5.11 Exercices

Suggestion : Pour tous les exercices qui s'y prêtent, définissez clairement la variable aléatoire utilisée, la loi qui s'applique et la valeur des paramètres de celle-ci. Calculez ensuite la quantité demandée.

5.1 Soit une expérience formée de 4 épreuves de Bernoulli indépendantes ayant chacune une probabilité de succès de 70 %. Quelle est la fonction de masse de X, le nombre de succès ?

5.2 On planifie 6 missions spatiales indépendantes à destination de la Lune. Chacune a une probabilité de succès estimée à 0,95. Quelle est la probabilité qu'au moins 5 de ces missions soient couronnées de succès ?

5.3 La société XYZ a prévu envoyer un vendeur chez une douzaine de clients importants (qui ne se connaissent pas entre eux).

a) On estime à 0,5 la probabilité qu'un client rencontré passe une commande. Quelle est la probabilité que la société reçoive au moins 4 commandes à la suite de ces visites ?

b) Supposons que la société XYZ envoie son vendeur visiter des clients jusqu'à ce qu'il obtienne 3 commandes. Combien de clients en moyenne le vendeur devra-t-il rencontrer ? Quel est l'écart-type du nombre de clients à rencontrer ?

5.4 Une courtière en valeurs mobilières appelle chaque matin ses 20 plus gros clients. S'il y a 1 chance sur 5 que ce type d'appel donne lieu à une transaction, quelle est la probabilité que la courtière ait 2 transactions ou moins à effectuer en une matinée ? (On suppose que les décisions des clients sont indépendantes.)

5.5 Une chaîne de production de transistors génère en moyenne 2 % d'unités défectueuses. On y prélève aux 2 heures un échantillon aléatoire de 50 unités. Si cet échantillon renferme plus de 2 unités défectueuses, il faut interrompre la production. Déterminez la probabilité que ce plan d'échantillonnage engendre une interruption de la production.

5.6 On sait que 1 % des voyants de clignotants produits par un procédé donné sont défectueux. Supposez que cette valeur demeure constante et qu'on prélève 100 voyants au hasard. Quelle est la probabilité qu'il y ait au plus 2 clignotants défectueux dans l'échantillon ?

5.7 On veut transmettre un message électronique composé des chiffres 0 et 1. Les conditions imparfaites de transmission font en sorte qu'il y a une probabilité égale à 0,1 qu'un 0 soit changé en un 1 et qu'un 1 soit changé en un 0 lors de la réception, et ce, de façon indépendante pour chaque chiffre. Afin d'améliorer la qualité de la transmission, on propose de transmettre le bloc 00000 au lieu de 0 et le bloc 11111 au lieu de 1, et de traduire une majorité de 0 dans un bloc lors de la réception par 0 et une majorité de 1 par 1.

a) Quelle est la probabilité de recevoir une majorité de 1 si 00000 est transmis ?

b) Quelle est la probabilité de recevoir une majorité de 1 si 11111 est transmis ?

5.8 À un jeu avec un adversaire, on a une probabilité p de gagner, q de perdre et $1 - p - q$ de faire une partie nulle. Dans ce dernier cas, on détermine qui sera le gagnant par tirage au sort en lançant une pièce de monnaie. On joue une suite de parties indépendantes dans les mêmes conditions. Déterminez la loi des variables aléatoires suivantes :

a) le nombre de parties jusqu'à la première partie nulle ;

b) le nombre de parties jusqu'à la première partie qu'on gagne par tirage au sort ;

c) le nombre de parties jusqu'à la première partie qu'on gagne.

d) Supposons maintenant que $p = 2/3$ et $q = 1/3$. Calculez la probabilité de gagner pour la quatrième fois à la septième partie.

5.9 Une société aéronautique a construit 5 satellites de communication. Tout essai de lancement de ces satellites a une probabilité de succès de 0,95. Si l'on suppose des essais indépendants, quelle est la probabilité que le cinquième essai soit le premier à échouer ?

5.10 Un agent immobilier estime à 0,10 la probabilité qu'il vende une maison. Or, il doit rencontrer aujourd'hui 4 personnes. S'il réalise une vente à chacun de ses 3 premiers rendez-vous, quelle est la probabilité qu'il en aille autrement à son dernier rendez-vous ?

5.11 On compte effectuer en laboratoire 5 expériences identiques et indépendantes. Chacune de ces expériences n'a qu'une probabilité de succès p en raison de l'incidence importante des conditions ambiantes.

a) Déterminez, en fonction de p, la probabilité que la cinquième expérience soit la première à échouer.

b) Déterminez mathématiquement la valeur de p qui maximise la probabilité que la cinquième expérience soit la première à échouer.

