

Číslicové riadenie

4. prednáška

Deadbeat regulátor

4. prednáška - OBSAH

PRIAME METÓDY NÁVRHU DISKRÉTNÝCH REGULÁTOROV

DEADBEAT regulátor

- základný princíp a odvodenie parametrov regulátora

DEADBEAT regulátor s ohraničením akčného zásahu

- parametre regulátora

OVERENIE METÓD

Deadbeat regulátor - za konečný počet krokov riadenia dosiahne nulovú regulačnú odchýlku v konečnom čase

DEADBEAT regulátor (odvodenie pre riadený systém bez dopravného oneskorenia!)

Spojité riadený systém s prenosovou funkciou $G(s)$ prepočítame pomocou príkazu **c2d** (prepočítava už s tvarovačom 0. rádu) v Matlabe (s vhodnou periódou vzorkovania T) **na diskretný systém** s prenosovou funkciou $G(z)$:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Predpokladáme, že **referenčnou premennou bude jednotkový skok**, teda:

$$w(k)=1 \quad \text{pre } k=0, 1, \dots \quad (w(kT)=1)$$

Ak označíme **M minimálny počet krokov**, za ktoré sa regulačný pochod ukončí

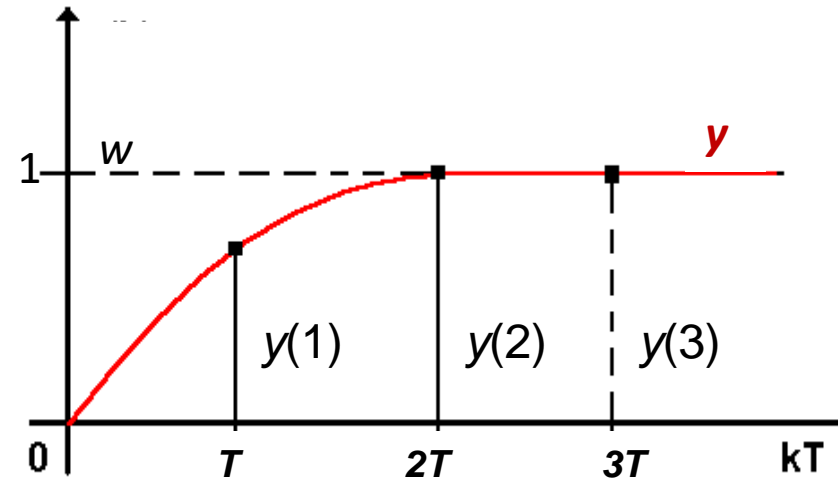
$$\begin{aligned} y(k) &= w(k) = 1 \quad \text{pre } k \geq M \\ u(k) &= u(M) \quad \text{pre } k \geq M \end{aligned}$$

Podmienky ukončenia regulačného procesu za M krokov (nech $M=2$):

$$y(0)=0$$

$$y(k)=w(k)=1 \text{ pre } k \geq M=2$$

$$u(k)=u(M) \text{ pre } k \geq M=2$$



Nech $M=2$

\mathcal{Z} - obrazy jednotlivých veličín:

$$W(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

$$Y(z) = y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots + 1[z^{-M} + z^{-(M+1)} + \dots] \quad (1)$$

$$U(z) = u(0) + u(1)z^{-1} + \dots + u(M)[z^{-M} + z^{-(M+1)} + \dots]$$

Prenosová funkcia URO s využitím (1):

$$\begin{aligned}\boxed{G_{Y/W}(z)} &= \frac{Y(z)}{W(z)} = Y(z)(1 - z^{-1}) = \\ &= \left(y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots + 1 \left[z^{-M} + z^{-(M+1)} + \dots \right] \right) (1 - z^{-1}) = \\ &= p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_M z^{-M} = \boxed{P(z)}\end{aligned}\tag{2}$$

Kde pre koeficienty polynómu $P(z)$ platí:

$$\begin{aligned}p_1 &= y(1) \\ p_2 &= y(2) - y(1) \\ &\dots\dots\dots \\ p_M &= 1 - y(M-1)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^M p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_M = 1$$

Prenosová funkcia $G_{U/W}(z)$ s využitím (1):

$$\begin{aligned}
 G_{U/W}(z) &= \frac{U(z)}{W(z)} = U(z)(1 - z^{-1}) = \\
 &= u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \dots + u(M) [z^{-M} + z^{-(M+1)} + \dots] (1 - z^{-1}) = \\
 &= q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2} + \dots + q_Mz^{-M} = Q(z),
 \end{aligned} \tag{3}$$

