Číslicové riadenie

3. prednáška

PSD regulátor

a

stabilita diskrétneho regulačného obvodu

OBSAH – 3. prednášky

Návrh PSD regulátora

- spätná obdĺžniková náhrada
- dopredná obdĺžniková náhrada
- lichobežníková náhrada
- prepočet spojitého PID na diskrétny PSD regulátor

Stabilita diskrétneho regulačného obvodu

- metóda bilineárnej transformácie

Diferenčné rovnice

Lineárne LTI diskrétne systémy môžeme opísať pomocou diferenčných rovníc:

- Dopredný tvar (forward form)

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k+i) = \sum_{j=0}^{m} b_j u(k+j),$$

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\ldots+a_1 y(k+1)+a_0 y(k)=b_m u(k+m)+b_{m-1}u(k+m-1)+\ldots+b_1 u(k+1)+b_0 u(k)$$

- Spätný tvar (backward form)

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_j u(k-j), \quad a_0 = 1,$$

$$y(k)+a_1 y(k-1)+\ldots+a_{n-1}y(k-n+1)+a_n y(k-n)=b_0 u(k)+b_1 u(k-1)+\ldots+b_{m-1}u(k-m+1)+b_m u(k-m)$$

$\mathscr{Z}$ - transformácia pre posunuté signály

funkcia	Z - transformácia
$y(k+2)$	$z^2 Y(z) - z^2 y(0) - z\, y(1)$
$yk+1)$	$z\, Y(z) - z\, y(0)$
$y(k)$	$Y(z)$
$y(k-1)$	$z^{-1} Y(z)$
$y(k-2)$	$z^{-2} Y(z)$

Diferenčné rovnice pre systémy s dopravným oneskorením *d*

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i) + \sum_{j=0}^{m} b_j u(k-d-j)$$

$d = D/T$

$n \geq m$

$$q^{-1} y(k) = y(k-1)$$

→ *operátor spätného posunutia*

$$A(q^{-1}) y(k) = q^{-d} B(q^{-1}) u(k)$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_n q^{-n}$$

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + \cdots + b_m q^{-m}$$

$\mathscr{Z}$ - *transformácia*

$$\frac{y(k)}{u(k)} = \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})}, \qquad G(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{z^{-d} B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

Ak $G(z)=B(z)/A(z) = b_1 z^{-1} / (1+a_1 z^{-1})$ → ***Zosilnenie systému:*** $K = b_1/(1+a_1) = B(1)/A(1)$

$$G(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \cdot z^{-1}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-2} + b_2 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})\, Y(z) = (b_1 z^{-2} + b_2 z^{-3})\, U(z)$$

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) = b_1 u(k-2) + b_2 u(k-3)$$

$$y(k) = \ldots\ldots$$

alebo blok ***Discrete Filter***

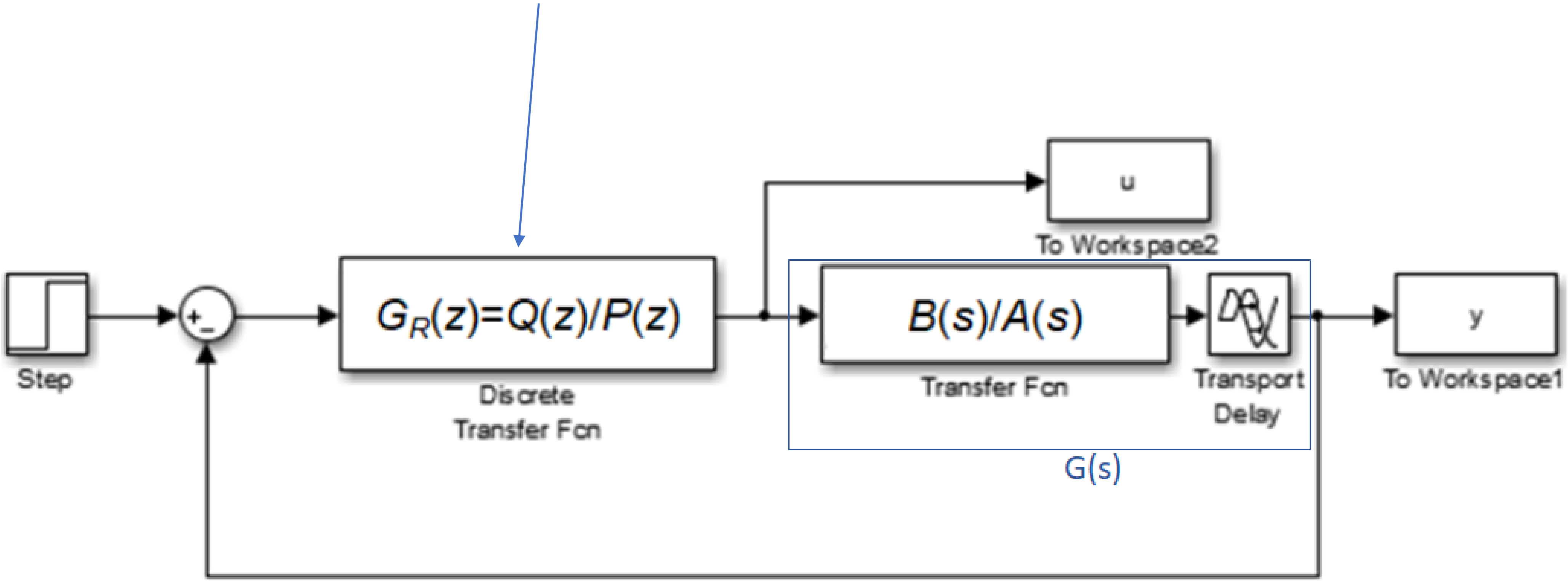


Schéma diskrétneho regulačného obvodu.

