

# Appunti del corso di algebra e geometria

Adriano Oliviero

07/04/22 - oggi

## Indice

<b>1</b>	<b>08/03/22</b>	
1.1	Richiami di logica	.....
1.2	Connettivi logici	.....
1.3	Tavole di verità	.....
1.4	Quantificatori	.....
1.5	Teoria degli insiemi	.....
1.6	Funzioni	.....
<b>2</b>	<b>09/03/22</b>	
2.1	Funzioni (continuo)	.....
2.2	Algebra lineare	.....
<b>3</b>	<b>15/03/22</b>	
3.1	Algebra lineare (continuo)	.....
3.2	Piano Cartesiano	.....
<b>4</b>	<b>16/03/22</b>	
4.1	Continuo di ieri (Def)	.....
<b>5</b>	<b>22/03/22</b>	
5.1	Sistemi di equazioni lineari (accenni)	.....
5.2	<u>Matrici</u>	.....
<b>6</b>	<b>23/03/22</b>	
6.1	Operazioni tra matrici	.....
6.2	Altra terminologia	.....
<b>7</b>	<b>29/03/22</b>	
7.1	Sistemi di equazioni lineari	.....
<b>8</b>	<b>30/03/22</b>	
8.1	Sistema lineare $\longrightarrow$ sistema a scalini.	.....
<b>9</b>	<b>05/04/22</b>	
9.1	Ultime considerazioni sui sistemi lineari	.....
<b>10</b>	<b>06/04/22</b>	
<b>11</b>	<b>08/04/22</b>	
11.1	Definizione di vettori linearmente indipendenti	.....
<b>12</b>	<b>12/04/22</b>	
<b>13</b>	<b>13/04/22</b>	
13.1	Continuando da ieri, Corollario 1	.....

# Introduzione

Questi appunti sono scritti seguendo le lezioni della prof.ssa Anna Iezzi e sono distribuiti sotto la licenza. Il repository originario per questi (ed altri appunti) è su github.

## Licenza

```
% geometria_algebra.tex
% Copyright 2022 M. Y. Adriano Oliviero
```

This work may be distributed and/or modified under the conditions of the LaTeX Project Public License, either version 1.3 of this license or (at your option) any later version. The latest version of this license is in <http://www.latex-project.org/lppl.txt> and version 1.3 or later is part of all distributions of LaTeX version 2005/12/01 or later.

This work has the LPPL maintenance status ‘maintained’.

The Current Maintainer of this work is M. Y. Adriano Oliviero.

This work consists of the file `geometria_algebra.tex` and the derived files `geometria_algebra.pdf` and other output.

## 1 08/03/22

### 1.1 Richiami di logica

Proposizione logica:  $\mathbf{V/F}$ ,  $\mathbf{1/0}$  valore di verità  $P = \text{"Napoli è in Campania"}: \mathbf{V}$   $P(n) = \text{"n è pari"}: P(2): \mathbf{V}$   $P(3): \mathbf{F}$

### 1.2 Connettivi logici

- Negazione:  $\neg$ , "non"
- Congiunzione:  $\wedge$ , "e"
- Disgiunzione:  $\vee$ , "o"
- Implicazione:  $\Rightarrow$ , "se ... allora ..."
- Doppia implicazione:  $\Leftrightarrow$ , "se e solo se"

### 1.3 Tavole di verità

$P$	$Q$	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

### 1.4 Quantificatori

- $\forall$ : "Per ogni"
- $\exists$ : "Esiste almeno uno"
- $\exists!$ : "Esiste ed è unico"

Esempi:

1. " $\forall n$  naturale,  $n$  è pari":  $\mathbf{F}$   
" $\exists n$  naturale: ( $\leftarrow$  tale che)  $n$  è pari":  $\mathbf{V}$

2.  $P(x) = \{x \text{ è uno studente in aula A3-T2}\}$   
 $Q(x) = \{x \text{ è iscritto ad un corso di ingegneria}\}$   
 $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$
3.  $P(n) = \{n \text{ è un numero pari}\}$   
 $Q(n) = \{n \text{ è divisibile per 4}\}$   
 $\forall n \text{ naturale, } Q(n) \Rightarrow P(n)$

## 1.5 Teoria degli insiemi

Un **insieme** è una collezione di oggetti detti **elementi** dell'insieme.

Convenzionalmente gli insiemi si denotano con lettere maiuscole e gli elementi con lettere minuscole.

### Descrizione di un insieme

1. Per elencazione (se l'insieme ha un numero finito di elementi):  
 $\mathbb{A} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$   
 $4 \in \mathbb{A}$   
 $5 \notin \mathbb{A}$
2. Per proprietà caratteristica:  
 $\mathbb{A} = \{n : n \text{ è un numero pari: } 0 \leq n \leq 10\}$
3. Diagramma di *Eulero-Venn* (ancora una volta se l'insieme ha un numero finito di elementi):

### Alcune informazioni sugli insiemi

- La **cardinalità** di un insieme è il numero di elementi che un insieme contiene e si denota:  $\mathbb{A}$  ha cardinalità  $|\mathbb{A}|$
- Insieme vuoto: insieme che non contiene nessun elemento, si denota con  $\emptyset$ ,  $\{\}$  e ha cardinalità  $|\emptyset| = 0$
- I principali insiemi numerici:  
 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ : numeri naturali  
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ : numeri naturali  
 $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$   
 $\mathbb{R}$ : numeri reali  
 $\mathbb{C}$ : numeri complessi

### Operazioni tra gli insiemi

1. Inclusione  $\leftrightarrow \subseteq$ :  
 $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$  ( $\mathbb{A}$  è contenuto in  $\mathbb{B}$ )  
 $\mathbb{B} \supseteq \mathbb{A}$  ( $\mathbb{B}$  contiene  $\mathbb{A}$ )

#### Esempio:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Proprietà:

- $\mathbb{A} = \mathbb{B} \Leftrightarrow (x \in \mathbb{A} \Leftrightarrow x \in \mathbb{B}) \Leftrightarrow (\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \wedge \mathbb{B} \subseteq \mathbb{A})$
2. Intersezione  $\leftrightarrow \wedge$ :  
 $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{x : x \in \mathbb{A} \wedge x \in \mathbb{B}\}$   
Proprietà:
    - $\mathbb{A} \cap \emptyset = \emptyset$
    - $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{B} \cap \mathbb{A}$
    - $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{A}$
  3. Unione  $\leftrightarrow \vee$ :  
 $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{x : x \in \mathbb{A} \vee x \in \mathbb{B}\}$   
Proprietà:
    - $\mathbb{A} \cup \emptyset = \mathbb{A}$

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$
- $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$

4. Differenza  $\leftrightarrow \setminus$ :  
 $B \setminus A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\}$

5. Prodotto cartesiano  $\leftrightarrow \times$ :  
 $A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$  con  $(a, b)$  coppie ordinate  
Proprietà:

- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$

## 1.6 Funzioni

**Def:** Siano  $A, B$  due insiemi:  
 Una funzione  $f : A \rightarrow B$  è una legge che associa ad ogni elemento di  $A$ , uno ed un solo elemento di  $B$ .  
 $f : A \rightarrow B$   
 $x \rightarrow y$ :  $x$  è la controimmagine di  $y$

**Def:** Sia  $f : A \rightarrow B$  una funzione e sia  $X \subseteq A$ :  
 $f(X) := \{f(x) : x \in X\}$  è l'insieme di  $X$  tramite  $f$   
 $Im(f) := f(A)$  è l'insieme della funzione  
 $Im(f)$  non è necessariamente  $= Dom(f)$   
 $Im(f) = Dom(f) \Rightarrow f$  è suriettiva  
 $f(1) = f(2) = a \Rightarrow f$  non è iniettiva

## 2 09/03/22

### 2.1 Funzioni (continuo)

**Def:** Una funzione  $f : A \rightarrow B$  si dice iniettiva se  $\forall x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$   
 (elementi distinti di  $A$  hanno immagini distinte)  $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

**Def:** Una funzione  $f : A \rightarrow B$  si dice suriettiva se  $Im(f) = B$ ,  
 o equivalentemente se  $\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$

**Def:** Una funzione  $f : A \rightarrow B$  si dice biiettiva o biunivoca  
 se è al tempo stesso iniettiva e suriettiva

**Esempio:**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x^2$$

- È iniettiva? No, perchè  $f(-1) = 1 = f(1)$
- È suriettiva? No, perchè  $f(x) = x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow Im(f) \subseteq \mathbb{R}^+ \Rightarrow Im(f) \neq \mathbb{R}$

Se un insieme possiede delle operazioni che verificano certe proprietà, è una struttura algebrica.

**Def:** Sia  $X$  un insieme, un'operazione binaria interna è una funzione  
 dal prodotto cartesiano  $x \times x$  in  $X$ .  
 $* : x \times x \rightarrow x$   
 $(x, y) \rightarrow x * y$

$$\mathbb{X} = \mathbb{R}$$

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

Proprietà di  $(\mathbb{R}, +)$ :

1. Commutatività:  $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. Associatività:  $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
3. Elemento neutro:  $\exists x' \in \mathbb{R} : x + x' = x' + x = x, \forall x \in \mathbb{R}, x' = 0$
4. Opposto:  $\exists x' \in \mathbb{R} : x + x' = x' + x = 0, \forall x \in \mathbb{R}, (x' = -x)$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow x \cdot y$$

Proprietà di  $(\mathbb{R}, \cdot)$ :

1. Commutatività:  $x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. Associatività:  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
3. Elemento neutro:  $\exists x' \in \mathbb{R} : x \cdot x' = x' \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{R}, x' = 1$
4. Elemento inverso:  $\exists x' \in \mathbb{R} : x \cdot x' = x' \cdot x = 0, \forall x \in \mathbb{R}, (x' = \frac{1}{x})$

Infine  $+$  e  $\cdot$  soddisfano la proprietà distributiva:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Sia  $\mathbb{K} \neq \emptyset$  un insieme dotato di due operazioni binarie:

- $+: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$
- $\cdot: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$  è detto un campo se verificano le proprietà elencate prima, con  $+$  distributiva e  $\mathbb{K}$  al posto di  $\mathbb{R}$

### Esempio:

$$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$$

- $\cdot: \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ 

$$\begin{aligned} (0, 0) &\rightarrow 0 \\ (0, 1) &\rightarrow 0 \\ (1, 0) &\rightarrow 0 \\ (1, 1) &\rightarrow 1 \end{aligned}$$
- $+: \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ 

$$\begin{aligned} (0, 0) &\rightarrow 0 \\ (0, 1) &\rightarrow 1 \\ (1, 0) &\rightarrow 1 \\ (1, 1) &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

## 2.2 Algebra lineare

Wikipedia:

Branca della matematica che si occupa dello studio di spazi vettoriali (o anche detti spazi lineari), di trasformazioni lineari e di sistemi di equazioni lineari.

