BÀI 7 - LATENT DIRICHLET ALLOCATION

Bài 1

a) Chứng minh rằng:

$$\log p(w|\alpha,\beta) = L(\gamma,\varphi;\alpha,\beta) + D_{KL}(q(\theta,z|\gamma,\varphi)\|p(\theta,z|w,\alpha,\beta)).$$

Và:

$$L(\gamma,\varphi;\alpha,\beta) = E_q[\log p(\theta|\alpha)] + E_q[\log p(z|\theta)] + E_q[\log p(w|z,\beta)] - E_q[\log q(\theta)] - E_q[\log q(z)].$$

Chứng minh:

1. Đầu tiên, chúng ta có biểu thức:

$$\log p(w|\alpha,\beta) = \log \int\int p(\theta,z,w|\alpha,\beta)d\theta dz.$$

2. Chúng ta có thể viết lại biểu thức này bằng cách sử dụng phân phối biến thiên $q(\theta,z|\gamma,\varphi)$:

$$\log p(w|\alpha,\beta) = \log \int\int \frac{q(\theta,z|\gamma,\varphi)}{q(\theta,z|\gamma,\varphi)} p(\theta,z,w|\alpha,\beta)d\theta dz.$$

3. Áp dụng bất đẳng thức Jensen:

$$\log p(w|\alpha,\beta) \geq \int\int q(\theta,z|\gamma,\varphi) \log\left(\frac{p(\theta,z,w|\alpha,\beta)}{q(\theta,z|\gamma,\varphi)}\right) d\theta dz.$$

4. Chúng ta định nghĩa $L(\gamma,\varphi;\alpha,\beta)$:

$$L(\gamma,\varphi;\alpha,\beta) = E_q[\log p(\theta,z,w|\alpha,\beta)] - E_q[\log q(\theta,z|\gamma,\varphi)].$$

5. Do đó:

$$\log p(w|\alpha,\beta) \geq L(\gamma,\varphi;\alpha,\beta).$$

6. Chúng ta có thể viết lại:

$$\log p(w|\alpha,\beta) = L(\gamma,\varphi;\alpha,\beta) + \int\int q(\theta,z|\gamma,\varphi) \log\left(\frac{q(\theta,z|\gamma,\varphi)}{p(\theta,z|w,\alpha,\beta)}\right) d\theta dz.$$

7. Ta định nghĩa KL-divergence:

$$D_{KL}(q(\theta,z|\gamma,\varphi)\|p(\theta,z|w,\alpha,\beta)) = \int\int q(\theta,z|\gamma,\varphi) \log\left(\frac{q(\theta,z|\gamma,\varphi)}{p(\theta,z|w,\alpha,\beta)}\right) d\theta dz.$$

8. Do đó, ta có thể viết lại:

$$\log p(w|\alpha,\beta) = L(\gamma,\varphi;\alpha,\beta) + D_{KL}(q(\theta,z|\gamma,\varphi)\|p(\theta,z|w,\alpha,\beta)).$$

Chứng minh vế sau:

1. Ta có:

$$L(\gamma, \varphi; \alpha, \beta) = E_q[\log p(\theta, z, w|\alpha, \beta)] - E_q[\log q(\theta, z|\gamma, \varphi)].$$

2. Ta có thể tách riêng các thành phần:

$$E_q[\log p(\theta, z, w|\alpha, \beta)] = E_q[\log p(\theta|\alpha)] + E_q[\log p(z|\theta)] + E_q[\log p(w|z, \beta)].$$

3. Tương tự, ta có thể tách riêng các thành phần của $q(\theta, z|\gamma, \varphi)$:

$$E_q[\log q(\theta, z|\gamma, \varphi)] = E_q[\log q(\theta)] + E_q[\log q(z)].$$

4. Do đó, chúng ta có thể viết lại $L(\gamma, \varphi; \alpha, \beta)$:

$$L(\gamma, \varphi; \alpha, \beta) = E_q[\log p(\theta|\alpha)] + E_q[\log p(z|\theta)] + E_q[\log p(w|z, \beta)] - E_q[\log q(\theta)] - E_q[\log q(z)].$$

b) Khai triển vế phải của (14) để nhận được công thức (15):

$$L(\gamma, \varphi; \alpha, \beta) = E_q[\log p(\theta|\alpha)] + E_q[\log p(z|\theta)] + E_q[\log p(w|z, \beta)] - E_q[\log q(\theta)] - E_q[\log q(z)].$$

Khai triển:

1. Ta có:

$$E_q[\log p(\theta|\alpha)] = \int q(\theta|\gamma) \log p(\theta|\alpha) d\theta.$$

2. Theo định nghĩa của phân phối Dirichlet:

$$p(\theta|\alpha) = \frac{1}{B(\alpha)} \prod_{i=1}^{k} \theta_i^{\alpha_i - 1},$$

với:

$$B(\alpha) = \frac{\prod_{i=1}^{k} \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i)}.$$

3. Do đó:

$$E_q[\log p(\theta|\alpha)] = \log \Gamma \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \right) - \sum_{i=1}^{k} \log \Gamma(\alpha_i) + \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - 1)(\Psi(\gamma_i) - \Psi(\sum_{j=1}^{k} \gamma_j)).$$

4. Tiếp theo, ta có:

$$E_q[\log p(z|\theta)] = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{k} \varphi_{ni} (\Psi(\gamma_i) - \Psi(\sum_{j=1}^{k} \gamma_j)).$$

5. Ta cũng có:

$$E_q[\log p(w|z, \beta)] = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{V} \varphi_{ni} w_{jn} \log \beta_{ij}.$$

6. Cuối cùng:

$$E_q[\log q(\theta)] = \log\Gamma(\sum_{i=1}^{k}\gamma_i) - \sum_{i=1}^{k}\log\Gamma(\gamma_i) + \sum_{i=1}^{k}(\gamma_i - 1)(\Psi(\gamma_i) - \Psi(\sum_{j=1}^{k}\gamma_j)).$$

$$E_q[\log q(z)] = \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{k}\varphi_{ni}\log\varphi_{ni}.$$

Kết hợp tất cả các thành phần trên, ta có:

$$\begin{aligned}
L(\gamma,\varphi;\alpha,\beta) = \log\Gamma\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\right) &- \sum_{i=1}^{k}\log\Gamma(\alpha_i) \\
&+ \sum_{i=1}^{k}(\alpha_i - 1)(\Psi(\gamma_i) - \Psi(\sum_{j=1}^{k}\gamma_j)) \\
&+ \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{k}\varphi_{ni}(\Psi(\gamma_i) - \Psi(\sum_{j=1}^{k}\gamma_j)) \\
&+ \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{V}\varphi_{ni}w_{jn}\log\beta_{ij} \\
&- \log\Gamma\left(\sum_{j=1}^{k}\gamma_j\right) + \sum_{i=1}^{k}\log\Gamma(\gamma_i) \\
&- \sum_{i=1}^{k}(\gamma_i - 1)(\Psi(\gamma_i) - \Psi(\sum_{j=1}^{k}\gamma_j)) \\
&- \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{k}\varphi_{ni}\log\varphi_{ni}.
\end{aligned}$$

Như vậy, ta đã khai triển thành công và chứng minh được công thức (15) trong bài báo.