2.7 Exercices

2.1 Au jeu de poker, on peut obtenir de 0 à 4 as parmi les 5 cartes d'une main. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'as.

a) Quelle est l'image de X?

b) Quelle est la probabilité de chaque valeur possible de X?

2.2 Le nombre de véhicules retournés à une agence de location peut être de 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 en une journée, avec une probabilité respective de $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{12}$. Sachant que l'espérance de X vaut $\frac{13}{6}$ déterminez la variance du nombre de véhicules retournés.

2.3 Une variable aléatoire X a la fonction de densité définie par ce^{-x}.

a) Déterminez la valeur appropriée de c, sachant que $0 \leq X < \infty$.

b) Calculez la moyenne de X.

c) Calculez la variance de X.

2.4 Supposons que la fonction de répartition de la durée de fonctionnement T (en heures) d'un tube cathodique se traduit par $1 - e^{-ct}$, où c est un paramètre qui varie selon le fabricant et $t \geq 0$.

a) Déterminez la fonction de densité de T.

b) Supposons que $c = 0{,}002$. Sachant que le tube a déjà été utilisé durant 300 heures, calculez la probabilité qu'il fonctionne encore au moins 200 heures supplémentaires.

c) Toujours en supposant que $c = 0{,}002$, trouvez le nombre d'heures t tel que 90 % des tubes auront cessé de fonctionner avant t selon ce modèle. En d'autres termes, trouvez le 90^{e} centile théorique de cette distribution.

2.5 Soit les trois fonctions définies ci-après. Indiquez laquelle ou lesquelles sont des fonctions de répartition.

a) $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } 0 < x < \infty \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

b) $G_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } 0 \leq x < \infty \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

c) $H_X(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{si } -\infty < x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$

2.6 Déterminez la fonction de densité correspondant à la ou aux fonctions de l'exercice 2.5 qui sont des fonctions de répartition.

2.7 Laquelle ou lesquelles des fonctions définies ci-après correspondent à une distribution discrète ?

a) $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } x = 0 \\ \frac{2}{3} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

b) $p_X(x) = \begin{cases} \binom{5}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{5-x} & \text{si } x \in 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2.8 La demande quotidienne d'un produit peut être de -1, 0, $+1$ ou $+2$, avec des probabilités respectives de $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{10}$. Une demande de -1 signifie qu'une unité du produit a été retournée.

a) Déterminez la demande quotidienne moyenne.

b) Sachant que $E(X^2) = \frac{9}{5}$, calculez l'écart-type de la demande quotidienne.

c) Tracez le graphique de la fonction de masse de la demande quotidienne.

d) Tracez le graphique de la fonction de répartition de la demande quotidienne.

2.9 Le gérant d'un magasin de confection pour hommes se demande si son stock actuel de 30 complets (de toutes tailles) est suffisant. Le nombre de complets qu'il vendra d'ici la fin de la saison est une variable aléatoire X dont la fonction de masse est définie par

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-20}\,20^x}{x!} & \text{si } x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminez comment calculer la probabilité qu'il lui reste des complets à la fin de la saison (sans effectuer le calcul).

2.10 Une variable aléatoire X a une fonction de répartition de la forme suivante :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} & \text{si } k \le x < k+1;\ k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a) Déterminez sa fonction de masse.

b) Calculez $P(0 < X \le 8)$.

c) Calculez $P(3 \le X \le 5)$.

d) Calculez $P(X > 1)$.

2.11 Soit la fonction de densité définie ci-après.

$$f_X(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \le x < 2 \\ k(4 - x) & \text{si } 2 \le x \le 4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Déterminez la valeur de k qui fait en sorte que f soit une fonction de densité.

b) Tracez le graphique de la fonction de densité.

c) Calculez la probabilité conditionnelle que X soit inférieur à 1, sachant que X est inférieur à 2.

d) Déterminez la moyenne et la variance de X.

e) Définissez la fonction de répartition de X.

2.12 Considérons la fonction de densité définie ci-après.

$$f_X(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \le x < a \\ k(2a - x) & \text{si } a \le x \le 2a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Déterminez la valeur de k qui fait en sorte que f soit une fonction de densité.

b) Déterminez l'espérance de X.

c) Définissez la fonction de répartition de X.