5.12 La société XYZ a décidé de faire une tournée de clients possibles jusqu'à ce qu'elle décroche une commande. Or, la première visite coûte 10 000 $, et il faut débourser 4 000 $ pour chaque visite supplémentaire. On considère que les clients prennent des décisions indépendamment les uns des autres.

a) Quel est le coût le plus probable de cette opération ?

b) Quel est le coût moyen d'une vente si la probabilité de réaliser une vente à la suite de toute visite est de 0,10 ?

c) Devrait-on effectuer ces visites si le bénéfice prévu de chaque vente est de 25 000 $?

d) Si la société ne consacre que 100 000 $ au démarchage, quelle est la probabilité qu'elle épuise cette somme sans obtenir une seule commande ?

e) Quel est l'écart-type du coût de cette opération ?

5.13 La probabilité qu'une compagnie d'exploration pétrolière trouve du pétrole en creusant un puits dans une certaine région est de 0,8. Sachant que les forages s'effectuent de façon indépendante, déterminez la probabilité que la compagnie trouve du pétrole en procédant :

a) à 2 forages ou moins ;

b) à 3 forages ou moins.

5.14 Chaque jour du printemps, la probabilité qu'un orage survienne à Atlanta est de 0,05. On suppose que les occurrences sont indépendantes et que le printemps débute le 21 mars.

a) À quelle date en moyenne se produira le premier orage du printemps à Atlanta ?

b) Quelle est la probabilité que le premier orage se produise le 25 avril ?

c) Quelle est la probabilité que le troisième orage survienne le 1er mai ?

5.15 Chaque heure, un client potentiel se présente chez un concessionnaire automobile. Chaque fois, la vendeuse a 1 chance sur 5 de conclure une transaction. Cette employée décide de travailler jusqu'à ce qu'elle ait vendu 2 véhicules.

a) Quelle est la probabilité que la vendeuse ait à travailler exactement 8 heures ?

b) Si elle utilise la même tactique chaque jour, combien d'heures en moyenne travaillera-t-elle en une journée ?

5.16 On procède à des entrevues pour combler 2 postes vacants. La probabilité que toute personne rencontrée possède les qualités voulues et accepte un poste est de 0,8.

a) Quelle est la probabilité de devoir effectuer exactement 4 entrevues pour combler les 2 postes ?

b) Quelle est la probabilité de devoir effectuer moins de 4 entrevues ?

5.17 Soit une expérience dont la probabilité de succès est de 0,80. On compte refaire cette expérience jusqu'à ce qu'on l'ait réussie 5 fois.

a) Combien de fois en moyenne doit-on s'attendre à devoir effectuer l'expérience ?

b) Quelle est la variance du nombre d'exécutions ?

5.18 Une compagnie minière veut déterminer s'il est pertinent d'exploiter un site en particulier. Il faut 4 forages fructueux pour qu'un site soit choisi. Si la probabilité de découvrir le minerai est de 0,9 dans cette région, et que la compagnie peut se permettre 6 forages d'essais avant d'abandonner l'exploration, quelle est la probabilité que ce site soit sélectionné pour l'exploitation ?

5.19 Un lot de 25 téléviseurs doit subir un essai d'acceptation. On prélève 5 téléviseurs au hasard, sans remise, et on les vérifie. Si 2 téléviseurs ou moins connaissent une défaillance, on accepte le reste du lot. Dans le cas contraire, on refuse le lot. Supposez ici que le lot renferme 4 téléviseurs défectueux.

a) Quelle est la probabilité exacte qu'on accepte le lot ?

b) Quelle est la probabilité qu'on accepte le lot selon la loi binomiale de paramètre $p = \frac{4}{25}$?

c) Si l'on avait un lot de 100 téléviseurs au lieu de 25, la loi binomiale donnerait-elle encore une approximation satisfaisante ?

5.20 Une acheteuse reçoit des appareils de haute précision en lots de 25. Elle veut s'assurer de refuser 95 % du temps tout lot renfermant au moins 7 unités défectueuses. Si elle décide que la présence d'une seule unité défectueuse dans un échantillon est suffisante pour justifier le refus d'un lot, quelle devra être la taille de l'échantillon ?

5.21 On estime qu'en moyenne 25 véhicules traversent une intersection donnée en 1 heure. Supposez que le nombre de véhicules obéit à une loi de Poisson.

a) Déterminez la probabilité que 8 à 10 véhicules traversent cette intersection durant un intervalle quelconque de 1 heure.

b) Déterminez la moyenne et l'écart-type du nombre de véhicules qui traversent cette intersection en 24 heures si on considère que le trafic est constant.

5.22 Une centrale téléphonique reçoit, en 1 heure, un nombre d'appels obéissant à une loi de Poisson de moyenne 10. Or, le matériel en place peut traiter sans surcharge jusqu'à 20 appels. Quelle est la probabilité qu'une surcharge se produise durant 1 heure choisie au hasard ?

