Číslicové riadenie

5. prednáška

Metóda **SIMC**

a

metóda **Poleplacement**

(riadenie s umiestnením pólov)

5. prednáška - OBSAH

PRIAME METÓDY NÁVRHU DISKRÉTNYCH REGULÁTOROV

Metóda SIMC

- princíp návrhu metódy
- určenie prenosovej funkcie reg.
- príklady riadenia (overenie metódy)
- výhody a nevýhody metódy

Metóda POLEPLACEMENT (rozmiestňovanie pólov)

- princíp návrhu metódy
- určenie prenosovej funkcie reg.
- príklady riadenia (overenie metódy)
- výhody a nevýhody metódy

Metóda SIMC

Autorom tejto metódy je prof. Skogestad, preto túto metódu nazývame SIMC (podľa autora „Skogestad IMC", dá sa chápať aj ako „SIMple Control").
Metóda SIMC vychádza z regulácie pomocou vnútorného modelu (IMC). Hľadáme prenosovú funkciu regulátora pre štandardnú štruktúru - parametre P, T_I, T_D).

Typ regulátora	Analogový regulátor	Číslicový regulátor
P	P	P
I	$\frac{1}{T_I s}$	$\frac{T}{T_I} \frac{z}{z-1}$
PI	$P\left(1+\frac{1}{T_I s}\right)$	$P\left(1+\frac{T}{T_I} \frac{z}{z-1}\right)$
PD	$P\left(1+T_D s\right)$	$P\left(1+\frac{T_D}{T} \frac{z-1}{z}\right)$
PID	$P\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right)$	$P\left(1+\frac{T}{T_I} \frac{z}{z-1}+\frac{T_D}{T} \frac{z-1}{z}\right)$

Hodnoty parametrov regulátorov pre metódu SIMC s nastaviteľným parametrom T_w, kde $\boxed{\beta = \min\{T_1,\ 4(T_w+D)\}}$. Pre metódu SIMC je vhodná voľba $\boxed{T_w = D}$

Riadený systém	P	T_I	T_D
Ke^{-Ds}	-	$K(T_w+D)$	-
$\frac{K}{T_1 s+1}e^{-Ds}$	$\frac{T_1}{K(T_w+D)}$	β	-
$\frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}e^{-Ds}$ $T_1 \geq T_2$	$\frac{T_1(T_2+\beta)}{\beta K(T_w+D)}$	$T_2+\beta$	$\frac{\beta T_2}{T_2+\beta}$
$\frac{K}{s}e^{-Ds}$	$\frac{1}{K(T_w+D)}$	$4(T_w+D)$	-
$\frac{K}{s(T_2 s+1)}e^{-Ds}$	$\frac{T_2+4(T_w+D)}{4K(T_w+D)^2}$	$T_2+4(T_w+D)$	$\frac{4T_2(T_w+D)}{T_2+4(T_w+D)}$
$\frac{K}{s^2}e^{-Ds}$	$\frac{1}{2K(T_w+D)^2}$	$8(T_w+D)$	$2(T_w+D)$

SIMC – príklad 1 (1/2)

PR. 1: Navrhnite diskrétny regulátor (pre periódu vzorkovania T=1.5) metódou SIMC pre systém:

$$G(s) = \frac{0.75}{(4.35s+1)(1.15s+1)} e^{-1.5s}$$

Riešenie:

K=0.75, T_1=4.35 [s], T_2=1.15 [s] a D=1.5 [s].

Využijeme tretí riadok tabuľky zo str. 5, pričom T_w=D=1.5 [s], β= min {T_1; 8*D}= min {4.35; 8*1.5}=4.35 a získame parametre regulátora:

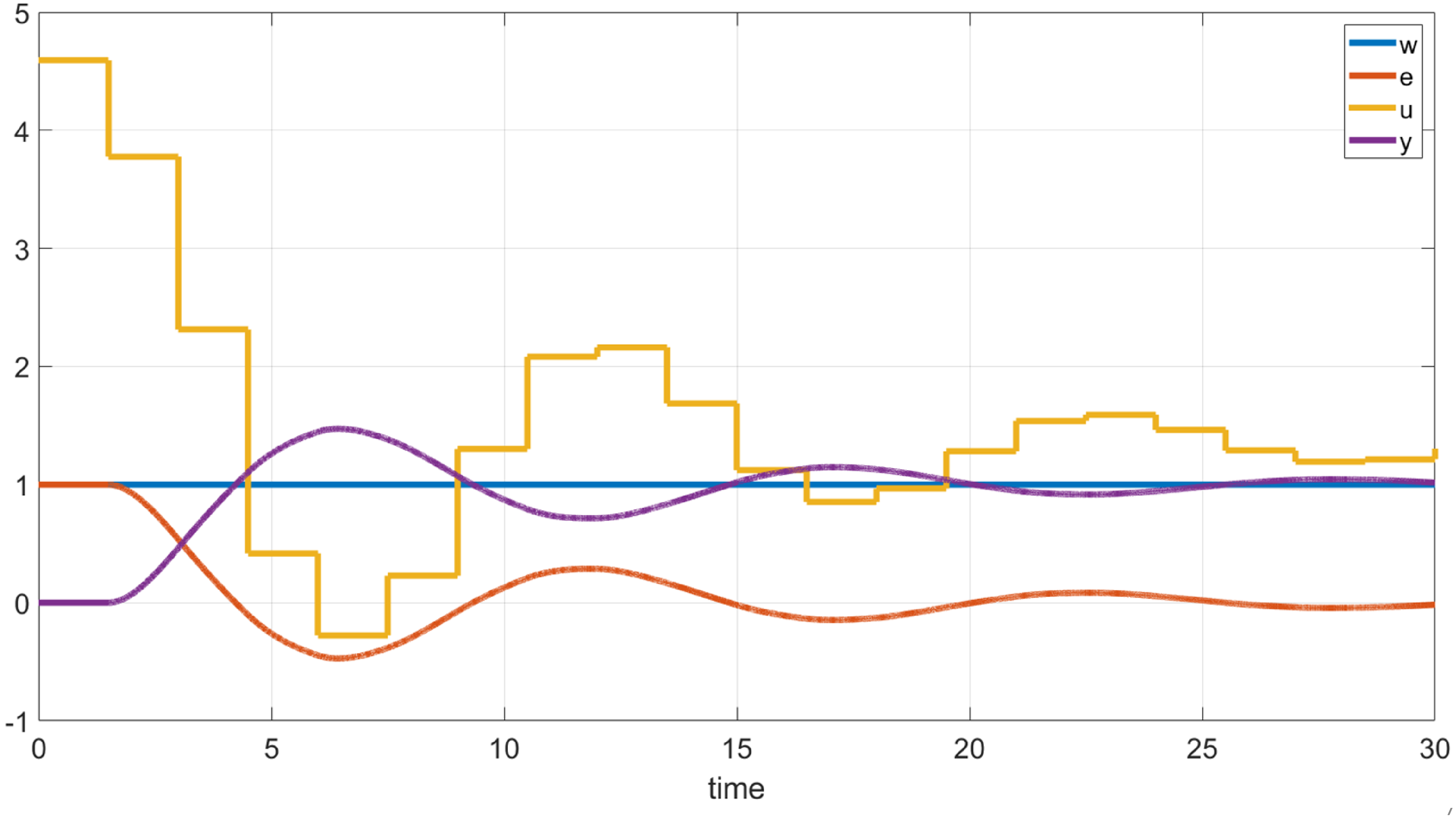
P=2.4444, T_I=5.5 [s], T_D=0.9095 [s]

Prenosová funkcia regulátora je:

$$G_R(z) = 2.4444\left(1 + \frac{1.5}{5.5}\frac{z}{z-1} + \frac{0.9095}{1.5}\frac{z-1}{z}\right) = \frac{4.593z^2 - 5.409z + 1.482}{z^2 - z}$$

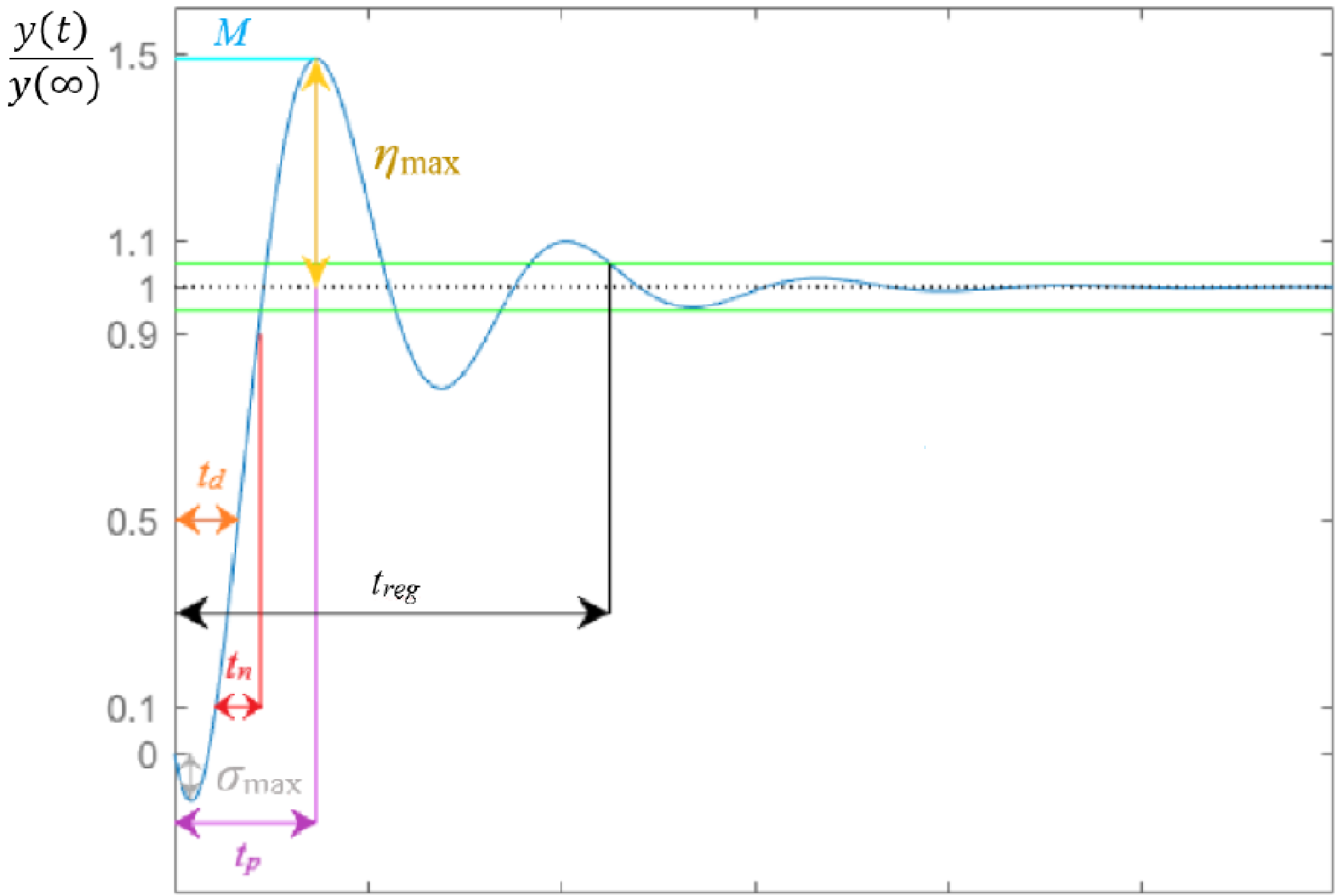
$$\boxed{G_R(z) = \frac{4.593 - 5.409z^{-1} + 1.482z^{-2}}{1 - z^{-1}}}$$

SIMC – príklad 1 (2/2)



Metóda POLEPLACEMENT
(riadenie s umiestnením pólov)

Pri tejto metóde si musíme **vhodne zvoliť póly URO** na základe predpísaných požiadaviek na kvalitu riadenia. Kvalita riadenia v prechodných stavoch sa určuje pomocou ukazovateľov kvality riadenia, ktoré sa zobrazujú na prechodovej charakteristike URO.

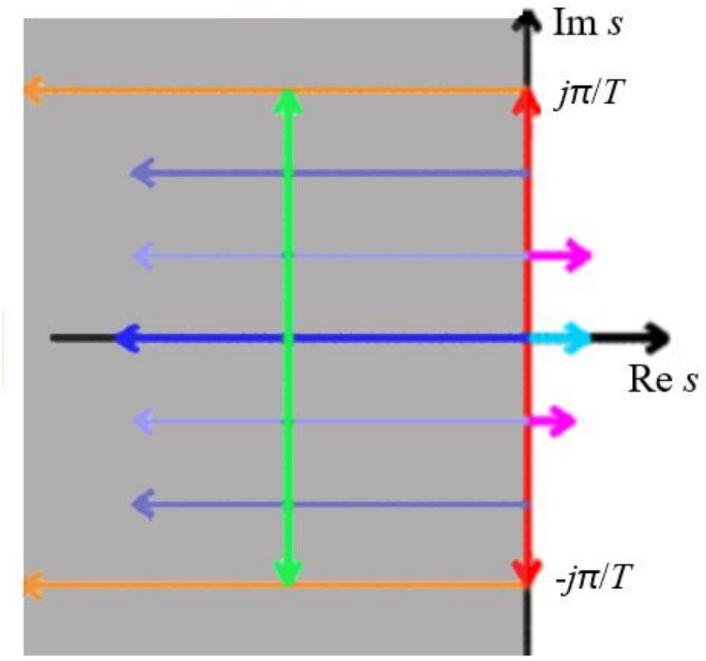


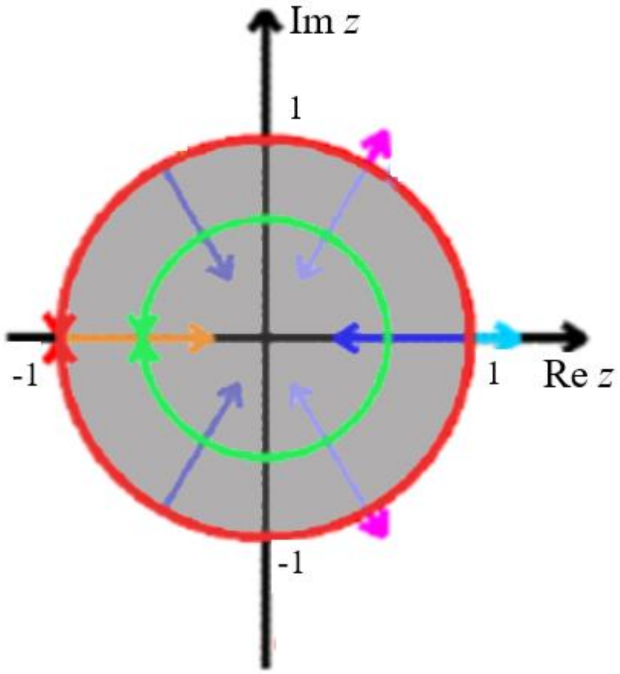
Ukazovatele kvality riadenia pre spojitý URO.

Podľa polohy pólov systému (koreňov charakteristickej rovnice URO) zisťujeme, či je systém (URO) stabilný. Ak je pól v spojitej oblasti (v s-rovine) $s_i = \sigma_i \pm j\omega_{s_i}$ jemu odpovedajúci pól v diskrétnej oblasti (v z-rovine) je $z_i = e^{s_i T} = e^{T(\sigma_i \pm j\omega_{s_i})}$. Podmienka stability pre spojité systémy je zápornosť reálnej časti pólov s_i, táto podmienka implikuje podmienku pre diskrétne póly systému, pre ktoré musí platiť $\boxed{|\mathrm{z_i}| < 1.}$

stabilita „s“: Re{s_i} < 0 → $\boldsymbol{\sigma_i}$ < 0

stabilita „z“: $|z_i|$ < 1



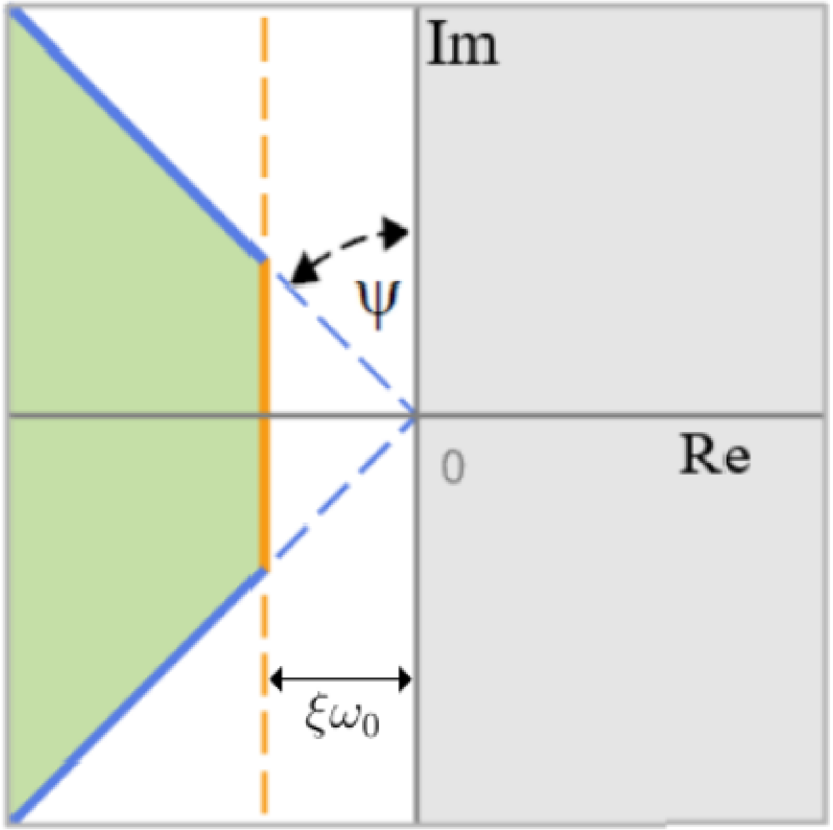


Oblasť stabilných pólov (šedá plocha) a oblasť nestabilných pólov pre spojité systémy (vľavo) a diskrétne systémy (vpravo).

Oblasť pre vhodnú voľbu pólov pre spojitý a diskrétny URO

Spojitý URO

s - rovina



$\mathrm{tg}\psi = \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}}$

$\mathrm{Re} = -|\xi\omega_0|$

oblasť pre želané póly

nestabilná oblasť

ohraničenie pre max. preregulovanie

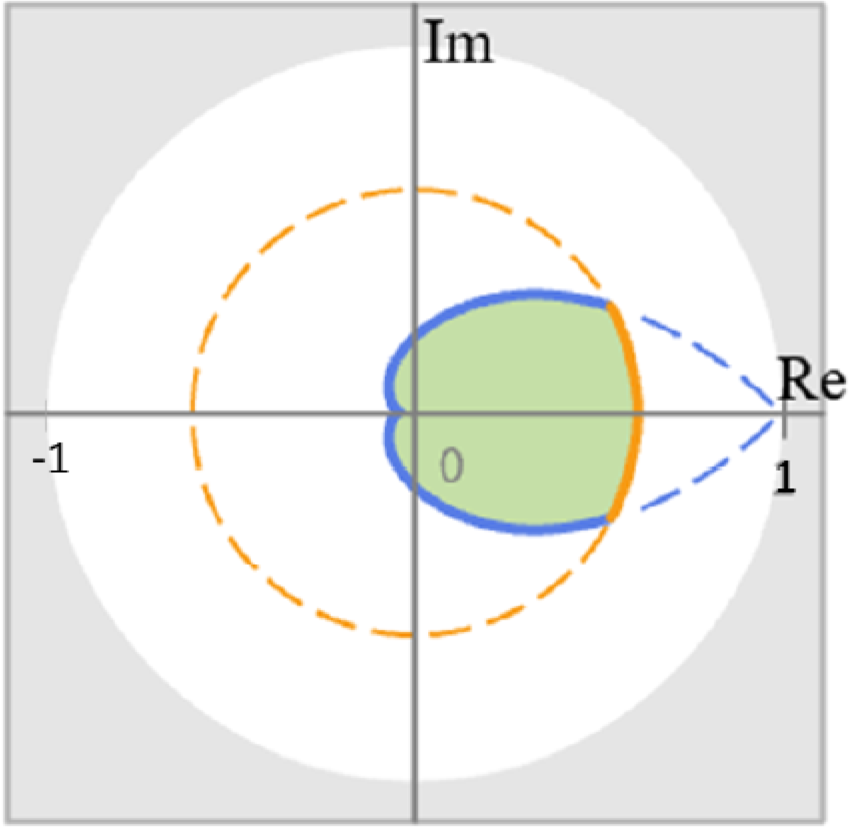
ohraničenie pre čas (dobu) regulácie

ξ je relatívne tlmenie,
ω_0 je vlastná frekvencia
(pásmo priepustnosti)

Menovateľ systému 2. rádu: $s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2$

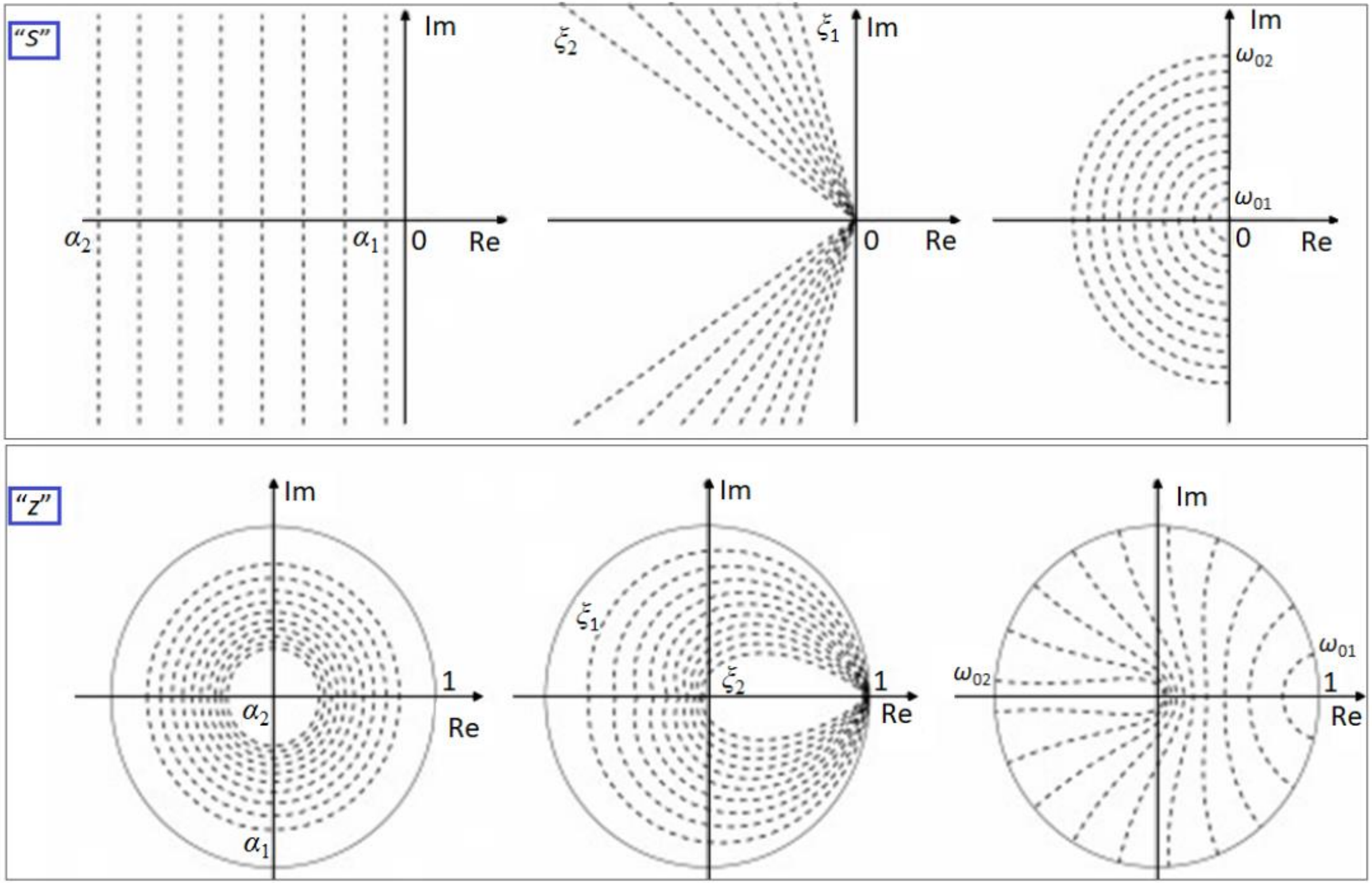
Diskrétny URO

z - rovina



$z = e^{-\mathrm{cotan}\left(\cos^{-1}(\xi)\right)|\omega_s|T} e^{i\omega_s T}$

$z = e^{-|\xi\omega_0|T} e^{i\omega_s T}$



Oblasti pólov pre konštantné parametre $\alpha = \xi\omega_0$, ξ a ω_0 pre spojité systémy ("s") a diskrétne systémy ("z"), kde $\alpha_2 < \alpha_1$, $\xi_2 > \xi_1$ a $\omega_{02} > \omega_{01}$.

ξ relatívne tlmenie	η_{max} maximálne preregulovanie (%)	Pm Fázová rezerva
0.2	52.7	22.6
0.3	37.2	33.3
0.4	25.4	43.1
0.5	16.3	51.8
0.6	9.5	59.2
0.69	5	64.6
0.7	4.6	65.2
0.8	1.5	69.9
0.9	0.2	73.5

Poleplacement (1/2)

Prenosovú funkciu procesu riadenia prepočítame (s tvarovačom 0. rádu a s príslušnou periódou vzorkovania) na diskrétnu pren. funkciu (b_0=0)

$$G(z)=\frac{B(z)}{A(z)}z^{-d}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}z^{-d}=\frac{b_1z^{-1}+\cdots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}z^{-d}$$

Hľadáme koeficienty diskrétneho regulátora, ktorý má prenosovú funkciu

$$G_R(z)=\frac{Q(z)}{P(z)}=\frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{1-z^{-1}}$$

Charakteristická rovnica URO:

$$1+G_R(z)G(z)=0$$

$$1+\frac{Q(z)}{P(z)}\frac{B(z)}{A(z)}z^{-d}=0$$

$$\boxed{A(z)}\boxed{P(z)}+\boxed{B(z)}\boxed{Q(z)}z^{-d}=0$$

$$\boxed{(1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n})}\boxed{(1-z^{-1})}+\boxed{(b_1z^{-1}+\cdots+b_nz^{-n})}\boxed{(q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2})}z^{-d}=0$$

Poleplacement (2/2)

$$(1+a_1 z^{-1}+\cdots+a_n z^{-n})(1-z^{-1})+(b_1 z^{-1}+\cdots+b_n z^{-n})(q_0+q_1 z^{-1}+q_2 z^{-2})z^{-d}=0$$

Ak si predpíšeme póly char. rovnice URO, môžeme výpočtom koeficientov regulátora (q_0, q_1, q_2) zaistiť predpísané správanie sa celého regulačného obvodu.

Porovnaním koef. pri rovnakých mocninách získame koef. regulátora

Žiadaná charakteristická rovnica URO:

$$A_Z(z)=1+\alpha_1 z^{-1}+\cdots+\alpha_{n+d+2} z^{-(n+d+2)}=0$$

Char. rovnica obsahuje ***n+d*+2** predpísaných pólov

Pre jednoznačné určenie troch koef. regulátora, potrebujeme tri rovnice. Všetky žiadané póly nemožno umiestniť jednoznačne, preto sa počet parametrov reg. zvýši. Preto musíme pôvodný polynóm $P(z)$ rozšíriť na $P_1(z)$ resp. $P_2(z)$. (podrobnejšie v nasledovnom príklade)

$$P_1(z)=(1-z^{-1})(1+p_1 z^{-1}) \quad resp. \quad P_2(z)=(1-z^{-1})(1+p_1 z^{-1}+p_2 z^{-2})$$

Poleplacement – príklad 1 (1/3)

PR. 1:

Diskrétna pren. funkcia procesu riadenia je 2. rádu **bez** dopravného oneskorenia:

$$G(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Hľadáme koeficienty diskrétneho regulátora, ktorý má prenosovú funkciu

$$G_R(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

Riešenie:

Žiadaná char. rovnica URO obsahuje ***n*+*d*+2=4** predpísané póly: $z_{p1}, z_{p2}, z_{p3}, z_{p4}$

$$A_Z(z) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \alpha_3 z^{-3} + \alpha_4 z^{-4} = (1 - z_{p1} z^{-1})(1 - z_{p2} z^{-1})(1 - z_{p3} z^{-1})(1 - z_{p4} z^{-1})$$

Charakteristická rovnica URO: $1 + G_R(z) G(z) = 0$

$$A(z)\, P(z) + B(z)\, Q(z)\, z^{-d} = 0$$

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})(1 - z^{-1}) + (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})(q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}) = 0$$

Pri porovnaní koef. dostaneme:

3 neznáme (q_0, q_1, q_2)
4 rovnice

Nejednoznačné riešenie, treba rozšíriť polynóm $P(z)$

Poleplacement – príklad 1 (2/3)

Takže potom
$$G_R(z)=\frac{Q(z)}{P(z)}=\frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{(1-z^{-1})(1+p_1z^{-1})}$$

Char. rovnica URO:

$$(1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2})(1-z^{-1})(1+p_1z^{-1})+(b_1z^{-1}+b_2z^{-2})(q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2})=0$$

$\Updownarrow$

Pri porovnaní koef. pri rovnakých mocninách dostaneme:

4 rovnice

a hľadáme 4 neznáme (q_0, q_1, q_2, p_1)

$$A_Z(z)=1+\alpha_1z^{-1}+\alpha_2z^{-2}+\alpha_3z^{-3}+\alpha_4z^{-4}=(1-z_{p1}z^{-1})(1-z_{p2}z^{-1})(1-z_{p3}z^{-1})(1-z_{p4}z^{-1})$$

$$\begin{aligned}A_Z(z)&=(1-z_{p1}z^{-1})(1-z_{p2}z^{-1})(1-z_{p3}z^{-1})(1-z_{p4}z^{-1})=\\&=1-z^{-1}(z_{p1}+z_{p2}+z_{p3}+z_{p4})+z^{-2}[z_{p1}z_{p2}+z_{p3}z_{p4}+(z_{p1}+z_{p2})(z_{p3}+z_{p4})]-\\&-z^{-3}[z_{p1}z_{p2}(z_{p3}+z_{p4})+z_{p3}z_{p4}(z_{p1}+z_{p2})]+z^{-4}z_{p1}z_{p2}z_{p3}z_{p4}\end{aligned}$$

