

# QUBO формулировка для задачи с одним агентом и типом товара

## 1 Общая логика модели

Задача, сформулированная в общем виде, переводится в модель QUBO. Первый шаг - частный случай с одним агентом и одним видом товара.

Основные переменные содержат всю информацию об итоговом пути и действиях агента. Вспомогательные переменные нужны для построения гамильтонианов и проверки корректности полученного решения. Константы - величины, известные из входных данных. Вспомогательные выражения - перевод бинарной кодировки величин в их численное значение

Изначально дается неориентированный связный взвешенный (без отрицательных весов) граф. По нему строится полный граф расстояний между вершинами, а также запоминаются все кратчайшие пути между парами вершин (алгоритм Флойда с памятью) для последующего восстановления пути агента.

Гамильтониан, который преобразуется в квадратичную форму для QUBO, разделен на несколько слагаемых. Гамильтонианы корректности системы отвечают за то, что по бинарным переменным можно восстановить корректный путь и действие:

- правильная начальная и конечная вершина
- за каждый ход посещена единственная вершина
- за каждый ход совершено одно действие, при этом оно совершено на посещенной в этот ход вершине
- после каждого хода величина груза агента не меньше нуля и не превышает его вместимость
- после последнего хода величина груза агента равна нулю
- за весь путь из каждого склада взято груза не больше, чем в нем изначально находилось

Гамильтонианы удовлетворения потребностей отвечают за то, что в конце пути в каждой вершине потребителя величина отданного агентом груза равна величине потребности вершины. Гамильтонианы целевой функции отвечают за минимальность суммарной длины пути агента.

В итоговой сумме каждый гамильтониан входит в коэффициентом, который нужен, чтобы каждое ограничение выполнялось и не вытесняло остальные. Их подбор (будет) приведен ниже.

## 2 Переменные и вспомогательные величины

### 2.1 Основные бинарные переменные

$x_{ij}$  - на  $i$ -ом шаге была посещена  $j$ -ая вершина. Кол-во переменных:  $qn$   
 $y_{ijk}$  -  $k$ -ая переменная в кодировке величины действия на  $j$ -ой вершине на  $i$ -ом ходу. Кол-во переменных:  $qn(M + 1)$

### 2.2 Вспомогательные бинарные переменные

$z_{ij}$  -  $j$ -ая переменная в кодировке величины груза агента на  $i$ -ом ходу. Кол-во переменных:  $q(M + 1)$   
 $w_{ij}$  -  $j$ -ая переменная в кодировке величины суммарного действия на  $i$ -ой вершине. Кол-во переменных:  $U$

Суммарное кол-во переменных:  $q(nM + 2n + M + 1) + U$

### 2.3 Константы

$n$  - кол-во вершин

$$T_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j - \text{склад} \\ -1, & \text{если } j - \text{потребитель} \end{cases}$$

$R_j$  - потребности  $j$ -ой вершины, если  $j$  - потребитель, иначе размер склада

$C$  - вместимость агента

$s, f$  - индексы начальной и конечной вершины пути агента

$d_{ij}$  - длина кратчайшего пути между вершинами  $i$  и  $j$

$q$  - кол-во вершин в пути агента

$$M = \lfloor \log_2 C \rfloor$$

$$U_i = \lfloor \log_2 R_i \rfloor$$

$$U = \sum_{i=0}^{n-1} U_i$$

## 2.4 Вспомогательные выражения

$$B_{ij} = \sum_{k=0}^{M-1} 2^k y_{ijk} + y_{ijM}(C+1-2^M)$$

$$L_i = \sum_{j=0}^{M-1} 2^j z_{ij} + z_{iM}(C+1-2^M)$$

$$S_i = \sum_{j=0}^{U_i-1} 2^j w_{ij} + w_{iU_i}(R_i+1-2^{U_i})$$

## 3 Гамильтонианы

### 3.1 Гамильтонианы корректности системы

$$H_{correct\ path} = \sum_{i=0}^{q-1} (1 - \sum_{j=0}^{n-1} x_{ij})^2$$

$$H_{correct\ end\ points} = (2 - x_{0,s} - x_{q-1,f})^2$$

$$H_{correct\ action, i} = \sum_{j=0}^{n-1} B_{ij}(1 - x_{ij})$$

$$H_{correct\ actions} = \sum_{i=0}^{q-1} H_{correct\ action, i}$$

$$H_{correct\ load, i} = (L_i - \sum_{k=0}^i \sum_{j=0}^{n-1} B_{kj} T_j)^2, \quad i \leq q-2$$

$$H_{correct\ load, q-1} = (\sum_{k=0}^{q-1} \sum_{j=0}^{n-1} B_{kj} T_j)^2$$

$$H_{correct\ loads} = \sum_{i=0}^{q-1} H_{correct\ load, i}$$

$$H_{correct\ storage\ action, j} = (S_j - \sum_{i=0}^{q-1} B_{ij})^2, \quad j - \text{индекс вершины склада}$$

$$H_{correct\ storage\ actions} = \sum_{j \in storage\ vertices} H_{correct\ storage\ action, j}$$

### 3.2 Гамильтонианы удовлетворения потребностей

$$H_{satisfied\ consumer, j} = (R_j - \sum_{i=0}^{q-1} B_{ij})^2, \quad j - \text{индекс вершины потребителя}$$

$$H_{satisfied\ consumers} = \sum_{j \in consumer\ vertices} H_{satisfied\ consumer, j}$$

### 3.3 Гамильтонианы целевой функции

$$H_{path\ length} = \sum_{u,v=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{q-2} x_{i,u} x_{i+1,v} d_{uv}$$

## 4 Подбор множителей для итоговой суммы гамильтонианов

TODO