Appunti del corso di algebra e geometria

Adriano Oliviero

07/04/22 - oggi

Indice

Licenza

Introduzione

Questi appunti sono scritti seguendo le lezioni della prof.ssa Anna Iezzi e sono distribuiti sotto la licenza LaTeX.
Il repository originario per questi (ed altri appunti) è su github.

1 08/03/22

1.1 Richiami di logica

P: proposizione logica $\begin{cases} \textbf{V} \text{ Vero} \\ \textbf{F} \text{ Falso} \end{cases}$ (valori di verità)

P = "Napoli è in Campania": **V**
P(n) = "n è pari"
↓
P(2): **V**
P(3): **F**

Connettivi logici

- Negazione: $\neg$, "non"
- Congiunzione: $\wedge$, "e"
- Disgiunzione: $\vee$, "o"
- Implicazione: $\Rightarrow$, "se $\cdots$ allora $\cdots$"
- Doppia implicazione: $\Leftrightarrow$, "se e solo se"

Tavole di verità

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Quantificatori

- $\forall$: "Per ogni"
- $\exists$: "Esiste almeno uno"
- $\exists!$: "Esiste ed è unico"

Esempio:

1. "$\forall n$ naturale, n è pari": **F**
   "$\exists n$ naturale $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{tale che}}}{:}$ n è pari": **V**
2. $P(x) = \{x$ è uno studente in aula A3-T2$\}$
   $Q(x) = \{x$ è iscritto ad un corso di ingegneria$\}$
   $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$

3. $P(n)$ = "n è un numero pari"
   $Q(n)$ = "n è divisibile per 4"
   $\forall n$ naturale, $Q(n) \Rightarrow P(n)$**V**
   $\forall n$ naturale, $P(n) \Rightarrow Q(n)$**F**

   $R(n)$ = "n è divisibile per 2"
   $\forall n, P(n) \Leftrightarrow R(n)$:**V**

Importante: $Q(n) \Rightarrow P(n)$ è equivalente a $\neg Q(n) \Rightarrow \neg P(n)$

1.2 Teoria degli insiemi

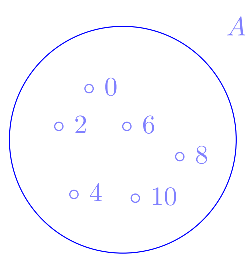
Def: INSIEME: collezione di oggetti, detti elementi dell'insieme.
Convenzionalmente gli insiemi si denotano con lettere maiuscole e gli elementi con lettere minuscole.

Descrizione di un insieme

1. Per elencazione (se l'insieme ha un numero finito di elementi):
   $\mathbb{A} = \{\underbrace{0, 2, 4, 6, 8, 10}_{\text{elementi}}\}$
   $4 \in \mathbb{A}$ (4 appartiene ad $\mathbb{A}$)
   $5 \notin \mathbb{A}$ (5 non appartiene ad $\mathbb{A}$)

2. Per proprietà caratteristica:
   $\mathbb{A} = \{n: \ n \text{ è un numero pari}: \ 0 \le n \le 10\}$

3. Diagramma di *Eulero-Venn* (ancora una volta se l'insieme ha un numero finito di elementi):



Def: Sia $\mathbb{A}$ un insieme finito.
La **cardinalità** di $\mathbb{A}$ è i numero di elementi di $\mathbb{A}$ e si denota $|\mathbb{A}|$

- Insieme vuoto: insieme che non contiene nessun elemento, si denota con $\varnothing$, $\{\}$ e ha cardinalità $|\varnothing| = 0$

I principali insiemi numerici

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$: numeri naturali
$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$: numeri naturali

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \text{ e } \mathbb{Z}, b \neq 0\}$: numeri razionali
$\mathbb{R}$: numeri reali
$\mathbb{C}$: numeri complessi

Inclusione di insiemi

- $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \quad (\mathbb{A} \text{ è contenuto in } \mathbb{B}) \Leftrightarrow (\forall x, x \in \mathbb{A} \Rightarrow x \in \mathbb{B})$
  $\mathbb{B} \supseteq \mathbb{A}$("$\mathbb{B}$ contiene $\mathbb{A}$")
  Se $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, diciamo che $\mathbb{A}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{B}$

  Esempio:

  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

- $\mathbb{A} = \mathbb{B} \Leftrightarrow (x \in \mathbb{A} \Leftrightarrow x \in \mathbb{B}) \Leftrightarrow (\underbrace{\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \wedge \mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}}_{\text{doppia inclusione}})$

Operazioni tra insiemi

Siano $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ due insiemi

1. Intersezione $\leftrightarrow \wedge$:
   $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} := \{x : x \in \mathbb{A} \underset{\text{"e"}}{\wedge} x \in \mathbb{B}\}$
   Se $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \varnothing$ allora $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono detti disgiunti
   Proprietà:
   - $\mathbb{A} \cap \varnothing = \varnothing$
   - $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{B} \cap \mathbb{A}$
   - $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{A}$
2. Unione $\leftrightarrow \vee$:
   $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} := \{x : x \in \mathbb{A} \vee x \in \mathbb{B}\}$
   Proprietà:
   - $\mathbb{A} \cup \varnothing = \mathbb{A}$
   - $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{B} \cup \mathbb{A}$
   - $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{B}$
   - $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{A} \cup \mathbb{B}, \mathbb{B} \subseteq \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$
3. Differenza $\leftrightarrow \backslash$:
   $\mathbb{B} \backslash \mathbb{A} := \{x : x \in \mathbb{B} \wedge x \notin \mathbb{A}\}$
   Proprietà:
   - $\mathbb{A} \backslash \varnothing = \mathbb{A}$
   - $\varnothing \backslash \mathbb{A} = \mathbb{A}$

4. Prodotto cartesiano $\leftrightarrow \times$:
$\mathbb{A} \times \mathbb{B} := \{ \underbrace{(a,b)}_{\text{coppie ordinate}} : a \in \mathbb{A}, b \in \mathbb{B}\}$
Proprietà:
   - $|\mathbb{A} \times \mathbb{B}| = |\mathbb{A}| \cdot |\mathbb{B}|$
   - $\mathbb{A} \times \varnothing = \varnothing = \varnothing \times \mathbb{A}$

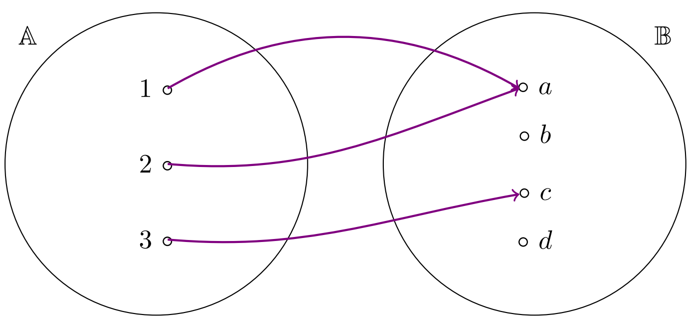
   $\mathbb{A}_1, \cdots, \mathbb{A}_n$ insiemi
   $\mathbb{A}_1 \times \cdots \times \mathbb{A}_n = \{(a_1, \cdots, a_n) : a_i \in \mathbb{A}_i, \forall i\}$

1.3 Funzioni

Def: Siano $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ due insiemi:
Una funzione $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ è una legge che associa ad ogni elemento di $\mathbb{A}$, uno ed un solo elemento di $\mathbb{B}$.
$f : \overset{\text{dominio}}{\mathbb{A}} \underset{x \mapsto y}{\to} \overset{\text{codominio}}{\mathbb{B}}$
Se $y = f(x)$, $x \in \mathbb{A}$, allora y è l'immagine di x e x è la controimmagine di y

Esempio:

$\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$
$\mathbb{B} = \{a, b, c, d\}$



$$\begin{aligned} f : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{B} \\ 1 &\longmapsto a \\ 2 &\longmapsto a \\ 3 &\longmapsto c \end{aligned}$$

a è l'immagine di 1 e 2 $\quad (f(1) = a = f(2))$
1 è una controimmagine di a

Def: Sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ una funzione e sia $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{A}$:
$f(x) := \{f(x) : x \in \mathbb{X}\}$ è l'immagine di $\mathbb{X}$ tramite f
$Im(f) := f(\mathbb{A})$ è l'immagine della funzione

2 09/03/22

2.1 Funzioni (continuo)

Def: Una funzione $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ si dice iniettiva se $\forall x, y \in \mathbb{A}$

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

(elementi distinti di $\mathbb{A}$ hanno immagini distinte)

$$\Updownarrow$$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y : \begin{cases} \text{usiamo questa} \\ \text{implicazione} \\ \text{per dimostrare} \\ \text{che una funzione} \\ \text{è iniettiva} \end{cases}$$

(ogni elemento di $\mathbb{B}$ ha al più una controimmagine)

Def: Una funzione $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ si dice suriettiva se $Im(f) = \mathbb{B}$,
o equivalentemente se $\forall y \in \mathbb{B}, \exists x \in \mathbb{A} : f(x) = y$
(ogni elemento di $\mathbb{B}$ ha almeno una controimmagine)

Def: Una funzione $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ si dice biettiva o biunivoca
se è al tempo stesso iniettiva e suriettiva
(ogni elemento di $\mathbb{B}$ ha esattamente una controimmagine)

Esempio:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\quad x \to x^2$

- È iniettiva? No, perchè $f(-1) = 1 = f(1)$
- È suriettiva? No, perchè $f(x) = x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow Im(f) \subseteq \mathbb{R}^+ \Rightarrow Im(f) \neq \mathbb{R}$

2.1.1 Nozione di campo

Def: Se un insieme possiede delle operazioni che verificano certe proprietà, è una struttura algebrica.

Def: Sia $\mathbb{X}$ un insieme.
Un'operazione binaria interna è una funzione dal prodotto cartesiano $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ in $\mathbb{X}$.

$* : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$
$\quad (x, y) \to x * y$

L'addizione su $\mathbb{R}$ è un'operazione binaria interna
$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(x, y) \to x + y$

Proprietà di $(\mathbb{R}, +)$

1. Commutatività: $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. Associatività: $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
3. Elemento neutro: $\exists 0 \in \mathbb{R} : \ x + 0 = 0 + x = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$
4. Opposto: $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists x' \in \mathbb{R} : \ x + x' = x' + x = 0$ $(x' = -x)$

Anche la moltiplicazione su $\mathbb{R}$ è un'operazione binaria interna
$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(x, y) \to x \cdot y$

Proprietà di $(\mathbb{R}, \cdot)$

1. Commutatività: $x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. Associatività: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
3. Elemento neutro: $\exists 1 \in \mathbb{R} : \ x \cdot 1 = 1 \cdot x, \ \forall x \in \mathbb{R}$
4. Elemento inverso: $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, \ \exists x' \in \mathbb{R} : \ x \cdot x' = x' \cdot x = 1$ $(x' = x^{-1} = \frac{1}{x})$

Infine $+$ e $\cdot$ soddisfano la proprietà distributiva:
$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

$\mathbb{R}$ dotato delle operazioni di addizione e moltiplicazione è chiamato campo dei numeri reali.
Più in generale abbiamo (definizione di campo)

Def: Sia $\mathbb{K} \neq \varnothing$ un insieme dotato di due operazioni binarie:

- $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$
- $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ è detto un campo se

1. $+$ è commutativa $(\forall x, y \in \mathbb{K}, \ x + y = y + x)$
2. $+$ è associativa $(\forall x, y, z \in \mathbb{K}, \ (x + y) + z = x + (y + z))$
3. esiste elemento neutro 0 rispetto a $+$ $(0 + x = x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{K})$
4. $\forall x \in \mathbb{K}$ esiste un opposto $(x' : \ x + x' = x' + x = 0)$
5. $\cdot$ è commutativa $(\forall x, y \in \mathbb{K}, \ x \cdot y = y \cdot x)$
6. $\cdot$ è associativa $(\forall x, y, z \in \mathbb{K}, \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$

7. esiste elemento neutro 1 rispetto a $\cdot$ $\quad (x \cdot 1 = 1 \cdot x = x,\ \forall x \in \mathbb{K})$

8. $\forall x \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ esiste un inverso $\quad (x' :\ x \cdot x' = x' \cdot x = 1)$

9. $\cdot$ è distributiva rispetto a $+$ $\quad (\forall x, y, z \in \mathbb{K},\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$

Esempio:

$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$: campo finito a due elementi

- $\cdot : \mathbb{F}_2 \cdot \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$
  $(0, 0) \to 0$
  $(0, 1) \to 0$
  $(1, 0) \to 0$
  $(1, 1) \to 1$

- $+ : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$
  $(0, 0) \to 0$
  $(0, 1) \to 1$
  $(1, 0) \to 1$
  $(1, 1) \to 1$

0 è l'elemento neutro di $+$
1 è l'elemento neutro di $\cdot$
1 è l'opposto e l'inverso di se stesso.
È possibile verificare che $+$ e $\cdot$ verificano $1, 2, \cdots, 9$.

2.2 Algebra lineare

Wikipedia:

> Branca della matematica che si occupa dello studio di spazi vettoriali (o anche detti spazi lineari), di trasformazioni lineari e di sistemi di equazioni lineari.

Molti problemi di matematica e fisica verificano la seguente proprietà:
Se $v, w \in \mathbb{X}$ sono due soluzioni del problema, allora anche $v + w$ e $\lambda v, \lambda \in \mathbb{R}$ ($+$ e $\cdot$ operazioni su $\mathbb{X}$) sono soluzioni del problema.
Problemi di questo tipo sono detti *lineari*.

Nozione base dell'algebra lineare: spazio vettoriale

I vettori sono usati in fisica per rappresentare grandezze fisiche caratterizzate da:

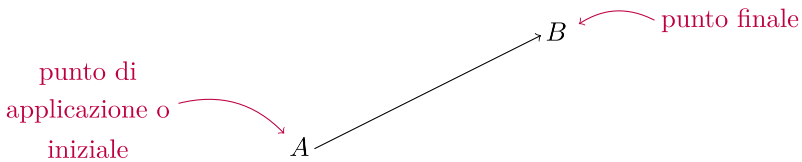
- una direzione
- un verso
- un'intensità

Tali grandezze sono dette vettoriali: esempi: velocità, forza, accelerazione, campo elettrico, momento angolare.

[si differenziano dalle **grandezze scalari** che sono definite unicamente dall'intensità
esempi: massa, temperatura, volume, lavoro, pressione, etc...]

GEOMETRICAMENTE rappresentiamo un vettore con un **segmento orientato**

Nel piano euclideo Π:



Def: Un segmento orientato è una coppia ordinata di punti $(A, B) \in \Pi \times \Pi$.

Notazione: $\overrightarrow{AB} := (A, B)$

FISICA		GEOMETRIA
direzione	$\leftrightarrow$	qualsiasi retta parallela al segmento $\overline{AB}$
verso	$\leftrightarrow$	punto iniziale $\rightarrow$ finale
intensità	$\leftrightarrow$	lunghezza di $\overline{AB}$

Nota: $\forall P \in \pi$, $\overrightarrow{PP}$ corrisponde al vettore nullo (per cui non è possibile definire né una direzione né un verso)

Nel piano esistono infiniti segmenti orientati che hanno *stessa direzione, stesso verso, stessa intensità.*

Diciamo che questi segmenti orientati sono *equipollenti* due a due.