Molti problemi di matematica e fisica verificano la seguente proprietà:

Se  $v, w \in \mathbb{X}$  sono due soluzioni del problema, allora anche  $v + w$  e  $\lambda v, \lambda \in \mathbb{R}$  ( $+$  e  $\cdot$  operazioni su  $\mathbb{X}$ ) sono soluzioni del problema. Problemi di questo tipo sono detti *lineari*.

### Nozione base: spazio vettoriale

I vettori sono usati in fisica per rappresentare, grandezze fisiche caratterizzate da:

- una direzione
- un verso
- un'intensità

Tali grandezze sono **grandezze vettoriali** e si differenziano dalle **grandezze scalari**, definite unicamente dall'intensità. Geometricamente, un vettore si rappresenta tramite un **segmento orientato** nel piano euclideo, denotato  $\Pi$ .

**Def:** Un segmento orientato è una coppia di punti ordinata  $(A, B \in \Pi \times \Pi)$ .  
 $\vec{AB} := (A, B)$

**Def:** Due segmenti orientati  $\vec{AB}$  e  $\vec{CD}$  si dicono equipollenti se il quadrilatero avente vertici, ordinatamente,  $ABDC$  è un parallelogramma, quindi se hanno:

- stessa lunghezza
- direzione parallela
- stesso verso

L'equipollenza è una relazione di equivalenza, e verifica 3 proprietà:

- riflessiva
- simmetrica
- transitiva

**Def:** Un vettore geometrico è una classe di equipollenza

Sia  $O$  un punto fissato nel piano  $\Pi$ , per ogni segmento orientato  $\vec{AB}$  esiste un punto  $P \in \Pi$  tale che  $\vec{OP}$  è equipollente ad  $\vec{AB}$ .

$\vec{OP}$  è equipollente a tutti i segmenti orientati equipollenti ad  $\vec{AB}$  e posso sceglierlo come rappresentante della classe di equipollenza di  $\vec{AB}$ .

Quindi abbiamo una biezione:

$\mathbb{V} = \{\text{Vettori geometrici nel piano}\} \{ \text{segmento orientato } \vec{OP}, P \in \Pi \}$

Classi di equipollenza  $\uparrow$  Stesso punto di applicazione

## 3 15/03/22

### 3.1 Algebra lineare (continuo)

Nozione base: spazio vettoriale (continuo)

Correzione della definizione di campo:

- Esistenza dell'elemento neutro  
 $\exists 0 \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x, \forall x \in \mathbb{R}$
- Esistenza dell'opposto:  
 $\exists x' \in \mathbb{R} : x + x' = x' + x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

---

Fissiamo  $O \in \pi$  (piano ordinario).

$\mathbb{V} = \{\text{vettori geometrici del piano}\} \Leftrightarrow \{\text{segmenti orientati } \vec{OP}, P \in \pi\}$

Con un abuso di notazione, consideriamo:

$\mathbb{V} = \{\text{segmenti orientati } \vec{OP}, P \in \pi\}$

$\forall \vec{v} \in \mathbb{V}, \exists P \in \pi : \vec{v} = \vec{OP}$  Operazioni su  $\mathbb{V}$

- Somma di vettori  
siano  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$  e siano  $P, Q \in \pi$  :  
 $\vec{v} = \vec{OP}$   
 $\vec{w} = \vec{OQ}$

Definiamo:

$\vec{v} + \vec{w} = \vec{OR}$ , tale che il quadrilatero  $OPRQ$  è un parallelogramma. (regola del parallelogramma)

Nota: Se  $O, P$  e  $Q$  sono collineari (hanno la stessa direzione), costruisco  $R$  tale che  $OQ$  e  $RP$  hanno la stessa lunghezza

Operazione binaria interna:

$+: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$

$(\vec{v}, \vec{w}) \rightarrow \vec{v} + \vec{w}$

- Moltiplicazione per scalari  
Sia  $\vec{v} \in \mathbb{V}$  e sia  $P \in \pi : \vec{v} = \vec{OP}$ .

Definiamo  $\lambda \cdot \vec{v} = \vec{OR}$

- $O, P, R$  sono collineari
  - $\overline{OR} = |\lambda| \overline{OP}$
  - $\vec{OR}$  è orientato concordemente a  $\vec{OP}$   
 $\vec{OR}$  è orientato discordemente a  $\vec{OP}$  se  
 $\lambda < 0 \vee \lambda = 0, R = O$
- Questa è un'operazione binaria esterna:  
 $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$   
 $(\lambda, \vec{v}) \rightarrow \lambda \cdot \vec{v}$

## 3.2 Piano Cartesiano

$$\{P : P \in \pi\} \leftrightarrow \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{V} = \{\text{segmenti orientati } \vec{OP}, P \in \pi\} = \{\text{vettori geometrici nel piano}\}$$

In particolare esiste una biezione:

$$\mathbb{V} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$$

$\forall P \in \pi, \vec{OP} \rightarrow (x, y)$ , dove  $x, y$  sono rispettivamente ascissa e ordinata di  $P$

$\vec{OP} \leftarrow (x, y)$  dove  $P(x, y)$

Vogliamo tradurre le operazioni su  $\mathbb{V}$  in operazioni su  $\mathbb{R}^2$ :

1.  $\vec{v} = \vec{OP}, P(x_P, y_P)$   
 $\vec{w} = \vec{OQ}, Q(x_Q, y_Q)$   $\vec{v} + \vec{w} = \vec{OR}$ : quali sono le coordinate di  $R$ ?  
 $OPQR \Rightarrow A(x_A, y_A)$  parallelogramma con punto medio di  $PQ$  e  $OR$   
 $A$  punto medio di  $PQ \Rightarrow \{x_A = \frac{x_P + x_Q}{2}, y_A = \frac{y_P + y_Q}{2}\}$   
 $A$  punto medio di  $OR \Rightarrow \{x_A = \frac{x_R}{2}, y_A = \frac{y_R}{2}\}$   
 $\Rightarrow \{x_R = x_P + x_Q, y_R = y_P + y_Q\}$   
 Operazione binaria interna:  
 $+: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
2.  $\vec{v} \in \mathbb{V}, \vec{v} = \vec{OP}, P(x_P, y_P), \lambda \in \mathbb{R}$   
 $\lambda \cdot \vec{v} = \vec{OR}$ : quali sono le coordinate di  $R$ ?  
 $\vec{OR} = \lambda \cdot \vec{OP}$   
 $OPH$  e  $ORK$  sono simili per costruzione con rapporto di proporzioni  $|\lambda|$ .  
Due casi:

- (a)  $\lambda \geq 0$   $\vec{OR}$  è concord con  $\vec{OP}$  e quindi:

$$x_R = |\lambda| x_P = \lambda x_P$$

$$y_R = |\lambda| y_P = \lambda y_P$$

- (b)  $\lambda < 0$   $\vec{OR}$  è discorde con  $\vec{OP}$  e quindi:

$$x_R = -|\lambda| x_P = \lambda x_P$$

$$y_R = -|\lambda| y_P = \lambda y_P$$

Operazione binaria esterna:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(y, (x, y)) \mapsto \lambda \cdot (x, y) := (\lambda x, \lambda y)$$

In conclusione abbiamo definito due operazioni su  $\mathbb{R}^2$  "compatibili" con le operazioni definite su  $\mathbb{V}$ :

- $+: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(\lambda, (x_2, y_2)) \mapsto \lambda \cdot (x_2, y_2) := (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$

Proprietà di  $+$  e  $\cdot$ :

1. Commutatività:

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$$

2. Associatività:

$$\begin{aligned} &\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2, \\ &((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) \end{aligned}$$

3. Elemento neutro (+):

$$(0, 0) \in \mathbb{R}^2 \text{ è tale che } (x, y) + (0, 0) = (0, 0) + (x, y) = (x, y)$$

4. Elemento opposto:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists (x', y') \in \mathbb{R}^2 : (x, y) + (x', y') = (x', y') + (x, y) = (0, 0)$$

5. Distributività rispetto a vettori:

$$\begin{aligned} &\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ &\lambda \cdot ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \lambda \cdot (x_1, y_1) + \lambda \cdot (x_2, y_2) \end{aligned}$$

6. Distributività rispetto a scalari:

$$\begin{aligned} &\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ &(\lambda + \mu) \cdot (x, y) = \lambda \cdot (x, y) + \mu \cdot (x, y) \end{aligned}$$

7. Senza nome:

$$\lambda \mu \cdot (x, y) = \lambda \cdot (\mu \cdot (x, y))$$

8. Elemento neutro ( $\cdot$ ):

$$1 \cdot (x, y) = (x, y) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  è il primo esempio di "spazio vettoriale" su  $\mathbb{R}$ .

