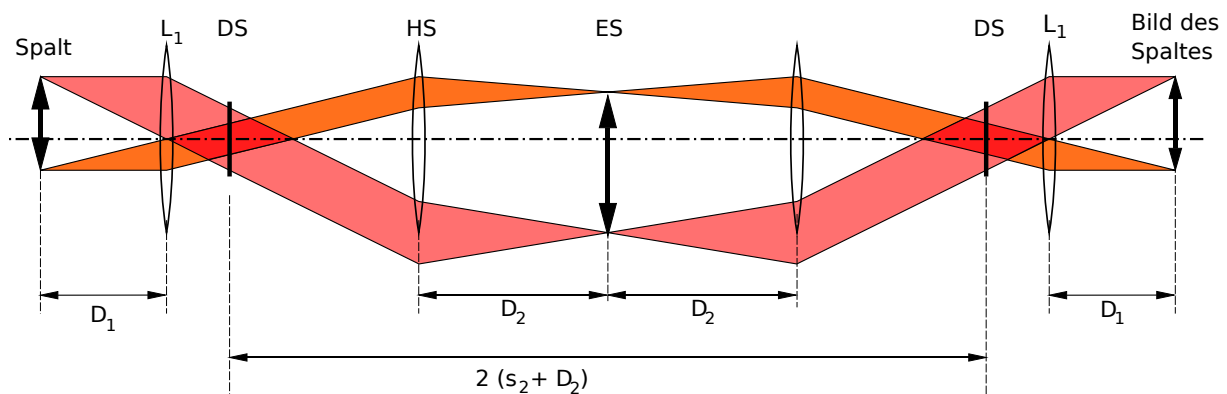


Figure 2: Äquivalente Linsenkonfiguration des Versuchs. Auszug aus der Aufgabenstellung

Bei rotierendem Spiegel findet das vom Endspiegel zurückkehrende Licht den Drehspiegel wegen der endlichen Laufzeit um einen kleinen Winkel δ gedreht

$$\delta = \omega \cdot \Delta t = \omega \cdot \frac{2(S_2 + D_2)}{c} \quad (1)$$

wobei ω die Kreisfrequenz des Drehspiegels und Δt die Laufzeit des Lichtes vom Drehspiegel zum Endspiegel und zurück bezeichnen. Diese Drehung des Spiegels hat eine Richtungsänderung der Bündelachse um den Winkel 2δ (Reflexionsgesetz, Abbildung 3, $\alpha = \alpha' \rightarrow 2\delta$) und damit eine seitliche Verschiebung x des Bildes des Spaltes zur Folge.

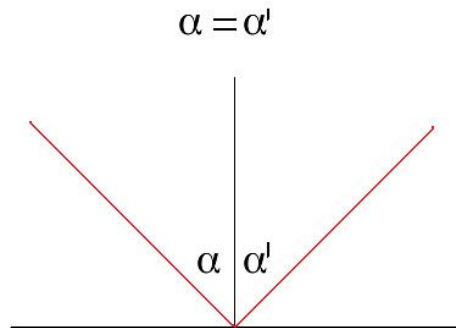


Figure 3: Reflexionsgesetz

Für das Verständnis des Strahlenganges benötigen wir die Abbildungsgleichung und den Abbildungsmaßstab β für dünne Linsen.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (2)$$

Wobei f die Brennweite, g die Gegenstandsweite (Abstand Linse - Gegenstand), b die Bildweite, B die Bildgröße und G die Gegenstandsgröße bezeichnen.

Da die Kleinwinkelnäherung $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ in unserem Falle sicher zulässig ist, gilt

$$2\delta = \frac{x}{D_1} \quad (3)$$

und damit

$$c = 4\omega \cdot \frac{(S_2 + D_2)D_1}{x} \quad (4)$$

Diese Formel muss für die lineare Regression umgeformt und mit einem Offset x_0 angepasst werden, weil die Millimeterschrauben einen unbekannten Offset hat.

$$x = \frac{1}{c} \cdot 8\pi f \cdot D_1(S_2 + D_2) + x_0 \quad \text{oder} \quad x = b \cdot f + x_{02} \quad (5)$$

Wobei f die Drehfrequenz des Motors ist und $b = \frac{1}{c} \cdot 8\pi \cdot D_1(S_2 + D_2)$.

Eine schöne Visualisierung der Verschiebung in Abhängigkeit des einstrahlwinkels kann in der Abbildung 4 gesehen werden¹. Die weißen Linien strahlen mit einem anderen Winkel als die gelbe Linien in die Linse und verursachen dementsprechend eine vertikale Verschiebung des Bildes.

¹Simulation einer Linse. https://phet.colorado.edu/sims/geometric-optics/geometric-optics_de.html. Abgerufen, 25-10-2015 17:20.

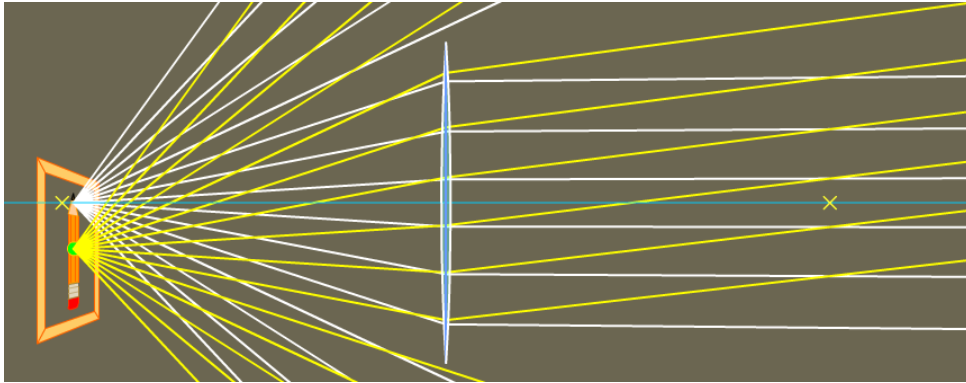


Figure 4: Verhalten von Lichtstrahlen bei unterschiedlichen Einstrahlwinkel

Der grösste Beitrag zur Unsicherheit der Lichtgeschwindigkeitsmessung stammt von der Brennweite der Linse f_1 respektiv der Einstellung von D_1 . Aus diesem Grunde wird die Verschiebung des Okulars in Funktion des Winkels, um den der rückkehrende Laserstrahl verdreht ist, gemessen. Auf einem Arm der Länge $l_{Arm} = (0.50000 \pm 0.00005)\text{m}$ ist ein planer Spiegel montiert. Mit Hilfe einer Mikrometerschraube wird der Arm und damit der Spiegel kontrolliert um die entsprechende Achse verdreht. Bei einer Verstellung der Mikrometerschraube um z resultiert damit ein Winkel

