3.1 Un robot insère 10 pièces à usiner entre les mors d'un mandrin. Toute pièce mal insérée se détache du mandrin. Lorsqu'on se retrouve avec un emplacement libre, moins de 10 pièces sont usinées au cours du cycle. Soit X le nombre d'emplacements libres. Une étude du rendement antérieur du robot a permis d'obtenir les résultats suivants :

$$p_X(x) = \begin{cases} 0{,}6 & \text{si } x = 0 \\ 0{,}3 & \text{si } x = 1 \\ 0{,}1 & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Sachant que la perte attribuable aux emplacements libres se traduit par $Y = 20X^2$, déterminez :

a) $p_Y(y)$, soit la fonction de masse de la perte ;

b) $E(Y)$, la perte moyenne théorique ;

c) $V(Y)$, la variance de la perte.

3.2 La teneur en magnésium d'un alliage est une variable aléatoire de fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{18} & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cet alliage permet de réaliser un profit de $P = 10 + 2X$.

a) Déterminez la fonction de densité de P.

b) Quelle est l'espérance du profit ?

c) Sachant que la variance de la teneur en magnésium vaut 2, quelle est la variance du profit ?

3.3 Un fabricant garantit pendant un an le remplacement de l'écran plasma de ses téléviseurs en cas de défaillance. Il envisage la durée de fonctionnement avant défaillance (en années) comme une variable aléatoire T dont la fonction de densité est

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}e^{-t/4} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Quel pourcentage de ses téléviseurs devra-t-il réparer ?

b) Calculez le bénéfice moyen (par appareil) du fabricant si chaque appareil vendu lui rapporte 200 \$ et si chaque écran remplacé lui coûte 200 \$.

3.4 Une entreprise compte soumissionner un travail. Le nombre de jours requis pour effectuer ce travail est une variable X ayant la fonction de masse

$$p_X(x) = \begin{cases} 0{,}1 & \text{si } x = 10 \\ 0{,}3 & \text{si } x = 11 \\ 0{,}4 & \text{si } x = 12 \\ 0{,}1 & \text{si } x = 13 \\ 0{,}1 & \text{si } x = 14. \end{cases}$$

L'entreprise réalisera un bénéfice de $Y = 2\,000(13 - X)$.

a) Quelle est la probabilité que l'entreprise enregistre un bénéfice positif ?

b) Déterminez la fonction de masse de Y.

c) Déterminez $E(X)$ et $E(Y)$.

d) Sachant que $E(X^2) = 140{,}4$ (jours)^2, déterminez $V(X)$ et $V(Y)$.

3.5 Soit X le nombre de véhicules vendus par un concessionnaire automobile dans une journée. Supposons que la fonction de masse de X soit donnée par

$$p_X(x) \begin{cases} \dfrac{1}{24} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } x = 2 \\ k & \text{si } x = 3 \\ \dfrac{1}{24} & \text{si } x = 4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Trouvez la valeur de la constante k pour que cette fonction $p_X(X)$ soit une fonction de masse.

b) Ce concessionnaire réalisera un bénéfice $Y = 3\,600X - 600$. Déterminez la fonction de masse de Y.

c) Quel est le bénéfice le plus probable pour une journée donnée ?

d) On sait que $E(X) = 19/12$ et que $V(X) = 107/144$. À partir de ces données, déduisez la valeur moyenne du bénéfice quotidien et sa variance, sans passer par la fonction de masse de Y.

e) Sur une période d'un an, environ combien de journées auront donné lieu à une perte d'argent ? Considérez que le concessionnaire est ouvert tous les jours sauf à l'occasion de cinq congés fériés.

f) Sur une période d'un an, quel est le bénéfice moyen auquel ce concessionnaire peut s'attendre ?

3.6 Soit une variable aléatoire continue X et sa fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminez la fonction de densité de $Z = X^2$.

3.7 Au moment de créer un générateur de chiffres aléatoires, on doit s'assurer que chaque chiffre D_i obéit à la loi uniforme discrète, c'est-à-dire

$$p_{D_i}(d) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & \text{si } d = 0, 1, 2, 3, \ldots, 9 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Sans faire de calcul, déterminez $E(D_i)$.

b) Sachant que $Y = |D_i - 4|$, déterminez $p_Y(y)$, $E(Y)$ et $V(Y)$.

3.8 Le prix de gros de l'essence varie selon la concentration d'un certain additif. Si la variable aléatoire A représente cette concentration en pourcentage, alors $0 \leq A \leq 1$. Lorsque la valeur de A est inférieure à 0,70, l'essence a un faible indice d'octane et se vend 92 ¢ le litre. Lorsqu'elle est égale ou supérieure à 0,70, l'essence a un indice d'octane élevé et se vend 98 ¢ le litre. Calculez le revenu moyen par litre, sachant que $f_A(a) = 1$ pour $0 \leq a \leq 1$ et que $f_A(a) = 0$ ailleurs.

