Číslicové riadenie

2. prednáška

Úvod do teórie diskrétnych systémov

a

diskrétna prenosová funkcia

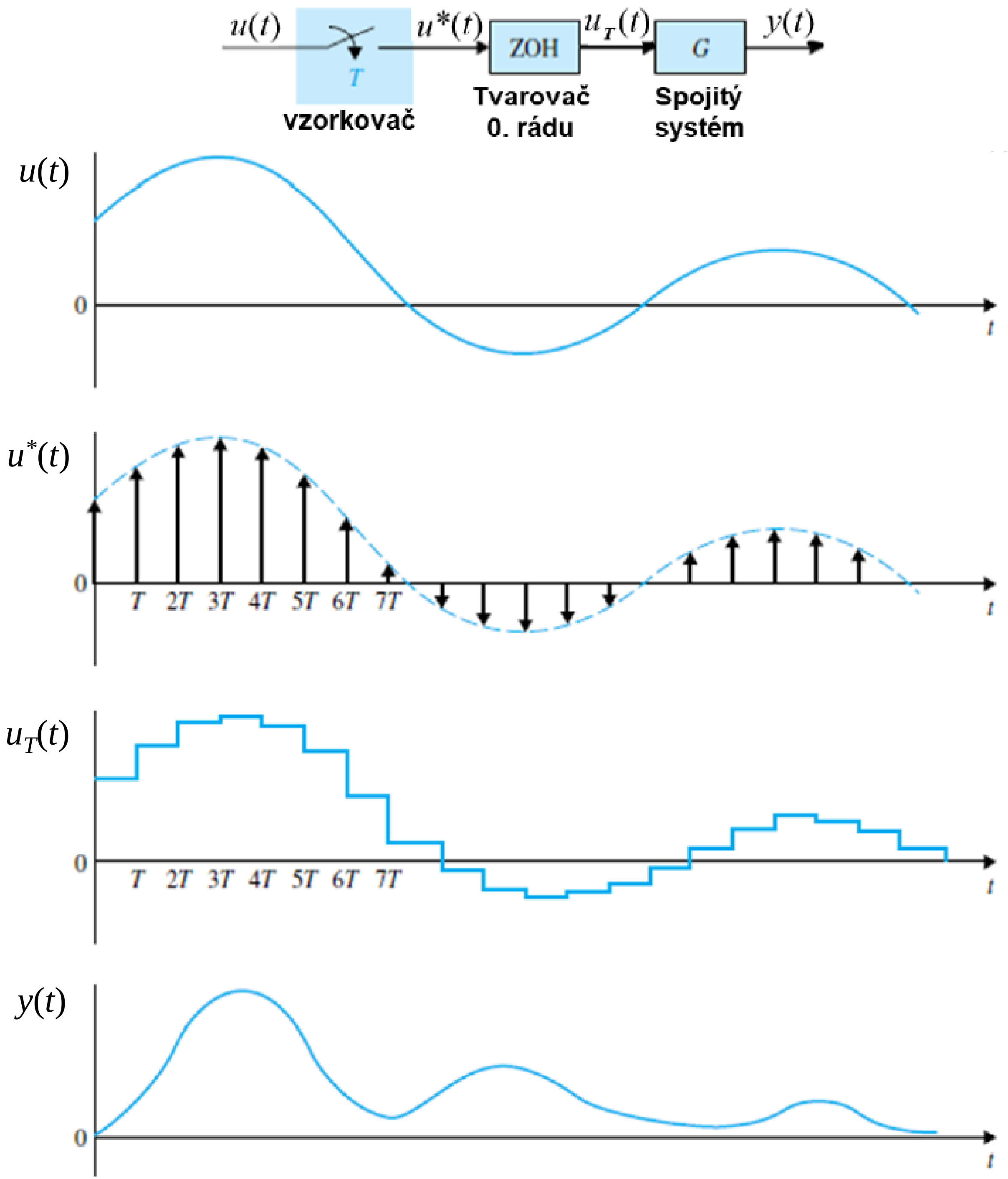
2. prednáška - OBSAH

Lineárny diskrétny regulačný obvod

- vzorkovač
- tvarovač
- $\mathcal{Z}$ – transformácia
- vety o limitách
- voľba periódy vzorkovania

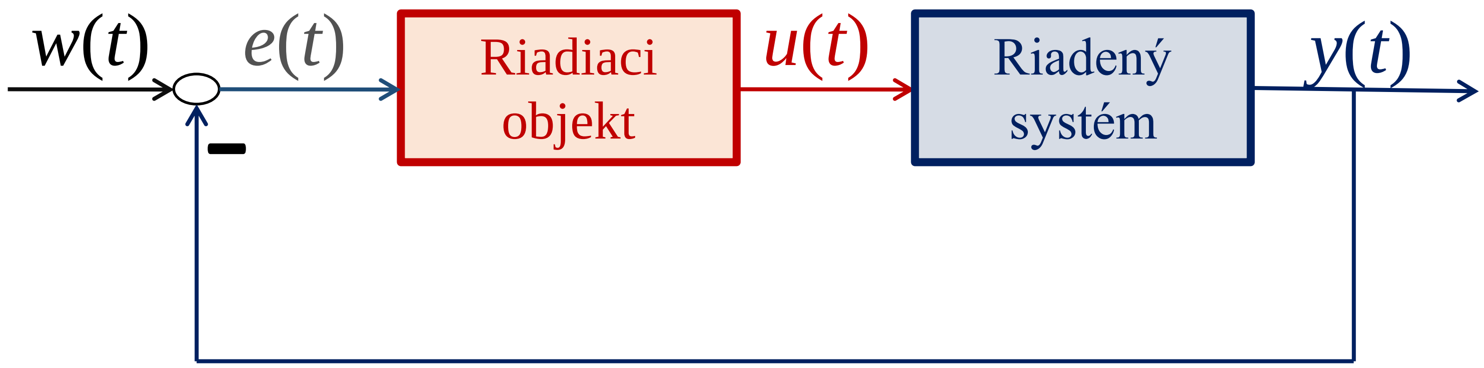
Získanie diskrétnej prenosovej funkcie (zo spojitej pren. funkcie)