$$\varphi_{Spiegel} = \arctan \frac{z}{l} \approx \frac{z}{l} \quad (6)$$

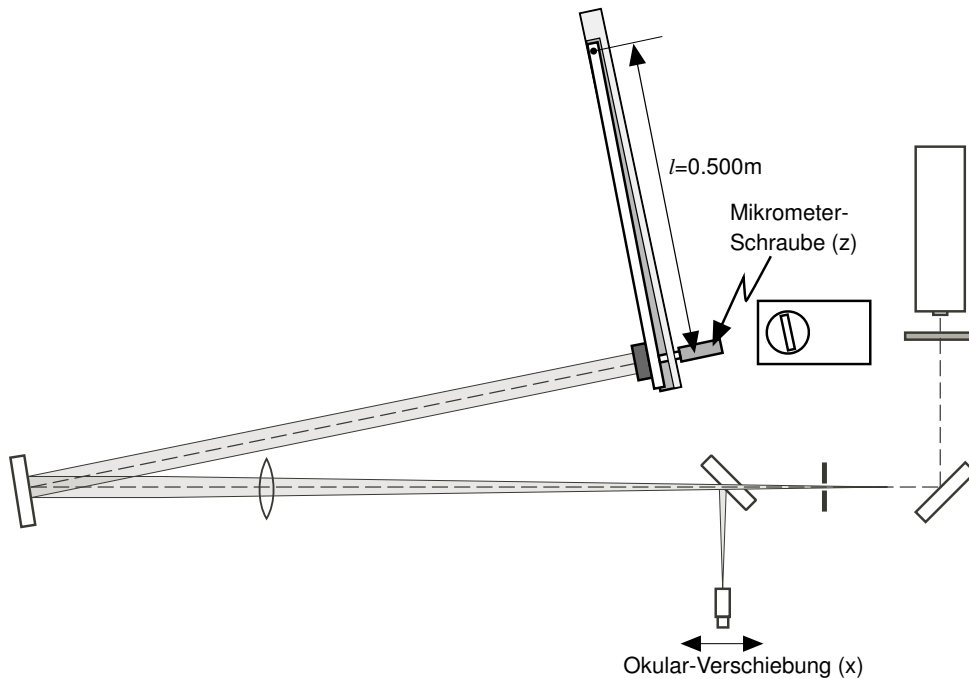


Figure 5: Messanordnung Kalibration

Auch hier gilt für die lineare Regression die Formel

$$x = a \cdot \varphi_{Spiegel} + x_{01} = \frac{a}{l} + x_{01} \quad (7)$$

Setzt man das in der Formel 5 ein, erhält man mit $\delta = \varphi_{Spiegel}$

$$\delta = \frac{x - x_{01}}{a} = \frac{b \cdot f + x_{02} - x_{01}}{a} = \frac{b}{a} \cdot f + \frac{x_{02} - x_{01}}{a} \quad (8)$$

Gemäss Formeln 3 und 4 gilt:

$$\delta = 4\pi f \cdot \frac{S_2 + D_2}{c} + \delta_0 \quad (9)$$

und folglich

$$\frac{b}{a} \cdot f = 4\pi f \cdot \frac{S_2 + D_2}{c} \quad (10)$$

Löst man nach c auf, kriegt man die endgültige Formel:

$$c = 4\pi \frac{a}{b} (S_2 + D_2) \quad (11)$$

Damit konnte die **geschätzte**, systematische Unsicherheit von D_1 ausgeschlossen werden – sie wurde ersetzt durch die zusätzliche statistisch **berechnete** Unsicherheit der Steigung a .

2 Durchführung

2.1 Versuchsanordnung Lichtgeschwindigkeitsmessung

Der Laser wurde eingeschaltet und der Umlenkspiegel wurde so angepasst, bis der Laserstrahl parallel zur langen Tischkante verliefte, was in der Abbildung 6 links ersichtlich ist. Weiter wurde die Höhe h vom Laser zum Tisch gemessen und der Strahl nach dem Umlenkspiegel an die gleiche Höhe h angepasst, was in der Abbildung 6 illustriert ist.

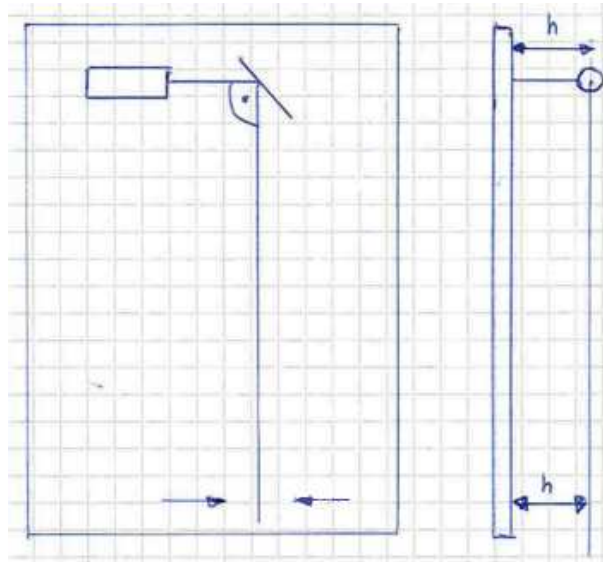


Figure 6: Tisch mit Laser von Oben (links) und von der Seite (rechts) gesehen

Der Laser und der Hohlspiegel HS befinden sich auf separate Tische. Die Höhen der Tische zum Boden h_3 und h_4 wurden gemessen. Die Höhe h_2 – also die Distanz zwischen dem Zentrum des Hohlspiegels und dem Tisch – wurde weiter durch Feinjustieren des Umlenkspiegels angepasst bis $h_1 + h_3 = h_2 + h_4$.

