

# QUBO формулировка для задачи с дискретными грузами и одним агентом

## 1 Неформальная постановка задачи

Дан полный взвешенный (без отрицательных ребер) граф, который представляет собой граф расстояний изначальной транспортной сети. Вводится понятие груза. Груз характеризуется тремя числами - вес, начальная вершина и конечная вершина. Есть набор грузов - множество троек чисел  $(W_i, S_i, F_i)$ , характеризующих груз. Каждый груз должен был транспортирован из своей начальной вершины в конечную. Есть транспортное средство (машина), которое эти грузы доставляет. Оно должно стартовать и заканчивать путь в фиксированных вершинах. У транспортного средства есть вместимость - суммарная величина грузов, которые он может перевозить вместе (аналог размера рюкзака). Машина может двигаться по произвольному пути на графе и забирать/отдавать грузы со следующими ограничениями: если груз взят, то его можно отдать только на конечной вершине груза и нигде более, а также в произвольный момент времени в машине не может быть грузов суммарным весом больше, чем ее вместимость. Задача заключается в том, чтобы найти такой путь машины (набор вершин и последовательность действий с грузами), который будет удовлетворять ограничениям выше и при этом минимизировать вес пути (сумму весов ребер на пути)

## 2 Общая логика модели

Основа модели - классическая для транспортных задач в QUBO. Мы фиксируем кол-во вершин в пути агента  $= q$ , само значение определяется с помощью эвристик под конкретные входные данные (пример будет представлен ниже). В рамках параметризации действий с грузами есть два принципиально разных пути, первый - динамическое поддержание состояния багажа машины, то есть набор переменных, характеризующий набор грузов в машине на каждый момент времени. С этим подходом достаточно просто выглядит перевод ограничений на вместимость машины, но сильно усложняются ограничения на корректность доставки грузов. С учетом того, что в текущей постановке задачи машина должна развезти все грузы, мы выбрали "статический" подход, при котором состояние багажа машины

не поддерживается явно, а для каждого груза, с другой стороны, явно выбирается номера вершины в пути, на котором груз забирают и на котором груз отдают. А ограничения на вместимость восстанавливаются по этой информации. В такой формулировке любое корректное решение уже будет удовлетворять ограничению на доставку всех грузов, без дополнительных гамильтонианов, как в первом варианте.

Основные переменные содержат всю информацию об итоговом пути и действиях агента. Вспомогательные переменные нужны для построения гамильтонианов и проверки корректности полученного решения. Константы - величины, известные из входных данных. Вспомогательные выражения - перевод бинарной кодировки величин в их численное значение

Гамильтониан, который преобразуется в квадратичную форму для QUBO, разделен на несколько слагаемых. Гамильтонианы корректности системы отвечают за то, что по бинарным переменным можно восстановить корректный путь и действие:

- правильная начальная и конечная вершина
- за каждый ход посещена единственная вершина
- каждый груз должен быть взят на ходу с номером меньше, чем номер хода, на котором он отдан
- если груз взят на  $i$ -ом ходу, то посещенная на  $i$ -ом ходу вершина должна быть равна вершине  $S_i$
- если груз отдан на  $i$ -ом ходу, то посещенная на  $i$ -ом ходу вершина должна быть равна вершине  $F_i$
- на момент каждого хода величина груза в машине не превосходит вместимость

Гамильтониан целевой функции один и отвечает за минимизацию веса пути

В итоговой сумме каждый гамильтониан входит в коэффициентом, который нужен, чтобы каждое ограничение выполнялось и не вытесняло остальные.

### 3 Переменные и вспомогательные величины

#### 3.1 Основные бинарные переменные

$x_{ij}$  - на  $i$ -ом шаге была посещена  $j$ -ая вершина. Кол-во переменных:  $qn$

$a_{ij}$  -  $i$ -ый груз был взят на  $j$ -ом ходу. Кол-во переменных:  $qt$

$b_{ij}$  -  $i$ -ый груз был отдан на  $j$ -ом ходу. Кол-во переменных:  $qt$

### 3.2 Вспомогательные бинарные переменные

$y_{ij}$  -  $j$ -ая переменная в кодировке величины груза агента на  $i$ -ом ходу. Кол-во переменных:  $q(M + 1)$

Суммарное кол-во переменных:  $q(2m + n + M + 1)$

### 3.3 Константы

$n$  - кол-во вершин

$m$  - кол-во грузов

$C$  - вместимость машины

$S, F$  - индексы начальной и конечной вершины пути машины

$W_i$  - вес  $i$ -ого груза

$S_i, F_i$  - индексы начальной и конечной вершины  $i$ -ого груза

$d_{ij}$  - вес ребра между вершинами  $i$  и  $j$

$q$  - кол-во вершин в пути агента

$$M = \lfloor \log_2 C \rfloor$$

### 3.4 Вспомогательные выражения

$$L_i = \sum_{j=0}^{M-1} 2^j y_{ij} + y_{iM}(C + 1 - 2^M) - \text{величина груза в машине на } i\text{-ом ходу}$$

$$T_{ij} = \sum_{k=0}^i (a_{jk} - b_{jk}) - \text{на } i\text{-ом ходу в машине находится } j\text{-ый груз}$$

## 4 Гамильтонианы

### 4.1 Гамильтонианы корректности системы

$$H_{correct \ path} = \sum_{i=0}^{q-1} \left(1 - \sum_{j=0}^{n-1} x_{ij}\right)^2$$

$$H_{correct \ take \ action} = \sum_{i=0}^{m-1} \left(1 - \sum_{j=0}^{q-1} a_{ij}\right)^2$$

$$H_{correct \ give \ action} = \sum_{i=0}^{m-1} \left(1 - \sum_{j=0}^{q-1} b_{ij}\right)^2$$

$$H_{correct\ end\ points} = (2 - x_{0,S} - x_{q-1,F})^2$$

$$H_{correct\ take\ vertex} = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{q-1} (1 - x_{jS_i}) a_{ij}$$

$$H_{correct\ give\ vertex} = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{q-1} (1 - x_{jF_i}) a_{ij}$$

$$H_{correct\ take/give\ order} = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{q-1} T_{ji} (T_{ji} - 1)$$

$$H_{correct\ load,\ k} = (L_k - \sum_{i=0}^{m-1} W_j T_{ki})^2$$

$$H_{correct\ loads} = \sum_{k=0}^{q-1} H_{correct\ load,\ k}$$

## 4.2 Гамильтонианы целевой функции

$$H_{path\ length} = \sum_{u,v=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{q-2} x_{i,u} x_{i+1,v} d_{uv}$$