

## 1. Fonction de densité de probabilité (p.47)

**Théorème 1** La fonction de densité de probabilité de la variable continue  $x$ , notée  $f_X(x)$ , est définie par :

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}[F_X(x)]$$

## 2. Loi uniforme (p.132)

**Théorème 2** Une variable aléatoire continue  $X$  est dite de *loi uniforme dans l'intervalle*  $[\alpha, \beta]$  si sa fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \text{si } a \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes réelles telles que  $\alpha < \beta$ . En abrégé, on écrit  $X \sim U(\alpha, \beta)$ .

**Théorème 3** Dans le cas général décrit précédemment, la moyenne et la variance de la loi uniforme sont :

$$E(X) = \frac{\beta + \alpha}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

## 3. Loi géométrique (p.115)

**Théorème 4** La variable aléatoire  $X$ , représentant le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir un premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes dont la probabilité du succès est  $p > 0$  est dite de *loi géométrique de paramètre  $p$* , et sa fonction

de masse est donnée par :

$$p(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & \text{si } x = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En abrégé, on écrit  $X \sim \text{Géométrique}(p)$ .

**Théorème 5** Soit  $X$  une variable aléatoire distribuée selon une loi géométrique de paramètre  $p > 0$ . Alors :

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

#### 4. Loi exponentielle (p.134, p.136)

**Théorème 6** La variable aléatoire continue  $X$  est dite de *loi exponentielle de paramètre*  $\lambda$  si sa fonction de densité est de la forme :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où le paramètre  $\lambda$  est un nombre réel positif. En abrégé, on écrit  $X \sim \text{Exp}(p)$ .

**Théorème 7** Soit  $X$  une variable aléatoire distribuée selon une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . Alors :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

#### 5. Changement de variable (p.66)

**Théorème 8** Soit  $X$  une variable aléatoire continue dont la fonction de densité  $f_X$  vérifie  $f_X(x) > 0$  avec  $a < x < b$ . Si  $y = H(x)$  définit une fonction continue strictement croissante

ou strictement décroissante de  $x$ , alors la variable aléatoire  $Y = H(X)$  a pour fonction de densité :

$$f_Y(y) = f_X(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

où  $x = H^{-1}(y)$ , sa valeur exprimée en fonction de  $y$ . Si la fonction  $H$  est croissante, alors  $f_Y(y) > 0$  et  $H(a) < y < H(b)$ . Si elle est décroissante, alors  $f_Y(y) > 0$  si  $H(b) < y < H(a)$ .

## Bonus : Changement de variables

**Théorème 9** Lorsque la densité jointe de  $n$  variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  est donnée et que l'on souhaite trouver la densité jointe de  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  où :

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad Y_2 = g_2(X_1, X_2, \dots, X_n), \dots, \quad Y_n = g_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

On assumera que les fonctions  $g_i$  ont des dérivées partielles continues et que le déterminant du Jacobien  $J(x_1, \dots, x_n) \neq 0$  sur tous les points  $(x_1, \dots, x_n)$  où :

$$J(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

De plus, on supposera que les équations  $y_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), y_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, y_n = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ont une solution unique, disons  $x_1 = h_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n = h_n(y_1, \dots, y_n)$ .

Sous ces hypothèses, la distribution jointe des variables aléatoires  $Y_i$  est donné par :

$$f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) = f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) |J(x_1, \dots, x_n)|^{-1}$$

où  $x_i = h_i(y_1, \dots, y_n)$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .