

ČÍSLICOVÉ RIADENIE

1. prednáška

Spojité riadenie

(Opakovanie)

Jana Paulusová, ÚRK

jana.paulusova@stuba.sk

Výsledky vzdelávania:

- Študent získa základné vedomosti z teórie diskretného riadenia.
- Študent vie navrhnuť spätnoväzbové diskretné riadenie pre lineárne systémy.
- Študent vie vyhodnotiť vlastnosti diskretného regulačného obvodu.
- Študent ovláda prácu s prostredím MATLAB-Simulink pre modelovanie a riadenie diskretných systémov.

- **Prednáška** – utorok 10h – DE150

Okienková, Paulusová

- **Cvičenia** – utorok 13h, 15h, 17h - D405,406
- **Cvičenia** – štvrtok 13h, 15h - D405,406

Študijné materiály

- **J. Paulusová: Diskrétne riadenie spojitých systémov (1. časť)**, Vydavateľstvo Spektrum STU, (pdf nájdete v AIS)
- **Š. Kozák: Lineárne číslicové systémy I.**
- **Š. Kozák: Lineárne číslicové systémy I., PRÍKLADY NA CVIČENIA, Návrh regulátorov**
- **B. C. Kuo: Automatic control systems. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1995.**

- **prednášky Číslicové riadenie**

(v nadväznosti na predmet Modelovanie a riadenie systémov)

- Dokumentový server ku predmetu:
- **AIS** priečink **PREDNASKY** – materiály k prednáškam
- **AIS** priečink **CVICENIA** – materiály ku cvičeniam

Hodnotenie predmetu

Cvičenia – max. 50 bodov

PROJEKT - Každý študent dostane zadanú spojitú prenosovú funkciu opisujúcu technologický proces a postupne vypracuje úlohy podľa zadaní na jednotlivých cvičeniach (spolu bude 8 zadaní).

Podmienka udelenia zápočtu:

min. 25 b (odprezentovaný projekt) + aktívna účasť na vyučovacom procese

Skúška – max. 50 bodov

Spolu – max. 100 bodov

Spojité riadenie – OPAKOVANIE

- DISKRÉTNE systémy** – Z-transformácia, diskretná prenosová funkcia
- DISKRÉTNE riadenie** –
 - Návrh PSD regulátora a stabilita diskrétného URO
 - Návrh Dead Beat regulátora (regulátor so všeobecnou štruktúrou)
 - Návrh regulátorov pomocou metód: SIMC a Pole placement
 - Diofantické rovnice a ich riešenie
 - Časovo optimálne stabilné riadenie – SLABÁ verzia
 - Časovo optimálne stabilné riadenie – SILNÁ verzia
 - Časovo optimálne stabilné riadenie s obmedzením akčného zásahu
 - Časovo optimálne stabilné riadenie s použitím dvoch regulátorov
 - Časovo optimálne stabilné riadenie s využitím kvadratického regulátora
 - Spätná Z-transformácia a stavový opis diskrétného systému
 - Návrh diskrétného stavového regulátora

Harmonogram cvičení

- 1. – 2. Návrh spojitých regulátorov a ich porovnanie**
- 3. PREZENTOVANIE výsledkov (max. 10 bodov)**
- 4. Návrh PSD regulátorov**
- 5. Návrh Dead Beat regulátora**
- 6. Návrh regulátorov metódami: SIMC a Pole placement**
- 7. PREZENTOVANIE výsledkov (max. 20 bodov)**
- 8. Časovo optimálne stabilné riadenie – SLABÁ verzia**
- 9. Časovo optimálne stabilné riadenie – SILNÁ verzia**
- 10. Časovo optimálne stabilné riadenie s obmedzením akčného zásahu**
- 11. Časovo optimálne stabilné riadenie s použitím dvoch regulátorov**
- 12. PREZENTOVANIE výsledkov (max. 20 bodov)**

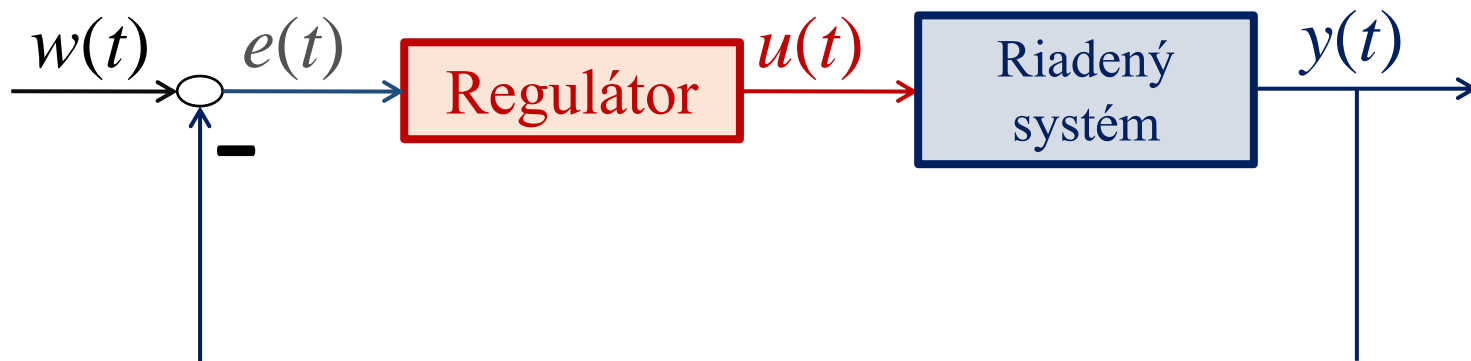
1. prednáška - OBSAH

Základný regulačný obvod

- uzavretý regulačný obvod (**URO**) a otvorený regulačný obvod (**ORO**)
- opis systému pomocou prenosovej funkcie
- model riadeného systému - jeho opis, prechodová charakteristika a frekvenčná charakteristika
- prenosové funkcie ORO a URO
- charakteristická rovnica URO (**CHRURO**)
- stabilita a kvalita URO
- štruktúra PID regulátora

Metódy návrhu PID regulátorov pre systémy s dopravným oneskorením

Základný regulačný obvod



$w(t)$ – žiadaná hodnota (referenčná veličina)

$u(t)$ – riadiaca (akčná) veličina

$e(t)$ – regulačná odchýlka

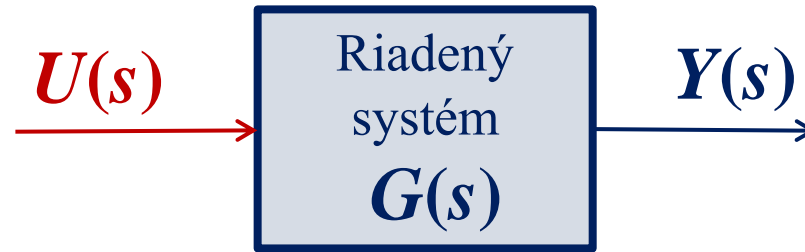
$y(t)$ – riadená (výstupná) veličina

$$e(t) = w(t) - y(t)$$

Pre charakteristickú rovnicu URO platí: $1 + G(s)G_R(s) = 0$

kde $G(s)$ je prenosová funkcia riadeného systému a $G_R(s)$ je prenosová funkcia regulátora.

Prenosová funkcia riadeného systému $G(s)$



SISO systém
(Single Input – Single Output)

RIADENÝ SYSTÉM je reprezentovaný pomocou definície všeobecného dynamického systému, pričom jeho vstupmi sú suroviny a vstupná energia a výstupom je výstupná energia a finálny produkt.

PRENOSOVÁ FUNKCIA systému je podiel Laplaceovho obrazu výstupnej veličiny k obrazu vstupnej veličiny pri nulových počiatkových podmienkach.

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

Vlastnosti riadeného systému – póly a nuly

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{b_m}{a_n} \frac{(s - z_m)(s - z_{m-1}) \dots (s - z_1)}{(s - p_n)(s - p_{n-1}) \dots (s - p_1)} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

- **kauzalita** – stupeň čitateľa m je menší ako stupeň menovateľa n
- **rád systému** = stupeň polynómu v menovateli prenosu n
- **nuly systému** z_j = korene čitateľa prenosovej funkcie $G(s)$, kde $j=1, \dots, m$
- **póly systému** p_i = korene menovateľa prenosovej funkcie $G(s)$, kde $i=1, \dots, n$
- **stabilita** = systém je:
 - a) **stabilný**, ak **všetky** jeho **póly majú zápornú reálnu časť**,
 - b) **na hranici stability**, ak má **aspoň jeden pól s nulovou reálnou časťou (všetky ostatné musia mať reálnu časť zápornú)**,
 - c) **nestabilný**, ak má **aspoň jeden pól s kladnou reálnou časťou**

Vlastnosti riadeného systému

- Časové konštanty systému

$$G(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (1 + \tau_j s)}{\prod_{i=1}^n (1 + T_i s)} e^{-Ds} = K \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots (\tau_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_n s + 1)} e^{-Ds}$$

Vlastnosti riadeného systému – pokrač.

- **fázovosť** = systém je **minimálne fázový**, ak **všetky jeho nuly majú zápornú reálnu časť** (alebo v čitateli prenosu je len konštanta),
v opačnom prípade je **neminimálne fázový**,
systém s dopravným oneskorením je **neminimálne fázový**
- **periodicita** = systém je **periodický (kmitavý)**, ak **má komplexné póly**
- ak má systém len reálne póly, potom je **aperiodický (nekmitavý)**
- **statické zosilnenie K** = je definované ako **b_0/a_0**

Prechodová charakteristika systému

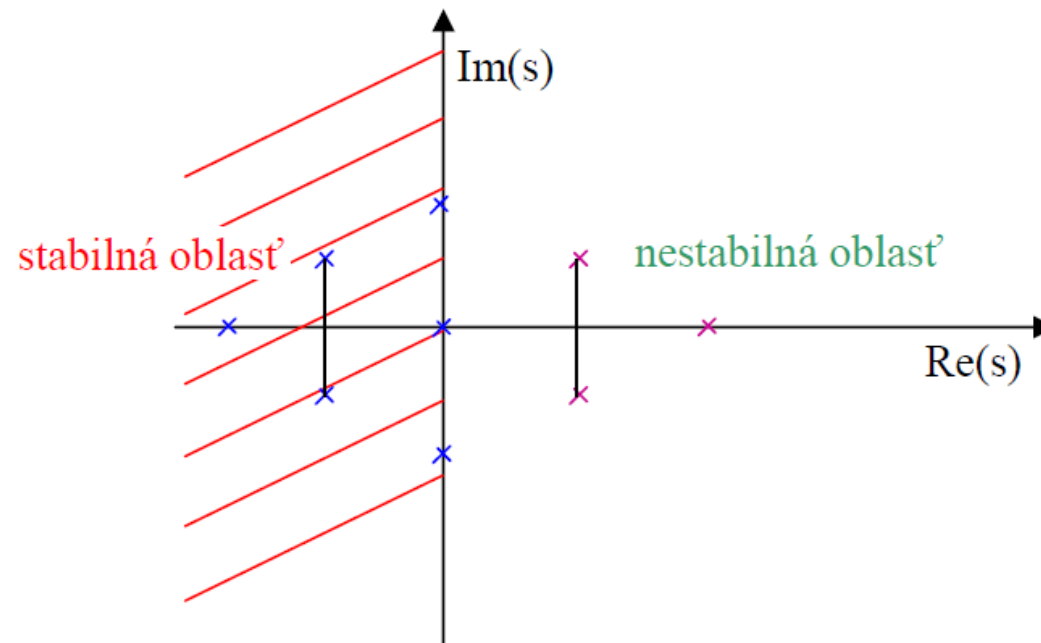
Def.: Prechodová funkcia je odozva systému na jednotkový skok (na vstupe) pri nulových počiatočných podmienkach. Označujeme ju $y(t)$. Jej grafickým znázornením je **prechodová charakteristika**.

Vzhľadom na to, že skoková funkcia vyjadruje plné frekvenčné spektrum, je informácia získaná analýzou **prechodových charakteristík** veľmi významná a spolu s informáciami získanými z **frekvenčných charakteristík** v plnej miere charakterizuje **dynamické vlastnosti systému**.

Stabilita riadeného systému

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

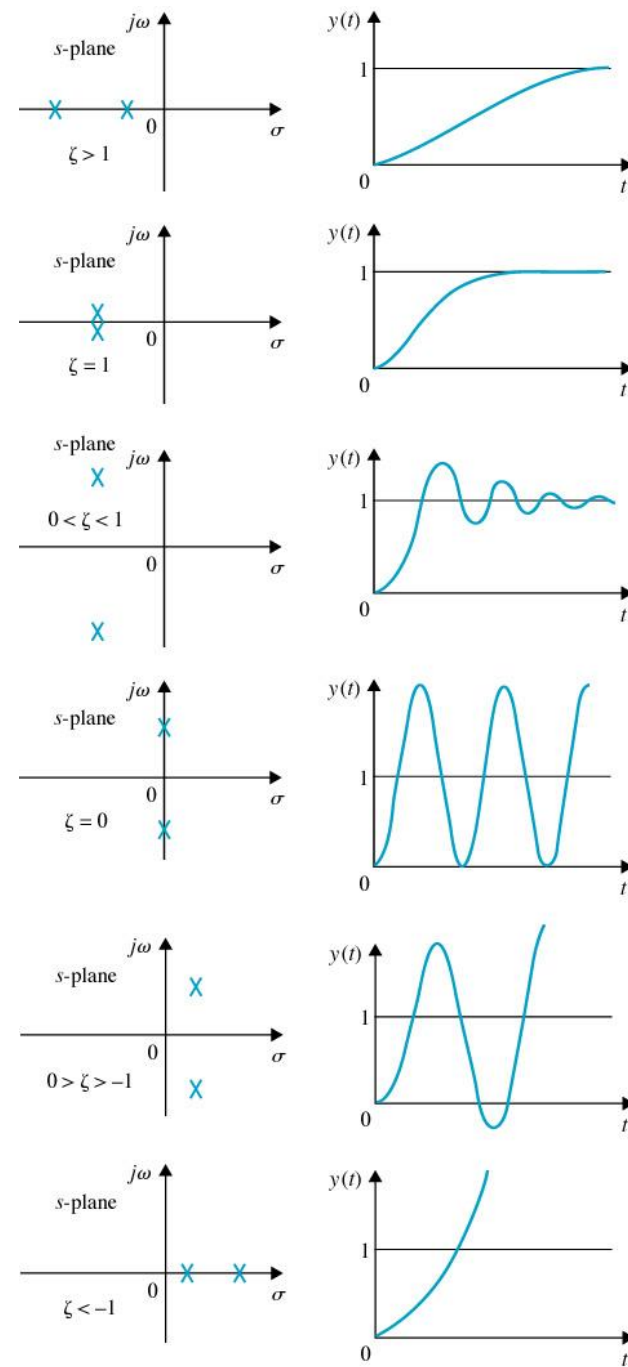
Riadený systém je stabilný, keď majú **všetky jeho póly** (korene menovateľa $A(s)$) **zápornú reálnu časť**.
Od polohy pólov riadeného systému závisí aj priebeh prechodovej charakteristiky riadeného systému.



Priebeh prechodovej charakteristiky riadeného systému závisí od polohy jeho pólov v komplexnej rovine.

Na obrázku sú uvedené príklady priebehov prechodových charakteristík systému 2. rádu s menovateľom:

$$A(s) = s^2 + 2\zeta s + 1$$



System s dopravným oneskorením D

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} e^{-Ds}$$

Dopravné oneskorenie je jav, ktorý sa v zariadeniach chemických, potravinárskych a iných technológií vyskytuje veľmi často. Objavuje sa vždy, ak dochádza k transportu látky. Vzniká v dôsledku konečnej rýchlosti pohybu materiálov a konečnej rýchlosti prenosu signálov. Je definované ako čas transportu látky z technologického zariadenia do automatického analyzátora, ktorý býva spojený s technologickým zariadením potrubím. Týmto potrubím sa do automatického analyzátora dopravuje analyzovaná látka z technologického zariadenia.

System je minimálne fázový, ak majú všetky jeho nuly zápornú reálnu časť, inak je neminimálne fázový.
System s dopravným oneskorením je neminimálne fázový.

Existuje niekoľko spôsobov aproximácie dopravného oneskorenia:

1. Padeho aproximácia

$$e^{-Ds} = \frac{e^{-\frac{D}{2}s}}{e^{\frac{D}{2}s}}$$

Aproximácia je vyjadrená ako pomer dvoch polynómov s rozvojom do Taylorovho radu

$$e^{-Ds} \approx \frac{P_n(s)}{Q_n(s)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!} D^n s^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} D^n s^n} = \frac{1 - \frac{D}{2}s + \frac{D^2}{12}s^2 - \frac{D^3}{120}s^3 + \dots}{1 + \frac{D}{2}s + \frac{D^2}{12}s^2 + \frac{D^3}{120}s^3 + \dots}$$

Najčastejšie používame *prvé dva členy* (kvôli realizácii) – Padeho aproximácia 1.rádu

Pre $n=0,1$

$$e^{-Ds} \approx \frac{1 - \frac{sD}{2}}{1 + \frac{sD}{2}}$$

2. Aproximácia Tayl. radom iba čitateľa:

$$e^{-Ds} \approx \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{D^n}{n!} s^n = 1 - Ds + \frac{D^2}{2} s^2 - \frac{D^3}{3!} s^3 + \dots$$

pre $n=0,1$

$$e^{-Ds} \approx 1 - Ds$$

3. Aproximácia Tayl. radom iba menovateľa:

$$e^{-Ds} = \frac{1}{e^{sD}} \approx \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!} s^n} = \frac{1}{1 + Ds + \frac{D^2}{2} s^2 + \frac{D^3}{3!} s^3 + \dots}$$

pre $n=0,1$

$$e^{-Ds} \approx \frac{1}{1 + Ds}$$

Príklad aproximácie

$$G(s) = \frac{1}{20s + 1} e^{-10s}$$

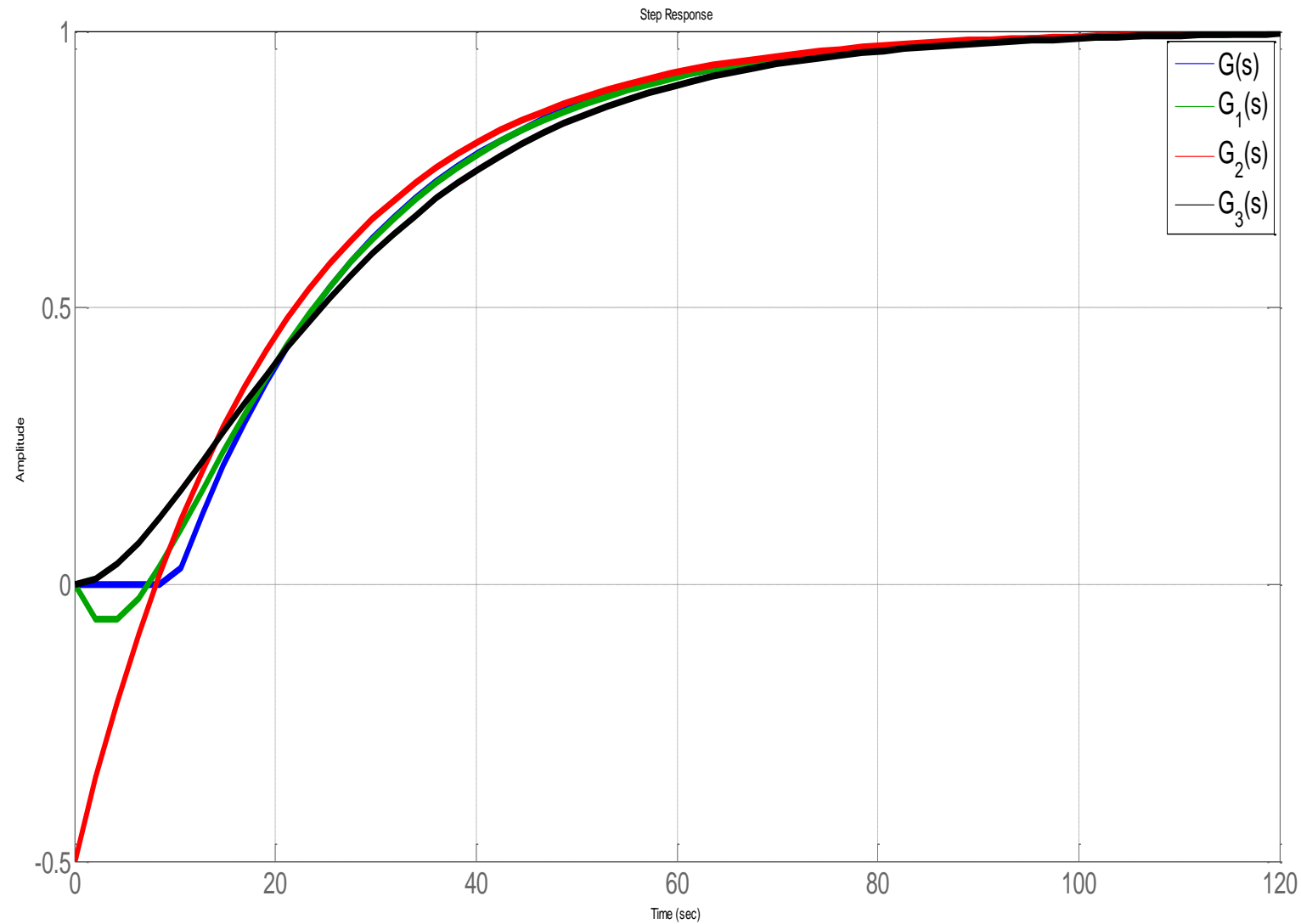
$$G_1(s) = \frac{1}{20s + 1} \frac{1 - \frac{10}{2}s}{1 + \frac{10}{2}s} = \frac{1 - 5s}{100s^2 + 25s + 1}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{20s + 1} (1 - 10s) = \frac{1 - 10s}{20s + 1}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{20s + 1} \frac{1}{1 + 10s} = \frac{1}{200s^2 + 30s + 1}$$

Vnáša nestabilnú „nulu“

Aproximácia dopravného oneskorenia (3/3)



PCH pri rôznych spôsoboch aproximácie dopr. oneskorenia

Frekvenčná charakteristika systému

Frekvenčná prenosová funkcia opisuje správanie sa lineárneho systému pri pôsobení harmonického vstupného signálu

$$u(t) = \sin \omega t,$$

ktorého obraz v Laplaceovej transformácii je $U(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$

Frekvenčná prenosová funkcia je definovaná ako podiel Fourierových obrazov výstupnej a vstupnej veličiny pri nulových počiatočných podmienkach.

$$G(j\omega) = \frac{F\{y(t)\}}{F\{u(t)\}} = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)} = \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}$$

Grafické znázornenie frekvenčnej prenosovej funkcie sa nazýva frekvenčná charakteristika.

Frekvenčné charakteristiky sa zakresľujú do **komplexnej roviny** alebo do **logaritmických súradníc**.

Frekvenčná char. v komplexnej rovine (Nyquistove char.)

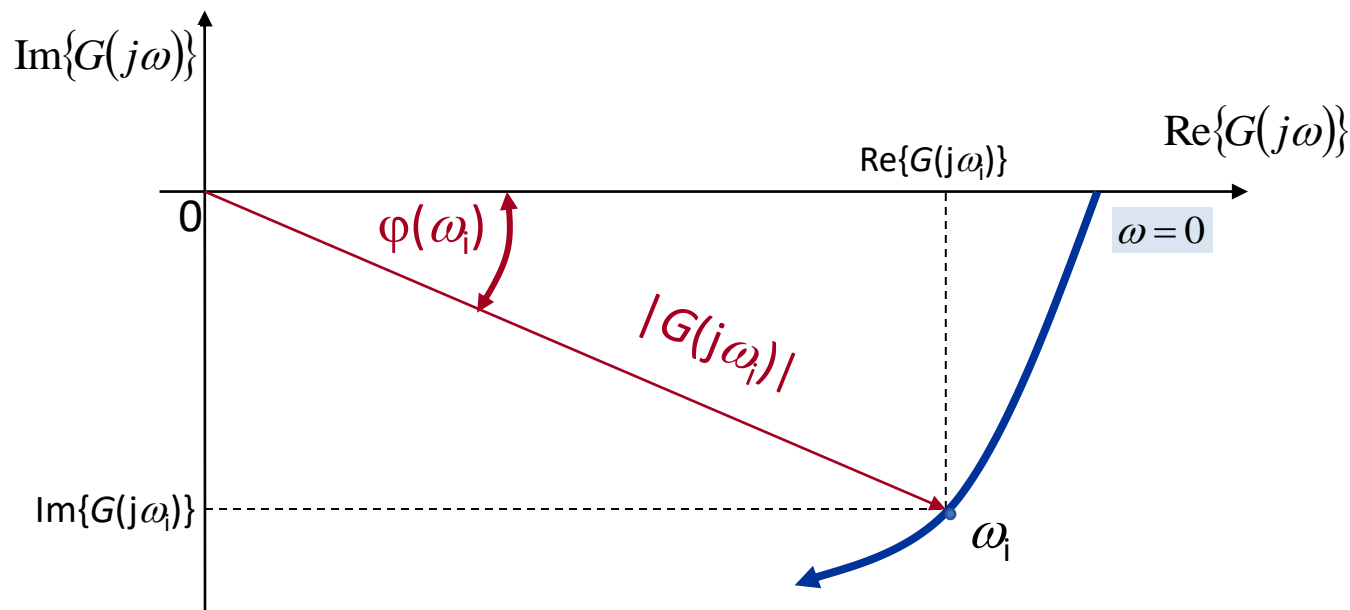
$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)} = \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re}\{G(j\omega)\})^2 + (\operatorname{Im}\{G(j\omega)\})^2}$$

→ Modul frekvenčného prenosu

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}}$$

→ Fázový posun



Pr.: Určte frekvenčnú charakteristiku v komplexnej rovine pre prenosovú funkciu:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

Riešenie:

Ak za s dosadíme $j\omega$ dostaneme frekvenčný prenos danej sústavy

$$G(j\omega) = \frac{1}{jT\omega + 1}$$

Pre zobrazenie frekvenčnej charakteristiky potrebujeme $G(j\omega)$ rozpísať na **reálnu** a **imaginárnu** časť:

$$G(j\omega) = \frac{1}{jT\omega + 1} \left(\frac{1 - jT\omega}{1 - jT\omega} \right) = \frac{1 - jT\omega}{1 + T^2\omega^2} = \frac{1}{1 + T^2\omega^2} + j \frac{(-T\omega)}{1 + T^2\omega^2}$$

$$\text{Re}\{G(j\omega)\} = \text{Re}$$

$$\text{Im}\{G(j\omega)\} = \text{Im}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+T^2\omega^2} + j \frac{(-T\omega)}{1+T^2\omega^2}$$

Pre príslušné ω si určíme $G(j\omega)$

$$\omega \in < 0, \infty)$$

$$\omega = 0$$

$$G(j\omega) = 1$$

$$\omega \rightarrow \infty$$

$$G(j\omega) = 0$$

$$\omega = \frac{1}{T}$$

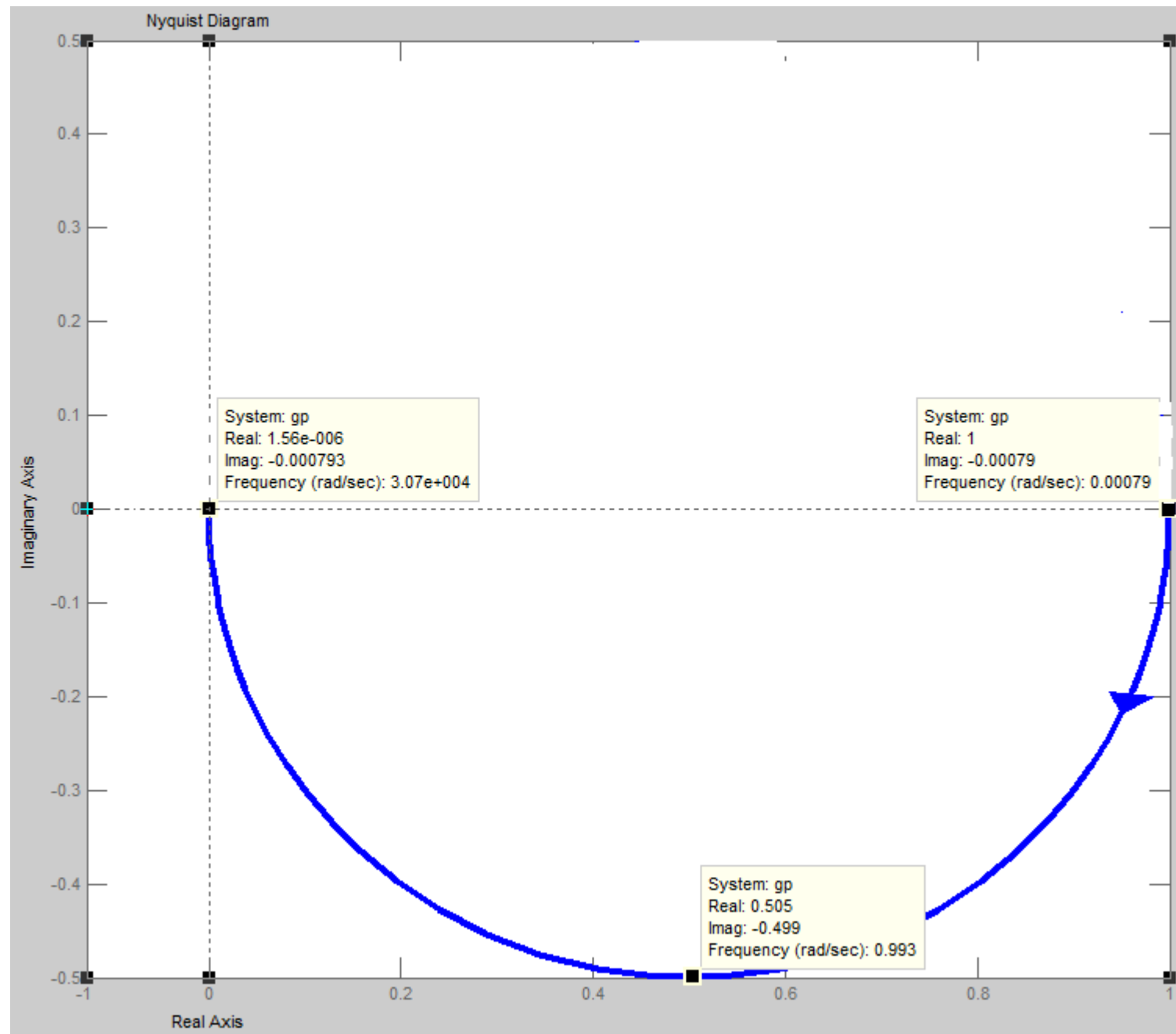
$$G(j\omega) = \frac{1}{2} - j \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

Frekvenčná charakteristika bude mať tvar **polkružnice** s **polomerom 0.5**. **Začína v bode (1, j0)**, pretože **zosilnenie prenosovej funkcie je 1**.

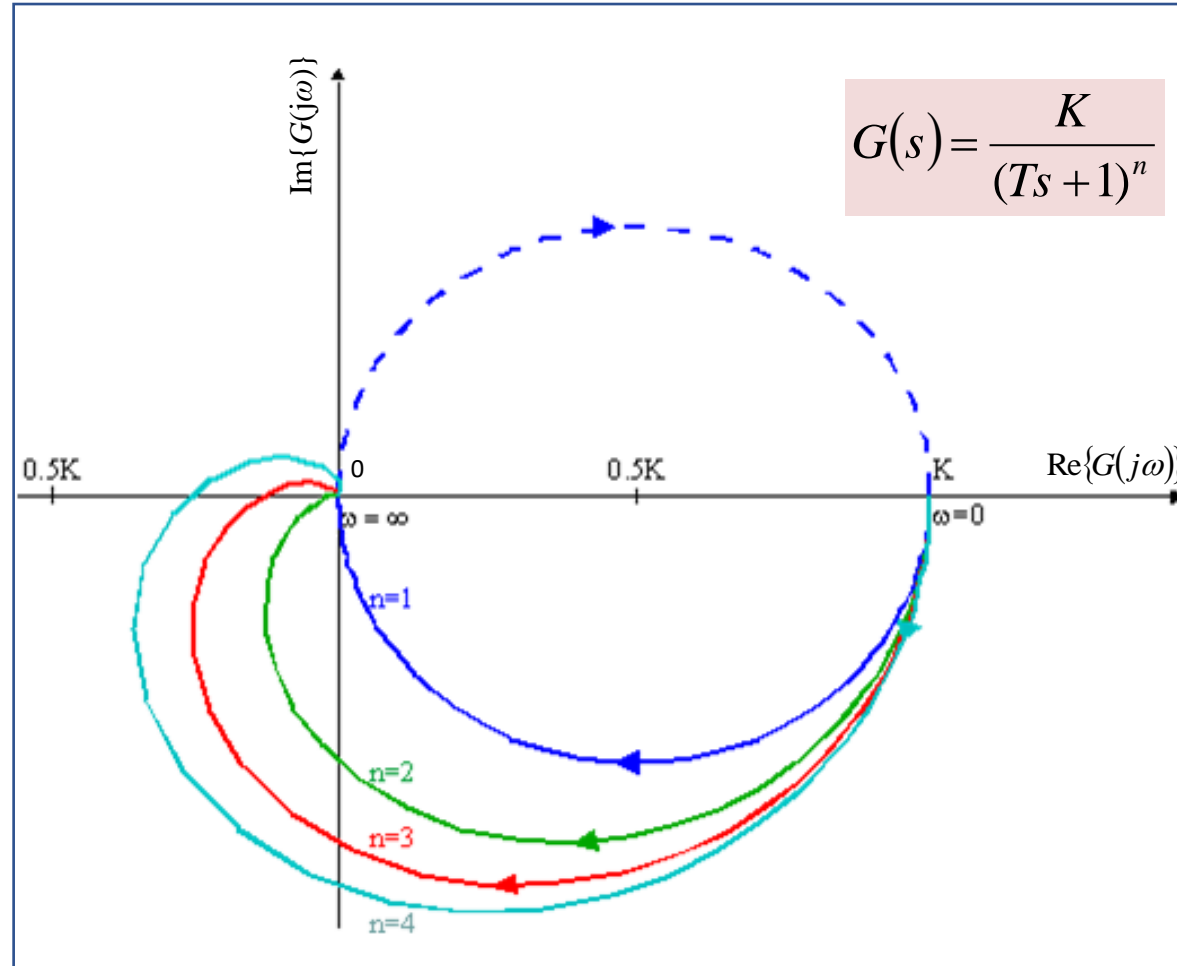
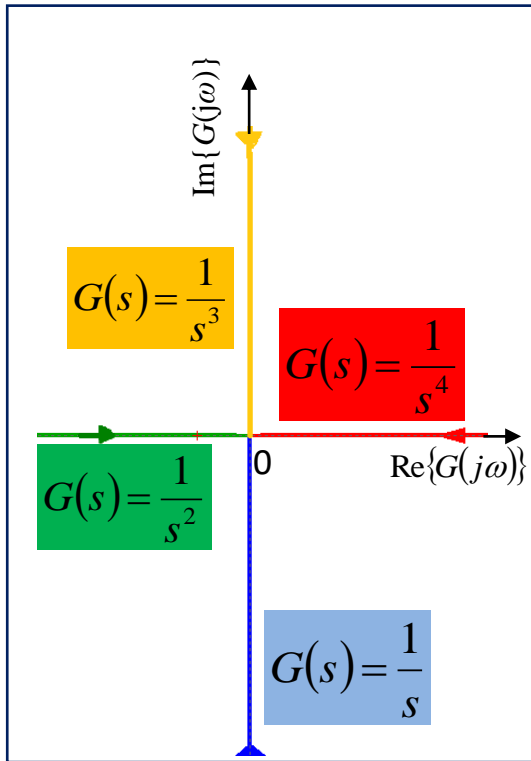
Na nasledovnom obr. (str. 25) je priebeh frekvenčnej charakteristiky pre prenosovú funkciu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

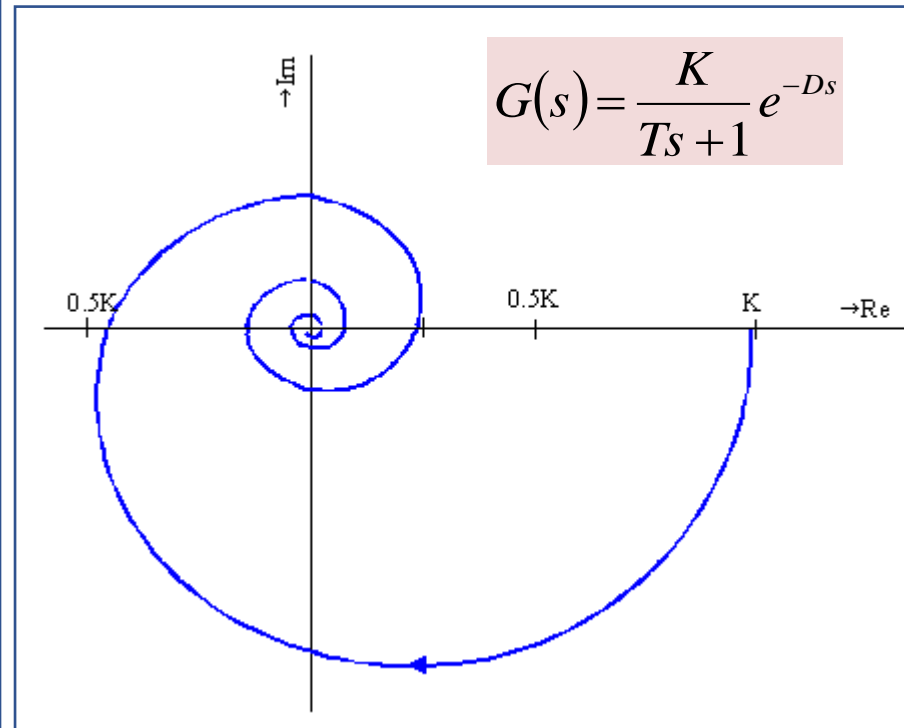
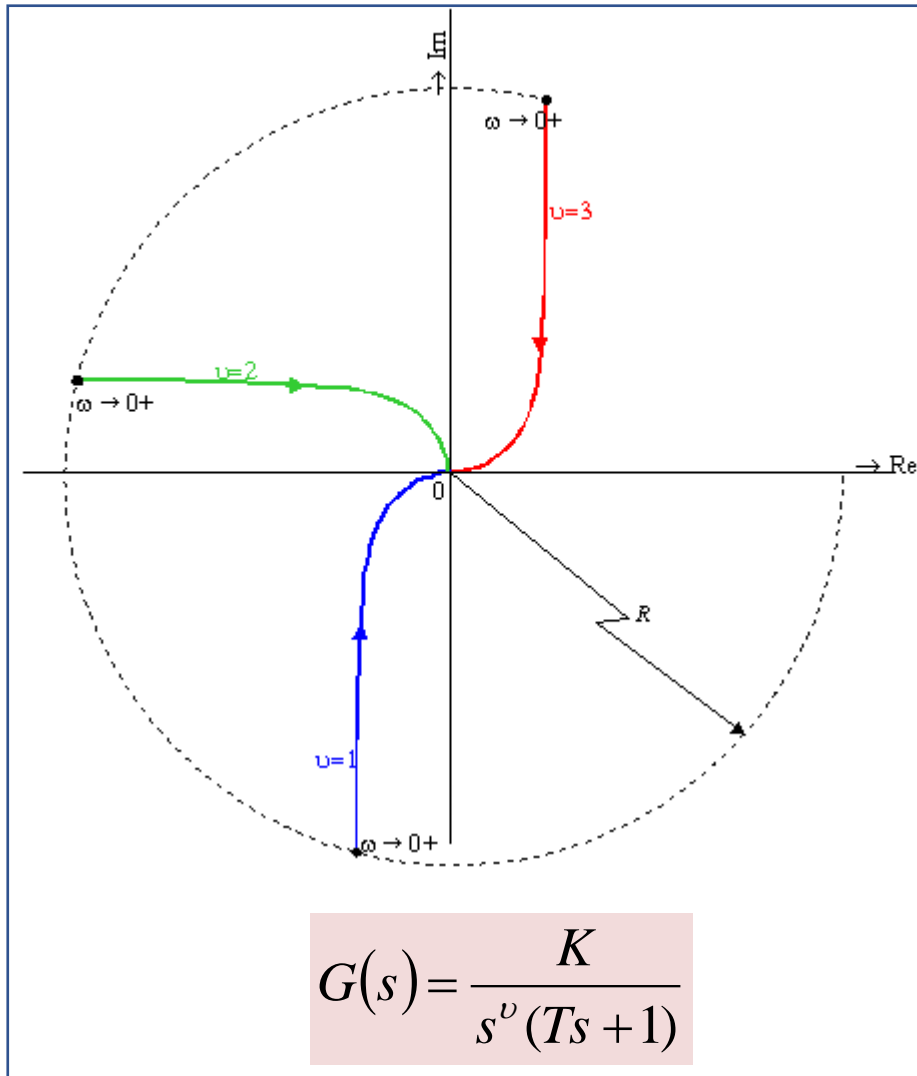
$$T=1$$



Príklady frekvenčných charakteristík v komplexnej rovine



Príklady frekvenčných charakteristík v komplexnej rovine – pokrač.