Kde pre koeficienty polynómu $Q(z)$ platí:

$$\begin{aligned}
 q_0 &= u(0) \\
 q_1 &= u(1) - u(0) \\
 &\dots\dots\dots \\
 q_M &= u(M) - u(M-1)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^M q_i = u(M) = \frac{1}{K}$$

K je zosilnenie $G(s)$

$$\left[y(M) \stackrel{!}{=} 1 = Ku(M) \Rightarrow u(M) = \frac{1}{K} \right]$$

Pre prenosovú funkciu URO (s vyžitím vzťahov (2) a (3)) platí:

7

$$G_{Y/W}(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{G_R(z)G(z)}{1 + G_R(z)G(z)} \Rightarrow G_R(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{G_{Y/W}(z)}{1 - G_{Y/W}(z)}$$
$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Pre prenosovú funkciu **riadeného systému** (s vyžitím vzťahov (2) a (3)) platí:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\frac{Y(z)}{W(z)}}{\frac{U(z)}{W(z)}} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$
$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{p_1 z^{-1} + \dots + p_M z^{-M}}{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_M z^{-M}} = \frac{\frac{p_1}{q_0} z^{-1} + \dots + \frac{p_M}{q_0} z^{-M}}{1 + \frac{q_1}{q_0} z^{-1} + \dots + \frac{q_M}{q_0} z^{-M}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (4)$$

Pre prenosovú funkciu **regulátora** platí:

$$G_R(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} \frac{P(z)}{1 - P(z)} = \frac{Q(z)}{1 - P(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_M z^{-M}}{1 - p_1 z^{-1} - \dots - p_M z^{-M}}$$

Pre vzťah (4) platí:

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$G(z) = \frac{\frac{p_1}{q_0} z^{-1} + \dots + \frac{p_M}{q_0} z^{-M}}{1 + \frac{q_1}{q_0} z^{-1} + \dots + \frac{q_M}{q_0} z^{-M}} = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

$M = n - \text{r} \ddot{a} \text{d}$ systému

Dostali sme toľko krokov regulácie (M), koľkého stupňa sú polynómy riadeného systému (n).

Teda vyplýva, že $P(z)=q_0 B(z)$ a $Q(z)=q_0 A(z)$:

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 q_0 \\ q_2 &= a_2 q_0 \\ &\dots\dots\dots \\ q_n &= a_n q_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= b_1 q_0 \\ p_2 &= b_2 q_0 \\ &\dots\dots\dots \\ p_n &= b_n q_0 \end{aligned}$$

$$q_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^n b_j} = u(0)$$

Zo sumy: $p_1 + \dots + p_n = 1 = (b_1 + b_2 + \dots + b_n) q_0$

$$\Rightarrow q_0 = \frac{1}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = u(0)$$

Z uvedeného odvodenia vyplýva, že navrhnutý deadbeat regulátor kompenzuje menovateľa prenosovej funkcie riadeného systému:

$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z)}{1 - P(z)} = \frac{q_0 A(z)}{1 - q_0 B(z)}$$

Diferenčná rovnica regulátora je:

$$u(k) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + \dots + q_M e(k-M) + p_1 u(k-1) + p_2 u(k-2) + \dots + p_M u(k-M)$$

Posúdenie stability URO s deadbeat regulátorom riadeného systému **bez** dopravného oneskorenia

Prenosová funkcia URO:

$$G_{Y/W}(z) = P(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_M z^{-M} = \frac{p_1 z^{M-1} + p_2 z^{M-2} + \dots + p_M}{\boxed{z^M}} = \frac{q_0 B(z)}{z^M}$$

↑
CHRURO

Charakteristická rovnica URO (CHRURO) je rovná z^M (M je počet krokov riadenia), je rovná z^n (n je rád riadeného systému). Ak ju položíme rovnú nule, zistíme, že **URO má n pólov rovných nule**. Všetky **póly ležia v jednotkovej kružnici** a teda URO s takto navrhnutým regulátorom bude vždy stabilný a **stabilitu netreba dodatočne overovať**.