- klasický prístup
- univerzálny prístup
- aproximatívny prístup



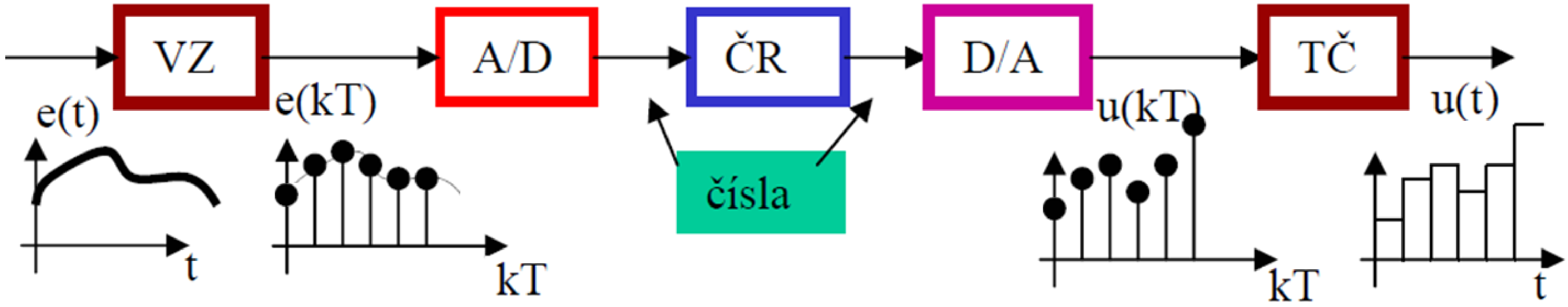
Prevod spojitého signálu $u(t)$ na vzorkovaný $u^{*}(t)$ a po častiach konštantný signál $u_T(t)$.

Lineárny diskrétny regulačný obvod



Rozdelenie prvkov analógového regulačného obvodu

Diskrétny riadiaci (regulačný) obvod je taký obvod, kde **aspoň jeden prvok je diskrétny,** čo znamená, že pracuje s veličinami v tvare postupnosti diskrétnych hodnôt, vytváraných spravidla v pravidelných časových intervaloch ***T*** (intervaloch vzorkovania).



Základná schéma diskrétnych (číslicových) riadiacich obvodov

Opis prvkov diskrétneho regulačného obvodu (1/2)

- **ČR** – **Číslicový Regulátor** je základným prvkom diskrétneho obvodu – počítač, ktorý pracuje s číslami, a teda vstupná aj výstupná veličina je číslo. Vstupnou veličinou do ČR je regulačná odchýlka, ktorá musí mať podobu postupnosti čísel prichádzajúcich do regulátora v pravidelných časových intervaloch. **Časová vzdialenosť jednotlivých vzoriek sa volá perióda vzorkovania.** Konvertovanie spojitej regulačnej odchýlky do požadovanej podoby sa robí pomocou dvoch ďalších blokov diskrétneho obvodu.

- **VZ** – **Vzorkovač** - jeho úlohou je rozložiť priebeh spojitého signálu do postupnosti impulzov (vzorkovať).

Opis prvkov diskrétneho regulačného obvodu (2/2)

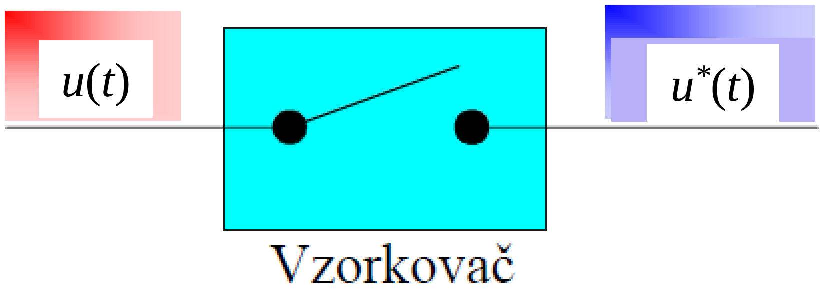
•**A/D** – **Analógovo-Číslicový** (digitálny) **prevodník -** jeho úlohou je konvertovať impulz regulačnej odchýlky na číslo, ktoré vie číslicový regulátor spracovať.

Výstupnou veličinou ČR je akčný zásah v danom časovom okamžiku v tvare čísla. Vstupná veličina spojitého riadeného systému je spojitý signál, a preto treba zabezpečiť konverziu akčného zásahu v tvare čísla do spojitej podoby. Túto konverziu realizujú dva bloky diskrétneho riadiaceho obvodu:

•**D/A** – **Číslicovo** (digitálny) **Analógový-prevodník** – zabezpečí prevod akčného zásahu v tvare čísla do tvaru impulzu, ktorého hodnota je definovaná v časoch vzorkovania.

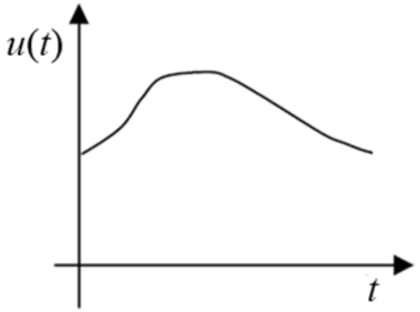
•**TČ** – **Tvarovač** - pre spojitý vstup riadeného systému zabezpečuje, aby akčný zásah bol definovaný aj v časoch medzi intervalmi vzorkovania.

VZORKOVAČ

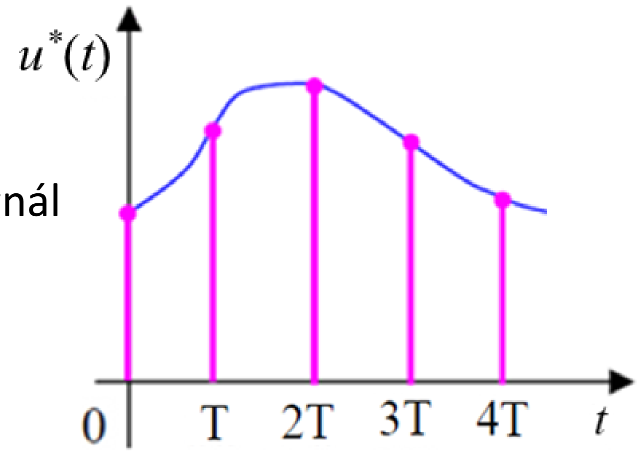


Vzorkovač v pravidelných vzorkovacích intervaloch ***T*** spína na krátku dobu ***h*** a prepojuje tak regulačnú slučku. Počas zostávajúcej doby intervalu vzorkovania je regulačný obvod rozpojený.

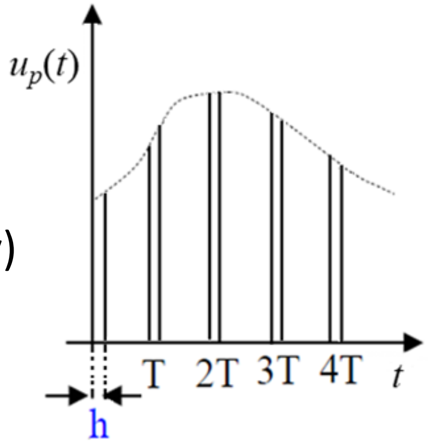
spojitý signál



Ideálny diskrétny signál



diskrétny signál
(postupnosť impulzov)



Z technického hľadiska elektronický spínač vo vzorkovači rozkladá priebeh spojitého signálu $u(t)$ do postupnosti impulzov veľmi malej šírky ***h***, a preto z hľadiska matematického budeme považovať túto šírku impulzov za zanedbateľne malú oproti veľkosti periódy vzorkovania ***T***.