Più formalmente:

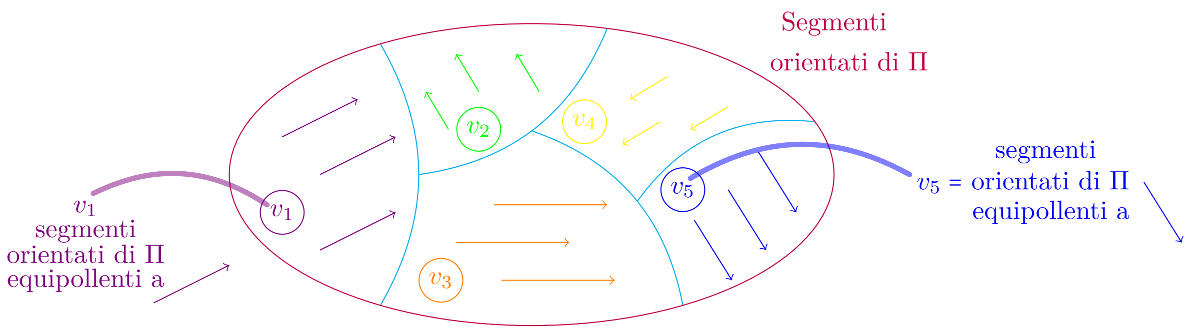
Def: Due segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ si dicono equipollenti e scriviamo $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ se il quadrilatero avente vertici, ordinatamente $ABCD$ è un parallelogramma.

L'equipollenza è una relazione di equivalenza:

- riflessiva (ogni segmento orientato è equipollente a se stesso: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$)
- simmetrica (se $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ allora $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$)
- transitiva (se $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ allora $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$ allora $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$)

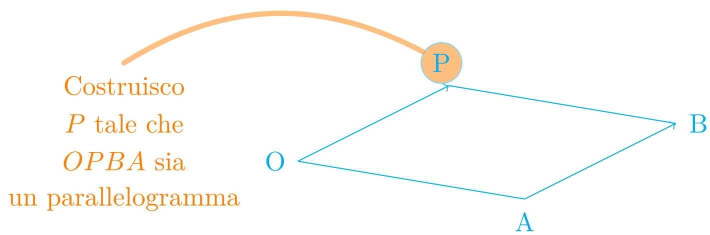
Per ogni segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ posso considerare la corrispondente classe di equipollenza:

$$\text{Classe } \overrightarrow{AB} = \{\overrightarrow{CD} : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{insieme dei segmenti orientati} \\ \text{equivalenti ad } \overrightarrow{AB}.}}{\overrightarrow{AB}} \sim \overrightarrow{CD}\}$$



<u>**Def:**</u> Un <u>vettore geometrico</u> del piano Π è una classe di equipollenza

Sia $O \in \Pi$ un punto fissato. Mostriamo che per ogni vettore geometrico (= classe di equipollenza) possiamo trovare un "rappresentante" con punto di applicazione O.
Basta mostrare che per ogni segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ esiste un punto $P \in \Pi$ tale che $\overrightarrow{OP}$ è equivalente ad $\overrightarrow{AB}$.



Per transitività, $\overrightarrow{OP}$ è equipollente a tutti i segmenti orientati equipollenti a $\overrightarrow{AB}$ e posso sceglierlo come <u>rappresentante</u> della classe di equipollenza di $\overrightarrow{AB}$.
Sia $\mathbb{V} = \{$vettori geometrici del piano$\}$
Abbiamo quindi una funzione biunivoca:

$$\mathbb{V} = \left\{\begin{matrix}\text{vettori geometrici}\\ \text{del piano}\end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{segmenti orientati}\\ \overrightarrow{OP},\ P \in \Pi\end{matrix}\right\}$$

$$\begin{array}{ccc} \underset{\text{(classe di equipollenza)}}{v} & \longmapsto & \begin{matrix}\text{rappresentante di}\\ v \text{ con punto di}\\ \text{applicazione } O\end{matrix} \\ \begin{matrix}\text{classe}\\ \text{di equipollenza}\\ \text{di } \overrightarrow{OP}\end{matrix} & \longleftarrow\!\shortmid & \overrightarrow{OP} \end{array}$$

A partire da ora lavoreremo solo con segmenti orientati aventi lo stesso punto di applicazione.

3 15/03/22

Nella Lezione 2 abbiamo definito un vettore geometrico (nel piano) come una classe di equipollenza di segmenti orientati (del piano) e, fissato un punto $O \in \Pi$, abbiamo costruito una biezione:

$$\mathbb{V} = \left\{ \begin{matrix} \text{vettori geometrici} \\ \text{del piano} \end{matrix} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{segmenti orientati} \\ \overrightarrow{OP},\ P \in \Pi \end{matrix} \right\}$$

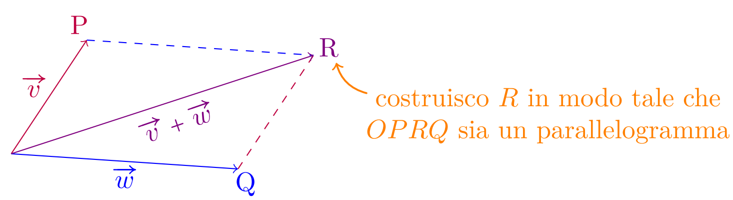
Questa biezione ci permette in particolare, di rappresentare ogni vettore con un segmento orientato $\overrightarrow{OP}$, con un abuso di notazione, scriveremo

$$\mathbb{V} = \{\text{segmenti orientati } \overrightarrow{OP}, P \in \pi\}$$

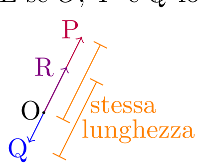
e chiameremo vettori gli elementi di $\mathbb{V}$.
Notiamo che $\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}, \exists P \in \Pi : \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$

3.1 Operazioni su $\mathbb{V}$

- Somma di vettori
  Siano $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{V}$ e siano $P, Q \in \Pi$:
  $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OQ}$
  Definiamo
  $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{OR}$, tale che $OPRQ$ sia un parallelogramma. (regola del parallelogramma)

  Nota: E se $O,\ P$ e Q fossero collineari (giacciono sulla stessa retta)?

  Costruisco R tale che i segmenti OP e RQ abbiano la stessa lunghezza (in un parallelogramma i lati opposti sono congruenti).

  Otteniamo così un'operazione binaria interna:
  $$+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$
  $$(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \mapsto \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$$

- Moltiplicazione per scalari
  Sia $\overrightarrow{v} \in \mathbb{V}$ e sia $P \in \Pi : \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

  Definiamo $\lambda \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OR}$
  tale che

- O, P, R sono collineari (sulla stessa retta)
- $\overline{OR} = |\lambda|\overline{OP}$
- $\overrightarrow{OR}$ è orientato concordemente a $\overrightarrow{OP}$
  $\overrightarrow{OR}$ è orientato discordemente a $\overrightarrow{OP}$ se
  $\lambda < 0 \vee \lambda = 0, R = O$
  Questa è un'operazione binaria esterna:
  $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$
  $(\lambda, \overrightarrow{v}) \to \lambda \cdot \overrightarrow{v}$

3.2 Piano Cartesiano

$\{P : P \in \pi\} \leftrightarrow \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$
$\mathbb{V} = \{\text{segmenti orientati } \overrightarrow{OP}, P \in \pi\} = \{\text{vettori geometrici nel piano}\}$
In particolare esiste una biezione:
$\mathbb{V} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$
$\forall P \in \pi, \overrightarrow{OP} \to (x, y)$, dove x, y sono rispettivamente ascissa e ordinata di P
$\overrightarrow{OP} \leftarrow (x, y)$ dove $P(x, y)$
Vogliamo tradurre le operazioni su $\mathbb{V}$ in operazioni su $\mathbb{R}^2$:

1. $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}, P(x_P, y_P)$
   $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OQ}, Q(x_Q, y_Q)$ $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{OR}$: quali sono le coordinate di R?
   $OPQR \Rightarrow A(x_A, y_A)$ parallelogramma con punto medio di PQ e OR
   A punto medio di $PQ \Rightarrow \{x_A = \frac{x_P + x_Q}{2}, y_A = \frac{y_P + x_Q}{2}\}$
   A punto medio di $OR \Rightarrow \{x_A = \frac{x_R}{2}, y_A = \frac{y_R}{2}\}$
   $\Rightarrow \{x_R = x_P + x_Q, y_R = y_P + y_Q\}$
   Operazione binaria interna:
   $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
   $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

2. $\overrightarrow{v} \in \mathbb{V}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}, P(x_P, y_P), \lambda \in \mathbb{R}$
   $\lambda \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OR}$: quali sono le coordinate di R?
   $\overrightarrow{OR} = \lambda \cdot \overrightarrow{OP}$
   OPH e ORK sono simili per costruzione con rapporto di proporzioni $|\lambda|$.
   Due casi:

   (a) $\lambda \geq 0$ $\overrightarrow{OR}$ è concord con $\overrightarrow{OP}$ e quindi:
   $x_R = |\lambda| x_P = \lambda x_P$
   $y_R = |\lambda| y_P = \lambda y_P$

   (b) $\lambda < 0$ $\overrightarrow{OR}$ è discorde con $\overrightarrow{OP}$ e quindi:
   $x_R = -|\lambda| x_P = \lambda x_P$
   $y_R = -|\lambda| y_P = \lambda y_P$

   Operazione binaria esterna:
   $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
   $(y, (x, y)) \mapsto \lambda \cdot (x, y) := (\lambda x, \lambda y)$

In conclusione abbiamo definito due operazioni su $\mathbb{R}^2$ "compatibili" con le operazioni definite su $\mathbb{V}$:

- $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
  $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
- $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
  $(\lambda, (x_2, y_2)) \mapsto \lambda \cdot (x_2, y_2) := (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$

Proprietà di + e $\cdot$:

1. Commutatività:
   $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$
2. Associatività:
   $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2,$
   $((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))$
3. Elemento neutro (+):
   $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ è tale che $(x, y) + (0, 0) = (0, 0) + (x, y) = (x, y)$
4. Elemento opposto:
   $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists (x', y') \in \mathbb{R}^2 : (x, y) + (x', y') = (x', y') + (x, y) = (0, 0)$
5. Distributività rispetto a vettori:
   $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
   $\lambda \cdot ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \lambda \cdot (x_1, y_1) + \lambda \cdot (x_2, y_2)$
6. Distributività rispetto a scalari:
   $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
   $(\lambda + \mu) \cdot (x, y) = \lambda \cdot (x, y) + \mu \cdot (x, y)$
7. Senza nome:
   $\lambda\mu \cdot (x, y) = \lambda \cdot (\mu \cdot (x, y))$
8. Elemento neutro $(\cdot)$:
   $1 \cdot (x, y) = (x, y) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ è il primo esempio di "spazio vettoriale" su $\mathbb{R}$.

Più in generale uno spazio vettoriale (o spazio lineare) è una struttura algebrica composta da:

- un campo $\mathbb{K}$, i cui elementi sono detti scalari
- un insieme $\mathbb{V}$, i cui elementi sono detti vettori
- due operazioni binarie caratterizzate da determinate proprietà

<u>Def:</u> Sia $\mathbb{K}$ (K da *korper* in tedesco) un campo. Uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ è un insieme $\mathbb{V}$ dotato di due operazioni:

- $+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$
- $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

Che verificano le seguenti proprietà:

1. Commutatività: $\forall v, w \in \mathbb{V}, v + w = w + v$
2. Associatività: $\forall u, v, w \in \mathbb{V}, (u + v) + w = u + (v + w)$
3. Elemento neutro:
   $\exists 0 \in \mathbb{V} : 0 + v = v + 0 = v, \forall v \in \mathbb{V}$
4. Elemento opposto:
   $\forall v \in \mathbb{V}, \exists v' \in \mathbb{V} : v + v' = v' + v = 0$
5. Distributività rispetto alla somma di vettori:
   $\forall v, w \in \mathbb{V}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$
6. Distributività rispetto alla somma di scalari:
   $\forall v \in \mathbb{V}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
7. $\forall v \in \mathbb{V}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda\mu \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$
8. $1 \cdot v = v, \forall v \in \mathbb{V}$

Gli elementi di $\mathbb{V}$ sono chiamati vettori e gli elementi di $\mathbb{K}$ sono chiamati scalari.
$K = \mathbb{R}$: spazio vettoriale reale
$K = \mathbb{C}$: spazio vettoriale complesso
<u>Osservazioni</u>: Sia $\mathbb{V}$ un K-spazio vettoriale:

- in $\mathbb{V}$ esiste un unico vettore nullo che denotiamo $\underline{0}$
- $\forall v \in V$ esiste un unico opposto che denotiamo $-v$
- $\forall v \in V$ si ha $0 \cdot v = \underline{0}$
- $\forall \lambda \in K$ si ha $\lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$
- Siano $\lambda \in K, v \in K : \lambda \cdot v = \underline{0} \Rightarrow$ o $v = \underline{0}$

4 16/03/22

4.1 Continuo di ieri (Def)

$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$
$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2)$

$(\mathbb{R}^2, +, *)$ è un campo? NO!
$\triangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$
$((a,b),(c,d)) \mapsto (a,b) \triangle (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$
Mostrare che $(\mathbb{R}^2, +, \triangle)$ è un campo.
Indizio: $\mathbb{R}^2 \leftrightarrow \mathbb{C} = \{a + ib, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$
$(a,b) \leftarrow\!\shortmid a + ib$
$(a,b) \mapsto a + ib$
Nota che $\mathbb{C}$ è un campo

REVISIONE FINITA QUI

Esempi di spazi vettoriali

1. $\mathbb{V} = \{$Vettori geometrici nello spazio$\} = \{$segmenti orientati $\overrightarrow{OP}$, P nello spazio$\} \longleftrightarrow \mathbb{R}^3$
   Definiamo + e $\cdot$ in modo analogo al caso dei vettori nel piano e $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale reale.