DEADBEAT – regulátor s ohraničením (obmedzením) akčného zásahu

riadeného systému **bez** dopravného oneskorenia

$$\begin{aligned}
 q_0 &= u(0) \\
 q_1 &= q_0(a_1 - 1) + \frac{1}{\sum b_i} \\
 q_2 &= q_0(a_2 - a_1) + \frac{a_1}{\sum b_i} \\
 &\dots\dots\dots \\
 q_M &= q_0(a_n - a_{n-1}) + \frac{a_{n-1}}{\sum b_i} \\
 q_{M+1} &= a_n \left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i} \right)
 \end{aligned}$$

$$u(0) = u_{\max}$$

$M = n - \text{r}\ddot{\text{a}}\text{d}$ systému

$$\begin{aligned}
 p_1 &= q_0 b_1 \\
 p_2 &= q_0(b_2 - b_1) + \frac{b_1}{\sum b_i} \\
 &\dots\dots\dots \\
 p_M &= q_0(b_n - b_{n-1}) + \frac{b_{n-1}}{\sum b_i} \\
 p_{M+1} &= b_n \left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i} \right)
 \end{aligned}$$

CHRURO:

$$z^{M+1} = 0$$

Charakteristická rovnica URO (CHRURO) je rovná z^{M+1} ($M+1$ je počet krokov riadenia), je rovná z^{n+1} (n je rád riadeného systému). Ak ju položíme rovnú nule, zistíme, že **URO má $n+1$ pólov rovných nule**. Všetky **póly ležia v jednotkovej kružnici** a teda URO s takto navrhnutým regulátorom bude vždy stabilný a **stabilitu netreba dodatočne overovať**.

Pr. 1: K spojitému systému

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(2s+1)} = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1}$$

navrhnite deadbeat regulátor ($T=1$).

Riešenie:

PRÍKAZ **c2d** v Matlabe

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}_{t=kT} \right\} = \frac{0.1548181 z^{-1} + 0.0939019 z^{-2}}{1 - 0.97440 z^{-1} + 0.22310 z^{-2}} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$M = n = 2$$

$$q_0 = 1 / \sum b_i = 1 / 0.24872 = 4.0205848 \quad \leftarrow u(0)$$

$$q_1 = a_1 q_0 = -3.917694$$

$$q_2 = a_2 q_0 = 0.897113$$

$$p_1 = b_1 q_0 = 0.622459$$

$$p_2 = b_2 q_0 = 0.377540$$

$$G_R(z) = \frac{Q(z)}{1 - P(z)}$$

Návrh DEADBEAT regulátora – príklad1 (2/2)

$$G_R(z) = \frac{4.02058 - 3.91769z^{-1} + 0.89711z^{-2}}{1 - 0.62245z^{-1} - 0.377540z^{-2}}$$

Diferenčná rovnica regulátora

$$u(k) = 0.6224u(k-1) + 0.3775u(k-2) + 4.02058e(k) - 3.9176e(k-1) + 0.8971e(k-2)$$

CHRURO má 2-násobný ($n=2$, pričom n je rád riadeného systému) koreň v nule, **stabilita** je teda daná samotným návrhom regulátora a nemusí sa dodatočne overovať.

$n=2$ je počet krokov riadenia

Pr. 2: K spojitému systému

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(2s+1)} = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1}$$

navrhnite deadbeat regulátor s ohraňčením akčného zásahu na $u_{\max}=3.8$.

Riešenie:

PRÍKAZ **c2d** v Matlabe

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}_{t=kT} \right\} = \frac{0.1548181 z^{-1} + 0.0939019 z^{-2}}{1 - 0.97440 z^{-1} + 0.22310 z^{-2}} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$M = n = 2$$

$$q_0 = u_0 = 3.8$$

$$q_1 = q_0(a_1 - 1) + \frac{1}{\sum b_i} = -3.482134$$

$$q_2 = q_0(a_2 - a_1) + \frac{a_1}{\sum b_i} = 0.632841$$

$$q_3 = a_2 \left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i} \right) = 0.0492126$$

$$p_1 = q_0 b_1 = 0.58830878$$

$$p_2 = q_0(b_2 - b_1) + \frac{b_1}{\sum b_i} = 0.3909778$$

$$p_3 = q_0(b_3 - b_2) + \frac{b_2}{\sum b_i} = 0.0207133$$

$$G_R(z) = \frac{Q(z)}{1 - P(z)}$$

$$G_R(z) = \frac{3.8 - 3.482134z^{-1} + 0.632841z^{-2} + 0.04921126z^{-3}}{1 - 0.58830878z^{-1} - 0.3909778z^{-2} - 0.0207193z^{-3}}$$