3.9 Soit une variable aléatoire X et sa fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Déterminez la fonction de densité de $Y = 2X^2$.

b) Déterminez la fonction de densité de $V = X^{1/2}$.

c) Déterminez la fonction de densité de $U = \ln X$.

3.10 Une antenne pivotante à deux faces capte des signaux. Soit X la position angulaire (l'angle) de l'antenne au moment où celle-ci capte un signal. On peut supposer qu'il s'agit d'une variable aléatoire ayant la fonction de densité définie ci-après (bien que ce soit en fait le signal qui rende ce phénomène aléatoire).

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & \text{si } 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'antenne peut capter un signal si $Y > y_0$, où $Y = \tan X$. Ainsi, à titre d'exemple, $y_0 = 1$ correspond à $\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{2}$ et à $\frac{5\pi}{4} < X < \frac{3\pi}{2}$. Déterminez la fonction de densité de Y.

3.11 On considère la demande d'antigel pour une saison comme une variable aléatoire uniforme X de fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} 10^{-6} & \text{si } 10^6 \leq x \leq 2 \cdot 10^6 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où X est exprimée en litres. On sait que chaque litre vendu à l'automne rapporte 50 ¢ au fabricant, et que celui-ci doit conserver tout stock excédentaire jusqu'à l'année suivante, ce qui lui coûte 25 ¢ le litre.

a) Définissez la fonction de perte $L(X, s)$ en vous inspirant de l'exemple 3.11.

b) On veut déterminer le niveau optimal des stocks pour un automne donné. Quelle fonction faudra-t-il minimiser ?

c) Déterminez le niveau optimal des stocks pour un automne donné.

3.12 L'acidité d'un certain produit, mesurée selon une échelle arbitraire, se traduit par

$$A = (3 + 0{,}05G)^2,$$

où G représente la quantité d'un ingrédient donné dont l'espérance est de 8/3 et la variance, de 8/9. Évaluez $E(A)$.

3.13 Soit une variable X de fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Déterminez la fonction de densité de $Y = 4 - x^2$.

b) Déterminez la fonction de densité de $W = e^x$.

3.14 Supposez que la variable aléatoire X a pour fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminez la fonction de densité de $Y = \frac{3}{(1+x)^2}$.

3.15 Un marchand de véhicules d'occasion peut vendre 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 automobiles en une semaine, chacun de ces résultats ayant la même probabilité. Soit X le nombre d'automobiles d'occasion vendues en une semaine.

a) Déterminez la fonction de masse de X.

b) Calculez $E(X)$ et $V(X)$.

3.16 La concentration d'un certain réactif à l'intérieur d'un processus chimique est une variable aléatoire de fonction de densité

$$f_R(r) = \begin{cases} 6r\,(1 - r) & \text{si } 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le produit final obtenu permet de réaliser un profit de $P = 1\,\$ + 3R\,\$$.

a) Calculez la valeur moyenne de P.

b) Trouvez la fonction de densité de P.

3.17 Le temps requis (en heures) pour réparer une certaine fraiseuse à commande électronique est une variable aléatoire de fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Évaluez $E(X)$ et $V(X)$.

3.18 Soit une barre circulaire de diamètre X. On sait que $E(X) = 2$ cm et que $V(X) = 25 \times 10^{-3}$ cm^2. Un outil de tranchage découpe cette barre en rondelles d'une épaisseur de 1 cm, cette valeur étant constante. Déterminez le volume moyen de chaque rondelle.

3.19 Une variable aléatoire X a comme fonction de masse

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1/4 & \text{si } x = 1 \\ 1/8 & \text{si } x = 2 \\ 1/8 & \text{si } x = 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Déterminez la moyenne et la variance de X.

b) Sachant que $Y = (X - 2)^2$, déterminez la fonction de répartition de Y.

3.20 Un procédé est utilisé pour produire en série un type de pièce dont le diamètre est une caractéristique importante. Une telle pièce est jugée conforme si son diamètre se situe dans l'intervalle $75 \pm 0{,}8$ mm. Un examen de la production obtenue avec ce procédé montre que le diamètre D des pièces est de la forme

$$D = 75 + X,$$

où X (en millimètres) est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{(1+x)^2}{2} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 - \dfrac{(1-x)^2}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Calculez l'espérance et l'écart type du diamètre D.

b) Calculez le pourcentage de pièces non conformes de la production obtenue avec ce procédé.

c) Supposons que la production d'une pièce de ce type coûte 100 \$. Chaque pièce produite est testée, et seules les pièces conformes sont vendues à raison de 160 \$ l'unité. De plus, toute pièce dont le diamètre dépasse 75,8 mm est réusinée (pour devenir conforme) à un coût supplémentaire de 40 \$. Toutefois, la pièce est mise au rebut (jetée) si son diamètre est inférieur à 74,2 mm. Quelle est la moyenne et l'écart type du profit réalisé pour une pièce de ce type ?

d) $P(X > 1) = 5/6$, $P(1 < X < 2{,}5) = 3/4$, $P(X \le 2 \mid X > 1) = 3/5$

e) $\mu = 5/3$ et $\sigma = \sqrt{\frac{7}{18}}$

2.28 $k = 2$, et l'intervalle est $[14 - 2\sqrt{2}\,,\ 14 + 2\sqrt{2}]$.