Più in generale uno spazio vettoriale (o spazio lineare) è una struttura algebrica composta da:

- un campo  $\mathbb{K}$ , i cui elementi sono detti scalari
- un insieme  $\mathbb{V}$ , i cui elementi sono detti vettori
- due operazioni binarie caratterizzate da determinate proprietà



**Def:** Sia  $\mathbb{K}$  (K da *korper* in tedesco) un campo. Uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  è un insieme  $\mathbb{V}$  dotato di due operazioni:

- $+: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$
- $\cdot: \mathbb{K} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$

Che verificano le seguenti proprietà:

1. Commutatività:  $\forall v, w \in \mathbb{V}, v + w = w + v$
2. Associatività:  $\forall u, v, w \in \mathbb{V}, (u + v) + w = u + (v + w)$
3. Elemento neutro:  
 $\exists 0 \in \mathbb{V} : 0 + v = v + 0 = v, \forall v \in \mathbb{V}$
4. Elemento opposto:  
 $\forall v \in \mathbb{V}, \exists v' \in \mathbb{V} : v + v' = v' + v = 0$
5. Distributività rispetto alla somma di vettori:  
 $\forall v, w \in \mathbb{V}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$
6. Distributività rispetto alla somma di scalari:  
 $\forall v \in \mathbb{V}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
7.  $\forall v \in \mathbb{V}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda \mu \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$
8.  $1 \cdot v = v, \forall v \in \mathbb{V}$

Gli elementi di  $\mathbb{V}$  sono chiamati vettori e gli elementi di  $\mathbb{K}$  sono chiamati scalari.

$K = \mathbb{R}$  : spazio vettoriale reale

$K = \mathbb{C}$  : spazio vettoriale complesso

Osservazioni: Sia  $\mathbb{V}$  un K-spazio vettoriale:

- in  $\mathbb{V}$  esiste un unico vettore nullo che denotiamo  $\underline{0}$
- $\forall v \in V$  esiste un unico opposto che denotiamo  $-v$
- $\forall v \in V$  si ha  $0 \cdot v = \underline{0}$
- $\forall \lambda \in K$  si ha  $\lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$
- Siano  $\lambda \in K, v \in K : \lambda \cdot v = \underline{0} \Rightarrow v = \underline{0}$

## 4 16/03/22

### 4.1 Continuo di ieri (Def)

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2)$$

$(\mathbb{R}^2, +, *)$  è un campo? NO!

$$\Delta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

$$((a, b), (c, d)) \mapsto (a, b) \Delta (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Mostrare che  $(\mathbb{R}^2, +, \Delta)$  è un campo.

Indizio:  $\mathbb{R}^2 \leftrightarrow \mathbb{C} = \{a + ib, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

$$(a, b) \leftrightarrow a + ib$$

$$(a, b) \mapsto a + ib$$

Nota che  $\mathbb{C}$  è un campo

## REVISIONE FINITA QUI

### Esempi di spazi vettoriali

1.  $\mathbb{V} = \{\text{Vettori geometrici nello spazio}\} = \{\text{segmenti orientati } \vec{OP}, P \text{ nello spazio}\} \longleftrightarrow \mathbb{R}^3$

Definiamo  $+$  e  $\cdot$  in modo analogo al caso dei vettori nel piano e  $(\mathbb{V}, +, \cdot)$  è uno spazio vettoriale reale.

## 2. L' $n$ -spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (o su $\mathbb{K}$ )

$$n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \forall i\}$$

$$\text{Definiamo } + : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ e } \cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \in \mathbb{K} \quad \text{incompleto}$$

$\forall n \geq 1, (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  è uno spazio vettoriale reale chiamato  $n$ -spazio vettoriale numerico su  $\mathbb{R}$ .

Elemento neutro:  $0 = (0, \dots, 0)$

Elemento opposto di  $x = (x_1, \dots, x_n)$  è  $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$

Osservazione:  $n = 1 : \mathbb{R}$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  (ogni campo  $\mathbb{K}$  è uno spazio vettoriale su se stesso)

In maniera analoga definiamo  $+$  e  $\cdot$  su

$$K^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in K \forall i\}$$

$(K^n, +, \cdot)$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  chiamato  $n$ -spazio vettoriale numerico su  $\mathbb{K}$ .

Esempio:  $k = \mathbb{C}, \mathbb{C}^n$

$$k = \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2^n$$

## 3. Funzioni da un insieme a un campo

Sia  $X$  un insieme qualunque e  $\mathbb{K}$  un campo

$$V = \{\text{funzioni } f : X \rightarrow \mathbb{K}\}$$

- Binaria interna:  $+: V \times V \rightarrow V$

$$(f, g) \rightarrow f + g$$

$$\text{dove } f + g : X \rightarrow K$$

$$x \mapsto (f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

- Binaria esterna:  $\cdot : K \times V \rightarrow V$

$$(\lambda \cdot) \quad \text{incompleto}$$

## 4. Polinomi a coefficienti reali in una indeterminata

Sia  $x$  un'indeterminata.

Un polinomio a coefficienti reali nell'indeterminata  $x$  è un'espressione formale del tipo:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{R} \forall i$$

Se  $a_n \neq 0$  diremo che  $n$  è il grado di  $P$  e scriviamo  $\deg(P) = n$ .

$$\mathbb{R}[x] := \{\text{polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata } x \text{ (di grado arbitrario)}\}$$

Esempio:  $P(x) = 3x^4 + 2x^3 - x + 5 \in \mathbb{R}[x], \deg(P) = 4$

$$+ : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$$

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$$

$$(P + Q)(x) := (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$$

$$P \in \mathbb{R}[x], P = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda \cdot P)(x) := \lambda a_n x^n + \cdots + \lambda a_1 x + \lambda a_0$$

$(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .

In modo analogo si definisce  $(K[x], +, \cdot)$  dove

$$K[x] = \{\text{polinomi a coefficienti in } \mathbb{K} \text{ in un'indeterminata}\}$$

Molti problemi di matematica/fisica hanno la proprietà che l'insieme delle soluzioni ha una struttura di spazio vettoriale.

Esempi:

$$\bullet \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + 7z = 0 \end{cases}$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0 \text{ e } y + 7z = 0\} = \{(13t, -7t, t), t \in \mathbb{R}\}$$

$S$  ha una struttura di spazio vettoriale ( cose che vedremo più avanti )

# 5 22/03/22

## 5.1 Sistemi di equazioni lineari (accenni)

Equazione lineare in  $n$  incognite:

$$x_1, \dots, x_n : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

$$a_i \in \mathbb{R}, \forall i, b \in \mathbb{R}$$

Sistema di  $n$  equazioni lineari in  $n$  incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2} + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Una soluzione del sistema di sopra è un vettore  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  che verifica tutte le equazioni.

Esempi:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Una soluzione di questo sistema è  $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ .

Domande: Supponiamo di avere un sistema lineare:

1. Esiste almeno una soluzione?
2. "Quante" sono?
3. Come si interpreta geometricamente il corrispondente insieme di soluzioni?

## 5.2 Matrici

- Un esempio di spazio vettoriale
- Uno strumento conciso per rappresentare oggetti \*parola incomprensibile\*, tra cui molti dell'algebra lineare

Sia  $\mathbb{K}$  un campo. Siano  $m, n \geq 1$  due numeri

**Def:** Una matrice  $m \times n$  a elementi in  $\mathbb{K}$  è una tabella rettangolare di  $m \cdot n$  elementi di  $\mathbb{K}$ , disposti su  $m$  righe e  $n$  colonne

Notazione:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$(a_{ij})_{1 \leq i \leq n \wedge 1 \leq j \leq n}$  :  $i$  è la riga e  $j$  è la colonna, come in c++ (o qualunque linguaggio "normale")

Ciascuno degli elementi  $a_{ij}$  è detto entrata (o coefficiente) delle matrici

### Un po' di terminologia

- Se  $n = m$ , una matrice  $n \times n$  si dice matrice quadrata di ordine  $n$ , ha due diagonali (solo se è quadrata eh)
- Una matrice  $1 \times n$  è chiamata vettore riga.  
Una matrice  $n \times 1$  è chiamata vettore colonna.

Notazione:

$$M_{m,n}(K) = \{\text{matrici } n \times m \text{ a coefficienti in } K\}$$

$$M_n(K) := \{\text{matrici quadrate di ordine } n\}$$

**Def:** Siano  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ .  
 Diciamo che  $A = B$  se  $a_{ij} = b_{ij} \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$   
 Definiamo due operazioni su  $M_{m,n}$ :

- Somma di matrici

$$+ : M_{m,n} \times M_{m,n} \rightarrow M_{m,n}(K)$$

$$(A, B) \mapsto A + B$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = (b_{ij}) \in M_{m,n}(K)$$

$$A + B := \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij} + b_{ij}) \text{ incompleto, probabilmente } \in M_{m,n}(K)$$

- Moltiplicazione per scalari

$$\cdot : K \times M_{m,n}(K) \rightarrow M_{m,n}(K)$$

$$(\lambda, A) \mapsto \lambda \cdot A$$

$$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$$

$$\lambda \in K$$

$$\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$$

Proprietà:

1.  $+$  è commutativa:  $A + B = B + A$
2.  $+$  è associativa:  $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. Elemento neutro rispetto a  $+$ :  
 $0_{m,n} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & : & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$
4. Elemento opposto rispetto a  $+$ :  
 $A = (a_{ij}) \Rightarrow -A = (-a_{ij})$
5.  $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
6.  $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$
7.  $(\lambda \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$
8.  $1 \cdot A = A \forall m, n \geq 1$  interi,  $(M_{m,n}(K), +, \cdot)$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$

- Prodotto di matrici (prodotto riga per colonna):

$$(a_1 \cdots a_n) \in M_{1,n}(K) : \text{vettore riga}$$

$$(b_1 \cdots b_n) \in M_{n,1}(K) : \text{vettore colonna}$$

$$(a_1 \cdots a_n) \cdot (b_1 \cdots b_n) := a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

Generalizziamo al prodotto di due matrici:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ b_{q1} & \cdots & b_{qp} \end{bmatrix} = [c_{ij}]$$

$c_{ij}$  = prodotto della  $i$ -esima riga di  $A$  e della  $j$ -esima colonna di  $B$