Poleplacement – príklad 1 (3/3)

Porovaním koeficientov char. rovnice URO s $A_z(z)$ dostaneme 4 rovnice:

$$z^{-1}: \quad p_1 + q_0 b_1 = -(z_{p1} + z_{p2} + z_{p3} + z_{p4}) + 1 - a_1$$

$$z^{-2}: \quad p_1(a_1 - 1) + q_0 b_2 + q_1 b_1 = z_{p1} z_{p2} + z_{p3} z_{p4} + (z_{p1} + z_{p2})(z_{p3} + z_{p4}) - a_2 + a_1$$

$$z^{-3}: \quad p_1(a_2 - a_1) + q_1 b_2 + q_2 b_1 = -z_{p1} z_{p2}(z_{p3} + z_{p4}) - z_{p3} z_{p4}(z_{p1} + z_{p2}) + a_2$$

$$z^{-4}: \quad q_2 b_2 - p_1 a_2 = z_{p1} z_{p2} z_{p3} z_{p4}$$

Prepíšeme do maticovej formy a riešime sústavu rovníc:

$$\begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 1 \\ b_2 & b_1 & 0 & a_1 - 1 \\ 0 & b_2 & b_1 & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & b_2 & -a_2 \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ p_1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -(z_{p1} + z_{p2} + z_{p3} + z_{p4}) + 1 - a_1 \\ z_{p1} z_{p2} + z_{p3} z_{p4} + (z_{p1} + z_{p2})(z_{p3} + z_{p4}) - a_2 + a_1 \\ -z_{p1} z_{p2}(z_{p3} + z_{p4}) - z_{p3} z_{p4}(z_{p1} + z_{p2}) + a_2 \\ z_{p1} z_{p2} z_{p3} z_{p4} \end{bmatrix}$$

získame koef. regulátora

Poleplacement – príklad 2 (1/8)

PR. 2: Navrhnite diskrétny regulátor (pre periódu vzorkovania *T*=1.5) metódou poleplacement pre systém:

$$G(s) = \frac{0.75}{(4.35s+1)(1.15s+1)} e^{-1.5s}$$

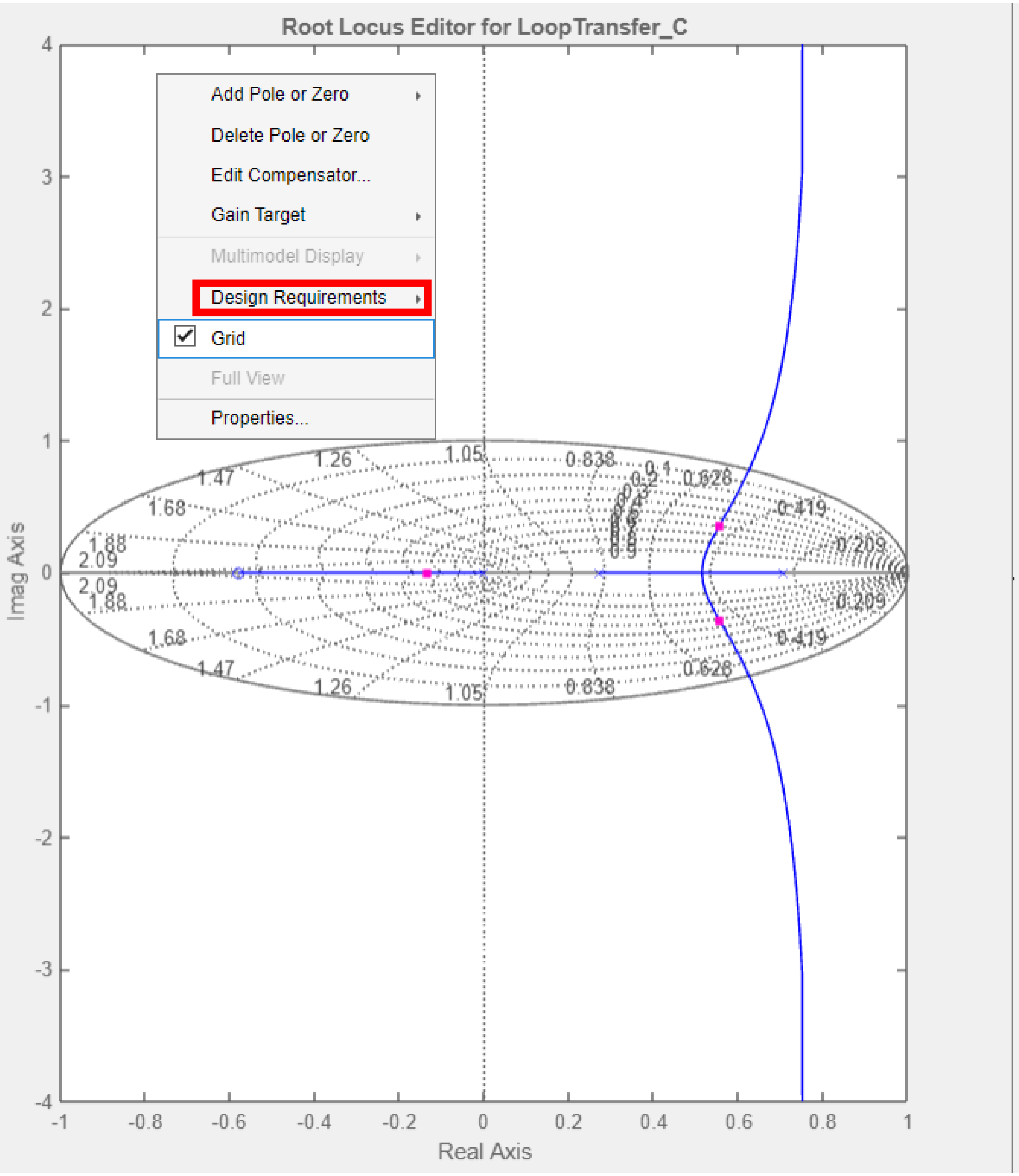
Diskrétna pren. funkcia procesu riadenia je:

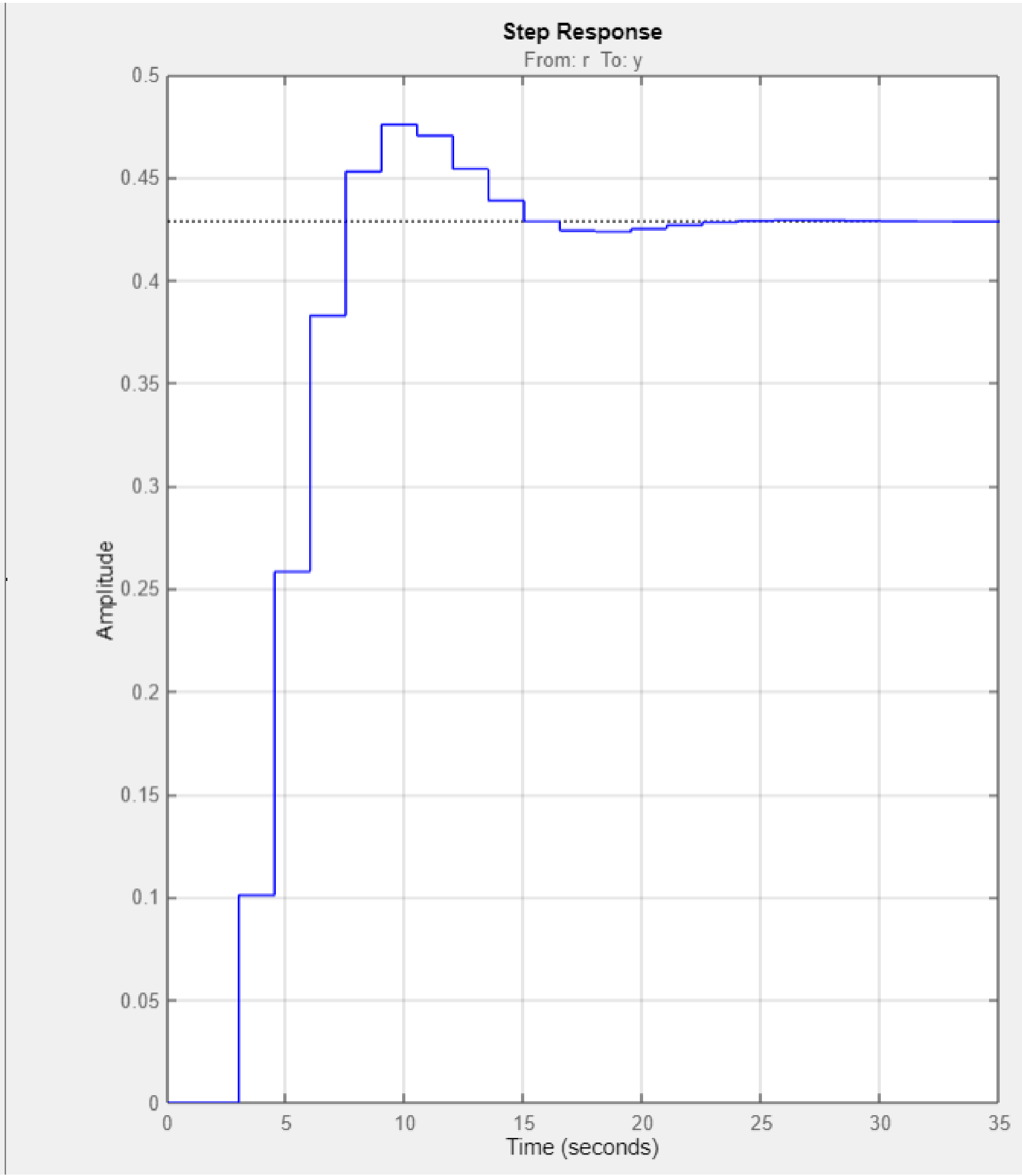
$$G(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-d}$$