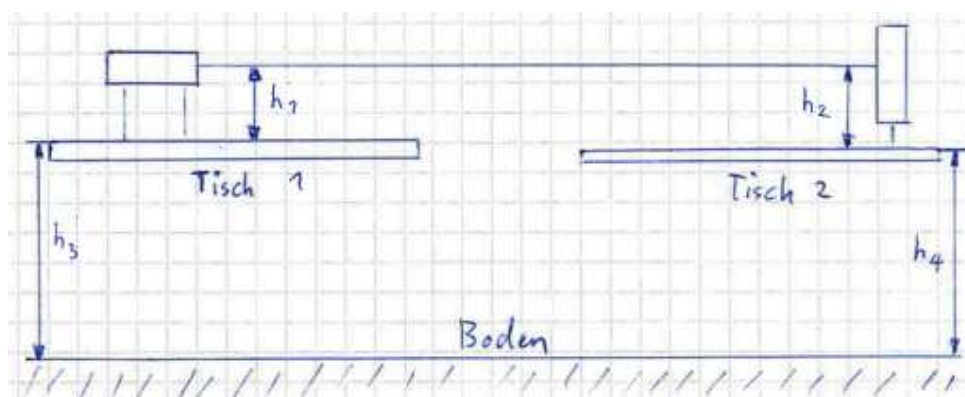


Figure 7: Abstand der beiden Tische vom Boden

Die gemessene Höhen betrugen nach der Anpassung

$$h_1 = (\bar{h}_1 \pm s_{\bar{h}_1}) = (256 \pm 3) \text{ mm}$$

$$h_2 = (\bar{h}_2 \pm s_{\bar{h}_2}) = (265 \pm 3) \text{ mm}$$

$$h_3 = (\bar{h}_3 \pm s_{\bar{h}_3}) = (904 \pm 1) \text{ mm}$$

$$h_4 = (\bar{h}_4 \pm s_{\bar{h}_4}) = (895 \pm 1) \text{ mm}$$

In der Abbildung 8 ist eine Skizze der Messeinrichtung.

Der Umlenkspiegel US wird nun in den Laserstrahl platziert und auf den Zentrum des Drehspiegels DS ausgerichtet. Durch Feinjustieren des Umlenkspiegels US kann der Laserstrahl genau auf den Zentrum des Drehspiegels DS ausgerichtet werden.

Der Motor des Drehspiegels wird von Hand rotiert bis der Drehspiegel den Laserstrahl genau auf den Zentrum des Hohlspiegels HS umlenkt.

Nun wird der Hohlspiegel HS angepasst und feinjustiert, bis er den Strahl auf dem Zentrum des Endspiegels ES umlenkt. Dabei ist es wichtig, dass die Distanz zwischen den Spiegeln HS und ES genau $f_2 = (4985 \pm 5)\text{mm}$ beträgt. Der Endspiegel ES wurde verschoben und mit einem Laserdistanzmessgerät wurde die Distanz auf $(4.988 \pm 3)\text{m}$ gemessen.

Nun wird der Endspiegel ES feinjustiert, bis der Laserstrahl wieder direkt auf den Hohlspiegel HS zurückreflektiert wird. Ist der Strahl auf den Hohlspiegel ausgerichtet, so schaut man auf den Drehspiegel um den zurückreflektierenden Laserstrahl weiter feiner einzustellen. Ist sie auf den Drehspiegel genug genau ausgerichtet, schaut man weiter auf den Umlenkspiegel US und kann somit wieder durch feinjjustieren des Endspiegels ES den Strahl noch weiter genauer ausrichten.

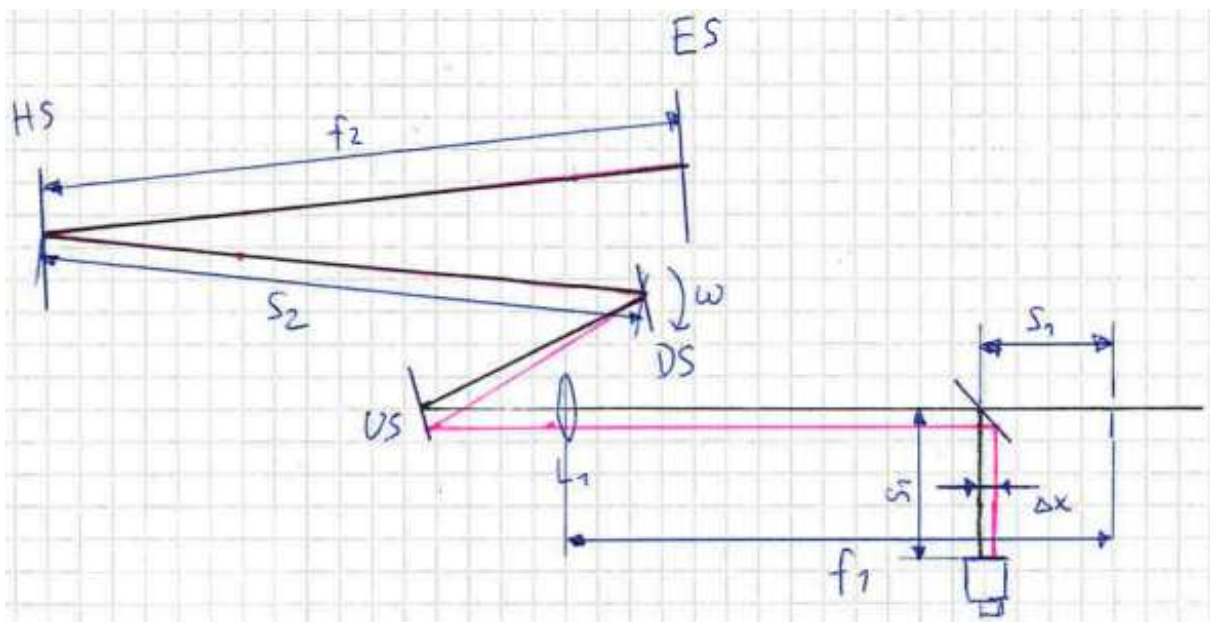


Figure 8: Vereinfachte Messeinrichtung mit relevanten Daten

Nun wird der Strahlteiler in den Laserstrahl eingefügt, in der Nähe des Messokulars. Wenn alles stimmt, müsste der zurückreflektierende Laserstrahl nun durch das Messokular strahlen und auf die Wand aufreffen.

