Algorytmy Numeryczne – Zadanie 3

8 listopada 2018

Population Protocols

Protokoły populacyjne (ang. population protocols) to model obliczeń stworzony do badania algorytmów rozproszonych. W tym modelu obliczenia są prowadzone przez poruszających się agentów o bardzo ograniczonych możliwościach.

Majority/Consensus problem

Jednym z analizowanych problemów jest przeprowadzenia głosowania większościowego (ang. majority).

Na nasze potrzeby przyjmijmy, że na początku przebiegu obliczeń wszyscy agenci przyjmują jeden z trzech stanów. Możliwe stany początkowe to: Y, N i U, które interpretujemy odpowiednio jako głos na `TAK`, na `NIE` i agenta niezdecydowanego.

W trakcie obliczeń agenci zmieniają swoje stany w zależności od reguł konkretnego algorytmu. Zmiana stanu przebiega w następujący sposób:

1. Losowana jest para agentów z równomiernym prawdopodobieństwem (prawdopodobieństwo wylosowania konkretnej pary wynosi $\frac{2}{n \cdot (n-1)}$.
2. Dla wylosowanej pary agentów zachodzi zmiana stanu określona regułami algorytmu.

Powyższe kroki są powtarzane. Oczekujemy, że po pewnym czasie stan wszystkich agentów będzie pokazywał wynik głosowania. Oznaczmy $\#Y$ jako liczbę agentów w stanie początkowym Y i $\#N$ jako liczbę agentów w stanie początkowym N. Wtedy jeśli $\#Y > \#N$, to po pewnym czasie stanem wszystkich agentów będzie Y i w przeciwnym przypadku ($\#Y \leqslant \#N$) stanem wszystkich agentów będzie N lub U.

Dla protokołów populacyjnych zwykle nie mamy pewności, że protokół zawsze zadziała poprawnie. Zamiast tego możemy oczekiwać poprawnego działania z dużym prawdopodobieństwem. Przedmiotem tego zadania jest obliczenie prawdopodobieństwa otrzymania wyniku na `TAK` dla wybranego protokołu.

Jeśli zainteresowały Cię protokoły populacyjne, zajrzyj proszę do slajdów [3] z prezentacji wygłoszonej na warsztatach AGDA (Workshop on Advances in Distributed Graph Algorithms) w tym roku, przykładowego artykułu naukowego na ten temat [1] lub krótkiego wprowadzenia.[2]

Zadanie

Napisz program, który oblicza prawdopodobieństwo zagłosowania na `TAK` (wszyscy agenci mają stan Y) przy liczbie agentów równej N i określonym stanie początkowym w algorytmie danym następującymi regułami przejść stanów:

- $\{Y, U\} \mapsto \{Y, Y\}$,
- $\{Y, N\} \mapsto \{U, U\}$,
- $\{N, U\} \mapsto \{N, N\}$.

W pozostałych przypadkach stan nie ulega zmianie.

Do obliczenia prawdopodobieństwa wykorzystaj układ równań liniowych oraz przedstawione na wykładzie metody: Gaussa oraz metody iteracyjne: Jacobiego i Gaussa-Seidela.

Przykład przebiegu algorytmu

Niech $N = 5$, $\#Y = 2$, $\#N = 2$

Możliwe są następujące przejścia (zmiany stanów):

1. $\{Y, N\} \mapsto \{U, U\}$,
2. $\{Y, N\} \mapsto \{U, U\}$.

Po dwóch krokach mamy stan stabilny, w którym wszyscy agenci są w stanie U.

Inny scenariusz:

1. $\{Y, U\} \mapsto \{Y, Y\}$,
2. $\{Y, N\} \mapsto \{U, U\}$,
3. $\{Y, U\} \mapsto \{Y, Y\}$,
4. $\{Y, U\} \mapsto \{Y, Y\}$,
5. $\{Y, N\} \mapsto \{U, U\}$,
6. $\{Y, U\} \mapsto \{Y, Y\}$,
7. $\{Y, U\} \mapsto \{Y, Y\}$.

Po siedmiu krokach mamy stan stabilny, w którym wszyscy agenci są w stanie Y.