Frekvenčné charakteristiky v logaritmických súradniciach (Bodeho diagram)

Prenosová funkcia

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

Frekvenčný prenos
($s=j\omega$)

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)} = \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}$$

Modul frekvenčného prenosu

$$|G(j\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re}\{G(j\omega)\})^2 + (\operatorname{Im}\{G(j\omega)\})^2}$$

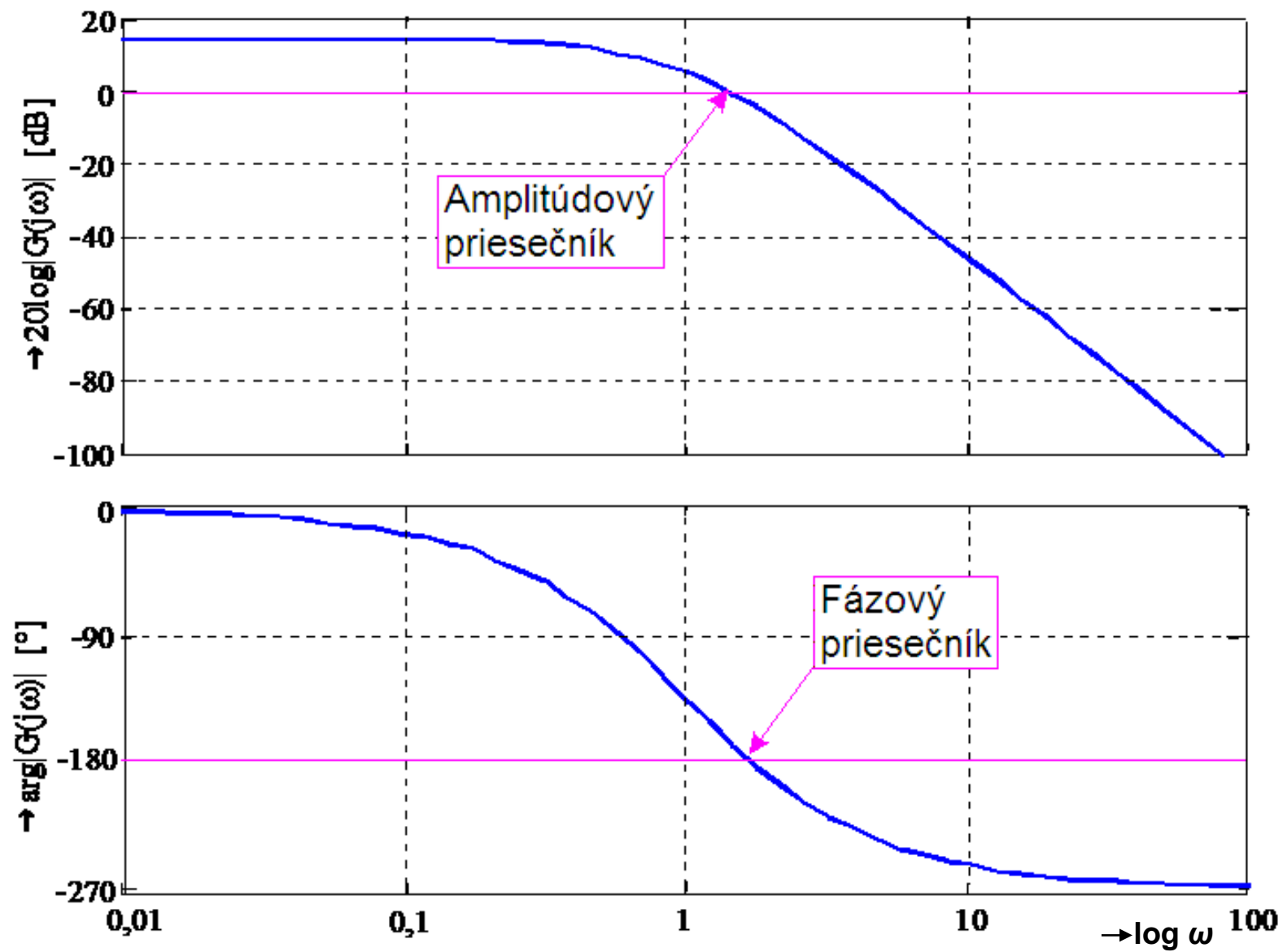
Fázový posun

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}}$$

Amplitúdovou frekvenčnou charakteristikou (ALFCH) budeme nazývať čiaru v systéme súradníc, ktorá vyjadruje závislosť dvadsaťnásobku dekadického logaritmu modulu frekvenčnej prenosovej funkcie $20 \log |G(j\omega)|$, ktorého jednotkou je decibel (dB), na dekadickom logaritme kruhovej frekvencie $\log \omega$.

Fázová logaritmická frekvenčná charakteristika (FLFCH) vyjadruje závislosť argumentu frekvenčnej prenosovej funkcie, ktorého jednotkou je stupeň, na dekadickom logaritme kruhovej frekvencie $\log \omega$.

Amplitúdová (hore) a fázová (dole) logaritmicko frekvenčná charakteristika



Frekvenčná charakteristika v logaritmických súradniciach – príklad (1/3)

Pr.: Určte frekvenčnú charakteristiku v logaritmických súradniciach pre prenosovú funkciu:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

$\xrightarrow{s=j\omega \text{ frekvenčný prenos}}$

$$G(j\omega) = \frac{1}{jT\omega + 1}$$

Riešenie:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + T^2\omega^2} + j \frac{(-T\omega)}{1 + T^2\omega^2} = \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}$$

Modul a fázový posun frekvenčného prenosu

$$|G(j\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re}\{G(j\omega)\})^2 + (\operatorname{Im}\{G(j\omega)\})^2} = \sqrt{\frac{1}{1 + T^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}} = \operatorname{arctg}(-T\omega)$$

Potrebuje získať hodnotu modulu v dB, teda

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \sqrt{\frac{1}{1 + T^2\omega^2}}$$

Frekvenčná charakteristika v logaritmických súradniciach – príklad (2/3)

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \sqrt{\frac{1}{1+T^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \operatorname{arctg}(-T\omega)$$

Pre príslušné ω si určíme **$20 \log G(j\omega)$** [dB] a **$\arg G(j\omega)$** [°]

$$\omega \in < 0, \infty)$$

$$\omega = 0 \quad 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

$$\arg G(j\omega) = \operatorname{artg}(0) = 0^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log 0 = -\infty \text{ dB}$$

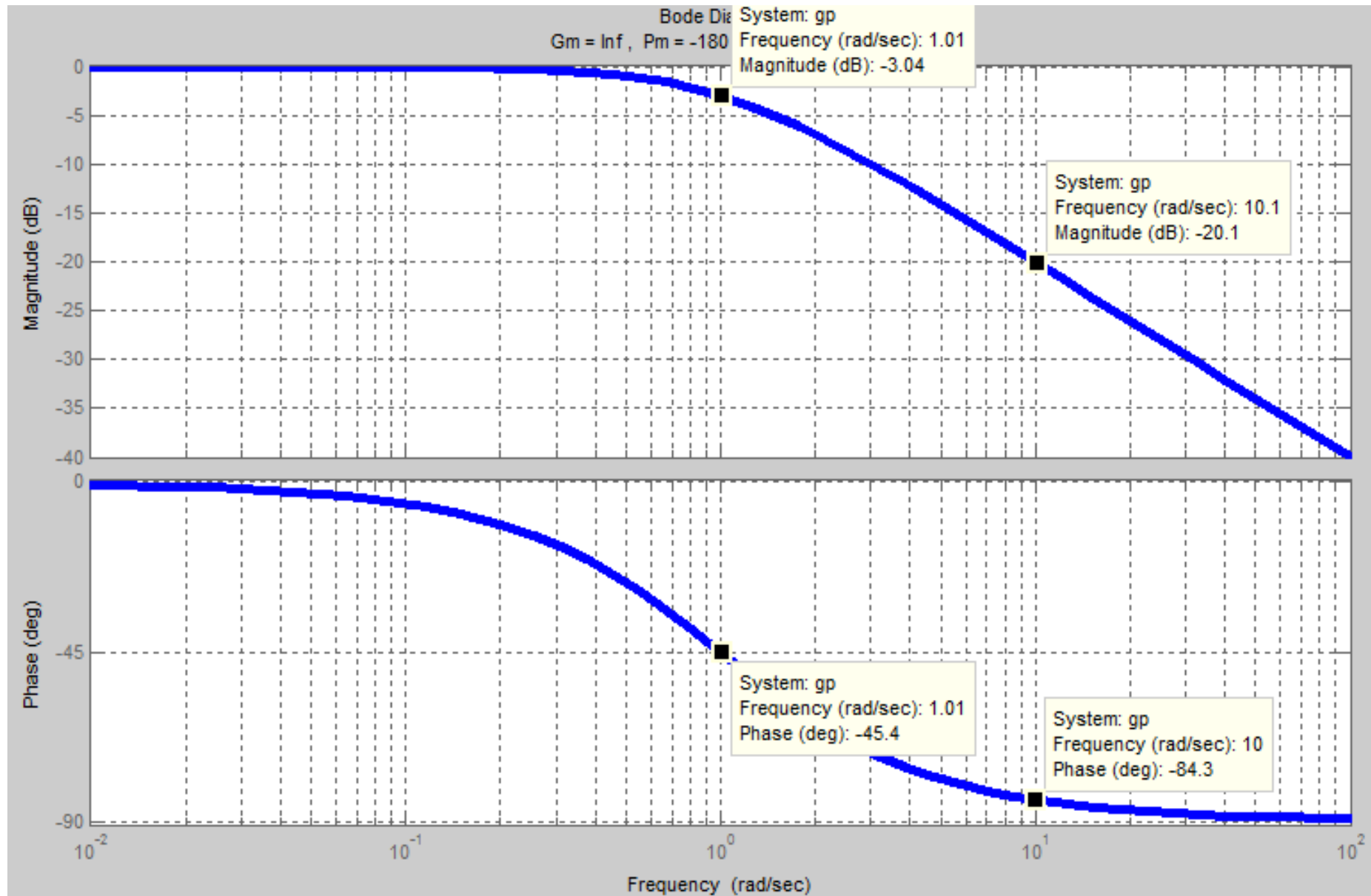
$$\arg G(j\omega) = \operatorname{artg}(-\infty) = -90^\circ$$

$$\omega = \frac{1}{T} \quad 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \sqrt{0.5} = -3.0103 \text{ dB} \quad \arg G(j\omega) = \operatorname{artg}(-1) = -45^\circ$$

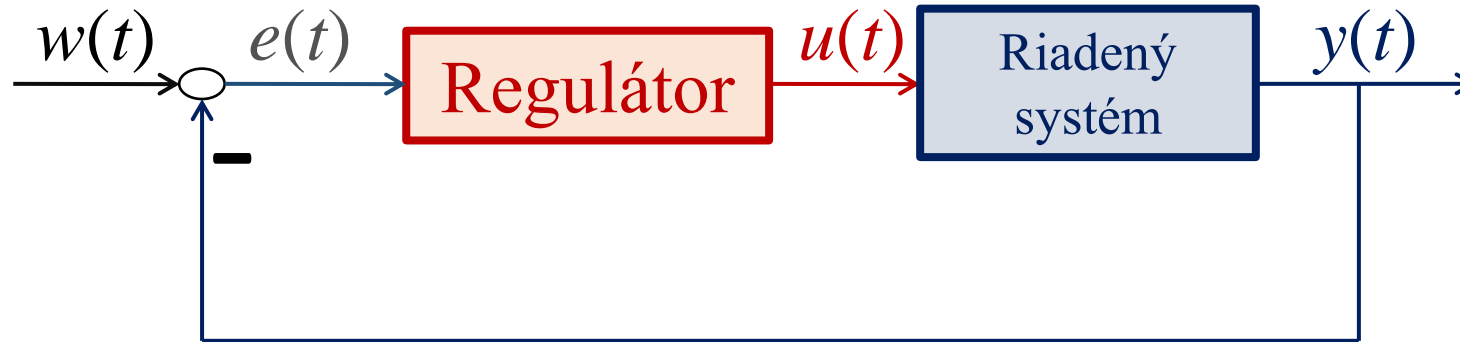
$$\omega = 10 \quad 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \sqrt{\frac{1}{101}} = -20.0432 \text{ dB}, \arg G(j\omega) = \operatorname{artg}(-10) = -84.2894^\circ$$

(pre $T = 1$)

Frekvenčná charakteristika v logaritmických súradniciach – príklad (3/3)



Stabilita URO



Všetky metódy na **vyšetrovanie stability** lineárnych systémov možno rozdeliť do dvoch kategórií:

- **Frekvenčné kritériá**, **vychádzajú z frekvenčnej prenosovej funkcie otvoreného regulačného obvodu**. Známe sú **Nyquistovo kritérium** a **Bodeho kritérium**.
- **Algebraické kritéria**, ktoré **vychádzajú z charakteristickej rovnice uzavretého regulačného obvodu (CHRURO)** a **v podstate vyšetrojú rozloženie pólov systému (koreňov CHRURO) v komplexnej rovine**. Uvedieme **Routhovo kritérium stability**.

Charakteristická rovnica URO (CHRURO)

Prenosová funkcia URO

$$G_{URO}(s) = G_{Y/W}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G(s)G_R(s)}{1 + G(s)G_R(s)} = \frac{G_O(s)}{1 + G_O(s)}$$

Charakteristická rovnica URO (CHRURO) je, keď položíme menovateľ prenosovej funkcie URO nule

$$1 + G_O(s) = 0$$

$$G_O(s) = G(s) G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \frac{Q(s)}{P(s)}$$

CHRURO - všeobecne

$$1 + G_O(s) = 1 + G(s)G_R(s) = 1 + \frac{B(s)}{A(s)} \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{A(s)P(s) + B(s)Q(s)}{A(s)P(s)} = 0$$

CHRURO

$$A(s)P(s) + B(s)Q(s) = 0$$

Stabilita a kvalita URO

Stabilita = vlastnosť systému, ktorá nezávisí od vstupu, výstupu ani od porúch

Stabilita URO

- **z frekvenčných charakteristík ORO**
 - zjednodušené Nyquistovo kritérium, Bodeho kritérium
- **z charakteristickej rovnice URO (CHRURO)**
 - poloha pólov URO, Routhovo kritérium stability

Kvalita = závisí od charakteru vstupného signálu

- kvalita **v ustálených stavoch**
- kvalita **v prechodných stavoch**

Stabilita

V prípade riadiacich systémov nás zaujíma najmä **stabilita uzavretého obvodu**, t. j. stabilita systému automatického riadenia. V triede lineárnych systémov je stabilita vlastnosťou systému, čo znamená, že lineárny systém je buď stabilný alebo nestabilný.

Stabilným budeme nazývať taký systém, ktorý po vychýlení z rovnovážneho stavu a to vstupným alebo poruchovým signálom sa vráti späť do pôvodného rovnovážneho stavu alebo do blízkeho rovnovážnemu stavu.

Frekvenčné kritéria stability

Frekvenčné kritéria stability určujú stabilitu uzavretého obvodu z **frekvenčnej prenosovej funkcie otvoreného obvodu**:

$$G_o(j\omega) = G(j\omega)G_R(j\omega)$$

Existujú dve najviac používané kritériá:

- **Nyquistove kritérium** vychádza z frekvenčných charakteristík ORO v komplexnej rovine.
- **Bodeho kritérium** vychádza z logaritmických frekvenčných charakteristík ORO.

Nyquistovo kritérium stability

Nyquistova krivka = frekvenčná charakteristika + komplexne združená charakteristika

Potom platí: $N = P - \Omega$

kde

Ω je **počet obbehov** Nyquistovej krivky **okolo bodu $(-1,0j)$** znamienko sa určí na základe orientácie charakteristiky, pričom **záporná** hodnota zodpovedá **smeru hodinových ručičiek**

P je **počet nestabilných pólov ORO** $G_O(s)$

N je **počet nestabilných pólov URO** $G_{URO}(s)$

Dá sa riešiť aj analyticky. Hranica stability je: $\text{Re}\{G_O(j\omega)\} = -1 \quad \text{Im}\{G_O(j\omega)\} = 0$

Nyquistovo kritérium stability - príklad1

PR. 1

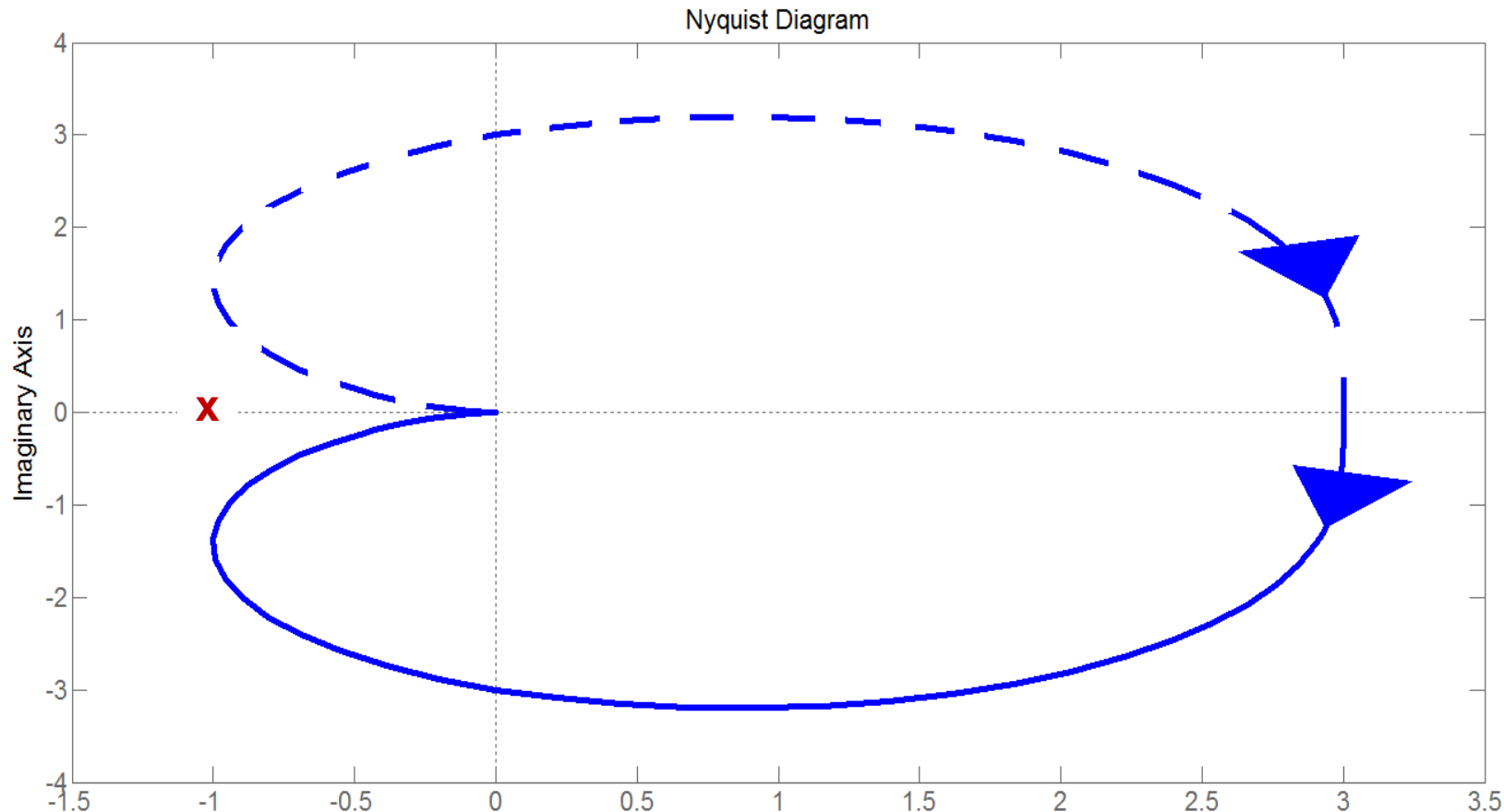
Pomocou Nyquistovho kritéria vyšetrite stabilitu systému (URO), ktorý má v otvorenej slučke prenosovú funkciu (ORO):

$$G_O(s) = G(s)G_R(s) = \frac{K}{(2s+1)^2}$$

$\Omega=0$ - počet obehov okolo bodu $(-1,0j)$

$P=0$ - počet nestabilných pólov ORO $G_O(s)$

$N = P - \Omega = 0 \longrightarrow$ URO bude STABILNÝ



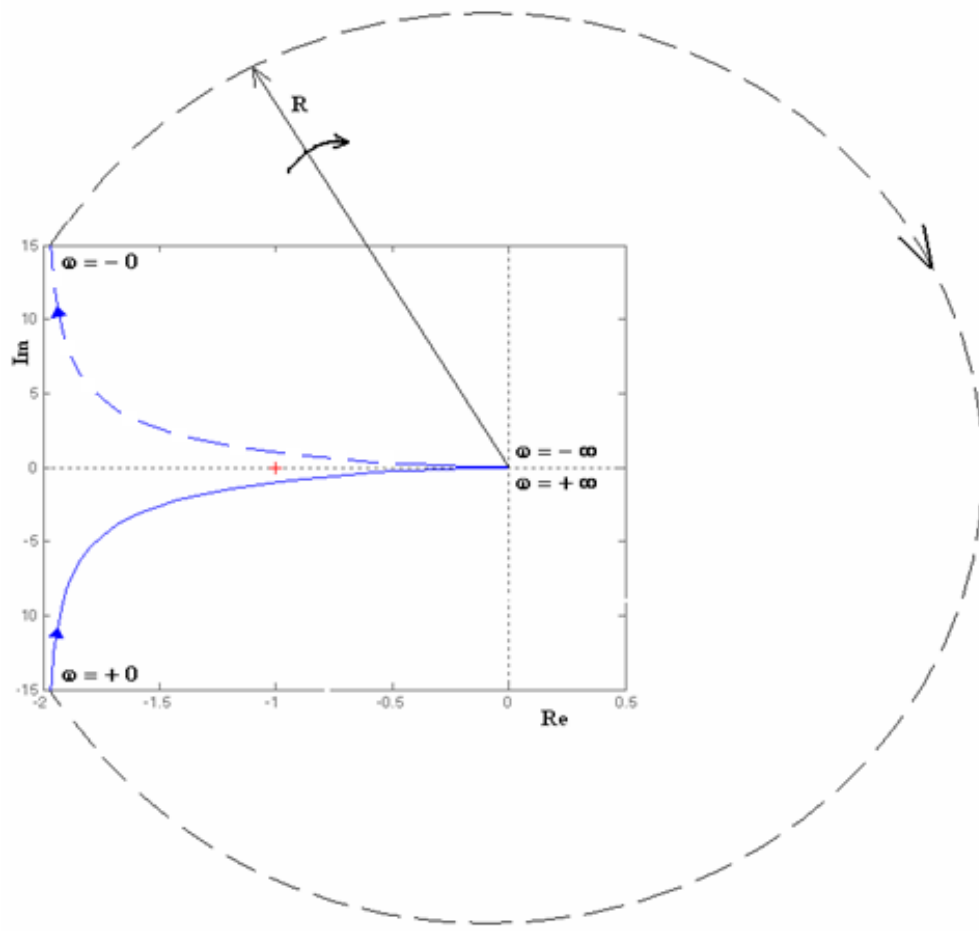
Nyquistovo kritérium stability – príklad2

PR. 2

Pomocou Nyquistovho kritéria vyšetríte stabilitu systému (URO), ktorý má v otvorenej slučke prenosovú funkciu (ORO):

$$G_O(s) = G(s)G_R(s) = \frac{K}{s(2s+1)}$$

Jeden pól $G_O(s)$ sa nachádza na imaginárnej osi. Tento pól môžeme obísť po kružnici s nekonečne malým polomerom R v kladnom smere otáčania a pričleniť ho k ľavej polrovine. Tým ho môžeme považovať za stabilný.



$\Omega=0$ - počet obehov okolo bodu $(-1,0j)$
 $P=0$ - počet nestabilných pólov ORO $G_O(s)$
 $N = P - \Omega = 0$ URO bude **STABILNÝ**



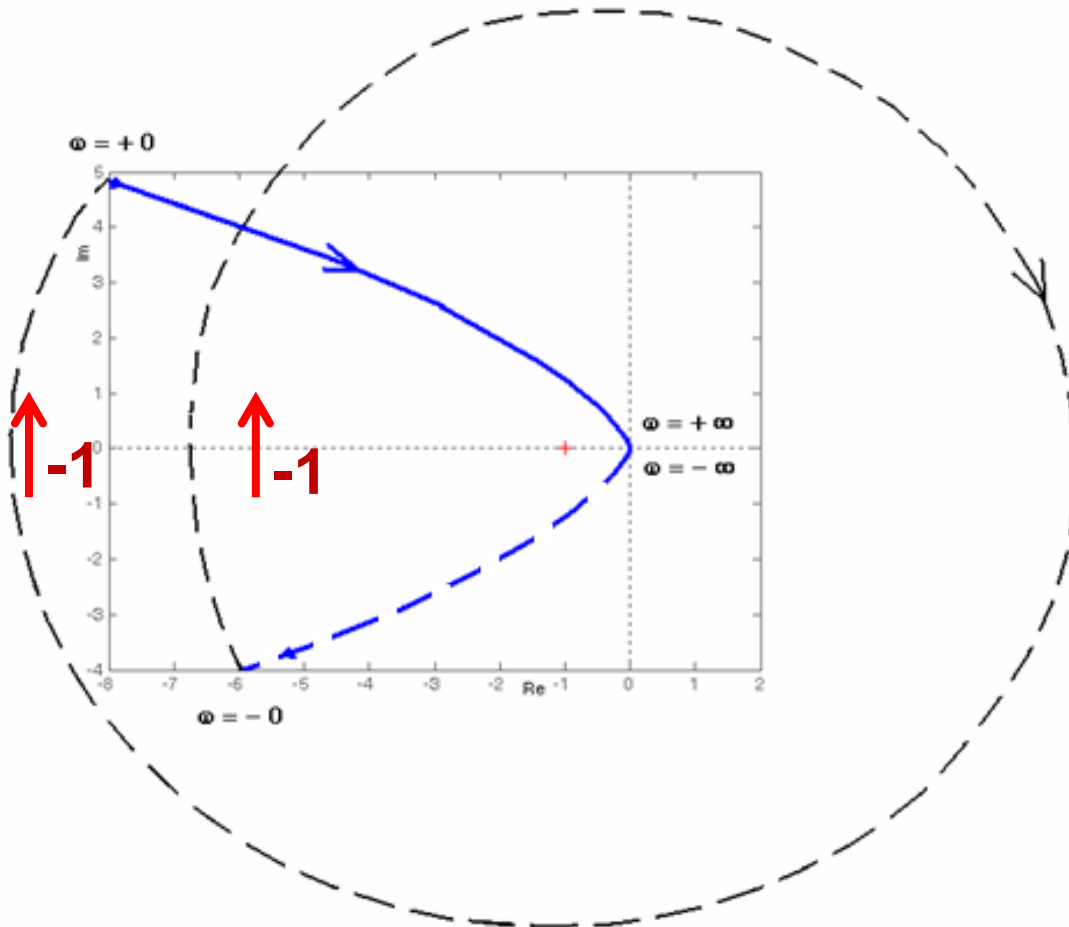
Nyquistovo kritérium stability – príklad3

PR. 3

Prenosová funkcia a frekvenčná prenosová funkcia ORO:

$$G_O(s) = G(s)G_R(s) = \frac{K}{s^2(2s+1)}$$

Dvojnásobný astatizmus $G_O(s)$ spôsobil, že pri uzatváraní krivky opíšeme nekonečne veľkú kružnicu okolo začiatku dvakrát v smere chodu hodinových ručičiek ($\Omega = -2$).



$\Omega = -2$ - počet obehov okolo bodu $(-1, 0j)$
 $P = 0$ - počet nestabilných pólov ORO $G_O(s)$
 $N = P - \Omega = 2$ URO bude **NESTABILNÝ**

Analytický výpočet kritického zosilnenia

$$G_O(s) = G(s)G_R(s) = \frac{K}{(s+1)^3} \qquad G_O(j\omega) = G(j\omega)G_R(j\omega) = \frac{K}{(j\omega+1)^3}$$

Hranica stability je:

$$\operatorname{Re}\{G_O(j\omega)\} = -1, \quad \operatorname{Im}\{G_O(j\omega)\} = 0$$

$$G_O(j\omega) = \frac{K}{(j\omega+1)^3} = \frac{K}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 3j\omega + 1} = \frac{K}{(1-3\omega^2) + j(3\omega - \omega^3)} \frac{(1-3\omega^2) - j(3\omega - \omega^3)}{(1-3\omega^2) - j(3\omega - \omega^3)}$$

$$\operatorname{Im}\{G_O(j\omega)\}_{\omega_{krit}} = 0$$

$$\operatorname{Im}\{G_O(j\omega)\}_{\omega_{krit}} = \frac{-K\omega_{krit}(3 - \omega_{krit}^2)}{(1 - 3\omega_{krit}^2)^2 + (3\omega_{krit} - \omega_{krit}^3)^2} = 0 \Rightarrow \omega_{krit} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{Re}\{G_O(j\omega)\}_{K_{krit}} = -1$$

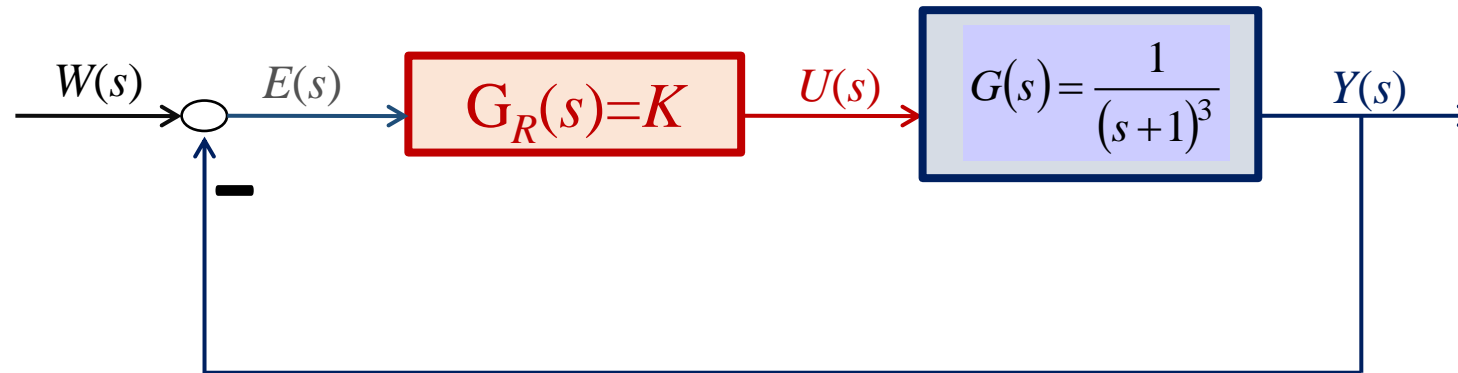
$$\operatorname{Re}\{G_O(j\omega)\}_{K_{krit}} = \frac{K_{krit}(1 - 3\omega_{krit}^2)}{(1 - 3\omega_{krit}^2)^2 + (3\omega_{krit} - \omega_{krit}^3)^2} = \frac{K_{krit}(1 - 9)}{(1 - 9)^2 + (3\sqrt{3} - 3\sqrt{3})^2} = -1 \Rightarrow K_{krit} = 8$$

Nyquistovo kritérium stability – príklad4 (1/2)

Nyquistovo kritérium v najjednoduchšej podobe:

Predpokladajme, že prenosová funkcia otvoreného regulačného obvodu má len stabilné póly (môže mať jeden nulový). Potom uzavretý regulačný obvod bude stabilný, ak frekvenčná charakteristika otvoreného obvodu pretína reálnu os vpravo od kritického bodu $(-1, j0)$.

PR. 4



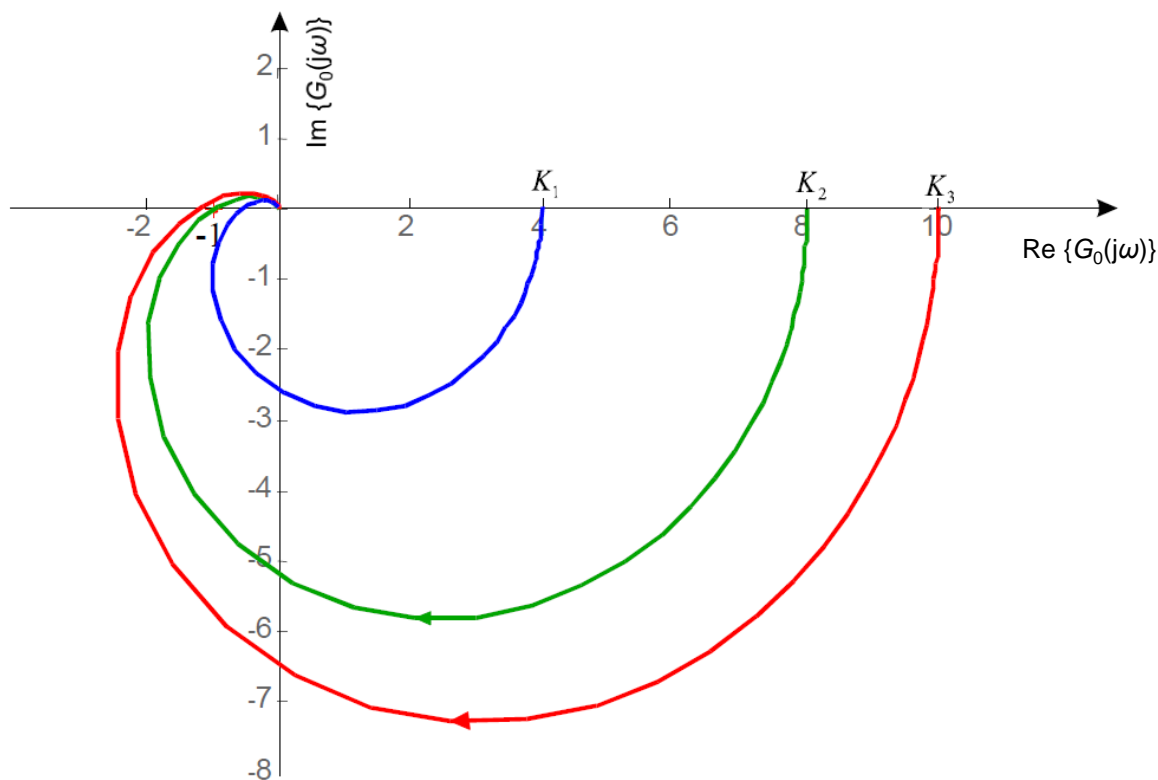
Pre jednoduchý regulačný obvod analyzujte stabilitu uzavretého obvodu pre rôzne veľkosti zosilnenia K ($K_1=4$, $K_2=8$ a $K_3=10$).

Nyquistovo kritérium stability – príklad4 (2/2)

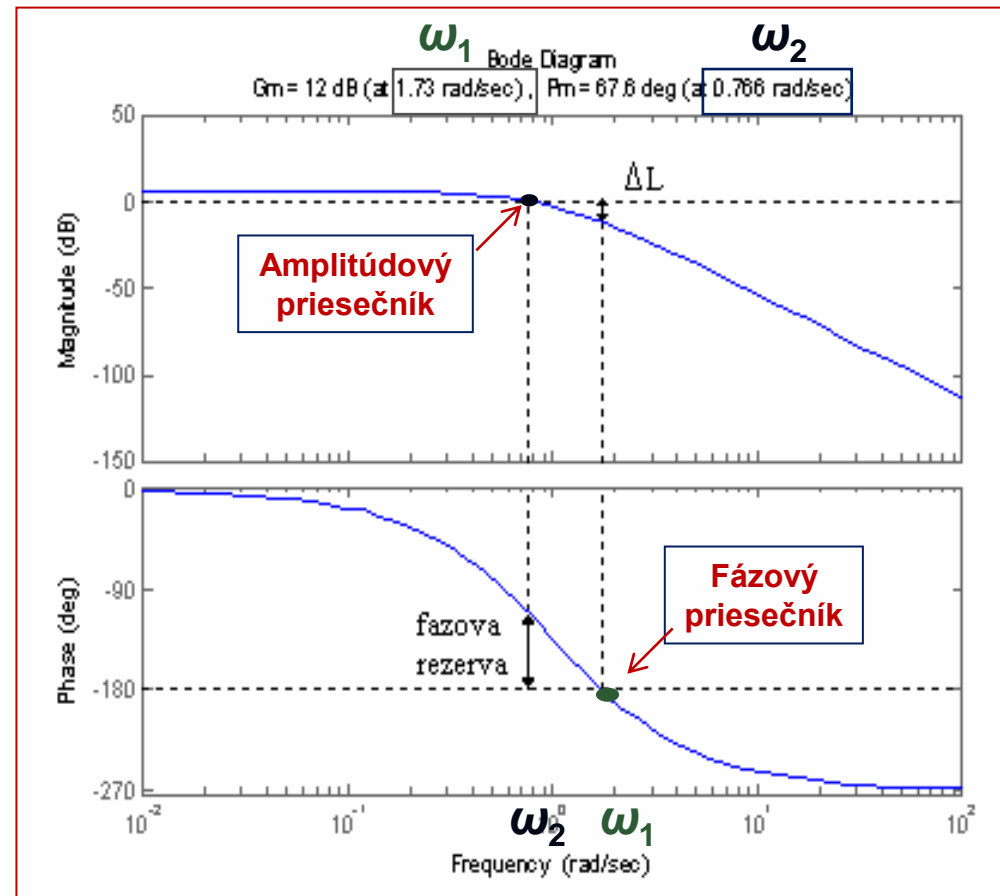
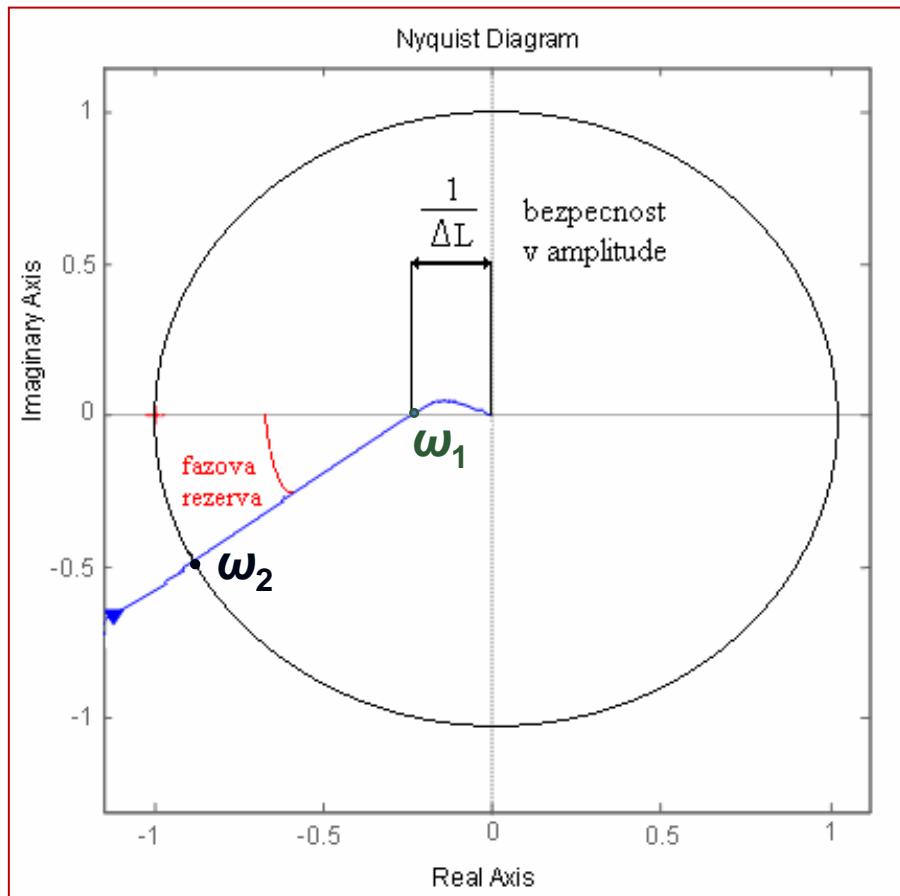
Prenosová funkcia a frekvenčná prenosová funkcia ORO:

$$G_O(s) = G(s)G_R(s) = \frac{K}{(s+1)^3} \qquad G_O(j\omega) = G(j\omega)G_R(j\omega) = \frac{K}{(j\omega+1)^3}$$

Prenosová funkcia ORO má tri stabilné póly v -1 a teda môžeme použiť zjednodušené Nyquistovo kritérium. Vykreslíme Nyquistove charakteristiky ORO pre $K_1=4$, $K_2=8$ a $K_3=10$:



- Uzavretý regulačný obvod bude stabilný, ak **frekvenčná charakteristika otvoreného obvodu pretína reálnu os vpravo od kritického bodu (-1, j0)**.
- Obvod je na hranici stability ak **frekvenčná charakteristika prechádza bodom -1 na reálnej osi**.
- Obvod bude nestabilný, ak **frekvenčná charakteristika pretína reálnu os vľavo od kritického bodu (-1, j0)**.

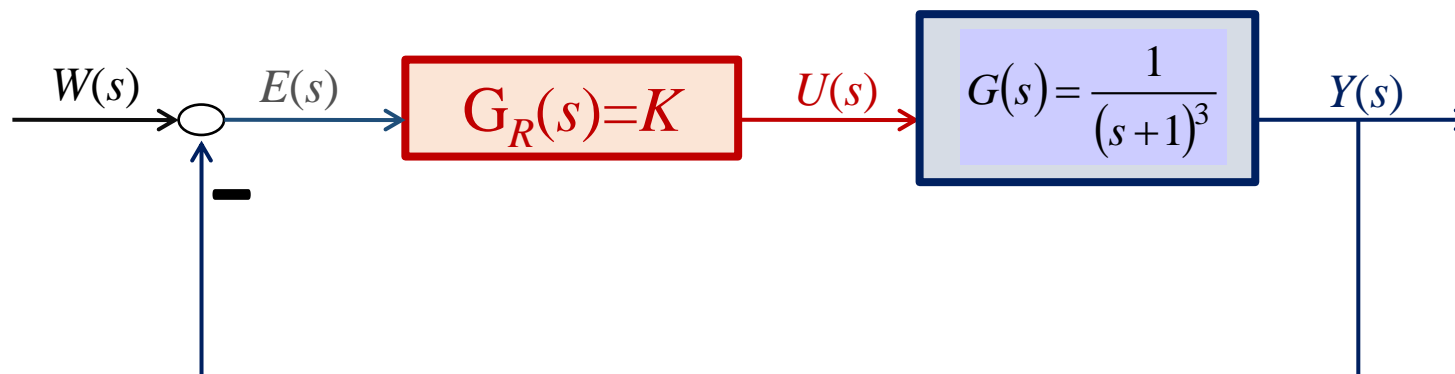


Bodeho kritérium stability – príklad (1/2)

Bodeho kritérium stability pre stabilný otvorený regulačný obvod:

Uzavretý regulačný obvod bude stabilný, ak pri frekvencii amplitúdového priesečníka je hodnota fázovej charakteristiky väčšia ako -180° .

PR.



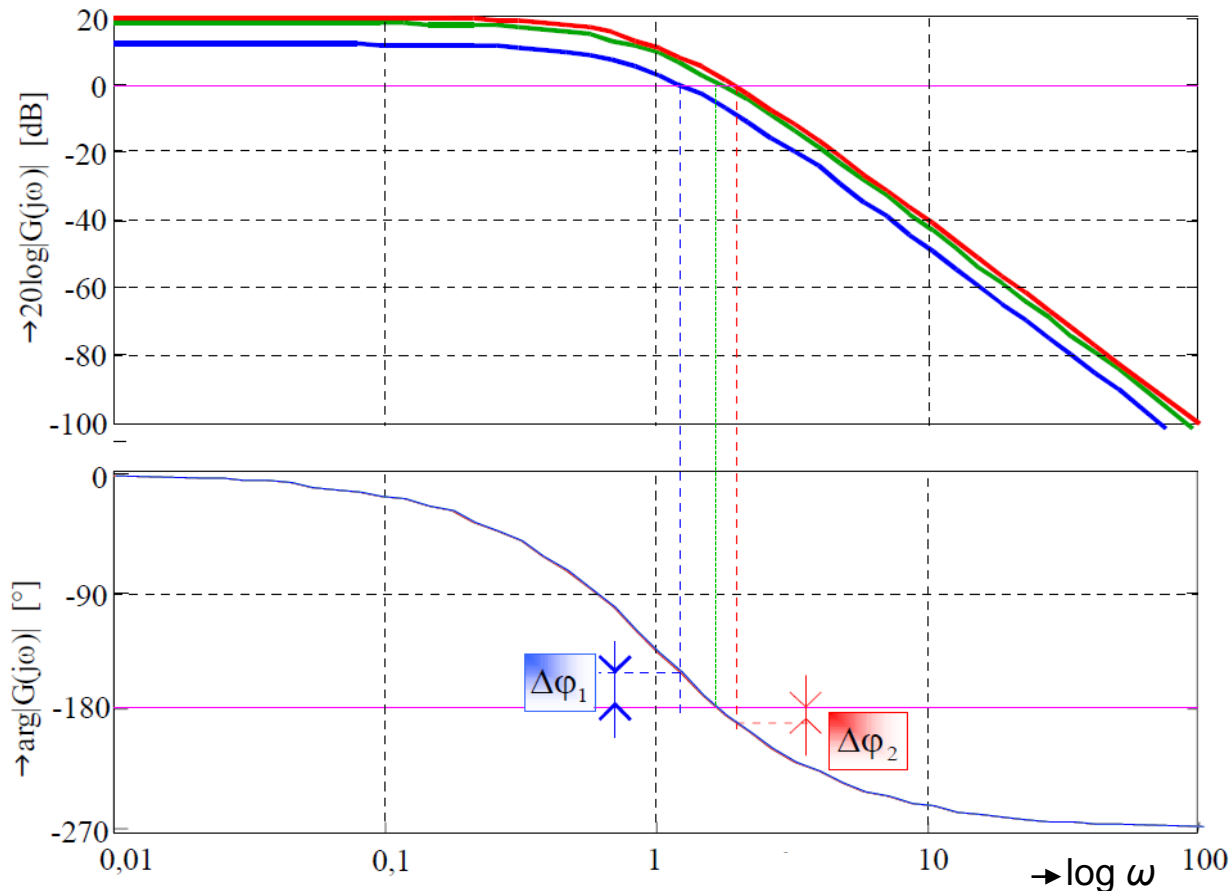
Pre jednoduchý regulačný obvod analyzujte stabilitu uzavretého obvodu pre rôzne veľkosti zosilnenia K ($K_1=4$, $K_2=8$ a $K_3=10$).

Bodeho kritérium stability – príklad (2/2)

Prenosová funkcia a frekvenčná prenosová funkcia ORO:

$$G_O(s) = G(s)G_R(s) = \frac{K}{(s+1)^3} \quad G_O(j\omega) = G(j\omega)G_R(j\omega) = \frac{K}{(j\omega+1)^3}$$

Vykreslíme Bodeho charakteristiky ORO pre $K_1=4$, $K_2=8$ a $K_3=10$:



- URO je stabilný, ak pri frekvencii amplitúdového priesečníka je hodnota fázovej charakteristiky väčšia ako -180° . Pre $K_1=4$ je hodnota fázovej charakteristiky asi -150° .
- URO je na hranici stability, ak pri frekvencii amplitúdového priesečníka je hodnota fázovej charakteristiky rovná -180° , platí to pre $K_2=8$.
- URO je nestabilný, ak pri frekvencii amplitúdového priesečníka je hodnota fázovej charakteristiky menšia ako -180° . Pre $K_3=10$ je hodnota fázovej charakteristiky asi -195° .

Algebraické kritéria stability – Routhovo kritérium

Algebraické kritéria stability vychádzajú z charakteristickej rovnice uzavretého regulačného obvodu (CHRURO) a v podstate vyšetrujú rozloženie pólov systému v komplexnej rovine. Jednotlivé kritériá majú rôznu techniku analýzy, ale všetky vyšetrujú len rozloženie pólov v komplexnej rovine.

Medzi najznámejšie patrí **Routhovo kritérium stability**.

Sústava s **charakteristickým polynómom** uzavretého obvodu **$CHP(s)$** je stabilná, ak nutnú podmienku stability (**$p_i > 0; i=0, \dots, n$**) spĺňajú okrem polynómu **$CHP(s)$** všetky polynómy, ktoré vzniknú jeho redukciou podľa Routhovho algoritmu.

$$CHP(s) = \sum_{i=0}^n p_i s^i = p_n s^n + p_{n-1} s^{n-1} + \dots + p_1 s + p_0$$

Stodolova podmienka stability

Nutnou podmienkou (nie postačujúcou) stability regulačného obvodu je, aby všetky koeficienty charakteristického polynómu boli **kladné**.

Pre systémy 1. a 2. rádu je nutnou aj postačujúcou podmienkou stability.

$$G_O(s) = G(s) \quad G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \frac{Q(s)}{P(s)}$$

$$1 + G_O(s) = 0$$

čitateľ $1 + G_O(s)$

Charakteristický polynóm $CHP(s)$:

$$A(s)P(s) + B(s)Q(s) = CHP(s)$$

Ak je $CHP(s)$ 1. alebo 2. rádu a ak pre všetky p_i ($i=0,1$ alebo $i=0,1,2$) platí $p_i > 0$ môžeme povedať, že URO je stabilný.

Pre systémy s $CHP(s) = \sum_{i=0}^n p_i s^i$ pre $n > 2$ ak p_i ($i=0,1,\dots,n$) platí $p_i > 0$ (iba nutná podmienka stability) musíme posúdiť stabilitu pomocou Routhovho algoritmu.

Routhovo kritérium stability

$$CHP(s) = \sum_{i=0}^n p_i s^i = p_n s^n + p_{n-1} s^{n-1} + \dots + p_1 s + p_0$$

Routhova tabuľka

	s^n	p_n	p_{n-2}	p_{n-4}	\dots
$k_1 = \frac{p_n}{p_{n-1}}$	s^{n-1}	p_{n-1}	p_{n-3}	p_{n-5}	\dots
$k_2 = \frac{p_{n-1}}{b_{n-2}}$	s^{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	\dots
$k_3 = \frac{b_{n-2}}{c_{n-3}}$	s^{n-3}	c_{n-3}	c_{n-5}	c_{n-7}	
\vdots					
$k_{n-1} = \frac{d_2}{e_1}$	s	e_1	0		
$k_n = \frac{e_1}{f_0}$	s^0	f_0			

$$b_{n-2} = \frac{p_{n-1}p_{n-2} - p_n p_{n-3}}{p_{n-1}}$$

$$b_{n-4} = \frac{p_{n-1}p_{n-4} - p_n p_{n-5}}{p_{n-1}}$$

$$c_{n-3} = \frac{b_{n-2}p_{n-3} - p_{n-1}b_{n-4}}{b_{n-2}}$$

$$c_{n-5} = \frac{b_{n-2}p_{n-5} - p_{n-1}b_{n-6}}{b_{n-2}}$$

Nutnou a postačujúcou podmienkou stability je požiadavka, že $k_i > 0$, ($i=1, \dots, n$).

Routhovo kritérium stability – príklad1

PR. 1

Vykonajte rozbor stability URO s charakteristickým polynómom

a) $CHP(s) = s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24$

b) $CHP(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10$

	s^4	1	35	24
$k_1 = \frac{1}{10}$	s^3	10	50	
$k_2 = \frac{10}{30}$	s^2	30	24	
$k_3 = \frac{30}{42}$	s	42		
$k_4 = \frac{42}{24}$	s^0	24		

	s^4	2	3	10
$k_1 = \frac{2}{1}$	s^3	1	5	
$k_2 = -\frac{1}{7}$	s^2	-7	10	
$k_3 = -\frac{7}{6.43}$	s	6.43		
$k_4 = \frac{6.43}{10}$	s^0	10		

Nutnou a postačujúcou podmienkou stability je požiadavka, že $k_i > 0$, ($i=1, \dots, 4$).

URO s charakteristickým polynómom a) je **STABILNÝ** a b) je **NESTABILNÝ**.

Routhovo kritérium stability – príklad2

PR. 2

Vykonajte rozbor stability URO s charakteristickým polynómom

$$CHP(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10$$

	s^5	1	2	11
$k_1 = \frac{1}{2}$	s^4	2	4	10
$k_2 = \frac{2}{\varepsilon}$	s^3	$0 \rightarrow \varepsilon$	6	
$k_3 = -\frac{\varepsilon^2}{12}$	s^2	$4 - \frac{12}{\varepsilon}$	10	
$k_4 = -\frac{2}{\varepsilon}$	s	$6 + \frac{10\varepsilon^2}{12}$		
$k_5 = \frac{6}{10}$	s^0	10		

Ak sa pri výpočte objaví v 1. stĺpci nulový prvok a ostatné prvky v riadku sú nenulové, v riešení pokračujeme tak, že **nulu nahradíme nekonečne malým kladným číslom ε** . Počet **záporných k_i** udáva počet **nestabilných pólov**. V prípade, že všetky **k_i budú kladné**, tak nulový prvok signalizuje, že systém bude **na hranici stability**.

Ak Routhova tabuľka obsahuje čo len jeden záporný koeficient k_i , je systém **nestabilný**.

$k_1, k_2, k_5 > 0$ a $k_3, k_4 < 0$ to znamená, že polynóm má **3 stabilné** a **2 nestabilné** póly **NESTABILNÝ SYSTÉM**

Routhovo kritérium stability – príklad3

PR. 3

Vykonajte rozbor stability URO s charakteristickým polynómom

$$CHP(s) = s^5 + s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 4s + 4$$

	s^5	1	5	4
$k_1 = 1$	s^4	1	5	4
	s^3	0	0	
$k_2 = \frac{1}{4}$	s^3	4	10	
$k_3 = 1.6$	s^2	2.5	4	
$k_4 = 0.695$	s	3.6		
$k_5 = 0.9$	s^0	4		

$$\frac{d}{ds}(s^4 + 5s^2 + 4) = 4s^3 + 10s$$

Ak Routhova tabuľka obsahuje celý nulový riadok, nahradíme ho príslušnou deriváciou a pokračujeme ďalej vo výpočte. Keďže všetky koeficienty k_i sú kladné, tak nulový riadok naznačuje, že polynóm má **2 jednoduché póly na imaginárnej osi** a teda URO je **NA HRANICI STABILITY**.

Routhovo kritérium stability – príklad4

PR. 4

Vykonajte rozbor stability URO s charakteristickým polynómom

$$CHP(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 4s + 4$$

	s^5	1	4	4
$k_1 = 1$	s^4	1	4	4
	s^3	0	0	
$k_2 = \frac{1}{4}$	s^3	4	8	
$k_3 = 2$	s^2	2	4	
	s	0	0	
$k_4 = \frac{1}{2}$	s	4		
$k_5 = 1$	s^0	4		

$$\frac{d}{ds}(s^4 + 4s^2 + 4) = 4s^3 + 8s$$

$$\frac{d}{ds}(2s^2 + 4) = 4s$$

Ak sa v Routhovej tabuľke vyskytuje dvakrát nulový riadok, signalizuje to, že na imaginárnej osi sa nachádzajú dva páry komplexne združených koreňov. URO je **NESTABILNÝ**.

Routhovo kritérium stability – príklad5

PR. 5

Vykonajte rozbor stability URO s charakteristickým polynómom

$$CHP(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 5s + 5$$

	s^5	1	4	5
$k_1 = 1$	s^4	1	4	5
	s^3	0	0	
$k_2 = \frac{1}{4}$	s^3	4	8	
$k_3 = 2$	s^2	2	5	
$k_4 = -1$	s	-2		
$k_5 = -\frac{2}{5}$	s^0	5		

$$\frac{d}{ds}(s^4 + 4s^2 + 5) = 4s^3 + 8s$$

Ak Routhova tabuľka obsahuje čo len jeden záporný koeficient k_i , je systém nestabilný. Dva koeficienty k_i sú záporné, ide teda o URO **NESTABILNÝ**.

Routhovo kritérium stability – príklad6 (1/2)

PR. 6

Vykonajte rozbor stability základného URO pomocou Routhovho kritéria stability.

Riadený systém je opísaný s prenosovou funkciou $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$

a regulátor má prenosovú funkciu $G_R(s) = 1 + \frac{0.75}{s}$

Charakteristická rovnica URO:

$$1 + G_O(s) = 1 + G(s)G_R(s) = 1 + \frac{1}{(s+1)^2} \frac{s+0.75}{s}$$

Charakteristický polynóm:

$$CHP(s) = 1 + G_O(s) = 0$$

$$1 + G(s)G_R(s) = s(s+1)^2 + (s+0.75) = s^3 + 2s^2 + 2s + 0.75 = 0$$

Routhovo kritérium stability – príklad6 (2/2)

$$CHP(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 0.75$$

	s^3	1	2
$k_1 = \frac{1}{2}$	s^2	2	0.75
$k_2 = \frac{2}{1.625}$	s	1.625	
$k_3 = \frac{1.625}{0.75}$	s^0	0.75	

Nutnou a postačujúcou podmienkou stability je požiadavka, že $k_i > 0$, ($i=1, 2, 3$).

URO s charakteristickým polynómom $P(s)$ je **STABILNÝ**.

Routhovo kritérium stability – príklad7 (1/2)

PR. 7

Je daná prenosová funkcia otvoreného regulačného obvodu:

$$G_O(s) = \frac{K}{s(8s+1)^2}$$

Treba určiť pomocou Rothovho kritéria stability pre aké K bude URO stabilný.

Charakteristická rovnica URO:

$$1 + G_O(s) = 1 + \frac{K}{s(8s+1)^2} = \frac{s(8s+1)^2 + K}{s(8s+1)^2}$$

Charakteristický polynóm:

$$CHP(s) = 1 + G_O(s) = 0$$

$$CHP(s) = 64s^3 + 16s^2 + s + K = 0$$

Routhovo kritérium stability – príklad7 (2/2)

$$CHP(s) = 64s^3 + 16s^2 + s + K$$

	s^3	64	1
$k_1 = \frac{64}{16}$	s^2	16	K
$k_2 = \frac{16}{1-4K}$	s	$1-4K$	
$k_3 = \frac{1-4K}{K}$	s^0	K	

Nutnou a postačujúcou podmienkou stability je požiadavka, že $k_i > 0$, ($i=1,2,3$). Takže musia byť splnené dve nerovnice, z ktorých vyplýva:

$$1 - 4K > 0 \rightarrow K < \frac{1}{4}$$

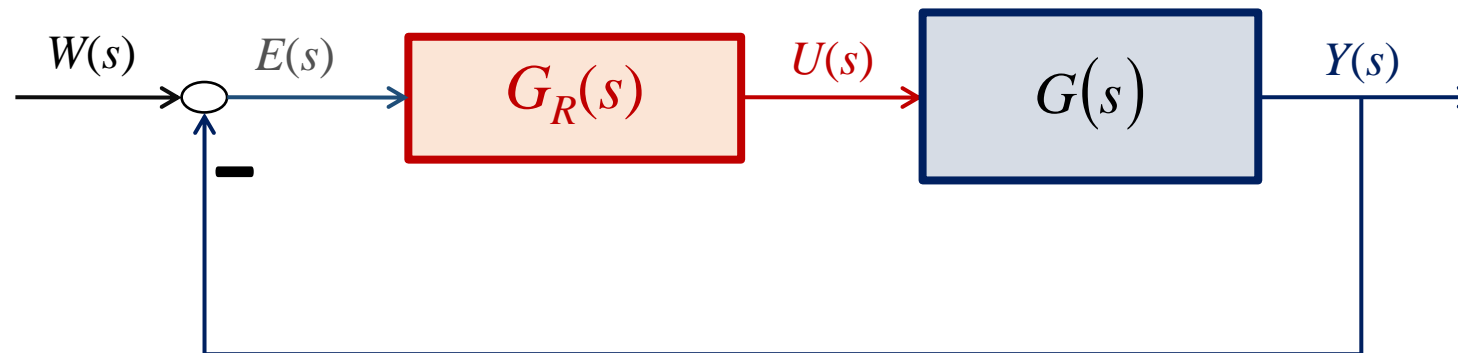
$$K > 0$$

Interval stabilných hodnôt K :

$$K \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$$

Kvalita riadenia

Pri návrhu riadiacich obvodov treba zabezpečiť okrem nevyhnutnej podmienky, ktorou je stabilita uzavretého obvodu aj ďalšie požiadavky, ktoré sú spolu zahrnuté do pojmu kvality regulácie. Rozlišujeme **kvalitu regulácie v ustálených stavoch**, ktorou je určená presnosť regulácie a **kvalitu riadenia v prechodných javoch**, ktorou je určená dynamika uzavretého obvodu.



Regulačná odchýlka je definovaná ako rozdiel žiadanej hodnoty (w) a výstupnej veličiny (y): $e(t) = w(t) - y(t)$

Využitím Laplaceovej transformácie platí:

$$E(s) = \frac{W(s)}{1 + G(s)G_R(s)}$$

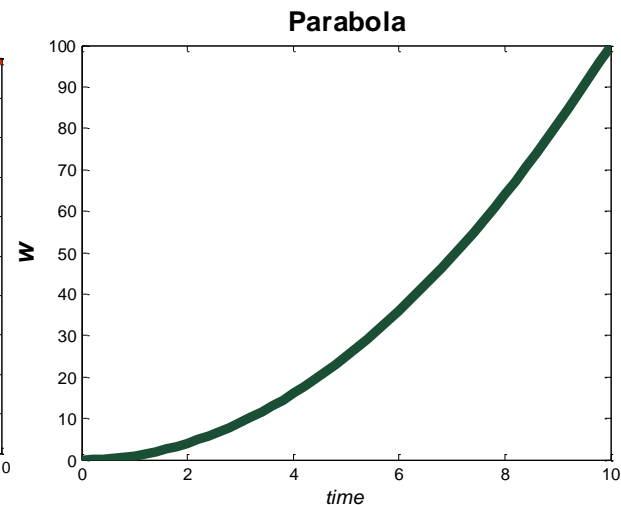
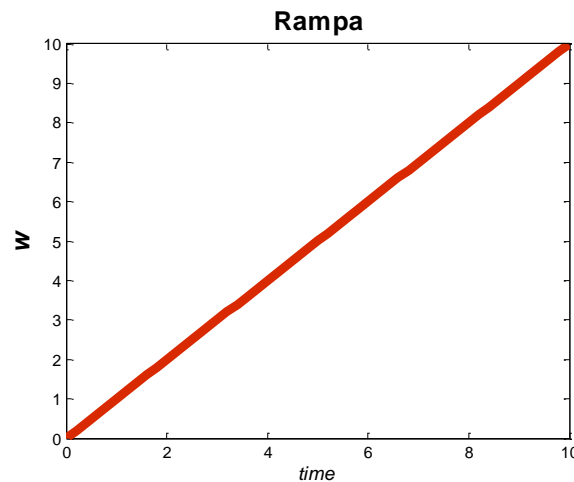
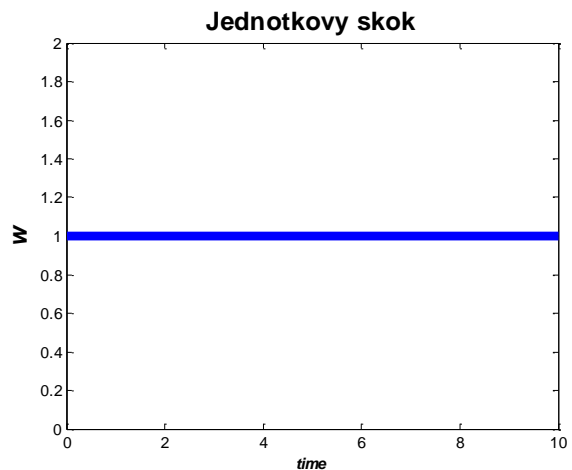
Kvalita riadenia v ustálených stavoch

Presnosť riadenia je určená **trvalou regulačnou odchýlkou** $e(\infty)$:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sW(s)}{1 + G(s)G_R(s)} = \min$$

Trvalá regulačná odchýlka závisí od **typu vstupného signálu** a od **stupňa astatizmu otvoreného regulačného obvodu** $G_O(s) = G(s)G_R(s)$.

