

Nguyễn Phú Dân

21110256

Bài tập lý thuyết  
NMF

Câu 1

a) Biểu thức  $\|A - WH\|_2^2$  được tính bằng cách lấy tổng bình phương các sai số giữa các phần tử tương ứng của ma trận  $A$  và tích  $WH$ .

$$\begin{aligned}\|A - WH\|_2^2 &= \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^u (A_{ij} - (WH)_{ij})^2 \\ &= \sum_{j=1}^u \left[ \sum_{i=1}^v (A_{ij} - (WH)_{ij})^2 \right] \\ &= \sum_{j=1}^u \|A_{\cdot j} - WH_{\cdot j}\|_2^2\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \|A - WH\|_2^2 = \sum_{j=1}^u \|A_{\cdot j} - WH_{\cdot j}\|_2^2$$

b) Để chứng minh yêu cầu đề bài, ta cần tối ưu  $\|A_{\cdot j} - WH_{\cdot j}\|_2^2$  theo  $H_{\cdot j}$ .

Ta sẽ tính Gradient của hàm mục tiêu và cho nó bằng 0

$$\nabla_{H_{\cdot j}} \|A_{\cdot j} - WH_{\cdot j}\|_2^2 = -2W^T(A_{\cdot j} - WH_{\cdot j})$$

Đặt Gradient bằng 0 để tìm  $H_j$ ;

$$-2W^T(A_j - WH_j) = 0$$

$$W^T A_j = W^T W H_j$$

$$\Rightarrow H_j = (W^T W)^{-1} W^T A_j$$

Vậy ta chứng minh yêu cầu đề bài

Câu 2

Ta xét

$$W \leftarrow W \circ \frac{AH^T}{WHH^T}$$

Ta nhận thấy

Nếu  $\frac{AH^T}{WHH^T} > 1$  thì ta điều chỉnh  $W$  tăng

Ngược lại  $\frac{AH^T}{WHH^T} < 1$  thì ta điều chỉnh giảm

Điều này đảm bảo  $\frac{AH^T}{WHH^T} \rightarrow 1$  nhằm cố định  $W$  đạt giá trị tối ưu

Tương tự với  $H$



Sau khi cập nhật ta nhận thấy  $WH \rightarrow A$

Điều kiện ta xét vào:

$$\|A - WH\|_2^2 \rightarrow 0$$

Vậy hàm mục tiêu không ~~ta~~ tăng hơn 2 quy tắc