Diskretizácia PID regulátorov – PSD regulátory

Nech je navrhnutý PID regulátor s optimálnymi parametrami.

$$e(t) \longrightarrow \boxed{G_R(s)} \longrightarrow u(t)$$

Prenosová funkcia PID regulátora:

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = P + I\frac{1}{s} + Ds = P\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s$$

resp. prechodová funkcia:

$$u(t) = P\left[e(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t e(\tau)d\tau + T_D\frac{de(t)}{dt}\right] = \boxed{Pe(t)} + \boxed{I\int_0^t e(\tau)d\tau} + \boxed{D\frac{de(t)}{dt}} = \boxed{u_P(t)} + \boxed{u_I(t)} + \boxed{u_D(t)} \qquad (1)$$

<u>Úloha</u>:

Prepočítať PID regulátor na ekvivalentný diskrétny PSD (proporcionálno-**s**umačno-**d**iferenčný) **regulátor.**

Pre $\boxed{u_P(t)}$ z rovnice (1) v čase $t = kT$ platí, že $\boxed{u_P(k) = Pe(k)}$. Pre $t = (k-1)T$, dostaneme $u_P(k-1) = Pe(k-1)$. Pre rekurentnú (rýchlostnú) formu potom platí:

$$\boxed{\Delta u_P(k) = u_P(k) - u_P(k-1) = P\left[e(k) - e(k-1)\right]} \qquad (2)$$

Je zrejmé, že po zavedení $\mathscr{Z}$-transformácie platí:

$$\boxed{U_P(z) = P\ E(z)}$$

následne získame diskrétnu prenosovú funkciu pre časť regulátora:

$$\boxed{G_{R_P}(z) = \frac{U_P(z)}{E(z)} = P} \qquad (3)$$

- **Spätná obdĺžniková** náhrada (backward Euler method)
- **Dopredná obdĺžniková** náhrada (forward Euler method)
- **Lichobežníková** náhrada (Trapezoidal method - Tustin)

Spätná obdĺžniková náhrada (1/6)

Deriváciu funkcie $\boxed{u_D(t)}$ v (1) v čase $t = kT$ môžeme aproximovať diferenciou

$$u_D(t) = D\frac{de(t)}{dt} \Rightarrow \boxed{u_D(k) = D\frac{e(k) - e(k-1)}{T}}$$

Pre rekurentnú (rýchlostnú) formu potom platí:

$$u_D(k) - u_D(k-1) = D\frac{e(k) - e(k-1)}{T} - D\frac{e(k-1) - e(k-2)}{T},$$

$$\boxed{\Delta u_D(k) = D\frac{e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)}{T}} \qquad (4)$$

Ak aplikujeme $\mathscr{Z}$-transformáciu

$$\boxed{\begin{aligned}(1 - z^{-1})U_D(z) &= D\frac{(1 - 2z^{-1} + z^{-2})}{T}E(z),\\ U_D(z) &= D\frac{1 - z^{-1}}{T}E(z)\end{aligned}}$$

Spätná obdĺžniková náhrada (2/6)

následne získame diskrétnu prenosovú funkciu pre derivačnú časť regulátora

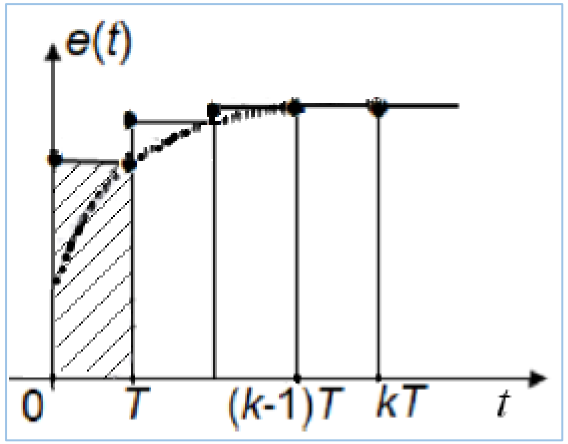
$$\boxed{G_{R_D}(z) = \frac{U_D(z)}{E(z)} = D\frac{1-z^{-1}}{T} = D\frac{z-1}{Tz}.} \qquad (5)$$

Ak porovnáme (5) so spojitou prenosovou funkciou derivačnej časti regulátora $G_{R_D}(s) = Ds$, dostaneme vzťah:

$$\boxed{s \approx \frac{z-1}{Tz} = \frac{1-z^{-1}}{T}.} \qquad (6)$$

Spätná obdĺžniková náhrada

Integrál funkcie $\boxed{u_I(t)}$ v (1) v čase $t = kT$ môžeme nahradiť sumou obdĺžnikov



$$u_I(t) = I\int_0^t e(\tau)d\tau \Rightarrow \boxed{u_I(k) = IT\sum_{i=0}^{k} e(i)}$$

Pre rekurentnú (rýchlostnú) formu potom platí:

$$u_I(k) - u_I(k-1) = IT\sum_{i=0}^{k} e(i) - IT\sum_{i=0}^{k-1} e(i)$$

$$\boxed{\Delta u_I(k) = ITe(k)} \qquad (7)$$

Ak aplikujeme $\mathscr{Z}$-transformáciu

$$\boxed{(1 - z^{-1})U_I(z) = IT\ E(z)}$$

Spätná obdĺžniková náhrada (4/6)

Následne získame diskrétnu prenosovú funkciu pre integračnú časť regulátora

$$\boxed{G_{R_I}(z) = \frac{U_I(z)}{E(z)} = IT\frac{1}{1-z^{-1}} = IT\frac{z}{z-1}} \qquad (8)$$