Per definire il prodotto abbiamo bisogno che  $n = q$

$\forall 1 \leq i \leq m, \forall 1 \leq j \leq p$  definiamo

$$c_{ij} = (a_{i1} \cdots a_{in}) \cdot (b_{1j} \cdots b_{nj}) = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Più formalmente, il prodotto di due matrici è una funzione:

$$M_{m,n}(K) \times M_{n,p}(K) \rightarrow M_{m,p}(K)$$

$$(A, B) \mapsto C = AB$$

## 6.1 Operazioni tra matrici

Proprietà

1. Non è commutativa  
Due matrici quadrate  $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$  commutano se  $AB = BA$ .
2. È associativa  
 $\forall A \in M_{m,n}(K), \forall B \in M_{n,p}(K), \forall C \in M_{p,q}(K)$   
 $(AB)C = A(BC)$
3. È distributiva rispetto a +  
 $\forall A, B \in M_{m,n}(K), \forall C \in M_{n,p}(K), \forall D \in M_{n,p}(K)$   
 $(A + B)C = AC + BC$   
 $A(C + D) = AC + AD$
4. Due elementi neutri, uno a destra e uno a sinistra (perchè  $\cdot$  non è commutativa).
  - a destra:  $I$  tale che  $AI = A, \forall A \in M_{m,n}(K)$
  - a sinistra:  $I$  tale che  $IA = A, \forall A \in M_{m,n}(K)$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} aa' + bd' + cd' = a \rightsquigarrow a' = 1, d' = 0, g' = 0 \\ ab' + be' + ch' = b \rightsquigarrow b' = 0, d' = 0, g' = 0 \end{cases} \text{incompleto}$$

:

$$\begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Def:**  $\forall n \geq 1$ , la matrice unità o identità di ordine  $n$  è

$$I_n = (\delta_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$$

dove

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Quindi  $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$  abbiamo:

$$I_m A = A$$

$$A I_n = A,$$

Cioè  $I_m$  è l'elemento neutro a sinistra e  $I_n$  è l'elemento neutro a destra.**N.B.:**  $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  perchè in  $\mathbb{R}$ , la moltiplicazione è commutativa.

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$(A + B)^2 =$$

$$(A + B)(A + B) =$$

$$(A + B)A + (A + B)B =$$

$$A^2 + BA + AB + B^2$$

non si può semplificare perchè nelle matrici il prodotto non è commutativoSe  $A \in \mathcal{M}_n(K), \forall K \geq 1$ , denotiamo  $A^K = A \cdot A$ Lavoriamo ora con  $\mathcal{M}_n(K) \rightsquigarrow \mathcal{M}_n(K) \times \mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(K)$   
 $(A, B) \mapsto AB$ In questo caso  $I_n$  è l'elemento neutro (a destra e a sinistra) rispetto al prodotto.**Def:**  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  si dice invertibile se  $\exists B \in \mathcal{M}_n(K)$  tale che  $AB = BA = I_n$ Osservazioni

1. Se B esiste allora è unica.

Dim:Se  $C$  è tale che  $AC = I_n = CA$ , allora:

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_n C = C \Rightarrow B = C$$

Chiamiamo  $B$  l'inversa di  $A$  e la denotiamo  $A^{-1}$ .

2. Se  $B$  soddisfa  $AB = I_n$  o  $BA = I_n$  allora  $B = A^{-1}$

Esempi

•  $I_n$  è invertibile e  $I_n^{-1} = I_n$

•  $O_n = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

•  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$\exists B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  **Incompleto**

•  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 3b = 1 \\ 2a + 4b = 0 \\ c + 3d = 0 \\ 2c + 4d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2b + 3b = 1 \\ a = -2b \\ c = -3d \\ -6d + 4d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -2 \\ c = \frac{3}{2} \\ d = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Osservazione: Supponiamo che  $A$  sia invertibile.

$\exists A^{-1}$

Sia  $B$  una matrice tale che

$AB = I_n$

Voglio dimostrare che  $BA = I_n$

$BA = I_n BA = A^{-1}ABA = A^{-1}I_n A = A^{-1}A = I_n$

Proposizione

Siano  $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$  invertibili.

Allora  $AB$  è invertibile e  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Dim

Infatti:  $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n$

## 6.2 Altra terminologia

Def: Sia  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ .

La trasposta di  $A$  è la matrice  $n \times m$ :

$$A^T = (a_{ji}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$$

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Def: Una matrice quadrata  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  si dice **simmetrica** se  $A^T = A$ .

Se invece  $A^T = -A$ ,  $A$  si dice **antisimmetrica**.

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Osservazione: se  $A = (a_{ij})$  è antisimmetrica  $\Rightarrow a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j$ ,

Quando  $i = j$ ,  $a_{ii} = a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$

**Def:** Una matrice quadrata  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  si dice ortogonale se  $(A^T)A = I_n = A(A^T) \rightsquigarrow A^{-1} = A^T$

Esempio:  $\forall \theta \in \mathbb{R}$  la matrice

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \text{ è ortogonale.}$$

incompleto (?)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ triangolare inferiore}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix} \text{ triangolare superiore}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ diagonale}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ scalare}$$

**Def:** Una matrice quadrata  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  si dice:

- triangolare inferiore (risp. superiore) se  $a_{1j} = 0$  se  $j > i$  (risp. se  $j < i$ )
- diagonale se è al tempo stesso triangolare superiore e triangolare inferiore, ossia se  $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$
- scalare se  $A$  è diagonale con tutti gli elementi uguali sulla diagonale, cioè:  $A = \lambda I_n, \lambda \in K$ .

## 7 29/03/22

### 7.1 Sistemi di equazioni lineari

**Def:** Siano  $x_1, \dots, x_n$  n indeterminante.

Un'equazione lineare nelle indeterminate  $x_1, \dots, x_n$  a coefficienti in  $\mathbb{K}$  è un'equazione della forma:

$$(*) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b, a_i \in K \forall i, b \in K$$

Una soluzione di  $(*)$  è un elemento  $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$  che sostituito alla  $n$ -upla  $(x_1, \dots, x_n)$  dà luogo ad un'identità.

L'equazione  $(*)$  si dice omogenea (rispettivamente non omogenea) se  $b = 0$  (se  $b \neq 0$ ).

Sistema di eq lineari: consideriamo simmetricamente un eq. lineari in  $x_1, \dots, x_n$ .

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn} = b_m \end{cases}$$

$a_{ij}$  equazione  $i$ -esima, variabile  $x_j$

**Def:** il sistema  $(**)$  si dice omogeneo (risp non omogeneo) se  $b_i = 0 \forall i$  (se  $\exists i \in \{1, \dots, m\}$ )

**Def:**

- Una soluzione di  $(**)$  è un elemento  $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$  che è soluzione simultanea di tutte le eq. lineari.
- Un sistema si dice compatibile se possiede almeno una soluzione. Si dice incompatibile se non possiede soluzioni.
- Due sistemi si dicono equivalenti se hanno lo stesso sistema di soluzioni.

Esempi ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ):

1. Un sistema omogeneo in  $n$  indeterminate è sempre compatibile in quanto  $(0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$  è sempre soluzione.

2. non lo segno

3. 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

"aggiungendo le due equazioni" otteniamo:

$$x_1 + x_2 + (x_1 - x_2) = 0 + (1) \Rightarrow 2x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$$

sostituendo  $x_1 = \frac{1}{2}$  nella I equazione, trovo  $x_2 = -\frac{1}{2}$ .

Quindi il sistema possiede l'unica soluzione  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$

4. 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$$

è compatibile e possiede infinite soluzioni date dalle soluzioni di

$$x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 - x_2$$

L'insieme delle soluzioni  $S$  è costituito dalle coppie ordinate  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  tali che:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - t \\ x_2 = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$S = \{(2 - t, t), t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Notazione matriciale di un sistema: 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

Vettore (colonna) della indeterminante:  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Vettore dei termini noti:  $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in M_{m,1}(K)$

Riscriviamo (\*\*\*) come:  $AX = b$

La matrice:  $(A : b) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$

Consideriamo il sistema seguente:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_3 = -3 \end{cases}$$

La sua matrice orlata:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$$

Risolvero per sostituzione:

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Procedendo dal basso verso l'alto trovo che il sistema possiede l'unica soluzione  $(4, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$

Un sistema di questo tipo è detto "a scalini" o "a gradini".

**Def:** Una matrice a scalini (o a gradini) è una matrice avente le seguenti proprietà:

1. Ogni riga, dopo la prima, inizia con almeno uno zero in più rispetto alla riga precedente

Il primo elemento

2. Se una riga è nulla allora ogni riga sottostante è nulla

diverso da zero su ogni riga (se presente) è detto pivot.



**Def:** Un sistema lineare si dice a scalini (o a gradini) se la sua matrice orlata è una matrice a scalini.

Esempi:

1.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 3 \\ 0 & 2 & -3 & : & 1 \\ 0 & 0 & 3 & : & -3 \end{bmatrix}$  è una matrice a scalini.  
pivot: 1, 2, 3
2.  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 5 & : & 3 \\ 0 & 2 & -3 & : & 1 \\ 0 & 0 & 3 & : & -3 \end{bmatrix}$  è una matrice a scalini.

## INCOMPLETO: SI È SPENTO IL PC

### 8 30/03/22

#### 8.1 Sistema lineare $\longrightarrow$ sistema a scalini.

**Algoritmo (o metodo di eliminazione) di Gauss-Jordan.**

Tale metodo consiste nell'effettuare delle operazioni successive sulle equazioni del sistema (o equivalentemente sulle righe della matrice orlata) che non ne alterino l'insieme delle soluzioni.

Operazioni elementari:

$$(*) = \begin{cases} a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b \\ a_{1'}x_1 + \dots + a_{n'}x_n = b' \end{cases}$$

1. Il sistema  $(*)$  è equivalente a:

$$(**) = \begin{cases} a_{1'}x_1 + \dots + a_{n'}x_n = b' \\ a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b \end{cases}$$

Scambiare tra loro due equazioni di un sistema non cambia l'insieme delle soluzioni.

