Louis-Marc Mercier

MTH2302D : Probabilités et statistique

L'Anti-sith

1. Lois (p.5)

Lois de De Morgan : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
Lois distributives : $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C), \quad A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

2. Probabilité conditionnelle et indépendance (p.25, p.26)

Théorème 1 La probabilité conditionnelle de l'évènement A étant donné la réalisation de l'évènement B se définit comme suit (si $P(B) > 0$) :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Théorème 2 Les évènements A et B sont indépendants l'un de l'autre si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Il s'ensuit directement que dans le cas de deux évènements A et B :

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{et} \quad P(B|A) = P(B)$$

3. Théorème des probabilités totales et Bayes (p.30)

Théorème 3 Si $B_1, B_2, ..., B_k$ forment une partition de $\mathbf{\Omega}$ et si A dénote un évènement quelconque dans $\mathbf{\Omega}$, alors la probabilité totale de A se traduit par :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)$$

Théorème 4 Si $B_1, B_2, ..., B_k$ forment une partition de $\mathbf{\Omega}$ et si A dénote un évènement arbitraire de $\mathbf{\Omega}$, alors pour $r = 1, 2, ..., k$:

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r) \cdot P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i) \cdot P(A|B_i)}$$

4. Fonction de masse et de densité (p.44, p.47)

Cas discret	Cas continue
$p_X(x_i) \geq 0 \quad \forall i$	$f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in R_x$
$\sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i) = 1$	$\int_{R_x} f_X(x)dx = 1$

5. Espérance mathématique et variance (p.66, p.53)

Théorème 5 Soit une variable aléatoire X. Si $H(X)$ est une fonction de X (et donc une variable aléatoire), alors l'espérance mathématique de $H(X)$ est définie comme suit :

$$\mathrm{E}(H(X)) = \begin{cases} \sum_i H(x_i)p_X(x_i) & \text{si X est une variable discrète} \\ \int_{-\infty}^{\infty} H(x)f_X(x)dx & \text{si X est une variable continue} \end{cases}$$

Théorème 6 La variance est une mesure de la dispersion de la probabilité associée aux éléments de R_X. On la définie comme suit :

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \begin{cases} \sum_i (x_i - \mu)^2 p_X(x_i) & \text{si X est une variable discrète} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)dx & \text{si X est une variable continue} \end{cases}$$

Astuce : En pratique, il est rare d'employer la formule de la variance précédente. On préfèrera employer la formule suivante :

$$\mathrm{Var(X)} = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$$

6. Combinaisons et permutations (p.19)

Théorème 7 Le nombre d'échantillons ordonnés de taille r, sans remise, d'un lot de n objets est :

$$n(n-1)...(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = P_r^n$$

Théorème 8 Le nombre d'échantillons (sans considération de l'ordre) de taille r, sans remise, d'un ensemble de n objets est :

$$\binom{n}{r} = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!}$$

7. Définitions : espérance, covariance et corrélation (p.68, p.94-95)

Théorème 9 Si a et b sont des constantes et que X est une variable aléatoire, alors :

$$\mathrm{E}(aX+b) = a\mathrm{E}(X) + b$$

Théorème 10 Soit les deux variables aléatoires X_1 et X_2. La covariance de X_1 et X_2, notée σ_{12}, se traduit par :

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \sigma_{12} = \mathrm{E}\Big((X_1 - \mathrm{E}(X_1))(X_2 - \mathrm{E}(X_2))\Big)$$

et leur coefficient de corrélation, notée ρ, par :

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathrm{V}(X_1)}\sqrt{\mathrm{V}(X_2)}} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2}$$

Astuce : Une façon plus pratique d'exprimer la covariance est la formule suivante :

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathrm{E}(X_1X_2) - \mathrm{E}(X_1)\mathrm{E}(X_2)$$

8. Lois et TCL (p.111,p.122,p.120,p.132,p.115,p.134,p.149,p.158,p.160)

Théorème 11 La variable aléatoire X représentant le nombre de succès obtenus en réalisant n épreuves de Bernoulli indépendantes, ayant chacune une probabilité de succès p est dite de *loi binomiale de paramètres n et p*. Sa fonction de masse $p(x)$ est définie par :

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{si } x = 0, 1, 2, ..., n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En abrégé, on écrit $X \sim \text{Binomiale}(n, p)$. Alors :

$$\text{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \text{V}(X) = np(1-p)$$

Théorème 12 On dit qu'une variable aléatoire X est distribuée selon une loi de Poisson de paramètre $c > 0$ si sa fonction de masse est donnée par :

$$p(x) = \begin{cases} \frac{c^x \text{e}^{-c}}{x!} & \text{si } x = 0, 1, 2, ... \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En abrégé, on écrit $X \sim \text{Poisson}(c)$. Alors :

$$\text{E}(X) = c \quad \text{et} \quad \text{V}(X) = c$$

Théorème 13 Soit une population finie de N éléments. Si on prélève au hasard et sans remise un échantillon de taille n, la variable aléatoire X représentant le nombre d'éléments de l'échantillon qui appartiennent à la classe en question (composé de D éléments) est dite *loi hypergéométrique de paramètres N, D et n*. La fonction de masse de X est :

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} & \text{si } x \in \{\max(0, n-N+D), ..., \min(n, D)\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En abrégé, on écrit $X \sim \text{Hypergéométrique}(N, D, n)$. Alors :

$$\text{E}(X) = n \cdot \frac{D}{N} \quad \text{et} \quad \text{V}(X) = n \cdot \frac{D}{N}\left(1 - \frac{D}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Théorème 14 Une variable aléatoire continue X est dite de *loi uniforme dans l'intervalle* $[\alpha, \beta]$ si sa fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \text{si } \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où α et β sont des constantes réelles telles que $\alpha < \beta$. En abrégé, on écrit $X \sim \text{U}(\alpha, \beta)$ et :

$$\text{E}(X) = \frac{\beta + \alpha}{2} \quad \text{et} \quad \text{V}(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

Théorème 15 La variable aléatoire X, représentant le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir un premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes dont la probabilité du succès est $p > 0$ est dite de *loi géométrique de paramètre* p, et sa fonction de masse est donnée par :

$$p(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & \text{si } x = 1, 2, ... \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En abrégé, on écrit $X \sim$ Géométrique(p). Alors :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Théorème 16 La variable aléatoire continue X est dite de *loi exponentielle de paramètre* λ si sa fonction de densité est de la forme :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où le paramètre λ est un nombre réel positif. En abrégé, on écrit $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Alors :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Théorème 17 On dit que la variable aléatoire X obéit à une loi normale de moyenne μ (où $-\infty < x < \infty$) et de variance $\sigma^2 > 0$ lorsqu'elle présente la fonction de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

En abrégé, on écrit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Alors :

$$\mathrm{E}(X) = \mu \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(X) = \sigma^2$$

Théorème 18 Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ et les constantes $a_1, a_2, ..., a_n$ Alors, si $X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$:

$$X \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Théorème 19 Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ une suite de n variables aléatoires indépendantes telles que $\mathrm{E}(X_i) = \mu_i$ et $\mathrm{V}(X_i) = \sigma_i^2$ (deux grandeurs finies). Si $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$, alors dans certaines conditions générales, la variable :

$$Z_n = \frac{Y - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}}$$

obéit approximativement à une loi $N(0, 1)$ lorsque n tend vers l'infini. On a alors :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_n(z)}{\Phi(z)} = 1 \quad (\star)$$