Ak porovnáme (8) so spojitou prenosovou funkciou integračnej časti regulátora $G_{R_I}(s) = \frac{I}{s}$, dostaneme vzťah (6) . Pre rýchlostný algoritmus PSD regulátora platí vzťah:

$$\boxed{\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) = \Delta u_P(k) + \Delta u_I(k) + \Delta u_D(k)} \qquad (9)$$

Môžeme ho vyjadriť aj ako:

$$\boxed{\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)} \qquad (10)$$

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$$

$$\Delta U(z) = U(z) - z^{-1} U(z)$$

$$\Delta U(z) = (1 - z^{-1}) U(z)$$

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)$$

$$U(z) = z^{-1} U(z) + q_0 E(z) + q_1 z^{-1} E(z) + q_2 z^{-2} E(z)$$

$$(1 - z^{-1}) U(z) = (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}) E(z)$$

$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

Spätná obdĺžniková náhrada (5/6)

Prenosová funkcia diskrétneho regulátora je (získame ju $\mathscr{Z}$-transformáciou (10)):

$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \tag{11}$$

Dosadením vzťahov (2) , (4) a (7) do (9) a porovnaním so vzťahom (10) vypočítame koeficienty PSD regulátora získaného spätnou obdĺžnikovou náhradou (backward Euler method):

$$\begin{aligned}
q_0 &= P + TI + \frac{D}{T} = P\left(1 + \frac{T}{T_I} + \frac{T_D}{T}\right), \\
q_1 &= -P - \frac{2D}{T} = -P\left(1 + \frac{2T_D}{T}\right), \\
q_2 &= \frac{D}{T} = \frac{PT_D}{T}.
\end{aligned} \tag{12}$$

kde P, I, D sú zosilnenia jednotlivých častí spojitého PID regulátora a T je perióda vzorkovania. Prenosovú funkciu diskrétneho regulátora získame dosadením parametrov (12) do (11) .

Spätná obdĺžniková náhrada (6/6)

Typ regulátora	Analogový regulátor	Číslicový regulátor
P	P	P
I	$\frac{1}{T_I s}$	$\frac{T}{T_I}\frac{z}{z-1}$
PI	$P\left(1+\frac{1}{T_I s}\right)$	$P\left(1+\frac{T}{T_I}\frac{z}{z-1}\right)$
PD	$P\left(1+T_D s\right)$	$P\left(1+\frac{T_D}{T}\frac{z-1}{z}\right)$
PID	$P\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right)$	$P\left(1+\frac{T}{T_I}\frac{z}{z-1}+\frac{T_D}{T}\frac{z-1}{z}\right)$

Štandardné analógové a číslicové regulátory.

Dopredná obdĺžniková náhrada (1/3)

Deriváciu funkcie $\boxed{u_D(t)}$ v (1) v čase $t = kT$ môžeme aproximovať diferenciou

$$u_D(t) = D\frac{de(t)}{dt} \Rightarrow \boxed{u_D(k) = D\frac{e(k+1) - e(k)}{T}}$$

Ak aplikujeme $\mathscr{Z}$-transformáciu $\boxed{U_D(z) = D\frac{z-1}{T}E(z)}$

následne získame diskrétnu prenosovú funkciu pre derivačnú časť regulátora

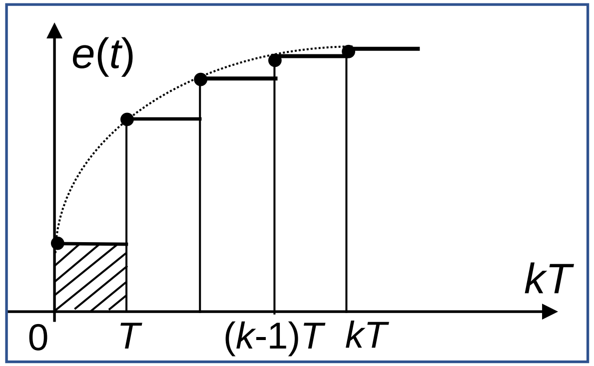
$$\boxed{G_{R_D}(z) = \frac{U_D(z)}{E(z)} = D\frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}} = D\frac{z-1}{T}}$$

Ak porovnáme (5) so spojitou prenosovou funkciou derivačnej časti regulátora $G_{R_D}(s) = Ds$, dostaneme vzťah:

$$\boxed{s \approx \frac{z-1}{T} = \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}} \qquad (13)$$

Dopredná obdĺžniková náhrada (2/3)

Integrál funkcie $\boxed{u_I(t)}$ v (1) v čase $t = kT$ môžeme nahradiť sumou obdĺžnikov



$$u_I(t) = I\int_0^t e(\tau)d\tau \Rightarrow \boxed{u_I(k) = IT\sum_{i=0}^{k} e(i-1)}$$

Pre rekurentnú (rýchlostnú) formu potom platí:

$$u_I(k) - u_I(k-1) = IT\sum_{i=0}^{k} e(i-1) - IT\sum_{i=0}^{k-1} e(i-1)$$

$$\boxed{\Delta u_I(k) = ITe(k-1)}$$

Ak aplikujeme $\mathscr{Z}$-transformáciu

$$\boxed{(1 - z^{-1})U_I(z) = z^{-1}IT\ E(z)}$$

Dopredná obdĺžniková náhrada (3/3)

Následne získame diskrétnu prenosovú funkciu pre integračnú časť regulátora

$$\boxed{G_{R_I}(z) = \frac{U_I(z)}{E(z)} = IT\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{IT}{z-1}} \tag{14}$$