2. Il sistema  $(*)$  di partenza è equivalente a:

$$(**) = \begin{cases} \lambda a_1x_1 + \dots + \lambda a_nx_n = \lambda b \\ a_{1'}x_1 + \dots + a_{n'}x_n = b' \end{cases}, \quad \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{K}$$

Moltiplicare (primo e secondo membro) per uno scalare non nullo non cambia l'insieme delle soluzioni:

$(x_1, \dots, x_n)$  è soluzione di  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$

$(x_1, \dots, x_n)$  è soluzione di  $\lambda a_1x_1 + \dots + \lambda a_nx_n = \lambda b$

3. Il sistema  $(*)$  è equivalente al sistema in cui un'equazione è sostituita con quella ottenuta sommando ad essa un multiplo di un'altra equazione:

$$(**) = \begin{cases} a_1x_1 + \dots + a_nx_n + \lambda(a_{1'}x_1 + \dots + a_{n'}x_n) = b + \lambda b' \\ a_{1'}x_1 + \dots + a_{n'}x_n = b' \end{cases}$$

Dim:

$(x_1, \dots, x_n)$  è soluzione di  $(*) \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n)$  è soluzione di  $(**)$

$\Rightarrow$  Assumiamo che  $(x_1, \dots, x_n)$  è soluzione di  $(*)$

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$$

$$a_{1'}x_1 + \dots + a_{n'}x_n = b'$$

$$b = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$$

$$b' = a_{1'}x_1 + \dots + a_{n'}x_n$$

$$b + b' = b + \lambda b'$$

Sostituisco  $b$  e  $b'$

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n + \lambda(a_{1'}x_1 + \dots + a_{n'}x_n) = b + \lambda b'$$

$\Leftarrow (x_1, \dots, x_n)$  è soluzione di  $(**)$   $\Rightarrow \dots (x_1, \dots, x_n)$  è soluzione di  $(*)$

## Operazioni elementari sulle equazioni di un sistema

- I. One Scambiare tra loro due equazioni del sistema
- II. Two Moltiplicare un'equazione per uno scalare non nullo
- III. Three Sostituire un'equazione con quella ottenuta "sommando" ad essa un multiplo di un'altra equazione

## Operazioni elementari sulle righe di una matrice

1.

- I. Scambiare tra loro due righe di una matrice

$$R_i \leftrightarrow R_j : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- II. Moltiplicare una riga della matrice per uno scalare non nullo:

$$R_i \leftarrow \lambda R_i : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow 2R_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

- III. Sostituire una riga della matrice con quella ottenuta sommando ad essa un multiplo di un'altra riga:

$$R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j : \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 9R_3} \begin{bmatrix} 0 & -8 & -16 & -24 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

**Algoritmo di Gauss-Jordan:** Successione di operazioni elementari che permettono di trasformare il sistema (o la corrispondente matrice orlata) in un sistema a scalini (in una matrice a scalini) equivalente al sistema di partenza.

Esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 5R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 9R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

NB: L'output dell'algoritmo non è unico perchè dipende dalle scelte effettuate

**Risoluzione di un sistema lineare con il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan** Supponiamo di avere un sistema lineare qualsiasi:

1. Scriviamo la corrispondente matrice orlata  $\mathbb{A}$
2. Utilizziamo l'algoritmo di Gauss-Jordan per ottenere da  $\mathbb{A}$  una matrice  $\mathbb{B}$  a scalini equivalente per righe
3. Se l'ultimo pivot di  $\mathbb{B}$  appartiene all'ultima colonna, il sistema non è compatibile.
4. Scriviamo il sistema a scalini corrispondente a  $\mathbb{B}$  e lo risolviamo introducendo delle eventuali variabili libere

Esempio:

1. Con numeri:

$$(a) \begin{cases} x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) È compatibile (l'ultimo pivot (1) non appartiene all'ultima colonna).

Variabili libere:  $x_2, x_4$

Risolvo:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_3 = 3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6 - 4x_4 = 4 \\ x_3 = 3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 - 2s - 2t \\ x_2 = s \\ x_3 = 3 - 2t \\ x_4 = t \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{S} = \{(5 - 2s - 2t, s, 3 - 2t, t), s, t \in \mathbb{R}\} : \infty^2 \text{ soluzioni}$$

2. Con parametro: **INCOMPLETO**

$$3. (a) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -a & 0 & 1 & 1-a \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ a & -a & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & a & 1 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_2 - aR_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & a & 1 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & a-1 \\ 0 & a & a & 1 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_3 - aR_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & a-a^2 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \leftarrow a \text{ scalini } \forall a$$

$$a - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 1$$

$$a = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{compatibile}$$

$$a = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{compatibile}$$

$$a \neq 0, a \neq 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & a-a^2 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + ax_3 = a - 1 - x_4 \\ (a - a^2)x_3 = 1 - a^2 - (1 - a)x_4 \end{cases}$$

## 9 05/04/22

### 9.1 Ultime considerazioni sui sistemi lineari

(\*)  $AX = b, A \in \mathcal{M}_n(K), b \in M_{n,1}(K),$

A invertibile.

$\Updownarrow$

$$\exists A^{-1} \in M(K) : A^{-1}A = AA^{-1} = In$$

Quindi abbiamo:

$$A^{-1}AX = A^{-1}b \Leftrightarrow InX = A^{-1}b \Leftrightarrow X = A^{-1}b$$

Proposizione (metodo dell'inversa)

Sia  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  una matrice invertibile e  $b \in M_{n,1}(K)$ . Allora il sistema

$$AX = b$$

possiede l'unica soluzione  $X = A^{-1}b$

### Come si calcola l'inversa di una matrice?

L'algoritmo di Gauss-Jordan offre un metodo efficiente per il calcolo dell'inversa di una matrice.

Idea:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 7R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

$A \in \mathcal{M}_n(K)$

$$P_r \cdots P_2 P_1 A = I_n$$

$$(A \quad ; \quad I_n) \rightarrow (I_n \quad ; \quad A^{-1})$$

Sistema lineare omogeneo a coefficienti in  $\mathbb{K}$

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$S_0$ : insieme delle soluzioni di  $(*)$

$S_0$  è un sottoinsieme di  $K^n$  con qualche interessante proprietà.

1.  $\underline{0} = (0, \dots, 0) \in S_0$  (il vettore nullo è sempre soluzione di un sistema omogeneo)  $\Rightarrow S_0 \neq \emptyset$

2. Se  $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in S_0 \Rightarrow (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \in S_0$  Dim:

$$\text{Se } (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in S_0$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall i, a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0, \quad a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n = 0$$

Mostriamo che  $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in S_0$ , cioè  $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$  verifica  $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0, \forall i$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \forall i \quad a_{i1}(x_1 + y_1) + \cdots + a_{in}(x_n + y_n) &= \\ = a_{i1}x_1 + a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}x_n + a_{in}y_n &= \\ = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{i1}x_n + a_{in}y_1 + \cdots + a_{in}y_n \end{aligned}$$

3. Se  $(x_1, \dots, x_n) \in S_0 \Rightarrow \lambda(x_1, \dots, x_n) \in S_0, \forall \lambda \in \mathbb{K}$

Dim:

$$(x_1, \dots, x_n) \in S_0 \Rightarrow \forall i \quad a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0$$

$$\text{Mostriamo che } \forall \lambda \in K, \quad \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in S_0 : \forall i \text{ abbiamo: } a_{i1}(\lambda x_1) + \cdots + a_{in}(\lambda x_n) = \lambda(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) = 0$$

Le proprietà 1, 2 e 3 fanno di  $S_0$  un "sottospazio vettoriale" di  $K^n$

Più in generale definiamo:

**Def:** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$ .

Un sottoinsieme  $w$  di  $V$  ( $w \subseteq V$ ) si dice sottospazio vettoriale se:

$$1. \quad w \neq \emptyset$$

$$2. \quad \forall w_1, w_2 \in W : w_1 + w_2 \in W$$

$$3. \quad \forall w \in W, \forall \lambda \in K : \lambda w \in W$$

• La proprietà 3 implica che  $\underline{0} \in W$ .

Osservazioni:

$$\text{Dim: } W \neq \emptyset \Rightarrow \exists w \in W \xrightarrow[\text{con } \lambda=0]{\boxed{3}} 0 \cdot w = \underline{0} \in W$$

• Un sottospazio vettoriale è uno spazio vettoriale:

• Il vettore nullo  $\underline{0} \in W$  per l'osservazione precedente

$$\bullet \quad \forall w \in W, (-1) \cdot w = -w \in W$$

• Tutte le altre proprietà discendono da  $V$  in quanto  $W \subseteq V$ .

Esempi

1. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo a  $n$  incognite e a coefficienti in  $K$  è un sottospazio vettoriale di  $K^n$ .

$$2. \quad V = K^n$$

$$W = \{(0, x_2, \dots, x_n) : x_i \in K \quad \forall i = 2, \dots, n\}$$

Vediamo che  $W$  è un sottospazio vettoriale di  $K^n$ :

1.  $W \neq \emptyset$ , poichè  $(0, \dots, 0) \in W$

2. Siano  $\underline{x} = (0, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\underline{y} = (0, y_2, \dots, y_n) \in W$

Allora

$$\underline{x} + \underline{y} = (0, x_2, \dots, x_n) + (0, y_2, \dots, y_n) = (0, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

3. Sia  $\underline{x} = (0, x_2, \dots, x_n) \in W$ ,  $\lambda \in K$

$$\text{Allora } \lambda \cdot \underline{x} = (0, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in W$$

Nota che  $W$  è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 = 0 \end{cases}$$

4. Ogni spazio vettoriale  $V$  ha due sottospazi vettoriali "banali":

$$W_1 = \{\underline{0}\}$$

$$W_2 = V$$

5.  $V$  spazio vettoriale su  $K$

$$v \in V.$$

$$W = \langle v \rangle := \{\lambda v : \lambda \in K\}$$

$$(a) \quad \underline{0} = 0 \cdot v \in W$$

$$(b) \quad w_1, w_2 \in W \Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in K : w_1 = \lambda_1 v \text{ e}$$

$$w_2 = \lambda_2 v \Rightarrow w_1 + w_2 = \lambda_1 v + \lambda_2 v = (\lambda_1 + \lambda_2)v \in W$$

$$(c) \quad w \in W \Rightarrow \exists \lambda \in K : w = \lambda v$$

$$\forall \mu \in K \quad \mu w = \mu \lambda v \in W$$

Quindi  $W$  è un sottoinsieme vettoriale di  $V$  chiamato retta vettoriale

$$V = \mathbb{R}^2, v = (1, 1)$$

$$W = \langle v \rangle = \{\lambda(1, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\} \text{ (passa per l'origine)}$$

Più in generale,  $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  Allora  $\langle v \rangle = \{(\lambda a, \lambda b) \in \mathbb{R}^2\}$  è la retta passante per l'origine definita dall'equazione  $bx - ay = 0$

## 10 06/04/22

Mi sono perso qualcosa, stavo mangiando una pizzezza

**Def:** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$ .  
Un sottoinsieme  $W \subseteq V$  incompleto

**Def:** (equivalente):  $W \subseteq V$  è un sottospazio vettoriale se e solo se:

$$1. \quad W \neq \emptyset$$

$$2. \quad \forall w_1, w_2 \in W, \forall \lambda, \mu \in K : \lambda w_1 + \mu w_2 \in W$$

Esempio:

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$w_1 = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$w_2 = \{(x, y, x^2) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$$

1.  $w_1$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^3$

$$(a) \quad w_1 \neq \emptyset \text{ poichè } (0, 0, 0) \in w_1$$

$$(b) \quad (\forall w_1, w_2 \in w_1, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \lambda w_1 + \mu w_2 \in w_1)$$

Siano  $w_1, w_2 \in w_1$ . Allora  $\exists x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$  tali che  $w_1 = (x_1, y_1, z_1), w_2 = (x_2, y_2, z_2)$ .