2.13 Un panier contient 4 boules rouges et 6 boules noires. On procède à 3 tirages sans remise, et on considère la variable aléatoire X qui représente le nombre de boules rouges parmi les boules tirées.

a) Déterminez la fonction de masse de X.

b) Calculez l'espérance mathématique de X.

2.14 On vous propose de jouer à un jeu de hasard qui consiste à lancer 2 dés à 6 faces. Si vous obtenez un double 6, vous gagnez 10 \$. Si la somme des 2 dés vaut 7, alors vous gagnez 1 \$. Pour tout autre résultat, vous perdez 1 \$. Soit la variable aléatoire X représentant votre gain.

a) Déterminez la fonction de masse de X.

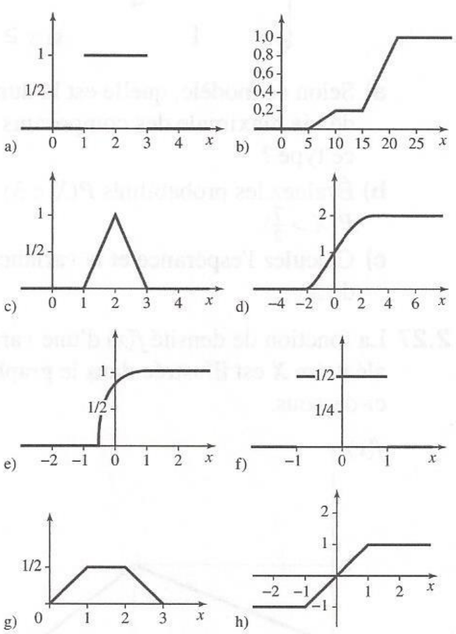
b) Calculez l'espérance mathématique de X.

c) Supposons maintenant que, lorsque vous obtenez une somme égale à 7 au premier tour, une alternative vous est proposée : soit arrêter et gagner 1 $, soit rejouer (une seule fois) et gagner (ou perdre) le double du montant associé au résultat de votre deuxième lancer. On note p la probabilité que vous décidiez de rejouer. Déterminez la fonction de masse de votre gain Y dans ce cas.

d) Calculez l'espérance de Y.

e) Pour quelles valeurs de p le jeu décrit en c) est-il en moyenne plus avantageux que le premier jeu ?

2.15 Considérez les huit figures illustrées ci-dessous.



a) Lesquelles représentent des fonctions de densité ?

b) Lesquelles représentent des fonctions de répartition ?

2.16 La variable aléatoire continue T a la fonction de densité $f(t) = kt^2$ pour $-1 \le t \le 0$.

a) Déterminez la valeur appropriée de k.

b) Tracez le graphique de la densité de T.

c) Calculez la moyenne de T.

d) Sachant que $E(T^2) = 3/5$, calculez la variance de T.

e) Déterminez la fonction de répartition de T.

2.17 Une variable aléatoire discrète X a pour fonction de masse $p_X(x)$, où

$$p_X(x) = \begin{cases} k(1/2)^x & \text{si } x = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Déterminez la valeur de k.

b) Tracez le graphique de la fonction de masse de X.

c) Sans faire de calcul, pouvez-vous dire si l'espérance de X sera inférieure à 2 ? supérieure à 2 ? égale à 2 ?

2.18 La variable aléatoire discrète $N (N = 0, 1, \ldots)$ a pour fonction de masse kr^n, où $0 < r < 1$. Déterminez la valeur appropriée de k.

2.19 Deux promoteurs immobiliers, A et B, souhaitent vendre certains de leurs terrains. Le tableau ci-après montre la distribution de probabilité du prix de vente par terrain (en dollars).

Prix	50 000	51 000	51 500	53 500
A	0,2	0,4	0,3	0,1
B	0,3	0,2	0,3	0,2

Sachant que A et B agissent indépendamment l'un de l'autre, calculez :

a) le prix que chacun peut s'attendre à obtenir ;

b) le prix que A peut s'attendre à obtenir si B obtient 51 500 $;

c) la probabilité que A et B obtiennent tous deux le même prix.