Ak porovnáme (14) so spojitou prenosovou funkciou integračnej časti regulátora $G_{R_I}(s) = \frac{I}{s}$, dostaneme vzťah (13)

Lichobežníková náhrada (1/3)

Deriváciu funkcie môžeme aproximovať z Padého rozvoja premennej z

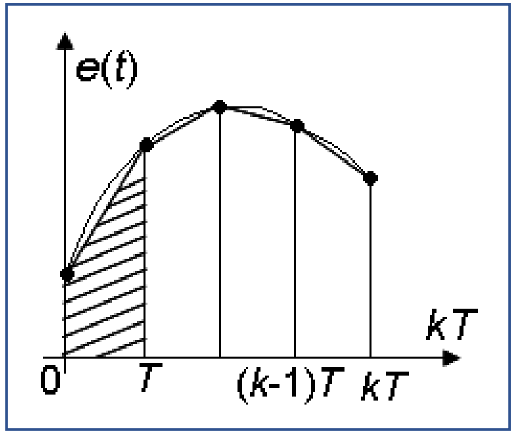
$$\boxed{z = e^{sT} = \frac{e^{s\frac{T}{2}}}{e^{-s\frac{T}{2}}} \approx \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s}} \qquad (15)$$

Zo vťahu (15) dostaneme Tustinov vzťah:

$$\boxed{s \approx \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \qquad (16)$$

Lichobežníková náhrada (2/3)

Integrál funkcie $\boxed{u_I(t)}$ v (1) v čase $t = kT$ môžeme nahradiť sumou lichobežníkov



$$u_I(t) = I \int_0^t e(\tau)d\tau \Rightarrow \boxed{u_I(k) = \frac{IT}{2}\sum_{i=0}^{k}[e(i) + e(i-1)]}$$

Pre rekurentnú (rýchlostnú) formu potom platí:

$$u_I(k) - u_I(k-1) = \frac{IT}{2}\sum_{i=0}^{k}[e(i) + e(i-1)] - \frac{IT}{2}\sum_{i=0}^{k-1}[e(i) + e(i-1)]$$

$$\boxed{\Delta u_I(k) = \frac{IT}{2}[e(k) + e(k-1)]}$$

Ak aplikujeme $\mathscr{Z}$-transformáciu

$$\boxed{(1 - z^{-1})U_I(z) = \frac{IT(1 + z^{-1})}{2}E(z)}$$

Lichobežníková náhrada (3/3)

Následne získame diskrétnu prenosovú funkciu pre integračnú časť regulátora

$$\boxed{G_{R_I}(z) = \frac{U_I(z)}{E(z)} = \frac{IT}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{IT}{2}\frac{z+1}{z-1}} \qquad (17)$$

Ak porovnáme (17) so spojitou prenosovou funkciou integračnej časti regulátora $G_{R_I}(s) = \frac{I}{s}$, dostaneme vzťah (Tustinov vzťah) (16)

Zhrnutie výsledkov

metóda	diskrétny ekvivalent
lichobežníková náhrada (trapezoidal method - Tustin)	$s \approx \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
obdĺžniková náhrada - dopredná (forward rectangular method)	$s \approx \frac{z-1}{T} = \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}$
obdĺžniková náhrada - spätná (backward rectangular method)	$s \approx \frac{z-1}{Tz} = \frac{1-z^{-1}}{T}$

Porovnanie troch aproximačných metód.

Algoritmus návrhu PSD regulátora pre spojitý systém

ÚLOHA: Navrhnite číslicový PID regulátor (PSD regulátor) pre riadený systém s prenosovou funkciou ***G*(*s*)**.

Postup riešenia pre získanie prenosovej funkcie PSD regulátora.

1. **Pre zadaný systém *G*(*s*) vypočítame optimálne parametre spojitého regulátora** (P, T_I, T_D príp. P, I, D, teda získame prenosovú funkciu regulátora $G_R(s)$) pomocou známej metódy (optimálneho modulu, inverznej dynamiky príp. inej metódy).

2. **Určíme vhodnú periódu vzorkovania**.

3. **Na základe** vhodnej **aproximácie** (podľa Tab. na str. 23) **získame** prenosovú funkciu regulátora $\boldsymbol{G_R(z)}$.

Stabilita diskrétnych systémov:

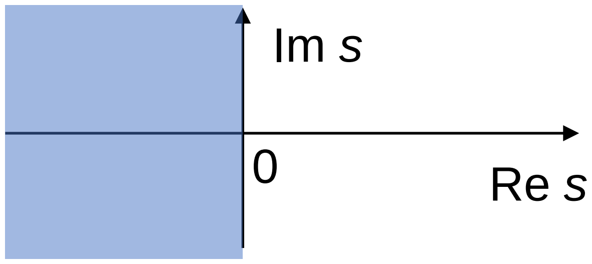
- poloha pólov diskrétnej prenosovej funkcie
- stabilita diskrétneho URO
- bilineárna transformácia

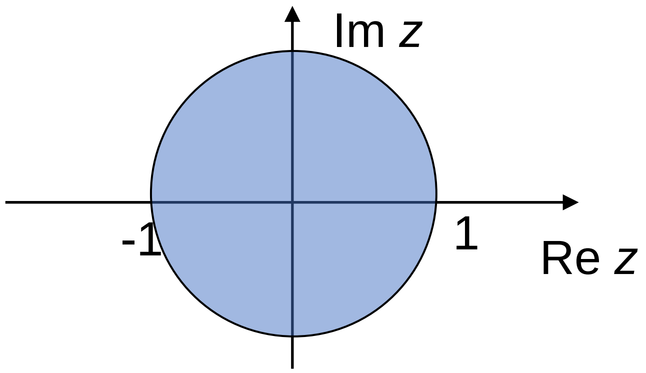
Transformácia medzi „*s*“ a „*z*“ oblasťou

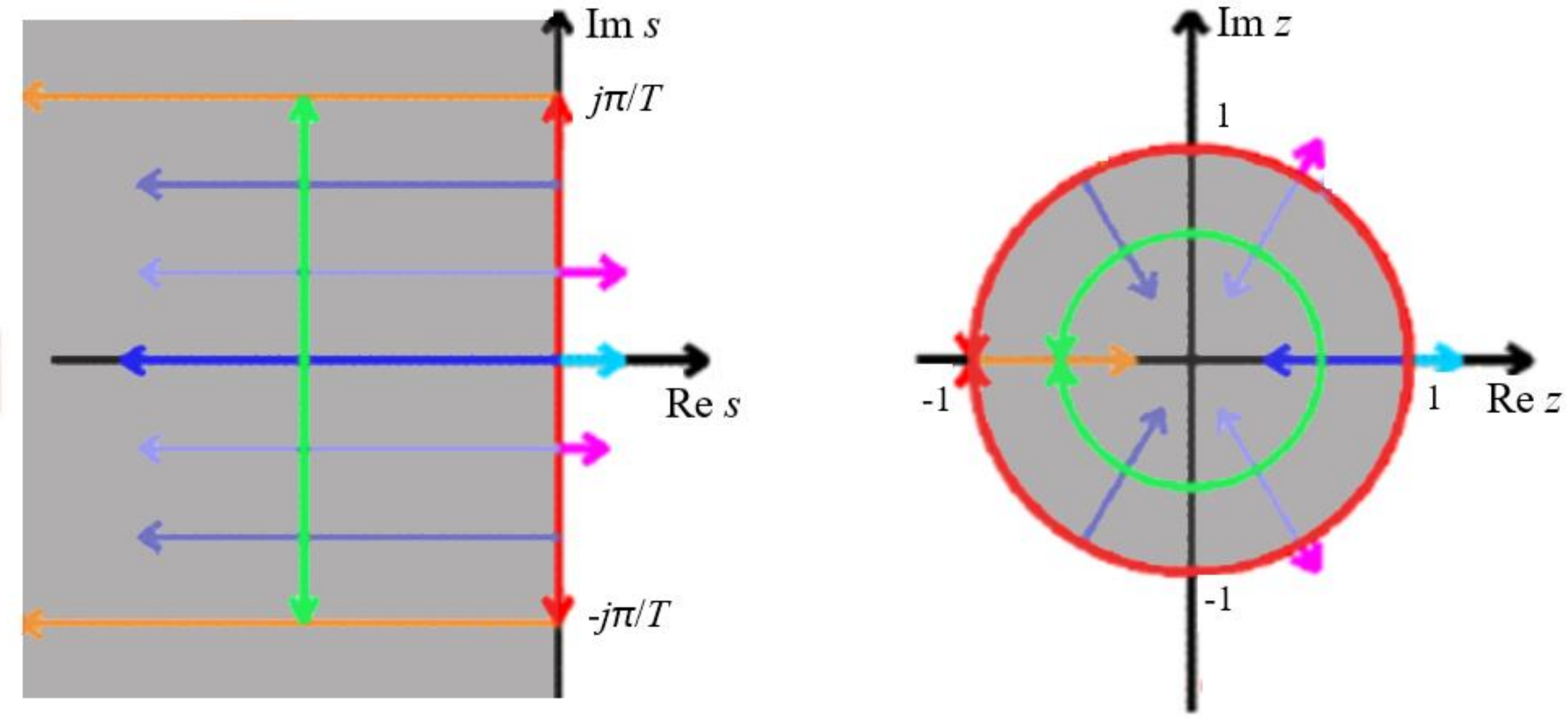
Podľa polohy pólov systému (koreňov charakteristickej rovnice URO) zisťujeme, či je systém (URO) stabilný. Ak je pól v spojitej oblasti (v s-rovine) $s_i = \sigma_i \pm j\omega_{s_i}$ jemu odpovedajúci pól v diskrétnej oblasti (v z-rovine) je $z_i = e^{s_i T} = e^{T(\sigma_i \pm j\omega_{s_i})}$. Podmienka stability pre spojité systémy je zápornosť reálnej časti pólov s_i, táto podmienka implikuje podmienku pre diskrétne póly systému, pre ktoré musí platiť $\boxed{|\mathrm{z_i}| < 1.}$