2. L'n-spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (o su $\mathbb{K}$)
   $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$
   $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \forall i\}$
   Definiamo $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
   $(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) := (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$
   $\lambda \in \mathbb{K}$ incompleto
   $\forall n \geq 1, (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale reale chiamato n-spazio vettoriale numerico su $\mathbb{R}$.
   Elemento neutro: $\underline{0} = (0, \cdots, 0)$
   Elemento opposto di $x = (x_1, \cdots, x_n)$ è $-x = (-x_1, \cdots, -x_n)$
   Osservazione: $n = 1 : \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (ogni campo $\mathbb{K}$ è uno spazio vettoriale su se stesso)
   In maniera analoga definiamo + e $\cdot$ su
   $k^n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in K \forall i\}$
   $(k^n, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ chiamato n-spazio vettoriale numerico su $\mathbb{K}$.
   Esempio: $k = \mathbb{C}, \mathbb{C}^n$
   $k = \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2^n$

3. Funzioni da un insieme a un campo
   Sia $\mathbb{X}$ un insieme qualunque e $\mathbb{K}$ un campo
   $\mathbb{V} = \{$funzioni $f : \mathbb{X} \to \mathbb{K}\}$

   - Binaria interna: $+ : V \times V \to V$
     $(f, g) \to f + g$
     dove $f + g : X \to K$
     $x \mapsto (f + g)(x) := f(x) + g(x)$
   - Binaria esterna: $\cdot : K \times V \to V$
     $(\lambda \cdot)$ incompleto

4. Polinomi a coefficisnti reali in una indeterminata
   Sia x un'indeterminata.

Un polinomio a coefficienti reali nell'indeterminata x è un'espressione formale del tipo:
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{R} \forall i$
Se $a_n \neq 0$ diremo che n è il grado di P e scriviamo $deg(P) = n$.
$\mathbb{R}[x] := \{$polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x (di grado arbitrario)$\}$
Esempio: $P(x) = 3x^4 + 2x^3 - x + 5 \in \mathbb{R}[x],\ deg(P) = 4$
$+ : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$
$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$
$Q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$
$(P+Q)(x) := (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0$
$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$
$P \in \mathbb{R}[x],\ P = a_n x^n + \cdots + a_1 wx + a_0$
$\lambda \in \mathbb{R}$
$(\lambda \cdot P)(x) := \lambda a_n x^n + \cdots + \lambda a_1 x + \lambda a_0$
$(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
In modo analogo si definisce $(K[x], +, \cdot)$ dove
$K[x] = \{$polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$ in un'indetermiinata$\}$
Molti problemi di matematica/fisica hanno la proprietà che l'insieme delle soluzioni ha una struttura di spazio vettoriale.
Esempi:

- $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + 7z = 0 \end{cases}$
  $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0 \text{ e } y + 7z = 0\} = \{(13t, -7t, t), t \in \mathbb{R}\}$
  S ha una struttuta di spazio vettoriale (cose che vedremo più avanti)

5 22/03/22

5.1 Sistemi di equazioni lineari (accenni)

Equazione lineare in n incognite:
$x_1, \cdots, x_n : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$
$a_i \in \mathbb{R}, \forall i, b \in \mathbb{R}$
Sistema di n equazioni lineari in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2} + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Una soluzione del sistema di sopra è un vettore $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ che verifica tutte le equazioni.

Esempi:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y=0 \end{cases}$$

Una soluzione di questo sistema è $(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$.

Domande: Supponiamo di avere un sistema lineare:

1. Esiste almeno una soluzione?
2. "Quante" sono?
3. Come si interpreta geometricamente il corrispondente insieme di soluzioni?

5.2 Matrici

- Un esempio di spazio vettoriale
- Uno strumento conciso per rappresentare oggetti *parola incomprensibile*, tra cui molti dell'algebra lineare

Sia $\mathbb{K}$ un campo. Siano $m, n \geq 1$ due numeri

Def: Una matrice $m \times n$ a elementi in $\mathbb{K}$ è una tabella rettangolare di $m \cdot n$ elementi di $\mathbb{K}$, disposti su m righe e n colonne

Notazione:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$(a_{ij})_{1 \leq i \leq n \,\wedge\, 1 \leq j \leq n}$: i è la riga e j è la colonna, come in c++ (o qualunque linguaggio "normale")
Ciascuno degli elementi a_{ij} è detto entrata (o coefficiente) delle matrici

Un po' di terminologia

- Se $n = m$, una matrice $n \times n$ si dice matrice quadrata di ordine n,
  ha due diagonali (solo se è quadrata eh)
- Una matrice $1 \times n$ è chiamata vettore riga.
  Una matrice $n \times 1$ è chiamata vettore colonna.

Notazione:
$M_{m,n}(K) = \{\text{matrici } n \times m \text{ a coefficienti in } K\}$
$\mathrm{M}_n(K) := \{\text{matrici quadrete di ordine } n\}$

Def: Siano $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(K)$.
Diciamo che $A = B$ se $a_{ij} = b_{ij} \forall 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n$
Definiamo due operazioni su $M_{m,n}$:

- Somma di matrici
  $+ : M_{m,n} \times M_{m,n} \to M_{m,n}(K)$
  $\quad (A, B) \longmapsto A + B$

  $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$$

  $$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = (b_{ij}) \in M_{m,n}(K)$$

  $A + B := \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij} + b_{ij})$ incompleto , probabilmente $\in M_{m,n}(K)$

- Moltiplicazione per scalari
  $\cdot : K \times M_{m,n}(K) \to M_{m,n}(K)$
  $\quad (\lambda, A) \longmapsto \lambda \cdot A$

  $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$
  $\lambda \in K$
  $\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$

  Proprietà:

  1. $+$ è commutativa: $A + B = B + A$
  2. $+$ è associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
  3. Elemento neutro rispetto a $+$:
     $0_{m,n} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$
  4. Elemento opposto rispetto a $+$:
     $A = (a_{ij}) \Rightarrow -A = (-a_{ij})$
  5. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
  6. $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$
  7. $(\lambda\mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$
  8. $1 \cdot A = A \forall m, n \ge 1$ interi, $(M_{m,n}(K), +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

- Prodotto di matrici (prodotto riga per colonna):
  $(a_1 \cdots a_n) \in M_{1,n}(K)$: vettore riga
  $(b_1 \cdots b_n) \in M_{n,1}(K)$: vettore colonna
  $(a_1 \cdots a_n) \cdot (b_1 \cdots b_n) := a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$

  Generalizziamo al prodotto di due matrici:

  $$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ b_{q1} & \cdots & b_{qp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}$$

  c_{ij} =prodotto della i-esima riga di A e della j-esima colonna di B
  Per definire il prodotto abbiamo bisogno che $n = q$

6 23/03/22

6.1 Operazioni tra matrici

Proprietà

1. Non è commutativa
   Due matrici quadrate $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ commutano se $AB = BA$.

2. È associativa
   $\forall A \in M_{m,n}(K), \forall B \in M_{n,P}(K), \forall C \in M_{P,q}(K)$
   $(AB)C = A(BC)$

3. È distributiva rispetto a +
   $\forall A, B \in M_{m,n}(K), \forall C \in M_{n,P}(K), \forall D \in M_{n,P}(K)$
   $(A + B)C = AC + BC$
   $A(C + D) = AC + AD$

4. Due elementi neutri, uno a destra e uno a sinistra (perchè $\cdot$ non è commutativa).

   - a destra: I tale che $AI = A, \forall A \in M_{m,n}(K)$
   - a sinistra: I tale che $IA = A, \forall A \in M_{m,n}(K)$

   $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} aa' + bd' + cd' = a \rightsquigarrow a' = 1,\ d' = 0,\ g' = 0 \\ ab' + be' + ch' = b \rightsquigarrow b' = 0,\ d' = 0,\ g' = 0 \end{cases}$$ incompleto

   $\vdots$

   $$\begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Def</u>: $\forall n \geq 1$, la matrice <u>unità</u> o <u>identità</u> di ordine n è
$I_n = (\delta_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}$
dove
$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ se \ i = j \\ 0 \ se \ i \neq j \end{cases}$
Quindi $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ abbiamo:
$I_m A = A$
$AI_n = A$,
Cioè I_m è l'elemento neutro a sinistra e I_n è l'elemento neutro a destra.
<u>N.B.</u>: $\forall a, b \in \mathbb{R},\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ perchè in $\mathbb{R}$, la moltiplicaizone è commutativa.
$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$(A+B)^2 =$
$(A+B)(A+B) =$
$(A+B)A + (A+B)B =$
$A^2 + BA + AB + B^2$
non si può semplificare perchè nelle matrici il prodotto <u>non</u> è commutativo
Se $A \in \mathcal{M}_n(K), \forall K \geq 1,$ denotiamo $A^K = A \cdot A$

Lavoriamo ora con $\mathcal{M}_n(K) \rightsquigarrow \mathcal{M}_n(K) \times \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K)$
$(A, B) \longmapsto AB$
In questo caso I_n è l'elemento neutro (a destra e a sinistra) rispetto al prodotto.

<u>Def</u>: $A \in \mathcal{M}_n(K)$ si dice <u>invertibile</u> se $\exists B \in \mathcal{M}_n(K)$ tale che $AB = BA = I_n$

<u>Osservazioni</u>

1. Se B esiste allora è unica.
   <u>Dim</u>:
   Se C è tale che $AC = I_n = CA$, allora:
   $B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C \Rightarrow B = C$
   Chiamiamo B l'<u>inversa</u> di A e la denotiamo A^{-1}.

2. Se B soddisfa $AB = I_n$ o $BA = I_n$ allora $B = A^{-1}$
   <u>Esempi</u>

   - I_n e invertibile e $I_n^{-1} = I_n$
   - $O_n = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$
   - $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
     $\exists B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ Incompleto
   - $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 3b = 1 \\ 2a + 4b = 0 \\ c + 3d = 0 \\ 2c + 4d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2b + 3b = 1 \\ a = -2b \\ c = -3d \\ -6d + 4d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -2 \\ c = \frac{3}{2} \\ d = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Osservazione: Supponiamo che A sia invertibile.

$\exists A^{-1}$

Sia B una matrice tale che

$AB = I_n$

Voglio dimostrare che $BA = I_n$

$BA = I_n BA = A^{-1}ABA = A^{-1}I_nA = A^{-1}A = I_n$

Proposizione
Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ invertibili.
Allora AB è invertibile e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
Dim
Infatti: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$

6.2 Altra terminologia

Def: Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.
La trasposta di A è la matrice $n \times m$:

$$A^T = (a_{ji}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$$

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Def: Una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_n(K)$ si dice simmetrica se $A^T = A$.
Se invece $A^T = -A$, A si dice **anti**simmetrica.
Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Osservazione: se $A = (a_{ij})$ è antisimmetrica $\Rightarrow a_{ij} = -a_{ji} \ \forall i, j$,
Quando $i = j$, $a_{ii} = a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$

Def: Una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_n(K)$ si dice ortogonale se $(A^T)A = I_n = A(A^T) \rightsquigarrow A^{-1} = A^T$

Esempio: $\forall \theta \in \mathbb{R}$ la matrice
$\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$ è ortogonale.

incompleto (?)

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ triangolare inferiore

$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$ triangolare superiore

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ diagonale

$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ scalare

Def: Una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_n(K)$ si dice:

- triangolare inferiore (risp. superiore) se $a_{1j} = 0$ se $j > i$ (risp. se $j < i$)
- diagonale se è al tempo stesso triangolare superiore e triangolare inferiore, ossia se $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$
- scalare se A è diagonale con tutti gli elementi uguali sulla diagonale, cioè: $A = \lambda I_n, \lambda \in K$.

7 29/03/22

7.1 Sistemi di equazioni lineari

Def: Siano $x_1, \cdots, x_n$ n indeterminante.
Un'equazione lineare nelle indeterminate $x_1, \cdots, x_n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ è un'equazione della forma:
(*) $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, a_i \in K \forall i,\ b \in K$
Una soluzione di (*) è un elemento $(x_1, \cdots, x_n) \in K^n$ che sostituito alla n-upla $(x_1, \cdots, x_n)$ dà luogo ad un'identità.
L'equazione (*) si dice omogenea (rispettivamente non omogenea) se $b = 0$ (se $b \neq 0$).

Sistema di eq lineari: consideriamo simmetricamente un eq. lineari in $x_1, \cdots, x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn} = b_m \end{cases}$$

a_{ij} equazione i-esima, variabile x_j

Def: il sistema (**) si deice omogeneo (risp non omogeneo) se $b_i = 0\ \forall i$ (se $\exists i \in \{1, \cdots, m\}$)

Def:

- Una soluzione di (**) è un elemento $(x_1, \cdots, x_n) \in K^n$ che è soluzione simultanea di tutte le eq. lineari.
- Un sistema si dice compatibile se possiede almeno una soluzione. Si dice incompatibile se non possiede soluzioni.
- Due sistemi si dicono equivalenti se hanno lo stesso sistema di soluzioni.

Esempi ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$):

1. Un sistema omogeneo in n indeterminante è sempre compatibile in quanto $(0, \cdots, 0) \in \mathbb{K}^n$ è sempre soluzione.
2. non lo segno
3. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$

   "addizionando le due equazioni" otteniamo:

   $x_1 + x_2 + (x_1 - x_2) = 0 + (1) \Rightarrow 2x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$

   sostituendo $x_1 = \frac{1}{2}$ nella I equazione, trovo $x_2 = -\frac{1}{2}$.

   Quindi il sistema possiede l'unica soluzione $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$
4. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$

   è compatibile e possiede infinite soluzioni date dalle soluzioni di

   $x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 - x_2$

   L'insieme delle soluzioni S è costituito dalle coppie ordinate $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tali che:

   $\begin{cases} x_1 = 2 - t \\ x_2 = t \end{cases} ,\ t \in \mathbb{R}$

   $S = \{(2 - t, t),\ t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Notazione matriciale di un sistema: $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m,n}(K)$

Vettore (colonnna) della indeterminante: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Vettore dei termini noti: $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in M_{m,1}(K)$

Riscriviamo (**) come: $AX = b$

La matrice: $(A \vdots b) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$

Consideriamo il sistema seguente:

$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_3 = -3 \end{cases}$

La sua matrice orlata:

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$

Risolvo per sostituzione:

$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

Procedendo dal basso verso l'alto trovo che il sistema possiede l'unica soluzione $(4, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$
Un sistema di questo tipo è detto "a scalini" o "a gradini".

Def: Una matrice a scalini (o a gradini) è una matrice avente le seguenti proprietà:

1. Ogni riga, dopo la prima, inizia con almeno uno zero in più rispetto alla riga precedente
2. Se una riga è nulla allora ogni riga sottostante è nulla

Il primo elemento diverso da zero su ogni riga (se presente) è detto pivot.

Def: Un sistema lineare si dice a scalini (o a gradini) se la sua matrice orlata è una matrice a scalini.

Esempi:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 2 & -3 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$ è una matrice a scalini.

   pivot: $1, 2, 3$

2. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 5 & & \vdots & 3 \\ 0 & 2 & -3 & \vdots & 1 & & & \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -3 & & & \end{bmatrix}$ è una matrice a scalini.

INCOMPLETO: SI È SPENTO IL PC

8 30/03/22

8.1 Sistema lineare $\longrightarrow$ sistema a scalini.

Algoritmo (o metodo di eliminazione) di Gauss-Jordan.

Tale metodo consiste nell'effettuare delle operazioni successive sulle equazioni del sistema (o equivalentemente sulle righe della matrice orlata) che non ne alterino l'insieme delle soluzioni.

Operazioni elementari:

$$(*) = \begin{cases} a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b \\ a_{1'} x_1 + \cdots + a_{n'} x_n = b' \end{cases}$$

1. Il sistema (*) è equivalente a:

   $$(**) = \begin{cases} a_{1'} x_1 + \cdots + a_{n'} x_n = b' \\ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b \end{cases}$$

   Scambiare tra loro due equazioni di un sistema non cambia l'insieme delle soluzioni.

