Lista 1 Introdução à Álgebra Linear

IPRJ/UERJ - Prof. Pedro Mineiro Cordoeira - pedro.cordoeira@iprj.uerj.br

novembro de 2024

Exercícios

- **1.** Mostre que as matrizes $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ são linearmente independentes.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- **2.** Prove que os polinômios são linearmente independentes.

$$p(x) = x^3 - 5x^2 + 1 \quad q(x) = 2x^4 + 5x - 6 \quad r(x) = x^2 - 5x + 2$$

- **3.** Mostre que os vetores $\mathbf{u} = (1,1,1)$, $\mathbf{v} = (1,2,1)$ e $\mathbf{w} = (2,1,2)$ são linearmente dependentes.

- **4.** Mostre que os vetores $\mathbf{u} = (1,1)$, $\mathbf{v} = (-1,1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Exprima cada um dos vetores $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ como combinação linear dessa base.

- **5.** Considere o subespaço $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (1,-1,0,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,0,1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (-2,2,1,1)$ e $\mathbf{v}_4 = (1,0,0,0)$. Verifique se **(i)** o vetor $(2,-3,2,2) \in [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$; **(ii)** exiba uma base para $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$ determinando uma dimensão; **(iii)** verifique se $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4] = \mathbb{R}^4$.

- **6.** Sejam os espaços $W_1 = \big\{(x,y,z,t) \mid \in \mathbb{R}^4 | x + y = 0, t = 0\big\}$ e $W_2 = \big\{(x,y,z,t) \mid \in \mathbb{R}^4 | x - y - z + t = 0\big\}$ subspaços de $\mathbb{R}^4$, determine o espaço $W_1 \cap W_2$.

- **7.** Sejam $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$, $\beta_1 = \{(-1,1),(1,1)\}$, $\beta_2 = \big\{(\sqrt{3},1),(\sqrt{3},-1)\big\}$ e $\beta_3 = \{(2,0),(0,2)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$, **(i)** ache as matrizes de mudança de base $[I]_{\beta}^{\beta_1}$, $[I]_{\beta_1}^{\beta}$, $[I]_{\beta_2}^{\beta}$, $[I]_{\beta_3}^{\beta}$; **(ii)** quais são as coordenadas de $\mathbf{v} = (3,-2)$ em relação à β, β_1, β_2 e β_3; **(iii)** se $[\mathbf{u}]_{\beta_1} = (4,0)$, determine $[\mathbf{u}]_{\beta}$, $[\mathbf{u}]_{\beta_2}$ e $[\mathbf{u}]_{\beta_3}$.