VZORKOVANIE

VZORKOVAČ mení spojitý signál ***u*(*t*)** na diskrétny signál ***u**(*t*)**. Výstupným signálom je postupnosť impulzov šírky ***h*** (predpokladáme ***h*** → 0), ktorých výška sa rovná hodnotám vstupného signálu *u*(*t*) v okamihoch s konštantnou periódou vzorkovania ***T***, t. j. v časoch ***t* = 0, *T*, 2*T*, 3*T*,...**

Vzorkovaním sa vytvára postupnosť impulzov (diskrétna funkcia):

$$u^*(t)=u(kT) \quad \text{pre} \quad k=0, 1, 2,...$$
$$u^*(t)=0 \quad \text{pre} \quad kT<t<(k+1)T$$

Diracov impulz a jeho vlastnosti:

$$\boxed{\begin{aligned} \delta(t) &= 0 \quad pre \quad t \neq 0 \\ \delta(t) &= \infty \quad pre \quad t = 0 \end{aligned}} \qquad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1}$$

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = \int_0^\infty \delta(t)e^{-sT}\,\mathrm{d}t = 1$$
$$\mathscr{L}\{\delta(t-kT)\} = e^{-skT} \qquad (1)$$

Diskrétna funkcia je postupnosť Diracových impulzov modulovaných okamžitými hodnotami vstupného spojitého signálu, čo môžeme formulovať vzťahom:

$$\boxed{u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\delta(t - kT)} \qquad (2)$$

Laplaceova transformácia diskrétneho signálu (2) je:

$$\boxed{\begin{aligned} U^*(s) &= \mathscr{L}\{u^*(t)\} = \int_0^{\infty} u^*(t)e^{-sT}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\delta(t - kT)e^{-sT}\,\mathrm{d}t = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) \int_0^{\infty} \delta(t - kT)\,\mathrm{d}t \end{aligned}} \qquad (3)$$

Na základe (1) pre (3) potom platí:

$$\boxed{U^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)e^{-skT}} \qquad (4)$$

Zavedieme označenie
(***T*** je **perióda vzorkovania**):

$$\boxed{z = e^{sT}}$$

Potom $\mathscr{L}$ - transformáciu nahradíme $\mathscr{Z}$ – transformáciou:

$$\mathscr{Z}\{u^*(t)\} = \mathscr{Z}\{u^*(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)z^{-k} = u(0) + u(T)z^{-1} + u(2T)z^{-2} + \dots$$

Definícia $\mathscr{Z}$ - transformácie daná nasledovným vzťahom, kde ***z = e***^{sT} a ***T*** je perióda vzorkovania:

$$U^*(z) = \mathscr{Z}\{u^*(t)\} = \mathscr{Z}\{u^*(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} u^*(kT)z^{-k}$$

Nasleduje niekoľko príkladov výpočtu $\mathscr{Z}$ - transformácie, kde využívame nasledovný vzťah.

vzťah pre súčet nekonečného geometrického radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, ktorý je $\frac{a_0}{1-q}$, (kde $a_n = a_0 q^n$, a_0 je prvý člen geometrického radu a q je jeho kvocient, pre ktorý kvôli konvergencii radu musí platiť $|q| < 1$)

$\mathscr{Z}$-transformácia **Diracovho impulzu** (Kroneckerova postupnosť), kde $g(kT) = \delta(kT) = 1$ pre $k = 0$ a $g(kT) = \delta(kT) = 0$ pre $k = 1, 2, \ldots$):

$$G(z) = \mathscr{Z}\{g(kT)\} = \mathscr{Z}\{\delta(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(kT) z^{-k} = 1z^0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + \ldots = 1$$

$\mathscr{Z}$-transformácia vzorkovaného **jednotkového skoku** (diskrétny Heavisideov jednotkový skok), kde $g(kT) = 1$ pre $k = 0, 1, 2, \ldots$ platí ($a_0 = 1,\ q = z^{-1}$, $|z^{-1}| < 1$ alebo $|z| > 1$):

$$G(z) = \mathscr{Z}\{g(kT)\} = \mathscr{Z}\{1\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Pre $\mathscr{Z}$-transformáciu vzorkovaného **skoku o veľkosti** A, kde $g(kT) = A$ pre $k = 0, 1, 2, \ldots$ platí:

$$G(z) = \mathscr{Z}\{g(kT)\} = \mathscr{Z}\{A\} = A\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = A(1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots) = A\frac{z}{z-1} = A\frac{1}{1-z^{-1}}$$

Pre $\mathscr{Z}$-obraz **exponenciálnej funkcie**, kde $g(kT) = e^{-akT} = D^k$ pre $k = 0, 1, 2, \ldots$, a je reálna konštanta (použili sme substitúciu $D = e^{-aT}$, $a_0 = 1$, $q = Dz^{-1}$, $|Dz^{-1}| < 1$ alebo $|z| > |D|$) platí:

$$G(z) = \mathscr{Z}\{x(kT)\} = \mathscr{Z}\{D^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} D^k z^{-k} = 1 + Dz^{-1} + D^2 z^{-2} + \ldots = \frac{z}{z - D} = \frac{1}{1 - Dz^{-1}}$$

$$z = e^{sT}$$

g(t)	**G(s)**	**G(z)**
Funkcia	**$\mathscr{L}$ – transformácia**	**$\mathscr{Z}$ – transformácia**
$\delta(t)$ Dirac.	1	1
$1(t)$ Skok	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$
A $1(t)$	$A\frac{1}{s}$	$A\frac{z}{z-1} = A\frac{1}{1-z^{-1}}$
t Rampa	$\frac{1}{s^2}$	$T\frac{z}{(z-1)^2} = T\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-D} = \frac{1}{1-Dz^{-1}}$, $D = e^{-aT}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{TDz}{(z-D)^2} = \frac{TDz^{-1}}{(1-Dz^{-1})^2}$, $D = e^{-aT}$

Tabuľka. $\mathscr{Z}$-obrazy niektorých funkcií (slovník $\mathscr{Z}$-transformácie).