Diferenčná rovnica regulátora

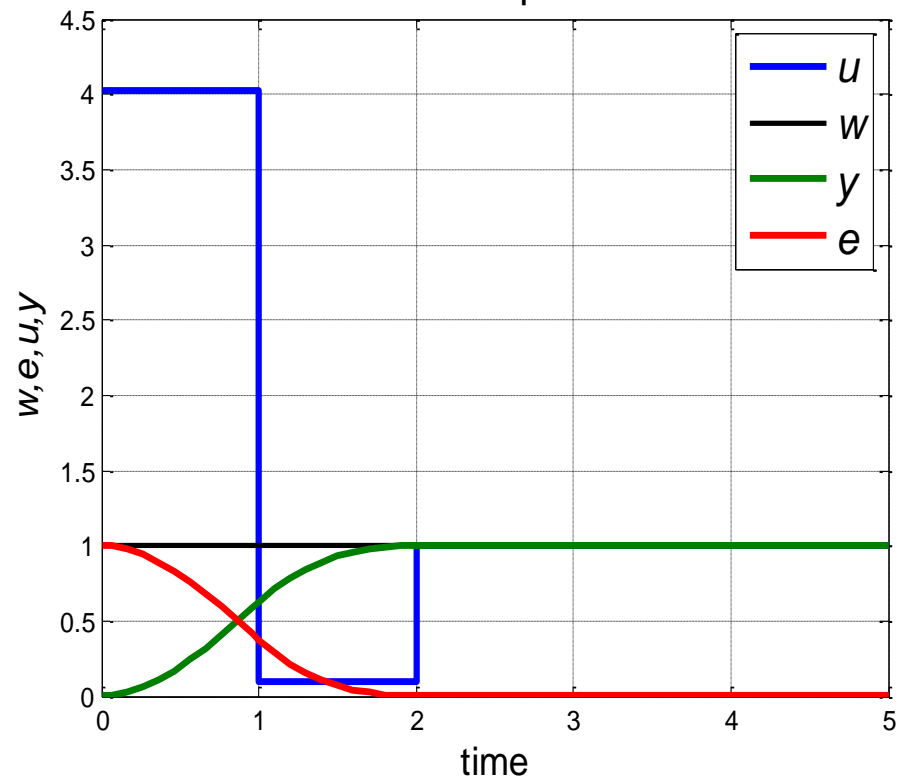
$$u(k) = 0.58830878 u(k-1) + 0.3909778 u(k-2) + 0.0207193 u(k-3) + \\ + 3.8e(k) - 3.482134 e(k-1) + 0.632841 e(k-2) + 0.04921126 e(k-3)$$

CHRURO má 3-násobný ($n+1$, pričom $n=2$ je rád riadeného systému) koreň v nule, **stabilita** je teda daná samotným návrhom regulátora a nemusí sa dodatočne overovať.

$n+1=3$ je počet krokov riadenia

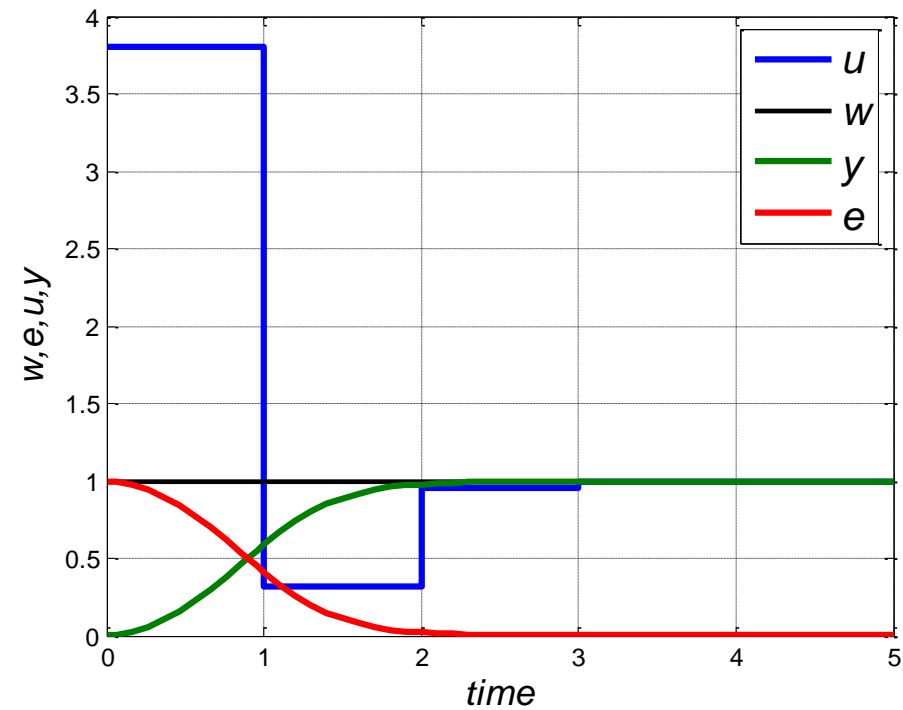
Simulácia priebehov pre príklady 1 a 2:

DEADBEAT príklad 1



počet krokov riadenia je 2

DEADBEAT s ohrančením Príklad 2



počet krokov riadenia je 3

DEADBEAT regulátor
pre riadený systém
s dopravným oneskorením

Spojité riadený systém s prenosovou funkciou $G(s)$ prepočítame pomocou príkazu **c2d** (prepočítava už s tvarovačom 0. rádu) v Matlabe (s vhodnou periódou vzorkovania T) **na diskretný systém** s prenosovou funkciou $G(z)$:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} z^{-d} = \frac{b_1 z^{-(1+d)} + b_2 z^{-(2+d)} + \dots + b_n z^{-(n+d)}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Hľadáme prenosovú funkciu regulátora:

$$G_R(z) = \frac{Q(z)}{1 - P(z)} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

$M = n - \text{r} \text{ád} \text{ systému}$

$$q_0 = 1 / \sum b_i$$

$$q_1 = a_1 q_0$$

$$q_2 = a_2 q_0$$

.....

$$q_M = a_n q_0$$

$$p_{1+d} = b_1 q_0$$

$$p_{2+d} = b_2 q_0$$

.....

$$p_{M+d} = b_n q_0$$

CHRURO:

$$z^{M+d} = 0$$

Charakteristická rovnica URO (CHRURO) je rovná z^{M+d} ($M+d$ je počet krokov riadenia), je rovná z^{n+d} (n je rád riadeného systému, $d=D/T$ je diskretné oneskorenie). Ak ju položíme rovnú nule, zistíme, že **URO má $n+d$ pólov rovných nule**. Všetky **póly ležia v jednotkovej kružnici** a teda URO s takto navrhnutým regulátorom bude vždy stabilný a **stabilitu netreba dodatočne overovať**.

DEADBEAT – regulátor s ohraničením (obmedzením) akčného zásahu riadeného systému s dopravným oneskorením

18

$$q_0 = u(0)$$

$$u(0) = u_{\max}$$

$M = n - \text{r} \ddot{a}d \text{ systému}$

$$q_1 = q_0(a_1 - 1) + \frac{1}{\sum b_i}$$

$$q_2 = q_0(a_2 - a_1) + \frac{a_1}{\sum b_i}$$

.....

$$q_M = q_0(a_n - a_{n-1}) + \frac{a_{n-1}}{\sum b_i}$$

$$q_{M+1} = a_n \left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i} \right)$$

$$p_{1+d} = q_0 b_1$$

$$p_{2+d} = q_0(b_2 - b_1) + \frac{b_1}{\sum b_i}$$

.....

$$p_{M+d} = q_0(b_n - b_{n-1}) + \frac{b_{n-1}}{\sum b_i}$$

$$p_{M+1+d} = b_n \left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i} \right)$$

CHRURO:

$$z^{M+1+d} = 0$$

Charakteristická rovnica URO (CHRURO) je rovná z^{M+d+1} ($M+d+1$ je počet krokov riadenia), je rovná z^{n+d+1} (n je rád riadeného systému, $d=D/T$ je diskkrétne oneskorenie). Ak ju položíme rovnú nule, zistíme, že **URO má $n+d+1$ pólov rovných nule**. Všetky **póly ležia v jednotkovej kružnici** a teda URO s takto navrhnutým regulátorom bude vždy stabilný a **stabilitu netreba dodatočne overovať**.

Pr. 3: K spojitému systému

$$G(s) = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1} e^{-s}$$

navrhnite deadbeat regulátor ($T=1$).