2. Il sistema (*) di partenza è equivalente a:

   $$(**) = \begin{cases} \lambda a_1 x_1 + \cdots + \lambda a_n x_n = \lambda b \\ a_{1'} x_1 + \cdots + a_{n'} x_n = b' \end{cases} \quad , \ \lambda \neq 0, \ \lambda \in \mathbb{K}$$

   Moltiplicare (primo e secondo membro) per uno scalare non nullo non cambia l'insieme delle soluzioni:

   $(x_1, \cdots, x_n)$ è soluzione di $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$

   $(x_1, \cdots, x_n)$ è soluzione di $\lambda a_1 x_1 + \cdots + \lambda a_n x_n = \lambda b$

3. Il sistema (*) è equivalente al sistema in cui un'equazione è sostituita con quella ottenuta sommando ad essa un multiplo di un'altra equazione:

   $$(**) = \begin{cases} a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + \lambda(a_{1'} x_1 + \cdots + a_{n'} x_n) = b + \lambda b' \\ a_{1'} x_1 + \cdots + a_{n'} x_n = b' \end{cases}$$

   Dim:

   $(x_1, \cdots, x_n)$ è soluzione di $(*) \Leftrightarrow (x_1, \cdots, x_n)$ è soluzione di $(**)$

   $\Rightarrow$) Assumiamo che $(x_1, \cdots, x_n)$ è soluzione di (*)

   $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$
   $a_{1'} x_1 + \cdots + a_{n'} x_n = b'$

$b = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$
$b' = a_{1'}x_1 + \cdots + a_{n'}x_n$

$b + b' = b + \lambda b'$

Sostituisco b e b'

$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + \lambda(a_{1'}x_1 + \cdots + a_{n'}x_n) = b + \lambda b'$

$\Leftarrow)$ $(x_1, \cdots, x_n)$ è soluzione di $(**) \Rightarrow \cdots (x_1, \cdots, x_n)$ è soluzione di (*)

Operazioni elementari sulle equazioni di un sistema

I. One Scambiare tra loro due equazioni del sistema

II. Two Moltiplicare un'equazione per uno scalare non nullo

III. Three Sostituire un'equazione con quella ottenuta "sommando" ad essa un multiplo di un'altra equazione

Operazioni elementari sulle righe di una matrice

1.

I. Scambiare tra loro due righe di una matrice

$$R_i \leftrightarrow R_j : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

II. Moltiplicare una riga della matrice per uno scalare non nullo:

$$R_i \leftarrow \lambda R_i : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow 2R_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

III. Sostituire una riga della matrice con quella ottenuta sommando ad essa un multiplo di un'altra riga:

$$R_i \leftarrow R_i \lambda R_j : \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 9R_3} \begin{bmatrix} 0 & -8 & -16 & -24 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Algoritmo di Gauss-Jordan: Successione di operazioni elementari che permettono di trasformare il sistema (o la corrispondente matrice orlata) in un sistema a scalini (in una matrice a scalini) equivalente al sistema di partenza.

Esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 5R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 9R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

NB: L'output dell'algoritmo non è unico perchè dipende dalle scelte effettuate

Risoluzione di un sistema lineare con il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan Supponiamo di avere un sistema lineare qualsiasi:

1. Scriviamo la corrispondente matrice orlata $\mathbb{A}$
2. Utilizziamo l'algoritmo di Gauss-Jordan per ottenere da $\mathbb{A}$ una matrice $\mathbb{B}$ a scalini equivalente per righe
3. Se l'ultimo pivot di $\mathbb{B}$ appartiene all'ultima colonna, il sistema non è compatibile.
4. Scriviamo il sistema a scalini corrispondente a $\mathbb{B}$ e lo risolviamo introducendo delle eventuali variabili libere

Esempio:

1. Con numeri:

(a) $\begin{cases} x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \xRightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \xRightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xRightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2}$
$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) È compatibile (l'ultimo pivot (1) non appartiene all'ultima colonna).
Variabili libere: $x_2,\ x_4$
Risolvo:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_3 = 3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6 - 4x_4 = 4 \\ x_3 = 3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 - 2s - 2t \\ x_2 = s \\ x_3 = 3 - 2t \\ x_4 = t \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{S} = \{(5 - 2s - 2t, s, 3 - 2t, t),\ \ s, t \in \mathbb{R}\} : \infty^2$ soluzioni

2. Con parametro: INCOMPLETO

3. (a) $\Rightarrow \begin{pmatrix} a & -a & 0 & 1 & 1-a \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & a-1 \end{pmatrix}$

(b) $\xRightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ a & -a & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & a & 1 & a-1 \end{pmatrix} \xRightarrow{R_2 \leftrightarrow R_2 - aR_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & a & 1 & a-1 \end{pmatrix} \xRightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$
$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & a-1 \\ 0 & a & a & 1 & 1-a \end{pmatrix} \xRightarrow{R_3 \leftrightarrow R_3 - aR_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & a-a^2 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \leftarrow$ a scalini $\forall a$

$a - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 1$

$a = 0 \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow$ compatibile

$a = 1 \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ compatibile

$a \neq 0,\ a \neq 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & a-a^2 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + ax_3 = a - 1 - x_4 \\ (a-a^2)x_3 = 1 - a^2 - (1-a)x_4 \end{cases}$$

9 05/04/22

9.1 Ultime considerazioni sui sistemi lineari

$(*) AX = b, A \in \mathcal{M}_n(K), b \in M_{n,1}(K)$,

A invertibile.

$\Updownarrow$

$\exists A^{-1} \in M_(K) : A^{-1}A = AA^{-1} = In$

Quindi abbiamo:

$A^{-1}AX = A^{-1}b \Leftrightarrow InX = A^{-1}b \Leftrightarrow X = A^{-1}b$

<u>Proposizione</u> (metodo dell'inversa)

Sia $A \in \mathcal{M}_n(K)$ una matrice <u>invertibile</u> e $b \in M_{n,1}(K)$. Allora il sistema

$AX = b$

possiede l'unica soluzione $X = A^{-1}b$

Come si calcola l'inversa di una matrice?

L'algoritmo di Gauss-Jordan offre un metodo efficiente per il calcolo dell'inversa di una matrice.

<u>Idea</u>:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 7R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$

$A \in \mathcal{M}_n(K)$

$P_r \cdots P_2 P_1 A = In$

$(A \ \vdots \ In) \to (In \ \vdots \ A^{-1})$

Sistema lineare omogeneo a coefficienti in $\mathbb{K}$

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

S_0: insieme delle soluzioni di (*)
S_0 è un sottoinsieme di K^n con qualche interessante proprietà.

1. $\underline{0}$= $(0, \cdots, 0) \in S_0$ (il vettore nullo è sempre soluzione di un sistema omogeneo) $\Rightarrow S_0 \neq 0$

2. Se $(x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \in S_0 \Rightarrow (x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) \in S_0$ Dim:

   Se $(x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \in S_0$

   $\Updownarrow$

   $\forall i, a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0, \quad a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n = 0$

   Mostriamo che $(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \in S_0$, cioè $(x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$ verifica $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0, \forall i$

   Abbiamo:

   $\forall i \quad a_{i1}(x_1 + y_1) + \cdots + a_{in}(x_n + y_n) =$
   $= a_{i1}x_1 + a_{i1} + \cdots + a_{in}x_n + a_{in}y_n =$
   $= a_{i1}x_1 + \cdots + a_{i1}x_n + a_{in}y_1 + \cdots + a_{in}y_n$

3. Se $(x_1, \cdots, x_n) \in S_0 \Rightarrow \lambda(x_1, \cdots, x_n) \in S_0, \forall \lambda \in \mathbb{K}$

   Dim:

   $(x_1, \cdots, x_n) \in S_0 \Rightarrow \forall i \quad a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0$

   Mostriamo che $\forall \lambda \in K, \quad \lambda(x_1, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) \in S_0 : \forall i$ abbiamo: $a_{i1}(\lambda x_1) + \cdots + a_{in}(\lambda x_n) = \lambda(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) = 0$

Le proprietà 1, 2 e 3 fanno di S_0 un "sottospazio vettoriale" di K^n
Più in generale definiamo:

Def: Sia V uno spazio vettoriale du K.
Un sottioinsieme w di $V \quad (w \subseteq V)$ si dice sottospazio vettoriale se:

1. $w \neq \varnothing$
2. $\forall w_1, w_2 \in W : w_1 + w_1 \in W$
3. $\forall w \in W, \forall \lambda \in K : \lambda w \in W$

Osservazioni:

- La proprietà 3 implica che $\underline{0} \in W$.

Dim: $W \neq 0 \Rightarrow \exists w \in W \xRightarrow{\boxed{3}\ con\ \lambda=0} 0 \cdot w = \underline{0} \in W$

- Un sottospazio vettoriale è uno spazio vettoriale:
- Il vettore nullo $\underline{0} \in W$ per l'osservazione precedente
- $\forall w \in W, (-1) \cdot w = -w \in W$

- Tutte le altre proprietà discendono da V in quanto $W \subseteq V$.

Esempi

1. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo a n incognite e a coefficienti in K è un sottospazio vettoriale di K^n.
2. $V = K^n$
   $W = \{(0, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in K \quad \forall i = 2, \cdots, n\}$

Vediamo che W è un sottospazio vettoriale di K^n:

1. $W \neq \varnothing$, poichè $(0, \cdots, 0) \in W$
2. Siano $\underline{x} = (0, x_2, \cdots, x_n)$, $\underline{y} = (0, y_2, \cdots, y_n) \in W$

   Allora

   $\underline{x}+\underline{y} = (0, x_2, \cdots, x_n) + (0, y_2, \cdots, y_n) = (0, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$
3. Sia $\underline{x} = (0, x_2, \cdots, x_n) \in W, \quad \lambda \in K$

   Allora $\lambda \cdot \underline{x} = (0, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n) \in W$

   Nota che W è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

   $\begin{cases} x_1 = 0 \end{cases}$
4. Ogni spazio vettoriale V ha due sottospazi vettoriali "banali":

   $W_1 = \{\underline{0}\}$

   $W_2 = V$
5. V spazio vettoriale su K

   $v \in V$.

   $W = < v > := \{\lambda v : \lambda \in K\}$

   (a) $\underline{0} = 0 \cdot v \in W$
   (b) $w_1, w_2 \in W \Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in K : w_1 = \lambda_1 v$ e
       $w_2 = \lambda_2 v \Rightarrow w_1 + w_2 = \lambda_1 v + \lambda_2 v = (\lambda_1 + \lambda_2) v \in W$
   (c) $w \in W \Rightarrow \exists \lambda \in K : w = \lambda v$
       $\forall \mu \in K \quad \mu w = \mu \lambda v \in W$
       Quindi W è un sottoinsieme vettoriale di V chiamato retta vettoriale
       $V = \mathbb{R}^2, v = (1, 1)$
       $W = < v > = \{\lambda(1, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ (passa per l'origine)
       Più in generale, $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ Allora $< v > = \{(\lambda a, \lambda b \lambda \in \mathbb{R}\}$ è la retta passante per l'origine definita dall'equazione $bx - ay = 0$

10 06/04/22

Mi sono perso qualcosa, stavo mangiando una pizzetta

Def: Sia V uno spazio vettoriale su K.
Un sottoinsieme $W \subseteq$ hlIncompleto

Def: (equivalente): $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale se e solo se:

1. $W \neq 0$
2. $\forall w_1, w_2 \in W, \forall \lambda, \mu \in K$
   $\lambda w_1 + \mu w_2 \in W$

Esempio:

$V = \mathbb{R}^3$
$w_1 = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$
$w_2 = \{(x, y, x^2) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$

1. w_1 + un sottospazio di $\mathbb{R}^3$
   (a) $w_1 \neq \emptyset$ poichè $(0,0,0) \in W_1$
   (b) $(\forall w_1, w_2 \in W_1, \forall \lambda, \mu \ni \mathbb{R} : \quad \lambda w_1 + \mu w_2 \in W_1)$
   Siano $w_1, w_2 \in W_1$. Allora $\exists x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ tali che $w_1 = (x_1, y_1, z_1), w_2 = (x_2, y_2, z_2)$.
   $\forall \lambda\mu \in \mathbb{R}$ abbiamo:
   $\lambda w_1 + \mu w_2 = \lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2)\lambda y_1 + \mu y_2, (\lambda x_1 + \mu x_2) = (x', y', z') \in W_1$,
   $x' = \lambda x_1 + \mu x_2$
   $y' = \lambda y_1 + \mu y_2$ hlpotrebbe essere sbagliato
2. $w_2 = \{(x, y, x^2) : x, y \in \mathbb{R}\}$
   $w_1 = (3, 0, 9)$
   $w_2 = (2, 1, 4)$
   $\lambda = 1 \qquad \lambda w_1 + \mu w_2 = (1, -1, 5) \notin W_2 : \qquad 5 \neq 1^2$
   $\mu = -1$
   $(x_1, y_1, x_1^2) + (x_2, y_2, x_2^2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1^2 + x_2^2) \Rightarrow$
   $\Rightarrow (x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$

tutte le u e le w sono maiuscole (si me ne sono accorto ora) Proposizione: Sia V uno spazio vettoriale su K e siano $u, w \subseteq V$ due sottospazi di V. Allora anche $u \cap w$ è un sottospazio vettoriale.
Ricordiamo: $u \cap w = \{V : v \in u \text{ e } v \in W\}$
Dim:

1. $u \cap w \neq 0$ poichè $\underline{0} \in u$ (u è un sottospazio) e $\underline{0} \in w$ (w è un sottospazio)
2. $\forall v_1, v_2 \in u \cap w, \quad \forall \lambda, \mu \in K$
   Allora $\lambda v_1 + \mu v_2 \in u \cap W$ (poichè u e w sono sottospazi e $v_1, v_2 \in u$ e $v_1, v_2 \in W$)

Più in generale dati n sottospazi w_1, w_n
$w_1 \cap \cdots \cap w_n = \bigcap_{i=1}^{n} w_i$ è un sottospazio.
Attenzione:

1. $u \cup w$ in generale non è un sottospazio

   Esempio:

   $V = \mathbb{R}^2$
   $u = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$
   $w = 0, y : y \in \mathbb{R}$

   $v_1, v_2 \in u \cup w : v_1 + v_2 \notin u \cup w$

   $v_1 = (1,0)$
   $v_2 = (0,1)$
   $v_1 + v_2 = (1,1) \notin u \cup w$

Osservazione: $w \subseteq v$ sottospazio.
Il complementare $V \backslash W = \{v \in V : v \notin W\}$ non è mai un sottospazio di V perchè $\underline{0} \notin V \backslash W \quad (\underline{0} \in W)$
Idea: Vogliamo costruire un sottospazio che contiene due sottospazi di U e W
Proposizione: Sia V uno spazio vettoriale su K e siano U, W due sottospazi vettoriali di V.
Allora l'insieme:

$$U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$$

è un sottospazio vettoriale di V chiamato sottospazio somma di U e W.
Osservazione: $U \cup W \subseteq U + W$
Infatti $U \subseteq U + W : \forall u \in U, u = u + \underline{0}$
$W \subseteq U + W : \forall w \in W, w = \underline{0} + w$
Dim:
Facciamo vedere che $u + w$ è un sottospazio di V:

1. $u + w \neq 0$ poichè $\underline{0} = \underline{0} + \underline{0} \in U + W$

2. Siano $v_1, v_2 \in u + w$. Allora $\exists u_1, u_2 \in U, w_1, w_2 \in W$:

$v_1 = u_1 + w_1$
$v_2 = u_2 + w_2$
Siano $\lambda\mu \in K$
Allora abbiamo:
$\lambda v_1 + \mu v_2 = \lambda(u_1 + w_1) + \mu(u_2 + w_2) =$
$= \lambda u_1 + \lambda w_1 + \mu u_2 + \mu w_2 =$
$= \lambda u_1 + \mu u_2 + \lambda w_1 + \mu w_2 \in U + W$
prof cambia blocco appunti $V = \mathbb{R}^2$
$U =< (1,0) >$ incompleto

Def: U, W sottospazi di V
$U \cap W = \{\ \underline{0}\ \}$ allora $U + W$ è detto SOMMA DIRETTA di U e W e so denota $U \oplus W$.
Se $V = U + W$ (O+) allora U e W si dicono supplementari. ______________ Riardiamo:
$< (a,b) >= \{\lambda(a,b) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\}$ incompleto
Proposizione: Sia $V = U + W$. Allora $V = U + W$ se e solo se ogni elemento di v si scrive in modo unico nella forma $u + w, u \in U, w \in W$.
Dim:

$\Rightarrow$) Supponiamo che $V = U + W$

Siano $u_1 \in U, w_1 \in W$ e $u_2 \in U, w_2 \in W$: $\quad V = u_1 + w_1 = u_2 + w_2$ (vogliamo far vedere che $u_1 = u_2$ e $w_1 = w_2$)

- $\Downarrow$
  $u_1 - u_2 = u_1 - u_2 \Rightarrow u_1 - u_2 \in U \cap W = \{\ \underline{0}\ \} \Rightarrow u_1 = u_2$
- $w_1 - w_2 = w_1 - w_2 \Rightarrow u_1 - u_2 \in U \cap W = \{\ \underline{0}\ \} \Rightarrow u_1 = u_2$

incompleto

11 08/04/22

incompleto Esempi

1. $V = \mathbb{R}^3$
   $v_1 = (1, 2, 0), \quad v_2 = (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$
   $v = (-1, 4, -3)$ è combinazione lineare di v_1 e v_2.
   Infatti
   $$2v_1 + (-3)v_2 = (2, 4, 0) - (3, 0, 3) = (-1, 4, -3) = v$$
2. $V = \mathbb{R}^3$
   $v_1 = (1, 2, 3), \quad v_2 = (3, 2, 1), \quad v_3 = (-1, 6, 13) \in \mathbb{R}^3$
   Domande:
   (a) $\underline{0} = (0, 0, 0)$ è combinazione lineare di $v_1, \quad v_2$ e v_3?
   Si! La combinazione lineare banale restituisce sempre il vettore nullo:
   $0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = \underline{0}$
   (b) esiste una combinazione lineare non banale di v_1, v_2, v_3 che restituisce il vettore nullo?
   $\exists \lambda, \mu, \delta \in \mathbb{R}, \quad (\lambda, \mu, \delta) \neq (0, 0, 0)$ tali che $\lambda v_1 + \mu v_2 + \delta v_3 = \underline{0}$?
   $\lambda(1, 2, 3) + \mu(3, 2, 1) + \delta(-1, 6, 13) = (0, 0, 0) \Rightarrow$
   $\Rightarrow (\lambda + 3\mu - \delta, 2\lambda + 2\mu + 6\delta, 3\lambda + \mu + 13\delta) \Rightarrow$
   $\Rightarrow \begin{cases} \lambda + 3\mu - \delta = 0 \\ 2\lambda + 2\mu + 6\delta = 0 \\ 3\lambda + \mu + 13\delta = 0 \end{cases}$ sistema lineare omogeneo
   $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 13 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow -2R_1 \wedge R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   $\begin{cases} \lambda + 3\mu - \delta = 0 \\ -4\mu + 8\delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3\mu + \delta = -5\delta \\ \mu = 2\delta \end{cases}$
   $S = \{(-5\delta, 2\delta, \delta) : \delta \in \mathbb{R}\}$

$\forall \delta \neq 0$ otteniamo i coefficienti di una combinazione lineare non banale che restituisce il vettore nullo
$\delta = 1 : (-5, 2, 1)$
$-5v_1 + 2v_2 + v_3 = -5(1,2,3) + 2(3,2,1) + (-1,6,13) = (0,0,0)$

Osservazioni

- L'insieme delle combinazioni lineari di $v \in V$ è la retta vettoriale $< v >$:
$$< v > := \{\lambda v : \lambda \in K\}$$
- $\forall i = 1, \cdots, n, \quad v_i$ è combinazione lineare di $v_1, \cdots, v_n$:
$$v_i = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \cdots + 0 v_n$$
- Dalla definizione di sottospazio segue che se $v_1, \cdots, v_n \in W$ e W è un sottospazio, allora tutte le combinazioni lineari di $v_1, \cdots, v_n$ appartengono a W.

  L'insieme
$$< v_1, \cdots, v_n > := \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n : \lambda_i \in K, \forall i = 1, \cdots, n\}$$
  è un sottospazio di V chiamato il sottospazio generato (o *span* o copertura lineare) da (di) $v_1, \cdots, v_n$.

  È il ”più piccolo” sottospazio di V che contiene $v_1, \cdots, v_n$:

  Se W è un sottospazio che contiene $v_1, \cdots, v_n$
$$< v_1, \cdots, v_n > \subseteq W$$

  Esempio

  $V = M_2(\mathbb{R})$

  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

  $< v_1, v_2 > = < \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} > = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right. =$

  $= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right. =$

  $= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right.$

  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \in < v_1, v_2 >$

  $< v_1, v_2 > = M_2(\mathbb{R})$? No, perchè $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \notin < v_1, v_2 >$

  $< v_1, v_2 > \subset M_2(\mathbb{R})$

Osservazione

$\forall m \le n$

$$< v_1, \cdots, v_m > \subseteq < v_1, \cdots, v_m, v_{m+1}, \cdots, v_n$$

$\uparrow$ ogni combinazione lineare di $v_1, \cdots, v_m$ è anche combinazione lineare di $v_1, \cdots, v_n$

$\lambda_1 v_1 + \lambda_n v_n = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m + 0 \cdot v_{m+1} + \cdots + 0 \cdot v_n$

Ripartiamo dall'esercizio 1 del foglio 2:
$V = \mathbb{R}^2, \quad v = (1,2), w = (3,4) \in \mathbb{R}^2$
Abbiamo mostrato che:

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : (a,b) = \lambda(1,2) + \mu(3,4)$, o equivalentemente,

  $(a,b) \in < (1,2), (3,4) >$

  Poichè $< (1,2), (3,4) > \subseteq \mathbb{R}^2$, otteniamo che $< (1,2), (3,4) >= \mathbb{R}^2$, cioè $(1,2)$ e $(3,4)$ "generano" tutto $\mathbb{R}^2$ attraverso le loro combinazioni linerai.

  Diremo che $\{(1,2),(3,4)\}$ è un "sistema di generatori" di $\mathbb{R}^2$

- $(0,0) = \lambda(1,2) + \mu(3,4) \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$, cioè l'unica combinazione lineare di $(1,2)$ e $(3,4)$ che restituisce il vettore nullo è quella banale.

  Diremo che $(1,2)$ e $(3,4)$ sono linearmente indipendenti.

Più in generale definiamo:

Def: Sia V uno spazio vettoriale su K
Diciamo che $v_1, \cdots, v_n \in V$ generano V oppure che $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è un sistema di generatori di V se:

$$< v_1, \cdots, v_n >= V$$

Osservazione: Poichè abbiamo sempre $< v_1, \cdots, v_n > \subseteq V$, per mostrare che $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è un sistema di generatori di V basta dimostrare che

$$V \subseteq < v_1, \cdots, v_n >,$$

cioè che $\forall v \in V, \exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K$ tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

11.1 Definizione di vettori linearmente indipendenti

Def: (difficile, la chiede 100%): Sia V uno spazio vettoriale su K.
I vettori $v_1, \cdots, v_n \in K$ si dicono **linearmente indipendenti** se $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_n v_n = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, o equivalentemente se l'unica combinazione lineare di $v_1, \cdots, v_n$ che restituisce il vettore nullo è quella banale.
Altrimenti, se esistono $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ non tutti nulli ($(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0)$) tali che $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \underline{0}$, $v_1, \cdots, v_n$ si dicono linearmente dipendenti.

Esempio:

$V = \mathbb{R}^3$
$v_1 = (8,-2,0), \quad v_2 = (0,3,4), \quad v_3 = (-2,2,2) \in \mathbb{R}^3$

Domanda: v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti?
Siano $\lambda, \mu, \delta \in \mathbb{R}$ tali che:

$\lambda v_1 + \mu v_2 + \delta v_3 = \underline{0} \Rightarrow \lambda(8,-2,0) + \mu(0,3,4) + \delta(-2,2,2) = (0,0,0) \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} 8\lambda - 2\delta = 0 \\ -2\lambda + 3\mu + 2\delta = 0 \\ 4\mu + 2\delta = 0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 & \vdots & 0 \\ -2 & 3 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 4 & 2 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + \frac{1}{4}R_1} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - \frac{4}{3}R_2} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 8\lambda - 2\delta = 0 \\ 3\mu + \frac{3}{2}\delta = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{4}\delta \\ \mu = -\frac{1}{2}\delta \end{cases}$

$S = \{(\frac{1}{4}\delta, -\frac{1}{2}\delta, \delta) : \delta \in \mathbb{R}\}$
$\delta = 4 \rightsquigarrow (1,-2,4)$

$$v_1 - 2v_2 + 4v_3 = (0,0,0)$$

$\Rightarrow v_1, v_2$ e v_3 sono <u>linearmente dipendenti</u>
<u>Osservazioni</u>

1. Un vettore $v \in V$ è <u>linearmente dipendente</u> se e solo se $v = \underline{0}$

   $\Leftarrow$) se $v = \underline{0}$ allora $1 \cdot v = \underline{0} \Rightarrow$ v è linearmente dipendente

   $\Rightarrow$) $\exists \lambda \neq 0 : \lambda v = \underline{0} \Rightarrow \lambda^{-1}\lambda v = \lambda^{-1}\, \underline{0} \Rightarrow 1 \cdot v = \underline{0}$

2. Due vettori $v_1, v_2 \in V$ sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow \exists \lambda \in K$ tale che $v_1 = \lambda v_2$ o $v_2 = \lambda v_1$.

   <u>Esempio</u>: $V = \mathbb{R}^3$

   $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 3v_1 \Rightarrow v_1, v_2$ sono linearmente dipendenti.

   Infatti se $v_2 = 3v_1 \Rightarrow 3v_1 - v_2 = \underline{0}$

   $\Leftarrow$) Supponiamo $\exists \lambda \in K : v_1 = \lambda v_2$ o $v_2 = \lambda v_1$.

   Se $v_1 = \lambda v_2 \Rightarrow 1 \cdot v_1 - \lambda v_2 = \underline{0}$

   Se $v_2 = \lambda v_1 \Rightarrow \lambda v_1 - v_2 = \underline{0}$

   In ogni caso v_1, v_2 sono linearmente dipendenti.

   $\Rightarrow$) Supponiamo v_1, v_2 linearmente dipendenti $\Rightarrow \exists \lambda_1 \lambda_2 \in K, (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0) : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \underline{0}$

   Se $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2$

   Se $\lambda_2 \neq 0 \Rightarrow v_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} v_1$

   Quindi $\exists \lambda \in K : v_1 = \lambda v_2$ o $v_2 = \lambda v_1$

   <u>Esempio</u>: $v_1 = (1,2,3), \quad v_2 = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti poichè $v_2 = 0 \cdot v_1 \Rightarrow 0 \cdot v_1 + (-1)v_2 = \underline{0}$

3. $v_1, \cdots, v_n \in V$ sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow \exists i \in \{1, \cdots, n\}$ tale che v_i è combinazione lineare degli altri.

Esempio: $v_1 = (1,1,1), \quad v_2 = (1,-1,3), \quad v_3 = (2,0,4)$

v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti poichè $v_3 = v_1 + v_2 \Rightarrow v_1 + v_2 - v_3 = \underline{0}$

4. Se l'insieme $\{v_1, \cdots, v_n\}$ contiene il vettore nullo allora $v_1, \cdots, v_n$ sono linearmente dipendenti.

Def: Un sottoinsieme finito $\{v_1, \cdots, v_n\}$ di V si dice base di V se:

1. $v_1, \cdots, v_n$ sono linearmente indipendenti
2. $v_1, \cdots, v_n$ generano V, $\forall v \in V$
   $\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K : \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = v$.

12 12/04/22

Def: Sia V uno spazio vettoriale su K e siano $v_1, \cdots, v_n \in V$

- Diciamo che $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è un sistema di generatori o che $v_1, \cdots, v_n$ generano V se

$$< v_1, \cdots, v_n >= V$$

  o equivalentemente se

$$\forall v \in V, \exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in K^n$$

  tali che

$$(*) \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = v$$

- Diciamo che $v_1, \cdots, v_n$ sono linearmente indipendenti se $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$

  $[(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = (0, \cdots, 0)]$

- Diciamo che $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di V se:

  1. $v_1, \cdots, v_n$ generano V
  2. $v_1, \cdots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

Proposizione:

Sia V uno spazio vettoriale su K e sia $\{v_1, \cdots, v_n\}$ una base di V

Allora $\forall v \in V \, \exists! (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in K^n$ tale che

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$$

allora $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = (\mu_1, \mu_n) \Leftrightarrow \lambda_i = \mu_i, \forall i = 1, \cdots, n$

I coefficienti $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K$ della combinazione lineare (*) Si dicono le coordinate di v rispetto alla base $\{v_1, \cdots, v_n\}$ e $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ si dice la n-upla delle coordinate di v rispetto alla base $\{v_1, \cdots, v_n\}$

Dim

Poichè $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una bse allora i vettori $v_1, \cdots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

La conclusione segue dall'esercizio 6-(d) del foglio 4

Esempio

$V = \mathbb{R}^2$

$v_1 = (1,0), \quad v_1 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$

- v_1, v_2 generano $\mathbb{R}^2 : \forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$

  $(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$

- v_1, v_2 sono linearmente indipendenti. Infatti se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sono tali che:

  $$\lambda_1(1,0) + \lambda(0,1) = (0,0) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$$

  Quindi $\mathbb{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ è **una** base di $\mathbb{R}^2$

  Si noti che parliamo di **una** base di $\mathbb{R}^2$, in quanto essa non è unica.

  $w_1 = (1,2), w_2 = (3,4)$ generano $\mathbb{R}^2$ e sono linearmente indipendenti

  $\Rightarrow \mathbb{B}' = w_1, w_2$ è un'altra base di $\mathbb{R}^2$

Def: Due vettori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ si dicono collineari se v_1, v_2 sono linearmente dipendenti, cioè se $\exists \lambda \in K$ tale che:
$v_1 = \lambda v_2 \quad o \quad v_2 = \lambda v_1$
Geometricamente è semplice vedere che ogni coppia di vettori non collineari v_1, v_2 costituisce una base di $\mathbb{R}^2$
Vedremo che tutte le basi di $\mathbb{R}^2$ sono della forma $\{v_1, v_2\}$ con v_1, v_2 non collineari.
In particolare tutte le basi di $\mathbb{R}^2$ sono costituite da 2 elementi
Lemma (di Steinitz)
Sia V uno spazio vettoriale con base $\mathbb{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ e siano $w_1, \cdots, w_m \in V$
$w_1, \cdots, w_m$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow m \leq n$
$\Updownarrow m > n \Rightarrow w_1, \cdots, w_m$ sono linearmente dipendenti.
Utilizziamo il lemma di Steinitz per dimostrare il risultato seguente:
Teorema di equipotenza delle basi
Sia V uno spazio vettoriale su K.
Siano $\{v_1, \cdots, v_n\}$ e $\{w_1, \cdots, w_n\}$ due basi di V.
Allora $n = m$
Dim: Idea: $m = n \Leftrightarrow m \leq n$ e $m \geq n$.