5.23 Le nombre de globules rouges par cellule de comptage de 4 mm^2 sur une lamelle de microscope obéit à une loi de Poisson de moyenne 28.

a) Déterminez la probabilité qu'on observe exactement 28 globules rouges dans 1 cellule de comptage.

b) Considérons 10 cellules de comptage indépendantes. Quelle est la probabilité qu'au moins 2 d'entre elles contiennent exactement 28 globules rouges ?

c) Déterminez la probabilité qu'on observe plus de 4 globules rouges sur une surface de 1 mm^2.

d) Si une lamelle contient 100 cellules de comptage remplies de sang, déterminez la moyenne et la variance du nombre de globules rouges par lamelle.

5.24 Soit X_t le nombre de véhicules qui traversent une intersection à l'intérieur d'un intervalle de temps $[0, t]$. Il s'agit d'une variable de Poisson de paramètre c. On a installé un compteur automatique pour dénombrer les véhicules qui traversent l'intersection. Toutefois, en raison d'une défectuosité de l'appareil, chaque véhicule a une probabilité p de ne pas être détecté. Soit Y_t le nombre de véhicules détectés à l'intérieur de l'intervalle $[0, t]$. Déterminez la fonction de masse de Y_t.

5.25 Une importante société d'assurance a découvert que 0,2 % de la population subit des blessures causées dans un certain type d'accident. Or, elle assure 15 000 personnes contre un tel accident. On considère que ces personnes sont indépendantes les unes des autres.

a) Quelle est la loi de probabilité du nombre de personnes à indemniser en une année ?

b) Quelle est la probabilité que la société reçoive 20 demandes d'indemnité l'année prochaine pour ce type d'accident ?

c) Quelle loi de probabilité pourrait être utilisée comme approximation de la loi déterminée en a) ?

d) Quelle est la valeur de la probabilité calculée en b) avec cette approximation ?

5.26 Un libraire reçoit chaque semaine 4 exemplaires d'un magazine. En moyenne, 3 clients se présentent par semaine à la recherche d'un exemplaire du magazine, et ce, selon un processus de Poisson. On suppose que les exemplaires non vendus au cours d'une semaine ne peuvent être vendus la semaine suivante.

a) Quelle est la probabilité que le libraire vende tous les exemplaires reçus du magazine au cours d'une semaine donnée ?

b) Quelle est la probabilité qu'au cours d'un mois (4 semaines), il y ait au moins une semaine durant laquelle le libraire ne vend pas tous les exemplaires du magazine ?

c) Déterminez la moyenne et la variance du nombre d'exemplaires du magazine vendus en une semaine.

d) Déterminez la moyenne du nombre de clients qui n'obtiennent pas un exemplaire du magazine en une semaine.

5.27 Des équipes d'entretien en quête d'une certaine pièce de rechange se présentent chaque jour à un local à outils selon une loi de Poisson de paramètre $c = 2$. Or, on conserve normalement à cet endroit 3 exemplaires de la pièce en question. Si ce stock est épuisé, les équipes doivent effectuer un long déplacement jusqu'au magasin central.

a) Quelle est la probabilité qu'une ou plusieurs équipes aient à se rendre au magasin central au cours d'une journée quelconque ?

b) Quelle est la demande quotidienne moyenne de la pièce de rechange ?

c) Quel est le nombre moyen d'équipes d'entretien qu'on approvisionne chaque jour au local à outils ?

d) Quel est le nombre moyen d'équipes devant se rendre au magasin central ?

e) En vous basant sur les valeurs de la table I de l'annexe, combien d'exemplaires de la pièce doit-on stocker au local à outils pour pouvoir satisfaire à la demande de toutes les équipes d'entretien 90 % du temps ?

5.28 Soit un métier où un fil se brise environ toutes les 10 heures en moyenne. La fabrication d'un certain type de tissu à l'aide de ce métier exige 25 heures. S'il faut 3 bris de fil ou plus pour rendre le produit fini inacceptable, quelle est la probabilité qu'on obtienne un tissu de qualité satisfaisante ?

5.29 Un manuel de mathématiques compte 200 pages où figurent des équations susceptibles de renfermer des coquilles. S'il y a en fait 5 coquilles réparties au hasard à l'intérieur de ces 200 pages, on veut calculer la probabilité qu'un échantillon aléatoire de 50 pages renferme au moins 1 coquille ?

a) Calculez cette probabilité en utilisant la loi de Poisson.

5.30 Tout véhicule a une probabilité de 0,0001 d'être impliqué dans un accident à une intersection donnée. Or, 10 000 véhicules traversent chaque jour cette intersection. Quelle est la probabilité qu'aucun accident ne s'y produise ? Quelle est la probabilité qu'il y survienne 2 accidents ou plus ? Utilisez l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson.