Číslicové riadenie

7. prednáška

Časovo optimálne stabilné riadenie
SILNÁ verzia

7. Prednáška - OBSAH

- Algebraická teória riadenia

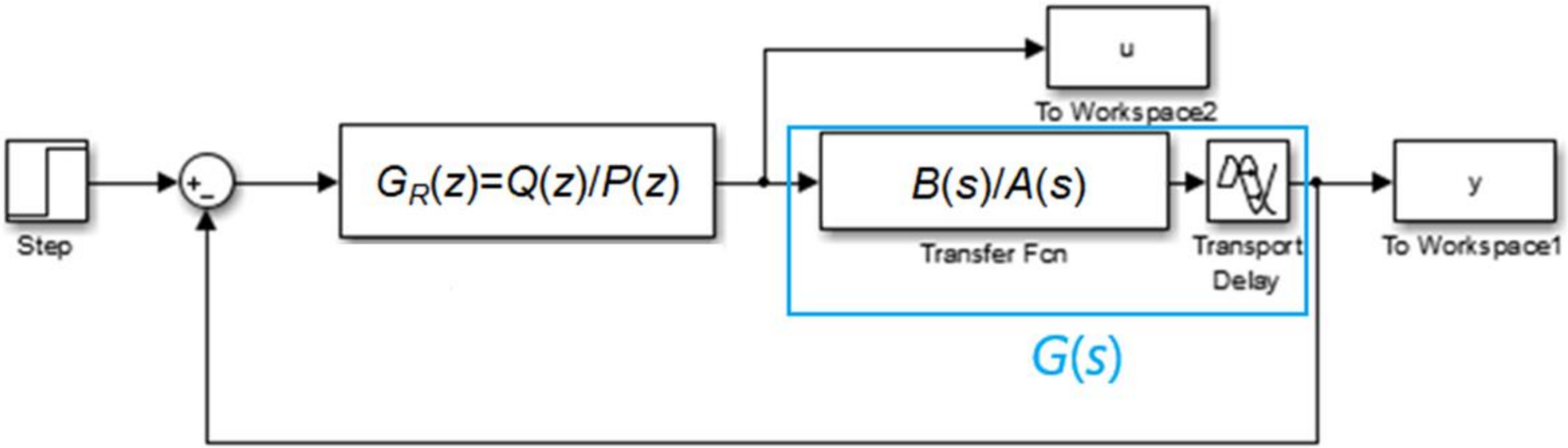
  Časovo optimálne regulátory

  SILNÁ verzia (**stabilné <u>konečné</u> časovo optimálne riadenie**)

  SILNÁ modifikovaná verzia

Metódy sú **založené na algebre polynómov**, umožňujúce navrhovať **všeobecné štruktúry regulátorov**.

Návrh algebraických regulátorov



Návrh časovo optimálneho stabilného riadenia – teória (1/3)

Pri riadení využijeme blokovú schému URO zo str. 3.

Na vstupe do URO je referenčný signál, pre ktorý platí:

$$\boxed{W(z)=\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f^{+}(z)f^{-}(z)}{g(z)}} \xrightarrow{\text{Jednotkový skok}} \boxed{W(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}}$$

$$f(z)=1,\ f^{+}(z)=1,\ f^{-}(z)=1 \qquad (1)$$
$$g(z)=1-z^{-1}$$

Spojitý riadený systém $G(s)$ prepočítame na diskrétnu prenosovú funkciu s tvarovačom 0. rádu (s vhodnou periódou vzorkovania - pomocou príkazu *c2d* v MATLABe).

$$\boxed{G(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{B^{+}(z)B^{-}(z)}{A^{+}(z)A^{-}(z)}} \qquad (2)$$

Keďže polynóm $g(z)$ je nestabilný, musíme ho nejakým spôsobom vykompenzovať v URO. Nech $D(z)$ je najväčší spoločný deliteľ polynómov $A(z)$ a $g(z)$

$$\boxed{D(z)=\mathrm{d}(A(z),g(z));\quad A(z)=A_0(z)D(z);\quad g(z)=g_0(z)D(z)} \qquad (3)$$

Návrh časovo optimálneho stabilného riadenia – teória (2/3)

Na základe (3) prenosovú funkciu (2) zapíšeme ako

$$\boxed{G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B^{+}(z)B^{-}(z)}{A_0^{+}(z)A_0^{-}(z)D(z)}}$$

Hľadáme prenosovú funkciu regulátora

$$\boxed{G_R(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}} \tag{4}$$

Pre charakteristickú rovnicu URO (schéma na str. 3) platí

$$A(z)P(z) + B(z)Q(z) = A_z(z)$$

$$\boxed{A^{+}(z)A^{-}(z)P(z) + B^{+}(z)B^{-}(z)Q(z) = A_z(z)} \tag{5}$$

$A_z(z)$ je želaný polynóm, ktorý musí byť stabilný (jeho korene musia ležať v jednotkovej kružnici).

Rovnica (5) je diofantická rovnica, kde hľadáme neznáme polynómy regulátora $Q(z)$ a $P(z)$ (viď (4)). Hľadáme minimálne stupne neznámych polynómov, aby sme navrhli čo najjednoduchší typ regulátora.

Návrh časovo optimálneho stabilného riadenia – teória (3/3)

Na základe znalosti blokovej algebry (schéma na str. 23) s využitím vzťahov (1) a (5) pre regulačnú odchýlku $E(z)$ a akčný zásah $U(z)$ platí:

$$\boxed{E(z) = \frac{A(z)P(z)f(z)}{A_z(z)g(z)}} \qquad (6)$$

$$\boxed{U(z) = \frac{A(z)Q(z)f(z)}{A_z(z)g(z)}}$$

Na základe (3) bude rovnica (5) upravená:

$$A_0(z)D(z)P(z) + B(z)Q(z) = A_z(z)$$

$$\boxed{A_0^+(z)A_0^-(z)\frac{g(z)}{g_0(z)}P(z) + B^+(z)B^-(z)Q(z) = A_z(z)} \qquad (7)$$

S využitím vzťahov (1), (3) a (7) pre regulačnú odchýlku $E(z)$ a akčný zásah $U(z)$ (vzťahy (6)) platí:

$$\boxed{E(z)} = \frac{A_0(z)P(z)f(z)}{A_z(z)g_0(z)} = \boxed{\frac{A_0^+(z)A_0^-(z)P(z)f^+(z)f^-(z)}{A_z(z)g_0(z)}} \qquad (8)$$

$$\boxed{U(z)} = \frac{A_0(z)Q(z)f(z)}{A_z(z)g_0(z)} = \boxed{\frac{A_0^+(z)A_0^-(z)Q(z)f^+(z)f^-(z)}{A_z(z)g_0(z)}}$$

Počet krokov riadenia je

$$k_{MIN} = \deg(E(z)) + 1$$

Návrh stabilného <u>konečného</u> časovo optimálneho riadenia – silná verzia (1/3)

Úlohou je **určiť diskrétnu prenosovú funkciu regulátora**, ktorý stabilizuje diskrétny regulačný obvod pomocou **konečnej postupnosti riadiacich zásahov** a **zaručí konečnú postupnosť regulačnej odchýlky**. Tomuto spôsobu riadenia sa hovorí <u>**silná verzia**</u> ukončenia regulačného pochodu za najmenší počet krokov (riadiaci zásah $u(k)$ je konečná postupnosť).

URO vnútime stabilné póly riadeného systému. URO bude stabilný, polynóm $E(z)$ bude konečný a stabilný, polynóm $U(z)$ bude konečný v prípade, ak $\boxed{g_0(z) = 1}$. Ide o <u>nutnú podmienku pre tzv. **SILNÚ VERZIU**</u> **časovo optimálneho riadenia**

Pozn. Podmienka vyplýva z (8).

Voľba charakteristického polynómu $A_z(z)$ pre silnú verziu (teda URO vnútime stabilné póly riadeného systému):

$$\boxed{A_z(z) = A_0^+(z) f^+(z)} \qquad (9)$$

Návrh stabilného konečného časovo optimálneho riadenia – silná verzia (2/3)

Rovnicu (9) dosadíme do (7):

$$A_0^-(z)g(z)\frac{P(z)}{g_0(z)} + B(z)\frac{Q(z)}{A_0^+(z)} = f^+(z)$$

a následne upravíme ($g_0(z)=1$):

$$\boxed{A_0^-(z)g(z)P(z) + B(z)Q_0(z) = f^+(z)} \qquad (10)$$

Kde:

$$\boxed{Q(z) = A_0^+(z)Q_0(z)} \qquad (11)$$

Rovnicu (9) dosadíme do (8) ($g_0(z)=1$):

$$\boxed{E(z) = A_0^-(z)P(z)f^-(z)},$$
$$\boxed{U(z)} = A_0^-(z)Q(z)f^-(z) = \boxed{A_0(z)Q_0(z)f^-(z)}. \qquad (12)$$

Pre stupne polynómov $E(z)$ a $U(z)$ platí:

$$\boxed{\deg(E(z))} = \deg(A_0^-(z)) + \deg(P(z)) + \deg(f^-(z)) = \boxed{\deg(A_0^-(z)) + \deg(B(z)) - 1}$$

$$\boxed{\deg(U(z))} = \deg(A_0^-(z)) + \deg(Q_0(z)) + \deg(f^-(z)) = \boxed{\deg(A_0^-(z)) + \deg(A(z)) - 1}$$

Počet krokov riadenia je

$$k_{MIN} = \deg(E(z)) + 1$$

Návrh stabilného <u>konečného</u> časovo optimálneho riadenia – silná verzia (3/3)

Oba polynómy $E(z)$ a $U(z)$ budú konečné stabilné postupnosti (finite time control). Prenosovú funkciu regulátora získame podľa vzťahu (4).

Na rozdiel od slabej verzie, silná verzia (aj $U(z)$ je konečný polynóm minimálneho stupňa) riadenia zaručuje ustálený priebeh regulovanej veličiny aj medzi časovými okamihmi celočíselných násobkov periódy vzorkovania.

Pre existenciu **stabilného <u>konečného</u> časovo optimálneho riadenia – SILNÁ verzia,** polynóm $U(z)$ musí byť konečný, musí teda platiť podmienka:

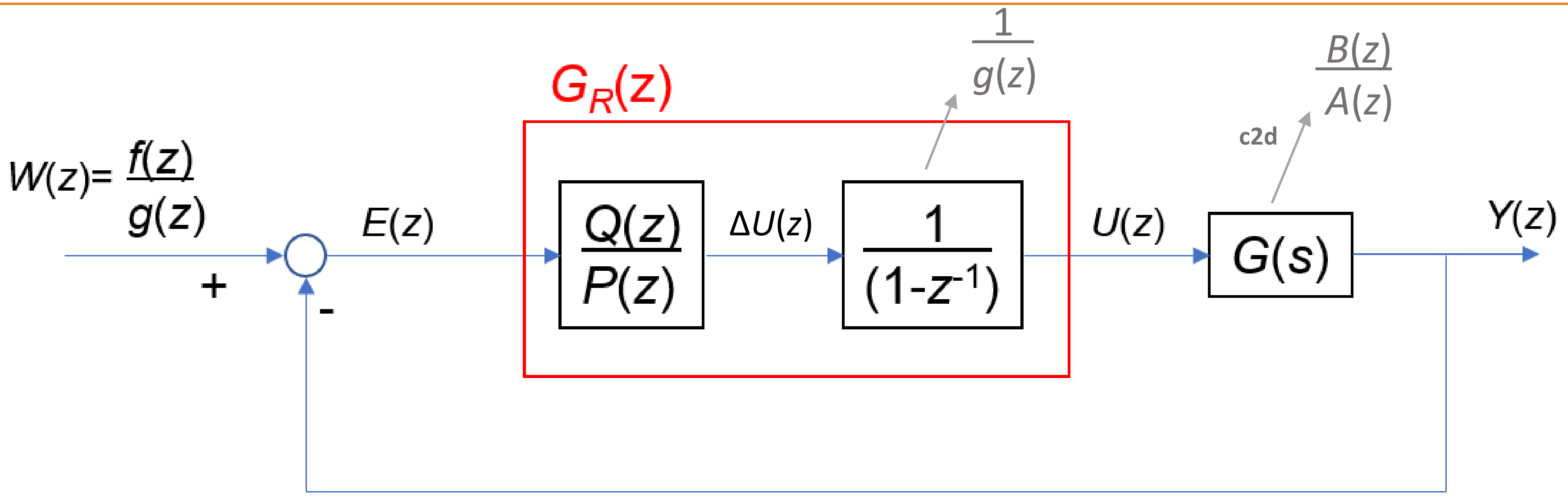
$$\boxed{g_0(z) = 1}$$

Modifikovaná silná verzia (1/2)

Nutná podmienka pre existenciu SILNEJ verzie: $\boxed{g_0(z) = 1}$

Ak neplatí podmienka existencie silnej verzie, existuje tzv. **modifikovaná silná verzia**. Je to napr. vtedy, ak je referenčný signál na vstupe jednotkový skok a riadime systém bez astatizmu. Vtedy musíme do URO zaviesť integračný člen. (Prítomnosť integračného správania je všeobecne žiadúca, lebo garantuje nulovú regulačnú odchýlku pri vstupných priebehoch, ktoré sa ustaľujú na konštantnej hodnote.) Modifikovanú silnú verziu dosiahneme tak, že medzi riadený proces a regulátor sa zaradí integračný člen takého rádu, akého je rád menovateľa referenčnej veličiny $g(z)$. V prípade jednotkového skoku na vstupe do URO je $g(z) = 1 - z^{-1}$ a preto musíme do regulačného obvodu pridať člen $\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}}$ podľa Obr. 1. Polynóm $g(z)$ je nestabilný a musí byť obsiahnutý v polynóme menovateľa riadeného systému $A(z)$. Potom namiesto polynómu $A(z)$ uvažujeme rozšírený polynóm $g(z)A(z)$. Ďalší postup pre výpočet polynómov regulátora je rovnaký ako pri silnej verzii.

Obr. 1.



Charakteristická rovnica URO (5) sa potom zmení na

$$A(z)g(z)P(z) + B(z)Q(z) = A(z)(1 - z^{-1})P(z) + B(z)Q(z) = A_z(z)$$

Výsledná prenosová funkcia regulátora potom bude:

$$G_R(z) = \frac{Q(z)}{(1 - z^{-1})P(z)} \tag{13}$$

Pri modifikovanej silnej verzii je **zmena** akčného zásahu konečná postupnosť.

$\Delta U(z)$

Príklad: Návrh stabilného konečného časovo optimálneho riadenia – silná verzia (1/7)

Navrhnite stabilné konečné časovo optimálne riadenie pre riadený systém s prenosovou funkciou

$$G(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{25}{0.1s^2+1.2s+2}\quad e^{-0.2s}$$

Určte prenosovú funkciu diskrétneho regulátora, postupnosť riadiacich zásahov *U*(*z*), regulačnú odchýlku *E*(*z*) a výstupnú regulovanú veličinu *Y*(*z*) tak, aby trvalá regulačná odchýlka bola nulová aj medzi okamihmi vzorkovania, od $k \geq k_{MIN}$ (konečný polynóm), riadiaca postupnosť *U*(*z*) bola konečná (SILNÁ VERZIA). Referenčná premenná *W*(*z*) jednotkový skok.

Riešenie:

Na vstupe do URO je referenčný signál, pre ktorý platí:

$$\boxed{W(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}}\qquad f(z)=1,\ f^+(z)=1,\ f^-(z)=1$$
$$g(z)=1-z^{-1}$$

Diskrétna prenosová funkcia spojitého procesu pre ***T* = 0.2** je

$$G(z)=\frac{2.449z^{-2}+1.114z^{-3}}{1-0.8057z^{-1}+0.09072z^{-2}}=\frac{2.449z^{-2}(1+0.4549z^{-1})}{(1-0.6704z^{-1})(1-0.1353z^{-1})}=\frac{B(z)}{A(z)}$$

Príklad: Návrh stabilného konečného časovo optimálneho riadenia – silná verzia (2/7)

Pre polynómy platí:

$$
\begin{aligned}
&B(z) = 2.4494z^{-2} + 1.1143z^{-3}, \quad B^{-}(z) = 2.4494z^{-2}, \quad B^{+}(z) = 1 + 0.4549z^{-1},\\
&D(z) = \mathrm{d}(A(z), g(z)) = 1,\\
&A_0(z) = 1 - 0.8057z^{-1} + 0.09072z^{-2} = (1 - 0.6704z^{-1})(1 - 0.1353z^{-1}) = A_0^{+}(z), \;\; A_0^{-}(z) = 1,\\
&g(z) = g_0(z) = 1 - z^{-1}, \quad f(z) = 1, \quad f^{+}(z) = 1, \quad f^{-}(z) = 1
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Nutná podmienka pre existenciu SILNEJ verzie: $\boxed{g_0(z) = 1}$

Pre existenciu silnej verzie musí platiť podmienka $g_0(z) = 1$. Na základe (14) je zrejmé, že táto podmienka nie je splnená. Pre riadený systém bez astatizmu existuje iba tzv. modifikovaná silná verzia.

Pri modifikovanej silnej verzii je **zmena** akčného zásahu konečná postupnosť.

Hľadáme prenosovú funkciu regulátora

$$\boxed{G_R(z) = \frac{Q(z)}{(1 - z^{-1})P(z)}}$$

Pozn. Viac info na str. 10 a 11.

Príklad: Návrh stabilného <u>konečného</u> časovo optimálneho riadenia – silná verzia (3/7)

Namiesto polynómu $A(z)$ uvažujeme rozšírený polynóm $g(z)A(z)$ potom platí:

(15)

$$D(z) = \mathrm{d}(g(z)A(z), g(z)) = g(z) = 1 - z^{-1}$$

$$A_0(z) = 1 - 0.8057z^{-1} + 0.09072z^{-2} = (1 - 0.6704z^{-1})(1 - 0.1353z^{-1}) = A_0^+(z), \ A_0^-(z) = 1,$$

$$\boxed{g_0(z) = 1}$$

Pre charakteristickú rovnicu URO (diofantickú rovnicu) platí $\boxed{A_0^-(z)g(z)P(z) + B(z)Q_0(z) = f^+(z)}$

$$\boxed{(1 - z^{-1})P(z) + (2.4494z^{-2} + 1.1143z^{-3})Q_0(z) = 1}$$

Skontrolujeme podmienku riešiteľnosti diofantickej rovnice.

Najväčší spoločný deliteľ $\mathrm{d}(1 - z^{-1},\ 2.4494z^{-2} + 1.1143z^{-3}) = 1$ delí polynóm na pravej strane rovnice. Diofantická rovnica má teda riešenie.

Príklad: Návrh stabilného konečného časovo optimálneho riadenia – silná verzia (4/7)

Ďalej zistíme minimálne stupne neznámych polynómov $P(z)$ a $Q_0(z)$

$$\deg(1 - z^{-1}) + \deg(2.4494z^{-2} + 1.1143z^{-3}) = 1 + 3 = 4 > \deg(1) = 0,$$
$$\deg(P(z)) = \deg(2.4494z^{-2} + 1.1143z^{-3}) - 1 = 2 \quad \Rightarrow \boxed{P(z) = p_0 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}}$$
$$\deg(Q_0(z)) = \deg(1 - z^{-1}) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{Q_0(z) = q_{0_0}}$$

Po určení stupňov polynómov $P(z)$ a $Q_0(z)$ treba vypočítať ich koeficienty. Dosadíme ich teda do diofantickej rovnice a následným porovnaním jej pravej a ľavej strany pri rovnakých mocninách z dostaneme sústavu lineárnych algebraických rovníc. Ich riešením získame koeficienty polynómov $\boxed{p_0 = 1,\ p_1 = 1,\ p_2 = 0.3127,\ q_{0_0} = 0.2806.}$

Polynómy regulátora, prenosová funkcia regulátora a jeho diferenčná rovnica sú:

$$\boxed{P(z) = 1 + z^{-1} + 0.3127z^{-2}}$$

$$\boxed{Q(z) = A_0^{+}(z) Q_0(z)}$$

$$\boxed{Q(z) = 0.2806(1 - 0.8057z^{-1} + 0.09072z^{-2}) = 0.2806 - 0.2261z^{-1} + 0.02546z^{-2}}$$

Príklad: Návrh stabilného konečného časovo optimálneho riadenia – silná verzia (5/7)

$$G_R(z) = \frac{0.2806 - 0.2261z^{-1} + 0.02546z^{-2}}{(1 + z^{-1} + 0.3127z^{-2})(1 - z^{-1})} = \frac{0.2806 - 0.2261z^{-1} + 0.02546z^{-2}}{1 - 0.6873z^{-2} - 0.3127z^{-3}} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

$$u(k) = 0.6872u(k-2) + 0.3127u(k-3) + 0.2806e(k) - 0.2261e(k-1) + 0.02546e(k-2)$$