Riešenie:

PRÍKAZ **c2d** V Matlabe

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}_{t=kT} \right\} = \frac{0.1548181z^{-1} + 0.0939019z^{-2}}{1 - 0.97440z^{-1} + 0.22310z^{-2}} z^{-1} = \frac{b_1z^{-2} + b_2z^{-3}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \quad M = n = 2$$

$$q_0 = 1 / \sum b_i = 1 / 0.24872 = 4.0205848$$

$$q_1 = a_1 q_0 = -3.917694$$

$$q_2 = a_2 q_0 = 0.897113$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = b_1 q_0 = 0.622459$$

$$p_3 = b_2 q_0 = 0.377540$$

$$G_R(z) = \frac{Q(z)}{1 - P(z)}$$

$$G_R(z) = \frac{4.02058 - 3.91769z^{-1} + 0.89711z^{-2}}{1 - 0.62245z^{-2} - 0.377540z^{-3}}$$

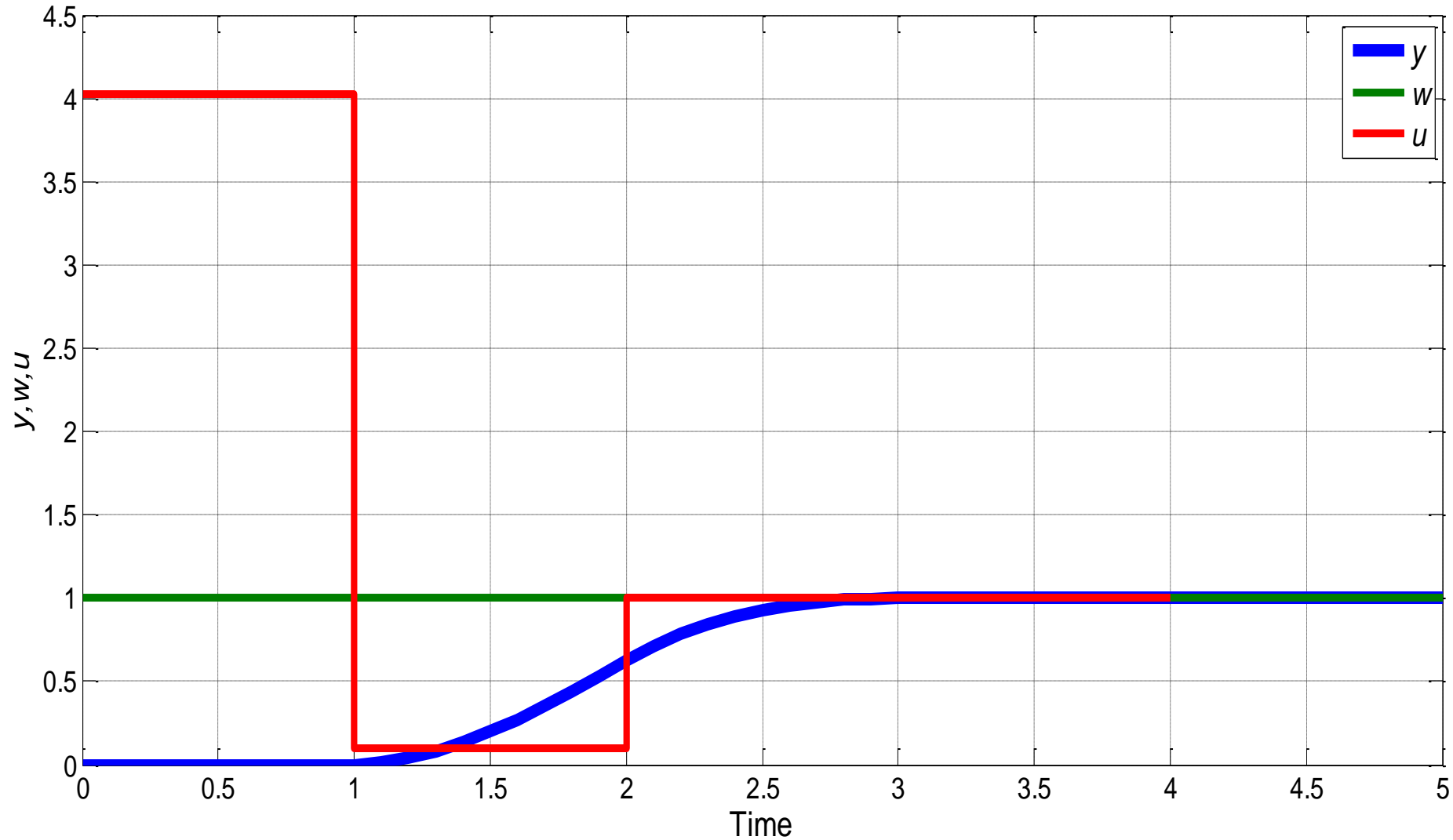
Diferenčná rovnica regulátora

$$u(k) = 0.6224u(k-2) + 0.3775u(k-3) + 4.02058e(k) - 3.9176e(k-1) + 0.8971e(k-2)$$

CHRURO má 3-násobný ($n+d$, pričom $n=2$ je rád riadeného systému, $d=D/T=1$ je diskkrétne oneskorenie) koreň v nule, **stabilita** je teda daná samotným návrhom regulátora a nemusí sa dodatočne overovať.