Vlastnosti $\mathscr{Z}$ - transformácie

Definícia $\mathscr{Z}$ - transformácie :

$$G(z) = Z\{g(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT) z^{-k}$$

- Sčítanie a odčítanie dvoch postupností

$$G_1(z) = \mathscr{Z}\{g_1(kT)\}, \quad G_2(z) = \mathscr{Z}\{g_2(kT)\},$$
$$\mathscr{Z}\{g_1(kT) \pm g_2(kT)\} = \mathscr{Z}\{g_1(kT)\} \pm \mathscr{Z}\{g_2(kT)\} = G_1(z) \pm G_2(z)$$

- Násobenie konštantou α

$$\mathscr{Z}\{\alpha g(kT)\} = \alpha \mathscr{Z}\{g(kT)\} = \alpha G(z)$$

- Lineárnosť

$$G_1(z) = \mathscr{Z}\{g_1(kT)\}, \quad G_2(z) = \mathscr{Z}\{g_2(kT)\},$$
$$\mathscr{Z}\{\alpha_1 g_1(kT) + \alpha_2 g_2(kT)\} = \alpha_1 \mathscr{Z}\{g_1(kT)\} + \alpha_2 \mathscr{Z}\{g_2(kT)\} = \alpha_1 G_1(z) + \alpha_2 G_2(z)$$

- Posunutie vpravo - časové oneskorenie (d)

$$\mathscr{Z}\{g(kT-dT)\} = z^{-d}G(z), \quad d \geq 0$$

- Posunutie vľavo - časový predstih $(i > 1)$

$$\mathscr{Z}\{g(kT+iT)\} = z^{i}G(z) - \sum_{n=0}^{i-1} x(n)z^{i-n} = z^{i}\left[G(z) - \sum_{n=0}^{i-1} g(n)z^{-n}\right]$$

- Veta o počiatočnej hodnote

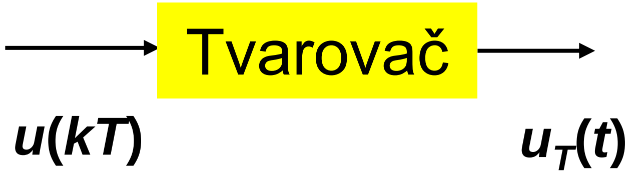
$$g(0) = \lim_{k\to 0} g(kT) = \lim_{z\to\infty} G(z)$$

- Veta o konečnej hodnote

$$g(\infty) = \lim_{k\to\infty} g(kT) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}G(z) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})G(z)$$

ak funkcia $(1-z^{-1})G(z)$ nemá žiadne póly na a ani mimo jednotkovej kružnice v z-rovine (t. j. v komplexnej rovine pólov z).

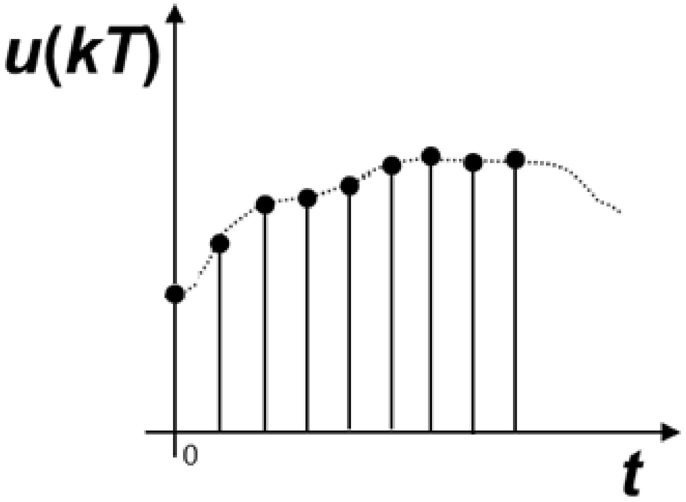
TVAROVAČ

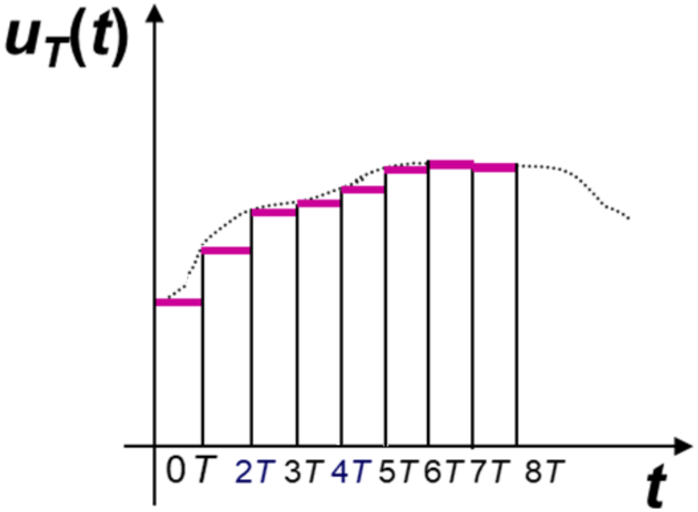


Pre spojitý vstup riadeného systému **tvarovač** zabezpečuje, aby bol akčný zásah definovaný aj v časoch medzi intervalmi vzorkovania.

Tvarovač 0. rádu prevádza impulzný signál zo vzorkovača na konštantný signál trvajúci jednu periódu vzorkovania.

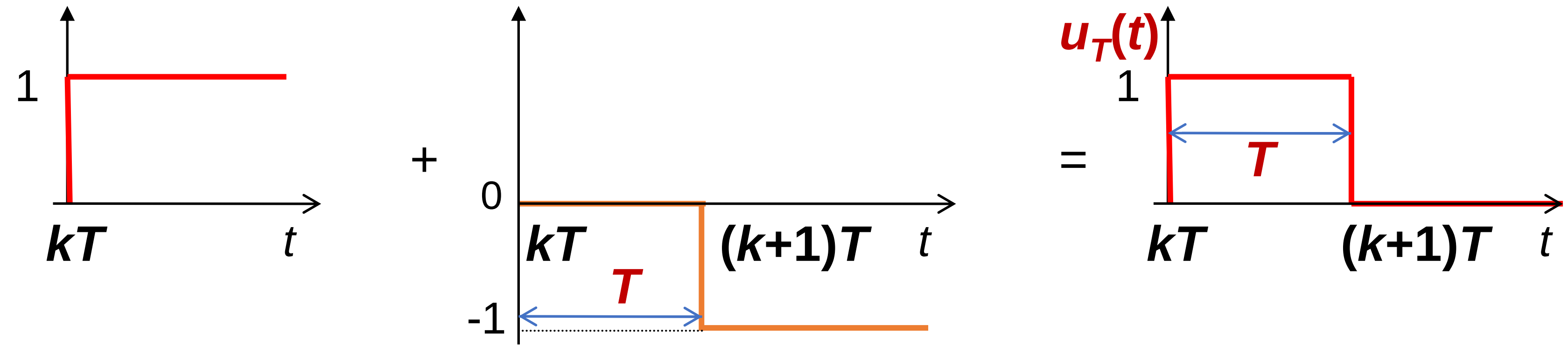
Takýto tvarovač vytvorí z každého impulzu približne obdĺžnikový pulz šírky ***T***.