- Poichè $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di V e $v_1, \cdots, v_n$ sono linearmente indipendenti $\xRightarrow{lemma} m \leq n$

- Poichè $\{w_1, \cdots, w_n\}$ è una base di V e $v_1, \cdots, v_n$ sono linearmente indipendenti $\xRightarrow{lemma} n \leq m$

Quindi $m \leq n$ e $n \leq m \Leftrightarrow n = m$

Def: Sia V uno spazio vettoriale su K e sia $\{v_1, \cdots, v_n\}$ una base finita di V.
Il numero n si dice *dimensione* di V e si denota
$dim_K(V)$ o più semplicemente $dim(V)$
Se $V = \{\underline{0}\}$ allora si pone $dim(V) = 0$.
Se $V = \{\underline{0}\}$ oppure se V ha una base finita diciamo che V ha dimensione finita.
Esempi

1. $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale di dimensione 2, poichè abbiamo visto che $\{(1,0),(0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

2. $V = K^n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in K, \forall i = 1, \cdots, n\}, n \geq 1$ Siano
   $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$
   $e_2 = (0, 1, \cdots, 0)$
   $\vdots$
   $e_n = (0, \cdots, 0, 1)$
   È facile mostrare che $\{e_1, \cdots, e_n\}$ è una base di K^n detta **base canonica** di K^n.
   Quindi $dim_K K^n = n$.
   $\forall x' = (x_1, \cdots, x_n) \in K^n$, abbiamo
   $x' = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$
   cioè x' è la n-upla delle coordinate di x' rispetto a $\{e_1, \cdots, e_n\}$

3. $V = M_2(\mathbb{R})$
   Siano:
   $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}.$
   Si mostra facilmente che $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ siano linearmente indipendenti.
   Quindi $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ è una base di $M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow dim_{\mathbb{R}}$ hlincompleto

$V, \mathbb{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base di V.
Consideriamo la funzione

$$\varphi_{\mathbb{B}} : V \to K^n$$
$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \mapsto (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

- <u>iniettiva</u>: se v, w sono tali che $\varphi_{\mathbb{B}}(v) = \varphi_{\mathbb{B}}(w) \Rightarrow v = w$.
  $v, w \in V \Rightarrow v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$
  $w = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$
- <u>suriettiva</u>? $\forall (\lambda_1, \lambda_n) \in K^n, \exists v \in V$ tale che

$$\varphi_{\mathbb{B}} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

Basta prendere $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ ($\boxed{)}$
Quindi $\varphi_{\mathbb{B}}$ è biettiva.
Inoltre $\varphi_{\mathbb{B}}$ soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\forall w_1, w_2 \in V, \varphi_{\mathbb{B}}(w_1 + w_2) = \varphi_{\mathbb{B}}(w_1) + \varphi_{\mathbb{B}}(w_2)$. <u>Dim</u>
   Siano $w_1 w_2 \in V$. Quindi $\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \mu_1, \cdots, \mu_n \in K$ tali che

$$w_1 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n, \quad w_2 = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$$

Quindi $\varphi_{\mathbb{B}}(w_1) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \varphi_{\mathbb{B}}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$

Ora $w_1 + w_2 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n = (\lambda_1 \mu_1) v_1 + \cdots + (\lambda_n \mu_n) v_n$

$\varphi_{\mathbb{B}}(w_1 + w_2) = (\lambda_1 + \mu_1, \cdots, \lambda_n + \mu_n) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) + (\mu_1, \cdots, \mu_n) = \varphi_B(w_1) + \varphi_B(w_2)$

2. $\forall \lambda \in K$ Incompleto

Le proprietà 1 e 2 fanno di φ_B quella che chiameremo un'"applicazione lineare".
Chiamiamo φ_B **isomorfismo coordinato** rispetto alle basi B.
Teorema (di esistenza della base): Sia $V \neq \{\underline{0}\}$
$L = \{v_1, \cdots, v_p\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti
$G = \{v_1, \cdots, v_p, \cdots, v_m\}, m \geq p$, un sistema di generatori.
Allora esiste una base B di V tale che

$$L \subseteq B \subseteq G$$

Prima della dimostrazione:
Corollario 1: Sia $V \neq \{\underline{0}\}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita. Allora:

1. Da qualsiasi sistema di generatori è possibile estrarre una base di V
2. È possibile completare qualsiasi insieme di vettori linearmente indipendenti a una base di V

Esempio
$V = \mathbb{R}^3$
$v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (4, 6, 9) \in \mathbb{R}^3$
$L = \{(1, 2, 3), (4, 6, 9)\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti.
$L \subseteq G = \{(1, 2, 3), (4, 6, 9), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
G è un sistema di generatori.
Per il teorema esiste una base B di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$L \subseteq B \subseteq G$$

Tentativo 1: $\{(1, 2, 3), (4, 6, 9), (1, 0, 0)\}$
Linearmente indipendenti?: Siano $\lambda, \mu, \delta \in \mathbb{R}$:

$$\lambda(1, 2, 3) + \mu(4, 6, 9) + \delta(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda + 4\mu + \delta = 0 \\ 2\lambda + 6\mu = 0 \\ 3\lambda + 9\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -\delta \\ 0 = 0 \\ \lambda = -3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -\delta \\ \lambda = 3\delta \end{cases} \Rightarrow S = \{(3\delta, -\delta, \delta) : \delta \in \mathbb{R}\}$$

$\delta = 1 \rightsquigarrow (3, -1, 1) \Rightarrow 3(1, 2, 3) - (4, 6, 9) + (1, 0, 0) = (0, 0, 0) \Rightarrow$ sono linearmente dipendenti.
Tentativo 1: $\{(1, 2, 3), (4, 6, 9), (0, 1, 0)\}$
Linearmente indipendenti?

1. No $\rightsquigarrow \{(1, 2, 3), (4, 6, 9), (0, 1, 0)\}$ Incompleto

13 13/04/22

13.1 Continuando da ieri, Corollario 1

Corollario 2: Sia V uno spazio vettoriale su K di dimensione n.

1. Ogni sistema di generatori di V con n elementi è una base di V
2. Ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti è una base di W

Dim

1. $G = \{v_1, \cdots, v_n\}$ sistema di generatori
   Per il corollario 1 $\exists$ una base B di V tale che
   $B \subseteq G \Rightarrow B = G$, cioè G è una base di V
   B ha n elementi poichè $dim(V) = n$
2. $L = \{v_1, \cdots, v_n\}, v_1, \cdots, v_n$ sono linearmente indipendenti.
   Per il corollario 1, $\exists$ una base B di V tale che
   $L \subseteq B \Rightarrow B = L$

Proposizione: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita.
Sia W un sottospazio di V. Allora:

1. $dim(W) \leq dim(V)$
2. $dim(W) = dim(V) \Leftrightarrow V = W$

Dim
Sia $n = dim(V)$

1. Si mostra che anche W è di dimensione finita (non è scontato) hlvedi note della prof, non lo spiega qui in classe.
   Sia dunque $\{w_1, \cdots, w_m\}$ una base finita di W
   Ora $w_1, \cdots, w_m$ sono vettori linearmente indipendenti di $W \subseteq V \xRightarrow{Lemma\ di\ Steinitz} m \leq n \Leftrightarrow dim(W) \leq dim(V)$
2. $\Leftarrow$) ovvio.
   $\Rightarrow$) Supponiamo $dim(W) = dim(V) = n$.
   Sia $B = \{w_1, \cdots, w_n\}$ una base di W.
   Ora $w_1, \cdots, w_n$ sono vettori linearmente indipendenti di V e quindi B è anche una base di V.
   $W =< w_1, \cdots, w_n >= V$
   ↑ sistema di generatori di W, ↑ sistema di generatori di V

Osservazione: W è un sottospazio, $dim(W) = 0 \Leftrightarrow W = \{\underline{0}\}$

Def: Sia V uno spazio vettoriale e $W \subseteq V$ un sottospazio.
Allora l'intero

$$dim(V) - dim(W)$$

Si dice **codimensione** di W in V
Teorema (formula di Grassman):
Sia V uno spazio vettoriale, siano U, W due sottospazi di V di dimensione finita.
Allora $U \cap W$ e $U + W$ hanno dimensione finita e

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$

In particolare se $U \oplus W$ è somma diretta ($U \cap W = \{\underline{0}\}$) allora $dim(U \cap W) = 0$ e $dim(U + W) = dim(U) + dim(W)$

Esempi mancanti, non so se possono servire .
Proposizione: Siano U, W due sottospazi di V tali che $U \cap W = \{\underline{0}\}$.
Siano B_u, B_w due basi rispettivamente di U e W, allora $B_u \cup B_w$ è una base di $U \oplus W$
Dim: per esercizio

Def: Sia V uno spazio vettoriale su K e sia $\{v_1, \cdots, v_p\}$ un sottoinsieme finito di V, il **rango** di $\{v_1, \cdots, v_p\}$ è la dimensione del sottospazio vettoriale generato da $v_1, \cdots, v_p$.
Equivalentemente, il rango è il numero massimo di vettori linearmente indipendenti in $\{v_1, \cdots, v_p\}$.
Esempio:
$rg(\{(0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,1,1,0)\}) = 2$
v_1, v_2 linearmente indipendenti.
Osservazioni:

1. $0 \leq rg(\{v_1, \cdots, v_p\}) \leq p$
   - $rg(\{v_1, \cdots, v_p\}) = 0 \Leftrightarrow v_1 = \cdots = v_p = \underline{0}$
   - $rg(\{v_1, \cdots, v_p\}) = p \Leftrightarrow v_1, \cdots, v_p$ sono linearmente indipendenti
2. Se $dim(V) = n$ e $v_1, \cdots, v_p \in V$ allora $rg(\{v_1, \cdots, v_p\}) \leq min\{p, n\}$

14 27/04/22

Def: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia
$\{v_1, \cdots, v_p\}$ un sottoinsieme finito di V. Il RANGO di $\{v_1, \cdots, v_p\}$ è la dimensione del sottospazio vettoriale generato da $\{v_1, \cdots, v_p\}$:
$rg(\{v_1, \cdots, v_p\}) = dim(< v_1, \cdots, v_p >)$
Equivalentemente è il numero massimo di vettori linearmente indipendenti in $\{v_1, \cdots, v_p\}$.

Def: Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
Il rango per righe di A è il rango dell'insieme delle sue righe (vettori in $\mathbb{K}^n$).
Il rango per colonne di A è il rango dell'insieme delle sue colonne (vettori n $\mathbb{K}^m$)

Esempio:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_(3,4)(\mathbb{R})$.

Rango per righe di $A = rg(\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,-1,0,1)\}) = dim(<(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,-1,0,1)>) = 2$

Rango per colonne di $A = rg(\{(1,0,1),(0,1,-1),(0,0,0),(1,0,1)\}) = dim(<(1,0,1),(0,1,-1),(0,0,0),(1,0,1)>) = 2$

Teorema: Il rango per righe e il rango per colonne di una matrice coincidono.

Possiamo dunque chiamare semplicemente RANGO di $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ il rango per righe (o per colonne) di A. Lo denotiamo $rg(A)$.

Osservazione: Se $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \Rightarrow rg(A) \leq min\{m,n\}$

Esempio:

$M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \boxed{6} & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{10} & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$rg(M) = 4$ Incompleto

Proposizione: Il rango di una matrice a scalini è uguale al numero di righe non nulle.

Dim

È facile mostrare che le righe non nulle di una matrice a scalini sono linearmente indipendenti.

Proposizione: Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Siano $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ due matrici invertibili.

Allora $rg = (A) = rg(BA) = rg(AC)$, cioè moltiplicare a destra o a sinistra per una matrice invertibile non modifica il rango di A

Corollario: Il rango di una matrice A è uguale al rango di una matrice a scalini B ottenuta da A attraverso delle operazioni elementari.

Inoltre il sottospazio generato dalle righe di A è lo stesso del sottospazio generato dalle righe di B

Idea della dim: ogni operazione elementare corrisponde alla moltiplicazione a sinistra per una matrice elementare e le matrici elementari sono invertibili.

Applicazioni

1. Calcolare una base e la dimensione di

$$U =< \underset{v_1}{(1,-3,2,0,1)}, \underset{v_2}{(1,1,3,1,3)}, \underset{v_3}{(3,-5,2,1,7)}, \underset{v_4}{(-1,7,-1,0,1)}, \underset{v_5}{(0,4,1,1,2)} >$$

$$dim(U) = rg(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}) = rg \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 2 & 1 & 7 \\ -1 & 7 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{incompleto}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{incompleto}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow$$

ha 4 righe non nulle
$\Rightarrow rg(A) = dim(U) = 4$
e una base di U è $\{(1,-3,2,0,1), (0,4,1,1,2), (0,0,-5,0,2), (0,0,0,-1,0)\}$

2. $\{(1,1,1), (1,2,2), (1,2,3)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$?
$\{(1,1,1), (1,2,2), (1,2,3)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow (1,1,1), (1,2,2), (1,2,3)$ sono linearmente indipendenti?

$$\Leftrightarrow rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 \text{ Incompleto}$$

Proposizione: Una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è invertibile $\Leftrightarrow$ $rg(A) = n$.
(Una matrice quadrata è invertibili se e solo se ha rango massimo).

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ Per quali valori di } \mathbb{K} \text{ è invertibile?}$$

$\downarrow$ Riduzione a scalini

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & k-9 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 3 \Leftrightarrow k - 9 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 9$
$\Updownarrow$
A è invertibile.

Dim: ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è invertibile $\Leftrightarrow rg(A) = n$)
$\Rightarrow$) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertibile $\Leftarrow \exists A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
tale che $A \cdot A^{-1} = In$ creare nuova "rightdim" macro con minipage

Allora abbiamo $rg(A) = rg(AA^{-1}) = rg(In) = n$ (il rango non cambia se moltiplicato per una matrice invertibile) (In è una matrice a scalini senza righe nulle).

$\Leftarrow$) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ di rango n e siano $R_1, \cdots, R_n$ le righe di A.
$\Rightarrow \{R_1, \cdots, R_n\}$ è una base di $\mathbb{K}$

Siano:

$E_1 = (1, 0, \cdots, 0)$
$E_2 = (0, 1, \cdots, 0)$
$\vdots$
$E_n = (0, 0, \cdots, 1)$

Quindi $\exists\ b_{ij} \in \mathbb{K}$ tali che:
$E_1 = b_{11}R_1 + b_{12}R_2 + \cdots + b_{1n}R_n$
$E_2 = b_{21}R_1 + b_{22}R_2 + \cdots + b_{2n}R_n$
$\vdots$
$E_n = b_{n1}R_1 + b_{n2}R_2 + \cdots + b_{nn}R_n$

Sia $B = (b_{ij})_{1 \le i \le n;\ 1 \le j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

È facile mostrare $BA = In \Rightarrow A$ è invertibile

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad rg(A) = 2$

$(1, 0) = 1(1, 0) + 0(1, 1)$
$(0, 1) = -1(1, 0) + 1(1, 1)$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14.1 Torniamo ai sistemi lineari

Teorema di Rouchè-Capelli (mannaggia ai francesi, 2006): (Criterio di compatibilità di un sistema)

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite
$AX = b$
dove $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \quad b \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), X = \begin{pmatrix} x1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
è compatibile se e solo se
$rg(A) rg(A|b)$.
In tal caso il sistema possiede ∞^{r-r} soluzioni, dove $r = rg(A)$.