stabilita „*s*“: Re{s_i} < 0 → $\boldsymbol{\sigma_i} < 0$

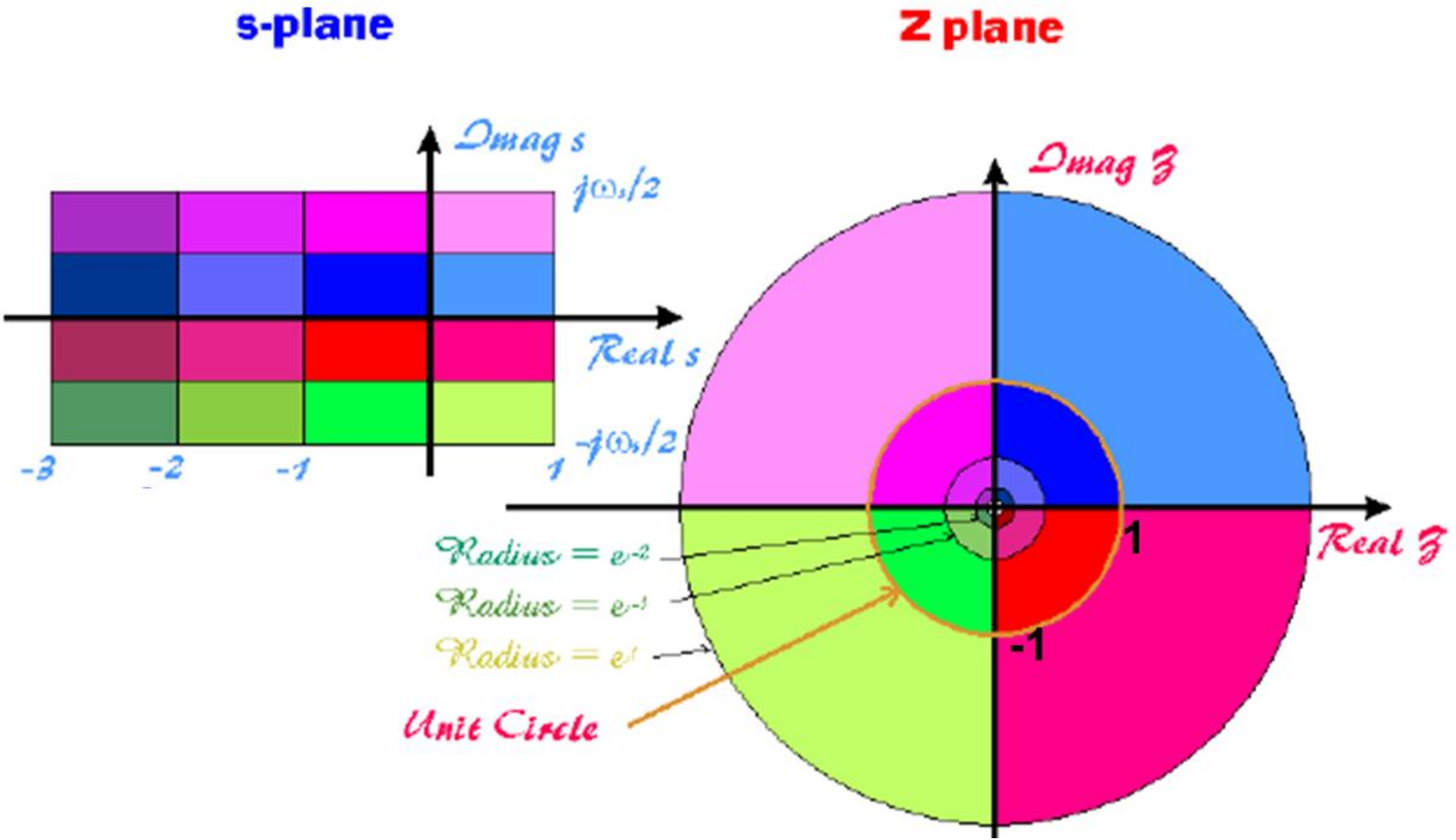
stabilita „*z*“: $|z_i| < 1$







Oblasť stabilných pólov (šedá plocha) a oblasť nestabilných pólov pre spojité systémy (vľavo) a diskrétne systémy (vpravo).



s-plane
Z plane
Imag s
jωs/2
Real s
-jωs/2
-3
-2
-1
1
Imag Z
Real Z
1
-1
Radius = e-2
Radius = e-1
Radius = e1
Unit Circle

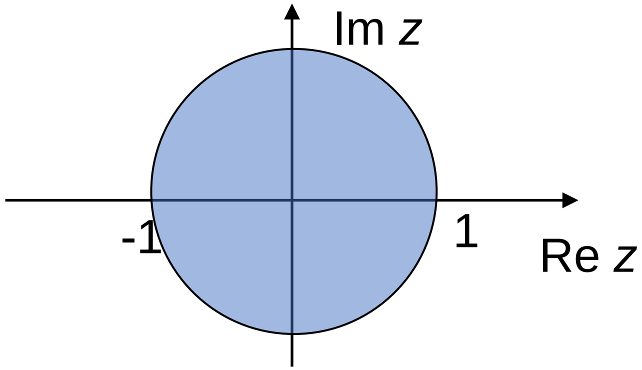
$$pol \quad s_i = \sigma_i \pm j\omega_{si} \quad a \;\; jemu\; odpovedajuci\; pol \quad z_i = e^{s_i T} = e^{T(\sigma_i \pm j\omega_{si})} = e^{\sigma_i T} e^{\pm j\omega_{si} T}$$

- **ľavá polrovina *s*-oblasti** (reálna zložka pólu je záporná) sa zobrazí do **vnútra kružnice s polomerom *r*=1 v *z*-rovine** (zahŕňa všetky asymptoticky stabilné póly, čiže modul komplexného koreňa je menší ako 1) – ASYMPTOTICKY **STABILNÝ** priebeh v časovej oblasti,
- **pravá polrovina *s*-oblasti** sa zobrazí mimo **kružnice s polomerom *r*=1 v *z*-rovine – NESTABILNÝ,**
- **body na imaginárnej osi v *s*-rovine** sa zobrazujú na **jednotkovú kružnicu v *z*-rovine – HRANICA STABILITY,**
- časť imaginárnej osi $0 \le j\omega_{si} \le j\pi/T$ *s*-roviny sa zobrazí na **polkružnicu nad reálnou osou** s polomerom ***r*=1** v *z*-rovine – **HRANICA STABILITY,**
- časť imaginárnej osi $-j\pi/T \le j\omega_{si} \le 0$ *s*-roviny sa zobrazí na **polkružnicu pod reálnou osou** s polomerom ***r*=1** v *z*-rovine – **HRANICA STABILITY,**
- záporná reálna os $-\infty < \sigma_i \le 0$ *s*-roviny ($j\omega_{si} = 0$) sa zobrazí ako kladná časť reálnej osi $0 < z_i \le 1$ v *z*-rovine – **STABILNÝ NEKMITAVÝ (APERIODICKÝ),**
- kladná časť reálnej osi $0 \le \sigma_i < \infty$ *s*-roviny sa zobrazí ako kladná časť reálnej osi $1 \le z_i < \infty$ v *z*-rovine – **NESTABILNÝ,**
- imaginárny koreň umiestnený na rovnobežke s reálnou osou $\omega_{si} = \pm j\pi/T$ so zápornou reálnou časťou $-\infty < \sigma_i \le 0$ *s*-roviny sa zobrazí ako záporná časť reálnej osi $-1 \le z_i \le 0$ v *z*-rovine – **STABILNÝ KMITAVÝ.**