Die Distanz S_1 vom Laserstrahl zum Okular wird gemessen und der Spalt wird verschoben, bis er auch mit der Distanz S_1 vom Strahlteiler entfernt ist.

Gemessen wurde $S_1 = (107 \pm 3)\text{mm}$.

Jetzt wird die Linse L_1 in den Laserstrahl eingefügt. Die Linse muss gleich der Brennweite $f_1 = 1000\text{mm}$ vom Spalt distanziert werden.

Gemessen wurde die Distanz von der Linse L_1 zum Spalt $(998 \pm 3)\text{mm}$.

Zur Übersicht sind die gemessene Grössen hier nochmals zusammengefasst:

f_1	$(998 \pm 3)\text{mm}$
S_1	$(107 \pm 3)\text{mm}$
f_2	$(4988 \pm 5)\text{mm}$
S_2	$(4894 \pm 5)\text{mm}$

Als letztes wird der Spalt geschlossen bis die Distanz d des Interferenzmusters (siehe Abbildung 9) auf dem Drehspiegel DS in etwa so breit ist wie der Drehspiegel selbst.

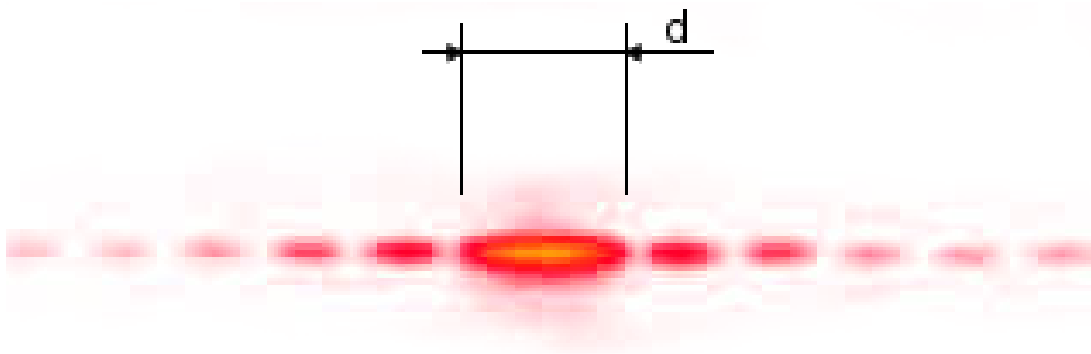


Figure 9: Beugungsmuster des Laserstrahls, verursacht durch den Spalt

Danach wird das Filter gedreht und der Laserstrahl abgeschwächt, damit der Messvorgang auch ohne Massensterben von Netzhautzellen erfolgen kann.

2.2 Versuchsanordnung Kalibrationsmessung

Für die Kalibrationsmessung wurde wie in der Abbildung 5 vorgegangen. Ein Spiegel, montiert auf einem hochpräzisen Arm, wurde in den Laserstrahl gestellt. Der Arm wurde zwischen $12.5\mu\text{m}$ und $17.5\mu\text{m}$ verstellt. Die Distanz wurde wieder dabei gemessen.

2.3 Messmethoden

In der Tabelle 1 sind alle Geräte aufgelistet, die gebraucht wurden, um die Distanzen zwischen den Optikelementen zu messen. Die Toleranzen sind grosszügig angegeben.

Table 1: Liste von Messgeräten

Bezeichnung	Genauigkeit
Disto 08 Laserdistanzmessgerät	$\pm 1\text{mm}$
30cm Lineal, Metall	$\pm 2\text{mm}$

Es ist zu beachten dass je nach Art der Messung die Toleranz nochmals zunimmt, wie zum Beispiel beim Messen des Abstands des Laserstrahls. Die geschätzten Toleranzen sind bei jeder Messung angegeben.

2.4 Messungen

Wegen nicht-genauem Lesen der Versuchsanleitung sind uns zwei Details entgangen: Die maximale Drehzahl des Motors haben wir bei der Lichtgeschwindigkeitsmessung überschritten; es wurde bis 1600 rpm gemessen obwohl der Motor unter 1000 rpm hätte betrieben werden sollen. Weiter wurde bei der

Kalibrationsmessung nicht im Bereich von den im Versuchsanleitung angegebenen $\pm 1\text{mm}$ gemessen, sondern im Bereich von $\pm 2.5\text{mm}$.

3 Auswertung

3.1 Lichtgeschwindigkeitsmessung

Table 2: Distanzmessungen bei Inkrementieren und Dekrementieren der Drehfrequenz

(a) Messung von Alex Murray		(b) Messung von Yohannes Measho	
Drehfrequenz (Hz)	Distanz (μm)	Drehfrequenz (Hz)	Distanz (μm)
498	0	1498	0
605	-83	1388	124
702	-169	1289	192
800	-250	1199	280
885	-324	1106	353
1008	-414	1009	431
1096	-499	912	516
1200	-586	807	590
1305	-666	708	682
1400	-741	603	771
1498	-839	502	851

In den Tabellen 2a und 2b sind die von Alex Murray und Yohannes Measho gemessene Distanzenverschiebungen in Funktion der Drehfrequenz f aufgezeichnet. Die Messungen in der Tabelle 2a wurden bei Inkrementieren der Drehfrequenz erfasst, die Messungen in der Tabelle 2b wurden bei Dekrementieren der Drehfrequenz erfasst.