Časové odozvy vstupného signálu $w(t)$: - **jednotkový skok** (skok polohy), **rampa** (skok rýchlosti), **parabola** (skok zrýchlenia):



Kvalita riadenia v ustálených stavoch

Vstupný signál opíšeme funkciou

$$w(t) = w_q t^q$$

$q=0$: $w(t) = w_0$ -- skok polohy
 $q=1$: $w(t) = w_1 t$ -- skok rýchlosti
 $q=2$: $w(t) = w_2 t^2$ -- skok zrýchlenia

Laplaceovou transformáciou dostaneme

$$W(s) = \frac{q!}{s^{q+1}} w_q$$

Pre trvalú regulačnú odchýlku platí

$$e(\infty) = q! w_q \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\nu-q}}{s^{\nu} + K}$$

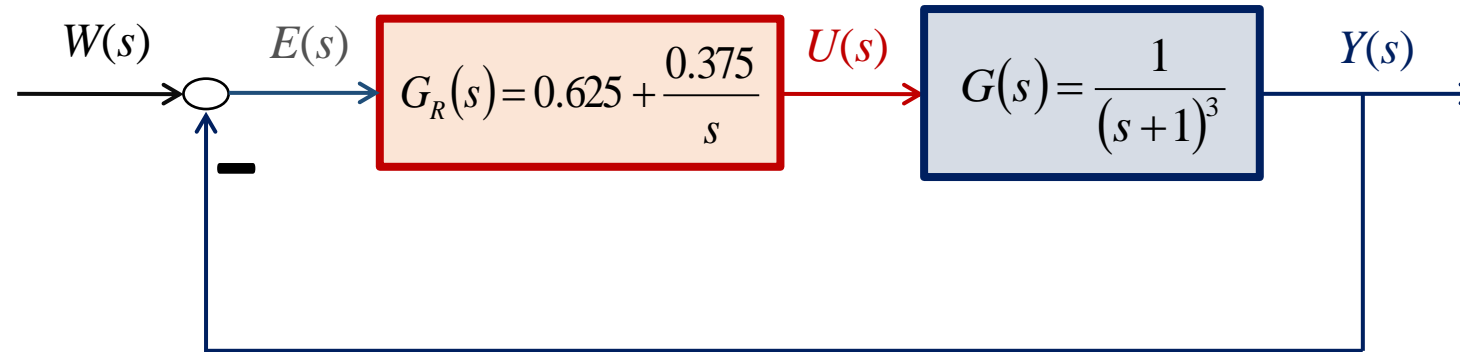
q je stupeň vstupného signálu
 ν je rád astatizmu ORO

ν/q	0	1	2
0	$e(\infty) = \frac{w_0}{1+K}$	$e(\infty) = \infty$	$e(\infty) = \infty$
1	$e(\infty) = 0$	$e(\infty) = \frac{w_1}{K}$	$e(\infty) = \infty$
2	$e(\infty) = 0$	$e(\infty) = 0$	$e(\infty) = \frac{2w_2}{K}$

Ak $\nu > q$ potom $e(\infty) = 0$ riadenie v ustálenom stave je ideálne

Kvalitu riadenia v ustálených stavoch – príklad (1/2)

PR.



Pre regulačný obvod vyšetrite kvalitu riadenia v ustálenom stave, ak je vstupný signál jednotkový skok ($w(t)=1$).

$$W(s) = \frac{1}{s}$$

$q=0$ vstupný signál je jednotkový skok
 $\nu=1$ je rád astatizmu ORO

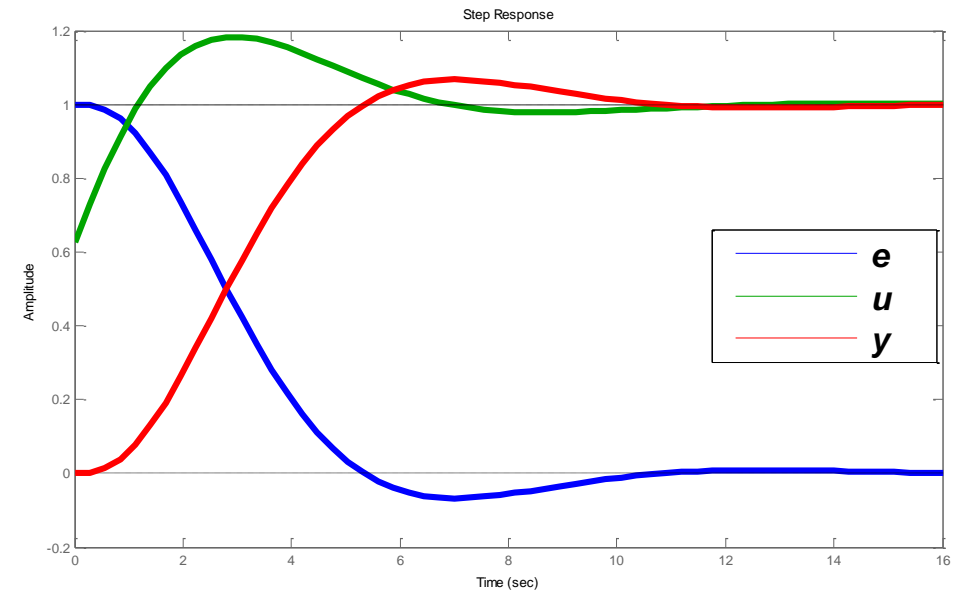
$$G_O(s) = G(s)G_R(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \frac{0.625s + 0.375}{s} = \frac{0.625s + 0.375}{s(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)}$$

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{W(s)}{1 + G_O(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{0.625s + 0.375}{s(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)}}$$

Kvalitu riadenia v ustálených stavoch – príklad (2/2)

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{0.625s + 0.375}{s(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 1.625s + 0.375} = 0$$

v/q	0	1	2
0	$e(\infty) = \frac{w_0}{1+K}$	$e(\infty) = \infty$	$e(\infty) = \infty$
1	$e(\infty) = 0$	$e(\infty) = \frac{w_1}{K}$	$e(\infty) = \infty$
2	$e(\infty) = 0$	$e(\infty) = 0$	$e(\infty) = \frac{2w_2}{K}$



Výpočet ustálených hodnôt pre základný URO

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)G_R(s)} W(s)$$

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G(s)G_R(s)}{1+G(s)G_R(s)} W(s)$$

$$u(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sU(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_R(s)}{1+G(s)G_R(s)} W(s)$$

$$e(\infty) = w(\infty) - y(\infty)$$

Kvalita riadenia v prechodných stavoch – ukazovatele kvality

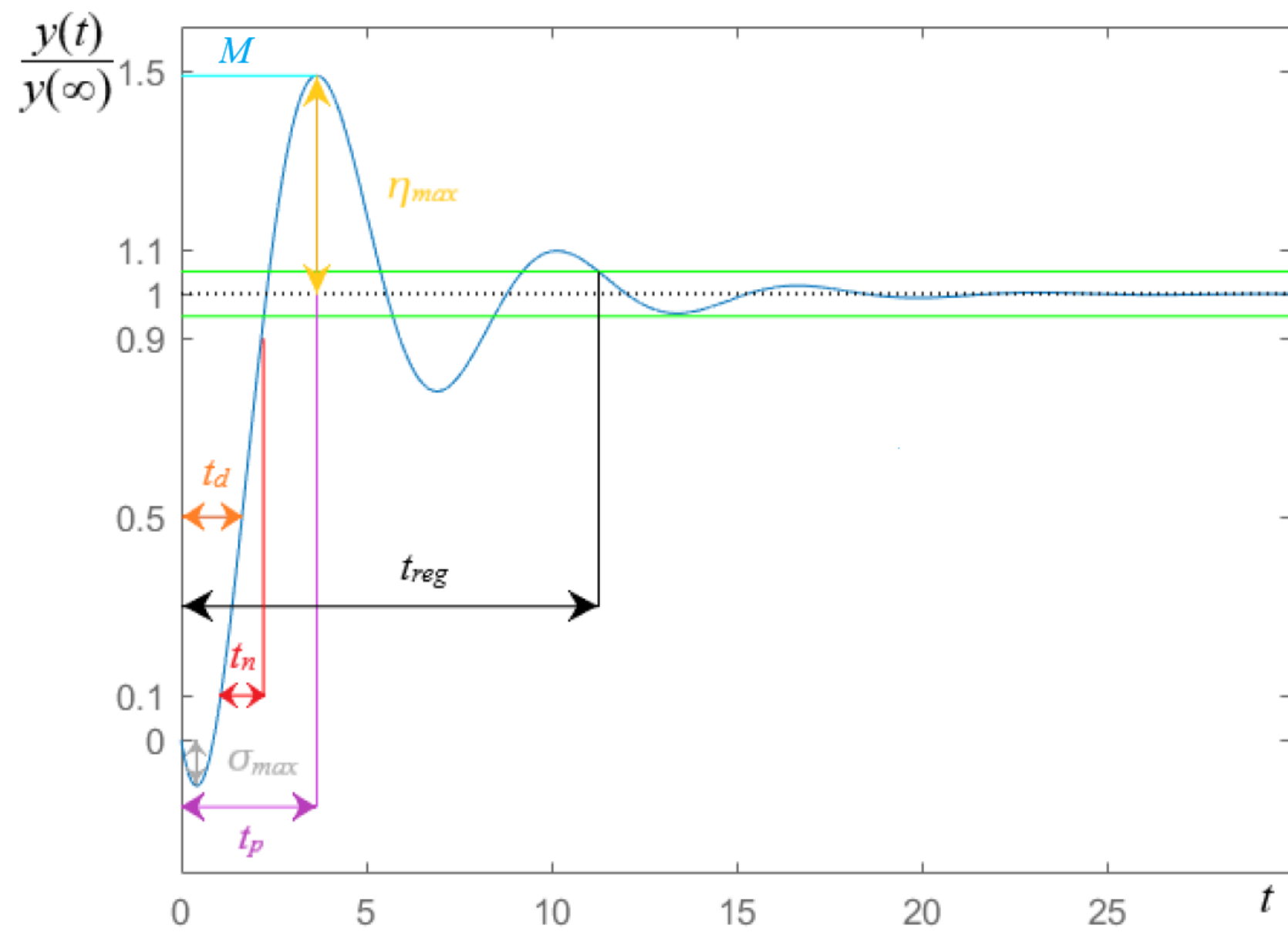
Pri posudzovaní **kvality riadenia v prechodných stavoch** sa používajú **ukazovatele kvality** (čas regulácie, maximálne preregulovanie, čas nábehu, čas oneskorenia) a **integrálne kritériá kvality riadenia** (kritérium lineárnej regulačnej plochy, kritérium absolútnej regulačnej plochy, kritérium časom váhovanej regulačnej plochy, kritérium kvadratickej regulačnej plochy).

Ukazovatele kvality riadenia:

- **Čas regulácie** (t_{reg} [s]) je čas, za ktorý sa prechodová charakteristika dostane do pásma v okolí ustálenej hodnoty $y(\infty)$, v ktorom sa predpokladá, že výstupná veličina je doregulovaná. Šírka pásma sa zvyčajne volí $\pm 2\% y(\infty)$ alebo $\pm 10\% y(\infty)$.
- **Maximálne preregulovanie** (η_{max} [%]) je normalizovaná vzdialenosť medzi maximálnou hodnotou (M) prechodovej charakteristiky y_{max} a žiadanou hodnotou riadenej veličiny $y(\infty)$, a je vyjadrené vzťahom

$$\eta_{\text{max}} = \frac{y_{\text{max}} - y(\infty)}{y(\infty)} 100 \quad [\%]$$

- **Čas nábehu** (t_n [s]) je čas, ktorý uplynie pri nábehu prechodovej charakteristiky od 10% do 90% ustálenej hodnoty.
- **Čas oneskorenia** (t_d [s]) je čas, za ktorý charakteristika dosiahne 50% ustálenej hodnoty.

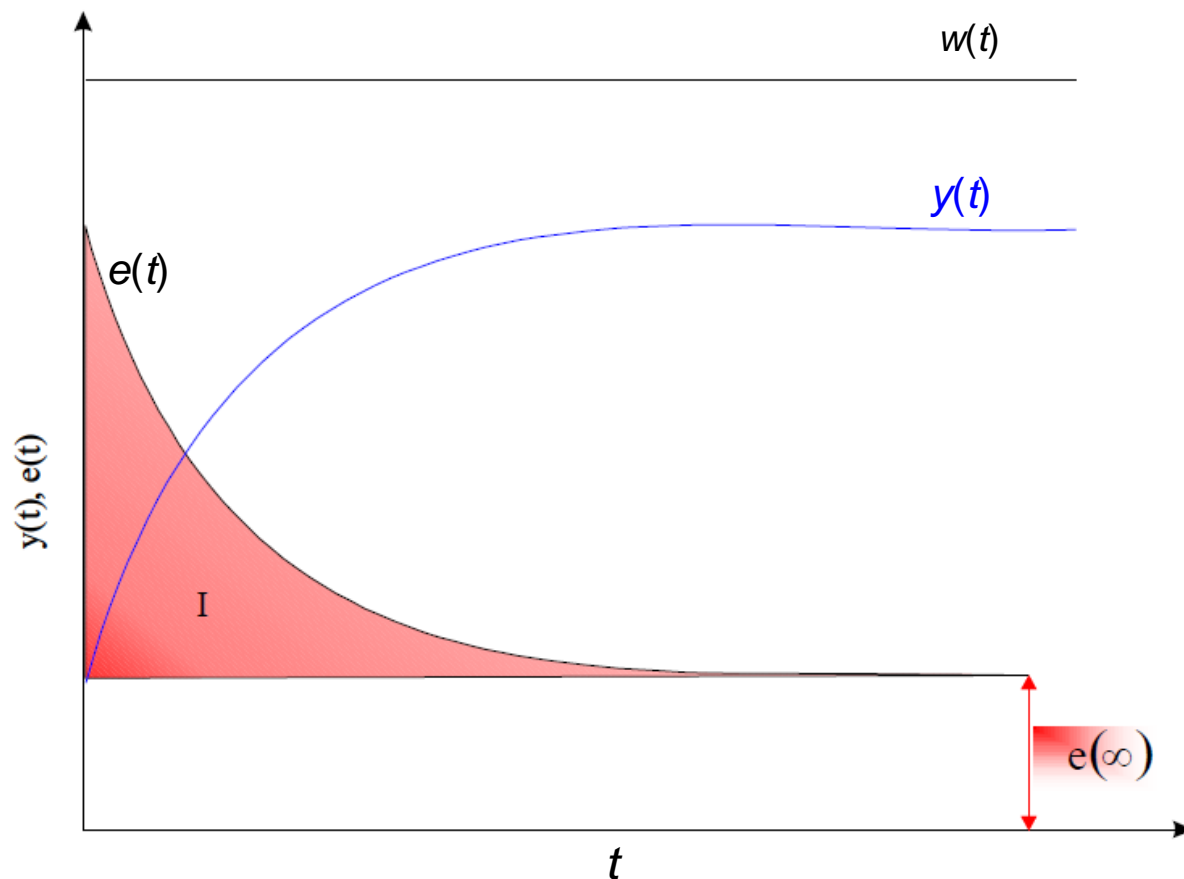


Kvalita riadenia v prechodných stavoch – integrálne kritéria (1/2)

Integrálne kritéria kvality riadenia:

a) Kritérium lineárnej regulačnej plochy

Kritérium lineárnej regulačnej plochy je definované ako minimum plochy, ktorá je ohraničená priebehom regulačnej odchýlky.



$$I = \int_0^{\infty} [e(t) - e(\infty)] dt \rightarrow \min$$

Kvalita riadenia v prechodných stavoch – integrálne kritéria (2/2)

b) Kritérium absolútnej regulačnej plochy

Kritérium lineárnej regulačnej plochy je použiteľné len pre aperiodické prechodné deje, lebo v prípade kmitavého priebehu, by sa spočítavali plochy s kladným a záporným znamienkom. Kladné znamienko by mali plochy kde je regulačná odchýlka kladná a záporné znamienko by mali plochy, kde je regulačná odchýlka záporná. Túto nevýhodu kritéria lineárnej regulačnej plochy odstraňuje kritérium absolútnej regulačnej plochy definované:

$$I_{AE} = \int_0^{\infty} |e(t) - e(\infty)| dt \rightarrow \min$$

c) Kritérium kvadratickej regulačnej plochy

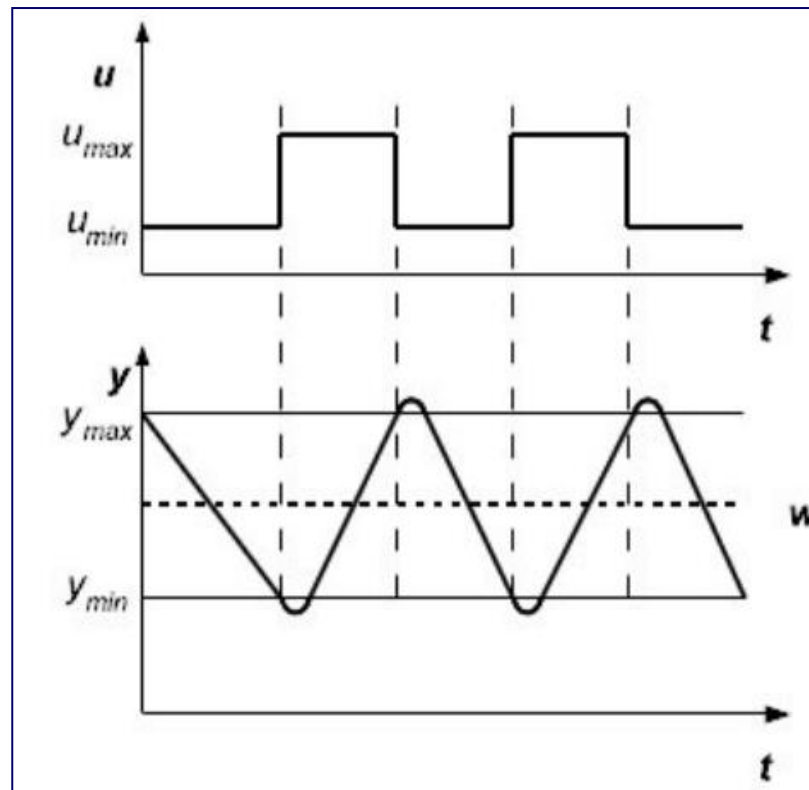
Nevýhody vyššie opísaných kritérií odstraňuje kritérium kvadratickej regulačnej plochy, ktoré je použiteľné pre aperiodické aj kmitavé priebehy. Je definované integrálom:

$$I_{SE} = \int_0^{\infty} [e(t) - e(\infty)]^2 dt \rightarrow \min$$

Dvojpolohový regulátor

Zákon riadenia:

$$u(t) = u_{max} \text{ ak } e(t) > 0 \text{ alebo } u(t) = u_{min} \text{ ak } e(t) < 0$$



Závislosť vstupnej a výstupnej veličiny od času pre dvojpolohový regulátor

PID regulátor

- štruktúra
- prenosová funkcia

URO s PID regulátorom

- voľba štruktúry PID regulátora
- kvalita (v prechodnom a ustálenom stave)

PID v časovej oblasti

$$u(t) = Pe(t) + I \int_0^t e(\tau) d\tau + D \frac{de(t)}{dt}$$

Základné štruktúry (ideálneho) PID regulátora

– bez interakcie (štandardná): $G_R(s) = P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$

– s interakciou (sériová): $G_R(s) = P' \left(1 + \frac{1}{T_I' s} \right) (1 + T_D' s)$

– paralelná: $G_R(s) = P + \frac{I}{s} + Ds$

$$\frac{T_D}{T_I} = \frac{ID}{P^2} \leq \frac{1}{4}$$

P, P' – zosilnenie proporčionálnej zložky regulátora
 T_I, T_I' – integračná časová konštanta [s]
 T_D, T_D' – derivačná časová konštanta [s]
 I – zosilnenie integračnej zložky regulátora
 D – zosilnenie derivačnej zložky regulátora

Ďalšie štruktúry PID regulátora

PI-D: no derivative kick

$$U(s) = P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) W(s) - P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) Y(s)$$

I-PD: no derivative and setpoint kick

$$U(s) = P \frac{1}{T_I s} W(s) - P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) Y(s)$$

2DoF PID: $b, c < 1$, ($b \in (0.3, 0.8)$)

$$U(s) = P \left(b + \frac{1}{T_I s} + c T_D s \right) W(s) - P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) Y(s)$$

Voľba štruktúry PID regulátora

Pri výbere vhodnej štruktúry PID regulátora pre jednoduché sústavy budeme uvažovať **kritérium minimálnej trvalej regulačnej odchýlky** a **požadovanej kvality prechodných procesov**.