Odvodenie prenosovej funkcie tvarovača 0. rádu $G_T(s)$

Pre určenie prenosovej funkcie $G_T(s)$ **(Laplaceovho obrazu) tvarovacieho člena 0. rádu** si môžeme funkciu $u_T(t)$ (na výstupe z tvarovača) predstaviť ako súčet dvoch skokových funkcií posunutých navzájom o čas T a majúcich rozdielne znamienka:



Pre výstupný signál platí:

$$u_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\{1(t - kT) - 1\,[t - (k+1)T]\}$$

Pre výstupný signál použijeme $\mathscr{L}$ - transformáciu a využijeme jej vlastnosti, teda dostaneme:

$$U_T(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\frac{1}{s}\left[e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s}\right] e^{-kTs}$$

$$\mathscr{L}\{1(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-sT}\,dt = \frac{1}{s}$$

$$\mathscr{L}\{1(t-D)\} = L\{1(t)\}e^{-Ds} = \frac{e^{-Ds}}{s}$$

Výstupný signál z tvarovača:

$$U_T(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\left[\frac{e^{-kTs}}{s} - \frac{e^{-(k+1)Ts}}{s}\right]$$

D=kT ***D=(k+1)T***

Laplaceov obraz vstupného signálu do tvarovača (vzťah (4) zo str. 9)

$$U^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)e^{-kTs}$$

Prenosová funkcia tvarovača 0. rádu

$$U_T(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}U^*(s) \longrightarrow \boxed{G_T(s) = \frac{U_T(s)}{U^*(s)} = \frac{1-e^{-Ts}}{s}}$$

Matematický opis lineárnych diskrétnych systémov

Lineárne spojité systémy	Lineárne diskrétne systémy
Spojité veličiny $y(t)$, $u(t)$, $e(t)$	Diskrétne veličiny: $y(k)$, $u(k)$, $e(k)$ Diskrétny čas: $t=kT$, $k=1,2,3,\ldots$
Diferenciálna rovnica $\boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j u^{(j)}(t)}$	Diferenčná rovnica $\boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i y[(k+i)T] = \sum_{j=0}^{m} b_j u[(k+j)T]}$
$\mathscr{L}$ -transformácia $\boxed{Y(s) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st}\, dt}$	$\mathscr{Z}$ -transformácia $\boxed{Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) z^{-k} \qquad \boxed{z = e^{sT}}}$

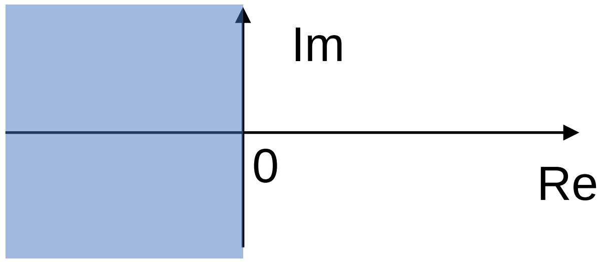
Lineárne spojité systémy

Spojitá prenosová funkcia
s dopravným oneskorením *D*

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{B(s)}{A(s)}e^{-Ds}$$

póly *G(s)*: $A(s) = 0 \rightarrow s_i$

stabilita *G*(*s*): $\mathrm{Re}\{s_i\} < 0$



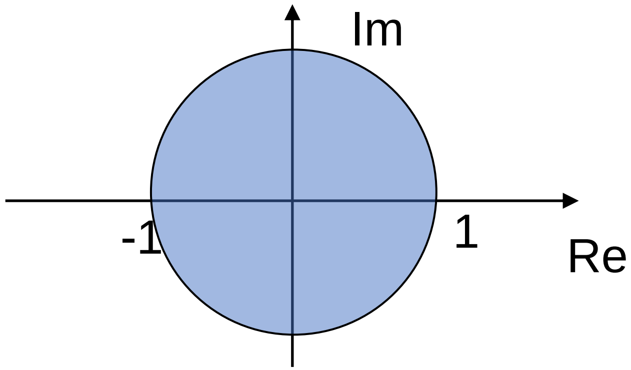
Lineárne diskrétne systémy

Diskrétna prenosová funkcia
s dopravným oneskorením *d*

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{B(z)}{A(z)}z^{-d}$$

póly *G*(*z*): $A(z) = 0 \rightarrow z_i$

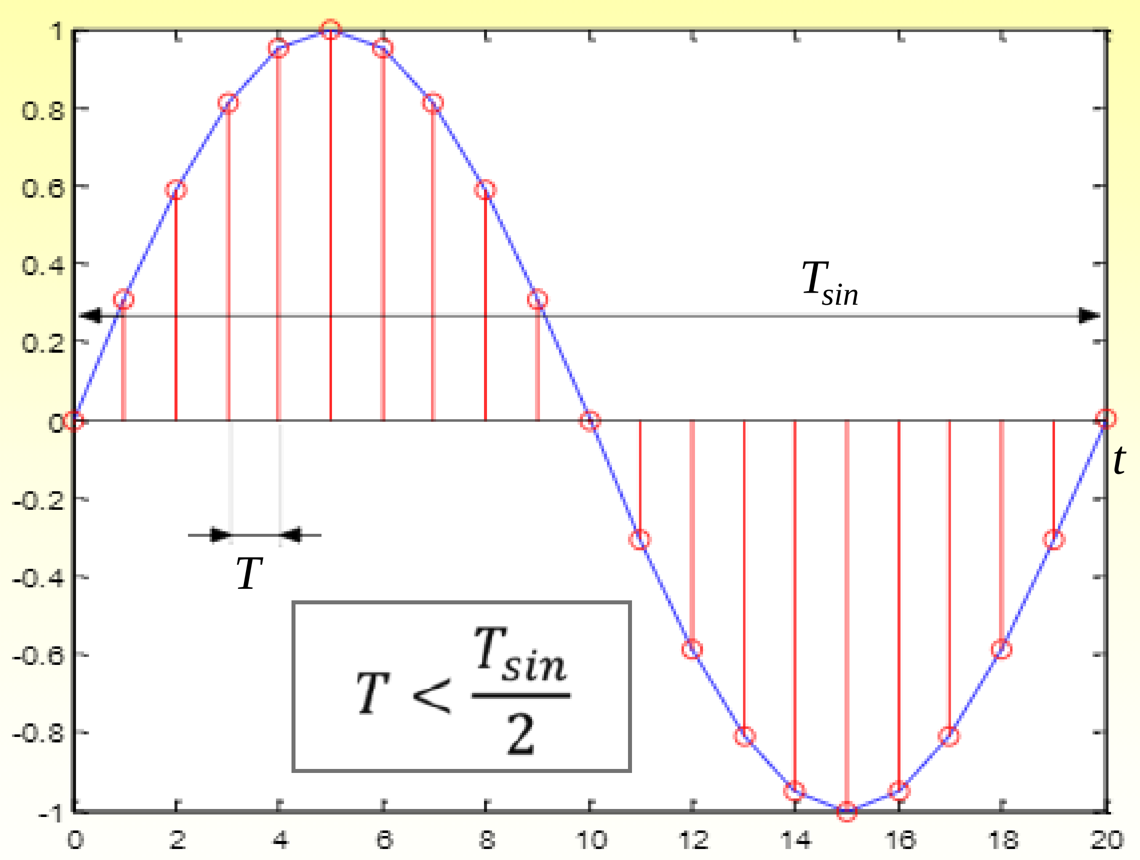
stabilita *G*(*z*): $|z_i| < 1$



Voľba periódy vzorkovania *T*

- **Voľba periódy vzorkovania na základe frekvenčnej analýzy vzorkovaného signálu,** ktorého frekvenčné spektrum je ohraničené intervalom $(-\omega_{max}, \omega_{max})$. Frekvencia vzorkovania ω_{vzork} musí byť väčšia ako dvojnásobok maximálnej zložky frekvencie ω_{max}.