2.20 On considère la fonction de masse définie par

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{36} & \text{si } x = 2, 3, \ldots, 6 \\ \dfrac{13-x}{36} & \text{si } x = 7, 8, \ldots, 12 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Vérifiez que la fonction de masse précédente est celle de la variable X désignant la somme des valeurs obtenues si on lance deux dés.

b) Calculez la moyenne de X.

c) Calculez l'écart-type de X.

2.21 Soit une variable aléatoire continue X et sa fonction de densité définie ainsi :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{9} & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Définissez la fonction de répartition de X.

b) Sans faire de calcul, pouvez-vous dire si la moyenne de X sera supérieure à 1,5 ?

c) Déterminez μ_3', c'est-à-dire $E(X^3)$.

d) Trouvez une valeur m telle que $P(X \geq m) = P(X \leq m)$. C'est ce qu'on appelle la « médiane » de X.

2.22 Déterminez la fonction de répartition associée à

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{t^2}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2t^2}\right) & \text{si } t > 0, x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.23 Déterminez la fonction de répartition associée à

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\pi}\frac{1}{\left\{1+\left[(x-\mu)^2/\sigma^2\right]\right\}}, -\infty < x < \infty.$$

2.24 Soit la fonction de densité $f_Y(y) = k \sin y$, $0 \leq y \leq \pi/2$.

a) Quelle est la valeur appropriée de k ?

b) Déterminez la moyenne de la variable Y.

2.25 Considérons une variable aléatoire X dont la fonction de répartition est définie par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ 0{,}25 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ 0{,}55 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0{,}80 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

a) Donnez R_X, l'ensemble des valeurs possibles de X.

b) Déterminez la fonction de masse $p_X(x)$ de X.

c) Évaluez la probabilité $P(-1 < X \leq 4)$.

d) Calculez l'espérance et la variance de X.

2.26 Une entreprise électronique fabrique des composants selon un procédé novateur. La durée de vie de ces composants correspond au temps de fonctionnement (en années) jusqu'à ce que la première panne se produise. Elle peut être modélisée par une variable aléatoire X (en années) dont la fonction de répartition est

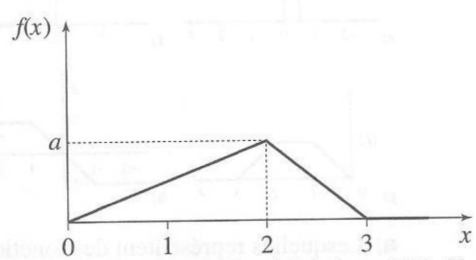
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{12} & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ -3 + 2x - \dfrac{x^2}{4} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4. \end{cases}$$

a) Selon ce modèle, quelle est la durée de vie maximale des composants de ce type ?

b) Évaluez les probabilités $P(X < 3)$ et $P(X > \frac{7}{2})$.

c) Calculez l'espérance et la variance de X.

2.27 La fonction de densité $f(x)$ d'une variable aléatoire X est illustrée dans le graphique ci-dessous.



La fonction de densité de la variable X

a) Établissez la valeur de la constante a.

b) Déterminez l'expression algébrique de la fonction $f(x)$.

c) Définissez la fonction de répartition $F(x)$ de la variable X.

d) Évaluez les probabilités suivantes : $P(X > 1)$, $P(1 < X < 2{,}5)$, $P(X \leq 2 \mid X > 1)$.

e) Calculez l'espérance mathématique et l'écart type de la variable X.

2.28 La directrice d'un atelier multigamme ne connaît pas la distribution de probabilité du temps requis pour livrer une commande. Les faits observés lui ont cependant permis d'estimer la moyenne à 14 jours et la variance à 2 (jours)^2. En vous basant sur l'inégalité de Tchebychev, définissez un intervalle tel que la probabilité de livrer une commande à l'intérieur de cette période soit d'au moins 0,75.

2.29 Il faut en moyenne 2 jours au service des postes pour livrer une lettre à l'autre extrémité de la ville. On estime la variance à 0,4 (jour)^2. À quel moment un cadre devrait-il mettre ses lettres à la poste s'il veut qu'au moins 99 % d'entre elles arrivent à temps ?