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  abbiamo:

$$\lambda w_1 + \mu w_2 = \lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, (\lambda x_1 + \mu x_2)) = (x', y', z') \in w_1,$$

$$x' = \lambda x_1 + \mu x_2$$

$$y' = \lambda y_1 + \mu y_2 \text{ potrebbe essere sbagliato}$$

$$2. w_2 = \{(x, y, x^2) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$w_1 = (3, 0, 9)$$

$$w_2 = (2, 1, 4)$$

$$\lambda = 1 \quad \lambda w_1 + \mu w_2 = (1, -1, 5) \notin W_2 : \quad 5 \neq 1^2$$

$$\mu = -1$$

$$(x_1, y_1, x_1^2) + (x_2, y_2, x_2^2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1^2 + x_2^2) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$$

tutte le  $u$  e le  $w$  sono maiuscole (si me ne sono accorto ora) Proposizione: Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$  e siano  $u, w \subseteq V$

due sottospazi di  $V$ . Allora anche  $u \cap w$  è un sottospazio vettoriale.

Ricordiamo:  $u \cap w = \{v : v \in u \text{ e } v \in w\}$

Dim:

$$1. u \cap w \neq \emptyset \text{ poichè } \underline{0} \in u \text{ (} u \text{ è un sottospazio) e } \underline{0} \in w \text{ (} w \text{ è un sottospazio)}$$

$$2. \forall v_1, v_2 \in u \cap w, \quad \forall \lambda, \mu \in K$$

$$\text{Allora } \lambda v_1 + \mu v_2 \in u \cap w \text{ (poichè } u \text{ e } w \text{ sono sottospazi e } v_1, v_2 \in u \text{ e } v_1, v_2 \in w)$$

Più in generale dati  $n$  sottospazi  $w_1, w_n$

$$w_1 \cap \dots \cap w_n = \bigcap_{i=1}^n w_i \text{ è un sottospazio.}$$

Attenzione:

$$1. u \cup w \text{ in generale non è un sottospazio}$$

Esempio:

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$u = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$w = \{0, y : y \in \mathbb{R}\}$$

$$v_1, v_2 \in u \cup w : v_1 + v_2 \notin u \cup w$$

$$v_1 = (1, 0)$$

$$v_2 = (0, 1)$$

$$v_1 + v_2 = (1, 1) \notin u \cup w$$

Osservazione:  $w \subseteq v$  sottospazio.

Il complementare  $V \setminus W = \{v \in V : v \notin W\}$  non è mai un sottospazio di  $V$  perchè  $\underline{0} \notin V \setminus W$  ( $\underline{0} \in W$ )

Idea: Vogliamo costruire un sottospazio che contiene due sottospazi di  $U$  e  $W$

Proposizione: Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$  e siano  $U, W$  due sottospazi vettoriali di  $V$ .

Allora l'insieme:

$$U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$$

è un sottospazio vettoriale di  $V$  chiamato sottospazio somma di  $U$  e  $W$ .

Osservazione:  $U \cup W \subseteq U + W$

$$\text{Infatti } U \subseteq U + W : \forall u \in U, u = u + \underline{0}$$

$$W \subseteq U + W : \forall w \in W, w = \underline{0} + w$$

Dim:

Facciamo vedere che  $u + w$  è un sottospazio di  $V$ :

$$1. u + w \neq \emptyset \text{ poichè } \underline{0} = \underline{0} + \underline{0} \in U + W$$

$$2. \text{ Siano } v_1, v_2 \in u + w. \text{ Allora } \exists u_1, u_2 \in U, w_1, w_2 \in W :$$

$$v_1 = u_1 + w_1$$

$$v_2 = u_2 + w_2$$

$$\text{Siano } \lambda, \mu \in K$$

Allora abbiamo:

$$\lambda v_1 + \mu v_2 = \lambda(u_1 + w_1) + \mu(u_2 + w_2) =$$

$$= \lambda u_1 + \lambda w_1 + \mu u_2 + \mu w_2 =$$

$$= \lambda u_1 + \mu u_2 + \lambda w_1 + \mu w_2 \in U + W$$

$$\text{prof cambia blocco appunti } V = \mathbb{R}^2$$

$$U = \langle (1, 0) \rangle \text{ incompleto}$$

**Def:**  $U, W$  sottospazi di  $V$

$U \cap W = \{ \underline{0} \}$  allora  $U + W$  è detto SOMMA DIRETTA di  $U$  e  $W$  e si denota  $U \oplus W$ .

Se  $V = U + W$  (O+) allora  $U$  e  $W$  si dicono supplementari. \_\_\_\_\_ Riardiamo:  $\langle (a, b) \rangle = \{ \lambda(a, b) : \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ \}$  incompleto

Proposizione: Sia  $V = U + W$ . Allora  $V = U + W$  se e solo se ogni elemento di  $v$  si scrive in modo unico nella forma  $u + w, u \in U, w \in W$ .

Dim:

$\Rightarrow$ ) Supponiamo che  $V = U + W$

Siano  $u_1 \in U, w_1 \in W$  e  $u_2 \in U, w_2 \in W$ :  $V = u_1 + w_1 = u_2 + w_2$  (vogliamo far vedere che  $u_1 = u_2$  e  $w_1 = w_2$ )

- $\Downarrow$   
 $u_1 - u_2 = u_1 - u_2 \Rightarrow u_1 - u_2 \in U \cap W = \{ \underline{0} \} \Rightarrow u_1 = u_2$
- $w_1 - w_2 = w_1 - w_2 \Rightarrow u_1 - u_2 \in U \cap W = \{ \underline{0} \} \Rightarrow u_1 = u_2$

incompleto

## 11 08/04/22

incompleto Esempi

1.  $V = \mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, 2, 0), \quad v_2 = (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$$

$v = (-1, 4, -3)$  è combinazione lineare di  $v_1$  e  $v_2$ .

Infatti

$$2v_1 + (-3)v_2 = (2, 4, 0) - (3, 0, 3) = (-1, 4, -3) = v$$

2.  $V = \mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, 2, 3), \quad v_2 = (3, 2, 1), \quad v_3 = (-1, 6, 13) \in \mathbb{R}^3$$

Domande:

(a)  $\underline{0} = (0, 0, 0)$  è combinazione lineare di  $v_1, v_2$  e  $v_3$ ?

Si! La combinazione lineare banale restituisce sempre il vettore nullo:

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = \underline{0}$$

(b) esiste una combinazione lineare non banale di  $v_1, v_2, v_3$  che restituisce il vettore nullo?

$$\exists \lambda, \mu, \delta \in \mathbb{R}, \quad (\lambda, \mu, \delta) \neq (0, 0, 0) \text{ tali che } \lambda v_1 + \mu v_2 + \delta v_3 = \underline{0}?$$

$$\lambda(1, 2, 3) + \mu(3, 2, 1) + \delta(-1, 6, 13) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda + 3\mu - \delta, 2\lambda + 2\mu + 6\delta, 3\lambda + \mu + 13\delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda + 3\mu - \delta = 0 \\ 2\lambda + 2\mu + 6\delta = 0 \\ 3\lambda + \mu + 13\delta = 0 \end{cases} \quad \text{sistema lineare } \underline{\text{omogeneo}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 13 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow -2R_1 \wedge R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu - \delta = 0 \\ -4\mu + 8\delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3\mu + \delta = -5\delta \\ \mu = 2\delta \end{cases}$$

$$S = \{ (-5\delta, 2\delta, \delta) : \delta \in \mathbb{R} \}$$

$\forall \delta \neq 0$  otteniamo i coefficienti di una combinazione lineare non banale che restituisce il vettore nullo

$$\delta = 1 : (-5, 2, 1)$$

$$-5v_1 + 2v_2 + v_3 = -5(1, 2, 3) + 2(3, 2, 1) + (-1, 6, 13) = (0, 0, 0)$$

Osservazioni

- L'insieme delle combinazioni lineari di  $v \in V$  è la retta vettoriale  $\langle v \rangle$ :

$$\langle v \rangle := \{ \lambda v : \lambda \in K \}$$

- $\forall i = 1, \dots, n, \quad v_i$  è combinazione lineare di  $v_1, \dots, v_n$ :

$$v_i = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 0 \cdot v_n$$

- Dalla definizione di sottospazio segue che se  $v_1, \dots, v_n \in W$  e  $W$  è un sottospazio, allora tutte le combinazioni lineari di  $v_1, \dots, v_n$  appartengono a  $W$ .

L'insieme

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle := \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : \lambda_i \in K, \forall i = 1, \dots, n \}$$

è un sottospazio di  $V$  chiamato il sottospazio generato (o \*span\* o copertura lineare) da (di)  $v_1, \dots, v_n$ .