2.29 $k = 10$, et l'intervalle est $[2 - 10\sqrt{0{,}4},\ 2 + 10\sqrt{0{,}4}]$, donc 8,325 jours avant.

Chapitre 3

3.1 **a)**

y	$p_Y(y)$
0	0,6
20	0,3
80	0,1

b) $E(Y) = 14$ **c)** $V(Y) = 564$

3.2 **a)** $f_P(p) = \begin{cases} \dfrac{p-10}{72} & \text{si } \ 10 \le p \le 22 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ **b)** $E(P) = 18$ **c)** $V(P) = 8$

3.3 **a)** $P(T < 1) = 0{,}221$ **b)** 155,80 $

3.4 **a)** 0,8 **b)**

y	$p_Y(y)$
6000	0,1
4000	0,3
2000	0,4
0	0,1
−2000	0,1

c) $E(X) = 11{,}8$ jours et $E(Y) = 2400\,\$$ **d)** $V(X) = 1{,}16$ jours^2 et $V(Y) = 4640000\,\$^2$

3.5 **a)** $k = 1/12$ **b)**

y	−600	3000	6600	10200	13800
$p_Y(y)$	1/24	1/2	1/3	1/12	1/24

c) 3000 $ **d)** $E(Y) = 5100\,\$$ et $V(Y) = 9630000\,\$^2$ **e)** Environ 15 journées
f) 1836000 $

3.6 $f_Z(z) = \begin{cases} e^{-z} & \text{si } z \ge 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3.7 **a)** $E(D_i) = 4{,}5$ (par symétrie de la fonction de masse) **b)**

y	$p_Y(y)$
0	0,1
1	0,2
2	0,2
3	0,2
4	0,2
5	0,1
autre	0

$E(Y) = 2{,}5$ et $V(Y) = 2{,}25$

3.8 93,8 ¢ le litre

3.9 **a)** $f_y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{y}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \bullet e^{-\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}, & y > 0, \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$ **b)** $f_V(v) = \begin{cases} 2ve^{-v^2}, & v > 0 \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$

c) $f_U(u) = e^{-(e^u - u)}$ pour tout u

3.10 $f_Y(y) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+y^2}\right)$ pour tout y

3.11 **a)** $L(X,s) = \begin{cases} 0{,}5(X-s) & \text{si } X > s \\ 0{,}25(s-X) & \text{si } X \le s \end{cases}$

b) $E[L(X,s)] = \int_{10^6}^{s} 0{,}25\ (s-x)\,10^{-6}\ dx + \int_{s}^{2\times 10^6} 0{,}50\ (x-s)\,10^{-6}\ dx = \frac{3}{8}10^{-6}s^2 - \frac{5}{4}s + 1125\times 10^3$

c) $\frac{5}{3}10^6$ litres

3.12 $E(A) = 9{,}82$

3.13 **a)** $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(4-y)^{-\frac{1}{2}}, 0 \le y \le 3, \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$

b) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, e \le y \le e^2, \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$

3.14 $f_Y(y) = \begin{cases} e^{1-\sqrt{3/y}}\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{y^3}} & \text{si} \quad 0 \le y \le 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3.15 **a)** $p_X(x) = \begin{cases} 1/6 & \text{si} \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ **b)** $E(X) = 7/2$, $V(X) = 35/12$

3.16 **a)** 2,50$ **b)** $f_P(p) = \begin{cases} 6\left(\frac{p-1}{3}\right)\left(1-\frac{p-1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) & \text{si} \quad 1 \le p \le 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3.17 $E(X) = 1$, $V(X) = \frac{1}{2}$

3.18 $E(V) = E\left(\frac{\pi \cdot X^2}{4} \cdot 1\right) = 3{,}161 \text{ cm}^3$

3.19 **a)** $E(X) = 7/8$, $V(X) = 71/64$ **b)** $f_Y(y) = \begin{cases} 0, y < 0, \\ \frac{1}{8}, 0 \le y < 1, \\ \frac{4}{8}, 1 \le y < 4, \\ 1, 4 < y \end{cases}$

3.20 **a)** $E(D) = 75$ mm, $\sigma_D = \frac{\sqrt{6}}{6} \approx 0{,}408$ mm **b)** 0,04, soit 4 %

c) Soit Y le profit réalisé pour une pièce $E(Y) = 56\$$, $\sigma_Y = 22{,}98\$$

Chapitre 4

4.1 **a)** $p(1, 1) = 3/50$ **b)** 5/50 **c)** 9/50

d)

x	0	1	2	3	4	5
$p_X(x)$	27/50	11/50	6/50	3/50	2/50	1/50