Shannon-Kotelnikovova veta (teoréma)



$$\omega_{vzork} = \frac{2\pi}{T} > 2\omega_{\max}$$

Perióda vzorkovania T musí byť menšia ako polovica periódy harmonickej zložky signálu s najkratšou periódou T_{sin}.

- Voľba T na základe prenosovej funkcie riadeného systému,
  - z prechodovej charakteristiky riadeného systému ($t_{ust} \approx t_{90}$), kde t_{90} je čas, za ktorý prechodová charakteristika dosiahne 90% ustálenej hodnoty:

$$\boxed{\begin{aligned} T &\in \left(\frac{1}{15}, \frac{1}{5}\right) t_{ust} \\ T &\approx \frac{1}{10} t_{ust} \end{aligned}}$$

  - zo sumy časových konštánt riadeného systému $T_s = \sum T_i$, kde T_i sú časové konštanty systému, alebo z najmenšej časovej konštanty systému $T_{\min}$:

$$\boxed{\begin{aligned} T &\in \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right) T_s \\ T &\in \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) T_{\min} \end{aligned}}$$

- Voľba T pre systém s dopravným oneskorením D (ak nie je dopravné oneskorenie príliš veľké):

$$\boxed{T = \frac{D}{n}, \qquad n = 1,\ 2, \ldots}$$

Prepočet **spojitej** prenosovej funkcie ***G*(*s*)** na **diskrétnu** prenosovú funkciu ***G*(*z*)**:

$$\boxed{G(s) \to G(z)}$$

S tvarovačom 0. rádu (vždy ak navrhujeme regulátor)

- klasický postup
- univerzálny postup (uvedený v skriptách prof. Kozáka)

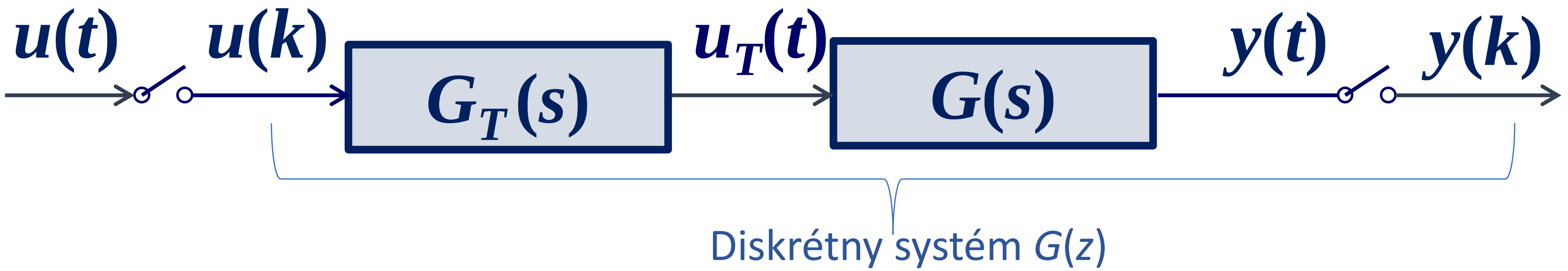
- obdĺžniková náhrada (dopredná a spätná)
- lichobežníková náhrada

aproximatívne prístupy

Klasický postup – s tvarovačom 0. rádu – teória (1/2)

V diskrétnom regulačnom obvode je pred spojitý regulovaný systém s prenosovou funkciou $G(s)$ zaradený tvarovací člen 0. rádu s prenosovou funkciou $G_T(s)$

$$G_T(s) = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-sT}\right)$$



$$\boxed{G(z)} = \mathscr{Z}\{G_T(s)G(s)\} = \mathscr{Z}\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}G(s)\right\} = \mathscr{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} - \mathscr{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}e^{-Ts}\right\} =$$

$$= (1 - z^{-1})\mathscr{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \boxed{\frac{z-1}{z}\underbrace{\mathscr{Z}\left\{\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]_{t=kT}\right\}}_{Y(z)}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

kde

$$\boxed{z = e^{sT}} \qquad u(t) = 1(t) \quad \rightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s} \quad \rightarrow \quad U(z) = \frac{z}{z-1}$$

Klasický postup – s tvarovačom 0. rádu – teória (2/2)

Postup:

$G(s) \rightarrow G(z)$

- spojitú prenosovú funkciu ***G*(*s*)** podelíme ***s***
- ***G*(*s*)/*s*** rozložíme na parciálne zlomky
- určíme spojitú prechodovú funkciu ***h*(*t*)**
- vytvoríme diskrétnu prechodovú funkciu ***h*(*kT*)** (dosadením *t*=*kT*, kde *T* je perióda vzorkovania)
- zo znalostí jednoduchých obrazov $\mathscr{Z}$ - transformácie resp. z tabuľky $\mathscr{Z}$ - transformácie a vynásobením týchto obrazov výrazom **(*z*-1)/*z***, určíme príslušnú diskrétnu prenosovú funkciu ***G*(*z*)**

$$\frac{G(s)}{s} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \boxed{h(t)} \xrightarrow{t=kT} \boxed{h(kT)} \xrightarrow{\mathscr{Z}} \boxed{Y(z)}$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{\boxed{U(z)}} = \frac{z-1}{z} Y(z) = \frac{z-1}{z} \mathscr{Z}\left\{ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]_{t=kT} \right\}$$

Jednotkový skok

PRÍKLAD 1: Klasický postup – s tvarovačom 0. rádu (1/2)

$$G(s) = \frac{K}{T_1 s + 1} = \frac{2}{2s + 1}$$

volíme *T*=0.5

- spojitú prenosovú funkciu **G(s)** podelíme ***s*** a následne **G(s)/s** rozložíme na parciálne zlomky

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{2}{s(2s+1)} = \frac{1}{s(s+0.5)} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+0.5}$$

- Určíme spojitú prechodovú funkciu ***h*(*t*)**:

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s} - \frac{2}{s+0.5}\right\} = 2 - 2e^{-0.5t}$$