È il "più piccolo" sottospazio di  $V$  che contiene  $v_1, \dots, v_n$ :

Se  $W$  è un sottospazio che contiene  $v_1, \dots, v_n$

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq W$$

### Esempio

$$V = M_2(\mathbb{R})$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \in \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = M_2(\mathbb{R})? \text{ No, perchè } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \notin \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle \subsetneq M_2(\mathbb{R})$$

### Osservazione

$$\forall m \leq n$$

$$\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq \langle v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n \rangle$$

↑ ogni combinazione lineare di  $v_1, \dots, v_m$  è anche combinazione lineare di  $v_1, \dots, v_n$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_n v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + 0 \cdot v_{m+1} + \dots + 0 \cdot v_n$$

Ripartiamo dall'esercizio 1 del foglio 2:

$$V = \mathbb{R}^2, \quad v = (1, 2), w = (3, 4) \in \mathbb{R}^2$$

Abbiamo mostrato che:

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : (a, b) = \lambda(1, 2) + \mu(3, 4)$ , o equivalentemente,

$$(a, b) \in \langle (1, 2), (3, 4) \rangle$$

Poichè  $\langle (1, 2), (3, 4) \rangle \subseteq \mathbb{R}^2$ , otteniamo che  $\langle (1, 2), (3, 4) \rangle = \mathbb{R}^2$ , cioè  $(1, 2)$  e  $(3, 4)$  "generano" tutto  $\mathbb{R}^2$  attraverso le loro combinazioni lineari.

Diremo che  $\{(1, 2), (3, 4)\}$  è un "sistema di generatori" di  $\mathbb{R}^2$

- $(0, 0) = \lambda(1, 2) + \mu(3, 4) \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$ , cioè l'unica combinazione lineare di  $(1, 2)$  e  $(3, 4)$  che restituisce il vettore nullo è quella banale.

Diremo che  $(1, 2)$  e  $(3, 4)$  sono linearmente indipendenti.

Più in generale definiamo:



**Def:** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$

Diciamo che  $v_1, \dots, v_n \in V$  generano  $V$  oppure che  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è un sistema di generatori di  $V$  se:

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$$

Osservazione: Poichè abbiamo sempre  $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq V$ , per mostrare che  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è un sistema di generatori di  $V$  basta dimostrare che

$$V \subseteq \langle v_1, \dots, v_n \rangle,$$

cioè che  $\forall v \in V, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

## 11.1 Definizione di vettori linearmente indipendenti

**Def:** (**difficile, la chiede 100%**): Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$ .

I vettori  $v_1, \dots, v_n \in K$  si dicono **\*\*linearmente indipendenti\*\*** se  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ , o equivalentemente se l'unica combinazione lineare di  $v_1, \dots, v_n$  che restituisce il vettore nullo è quella banale.

Altrimenti, se esistono  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  non tutti nulli ( $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ ) tali che  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \underline{0}$ , Esempio:  
 $v_1, \dots, v_n$  si dicono linearmente dipendenti.

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$v_1 = (8, -2, 0), \quad v_2 = (0, 3, 4), \quad v_3 = (-2, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$$

Domanda:  $v_1, v_2, v_3$  sono linearmente indipendenti?

Siano  $\lambda, \mu, \delta \in \mathbb{R}$  tali che:

$$\lambda v_1 + \mu v_2 + \delta v_3 = \underline{0} \Rightarrow \lambda(8, -2, 0) + \mu(0, 3, 4) + \delta(-2, 2, 2) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 8\lambda - 2\delta = 0 \\ -2\lambda + 3\mu + 2\delta = 0 \\ 4\mu + 2\delta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 & : & 0 \\ -2 & 3 & 2 & : & 0 \\ 0 & 4 & 2 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + \frac{1}{4}R_1} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - \frac{4}{3}R_2} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 8\lambda - 2\delta = 0 \\ 3\mu + \frac{3}{2}\delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{4}\delta \\ \mu = -\frac{1}{2}\delta \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left( \frac{1}{4}\delta, -\frac{1}{2}\delta, \delta \right) : \delta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\delta = 4 \rightsquigarrow (1, -2, 4)$$

$$v_1 - 2v_2 + 4v_3 = (0, 0, 0)$$

$\Rightarrow v_1, v_2$  e  $v_3$  sono linearmente dipendenti

Osservazioni

1. Un vettore  $v \in V$  è linearmente dipendente se e solo se  $v = \underline{0}$

$\Leftrightarrow$  se  $v = \underline{0}$  allora  $1 \cdot v = \underline{0} \Rightarrow v$  è linearmente dipendente

$\Rightarrow \exists \lambda \neq 0 : \lambda v = \underline{0} \Rightarrow \lambda^{-1} \lambda v = \lambda^{-1} \underline{0} \Rightarrow 1 \cdot v = \underline{0}$

2. Due vettori  $v_1, v_2 \in V$  sono linearmente dipendenti  $\Leftrightarrow \exists \lambda \in K$  tale che  $v_1 = \lambda v_2$  o  $v_2 = \lambda v_1$ .

Esempio:  $V = \mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 3v_1 \Rightarrow v_1, v_2 \text{ sono linearmente dipendenti.}$$

Infatti se  $v_2 = 3v_1 \Rightarrow 3v_1 - v_2 = \underline{0}$

$\Leftrightarrow$  Supponiamo  $\exists \lambda \in K : v_1 = \lambda v_2$  o  $v_2 = \lambda v_1$ .

Se  $v_1 = \lambda v_2 \Rightarrow 1 \cdot v_1 - \lambda v_2 = \underline{0}$

Se  $v_2 = \lambda v_1 \Rightarrow \lambda v_1 - v_2 = \underline{0}$

In ogni caso  $v_1, v_2$  sono linearmente dipendenti.

$\Rightarrow$  Supponiamo  $v_1, v_2$  linearmente dipendenti  $\Rightarrow \exists \lambda_1 \lambda_2 \in K, (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0) : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \underline{0}$

Se  $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2$

Se  $\lambda_2 \neq 0 \Rightarrow v_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} v_1$

Quindi  $\exists \lambda \in K : v_1 = \lambda v_2$  o  $v_2 = \lambda v_1$

Esempio:  $v_1 = (1, 2, 3), \quad v_2 = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  sono linearmente dipendenti poichè  $v_2 = 0 \cdot v_1 \Rightarrow 0 \cdot v_1 + (-1)v_2 = \underline{0}$

3.  $v_1, \dots, v_n \in V$  sono linearmente dipendenti  $\Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\}$  tale che  $v_i$  è combinazione lineare degli altri.

Esempio:  $v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, -1, 3), \quad v_3 = (2, 0, 4)$

$v_1, v_2, v_3$  sono linearmente dipendenti poichè  $v_3 = v_1 + v_2 \Rightarrow v_1 + v_2 - v_3 = \underline{0}$

4. Se l'insieme  $\{v_1, \dots, v_n\}$  contiene il vettore nullo allora  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente dipendenti.

**Def:** Un sottoinsieme finito  $\{v_1, \dots, v_n\}$  di  $V$  si dice base di  $V$  se:

1.  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti

2.  $v_1, \dots, v_n$  generano  $V, \forall v \in V$

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K : \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = v.$

## 12 12/04/22

**Def:** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$  e siano  $v_1, \dots, v_n \in V$

- Diciamo che  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è un sistema di generatori o che  $v_1, \dots, v_n$  generano  $V$  se

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$$

o equivalentemente se

$$\forall v \in V, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$$

tali che

$$(*) \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = v$$

Proposizione: Sia

- Diciamo che  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti se  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

$$[(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)]$$

- Diciamo che  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è una base di  $V$  se:

1.  $v_1, \dots, v_n$  generano  $V$

2.  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti.

$V$  uno spazio vettoriale su  $K$  e sia  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$

Allora  $\forall v \in V \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$  tale che

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

allora  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\mu_1, \mu_n) \Leftrightarrow \lambda_i = \mu_i, \forall i = 1, \dots, n$

I coefficienti  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  della combinazione lineare (\*) Si dicono le coordinate di  $v$  rispetto alla base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  e  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  si dice la  $n$ -upla delle coordinate di  $v$  rispetto alla base  $\{v_1, \dots, v_n\}$

Dim

Poichè  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è una bse allora i vettori  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti.

La conclusione segue dall'esercizio 6-(d) del foglio 4

Esempio

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$v_1 = (1, 0), \quad v_2 = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$$

- $v_1, v_2$  generano  $\mathbb{R}^2 : \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

- $v_1, v_2$  sono linearmente indipendenti. Infatti se  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  sono tali che:

$$\lambda_1(1, 0) + \lambda_2(0, 1) = (0, 0) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$$

Quindi  $\mathbb{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$  è una base di  $\mathbb{R}^2$

Si noti che parliamo di una base di  $\mathbb{R}^2$ , in quanto essa non è unica.

$w_1 = (1, 2), w_2 = (3, 4)$  generano  $\mathbb{R}^2$  e sono linearmente indipendenti

$\Rightarrow \mathbb{B}' = w_1, w_2$  è un'altra base di  $\mathbb{R}^2$

**Def:** Due vettori  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$  si dicono collineari se  $v_1, v_2$  sono linearmente dipendenti, cioè se  $\exists \lambda \in K$  tale che:  
 $v_1 = \lambda v_2$  o  $v_2 = \lambda v_1$

Geometricamente è semplice vedere che ogni coppia di vettori non collineari  $v_1, v_2$  costituisce una base di  $\mathbb{R}^2$

Vedremo che tutte le basi di  $\mathbb{R}^2$  sono della forma  $\{v_1, v_2\}$  con  $v_1, v_2$  non collineari.

In particolare tutte le basi di  $\mathbb{R}^2$  sono costituite da 2 elementi

Lemma (di Steinitz)

Sia  $V$  uno spazio vettoriale con base  $\mathbb{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  e siano  $w_1, \dots, w_m \in V$

$w_1, \dots, w_m$  sono linearmente indipendenti  $\Rightarrow m \leq n$

$\Updownarrow m > n \Rightarrow w_1, \dots, w_m$  sono linearmente dipendenti.

Utilizziamo il lemma di Steinitz per dimostrare il risultato seguente:

Teorema di equipotenza delle basi

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$ .

Siano  $\{v_1, \dots, v_n\}$  e  $\{w_1, \dots, w_n\}$  due basi di  $V$ .

