1. Définitions : espérance, covariance et corrélation (p.68, p.94-95)

Théorème 1 Si a et b sont des constantes et que X est une variable aléatoire, alors :

$$\mathrm{E}(aX+b) = a\mathrm{E}(X) + b$$

Théorème 2 Soit les deux variables aléatoires X_1 et X_2. La covariance de X_1 et X_2, notée σ_{12}, se traduit par :

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \sigma_{12} = \mathrm{E}\Big((X_1 - \mathrm{E}(X_1))(X_2 - \mathrm{E}(X_2))\Big)$$

et leur coefficient de corrélation, notée ρ, par :

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathrm{V}(X_1)}\sqrt{\mathrm{V}(X_2)}} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2}$$

Astuce : Une façon plus pratique d'exprimer la covariance est la formule suivante :

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathrm{E}(X_1X_2) - \mathrm{E}(X_1)\mathrm{E}(X_2)$$

2. Propriétés de la covariance

1. $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{V}(X)$
2. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$
3. $\mathrm{Cov}(cX, Y) = c \cdot \mathrm{Cov}(X, Y)$ où c est une constante
4. $\mathrm{Cov}(X + c, Y) = \mathrm{Cov}(X, Y)$ où c est une constante
5. $\mathrm{Cov}(X+Y, Z) = \mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(Y, Z)$ où X, Y et Z sont des variables aléatoires
6. $\mathrm{Cov}(\sum_i X_i, \sum_j X_j) = \sum_i \sum_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ bilinéarité de la covariance