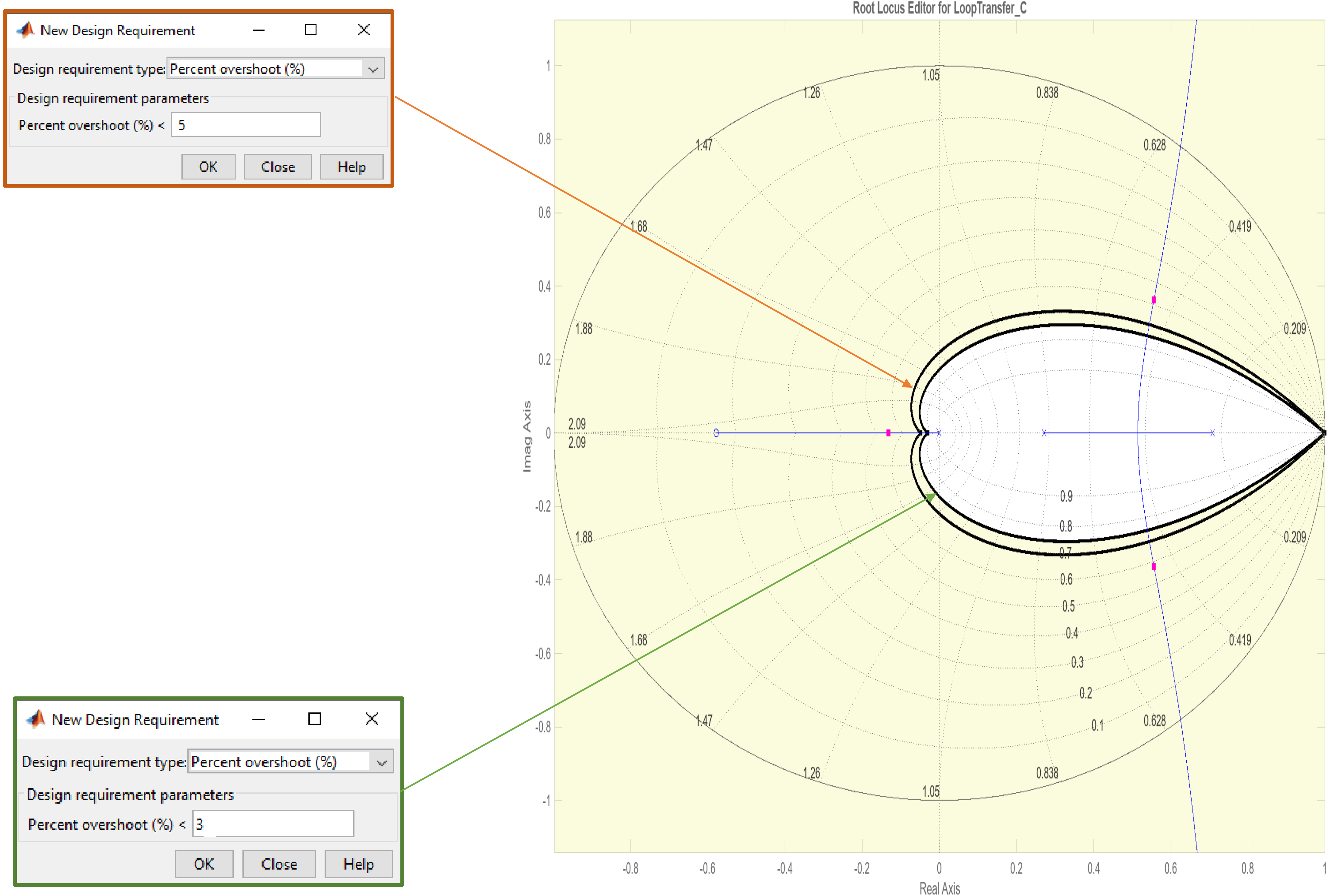
<u>*MATLAB:* ***c2d***</u>

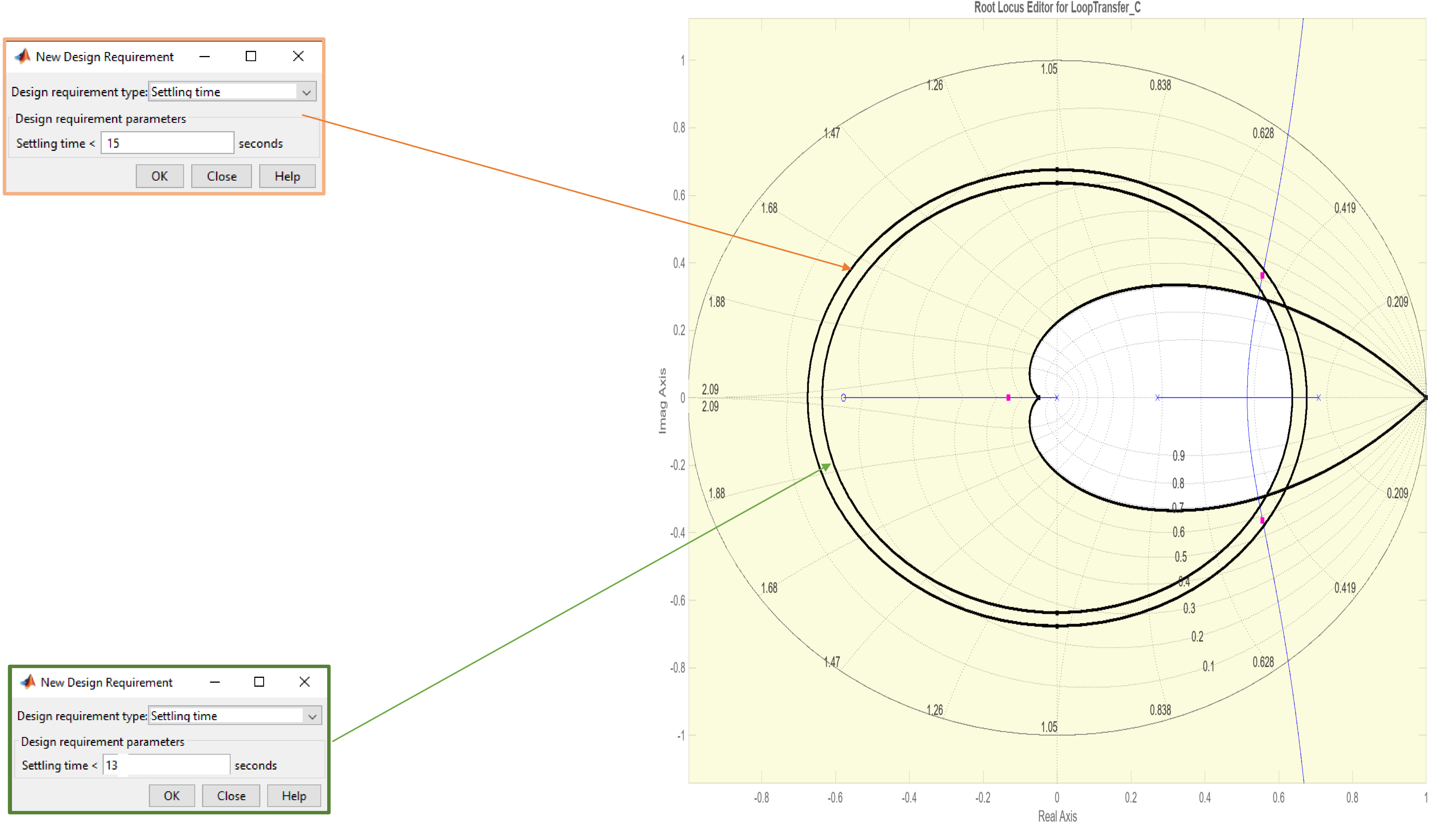
```
>> g=tf(0.75,conv([4.35 1],[1.15 1]),'Inputdelay',1.5)

g=
                          0.75
exp(-1.5*s) * ----------------------
                   5.002 s^2 + 5.5 s + 1

>> gz=c2d(g,1.5)

gz=

           0.101 z + 0.05843
z^(-1) * -----------------------
        z^2 - 0.9797 z + 0.1922

Sampling time: 1.5
```

>> controlSystemDesigner ('rlocus', gz)






New Design Requirement
Design requirement type: Percent overshoot (%)
Design requirement parameters
Percent overshoot (%) < 5
OK
Close
Help
Root Locus Editor for LoopTransfer_C
Imag Axis
Real Axis
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.05
1.26
0.838
1.47
0.628
1.68
0.419
1.88
0.209
2.09
2.09
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
New Design Requirement
Design requirement type: Percent overshoot (%)
Design requirement parameters
Percent overshoot (%) < 3
OK
Close
Help


New Design Requirement
Design requirement type: Settling time
Design requirement parameters
Settling time < 15 seconds
OK
Close
Help
New Design Requirement
Design requirement type: Settling time
Design requirement parameters
Settling time < 13 seconds
OK
Close
Help
Root Locus Editor for LoopTransfer_C
Imag Axis
Real Axis
1.05
1.26
0.838
1.47
0.628
1.68
0.419
1.88
0.209
2.09
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1

Poleplacement – príklad 2 (4/8)

$$G(z)=\frac{B(z)}{A(z)}z^{-1}=\frac{0.101z^{-1}+0.05843z^{-2}}{1-0.9797z^{-1}+0.1922z^{-2}}z^{-1}$$

Žiadaná char. rovnica URO obsahuje **2+1+2=5** predpísané póly: $z_{p1}=0.2$, $z_{p2}=0.3$, $z_{p3}=0.4$, $z_{p4}=0.5$, $z_{p5}=0.6$

$$A_Z(z)=1-2z^{-1}+1.55z^{-2}-0.58z^{-3}+0.1044z^{-4}-0.0072z^{-5}=$$
$$=(1-0.2z^{-1})(1-0.3z^{-1})(1-0.4z^{-1})(1-0.5z^{-1})(1-0.6z^{-1})$$

Pri porovnaní koef. pri rovnakých mocninách dostaneme:

5 rovníc
a hľadáme 5 neznámych (q_0, q_1, q_2, p_1, p_2)

Char. rovnica URO:

$$(1-0.9797z^{-1}+0.1922z^{-2})\underbrace{(1-z^{-1})(1+p_1z^{-1}+p_2z^{-2})}_{P(z)}+(0.101z^{-1}+0.05843z^{-2})(q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2})z^{-1}=0$$

Takže potom

$$G_R(z)=\frac{Q(z)}{P(z)}=\frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{(1-z^{-1})(1+p_1z^{-1}+p_2z^{-2})}$$

Poleplacement – príklad 2 (5/8)

Char. rovnica URO:

$$1+z^{-1}(-1.9797+p_1)+z^{-2}(1.1719-1.9797p_1+p_2+0.101q_0)+$$
$$+z^{-3}(0.05843q_0+0.101q_1-0.1922+1.1719p_1-1.9797p_2)+$$
$$+z^{-4}(0.05843q_1+0.101q_2-0.1922p_1+1.1719p_2)+z^{-5}(0.05843q_2-0.1922p_2)$$

$$\Updownarrow$$

$$A_Z(z)=1-2z^{-1}+1.55z^{-2}-0.58z^{-3}+0.1044z^{-4}-0.0072z^{-5}$$

Porovaním koeficientov char. rovnice URO s $A_z(z)$ dostaneme 5 rovníc:

$$\begin{aligned}
z^{-1}&: \quad p_1=-0.0203\\
z^{-2}&: \quad 0.101q_0-1.9797p_1+p_2=0.3781\\
z^{-3}&: \quad 0.05843q_0+0.101q_1+1.1719p_1-1.9797p_2=-0.3878\\
z^{-4}&: \quad 0.05843q_1+0.101q_2-0.1922p_1+1.1719p_2=0.1044\\
z^{-5}&: \quad 0.05843q_2-0.1922p_2=-0.0072
\end{aligned}$$

Poleplacement – príklad 2 (6/8)

$$z^{-1}: \quad p_1 = -0.0203$$

$$z^{-2}: \quad 0.101q_0 - 1.9797p_1 + p_2 = 0.3781$$

$$z^{-3}: \quad 0.05843q_0 + 0.101q_1 + 1.1719p_1 - 1.9797p_2 = -0.3878$$

$$z^{-4}: \quad 0.05843q_1 + 0.101q_2 - 0.1922p_1 + 1.1719p_2 = 0.1044$$

$$z^{-5}: \quad 0.05843q_2 - 0.1922p_2 = -0.0072$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.101 & 0 & 0 & -1.9797 & 1 \\ 0.05843 & 0.101 & 0 & 1.1719 & -1.9797 \\ 0 & 0.05843 & 0.101 & -0.1922 & 1.1719 \\ 0 & 0 & 0.05843 & 0 & -0.1922 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0203 \\ 0.3781 \\ -0.3878 \\ 0.1044 \\ -0.0072 \end{bmatrix}$$