Allora  $n = m$

Dim: Idea:  $m = n \Leftrightarrow m \leq n$  e  $m \geq n$ .

• Poichè  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è una base di  $V$  e  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti  $\xRightarrow{\text{lemma}} m \leq n$

• Poichè  $\{w_1, \dots, w_n\}$  è una base di  $V$  e  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti  $\xRightarrow{\text{lemma}} n \leq m$

Quindi  $m \leq n$  e  $n \leq m \Leftrightarrow n = m$

**Def:** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$  e sia  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base finita di  $V$ .

Il numero  $n$  si dice \*dimensione\* di  $V$  e si denota

$\dim_K(V)$  o più semplicemente  $\dim(V)$

Se  $V = \{0\}$  allora si pone  $\dim(V) = 0$ .

Se  $V = \{0\}$  oppure se  $V$  ha una base finita diciamo che  $V$  ha dimensione finita.

Esempi

1.  $\mathbb{R}^2$  è uno spazio vettoriale di dimensione 2, poichè abbiamo visto che  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  è una base di  $\mathbb{R}^2$ .

2.  $V = K^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in K, \forall i = 1, \dots, n\}$ ,  $n \geq 1$  Siano

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

$\vdots$

$$e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

È facile mostrare che  $\{e_1, \dots, e_n\}$  è una base di  $K^n$  detta \*\*base canonica\*\* di  $K^n$ .

Quindi  $\dim_K K^n = n$ .

$\forall x' = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ , abbiamo

$$x' = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

cioè  $x'$  è la  $n$ -upla delle coordinate di  $x'$  rispetto a  $\{e_1, \dots, e_n\}$

3.  $V = M_2(\mathbb{R})$

Siano:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}.$$

Si mostra facilmente che  $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$  siano linearmente indipendenti.

Quindi  $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$  è una base di  $M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}$  hlincompleto

$V, \mathbb{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$ .

Consideriamo la funzione

$$\varphi_{\mathbb{B}} : V \rightarrow K^n$$

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

- iniettiva: se  $v, w$  sono tali che  $\varphi_{\mathbb{B}}(v) = \varphi_{\mathbb{B}}(w) \Rightarrow v = w$ .

$$v, w \in V \Rightarrow v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

- suriettiva?  $\forall (\lambda_1, \lambda_n) \in K^n, \exists v \in V$  tale che

$$\varphi_{\mathbb{B}} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Basta prendere  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$   $\boxed{()}$

Quindi  $\varphi_{\mathbb{B}}$  è biettiva.

Inoltre  $\varphi_{\mathbb{B}}$  soddisfa le seguenti proprietà:

1.  $\forall w_1, w_2 \in V, \varphi_{\mathbb{B}}(w_1 + w_2) = \varphi_{\mathbb{B}}(w_1) + \varphi_{\mathbb{B}}(w_2)$ . Dim

Siano  $w_1, w_2 \in V$ . Quindi  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in K$  tali che

$$w_1 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, \quad w_2 = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

$$\text{Quindi } \varphi_{\mathbb{B}}(w_1) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \varphi_{\mathbb{B}}(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

$$\text{Ora } w_1 + w_2 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n)v_n$$

$$\varphi_{\mathbb{B}}(w_1 + w_2) = (\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_n + \mu_n) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) + (\mu_1, \dots, \mu_n) = \varphi_{\mathbb{B}}(w_1) + \varphi_{\mathbb{B}}(w_2)$$

2.  $\forall \lambda \in K$  **Incompleto**

Le proprietà 1 e 2 fanno di  $\varphi_B$  quella che chiameremo un'"applicazione lineare".

Chiamiamo  $\varphi_B$  **isomorfismo coordinato** rispetto alle basi  $B$ .

Teorema (di esistenza della base): Sia  $V \neq \{0\}$

$L = \{v_1, \dots, v_p\}$  un insieme di vettori linearmente indipendenti

$G = \{v_1, \dots, v_p, \dots, v_m\}, m \geq p$ , un sistema di generatori.

Allora esiste una base  $B$  di  $V$  tale che

$$L \subseteq B \subseteq G$$

Prima della dimostrazione:

Corollario 1: Sia  $V \neq \{0\}$  uno spazio vettoriale di dimensione finita. Allora:

1. Da qualsiasi sistema di generatori è possibile estrarre una base di  $V$
2. È possibile completare qualsiasi insieme di vettori linearmente indipendenti a una base di  $V$

Esempio

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (4, 6, 9) \in \mathbb{R}^3$$

$L = \{(1, 2, 3), (4, 6, 9)\}$  è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

$$L \subseteq G = \{(1, 2, 3), (4, 6, 9), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$G$  è un sistema di generatori.

Per il teorema esiste una base  $B$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che

$$L \subseteq B \subseteq G$$

Tentativo 1:  $\{(1, 2, 3), (4, 6, 9), (1, 0, 0)\}$

Linearmente indipendenti?: Siano  $\lambda, \mu, \delta \in \mathbb{R}$ :

$$\lambda(1, 2, 3) + \mu(4, 6, 9) + \delta(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda + 4\mu + \delta = 0 \\ 2\lambda + 6\mu = 0 \\ 3\lambda + 9\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -\delta \\ 0 = 0 \\ \lambda = -3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -\delta \\ \lambda = 3\delta \end{cases} \Rightarrow S = \{(3\delta, -\delta, \delta) : \delta \in \mathbb{R}\}$$

$\delta = 1 \rightsquigarrow (3, -1, 1) \Rightarrow 3(1, 2, 3) - (4, 6, 9) + (1, 0, 0) = (0, 0, 0) \Rightarrow$  sono linearmente dipendenti.

Tentativo 1:  $\{(1, 2, 3), (4, 6, 9), (0, 1, 0)\}$

Linearmente indipendenti?

1. No  $\rightsquigarrow \{(1, 2, 3), (4, 6, 9), (0, 1, 0)\}$  **Incompleto**

## 13.1 Continuando da ieri, Corollario 1

Corollario 2: Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$  di dimensione  $n$ .

1. Ogni sistema di generatori di  $V$  con  $n$  elementi è una base di  $V$
2. Ogni insieme di  $n$  vettori linearmente indipendenti è una base di  $W$

Dim

1.  $G = \{v_1, \dots, v_n\}$  sistema di generatori

Per il corollario 1  $\exists$  una base  $B$  di  $V$  tale che

$$B \subseteq G \Rightarrow B = G, \text{ cioè } G \text{ è una base di } V$$

$B$  ha  $n$  elementi poichè  $\dim(V) = n$

2.  $L = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti.

Per il corollario 1,  $\exists$  una base  $B$  di  $V$  tale che

$$L \subseteq B \Rightarrow B = L$$

Proposizione: Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Sia  $W$  un sottospazio di  $V$ . Allora:

1.  $\dim(W) \leq \dim(V)$
2.  $\dim(W) = \dim(V) \Leftrightarrow W = V$

Dim

Sia  $n = \dim(V)$

1. Si mostra che anche  $W$  è di dimensione finita (non è scontato) hlvedi note della prof, non lo spiega qui in classe.

Sia dunque  $\{w_1, \dots, w_m\}$  una base finita di  $W$

Ora  $w_1, \dots, w_m$  sono vettori linearmente indipendenti di  $W \subseteq V \xrightarrow{\text{Lemma di Steinitz}} m \leq n \Leftrightarrow \dim(W) \leq \dim(V)$

2.  $\Leftarrow$ ) ovvio.

$\Rightarrow$ ) Supponiamo  $\dim(W) = \dim(V) = n$ .

Sia  $B = \{w_1, \dots, w_n\}$  una base di  $W$ .

Ora  $w_1, \dots, w_n$  sono vettori linearmente indipendenti di  $V$  e quindi  $B$  è anche una base di  $V$ .

$$W = \langle w_1, \dots, w_n \rangle = V$$

$\uparrow$  sistema di generatori di  $W$ ,  $\uparrow$  sistema di generatori di  $V$

Osservazione:  $W$  è un sottospazio,  $\dim(W) = 0 \Leftrightarrow W = \{0\}$

Def: Sia  $V$  uno spazio vettoriale e  $W \subseteq V$  un sottospazio.

Allora l'intero

$$\dim(V) - \dim(W)$$

Si dice **codimensione** di  $W$  in  $V$

Teorema (formula di Grassman):

Sia  $V$  uno spazio vettoriale, siano  $U, W$  due sottospazi di  $V$  di dimensione finita.

Allora  $U \cap W$  e  $U + W$  hanno dimensione finita e

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

In particolare se  $U \oplus W$  è somma diretta ( $U \cap W = \{0\}$ ) allora  $\dim(U \cap W) = 0$  e  $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W)$

**Esempi mancanti, non so se possono servire.**

Proposizione: Siano  $U, W$  due sottospazi di  $V$  tali che  $U \cap W = \{0\}$ .

Siano  $B_u, B_w$  due basi rispettivamente di  $U$  e  $W$ , allora  $B_u \cup B_w$  è una base di  $U \oplus W$

Dim: per esercizio

**Def:** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$  e sia  $\{v_1, \dots, v_p\}$  un sottoinsieme finito di  $V$ , il **\*\*rango\*\*** di  $\{v_1, \dots, v_p\}$  è la dimensione del sottospazio vettoriale generato da  $v_1, \dots, v_p$ .

Equivalentemente, il rango è il numero massimo di vettori linearmente indipendenti in  $\{v_1, \dots, v_p\}$ . Esempio:

$$rg(\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0)\}) = 2$$

$v_1, v_2$  linearmente indipendenti.

Osservazioni:

1.  $0 \leq rg(\{v_1, \dots, v_p\}) \leq p$ 
  - $rg(\{v_1, \dots, v_p\}) = 0 \Leftrightarrow v_1 = \dots = v_p = \underline{0}$
  - $rg(\{v_1, \dots, v_p\}) = p \Leftrightarrow v_1, \dots, v_p$  sono linearmente indipendenti
2. Se  $\dim(V) = n$  e  $v_1, \dots, v_p \in V$  allora  $rg(\{v_1, \dots, v_p\}) \leq \min\{p, n\}$