- Vytvoríme diskrétnu prechodovú funkciu ***h*(*kT*)** (dosadením *t*=*kT*, kde *T* je perióda vzorkovania)

$$h(kT) = 2 - 2e^{-0.25k} = 2 - 2D^k$$

$$D = e^{-0.25} = 0.7788$$

PRÍKLAD 1: Klasický postup – s tvarovačom 0. rádu (2/2)

• zo znalostí jednoduchých obrazov $\mathscr{Z}$ - transformácie resp. z tabuľky $\mathscr{Z}$ - transformácie a vynásobením týchto obrazov výrazom **(*z*-1)/*z***, určíme príslušnú diskrétnu prenosovú funkciu ***G*(*z*)**

$G(s)$	$g(t)$	$G(z)$
$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-aT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$

$$g(k)=D^k \quad \Rightarrow \quad G(z)=\frac{z}{z-D}$$

$$G(z)=\frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\{h(kT)\}=\frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\{2-2D^k\}=\frac{z-1}{z}\left(2\frac{z}{z-1}-2\frac{z}{z-D}\right)=$$

$$=2-2\frac{z-1}{z-0.7788}=\frac{0.4424}{z-0.7788}=\frac{0.4424z^{-1}}{1-0.7788z^{-1}}$$

PRÍKLAD 2: Klasický postup – s tvarovačom 0.rádu (1/2)

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = \frac{1}{(s+1)(2s+1)}$$

volíme *T*=0.5

- ***G(s)/s*** rozložíme na parciálne zlomky

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{1}{2s(s+1)(s+0.5)} = \frac{0.5}{s(s+1)(s+0.5)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+0.5}$$

- Určíme spojitú prechodovú funkciu ***h*(*t*)**:

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+0.5}\right\} = 1 + e^{-t} - 2e^{-0.5t}$$

- Vytvoríme diskrétnu prechodovú funkciu ***h*(*kT*)** (dosadením *t*=*kT*, kde *T* je perióda vzorkovania)

$$h(kT) = 1 + e^{-kT} - 2e^{-0.5kT} = 1 + D_1^{\,k} - 2D_2^{\,k}$$

$$D_1 = e^{-0.5} = 0.6065$$
$$D_2 = e^{-0.25} = 0.7788$$

PRÍKLAD 2: Klasický postup – s tvarovačom 0. rádu (2/2)

• zo znalostí jednoduchých obrazov $\mathscr{Z}$ - transformácie resp. z tabuľky $\mathscr{Z}$ - transformácie a vynásobením týchto obrazov výrazom **(*z*-1)/*z***, určíme príslušnú diskrétnu prenosovú funkciu ***G*(*z*)**

$G(s)$	$g(t)$	$G(z)$
$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$

$$g(k)=D^k \quad \Rightarrow \quad G(z)=\frac{z}{z-D}$$

$$G(z)=\frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\{h(kT)\}=\frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\{1+D_1^k-2D_2^k\}=\frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-D_1}-2\frac{z}{z-D_2}\right)=$$

$$=1+\frac{z-1}{z-0.6065}-2\frac{z-1}{z-0.7788}=\frac{0.0489z+0.03814}{z^2-1.385z+0.4723}=\frac{0.0489z^{-1}+0.03814z^{-2}}{1-1.385z^{-1}+0.4723z^{-2}}$$

Aproximatívne prístupy

- umožňujú priamo bez znalosti prechodových funkcií nájsť príslušné $\mathscr{L}$ – obrazy

- obdĺžniková náhrada – dopredná
- obdĺžniková náhrada – spätná
- lichobežníková náhrada

aproximatívne prístupy

metóda	diskrétny ekvivalent
lichobežníková náhrada (trapezoidal method - Tustin)	$s \approx \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
obdĺžniková náhrada - dopredná (forward rectangular method)	$s \approx \frac{z-1}{T} = \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}$
obdĺžniková náhrada - spätná (backward rectangular method)	$s \approx \frac{z-1}{Tz} = \frac{1-z^{-1}}{T}$

vzťahy budú odvodené v nasledujúcej prednáške

PRÍKLAD 1a: Numerická integrácia – obdĺžniková a lichobežníková (1/2)

$$G(s)=\frac{K}{T_1 s+1}=\frac{2}{2s+1}$$

volíme periódu vzorkovania napr. T=0.5

Obdĺžniková náhrada - dopredná

$$G(s)\rightarrow s\approx\frac{1}{T}(z-1)\rightarrow G(z)$$

$$G(z)=\frac{2}{\frac{2}{T}(z-1)+1}=\frac{2}{4z-3}=\frac{2z^{-1}}{4-3z^{-1}}=\frac{0.5z^{-1}}{1-0.75z^{-1}}$$

Obdĺžniková náhrada - spätná

$$G(s)\rightarrow s\approx\frac{1}{Tz}(z-1)\rightarrow G(z)$$

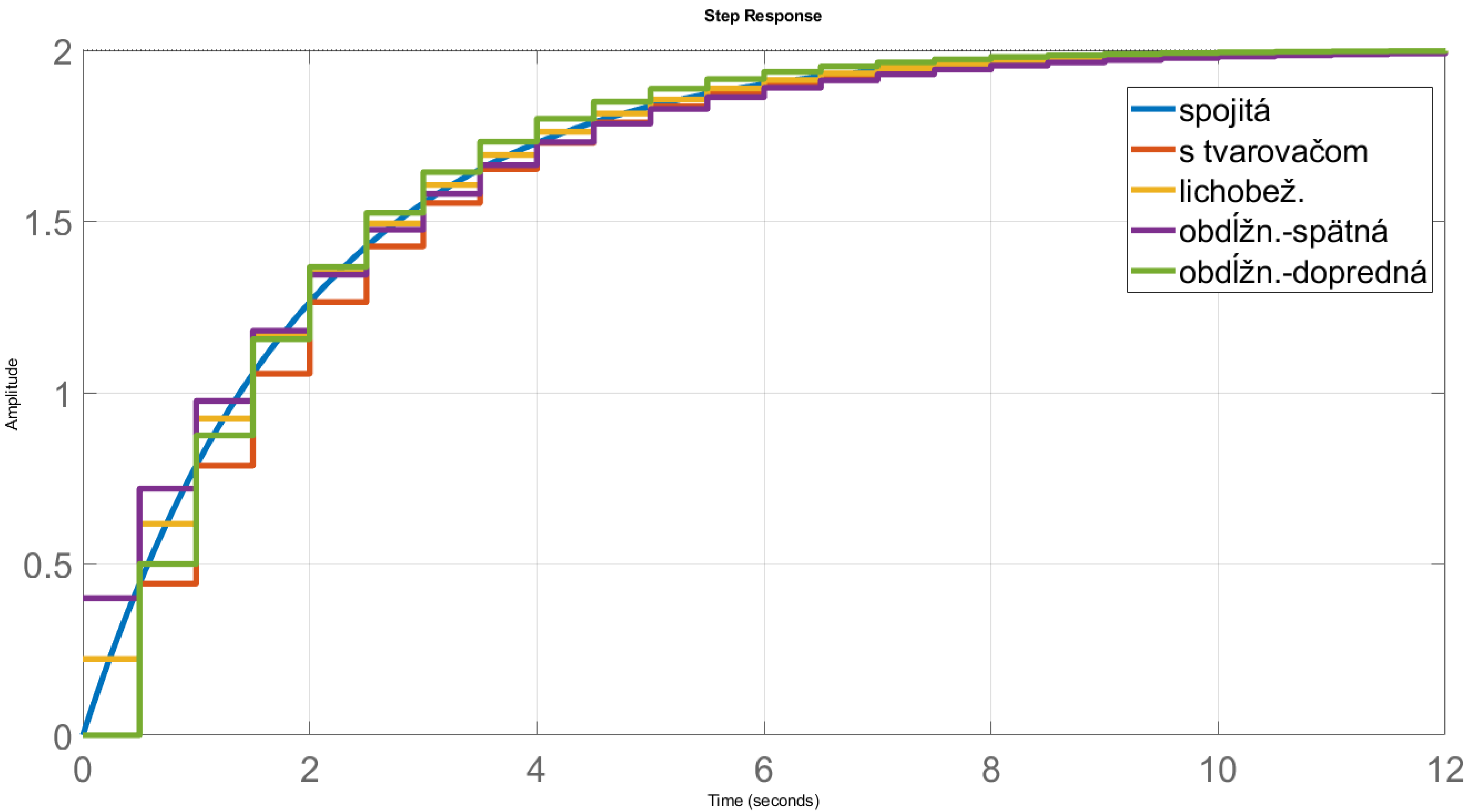
$$G(z)=\frac{2}{\frac{2}{Tz}(z-1)+1}=\frac{z}{2.5z-2}=\frac{1}{2.5-2z^{-1}}=\frac{0.4}{1-0.8\,z^{-1}}$$