Podmienky stability diskrétneho systému

- Diskrétny lineárny systém je asymptoticky stabilný, ak všetky póly diskrétnej prenosovej funkcie sú umiestnené vo vnútri jednotkovej kružnice.
- Ak sa jeden pól nachádza na jednotkovej kružnici (ostatné ležia v jednotkovej kružnici), potom je diskrétny dynamický systém na hranici stability.
- Ak je umiestnených niekoľko pólov na jednotkovej kružnici, potom je diskrétny dynamický systém nestabilný.

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}=\frac{b_1z^{n-1}+\cdots+b_mz^{n-m}}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}=$$
$$=\frac{B(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)}$$

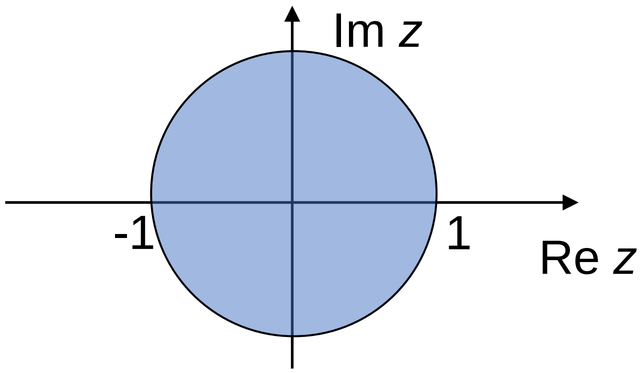


$$\boxed{|z_i|<1} \quad pre \quad i\in\langle 1,n\rangle$$

Overenie stability diskrétneho URO

Diskrétny regulačný obvod je STABILNÝ, ak všetky póly charakteristickej rovnice URO (diskrétnej prenosovej funkcie) sú umiestnené vo vnútri jednotkovej kružnice (korene charakteristického polynómu ležia vo vnútri jednotkovej kružnice $|z_i| < 1$).

- zo zadanej spojitej prenosovej funkcie $G(s)$ určíme diskrétnu prenosovú funkciu $G(z)$ (príkaz *c2d* v MATLABe)
- pre prenosovú funkciu ORO platí:



$$G_O(z) = G(z)\,\boxed{G_R(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}\,\boxed{\frac{C(z)}{D(z)}}$$

Charakteristický polynóm: $P(z) = 1 + G_O(z)$

$$P(z) = A(z)D(z) + B(z)C(z) = (1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})\ldots(1 - z_p z^{-1}) =$$
$$= (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_p)$$

Ak ležia všetky korene z_i charakteristického polynómu $P(z)$ vo vnútri jednotkovej kružnice ($|z_i|<1$), diskrétny URO je stabilný. Existujú kritéria na určenie polohy koreňov napr. **bilineárna transformácia**, Nekolného kritérium, Schurovo-Cohnovo-Juryho kritérium a iné.

Bilineárna transformácia

Taylorov rozvoj:

$$\boxed{z = e^{sT} = \frac{e^{s\frac{T}{2}}}{e^{-s\frac{T}{2}}} \approx \frac{1 + s\frac{T}{2}}{1 - s\frac{T}{2}} \implies s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

Ak:

$$\boxed{w = \frac{sT}{2}}$$

Potom:

$$\boxed{z = \frac{1+w}{1-w}, \quad w = \frac{z-1}{z+1}}$$

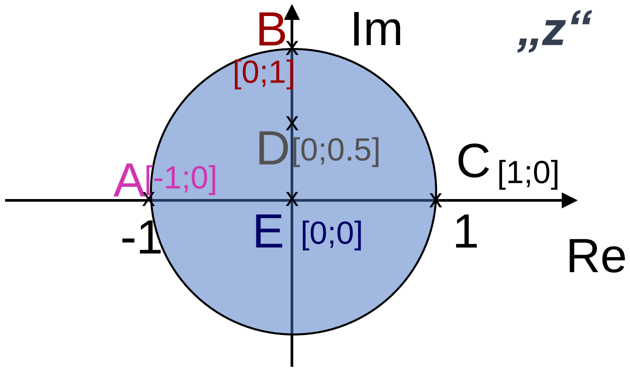
- Ak $|z| < 1$ a $w = \sigma_i + j\omega_{si}$ potom $\sigma_i < 0$
- Ľavá polrovina „w“ sa transformuje do jednotkovej kružnice v „z“ (a naopak)

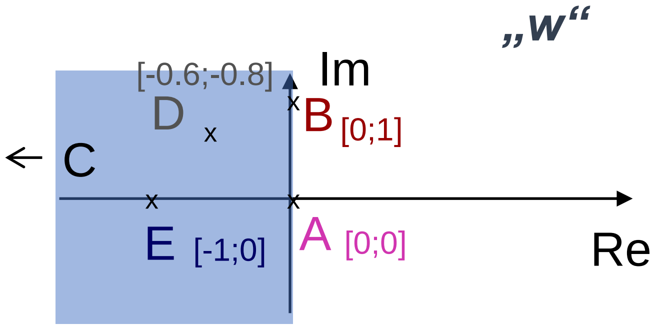
Overenie stability diskrétneho URO
Bilineárna transformácia

$$\boxed{z = \frac{1+w}{1-w}}, \quad w = \frac{z-1}{z+1}$$

Je to konformné zobrazenie ktorým charakteristickú rovnicu z diskrétnej *z*-oblasti prepočítame do spojitej *w*-oblasti, v ktorej už môžeme používať všetky kritériá pre posudzovanie stability v *s*-oblasti (napr. Routhovo kritérium, ktoré je uvedené v 1. prednáške).