Chapitre 2

2.1 **a)** $R_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ **b)** $P_X(X = x) = \dfrac{\dbinom{4}{x}\dbinom{48}{5-x}}{\dbinom{52}{5}}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4.$

2.2 83/36

2.3 **a)** $c = 1$ **b)** $\mu = 1$ **c)** $\sigma^2 = 1$

2.4 **a)** Pour $c > 0$, $f_T(t) = \begin{cases} ce^{-ct} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ **b)** $e^{-200c} = 0{,}670$

c) $t = 1\ 151{,}293$ heures

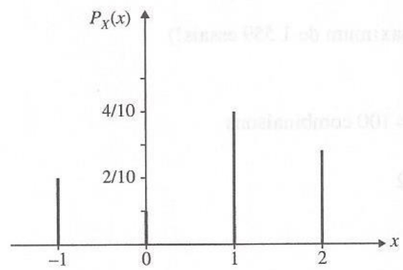
2.5 **a)** Oui **b)** Non **c)** Oui

2.6 Pour a), $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et pour c), $h_X(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

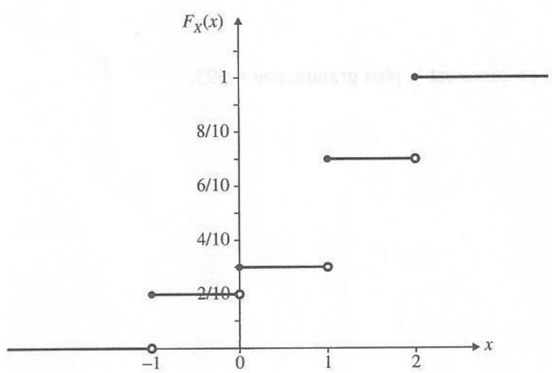
2.7 a) et b)

2.8 **a)** $\mu_X = 4/5$ **b)** $\sigma_X = \sqrt{29/25}$

c)



d)



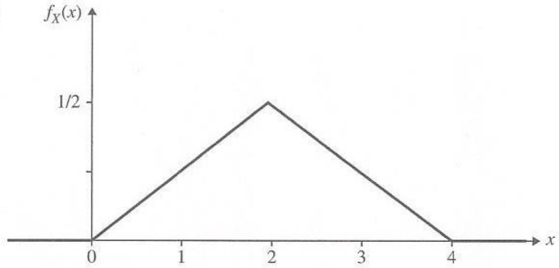
2.9 $P(X \leq 29) = \sum_{x=0}^{29} \dfrac{e^{-20}(20)^x}{x!}$

2.10 **a)** $p_X(x) = F_X(x) - F_X(x-1) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x & \text{si} \quad x = 0,1,2,\ldots \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ **b)** $P(0 < X \leq 8) = F_X(8) - F_X(0) = 0{,}498$

c) $P(3 \leq X \leq 5) = F_X(5) - F_X(2) = 0{,}109$ **d)** $P(X > 1) = 1 - F_X(1) = 0{,}250$

2.11 **a)** $k = \frac{1}{4}$

b)



c) $P(X < 1 \mid X < 2) = 1/4$ **d)** $\mu = 2,\ \sigma^2 = \frac{2}{3}$

e) $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{8} & \text{si } 0 \le x < 2 \\ -1 + x - \frac{x^2}{8} & \text{si } 2 \le x \le 4 \\ 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

2.12 **a)** $k = 1/a^2$ **b)** $E(X) = a$ **c)** $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{2a^2} & \text{si } 0 \le x < a \\ \frac{2x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - 1 & \text{si } a \le x \le 2a \\ 1 & \text{si } x > 2a \end{cases}$$

2.13 **a)**

x	0	1	2	3
$p_X(x)$	5/30	15/30	9/30	1/30

b) $E(X) = 1{,}200$

2.14 **a)**

x	−1	1	10
$p_X(x)$	29/36	6/36	1/36

b) $E(X) = -13/36 = -0{,}361$ \$

c)

y	−2	−1	1	2	10	20
$p_Y(y)$	$29p/216$	29/36	$(1-p)/6$	$p/36$	1/36	$p/216$

?

