Huỳnh Nguyễn Thế Dân 21110256

Bài tập lý thuyết

ICA

Câu 1

a) Chứng minh $I(X,Y) \geq 0$

Áp dụng bất đẳng thức Gibbs:

$$\log x \leq x - 1$$

Với $x = \dfrac{p(x)p(y)}{p(x,y)}$, ta có:

$$\log\left(\frac{p(x)p(y)}{p(x,y)}\right) \leq \frac{p(x)p(y)}{p(x,y)} - 1$$

Nhân 2 vế cho $-p(x,y)$, P+(=):

$$-p(x,y)\log\left(\frac{p(x)p(y)}{p(x,y)}\right) \geq p(x,y)\left(1 - \frac{p(x)p(y)}{p(x,y)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad p(x,y)\log\left(\frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}\right) \geq p(x,y) - p(x)p(y) = 0$$

D.

Tổng các biểu thức trên cho x và y, ta được:

$P(X, Y) \geq 0$ (đpcm)

TITAN EDUCATION

c) $I(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$

$I(X,Y) = \sum_{x,y} p(x,y) \log\left(\frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}\right)$

$= \sum_{x,y} p(x,y) \log p(x,y) - \sum_{x} p(x) \log p(x) - \sum_{y} p(y) \log p(y)$

$= -H(X,Y) + H(X) + H(Y)$ (đpcm)

b) $I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$

- Ta biết rằng

$H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y)$

$\Rightarrow H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y)$

Mặt khác

$I(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$

$= H(X) - (H(X,Y) - H(Y))$

$= H(X) - H(X|Y)$ (đpcm)

Tương tự ta được

$I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X)$

a) $I(X,Y) = H(X,Y) - H(X|Y) - H(Y|X)$

Ta có:

$$-p(x,y)\log p(x,y) + p(x,y)\log\frac{p(x,y)}{p(y)} + p(x,y)\log\frac{p(x,y)}{p(x)}$$

$$= p(x,y)\log\frac{p(x,y)}{p(x,y)}$$

Lấy tổng theo x và y ta được:

$$H(X,Y) - H(X|Y) - H(Y|X) = I(X,Y)$$

đpcm

Câu 2

Cho $y = Wx$

$H(y) = -\int f_y(y) \log f_y(y)\, dy$, với $f_y(y)$

~~là~~ là hàm mật độ xác suất của y

Do $y = Wx$, ta có thể thay đổi biến trong integral từ y sang x, và mối liên hệ giữa $f_y(y)$ và

$f_x(x)$ thông qua det W:

$$f_y(y) = \frac{1}{|\det W|} f_x(x)$$

Khi đó:

$$H(y) = -\int \frac{1}{|\det W|} f_x(x) \log\left(\frac{1}{|\det W|} f_x(x)\right) |\det W|\, dx$$

$$= -\int f_x(x) \log\left(\frac{1}{|\det W|} f_x(x)\right) dx$$

$$= -\int f_x(x)\log f_x(x)\,dx + \log|\det W|\int f_x(x)\,dx$$

Vì $-\int f_x(x)\log f_x(x)\,dx$ chính là $H(x)$ với

$\int f_x(x)\,dx = 1$, ta có:

$$H(y) = H(x) + \log|\det W|$$

Hay

$$H(Wx) = H(x) + \log|\det W| \quad \text{(đpcm)}$$