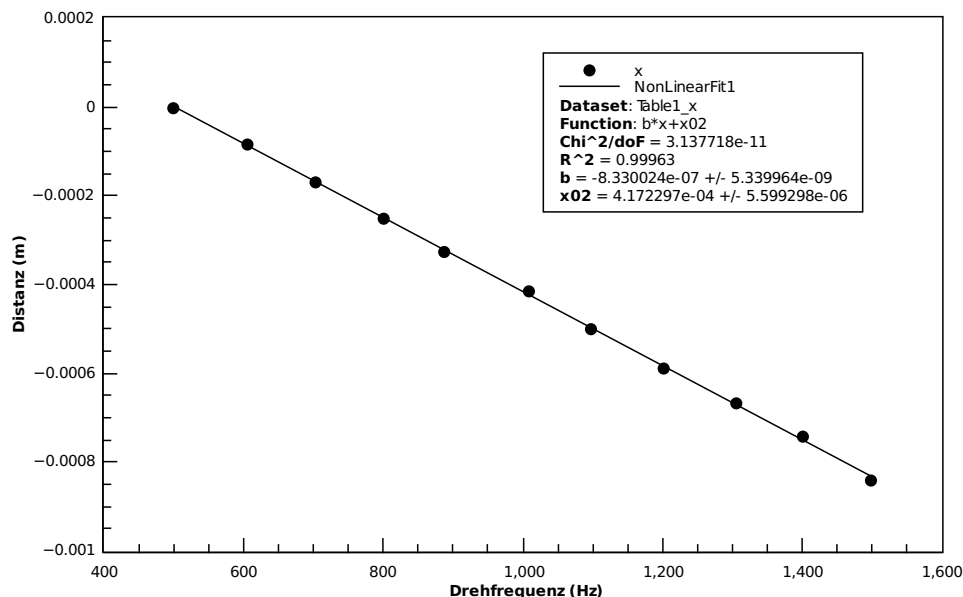


Figure 10: Lineare Regression zur Berechnung des Faktors b , Messdaten von Alex Murray

In der Abbildung 10 sind die Messpunkte von der Tabelle 2a als XY-Scatter Plot dargestellt. Die Punkte wurden nach der Formel 5 gefittet und damit ergibt sich der Faktor b_{Alex} als:

$$b_{Alex} = \overline{b_{Alex}} \pm s_{\overline{b_{Alex}}} = -(833.0024 \pm 5.3400) \cdot 10^{-9} \quad (12)$$

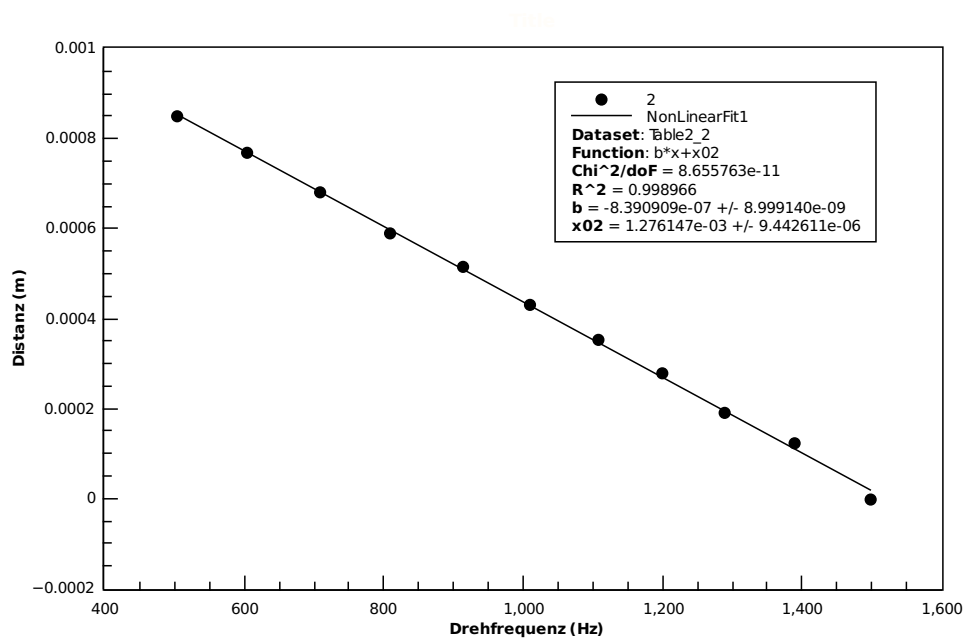


Figure 11: Lineare Regression zur Berechnung des Faktors b , Messdaten von Yohannes Measho

In der Abbildung 11 sind die Messpunkte von der Tabelle 2b als XY-Scatter Plot dargestellt. Die Punkte wurden nach der Formel 5 gefittet und damit ergibt sich der Faktor $b_{Yohannes}$ als:

$$b_{Yohannes} = \overline{b_{Yohannes}} \pm s_{\overline{b_{Yohannes}}} = -(839.0909 \pm 8.9991) \cdot 10^{-9} \quad (13)$$

3.2 Kalibrationsmessung

Table 3: Kalibrationsmessdaten

(a) Messung von Alex Murray

$x(mm)$	$z(mm)$
10.042	12.5
8.031	13.0
6.049	13.5
4.049	14.0
1.990	14.5
-0.019	15.0
-1.988	15.5
-3.955	16.0
-5.954	16.5
-7.973	16.5
-9.952	17.5

(b) Messung von Yohannes Measho

$x(mm)$	$z(mm)$
10.047	12.5
8.020	13.0
5.980	13.5
3.990	14.0
1.926	14.5
-0.053	15.0
-2.048	15.5
-4.030	16.0
-6.039	16.5
-7.997	17.0
-9.987	17.5

In den Tabellen 3a und 3b sind die Kalibrationsmessungen von Alex Murray und Yohannes Measho aufgeführt. Beide haben die gleiche Messung unabhängig von einander durchgeführt.