$n+d=3$ je počet krokov riadenia

DEADBEAT regulator pre system s dopravným oneskorením



počet krokov riadenia je 3

Pr. 4: K spojitému systému

$$G(s) = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1} e^{-s}$$

navrhnete deadbeat regulátor ($T=1$) s ohraničením akčného zásahu $u_{\max}=3.8$.

Riešenie:

PRÍKAZ **c2d** V Matlabe

$M = n = 2$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}_{t=kT} \right\} = \frac{0.1548181z^{-1} + 0.0939019z^{-2}}{1 - 0.97440z^{-1} + 0.22310z^{-2}} z^{-1} = \frac{b_1z^{-2} + b_2z^{-3}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

$$q_0 = u_0 = 3.8$$

$$q_1 = q_0(a_1 - 1) + \frac{1}{\sum b_i} = -3.482134$$

$$q_2 = q_0(a_2 - a_1) + \frac{a_1}{\sum b_i} = 0.632841$$

$$q_3 = a_2 \left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i} \right) = 0.0492126$$

$$p_2 = q_0 b_1 = 0.58830878$$

$$p_3 = q_0(b_2 - b_1) + \frac{b_1}{\sum b_i} = 0.3909778$$

$$p_4 = q_0(b_3 - b_2) + \frac{b_2}{\sum b_i} = 0.0207133$$

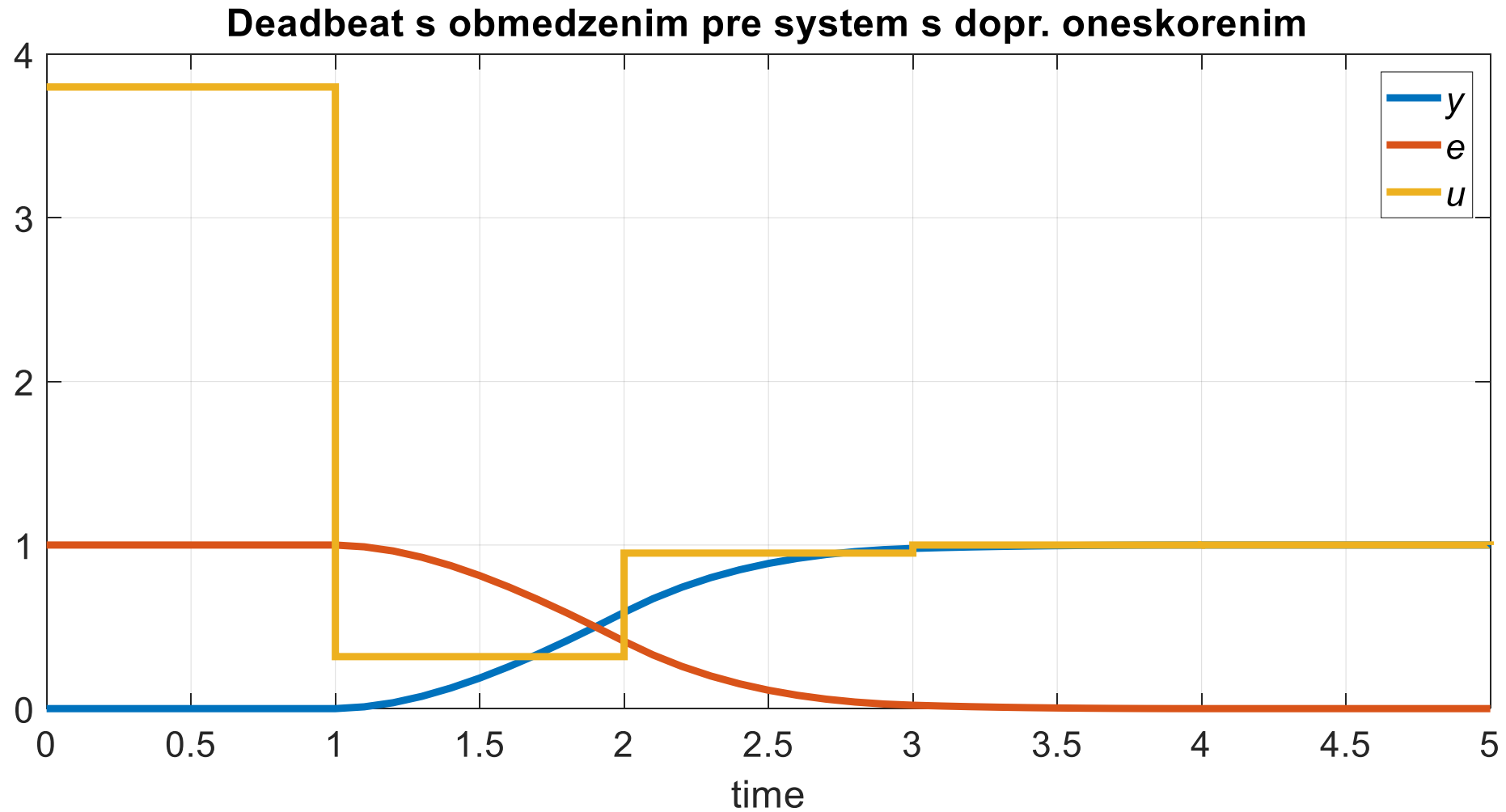
$$G_R(z) = \frac{Q(z)}{1 - P(z)}$$

$$G_R(z) = \frac{3.8 - 3.482134z^{-1} + 0.632841z^{-2} + 0.04921126z^{-3}}{1 - 0.58830878z^{-2} - 0.3909778z^{-3} - 0.0207193z^{-4}}$$

$$u(k) = 0.58830878u(k-2) + 0.3909778u(k-3) + 0.0207193u(k-4) + \\ + 3.8e(k) - 3.482134e(k-1) + 0.632841e(k-2) + 0.04921126e(k-3)$$

CHRURO má 4-násobný ($n+d+1$, pričom $n=2$ je rád riadeného systému, $d=D/T=1$ je diskkrétne oneskorenie) koreň v nule, **stabilita** je teda daná samotným návrhom regulátora a nemusí sa dodatočne overovať.

$n+d+1=4$ je počet krokov riadenia



Zhrnutie vlastností **deadbeat regulátora** navrhnutého **pre systém n -tého rádu s dopravným oneskorením d**

