

# États gaussiens et états cohérents

MOHAMED AMINE BOUSSOUBEL

11 mars 2021

## Table des matières

<b>1 Les états gaussiens</b>	<b>1</b>
<b>2 Les états cohérents</b>	<b>2</b>
<b>Références</b>	<b>3</b>

## 1 Les états gaussiens

Il existe une classe importante d'états quantiques qui ont la propriété de saturer l'inégalité de Heisenberg. On appelle ces états des *états purs gaussiens*. Dans le cas d'un système à  $n$  degrés de liberté, ces états s'écrivent dans la représentation configuration sous la forme générale suivante [1]

$$\eta_{q,p}^{U,V} = \pi^{-\frac{n}{4}} [\det U] \exp \left[ \frac{i}{2} \left( \mathbf{x} - \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \cdot \mathbf{p} \right] \times \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{q}) \cdot (U + iV) (\mathbf{x} - \mathbf{q}) \right], \quad (1)$$

où nous avons pris comme unité  $\hbar = 1$ . Cet état est paramétré par deux vecteurs à  $n$  dimensions  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  et deux matrices réelles  $U$  et  $V$  d'ordre  $n \times n$  avec  $U$  définie positive. Dans le cas simple où  $V$  est nulle,  $\mathbf{q} = \mathbf{p} = \mathbf{0}$  et la matrice  $U$  est diagonale avec des valeurs propres  $\frac{1}{l_i^2}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , on retrouve le paquet d'ondes gaussien

$$\eta^{\mathbf{l}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \left( \pi l_i^2 \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left( -\frac{x_i^2}{2l_i^2} \right), \quad (2)$$

où le paramètre  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n)$  rend compte d'une éventuelle asymétrie dans les fluctuations quantiques des opérateurs position et impulsion dans cet état. En effet, les déviations standards en positions et impulsions dans cet état s'écrivent

$$\langle \Delta Q_i \rangle_{\eta^{\mathbf{l}}} = \frac{l_i}{\sqrt{2}}, \quad (3)$$

$$\langle \Delta P_i \rangle_{\eta^{\mathbf{l}}} = \frac{1}{\sqrt{2}l_i}. \quad (4)$$

Un cas particulier est celui des états à incertitude minimale, avec des fluctuations quantique égales en position et en impulsion. Ceci est réalisé avec des paramètres  $l_i = l = 1$  et on a  $\langle \Delta Q_i \rangle = \langle \Delta P_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Dans ce cas, l'état quantique (2) n'est autre que l'état fondamental de l'oscillateur harmonique. Si on parle de quadratures du champ électromagnétique en optique quantique, alors cet état n'est autre que l'état du vide à  $n$  modes. Les fluctuations quantiques des quadratures sont appelées quant à elles *bruit standard*.

## 2 Les états cohérents

Considérons maintenant le cas simple ( $n = 1$ ). A partir de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique, ou l'état du vide, on définit une sous-classe d'états gaussiens (voir la section 1) qui a une grande importance en mécanique quantique : c'est la classe des *états cohérents canoniques* [2]. Définissons d'abord les opérateurs de création  $\hat{a}^\dagger$  et d'annihilation  $\hat{a}$  en fonction des opérateurs position et impulsion

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q - iP), \quad (5)$$

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q + iP). \quad (6)$$

On définit aussi la variable complexe

$$z = x + iy = \frac{1}{\sqrt{2}} (q + ip), \quad (7)$$

où  $q$  et  $p$  sont deux variables réelles. En notant l'état du vide  $\eta^{l=1} \equiv |0\rangle$ , l'état cohérent canonique est défini par la relation

$$|z\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2} + z\hat{a}^\dagger\right) |0\rangle, \quad (8)$$

L'appellation états cohérents provient de l'optique quantique, car on a découvert que le champ électromagnétique dans ces états présentait des propriétés observées avec la lumière cohérente. Lorsqu'un système est dans un état cohérent, l'évolution dans le temps des valeurs moyennes des observables position et impulsion obéit aux lois de la mécanique classique pour l'oscillateur harmonique. Ces états ont les propriétés suivantes :

1. Incertitude minimale

$$\langle \Delta Q \rangle_z \langle \Delta P \rangle_z = \frac{1}{2}; \quad (9)$$

2. États propres de l'opérateur annihilation

$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle; \quad (10)$$

3. Générés à partir de l'état du vide  $|0\rangle$  par l'action du groupe de Weyl-Heisenberg

$$|z\rangle = D(z) |0\rangle, \quad (11)$$

où l'opérateur  $D(z)$  est l'opérateur déplacement dans l'espace des phases

$$D(z) = \exp\left(z\hat{a}^\dagger - \bar{z}\hat{a}\right); \quad (12)$$

4. Constituent une famille sur-complète d'états

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |z\rangle \langle z| d\text{Re}z d\text{Im}z = \mathbf{I}, \quad (13)$$

où  $\mathbf{I}$  est l'opérateur identité.

## Références

- [1] S.T. Ali, J.P. Antoine, and J.P. Gazeau. *Coherent States, Wavelets and Their Generalizations*. Graduate texts in contemporary physics. U.S. Government Printing Office, 2000.
- [2] R. J. Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, 131 :2766–2788, September 1963.