1. Loi de khi-carré (p.217)

La loi khi-carré est une autre loi continue. La fonction de densité est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{v}{2})2^{\frac{v}{2}}} x^{\frac{v}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \quad \text{où } x > 0$$

où v est un entier positif appelé nombre de degrés de liberté. On peut montrer que :

$$\mathrm{E}(X) = v \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = 2v$$

On écrit $X \sim \chi^2_v$ pour signifier que X suit une loi khi-carré à v degrés de liberté.

Théorème 1 Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Alors $Z^2 \sim \chi^2_1$.

Théorème 2 Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que $X_i \sim \chi^2_{v_i} \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$. Alors :

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n \sim \chi^2_v \quad \text{où } v = \sum_{i=1}^{n} v_i$$

Théorème 3 Soit un échantillon $X_1, X_2, ..., X_n$ tiré d'une population normale de moyenne μ et de variance σ^2. Alors :

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$$

2. Loi de Student (p.220)

La loi de Student est une autre loi continue. Soit W et V deux variables aléatoires indépendantes où $W \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $V \sim \chi^2_v$. Alors la variable :

$$T = \frac{W}{\sqrt{\frac{V}{v}}} \sim t_v$$

On peut montrer que : $\mathrm{E}(T) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(T) = \frac{v}{v-2} \quad \text{si } v > 2$

3. Approximation de la loi binomiale par la loi normale (p.164)

Par le théorème limite central et le fait que X représente la somme des résultats d'épreuves indépendantes de Bernoulli (de sorte $\mathrm{E}(X) = np$ et $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$), si n est grand :

$$P(X = x) \approx \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Cette approximation est assez juste tant que $np > 5$ et $p \leq \frac{1}{2}$ ou tant que $n(1-p) > 5$ pour $p > \frac{1}{2}$. La loi binomiale étant discrète alors que la loi normale est continue, il est courant d'effectuer une correction pour la continuité. La façon usuelle de procéder consiste à soit ajouter ou soustraire une demie-unité à l'entier.

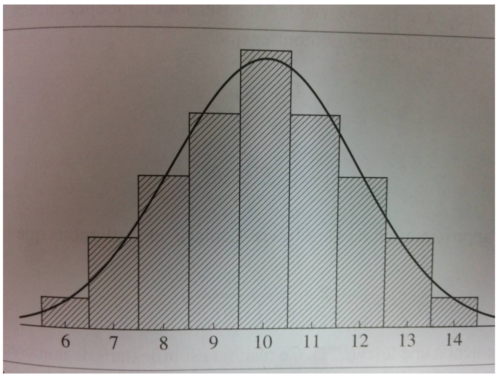

FIGURE 1 – Approximation d'une loi binomiale $\mathrm{B}(20, \frac{1}{2})$ par une loi normale.

4. Loi de Fisher (p.222)

Soit W et Y des variables indépendantes suivant des lois de khi-carré ayant respectivement u et v degrés de libertés. Alors :

$$F = \frac{W/u}{Y/v} \sim F_{u,v}$$

F suit une loi de Fisher avec u degrés au numérateur et v degrés au dénominateur.