Trvalá regulačná odchýlka je $e(\infty) = w(\infty) - y(\infty)$, ak $w(t) = 1$, teda na vstupe URO je jednotkový skok, čiže aj $w(\infty) = 1$.

Ak je URO stabilný (a na vstupe je jednotkový skok), pre ustálený stav platí $y(\infty) = 1$ a trvalá regulačná odchýlka je nulová $e(\infty) = 0$.

Kvalita regulácie v prechodných procesoch je daná pólmi prenosovej funkcie uzavretého obvodu (koreňmi charakteristickej rovnice URO).

- Ak budú **póly** prenosovej funkcie uzavretého obvodu **reálne** a záporné, bude **prechodný proces aperiodický**.
- Ak budú **póly** prenosovej funkcie uzavretého obvodu **komplexne združené** so zápornou reálnou časťou, bude **prechodný proces kmitavý**.

Návrh optimálnych parametrov PID regulátora

Metódy výpočtu koeficientov spojitých regulátorov na ZÁKLADE ZNALOSTI MATEMATICKÉHO MODELU

Delíme ich na metódy:

- ❑ **klasické metódy (konvenčné):** *metóda optimálneho modulu*, *metóda Naslina*, *štandardné tvary* a pod.
- ❑ **moderné metódy** zaručujúce stabilitu a dobrú kvalitu regulácie: *metóda sumy časových konštánt*, *metóda inverzie dynamiky*, *SIMC - Skogestad* a pod.

Metódy pre určenie optimálnych parametrov PID regulátora:

- metóda OPTIMÁLNEHO MODULU
- metóda sumy časových konštánt
- Inverzia dynamiky (metóda priamej syntézy)

Metóda optimálneho modulu - princíp

Vychádza z predstavy **ideálnej prenosovej funkcie uzavretého regulačného obvodu**, ktorá by mala byť **jednotková**, t. j.

$$G_{Y/W}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G(s)G_R(s)}{1 + G(s)G_R(s)} = \frac{G_O(s)}{1 + G_O(s)} \stackrel{!}{=} 1$$

Nakoľko táto predstava nie je reálna, je snahou navrhnuť regulátor tak, aby aspoň **kvadrát modulu frekvenčnej prenosovej funkcie bol rovný 1** pri všetkých frekvenciách.

$$\left| G_{Y/W}(j\omega) \right|^2 = M^2(\omega) = M(\omega)M(-\omega) \stackrel{!}{=} 1$$

Po zavedení označenia: $G_O(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$

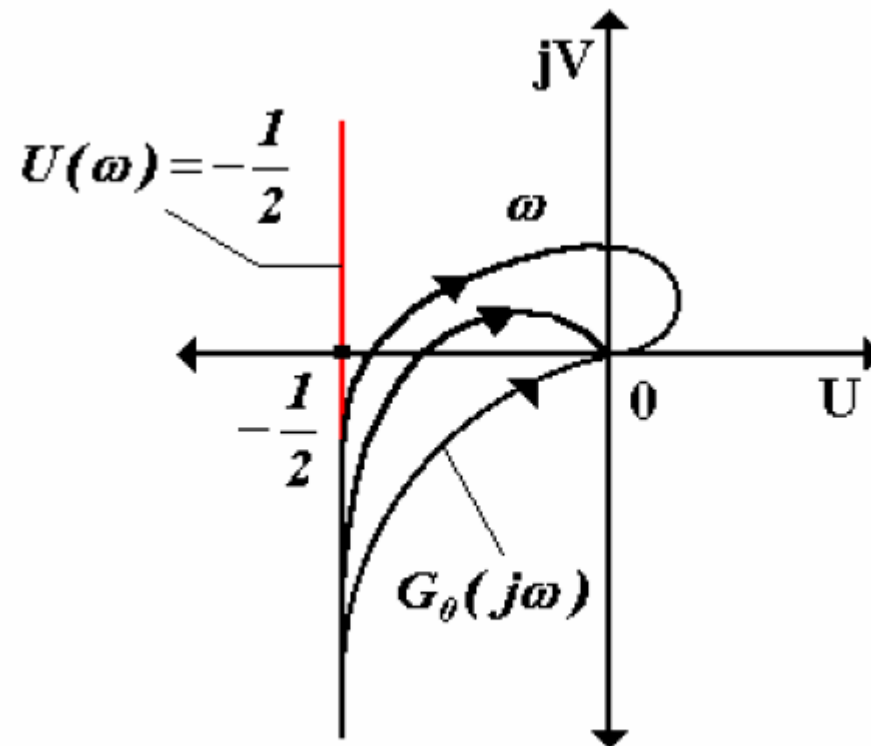
$$M^2(\omega) = \left| \frac{G_O(j\omega)}{1 + G_O(j\omega)} \right|^2 = \left| \frac{U(\omega) + jV(\omega)}{1 + U(\omega) + jV(\omega)} \right|^2 = \frac{U^2 + V^2}{1 + 2U + U^2 + V^2} \stackrel{!}{=} 1$$

Metóda optimálneho modulu – princíp (pokrač.)

$$M^2(\omega) = \frac{U^2 + V^2}{1 + 2U + U^2 + V^2} \stackrel{!}{=} 1$$

Podmienka sa splní ak:

$$1 + 2U = 0 \Rightarrow \text{Re}\{G_o(j\omega)\} = U(\omega) = -0.5$$



Frekvenčné charakteristiky v komplexnej rovine

Metóda optimálneho modulu – postup návrhu

Postup návrhu :

- Určíme frekvenčnú prenosovú funkciu otvoreného regulačného obvodu:

$$G_o(j\omega) = G(j\omega)G_R(j\omega)$$

- Rozložíme na reálnu a imaginárnu zložku, pričom funkcie $U(\omega)$ a $V(\omega)$ sú závislé od parametrov regulátora.

$$G_o(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

- Reálnu zložku položíme rovnú **-0.5**:

$$U(\omega) = -0.5$$

- Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách ω získame rovnice pre výpočet parametrov regulátora.

Metóda optimálneho modulu – odvodenie parametrov PID

Prenosová funkcia systému:

$$G(s) = K \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{K}{N(s)/M(s)} = \frac{K}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}$$

Prenosová funkcia PID regulátora:

$$G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s$$

1. Určíme frekvenčnú prenosovú funkciu ORO

$$s \approx j\omega \quad s^2 \approx -\omega^2 \quad s^3 \approx -j\omega^3 \quad s^4 \approx \omega^4$$

$$G_O(j\omega) = G(j\omega)G_R(j\omega) = \frac{K \left(r_0 + \frac{r_{-1}}{j\omega} + r_1 j\omega \right)}{1 + j\omega a_1 - \omega^2 a_2 - j\omega^3 a_3 + \omega^4 a_4 + j\omega^5 a_5 + \dots}$$

$$G_O(j\omega) = \frac{K \left(r_0 + j \left(\omega r_1 - \frac{r_{-1}}{\omega} \right) \right)}{1 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - \dots + j(a_1 \omega - a_3 \omega^3 + a_5 \omega^5 - \dots)} \cdot \frac{1 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - \dots - j(a_1 \omega - a_3 \omega^3 + a_5 \omega^5 - \dots)}{1 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - \dots - j(a_1 \omega - a_3 \omega^3 + a_5 \omega^5 - \dots)}$$

Vynásobíme komplexne združeným číslom, aby sme dostali **Re** a **Im** zložku

Metóda optimálneho modulu – odvodenie parametrov PID (pokrač.)

2. Rozložíme na reálnu a imaginárnu zložku

$$\operatorname{Re}\{G_o(j\omega)\} = \frac{Kr_0(1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots) + K\left(\omega r_1 - \frac{r_{-1}}{\omega}\right)(a_1\omega - a_3\omega^3 + \dots)}{(1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots)^2 + (a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots)^2}$$

3. Reálnu zložku položíme rovnú **-0.5**

$$U(\omega) = \frac{K(r_0 - r_{-1}a_1) + \omega^2 K(-a_2r_0 + a_1r_1 + a_3r_{-1}) + \omega^4 K(a_4r_0 - a_3r_1 - a_5r_{-1}) + \dots}{1 + \omega^2(a_1^2 - 2a_2) + \omega^4(a_2^2 + 2a_4 - 2a_1a_3) + \dots} = -0.5$$

4. Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách ω získame rovnice pre výpočet parametrov regulátora

$$\omega^0 : r_0 - r_{-1}a_1 = -\frac{1}{2K}$$

$$\omega^2 : -a_2r_0 + a_1r_1 + a_3r_{-1} = -\frac{1}{2K}(a_1^2 - 2a_2)$$

$$\omega^4 : a_4r_0 - a_3r_1 - a_5r_{-1} = -\frac{1}{2K}(a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_4)$$



$$\begin{pmatrix} a_1 - 1 & 0 \\ a_3 - a_2 & a_1 \\ a_5 - a_4 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{-1} \\ r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2K} \begin{pmatrix} 1 \\ -a_1^2 + 2a_2 \\ a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_4 \end{pmatrix}$$

Metóda optimálneho modulu – parametre regulátora

$$\begin{aligned} P &= r_0 \\ I &= r_{-1} \\ D &= r_1 \end{aligned}$$

PID regulátor

$$G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s$$

$$\begin{pmatrix} a_1 - 1 & 0 \\ a_3 - a_2 & a_1 \\ a_5 - a_4 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{-1} \\ r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2K} \begin{pmatrix} 1 \\ -a_1^2 + 2a_2 \\ a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_4 \end{pmatrix}$$

PI regulátor

$$G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ a_3 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{-1} \\ r_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2K} \begin{pmatrix} 1 \\ -a_1^2 + 2a_2 \end{pmatrix}$$

PD regulátor

$$G_R(s) = r_0 + r_1 s$$

$$\begin{pmatrix} -a_2 & a_1 \\ -a_4 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2K} \begin{pmatrix} -a_1^2 + 2a_2 \\ a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_4 \end{pmatrix}$$

I regulátor

$$G_R(s) = \frac{r_{-1}}{s}$$

$$r_{-1} = \frac{1}{2K} \frac{1}{a_1}$$

Metóda optimálneho modulu pre systém s dopravným oneskorením

Lineárny spojitý systém
(je v tvare časových konštánt):

$$G(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (1 + \tau_j s)}{\prod_{i=1}^n (1 + T_i s)} e^{-Ds}$$

$$p_1 = \sum_{i=1}^n T_i - \sum_{i=1}^m \tau_i + D,$$
$$p_k = \sum_{i=1}^n T_i^k - \sum_{i=1}^m \tau_i^k, \quad k \neq 1$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = p_1$$

$$a_2 = (p_1^2 - p_2)/2$$

$$a_3 = (p_1^3 - 3p_1p_2 + 2p_3)/6$$

$$a_4 = (p_1^4 - 6p_1^2p_2 + 8p_1p_3 + 3p_2^2 - 6p_4)/24$$

$$a_5 = (p_1^5 - 10p_1^3p_2 + 20p_1^2p_3 + 15p_1p_2^2 - 30p_1p_4 - 20p_2p_3 + 24p_5)/120$$

pokrač.
dosadením
do vzorcov
na str. 83,
vypočítame
parametre
regulátora

Metóda sumy časových konštánt pre systém s dopravným oneskorením

Určenie koeficientov spojitého regulátora je možné realizovať z prenosovej funkcie modelu riadeného procesu:

pričom
$$T_s = \sum_{i=1}^n T_i - \sum_{j=1}^m \tau_j + D$$

$$G(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (1 + \tau_j s)}{\prod_{i=1}^n (1 + T_i s)} e^{-Ds}$$

Normálna verzia		P	T_I	T_D
	P	$1/K$	-	-
	PD	$1/K$	-	$0.33T_s$
	PI	$0.5/K$	$0.5T_s$	-
	PID	$1/K$	$0.66T_s$	$0.167T_s$
Rýchla verzia	PI	$1/K$	$0.7T_s$	-
	PID	$2/K$	$0.8T_s$	$0.194T_s$

$$G_R(s) = P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

$$I = P/T_I, \quad D = PT_D$$

Inverzia dynamiky (metóda priamej syntézy)

Navrhujeme diskretný regulátor pre riadený systém s prenosovou funkciou 1. alebo 2. rádu:

$$G(s) = \frac{K}{s} e^{-Ds}$$

$$G(s) = \frac{K}{T_1 s + 1} e^{-Ds}$$

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)} e^{-Ds}$$

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-Ds}$$

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2bTs + 1} e^{-Ds} = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-Ds}$$

Ak navrhujeme regulátor pre riadený systém s prenosovou funkciou 3. alebo vyššieho rádu, prenosovú funkciu redukuje na nižší rád

$$\begin{aligned} T_1 &= T \left(b + \sqrt{b^2 - 1} \right) \\ T_2 &= T \left(b - \sqrt{b^2 - 1} \right) \end{aligned}$$

Redukcia n -tého rádu na systém 1. a 2. rádu

(S. Skogestad: “the half rule”)

Platí, že $T_{in} \geq T_{i+1,n}$

$$G(s) = \frac{K}{\prod_{i=1}^n (T_{in}s + 1)} e^{-D_n s}$$

1. rád

$$G(s) \approx \frac{K}{T_1 s + 1} e^{-D_1 s}$$

$$T_1 = T_{1n} + \frac{T_{2n}}{2}$$
$$D_1 = D_n + \frac{T_{2n}}{2} + \sum_{i=3}^n T_{in}$$

2. rád

$$G(s) \approx \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-D_2 s}$$

$$T_1 = T_{1n}$$
$$T_2 = T_{2n} + \frac{T_{3n}}{2}$$
$$D_2 = D_n + \frac{T_{3n}}{2} + \sum_{i=4}^n T_{in}$$

Redukcia n -tého rádu – príklad (1/2)

PR.: Systém je zadany prenosovou funkciou 3. rádu. Nahradte prenosovú funkciu prenosovou funkciou 1. a 2. rádu.

$$G(s) = \frac{2}{(10s + 1)(4s + 1)(2s + 1)} e^{-s}$$

1. rád

$$G_1(s) = \frac{2}{T_1 s + 1} e^{-D_1 s}$$

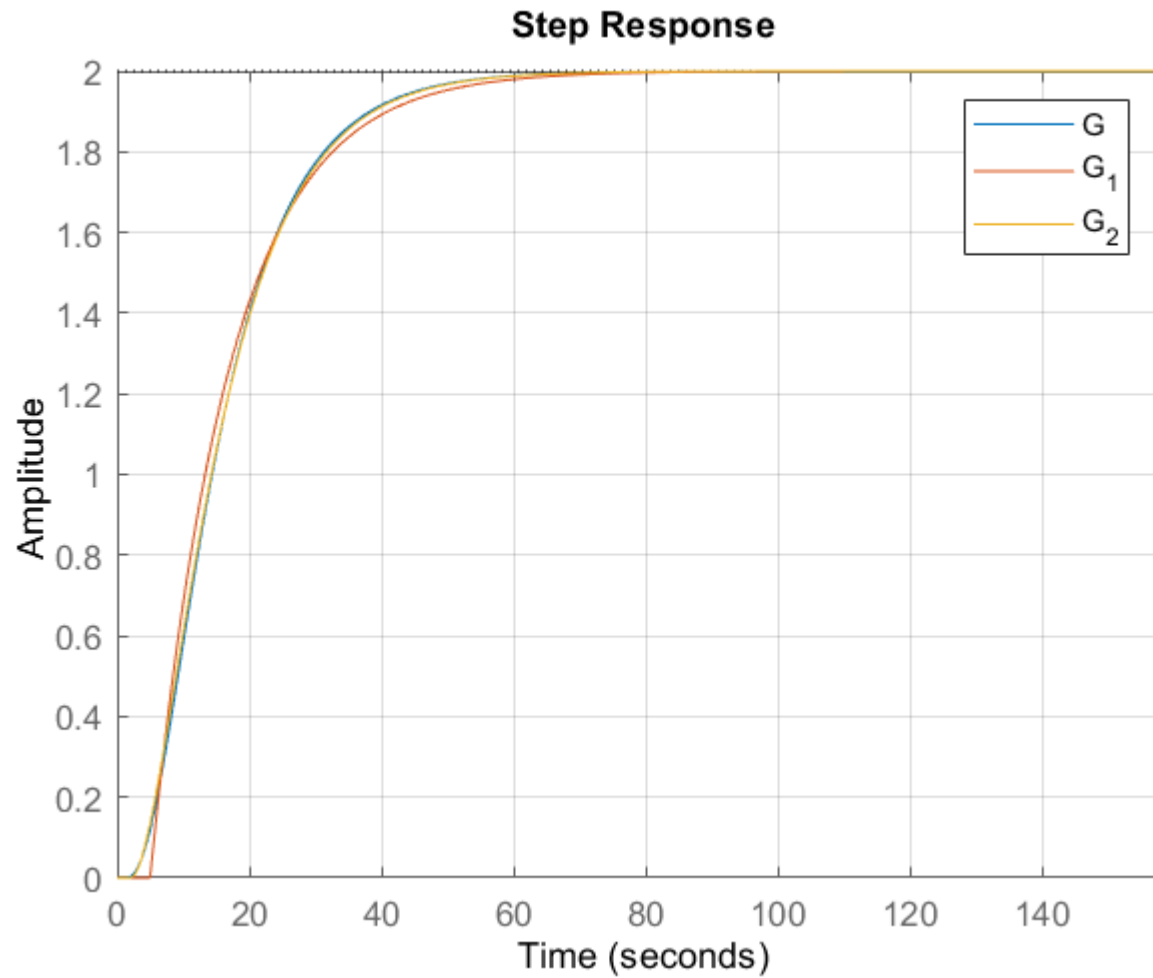
$$T_1 = 10 + \frac{4}{2} = 12$$
$$D_1 = 1 + \frac{4}{2} + 2 = 5$$

2. rád

$$G_2(s) = \frac{2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-D_2 s}$$

$$T_1 = 10$$
$$T_2 = 4 + \frac{2}{2} = 5$$
$$D_2 = 1 + \frac{2}{2} = 2$$

Redukcia n -tého rádu – príklad (2/2)



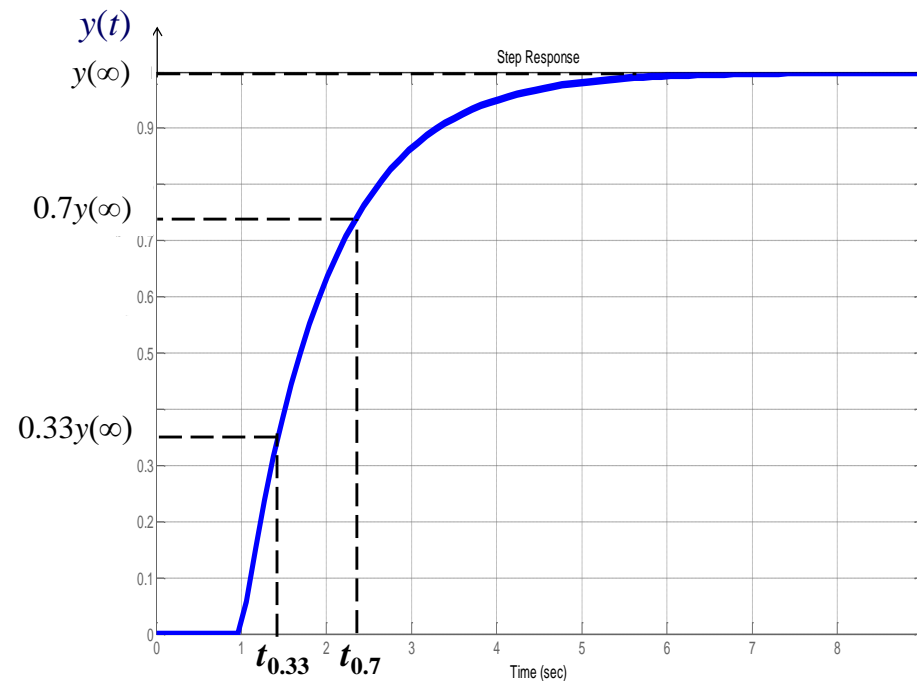
$$G(s) = \frac{2}{(10s + 1)(4s + 1)(2s + 1)}e^{-s}$$

$$G_1(s) = \frac{2}{12s + 1}e^{-5s}$$

$$G_2(s) = \frac{2}{(10s + 1)(5s + 1)}e^{-2s}$$

Získanie modelu z prechodovej char. pre aperiodický systém

Prechodová charakteristika systému



$$K = y(\infty) \quad \text{príp.} \quad K = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