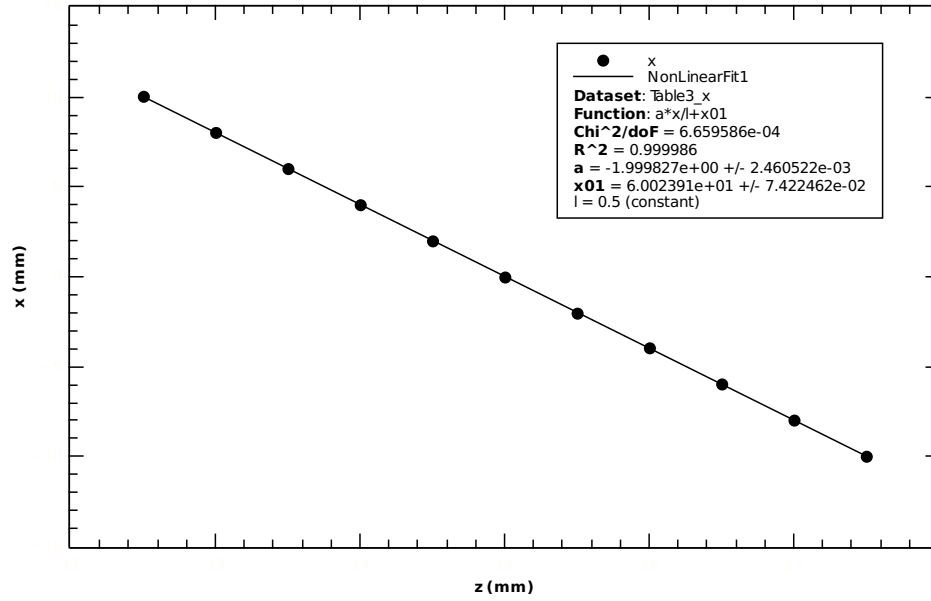


Figure 12: Lineare Regression zur Berechnung des Faktors a anhand der Kalibrationsmessung, Messdaten von Alex Murray

In der Abbildung 12 sind die Messpunkte von der Tabelle 3a als XY-Scatter Plot dargestellt. Die Punkte wurden nach der Formel 7 gefittet und somit ergibt sich der Faktor a_{Alex} als:

$$a_{Alex} = \overline{a_{Alex}} \pm s_{\overline{a_{Alex}}} = -(1999.827 \pm 2.461) \cdot 10^{-3} \quad (14)$$

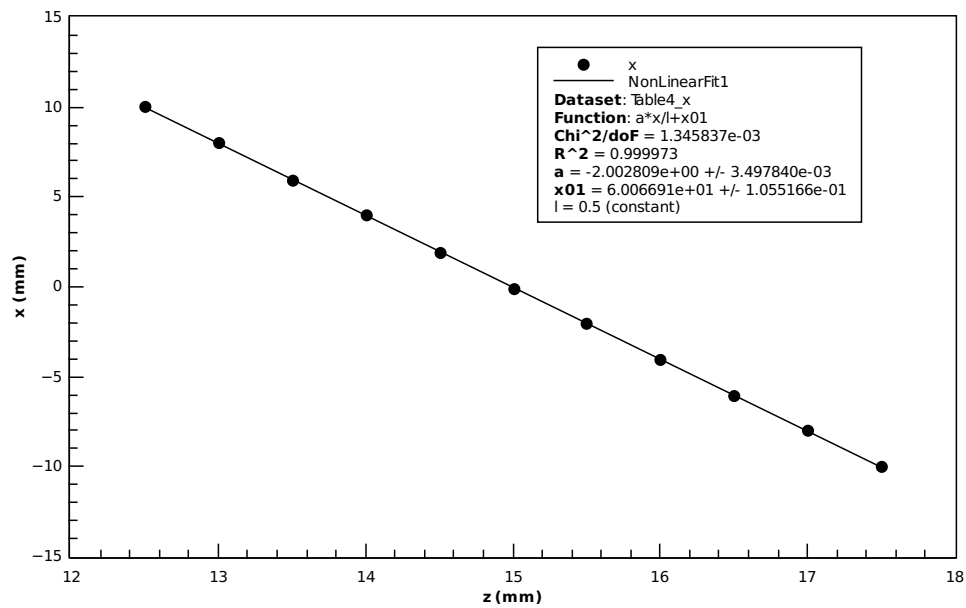


Figure 13: Lineare Regression zur Berechnung des Faktors a anhand der Kalibrationsmessung, Messdaten von Yohannes Measho

In der Abbildung 13 sind die Messpunkte von der Tabelle 3b als XY-Scatter Plot dargestellt. Die Punkte wurden nach der Formel 7 gefittet und somit ergibt sich der Faktor $a_{Yohannes}$ als:

$$a_{Yohannes} = \overline{a_{Yohannes}} \pm s_{\overline{a_{Yohannes}}} = -(2002.809 \pm 3.498) \cdot 10^{-3} \quad (15)$$

4 Fehlerrechnung

4.1 Lichtgeschwindigkeitsmessung

Die Daten von der Lichtgeschwindigkeitsmessung wurden nach der Formel 5 gefittet. Es gilt:

$$x = b \cdot f + x_{02} \quad \text{mit} \quad c = \frac{1}{b} \cdot 8\pi \cdot D_1(S_2 + D_2) \quad (16)$$

Da b für beide Messungen bekannt ist und die Distanzen zwischen den Linsen gemessen wurde, kann die Lichtgeschwindigkeit bestimmt werden. In der Tabelle 4 sind die relevanten Werte nochmals zusammengefasst.

Table 4: Zusammenfassung der relevanten Werte

D_1	$= \overline{D_1} \pm s_{\overline{D_1}}$	$= (998 \pm 3)\text{mm}$
D_2	$= \overline{D_2} \pm s_{\overline{D_2}}$	$= (4988 \pm 5)\text{mm}$
S_2	$= \overline{S_2} \pm s_{\overline{S_2}}$	$= (4894 \pm 5)\text{mm}$
b_{Alex}	$= \overline{b_{Alex}} \pm s_{\overline{b_{Alex}}}$	$= -(833.0024 \pm 5.3400) \cdot 10^{-9}$
$b_{Yohannes}$	$= \overline{b_{Yohannes}} \pm s_{\overline{b_{Yohannes}}}$	$= -(839.0909 \pm 8.9991) \cdot 10^{-9}$

Nun kann die mittlere Lichtgeschwindigkeit berechnet werden. Man beachte dass der Absolutwert von b für die Berechnungen verwendet wird, da eine negative Lichtgeschwindigkeit keinen Sinn macht.

$$\begin{aligned} \overline{c} &= \frac{1}{\overline{b}} \cdot 8\pi \cdot \overline{D_1}(\overline{S_2} + \overline{D_2}) \\ \overline{c_{Alex}} &= 297.5562 \cdot 10^6 \text{m/s} \\ \overline{c_{Yohannes}} &= 295.3971 \cdot 10^6 \text{m/s} \end{aligned}$$