Oczywiście wszystkich możliwych przebiegów działania algorytmu jest znacznie więcej, w tym takie które się nie kończą.

Przykładowy układ równań

Spróbujmy zapisać równania dla mniejszego przykładu ($N = 3$). Niech $P_{\#Y,\#N}$ oznacza prawdopodobieństwo, że zostanie podjęta decyzja `TAK` przy $\#Y$ agentach w stanie Y i $\#N$ agentach w stanie N:

$$
\begin{aligned}
P_{0,0} &= 0\\
P_{0,1} &= 2/3P_{0,2} + 1/3P_{0,1}\\
P_{0,2} &= 2/3P_{0,3} + 1/3P_{0,2}\\
P_{0,3} &= 0\\
P_{1,0} &= 2/3P_{2,0} + 1/3P_{1,0}\\
P_{1,1} &= 1/3P_{2,1} + 1/3P_{1,2} + 1/3P_{0,0}\\
P_{1,2} &= 2/3P_{0,1} + 1/3P_{1,2}\\
P_{2,0} &= 2/3P_{3,0} + 1/3P_{2,0}\\
P_{2,1} &= 2/3P_{1,0} + 1/3P_{2,1}\\
P_{3,0} &= 1
\end{aligned}
$$

Macierze rzadkie

Można zauważyć, że dla dużej liczby agentów (duży parametr N) powstające układy równań będą miały bardzo dużo zer. O macierzach takich układów mówimy, że są rzadkie (ang. sparse matrix). Znając charakter macierzy możemy stosować specjalizowane struktury danych, w których zapamiętujemy jedynie niezerowe elementy oszczędzając pamięć i czas obliczeń.

Implementacja specjalizowanych struktur danych nie jest obowiązkowa w tym zadaniu. Zauważmy jednak, że dla rzadkiej macierzy można przyspieszyć znacząco algorytm Gaussa sprawdzając przed wyzerowaniem elementu, czy nie jest on już zerem (wtedy pętla dla całego wiersza jest zbędna). Na potrzeby tego zadania nazwijmy taki wariant zoptymalizowanym dla macierzy rzadkich.

Sprawozdanie

Proszę przeprowadzić testy używając typu podwójnej precyzji: `double` (lub odpowiednika w wybranym języku programowania). Korzystając z metody Gaussa zaimplementowanej w pierwszym zadaniu.

W pierwszej części sprawozdania proszę przedstawić argumenty za prawidłową implementacją oraz przedyskutować możliwość stosowania metod iteracyjnych dla postawionego problemu. Prawidłowość otrzymanego wyniku proszę zweryfikować metodą Monte Carlo (wielokrotna symulacja przebiegu procesu).

W drugiej części sprawozdania proszę porównać wyniki otrzymane:

- metodą Gaussa z częściowym wyborem elementu podstawowego w dwóch wariantach: z dodatkową optymalizacją dla macierzy rzadkich i bez,
- metodami iteracyjnymi Jacobiego i Gaussa-Seidela,

i przedyskutować optymalny dobór metody w zależności od:

- rozmiaru planszy – prowadząc testy dla różnych rozmiarów, w tym możliwie dużych.
- dokładności obliczeń – zakładając żądaną dokładność na poziomie: 10^{-6}, 10^{-10} i 10^{-14} (norma maksimum).

Praca zespołowa

Zadanie można wykonać w zespole nie więcej niż trzyosobowym. W takim przypadku proszę dokładnie oznaczyć jaki był zakres pracy członków zespołu. W oddaniu projektu musi uczestniczyć cały zespół.

Literatura

[1] Dana Angluin, James Aspnes, and David Eisenstat. A simple population protocol for fast robust approximate majority. *Distributed Computing*, 21(2):87–102, 2008.

[2] James Aspnes and Eric Ruppert. An introduction to population protocols. `http://cs-www.cs.yale.edu/homes/aspnes/papers/minema-survey.pdf`, (dost.: 3 11 2018).

[3] Rati Gelashvili. Recent algorithmic advances in population protocols. `http://adga.hiit.fi/2018/Rati.pdf`, 2018 (dost.: 3 11 2018).