Bilineárna transformácia zachováva rozloženie pólov a funguje obojsmerne.





Overenie stability diskrétneho URO
Bilineárna transformácia – príklad (1/2)

PR. Pomocou bilineárnej transformácie posúďte stabilitu systému (URO) s charakteristickým polynómom:

$$P(z) = z^3 - 2.539z^2 + 2.149z - 0.6065$$

Aplikovaním *w*-transformácie na charakteristickú rovnicu dostávame:

$$\boxed{z = \frac{1+w}{1-w}}$$

$$P(w) = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3 - 2.539\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + 2.149\,\frac{1+w}{1-w} - 0.6065$$

Prenásobením polynómom $(1\text{-}w)^3$ dostávame:

$$(1+w)^3 - 2.539(1+w)^2(1-w) + 2.149(1+w)(1-w)^2 - 0.6065(1-w)^3 = 0$$

$$\boxed{6.2945\, w^3 + 1.5705\, w^2 + 0.1315w + 0.0035 = 0}$$

Overenie stability diskrétneho URO
Bilineárna transformácia – príklad (2/2)

Teraz môžeme použiť pre polynóm $P(w)$ Routhovo kritérium stability:

$$P(w) = 6.2945\, w^3 + 1.5705\, w^2 + 0.1315w + 0.0035$$

	w^3	6.2945	0.1315
$k_1 = \dfrac{6.2945}{1.5705}$	w^2	1.5705	0.0035
$k_2 = \dfrac{1.5705}{0.1175}$	w	0.1175	
$k_3 = \dfrac{0.1175}{0.0035}$	w^0	0.0035	

Nutnou a postačujúcou podmienkou stability je požiadavka, že k_i>0, (i=1, 2, 3).
URO s charakteristickým polynómom $P(z)$ je **STABILNÝ**.

Kvalita riadenia v ustálenom stave

Ustálené hodnoty regulačnej odchýlky, regulovanej veličiny a riadiaceho zásahu

- **ak je na vstupe do regulačného obvodu jednotkový skok $W(z)=1/(1-z^{-1})$**

$G_O(z)=G(z)G_R(z)$

$$e(\infty)=\lim_{k\to\infty} e(k)=\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)E(z)=\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)\frac{W(z)}{1+G_O(z)}=\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)\frac{1}{1+G_O(z)}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$y(\infty)=\lim_{k\to\infty} y(k)=\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)Y(z)=\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)\frac{G_O(z)}{1+G_O(z)}W(z)=\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)\frac{G_O(z)}{1+G_O(z)}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$u(\infty)=\lim_{k\to\infty} u(k)=\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)U(z)=\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)\frac{G_R(z)}{1+G_O(z)}W(z)=\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)\frac{G_R(z)}{1+G_O(z)}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

```
T = 0.2;                                        %zadáme si periódu vzorkovania
G = tf (25, [0.1 1.2 2],'InputDelay',0.2);      %zadáme si spojitú prenosovú funkciu riadeného systému
Gz = c2d (G, T);                                % prepočet G(s) na G(z)
P=0.12; TI=0.6; TD=0.0833;                      %parametre spojitého regulátora

% prepočet parametrov spoj. reg. na diskrétny (spätná obdĺžniková náhrada – vzťahy str. 15)
q0 = P*(1+TD/T+T/TI);
q1 = -P*(1+2*TD/T);
q2 = P*TD/T;

%prenosová funkcia PSD regulátora vyjadrená pomocou záporných mocnín z
GRz = filt ([q0 q1 q2],[1 -1],T)

%stabilita URO
CHRURO = minreal (1+Gz*GRz);
CHpolynom = CHRURO.Numerator{1}
polyURO = roots (CHpolynom)
absPOLY = abs (polyURO)
```

```
% kvalita riadenia v prech. stave
kvalitaPCH = stepinfo(Gyw);
MaxPrereg = kvalitaPCH.Overshoot
DobaReg = kvalitaPCH.SettlingTime

%kvalita riadenia v ustálenom stave LIMITY symb. toolbox
Gyw=minreal (Gz*GRz/(1+Gz*GRz));
cit = Gyw.Numerator{1}; den = Gyw.Denominator{1};

Guw=minreal (GRz/(1+Gz*GRz));
citU = Guw.Numerator{1}; denU = Guw.Denominator{1};

Gew=minreal (1/(1+Gz*GRz));
citE = Gew.Numerator{1}; denE = Gew.Denominator{1};

syms z
limitaY1=vpa (limit (poly2sym(cit,z)/poly2sym(den,z),z,1),4)
limitaU1=vpa (limit (poly2sym(citU,z)/poly2sym(denU,z),z,1),4)
limitaE1=vpa (limit (poly2sym(citE,z)/poly2sym(denE,z),z,1),4)
```

Ďalšie užitočné príkazy v MATLABe

tfdata

poly2sym

cell2mat

simplify

subs

numden