Der Fehler wird mit dem *Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz* berechnet. c ist eine Funktion der gemessenen und gefitteten Werte b , D_1 , S_2 und D_2 . Die Partialableitungen der einzelnen Terme sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial b} &= -\frac{1}{b^2} \cdot 8\pi \cdot D_1(S_2 + D_2) \\ \frac{\partial c}{\partial D_1} &= \frac{1}{b} \cdot 8\pi \cdot (S_2 + D_2) \\ \frac{\partial c}{\partial D_2} &= \frac{1}{b} \cdot 8\pi \cdot D_1(S_2 + 1) \\ \frac{\partial c}{\partial S_2} &= \frac{1}{b} \cdot 8\pi \cdot D_1(1 + D_2) \end{aligned}$$

und somit ergeben sich die Fehler $s_{\overline{c_{Alex}}}$ und $s_{\overline{c_{Yohannes}}}$ als

$$s_{\bar{c}} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{b}}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{b}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{D}_1}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{D}_1}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{D}_2}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{D}_2}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{S}_2}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{S}_2}\right)^2}$$

$$s_{\bar{c}_{Alex}} = 2.46 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

$$s_{\bar{c}_{Yohannes}} = 3.52 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Die zwei unabhängig gemessene Lichtgeschwindigkeiten können nun gewichtet gemittelt werden um an einen genaueren Wert zu gelangen. Es gilt:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N g_{\bar{x}_i} \cdot \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^N g_{\bar{x}_i}} \quad \text{mit} \quad g_{\bar{x}_i} = \frac{1}{s_{\bar{x}_i}^2}$$

und somit

$$\bar{c} = \frac{\frac{1}{s_{\bar{c}_{Alex}}^2} \cdot \bar{c}_{Alex} + \frac{1}{s_{\bar{c}_{Yohannes}}^2} \cdot \bar{c}_{Yohannes}}{\frac{1}{s_{\bar{c}_{Alex}}^2} + \frac{1}{s_{\bar{c}_{Yohannes}}^2}}$$

$$= 296.85 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Für den Fehler des gewogenen Mittels gilt:

$$s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N g_{\bar{x}_i}}}$$

und somit

$$s_{\bar{c}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{s_{\bar{c}_{Alex}}^2} + \frac{1}{s_{\bar{c}_{Yohannes}}^2}}}$$

$$= 2.02 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Die Lichtgeschwindigkeit **ohne Kalibration** ergibt als:

$$c = \bar{c} + s_{\bar{c}} = \underline{\underline{(296.8 \pm 2.0) \cdot 10^6 \text{ m/s}}}$$

4.2 Kalibrationsmessung

Da a und b bekannt sind und die Distanzen zwischen den Linsen gemessen wurde, kann die genauere Lichtgeschwindigkeit bestimmt werden. In der Tabelle 5 sind die relevanten Werte nochmals zusammengefasst.

Table 5: Zusammenfassung der relevanten Werte

D_2	$= \overline{D_2} \pm s_{\overline{D_2}}$	$= (4988 \pm 5)\text{mm}$
S_2	$= \overline{S_2} \pm s_{\overline{S_2}}$	$= (4894 \pm 5)\text{mm}$
a_{Alex}	$= \overline{a_{Alex}} \pm s_{\overline{a_{Alex}}}$	$= (1999.827 \pm 2.461) \cdot 10^{-3}$
$a_{Yohannes}$	$= \overline{a_{Yohannes}} \pm s_{\overline{a_{Yohannes}}}$	$= (2002.809 \pm 3.498) \cdot 10^{-3}$
b_{Alex}	$= \overline{b_{Alex}} \pm s_{\overline{b_{Alex}}}$	$= -(833.0024 \pm 5.3400) \cdot 10^{-9}$
$b_{Yohannes}$	$= \overline{b_{Yohannes}} \pm s_{\overline{b_{Yohannes}}}$	$= -(839.0909 \pm 8.9991) \cdot 10^{-9}$

Die Daten von der Kalibrationsmessung wurden nach der Formel 7 gefittet. Die daraus gewonnene Steigung a kann verwendet werden um eine genauere Berechnung der Lichtgeschwindigkeit durchzuführen. Es gilt dabei die Formel 11.

Die mittlere Lichtgeschwindigkeiten berechnen sich wie folgt.

$$\begin{aligned}\bar{c} &= 4\pi \frac{\bar{a}}{\bar{b}} (S_2 + D_2) \\ \overline{c_{Alex}} &= 298.13 \cdot 10^6 \text{m/s} \\ \overline{c_{Yohannes}} &= 296.40 \cdot 10^6 \text{m/s}\end{aligned}$$

Der Fehler wird mit dem *Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz* berechnet. c ist eine Funktion der gemessenen und gefitteten Werte a , b , D_2 und S_2 . Die Partialableitungen der einzelnen Terme sind

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial a} &= 4\pi \frac{1}{b} (S_2 + D_2) \\ \frac{\partial c}{\partial b} &= -4\pi \frac{a}{b^2} (S_2 + D_2) \\ \frac{\partial c}{\partial S_2} &= 4\pi \frac{a}{b} (1 + D_2) \\ \frac{\partial c}{\partial D_2} &= 4\pi \frac{a}{b} (S_2 + 1)\end{aligned}$$

und somit ergeben sich die Fehler $s_{\overline{c_{Alex}}}$ und $s_{\overline{c_{Yohannes}}}$ als

$$\begin{aligned}s_{\bar{c}} &= \sqrt{\left(\left.\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{a}}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{a}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{b}}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\bar{b}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial \bar{c}}{\partial \overline{S_2}}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\overline{S_2}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial \bar{c}}{\partial \overline{D_2}}\right|_{\bar{c}} \cdot s_{\overline{D_2}}\right)^2} \\ s_{\overline{c_{Alex}}} &= 2.32 \cdot 10^6 \text{m/s} \\ s_{\overline{c_{Yohannes}}} &= 3.46 \cdot 10^6 \text{m/s}\end{aligned}$$