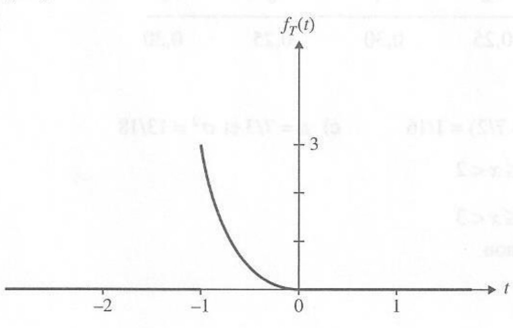
d) $E(Y) = -(31p + 39)/108$ **e)** $E(Y) > E(X)$ seulement si $p < 0$; donc, le jeu n'est jamais plus avantageux.

2.15 **a)** Les fonctions c), f), et g) sont des fonctions de densité.

b) Les fonctions b) et e) sont des fonctions de répartition.

2.16 **a)** $k = 3$

b)

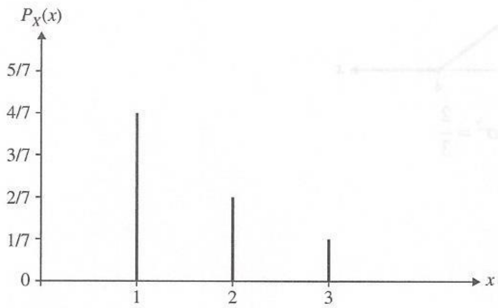


c) $\mu = -3/4$ **d)** $\sigma^2 = 3/80$

e) $F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ t^3 + 1 & \text{si } -1 \le t < 0 \\ 1 & \text{si } t \ge 0 \end{cases}$

2.17 a) $k = \dfrac{8}{7}$

b)



c) $E(X)$ est inférieure à 2.

2.18 $k = 1 - r$

2.19 a) $\mu_A = 51\ 200\ \$$ et $\mu_B = 51\ 350\ \$$ **b)** 51 200 $ **c)** 0,250

2.20 a)

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

b) $\mu = 7$ **c)** $\sigma = \sqrt{105/18} = 2{,}415$

2.21 a) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{9} & \text{si } 0 \le x < 3 \\ 1 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$ **b)** μ est supérieure à 1,5. **c)** $\mu = 10{,}800$ **d)** 2,121

2.22 $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x^2/2t^2} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

2.23 $F_X(x) = \dfrac{1}{\pi} \arctan\left(\dfrac{x - \mu}{\sigma}\right)$ pour $-\infty < x < \infty$

2.24 a) $k = 1$ **b)** $\mu = 1$

2.25 a) $R_X = \{-2, -1, 0, 1\}$ **b)**

x	-2	-1	0	1
$p_X(x)$	0,25	0,30	0,25	0,20

c) 0,45 **d)** $\mu = -0{,}600$ et $\sigma^2 = 1{,}140$

2.26 a) 4 ans **b)** $P(X < 3) = 0{,}750$ et $P(X > 7/2) = 1/16$ **c)** $\mu = 7/3$ et $\sigma^2 = 13/18$

2.27 a) 2/3 **b)** $f(x) = \begin{matrix} \dfrac{x}{3} & \text{si } 0 \le x < 2 \\ \dfrac{2}{3}(3 - x) & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{matrix}$

c) $F(x) = \begin{matrix} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{6} & \text{si } 0 \le x < 2 \\ -2 + 2x - \dfrac{x^2}{3} & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{si } x \ge 3 \end{matrix}$

d) $P(X > 1) = 5/6$, $P(1 < X < 2{,}5) = 3/4$, $P(X \leq 2 \mid X > 1) = 3/5$

e) $\mu = 5/3$ et $\sigma = \sqrt{\dfrac{7}{18}}$

2.28 $k = 2$, et l'intervalle est $[14 - 2\sqrt{2}\ ,\ 14 + 2\sqrt{2}]$.

2.29 $k = 10$, et l'intervalle est $[2 - 10\sqrt{0{,}4},\ 2 + 10\sqrt{0{,}4}]$, donc 8,325 jours avant.