

LOUIS-MARC MERCIER

MTH2302D : PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

TD 9 : Yoda



©Mercier

Intervalles de confiance ($1 - \alpha$)

Une moyenne μ
• σ^2 connue, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ou n grand : $\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
• σ^2 inconnue et $X \sim N(\mu, \sigma^2)$: $\bar{X} \pm t_{\alpha/2; n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$
• σ^2 inconnue et n grand : $\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$
Une variance σ^2
• $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ connue : $S_\mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ $\left[\frac{nS_\mu^2}{\chi_{\alpha/2; n}^2}; \frac{nS_\mu^2}{\chi_{1-\alpha/2; n}^2} \right]$
• $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ inconnue : $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ $\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2; n-1}^2}; \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2; n-1}^2} \right]$
• pour σ , avec n grand : $\left[S/(1 + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}); S/(1 - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}) \right]$
Une proportion p
• n est très grand : $\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
Différence de deux moyennes $\mu_1 - \mu_2$
• σ_1^2, σ_2^2 connues, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$ ou n_1, n_2 grands : $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
• σ_1^2, σ_2^2 inconnues, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$ ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{\alpha/2; n_1+n_2-2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}; S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$
• σ_1^2, σ_2^2 inconnues, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$ ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{\alpha/2; \nu} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}; \nu = \frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1+1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2+1}} - 2$
• n_1, n_2 grands $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$
• Données couplées, $D_i = X_{1,i} - X_{2,i}, i = 1, \dots, n$ $\bar{D} \pm t_{\alpha/2; n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$
Rapport de deux variances σ_1^2 / σ_2^2
• $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$ $\left[\frac{S_1^2}{S_2^2} F_{1-\alpha/2; n_2-1; n_1-1}; \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{\alpha/2; n_2-1; n_1-1} \right]$
Différence de deux proportions $p_1 - p_2$
• n_1 et n_2 grands $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$

Tests paramétriques (seuil α)

Une moyenne. Critères de rejet de $H_0 : \mu = \mu_0$ contre H_1		
$H_1 : \mu < \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$
• σ^2 connue, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ou n grand : statistique $Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ si $Z_0 < -z_\alpha$	si $Z_0 > z_\alpha$	si $ Z_0 > z_{\alpha/2}$
• σ^2 inconnue et $X \sim N(\mu, \sigma^2)$: statistique du test $T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ si $T_0 < -t_{\alpha; n-1}$	si $T_0 > t_{\alpha; n-1}$	si $ T_0 > t_{\alpha/2; n-1}$
• σ^2 inconnue et n grand : statistique du test $Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ si $Z_0 < -z_\alpha$	si $Z_0 > z_\alpha$	si $ Z_0 > z_{\alpha/2}$
Une variance. Critères de rejet de $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ contre H_1		
$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
• $X \sim N(\mu, \sigma^2)$: la statistique du test $\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ si $\chi_0^2 < \chi_{1-\alpha; n-1}^2$	$\chi_0^2 > \chi_{\alpha; n-1}^2$	si $\chi_0^2 < \chi_{1-\alpha/2; n-1}^2$ ou si $\chi_0^2 > \chi_{\alpha/2; n-1}^2$
• n est grand ($n \geq 40$) : la statistique du test $Z_0 = \frac{S - \sigma_0}{\sigma_0/\sqrt{2n}}$ si $Z_0 < -z_\alpha$	si $Z_0 > z_\alpha$	si $ Z_0 > z_{\alpha/2}$
Une proportion. Critères de rejet de $H_0 : p = p_0$ contre H_1		
$H_1 : p < p_0$	$H_1 : p > p_0$	$H_1 : p \neq p_0$
• si n est très grand : la statistique du test $Z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$ si $Z_0 < -z_\alpha$	si $Z_0 > z_\alpha$	si $ Z_0 > z_{\alpha/2}$
Deux moyennes. Critères de rejet de $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ contre H_1		
$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
• σ_1^2, σ_2^2 connues, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$ ou n_1, n_2 grands statistique du test $Z_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ si $Z_0 < -z_\alpha$	si $Z_0 > z_\alpha$	si $ Z_0 > z_{\alpha/2}$
• σ_1^2, σ_2^2 inconnues, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$ ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) la statistique du test $T_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$; avec $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ si $T_0 < -t_{\alpha; n_1 + n_2 - 2}$	si $T_0 > t_{\alpha; n_1 + n_2 - 2}$	si $ T_0 > t_{\alpha/2; n_1 + n_2 - 2}$
• σ_1^2, σ_2^2 inconnues, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$ ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) la statistique du test $T_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$; avec $\nu = \frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1+1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2+1}} - 2$ si $T_0 < -t_{\alpha; \nu}$	si $T_0 > t_{\alpha; \nu}$	si $ T_0 > t_{\alpha/2; \nu}$
• n_1, n_2 grands : la statistique du test $Z_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$ si $Z_0 < -z_\alpha$	si $Z_0 > z_\alpha$	si $ Z_0 > z_{\alpha/2}$
• Données couplées, $D_i = X_{1,i} - X_{2,i}, i = 1, \dots, n$: statistique $T_0 = \frac{\bar{D}}{S_D/\sqrt{n}}$ si $T_0 < -t_{\alpha; n-1}$	si $T_0 > t_{\alpha; n-1}$	si $ T_0 > t_{\alpha/2; n-1}$
Deux variances. Critères de rejet de $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ contre H_1		
$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
• $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$: la statistique du test $F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ si $F_0 < F_{1-\alpha; n_1-1; n_2-1}$	si $F_0 > F_{\alpha; n_1-1; n_2-1}$	si $F_0 < F_{1-\alpha/2; n_1-1; n_2-1}$ ou si $F_0 > F_{\alpha/2; n_1-1; n_2-1}$