Pre riadiaci zásah a regulačnú odchýlku podľa (12) platí

$$U(z) = \frac{0.2806 - 0.2261z^{-1} + 0.02546z^{-2}}{1 - z^{-1}},$$

$$E(z) = 1 + z^{-1} + 0.3127z^{-2}$$

Zmena akčného zásahu je konečná postupnosť

$$\Delta U(z) = 0.2806 - 0.2261z^{-1} + 0.02546z^{-2}$$

Počet krokov riadenia je

$$k_{MIN} = \deg(E(z)) + 1$$

$$k_{MIN} = 3$$

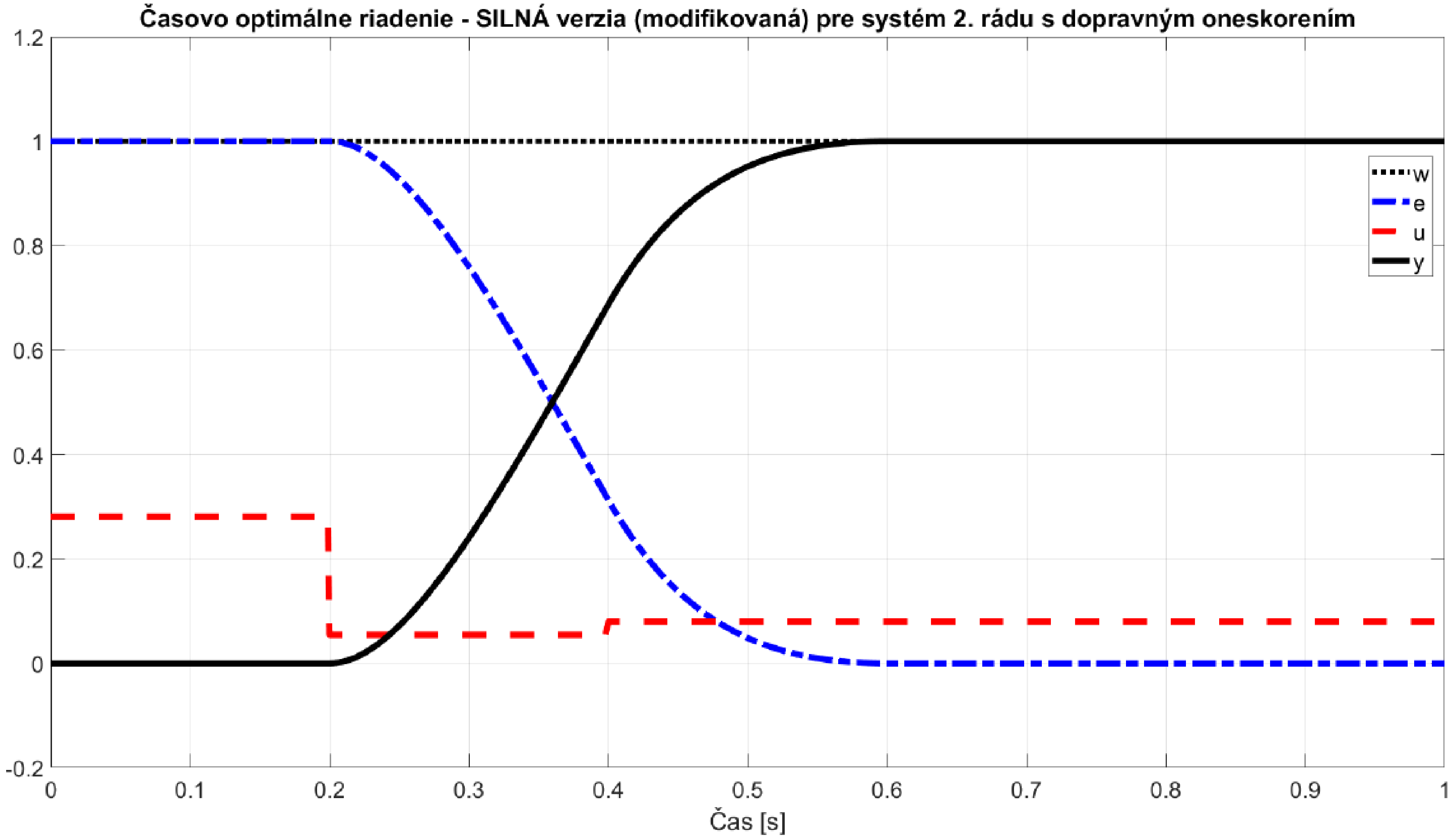
Výstupná regulovaná veličina:

$$\boxed{Y(z)} = W(z) - E(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - (1 + z^{-1} + 0.3127z^{-2}) = \boxed{0.6873z^{-2} + z^{-3} + \ldots}$$

Výstupná veličina dosiahne žiadanú hodnotu za 3 kroky.

Pozn. počet krokov riadenia je o jeden viac ako pri SLABEJ verzii.

Príklad: Návrh stabilného konečného časovo optimálneho riadenia – silná verzia (6/7)



Príklad: Návrh stabilného konečného časovo optimálneho riadenia – silná verzia (7/7)