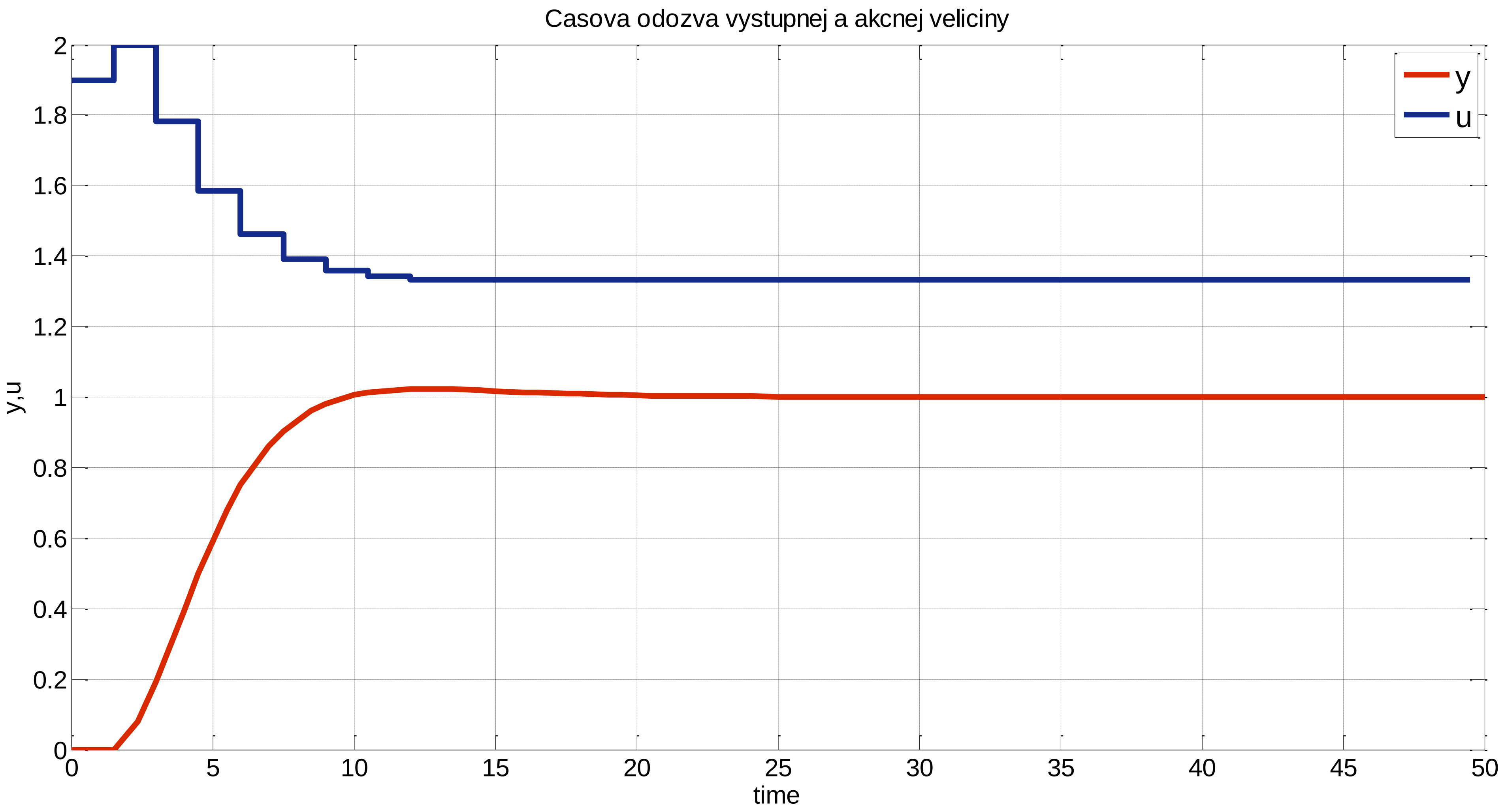
q_0=1.8970
q_1= -1.8336
q_2= 0.3581
p_1= -0.0203
p_2= 0.1463

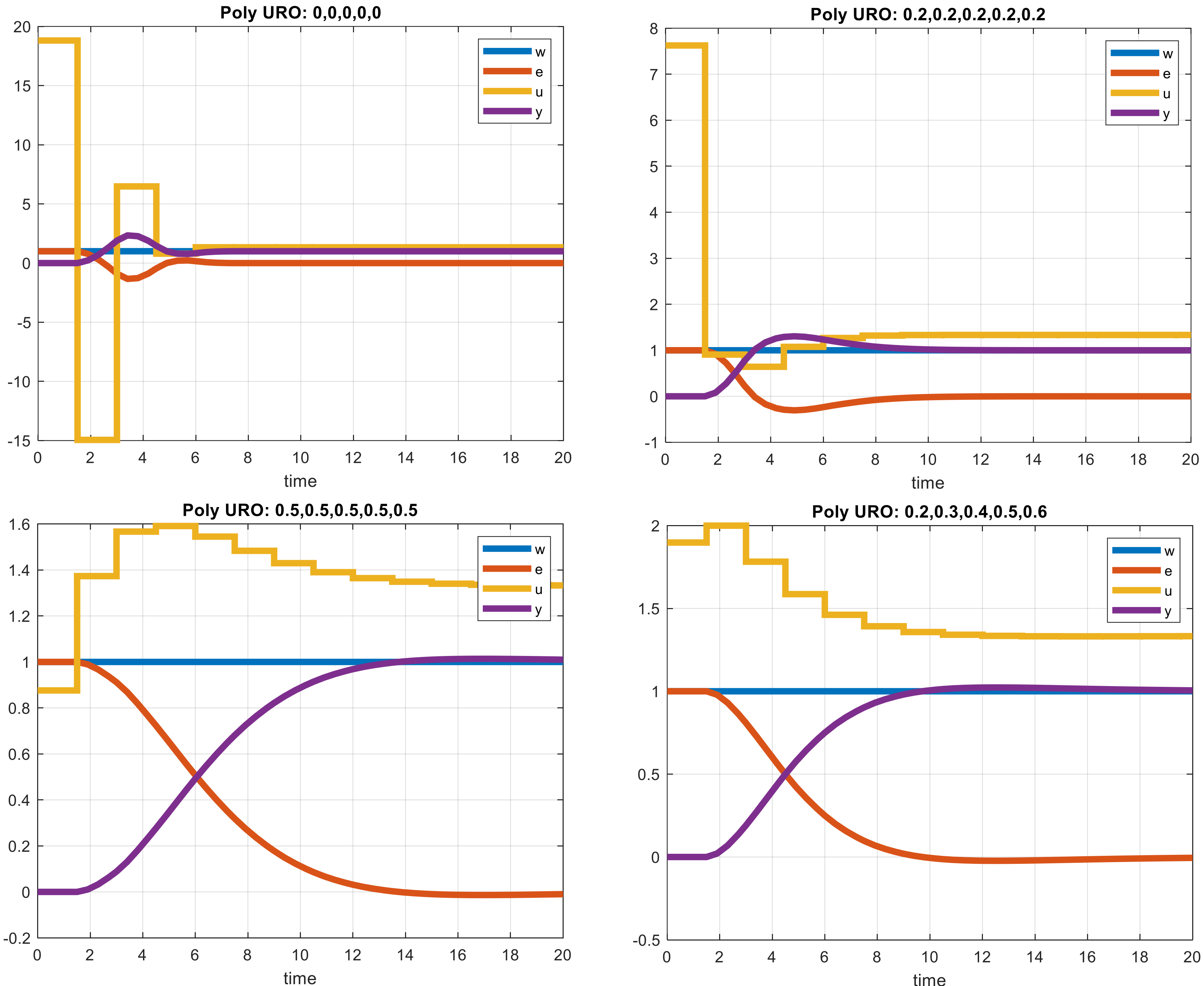
$$G_R(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{1.897 - 1.8336z^{-1} + 0.3581z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.0203z^{-1} + 0.1463z^{-2})}$$

Diferenčná rovnica regulátora

$$u(k) = 1.0203u(k-1) - 0.1666u(k-2) + 0.1463u(k-3) +$$
$$+ 1.897e(k) - 1.8336e(k-1) + 0.3581e(k-2)$$

Poleplacement – príklad 2 (7/8)




Poly URO: 0,0,0,0,0
w
e
u
y
time
Poly URO: 0.2,0.2,0.2,0.2,0.2
w
e
u
y
time
Poly URO: 0.5,0.5,0.5,0.5,0.5
w
e
u
y
time
Poly URO: 0.2,0.3,0.4,0.5,0.6
w
e
u
y
time