Die zwei unabhängig gemessene Lichtgeschwindigkeiten können nun gewichtet gemittelt werden um an einen genaueren Wert zu gelangen. Es gilt:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N g_{\bar{x}_i} \cdot \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^N g_{\bar{x}_i}} \quad \text{mit} \quad g_{\bar{x}_i} = \frac{1}{s_{\bar{x}_i}^2}$$

und somit

$$\begin{aligned}\bar{c} &= \frac{\frac{1}{s_{\bar{c}Alex}^2} \cdot \overline{c_{Alex}} + \frac{1}{s_{\bar{c}Yohannes}^2} \cdot \overline{c_{Yohannes}}}{\frac{1}{s_{\bar{c}Alex}^2} + \frac{1}{s_{\bar{c}Yohannes}^2}} \\ &= 297.59 \cdot 10^6 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Für den Fehler des gewogenen Mittels gilt:

$$s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N g_{\bar{x}_i}}}$$

und somit

$$\begin{aligned}s_{\bar{c}} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{s_{\bar{c}Alex}^2} + \frac{1}{s_{\bar{c}Yohannes}^2}}} \\ &= 1.93 \cdot 10^6 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Die Lichtgeschwindigkeit **mit Kalibration** ergibt als:

$$c = \bar{c} + s_{\bar{c}} = \underline{\underline{(297.6 \pm 1.9) \cdot 10^6 \text{ m/s}}}$$

5 Resultate und Diskussion

Die berechneten Werte sind als Tabelle und grafisch zusammengefasst (siehe Tabelle 6 und Abbildung 14).

Table 6: Zusammenfassung der errechneten Werte

	Ohne Kalibration	Mit Kalibration
Alex Murray	$(297.6 \pm 2.5) \cdot 10^6 \text{m/s}$	$(298.1 \pm 2.3) \cdot 10^6 \text{m/s}$
Yohannes Measho	$(295.4 \pm 3.5) \cdot 10^6 \text{m/s}$	$(296.4 \pm 3.5) \cdot 10^6 \text{m/s}$
Gewichtete Mittelwerte	$(296.8 \pm 2.0) \cdot 10^6 \text{m/s}$	$(297.7 \pm 1.9) \cdot 10^6 \text{m/s}$

Es ist klar zu sehen dass Herr Murray genauer gemessen hat als Herr Measho, weil die Sicherheit bei allen Messungen kleiner ist. Die Kalibrationsmessung hat die Sicherheit nicht wesentlich verbessern können, jedoch hat sie die Resultate näher am “wahren Wert”, sprich, Literaturwert verschieben können, wie in der Abbildung 14 schön zu sehen ist.

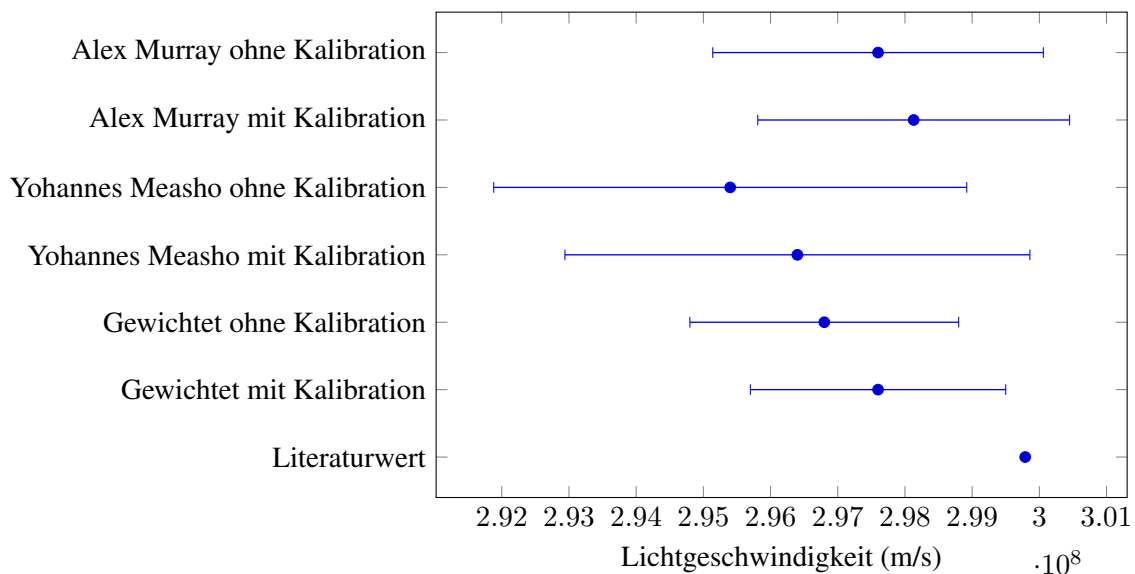


Figure 14: Grafische Darstellung der Einzelmessungen, mit und ohne Kalibration

Da die Messwerte alle unter dem Literaturwert liegen – und nicht wie statistisch erwartet oberhalb und unterhalb davon gleichmässig zerstreut sind – lässt sich daraus schliessen dass ein systematischer Fehler vorliegt. Die Messeinrichtung hat sich während den Messungen nie geändert. Es ist darauf zurückzuschliessen, dass die Abweichung von den gemessenen Distanzen D_1 , D_2 , und S_2 stammen.

Um den systematischen Fehler entgegenwirken zu können hätte man die Distanzen von mehreren Personen unabhängig voneinander messen lassen können.

Ein weiterer Systematischer Fehler ist natürlich die Unsicherheit des Brennpunktes der Linsen. Auch hier könnte man entgegenwirken indem man die ganzen Messungen mehrmals mit verschiedenen Linsen durchführen würde. Die Linsen nach jeder Messung neu zu konfigurieren würde die Unsicherheit zwar verkleinern, aber würde nicht ausreichen, den systematischen Fehler ganz zu eliminieren, weil der Brennpunkt trotzdem immer gleich bleibt.

Die Resultate mit und ohne Kalibration wurden absichtlich nicht auch noch gewichtet gemittelt. Dies wäre sinnlos, weil sie von einander abhängig sind, und es würde den “wahren Wert” nur verfälschen.