Esempio:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_4 = 3 \\ -x_2 - x_3 + 7x_4 = 6 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = k \end{cases}$$

Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema è compatibile?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 7 & \vdots & 6 \\ -1 & -2 & -2 & 3 & \vdots & k \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ Riduzione a scalini

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{7k-23}{7} \end{pmatrix}}$$

$rg(A) = 3$

$rg(A|b) = \begin{cases} 3 & \text{se incompleto} \end{cases}$

Dim (Rouchè-Capelli): Il sistema $AX = b$ è compatibile

$\Updownarrow$

$\exists(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che

) incompleto

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow 1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m_1} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \text{incompleto}$$

Supponiamo ora che $AX = b$ sia un sistema compatibile.
Sia $r = rg(A) = rg(A|b)$.
Applicando il procedimento di Gauss-Jordan alla matrice orlata $(A|b)$ associata al sistema, otteniamo una matrice a scalini con r righe non nulle e quindi con r pivot.
(ovviamente, poichè il sistema è compatibile, l'ultimo pivot non appartiene all'ultima colonna)
Quindi il sistema possiede $n - r$ variabili libere, cioè ∞^{n-r} soluzioni. $\square$

Osservazione: Se $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, cioè se $AX = b$ è un sistema omogeneo, allora $rg(A) = rg(A|b) \xRightarrow{\text{Rouchè-Capelli}}$ è sempre compatibile.

L'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ di dimensione $n - r$, dove $r = rg(A)$

Esempio:

$S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x - 2y + 3t = 0 \\ y - z + t = 0 \\ 2x - y - 3z + 9t = 0 \end{cases} \}$

$dim(S)$ base di S

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 9 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$\begin{cases} x = 2y - 3t = 2z \\ y = z - t \end{cases}$

$dim(S) = 4 - 2 = 2$

$S = \{(2 - \lambda 5\mu, \lambda - \mu, \lambda, \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{\lambda(2,1,1,0) + \mu(-5,-1,0,1) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}, \lambda = 1, \mu = 0 \Rightarrow$ una base di S è $\{(2,1,1,0), (-5,-1,0,1)\}$

15 29/04/22

INCOMPLETO

16 04/05/22

- Come calcolare il determinate di una matrice A?
  1. Se $A = (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K}) \Rightarrow det(A) = a$
  2. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \Rightarrow det(A) = ad - bc$
  3. Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (in particolare $n \leq 3$)
     - Teorema di Laplace (è pratico quando esiste una riga o colonna con ”tanti” zeri)
     - Algoritmo di Gauss-Jordan
     - Regola di Sarrus ($n = 3$)
- Come calcolare il rango di una matrice A?
  1. Se $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$
     - Algoritmo di Gauss-Jordan (riduco a scalini e conto il numero di righe non nulle).
     - Principio dei minori orlati.
  2. Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e $det(A) \neq 0 \Rightarrow rg(A) = n$.
- Come risolvere un sistema lineare $AX = b$?
  Compatibilità:
  - Algoritmo di Gauss-Jordan (guarda l’ultimo pivot)
  - Teorema di Rouchè-Capelli ($rg(A) = rg(A|b)$)

Risoluzione

- Dopo Gauss-Jordan individuo le variabili libere e "risolvo" il sistema a scalini per determinare le soluzioni.
- Se $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ e $det(A) \neq 0 \Rightarrow$ metodo di Cramer.

Applicazioni lineari

Def: Siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.
Una funzione
$f : V \longrightarrow W$ si dice un'applicazione lineare se soddisfa le seguenti proprietà:

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \forall v_1, v_2 \in V$
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in V$

Esempio:

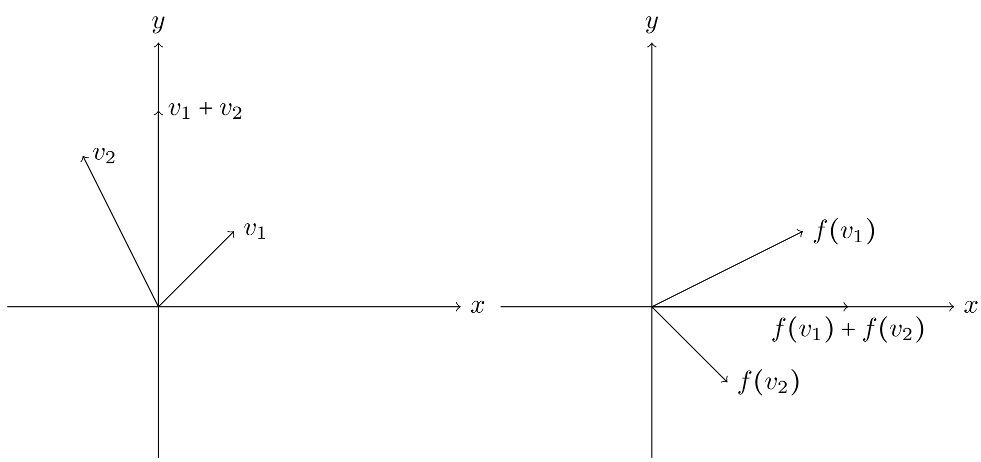
1. $V = W = \mathbb{R}^2$
   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
   $(x, y) \mapsto (x + y, x)$
   $f((1, 0)) = (1 + 0, 1) = (1, 1)$
   $f((0, 1)) = (0 + 1, 0) = (1, 0)$
   (a) Siano $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Allora:
   $f(v_1 + v_2) = f((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2) = (x_1 + y_1, x_1) + (x_2 + y_2, x_2)$
   (b) Sia $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$. Allora:
   $f(\lambda v) = f((\lambda x, \lambda y)) = (\lambda x + \lambda y, \lambda x) = \lambda(x + y, x) = \lambda f(v)$

   Quindi f è un'applicazione lineare.

   Geometricamente

   $v_1 = (1, 1) \to f(v_1) = (2, 1)$ $\qquad$ $v_1 + v_2 = (0, 3) \to f(v_1 + v_2) = (3, 0)$

   $v_2 = (-1, 2) \to f(v2) = (1, -1)$



incompleto

Osservazioni

1. $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$ sono equivalenti alla condizione seguente:
   $f(\lambda v_1 + \mu v_2) = f(\lambda v_1) + f(\mu v_2) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2)$
2. Dalla prima osservazione si ottiene che se f è un'applicazione lineare
   $f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n), \forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}; \forall v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{V}$
3. Se $f : V \to W$ è un'applicazione lineare allora se 0_V è il vettore nullo di V e 0_W è il vettore nullo di W, allora: incompleto

Un po' di terminologia

Def:

- Un'applicazione lineare $f : V \to V$ è detta endomorfismo
- Un'applicazione lineare $f : V \to K$ è detta una funzione lineare
- Un'applicazione lineare $f : V \to W$ è detta un isomorfismo se f è biunivoca ($\Leftrightarrow f$ iniettiva e suriettiva)
- Un isoformismo $f : V \to V$ è detto un automorfismo
  Un automorfismo è un endomorfismo biunivoco.

Esempi mancanti

Proposizione Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare.
Siano $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{V}$ e siano $w_i = f(v_i) \quad \forall i = 1, \cdots, n$. Allora
$v_1, \cdots, v_n$ sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow w_1, \cdots, w_n$ sono linearmente dipendenti
dim: per esercizio

Proposizione : Siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.
Sia $\{v_1, \cdots, v_n\}$ una base di V e siano $w_1, \cdots, w_n$ vettori arbitrari di W.
Allora esiste un'unica applicazione lineare
$f : V \to W$
tale che
$f(v_i) = w_i, \forall i = 1, \cdots, n$.
dim
Sia $v \in \mathbb{V}$ e siano $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tali che $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Allora
$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n)$ Quindi f è unica.
Esempio mancante

Proposizione : Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora:

1. Se S_V è un sottospazio vettoriale di $V \Rightarrow f(S_V) = \{f(v) : v \in S_V\} \subseteq W$ è un sottospazio di W.
2. Se S_W è un sottospazio di $W \Rightarrow f^{-1}(S_W)\{v \in V : f(v) \in S_W\} \subseteq V$ è un sottospazio di V.

Dim

1. Mostriamo che $f(S_V)$ è un sottospazio di W:
   - $f(S_V) \neq \varnothing : 0_W \in f(S_V)$ poichè $0_W = f(0_V) \in S_V$ perchè S_V è un sottospazio
   - Siano $w_1, w_2 \in f(S_V), \lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
     Allora, per definizione, $\exists v_1 \in S_V$ tale che $w_1 = f(v_1)$ e $\exists v_2 \in S_V$ tale che $w_2 = f(v_2)$
     Disegno figo con tikz
     Allora abbiamo
     $\lambda w_1 + \mu w_2 = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2) = (\leftarrow \text{linearità}) f((\lambda v_1 + \mu v_2) \in S_V)$ perchè S_V è un sottospazio
     $\Rightarrow \lambda w_1 + \mu w_2 \in f(S_V)$
     Quindi $f(S_V)$ è un sottospazio di W 2) sulle note incompleto

Due casi particolari
$S_V = V \rightsquigarrow f(V)$: immagine di f
$S_W = \{0_W\} \rightsquigarrow f^{-1}(\{0_W\})$: nucleo di f

Def: Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare.
Il sottospazio di V
ker (da kernel, nucleo), $ker(f) := f^{-1}(\{0_W\}) = \{v \in V : f(V) = 0_W\}$
è detto nucleo di f
Il sottospazio di W
$Im(f) := f(V) = \{f(v) : v \in V\}$
è detto immagine di f
Se $ker(f)$ è $Im(f)$ hanno dimensione finita allora chiamiamo nullità la dimensione di $ker(f)$ e rango la dimensione di $Im(f)$.
$dim(ker(f))$
$rg(f) := dim(Im(f))$
Esempio mancante

17 10/05/22

Applicazioni lineari (continuo)

Richiamiamo
$f : V \to W$
f è un'applicazione lineare se $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{V}, \forall \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{K}$
$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$
NUCLEO: $Ker(f) := f^{-1}(0_w) = \{v \in \mathbb{V} : f(v) = 0_w\} \subseteq \mathbb{V}$ sottospazio di $\mathbb{V}$
IMMAGINE: $Im(f) := f(v) = \{f(v) : v \in \mathbb{V}\} \subseteq W$ sottospazio vettoriale di W
$rg(f) := dim(Im(f))$

Osservazione : Sia $f : \mathbb{V} \to W$ un'applicazione lineare e siano $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{V}$. Allora
$f(< v_1, \cdots, v_n >) =< f(v_1), \cdots, f(v_n) >$
dim

$f(< v_1, \cdots, v_n >) = f(\{\lambda_1 v_1, \cdots, \lambda_n v_n : \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}) = \{f(\lambda_1 v_1, \cdots, \lambda_n v_n) : \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}\} =< f(v_1), \cdots, f(v_n) >$.

Se $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di $\mathbb{V}$:

$Im(f) = f(v) = f(< v_1, \cdots, v_n >) = (v_1, \cdots, v_n \text{ generano } V) < f(v_1, \cdots, v_n) >$

Quindi l'immagine di $f : \mathbb{V} \to W$ è il sottospazio vettoriale generato dalle immagini degli elementi di una base di $\mathbb{V}$.

$rg(f) = dim(Im(f)) \leq dim(\mathbb{V}) \rightsquigarrow dim(\mathbb{V}) - rg(f) = dim(Ker(f))$

Teorema del rango (nullità + rango)

Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale dimensione finito e sia $f : \mathbb{V} \to W$ un'applicazione lineare. Allora $dim(Ker(f))(\text{nullità}) + rg(f) = dim(\mathbb{V})$

Idea della dim

$\mathbb{V}, dim(\mathbb{V}) = n$, e $Ker(f) \leq \mathbb{V} \Rightarrow dim(Ker(f) = p) \leq dim(\mathbb{V})$

Sia $\{v_1, \cdots, v_p\}$ base di $Ker(f)$

Posso completare $\{v_1, \cdots, v_p\}$ a una base di $\mathbb{V}$. Quindi siano $v_{p+1}, \cdots, v_n$ tali che $\{v_1, \cdots, v_p, v_{p+1}, \cdots, v_n\}$ è una base di $\mathbb{V}$. Si mostra che $\{f(v_{p+1}), \cdots, f(v_n)\}$ è una bse di $Im(f)$.

Osservazione : Si noti che nell'enunciato del teorema non si è supposto che W è di dimensione finita.

Proposizione : Siano $f : \mathbb{V} \to W$ e $g : W \to U$ due applicazioni lineari. Allora la composizione

$$\begin{aligned} g \circ f : V &\longrightarrow U \\ v &\longmapsto g \circ f(v) := g(f(v)) \end{aligned}$$

dim: per esercizio

$\forall v_1, v_2 \in \mathbb{V}, \forall \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{K}$

$g \circ f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = (\text{da mostrare}) \lambda g \circ f(v_1) + \lambda_2 g \circ f(v_2)$

Esempio :

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$	$g : R^2 \to$
$(x, y, z) \mapsto (x + z, 2x + y)$	$(x, y) \mapsto$ incompleto

Richiami :

Sia $f : \mathbb{V} \to W$ un'applicazione lineare.+

- f è suriettiva se $Im(f) = W \Leftrightarrow rg(f) = dim(W)$
- f è iniettiva se $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ tali che
  $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$.
- f è un isomorfismo se f è biettiva, cioè se f è iniettiva e suriettiva.
  Se f è un isomorfismo allora esiste $f^{-1} : W \to \mathbb{V}$ tale che
  $f \circ f^{-1} = 1_W \qquad e \qquad f^{-1} \circ f = 1_{\mathbb{V}}$
  È possibile mostrare che f^{-1} è anch'essa un'applicazione lineare biettiva, quindi un isomorfismo.

Esempio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$

- f è suriettiva?
  Siano $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tali che
  $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow (x_1{+}y_1, x_1{-}y_1) = (x_2{+}y_2, x_2{-}y_2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 2x_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases} \Rightarrow$
  $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Rightarrow v_1, v_2$
- f è suriettiva?
  $Im(f) = f(R^2) =< f(1,0), f(0,1) >=< (1,1), (1,-1) >= \mathbb{R}^2$
  $rg(f) = dim(Im(f)) = 2$
  Quindi f è suriettiva

Quindi f è un isomorfismo e quindi esiste l'applicazione lineare inversa
$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: (disegno con gli insiemi (tikz))
Sia $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ e sia $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tale che
$f(x,y) = (x', y') \Rightarrow (x{+}y, x{-}y) = (x', y') \Rightarrow \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' + y' = 2x \\ y' = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' + y' = 2x \\ y' = x - y' = \frac{x'+y'}{2} - y' = \frac{x'-y'}{2} \end{cases}$
$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x', y') \mapsto (\frac{x'+y'}{2}, \frac{x'-y'}{2})$
Sia $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$f^{-1}(f(x,y)) = f^{-1}(x+y, x-y) = (\frac{x+y+x-y}{2}, \frac{x+y(x-y)}{2}) = (x,y) \Rightarrow f^{-1} \circ f = f_{\mathbb{R}^2}$.

Proposizione : Un'applicazione lineare $f : \mathbb{V} \to W$ è iniettiva se e solo se $Ker(f) = (0_{\mathbb{V}})$.
Nell'esempio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$
$Ker(f) = \{(x,y) : f(x,y) = (0,0)\} = \{(x,y) : (x+y, x-y) = (0,0)\} = \{(x,y) : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \} =$
$\{(0,0)\} \Rightarrow f$ è iniettiva
<u>dim</u>

$\Rightarrow$) Sia $f : \mathbb{V} \to W$ è iniettiva.
$0_{\mathbb{V}} \in Ker(f)$ poichè $f(0_{\mathbb{V}}) = 0_W$.
Sia $v \in Ker(f) \Rightarrow f(\underline{v}) = 0_W = f(0_{\mathbb{V}}) \Rightarrow v = 0_{\mathbb{V}}$.
Quindi $Ker(f) = \{0_{\mathbb{V}}\}$

$\Leftarrow$) Supponiamo $Ker(f) = \{0_{\mathbb{V}}\}$.
Siano $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ tali che $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow f(v_1) - f(v_2) = 0_W \Rightarrow v_1 - v_2 \in Ker(f) = \{0_{\mathbb{V}}\} \Rightarrow$ $v_1 - v_2 = 0_{\mathbb{V}} \Rightarrow v_1 = v_2$
Quindi f è iniettiva.

