Bài tập Lý thuyết
Classical PCA

Bài 1:

a) $S = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Tìm giá trị riêng

Giải phương trình đặc trưng

$$|S - \lambda I| = 0$$

Tính định thức $S - \lambda I$

$$|S - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 2.2$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 10 - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

Giải pt $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ ta được $\lambda_1 = 6$

$\lambda_2 = 1$

Tìm vector riêng

- Với $\lambda_1 = 6$, ta cần giải ptrình

$$(S - 6I).v = 0 \quad (*)$$

Mà $S - 6I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

$(*) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} . v = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1v_1 + 2v_2 = 0 \\ 2v_1 - 4v_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 2v_2 \\ 2v_1 - 4v_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 2v_2 \\ 2.2v_2 - 4v_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 2v_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ta chọn $v_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\rightarrow v_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Ta được một vectơ riêng ứng với $\lambda_1 = 6$ là

$$v = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

* với $\lambda_2 = 1$, ta tìm tương tự được

$v = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$ là một vectơ riêng ứng với $\lambda_2 = 1$

b) Tỉ trọng phương sai đối với:

Thành phần đầu tiên $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{6}{6+1} = \frac{6}{7}$

Thành phần thứ hai: $\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{1}{6+1} = \frac{1}{7}$

Vậy thành phần đầu tiên có tỉ trọng lớn hơn và quan trọng hơn

TITAN EDUCATION

Bài 2

a) $S = \begin{bmatrix} 1 & p \\ p & 1 \end{bmatrix}$ với $-1 \le p \le 1$

Tìm giá trị riêng

Giải ptrình đặc trưng

$$|S - \lambda I| = 0$$

Tính định thức $S - \lambda I$

$$|S - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & p \\ p & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - p^2$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 - p^2$$

Giải pt $\lambda^2 - 2\lambda + 1 - p^2 = 0$ ta được

$$\lambda_1 = 1 + p$$

$$\lambda_2 = 1 - p$$

Tìm vector riêng

* Với $\lambda_1 = 1 + p$, ta cần giải ptrình:

$$(S - (1+p)I).v = 0$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -pv_1 + pv_2 = 0 \\ pv_1 - pv_2 = 0 \end{cases}$

Chọn $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ thì $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

TITAN EDUCATION

Ta được một vector ứng với $\lambda_1 = 1+p$ là

$$v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Với $\lambda = 1-p$ ta tìm tương tự được

$v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ là 1 vector riêng ứng với $\lambda_2 = 1-p$

b) Với $\lambda_1 = 1+p$, tỉ trọng phương sai là:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{1+p}{1+p+1-p} = \frac{1+p}{2}$$

Với $\lambda_2 = 1-p$, tỉ trọng phương sai là:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{1-p}{1+p+1-p} = \frac{1-p}{2}$$

Nếu $p > 0$ thì thành phần chính đầu tiên sẽ quan trọng hơn và ngược lại