Lichobežníková náhrada

$$G(s)\rightarrow s\approx\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\rightarrow G(z)$$

$$G(z)=\frac{2}{\frac{4}{T}\frac{z-1}{z+1}+1}=\frac{2z+2}{9z-7}=\frac{2+2z^{-1}}{9-7z^{-1}}=\frac{0.2222+0.2222z^{-1}}{1-0.7778z^{-1}}$$

PRÍKLAD 1a: Numerická integrácia – obdĺžniková a lichobežníková (2/2)



Prepočet **spojitej** prenosovej funkcie ***G*(*s*) s dopravným oneskorením** na **diskrétnu** prenosovú funkciu ***G*(*z*)**

Volíme *T* pre spojitý systém s dopravným oneskorením *D*
(*d* je oneskorenie diskrétneho systému):

$$d = \frac{D}{T} \overset{!}{=} 1;\ 2;\ldots$$

Pri určovaní *G*(*z*) postupujeme tak, že najprv prepočítame do *z*-oblasti časť funkcie bez dopravného oneskorenia ($G^*(s)$), získame $G^*(z)$, ktoré nakoniec vynásobíme z^{-d}.

$$G(s) = \underbrace{\boxed{\frac{B(s)}{A(s)}}}_{G^*(s)} \boxed{e^{-Ds}} \quad \xrightarrow{T} \quad G(z) = \underbrace{\boxed{\frac{B(z)}{A(z)}}}_{G^*(z)} \boxed{z^{-d}}$$

PRÍKLAD 3: Klasický postup – s tvarovačom 0. rádu (1/2)

$$G(s)=\underbrace{\boxed{\frac{K}{(T_1 s+1)^2}}}_{G^*(s)}e^{-Ds}=\frac{1}{(2s+1)^2}e^{-s}$$

volíme *T*=1

- ***G*(s)/s*** rozložíme na parciálne zlomky (rozkladáme bez dopravného oneskorenia)

$$\frac{G^*(s)}{s}=\frac{1}{2s(s+0.5)2(s+0.5)}=\frac{0.25}{s(s+0.5)(s+0.5)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+0.5}-\frac{0.5}{(s+0.5)^2}$$

- Určíme spojitú prechodovú funkciu ***h*(*t*)**:

$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+0.5}-\frac{0.5}{(s+0.5)^2}\right\}=1-e^{-0.5t}-0.5te^{-0.5t}$$

- Vytvoríme diskrétnu prechodovú funkciu ***h*(*kT*)** (dosadením *t*=*kT*, kde *T* je perióda vzorkovania)

$$h(kT)=1-e^{-0.5kT}-0.5kTe^{-0.5kT}=1-D_1^{\,k}-0.5kTD_1^{\,k}$$

$D_1=e^{-0.5T}=0.6065$

PRÍKLAD 3: Klasický postup – s tvarovačom 0. rádu (2/2)

• zo znalostí jednoduchých obrazov $\mathcal{Z}$ – transformácie resp. z tabuľky $\mathcal{Z}$ – transformácie a vynásobením týchto obrazov výrazom **(z-1)/z**, určíme príslušnú diskrétnu prenosovú funkciu ***G(z)***

$G(s)$	$g(t)$	$G(z)$
$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Te^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$

$$t = kT \qquad D = e^{-aT}$$

$$g(k) = D^k \quad \Rightarrow \quad G(z) = \frac{z}{z-D}$$

$$g(k) = kTD^k \quad \Rightarrow \quad G(z) = \frac{TDz}{(z-D)^2}$$

$$G^*(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\{h(kT)\} = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\{1 - D_1^k - 0.5kTD_1^k\} = \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-D_1} - 0.5\frac{TD_1 z}{(z-D_1)^2}\right) =$$

$$= 1 - \frac{z-1}{z-0.6065} - 0.5\frac{0.6065(z-1)}{(z-0.6065)^2} = \boxed{\frac{0.0902z + 0.0647}{z^2 - 1.213z + 0.3679}} \Rightarrow \boxed{G(z) = \boxed{\frac{0.0902z^{-1} + 0.0647z^{-2}}{1 - 1.213z^{-1} + 0.3679z^{-2}}}\boxed{z^{-1}}}$$

Help (PRÍKLAD 3) - MATLAB

```
>> [R,P,K] = residue (1, [4 4 1 0])

R = -1.0000
     -0.5000
      1.0000

P = -0.5000
      -0.5000
        0

K =  []

>> syms s t
>> ht = ilaplace(1/s/(2*s+1)^2)

ht = 1 - (t*exp(-t/2))/2 - exp(-t/2)
```

```
>> g = tf (1, conv ([2 1],[2 1]),'InputDelay',1)

g =

                          1
  exp(-1*s) *    ---------------
                 4 s^2 + 4 s + 1

Continuous-time transfer function.

>> gz = c2d (g,1)

gz =

               0.0902 z + 0.06461
  z^(-1) *    ----------------------
              z^2 - 1.213 z + 0.3679

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.
```