Corollario (del teorema del rango)
Siano $\mathbb{V}$ e W due spazi vettoriali tali che $dim(\mathbb{V}) = dim(W)$.
Sia $f : \mathbb{V} \to W$ un'applicazione lineare. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- f è iniettiva
- f è suriettiva
- f è un isomorfismo

<u>dim</u>

f è iniettiva $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0_{\mathbb{V}}\} \Leftrightarrow dim(Ker(f)) = 0 \xLeftrightarrow{\text{Teorema del rango}} rg(f) = dim(W) \Leftrightarrow f$ è suriettiva.

Osservazione $f : \mathbb{V} \to W$

- se $dim(\mathbb{V}) > dim(W) \Rightarrow f$ non è iniettiva
  $dim(Ker(f)) = dim(\mathbb{V}) - rg(f) > dim(W) - rg(f) \geq 0 \Rightarrow dim(Ker(f)) \geq 1$
- se $dim(\mathbb{V}) < dim(W) \Rightarrow f$ non è suriettiva

Matrici associate alle applicazioni lineari $\mathbb{V}, dim(V) = n, B = \{v_1, \cdots, v_n\}$base di $\mathbb{V}$
$W, dim(W) = m, B'\{w_1, \cdots, w_m\}$ base di W
$f : \mathbb{V} \to W$ un'applicazione lineare.
$f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m$
$\vdots$
$f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m$
$a_{ij} \in \mathbb{K}$

<u>**Def:**</u> Chiamiamo la matrice di $f : \mathbb{V} \to W$ nelle basi $B = \{v_1, \cdots, v_n\}, B'w_1, \cdots, w_m$ una matrice incompleto

$f(v_1), \cdots, f(v_n)$ nella base di incompleto

esempio mancante INCOMPLETISSIMO

18 11/05/22

$\mathbb{V},\ B = \{v_1, \cdots, v_n\}$
$W,\ B' = \{w_1, \cdots, w_m\}$
$f : \mathbb{V} \to W$ applicazione lineare
$f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \cdots + a_{1m}w_m$
$\vdots$
$f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m$

$$M_{B'B}(f) = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m 1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Esempio:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, -x + 5y - 7z)$
$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ base di $\mathbb{R}^3$
$B' = \{(1,1), (1,-1)\}$ base di $\mathbb{R}^2$
$\mathcal{M}_{B'B}(f)$
$f(1,0,0) = (1,-1) = 0 \cdot (1,1) + 1 \cdot (1,-1)$
$f(0,1,0) = (2,5) = \frac{7}{2}(1,1) - \frac{3}{2}(1,-1)$
$f(0,0,1) = (3,-7) = -2(1,1) + 5(1,-1)$

$$a(1,1) + b(1,-1) = (2,5) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$a(1,1) + b(1,-1) = (3,-7) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \end{cases}$$

$$\mathcal{M}_{B'B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{2} & -2 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

$v = (1,-2,-1) \in \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{M}_{B'B}(f) \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{2} & -2 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \left(\text{incompleto} \right)$$

Calcolo dell'immagine di un vettore

Proposizione : $\mathbb{V}$ con base $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$
W con base $B' = \{w_1, \cdots, w_m\}$
$f : \mathbb{V} \to W$ applicazione lineare

Allora per ogni $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ si ha $f(v) = y_1 w_1 + \cdots + y_m w_m$ dove $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{B'B}(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\mathbb{V}$ con base $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$
W con base $B' = \{w_1, \cdots, w_m\}$
U con base $B'' = \{u_1, \cdots, u_p\}$
$f : \mathbb{V} \to W, g : W \to U$ applicazione lineare
$\mathcal{M}_{B'B}(f), \qquad M_{B''B'}(g)$
$v \in \mathbb{V}, v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$
$f(v) \in W, f(v) = y_1 w_1 + \cdots + g_m w_m$ dove

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{B'B}(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$g(f(v) \in W) \in U, g(f(v)) = z_1 u_1 + \cdots + z_p u_p$ dove

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{B''B'}(g) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{B''B'}(g) \mathcal{M}_{B'B}(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ma quindi
$\mathcal{M}_{B''B}(g \circ f) = \mathcal{M}_{B''B'}(g) \mathcal{M}_{B'B}(f)$
La matrice del cambiamento di coordinate

$\mathbb{V}, B = \{v_1, \cdots, v_n\}, B' = \{v_1', \cdots, v_n'\}$ due basi
$idv : \mathbb{V}^B \to V^{B'}$
$v \mapsto v'$
$\mathcal{M}_{B'B}(idv)$ è detta matrice del cambiamento di coordinate dalla base B alla base B'
$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = y_1 v_1' + \cdots + y_n v_n'$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{B'B}(idv) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Inoltre abbiamo:
$\mathcal{M}_{BB'}(idv)\mathcal{M}_{B'B}(idv) = \mathcal{M}_{BB}(idv) = I_n \Leftarrow idv(v_1) = 1v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n; idv(v_2) = 0v_1 + 1v_2 + \cdots + 0v_n$
$\Rightarrow \mathcal{M}_{BB'}(idv) = (\mathcal{M}_{B'B}(idv))^{-1}$

Esempio:

$V = \mathbb{R}^3$
$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$
$B' = \{(1,-1,0), (0,-2,-1), (1,1,2)\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -4 + 1 + 1 = -2$$

$$\mathcal{M}_{BB'}(idv) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$idv(1,-1,0) = (1,-1,0) = 1(1,0,0) + (-1)(0,1,0) + 0(0,0,1)$

$$\mathcal{M}_{B'B}(idv) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(1,0,0) = a_1(1,-1,0) + b_1(0,-2,-1) + c_1(1,1,2)$
$(0,1,0) = a_2(1,-1,0) + b_2(0,-2,-1) + c_2(1,1,2)$
$(0,0,1) = a_3(1,-1,0) + b_3(0,-2,-1) + c_3(1,1,2)$
Ci concentriamo ora al caso degli endomorfismi:

Def: Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale.
Un endomorfismo o un operatore lineare di $\mathbb{V}$ è un'applicazione lineare
$f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$
L'insieme degli endomorfismi di $\mathbb{V}$ si denota $End(\mathbb{V})$.

Sia $f \in End(\mathbb{V})$ e sia $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base di $\mathbb{V}$. Allora
$\mathcal{M}_B(f) := M_{BB}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
Sia B' un'altra base di $\mathbb{V}$ allora
$\mathcal{M}_{B'}(f)$

$$\begin{tikzcd} {}^{B}V \arrow[r] & V^{B} \arrow[d] \\ & \text{incompleto} \\ & {}^{}B \arrow[d] \\ & {} \end{tikzcd}$$

$det(\mathcal{M}_{B'}(f)) = det(\mathcal{M}_{B'B}(idv)M_{B}(f)\mathcal{M}_{BB'}(idv)) = det(\mathcal{M}_{B'B}(idv))det(\mathcal{M}_{B}(f))det(\mathcal{M}_{BB'}(f)) = \frac{1}{det(\mathcal{M}_{BB'}(idv))} \cdot det(\mathcal{M}_{B}(f)) \cdot det(\mathcal{M}_{BB'}(idv))$

Partiamo da un esempio

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$B = \{v_1 = (1,1), v_2 = (1,-1)\}$

$\mathcal{M}_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, matrice diagonale

$f(v_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2v_1$

$f(v_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -v_2$

$f(v_1 + v_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2v_1 - v_2$

disegno geometrico con vettori

Autovalore

Autovettori

Autospazio

Operatore diagonale

Def: Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$
Un endomorfismo $f \in End(\mathbb{V})$ si dice diagonalizzabile se esiste una base $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ di $\mathbb{V}$ tale che $\mathcal{M}_B(f)$ sia una matrice diagonale, cioè della forma
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i \in \mathbb{K}$
Se ciò avviene B è detta una base diagonalizzante di f e $\forall v_i \in B$ si ha
$f(v_i) = \lambda_i v_i$
λ_i autovalore, v_i autovettore

Def: Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale e sia $f \in End(\mathbb{V})$.
Un vettore $v \in \mathbb{V}$ si dice un autovettore di f se $v \neq 0_{\mathbb{V}}$ e se $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tale che $f(v) = \lambda v$
λ è detto autovalore di f relativo all'autovettore v
Il sottoinsieme di $\mathbb{K}$ costituito dagli autovalori di f è detto spettro di f.

Esempio:

- $f = idv \in End(\mathbb{V}), dim(\mathbb{V}) = n$.
  Per ogni base B di $\mathbb{V}$
  $\mathcal{M}_B = I_n \Rightarrow idv$ è diagonalizzabile.
  $\forall v \in \mathbb{V}, id(v) = v = 1 \cdot v$
  Quindi ogni $v \in \mathbb{V} \backslash \{0_{\mathbb{V}}\}$ è un autovettore di idv di autovalore 1.

- incompleto

19 13/05/22

Def: Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.
Sia $f \in End(\mathbb{V})$ un endomorfismo. Un vettore $v \in \mathbb{V}$ si dice autovettore se $v \neq 0_{\mathbb{V}}$ e se $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tale che $f(v) = \lambda v$.
Lo scalare λ si dice autovalore di f relativo all'autovettore v.
Il sottoinsieme di $\mathbb{K}$ costituito dagli autovalori di f è detto spettro di f.
L'endomorfismo f si dice diagonalizzabile se possiede una base $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ di autovettori, cioè se $\mathcal{M}_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$
Una tale base si dice base diagonale.

Proposizione : Siano $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ due autovettori relativi allo stesso autovalore λ per endomorfismo $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$.
Siano $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$ tali che $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 \neq 0_{\mathbb{V}}$.
Allora $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$ è un autovettore di autovalore λ.
dim
Mostriamo che $f(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \lambda(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2)$.
$f(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \mu_1 f(v_1) + \mu_2 f(v_2) = \mu_1 \lambda v_1 + \mu_2 \lambda v_2 = \lambda(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2)$ $\square$

Def: L'insieme
$\mathbb{V}_\lambda := \{v \in \mathbb{V} : v \text{ è un autovettore di } f \text{con autovalore} \lambda\} \cup \{0_{\mathbb{V}}\}$
è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}$ detto autospazio relativo all'autovalore λ.

Proposizione : Se $v_1, \cdots, v_p \in \mathbb{V}$ sono autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ e se questi λ_i sono a due a due distinti, allora $v_1, \cdots, v_p$ sono linearmente indipendenti
Dim: sulle note della prof (per induzione)
Obiettivo: Dato $f \in End(\mathbb{V})$, determinare se f è diagonalizzabile e, in tal caso, determinare una base diagonalizzante, ossia una base di autovettori.
Problema: Come determiniamo lo spettro di f?
Sia $f \in End(\mathbb{V})$. Sia λ un autovalore di f.
Allora $\exists v \neq 0_{\mathbb{V}}$ tale che
$f(v) = \lambda v \Leftrightarrow f(v) - \lambda v = 0_{\mathbb{V}} \Leftrightarrow (f - \lambda idv) \to f - \lambda idv : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$
$v \mapsto (f - \lambda idv)(v) := f(v) - \lambda v$ è un'applicazione lineare.

$\Leftrightarrow$ teorema del rango$rg(f - \lambda idv) < n$
$\Leftrightarrow det(f - \lambda idv) = 07$
Sia B una base di $\mathbb{V}$. Allora:
$det(f - \lambda idv) = 0 \Leftrightarrow det(\mathcal{M}_B(f - \lambda idv)) = 0 \Leftrightarrow def(\mathcal{M}_B(d) - \lambda I_n) = 0$

Def: Sia $A = (a_i j) \in \mathcal{M}_n(K)$ e sia T un'indeterminata.
Il determinante $P_A(T) := det(A - TI_n) = \begin{pmatrix} a_1 1 & a_1 2 & \cdots & a_1 n \\ a_2 1 & a_2 2 & \cdots & a_2 n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n 1 & a_n 2 & \cdots & a_n n \end{pmatrix}$ è un polinomio di grado n in T detto polinomio caratteristico di A.
Siano $f \in End(\mathbb{V})$, B una base di $\mathbb{V}$ e $A = M_B(f)$, allora $P_A(T)$ è il polinomio caratteristico di f e si denota $P_f(T)$

Osservazione : Il polinomio caratteristico di un endomorfismo è indipendente dalla base scelta

Proposizione : Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale di dim n e sia $f \in End(\mathbb{V})$.
Allora λ è un autovalore di $f \Leftrightarrow \lambda$ è una radice di $P_f(T), (P_f(\lambda) = 0)$.

Osservazione : $P_f(T) \in \mathbb{K}[T]$ di grado n.
Quindi $P_f(T)$ ha al più n radici in $\mathbb{K}$.
Ne segue che f ha al più n autovalori distinti.

Ricorda :

- λ è un autovalore di $f \in End(\mathbb{V}) \Leftrightarrow P_f(T) = 0$.
- $\mathbb{V}_\lambda(f) = Ker(f - \lambda idv)$
  - $v = 0_\mathbb{V}$
  - $v : f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (f - \lambda idv)(v) = 0_\mathbb{V}$

Esempio:

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \mapsto (y - z, -x + 2y, x - y + 2z)$
B: base canonica di $\mathbb{R}^3$:

- scrivere $M_B(f)$
- calcolare il polinomio caratteristico $P_f(T)$
- trovare le radici di $P_f(T)$ in $\mathbb{R}^3$

$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$P_f(T) = \begin{pmatrix} -T & 1 & -1 \\ -1 & 2-T & -1 \\ 1 & -1 & 2-T \end{pmatrix}$ incompleto

Def: Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}, dim(\mathbb{V}) = n$
Sia $f \in End(\mathbb{V})$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore di f.
Allora $dim(\mathbb{V}_\lambda(f))$ è detta molteplicità geometrica di λ per f.
La molteplicità algebrica di λ per f è la molteplicità di λ come radice di $P_f(T)$.
(molteplicità geometria ≤ molteplicità algebrica)

Teorema $\mathbb{V}, dim(\mathbb{V}) = n, f \in End(\mathbb{V}), Spec(f) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$ (insieme degli autovalori)
Allora:
$dim(V_{\lambda_1}(f)) + \cdots + dim(V_{\lambda_k}(f)) \leq n$
e l'uguagliansa sussiste se e solo se f è diagonalizzabile.
In tal caso:
$V = V_{\lambda_1}(f \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}(f))$.
Ne segue che una base diagonalizzante per f è data dall'unione delle basi di ciascun autospazio.

Corollario : Se $dim(V) = n$ e $f \in End(V)$ possiede n autovalori, allora f è diagonalizzabile.
esempio mancante

20 18/05/22

incompleto

Fine

Ultimamente gli appunti sono pieni di grafici, mi è difficile prendere appunti, quindi lascio la scrittura di questo file al me del futuro che scriverà direttamente ricopiando gli appunti della professoressa. Inoltre sarebbe necessaria una revisione approfondita di tutto il file