- ukončí regulačný pochod za $n + d$ krokov, (pri návrhu regulátora s ohraničením akčného zásahu za $n + d + 1$ krokov),
- doba regulácie bude $t_{reg} = (n + d)T$, kde T je perióda vzorkovania (pri návrhu regulátora s ohraničením akčného zásahu bude $t_{reg} = (n + d + 1)T$),
- je vhodný pre asymptoticky stabilné systémy (kompenzuje menovateľa prenosovej funkcie riadeného systému $A(z)$),
- so zmenšovaním T klesá t_{reg} , ale narastá $u(0)$, lebo $\sum_{j=1}^n b_j$ sa zmenšuje klesaním T ,
- periódu T musíme voliť “dostatočne veľkú”, aby nebolo $u(0) > u_{\max}$, kde u_{\max} je prípustná maximálna hodnota $u(k)$,
- tieto regulátory spravidla majú vysokú parametrickú citlivosť (t. j. malú robustnosť), čo je ich nevýhodou,
- URO bude vždy stabilný (póly URO sú všetky nulové),

Kvalita riadenia v ustálenom stave pre URO s deadbeat regulátorom

Ustálené hodnoty regulačnej odchýlky, regulovanej veličiny a riadiaceho zásahu, ak je na vstupe do regulačného obvodu jednotkový skok $W(z)=1/(1-z^{-1})$, budú:

$$G_O(z)=G(z)G_R(z)$$

$$e(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{W(z)}{1 + G_O(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) (1 - P(z)) \frac{1}{1 - z^{-1}} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - P(z))$$

$$y(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{G_O(z)}{1 + G_O(z)} W(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) P(z) \frac{1}{1 - z^{-1}} = \lim_{z \rightarrow 1} P(z)$$

$$u(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} u(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})U(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{G_R(z)}{1 + G_O(z)} W(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) Q(z) \frac{1}{1 - z^{-1}} = \lim_{z \rightarrow 1} Q(z)$$