La fonction de répartition d'une loi $N(0, 1)$: $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-u^2/2\} du$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992

α	0,25	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
z_{α}	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291
$z_{\alpha/2}$	1,150	1,645	1,960	2,241	2,576	2,807	3,291	3,481

Calcul de β et n (cas d'une moyenne μ)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ avec σ^2 connue et niveau (seuil) critique α .

Hypothèses	valeur de β	valeur de n
$H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu < \mu_0$	$\beta(\mu) = \Phi\left(z_\alpha + \frac{(\mu - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$	$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2 \sigma^2}{(\mu - \mu_0)^2}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu > \mu_0$	$\beta(\mu) = \Phi\left(z_\alpha - \frac{(\mu - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$	$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2 \sigma^2}{(\mu - \mu_0)^2}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$\beta(\mu) = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{(\mu - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{(\mu - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right)$	$n \approx \frac{(z_{\alpha/2} + z_\beta)^2 \sigma^2}{(\mu - \mu_0)^2}$

Calcul de β et n (cas de deux moyennes μ_1, μ_2)

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2); X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ avec σ_1^2, σ_2^2 connues et niveau (seuil) critique α .

Hypothèses	valeur de β	$n = n_1 = n_2$
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ contre $H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$\beta(\mu_1, \mu_2) = \Phi\left(z_\alpha + \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right)$	$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\mu_1 - \mu_2)^2}$
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ contre $H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$\beta(\mu_1, \mu_2) = \Phi\left(z_\alpha - \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right)$	$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\mu_1 - \mu_2)^2}$
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ contre $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$\beta(\mu_1, \mu_2) = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right)$	$n \approx \frac{(z_{\alpha/2} + z_\beta)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\mu_1 - \mu_2)^2}$

Quelques centiles

$$\begin{array}{llll}
\chi_{0,025;1}^2 = 5,02 & \chi_{0,025;2}^2 = 7,38 & \chi_{0,025;3}^2 = 9,35 & \chi_{0,025;4}^2 = 11,14 \\
\chi_{0,05;1}^2 = 3,84 & \chi_{0,05;2}^2 = 5,99 & \chi_{0,05;3}^2 = 7,81 & \chi_{0,05;4}^2 = 9,49 \\
\chi_{0,95;1}^2 = 0,004 & \chi_{0,95;2}^2 = 0,10 & \chi_{0,95;3}^2 = 0,35 & \chi_{0,95;4}^2 = 0,71
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
t_{0,025;16} = 2,12 & t_{0,025;17} = 2,11 & t_{0,025;18} = 2,10 & t_{0,025;20} = 2,09 \\
t_{0,05;16} = 1,75 & t_{0,05;17} = 1,74 & t_{0,05;18} = 1,73 & t_{0,05;20} = 1,72 \\
t_{0,025;24} = 2,07 & t_{0,025;25} = 2,06 & t_{0,025;26} = 2,06 & t_{0,025;28} = 2,05
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
F_{0,025;1,16} = 6,12 & F_{0,05;2,17} = 3,59 & F_{0,025;1,18} = 5,98 & F_{0,025;1,20} = 5,87 \\
F_{0,05;12,13} = 2,60 & F_{0,025;12,14} = 3,05 & F_{0,025;13,14} = 3,01 & F_{0,025;9,15} = 3,12 \\
F_{0,05;13,12} = 2,66 & F_{0,025;14,12} = 3,21 & F_{0,025;14,13} = 3,08 & F_{0,05;14,9} = 3,03
\end{array}$$