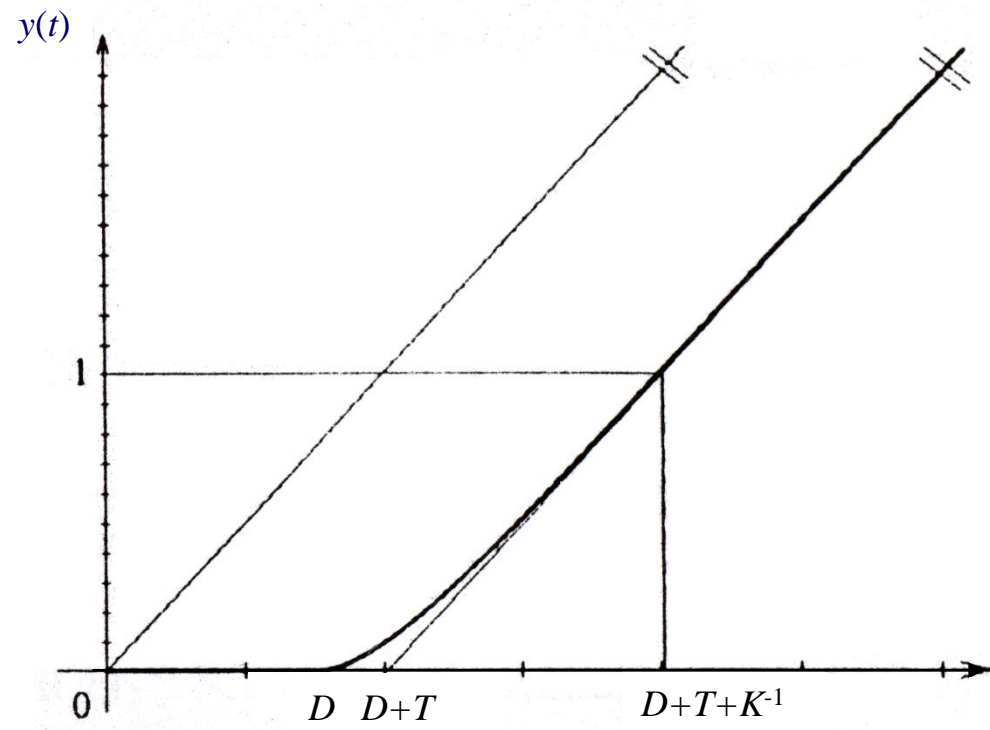
$$\left. \begin{array}{l} T_1 = 1.245 (t_{0.7} - t_{0.33}) \\ D_1 = 1.498 t_{0.33} - 0.498 t_{0.7} \end{array} \right\} \Rightarrow G(s) \approx \frac{K}{T_1 s + 1} e^{-D_1 s}$$

$$\left. \begin{array}{l} T_2 = 0.794 (t_{0.7} - t_{0.33}) \\ D_2 = 1.937 t_{0.33} - 0.937 t_{0.7} \end{array} \right\} \Rightarrow G(s) \approx \frac{K}{(T_2 s + 1)^2} e^{-D_2 s}$$

Získanie modelu z prechodovej char. pre astatický systém

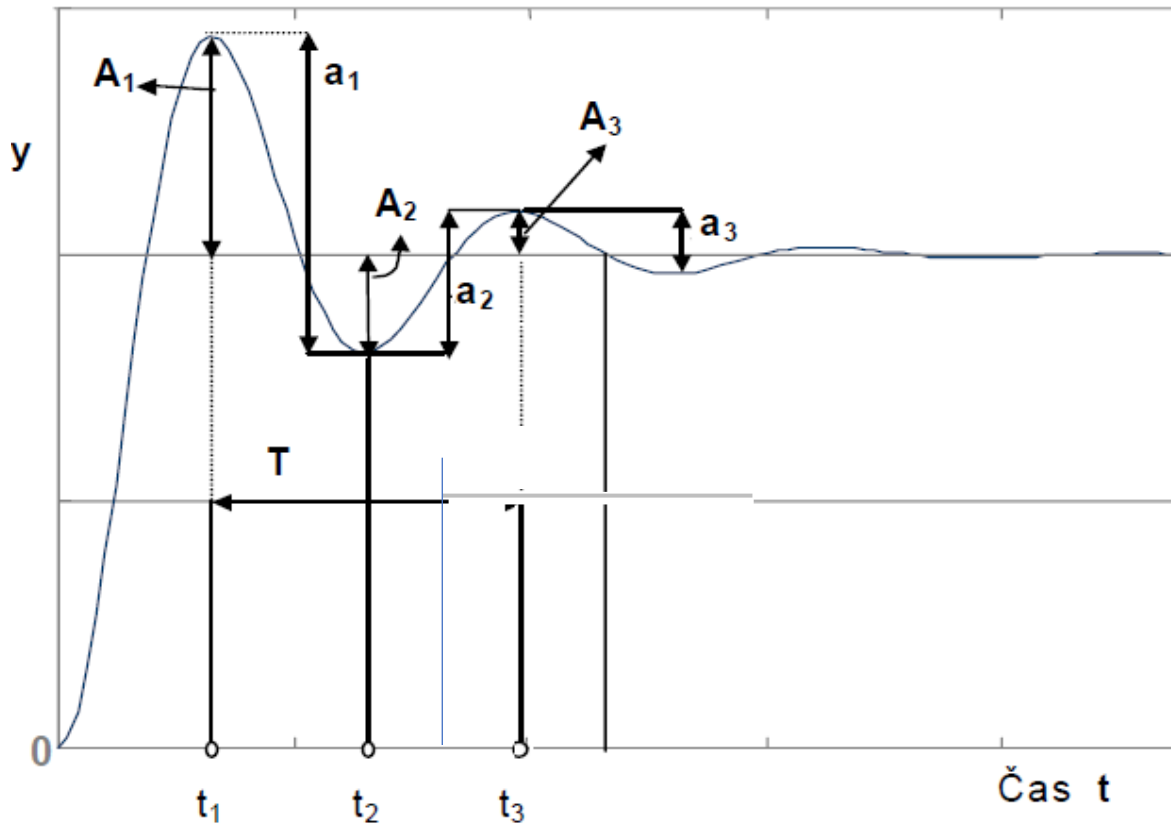
$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)} e^{-Ds}$$

Prechodová charakteristika systému



Redukcia n -tého rádu kmitavého systému, získanie modelu z prech. char. kmitavého systému

Prechodová charakteristika kmitavých dynamických systémov



q – počet uvažovaných úsekov

$$D = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q t_i - \frac{q+1}{2} (t_{q+1} - t_1)$$

$$T = \frac{1}{\pi q} (t_{q+1} - t_1) \sqrt{1 - b^2}$$

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2bTs + 1} e^{-Ds}$$

$$b = - \frac{\ln \frac{a_{i+1}}{a_i}}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \frac{a_{i+1}}{a_i}}}$$

resp.

$$b = - \frac{\ln \frac{a_{i+2}}{a_i}}{\sqrt{4\pi^2 + \ln^2 \frac{a_{i+2}}{a_i}}}$$

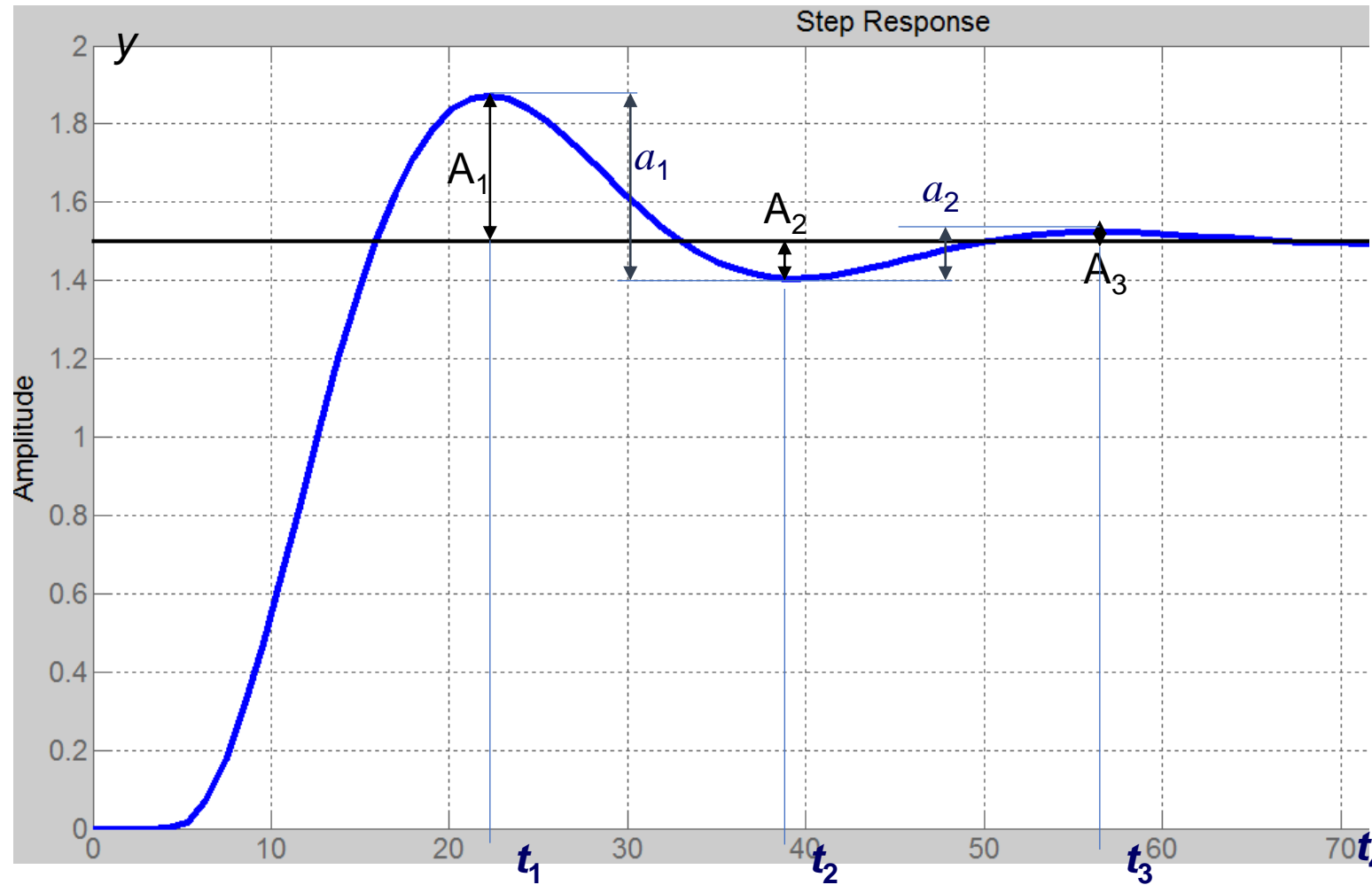
Redukcia n -tého rádu kmitavého systému – príklad (1/4)

PR. : Systém je zadaný prenosovou funkciou 3. rádu. Nahradíte prenosovú funkciu prenosovou funkciou 2. rádu.

$$G(s) = \frac{1.5}{25s^3 + 29s^2 + 5s + 1} e^{-4s}$$



$$G_1(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2bTs + 1} e^{-Ds}$$



i	1	2	3	4
t_i	22.2	39.3	56.5	73.6
$y(t_i)$	1.87	1.41	1.52	1.49

Redukcia n -tého rádu kmitavého systému – príklad (2/4)

$$a_i = |y(t_i) - y(t_{i+1})|, \quad i = 1, 2, 3$$

$$a_1 = |1.87 - 1.41| = 0.46$$

$$a_2 = |1.41 - 1.52| = 0.11$$

$$a_3 = |1.52 - 1.49| = 0.03$$



$$\frac{a_{i+1}}{a_i} : \frac{a_2}{a_1} = \frac{0.11}{0.46} = 0.24, \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{0.03}{0.11} = 0.27$$

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = 0.255 \rightarrow \text{stredná hodnota}$$

$$\frac{a_{i+2}}{a_i} : \frac{a_3}{a_1} = \frac{0.03}{0.46} = 0.07$$

$$b = - \frac{\ln \frac{a_{i+1}}{a_i}}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \frac{a_{i+1}}{a_i}}} = 0.4$$

resp.

$$b = - \frac{\ln \frac{a_{i+2}}{a_i}}{\sqrt{4\pi^2 + \ln^2 \frac{a_{i+2}}{a_i}}} = 0.4$$

Redukcia n -tého rádu kmitavého systému – príklad (3/4)

q – počet uvažovaných úsekov ($q=3$)

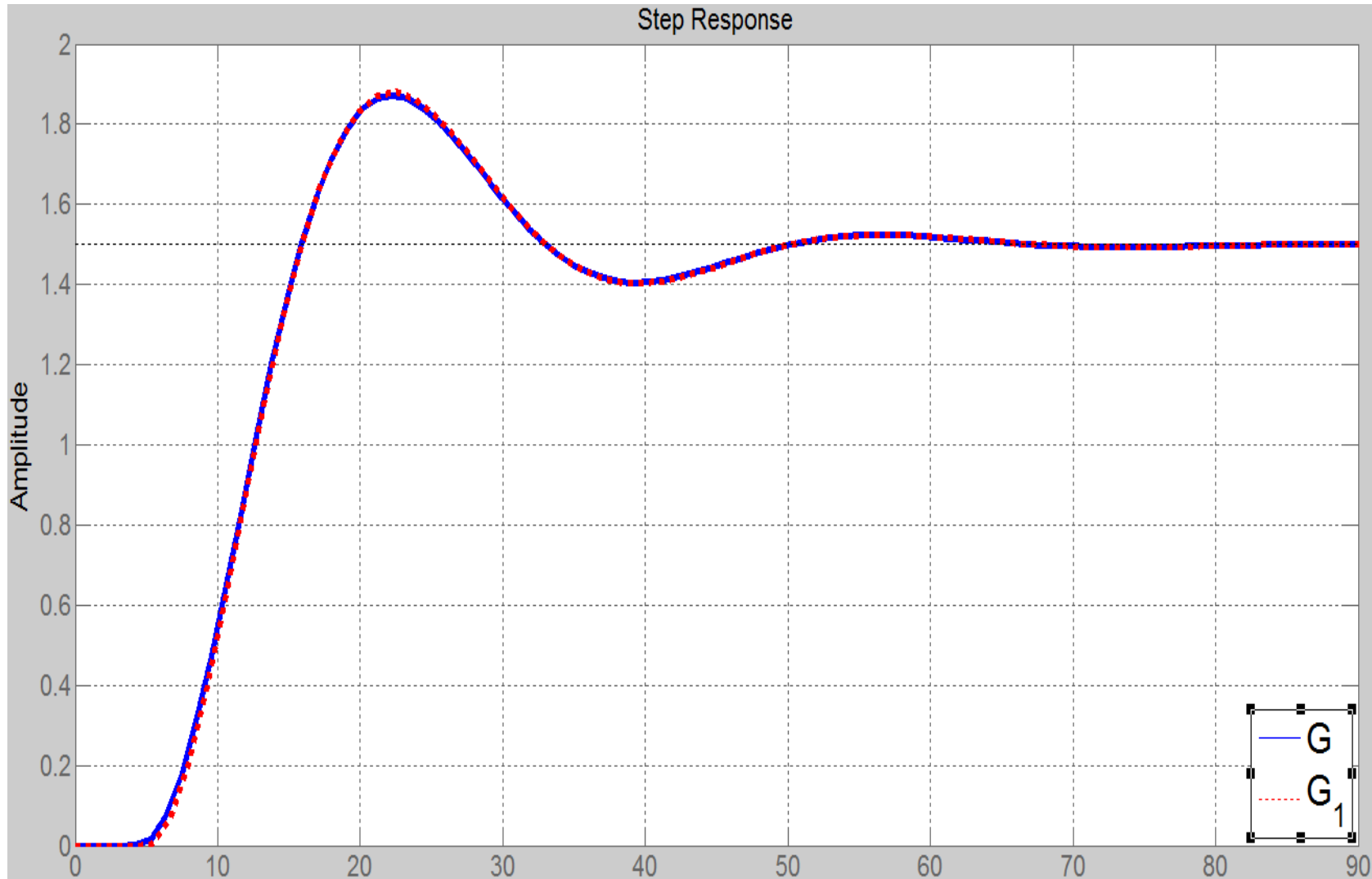
$$T = \frac{1}{\pi q} (t_{q+1} - t_1) \sqrt{1 - b^2} = \frac{1}{3\pi} (73.6 - 22.2) \sqrt{1 - 0.4^2} \doteq 5$$

$$D = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q t_i - \frac{q+1}{2} (t_{q+1} - t_1) = \frac{1}{3} \left[(22.2 + 39.3 + 56.5) - \frac{4}{2} (73.6 - 22.2) \right] = 5.1$$

$$G_1(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2bTs + 1} e^{-Ds} = \frac{1.5}{25s^2 + 4s + 1} e^{-5.1s}$$

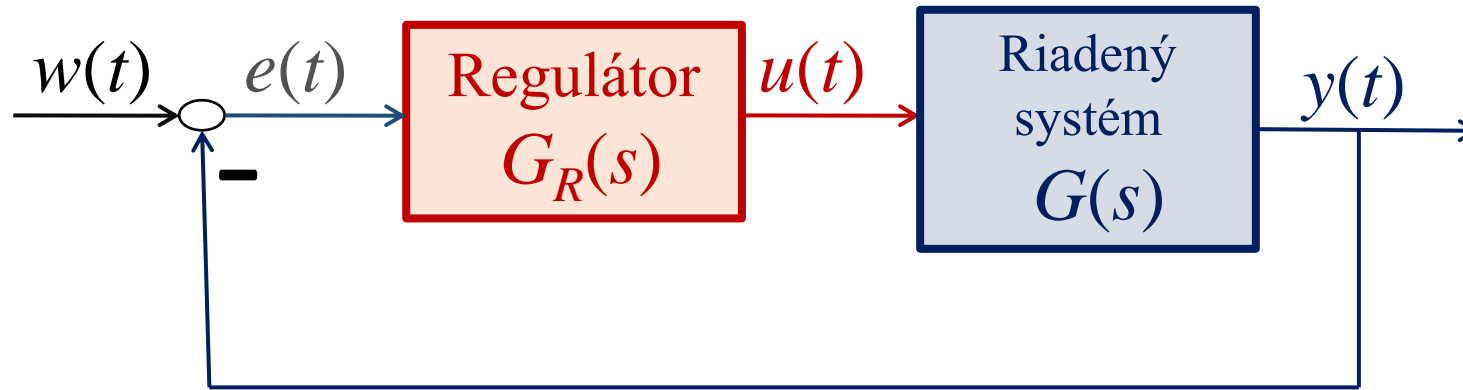
Redukcia n -tého rádu kmitavého systému – príklad (4/4)

Porovnanie prechodovej charakteristiky prenosovej funkcie 3. rádu - $G(s)$ s prenosovou funkciou 2. rádu – $G_1(s)$.



Metóda priamej syntézy (Direct Synthesis) alebo metóda IMC (Internal Model Control)

Spätnoväzbový regulačný obvod



$$G_{Y/W}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G(s)G_R(s)}{1 + G(s)G_R(s)} \Rightarrow G_R(s) = \frac{1}{G(s)} \frac{G_{Y/W}(s)}{1 - G_{Y/W}(s)}$$

Požadovná odozva uzavretého regulačného obvodu (URO):

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \left(\frac{Y}{W} \right)_{\check{z}} \equiv G_{Y/W}(s)$$

$G_{Y/W}(s)$ treba vhodne zvolit'

Voľba požadovanej odozvy URO ($G_{Y/W}(s)$)

- $G_R(s)$ - regulátor explicitne závisí na inverzii modelu procesu
- zákon riadenia $U(s) = f(G_{Y/W}(s))$

- Návrh $G_{Y/W}(s)$ musí byť realizovaný tak aby:
 - výsledný regulátor bol jednoduchý – realizovateľný a aby zaisťoval stabilitu a kvalitu URO

$$\text{Re}_{\text{pólov}} \{ 1 + G(s)G_R(s) \} < 0$$

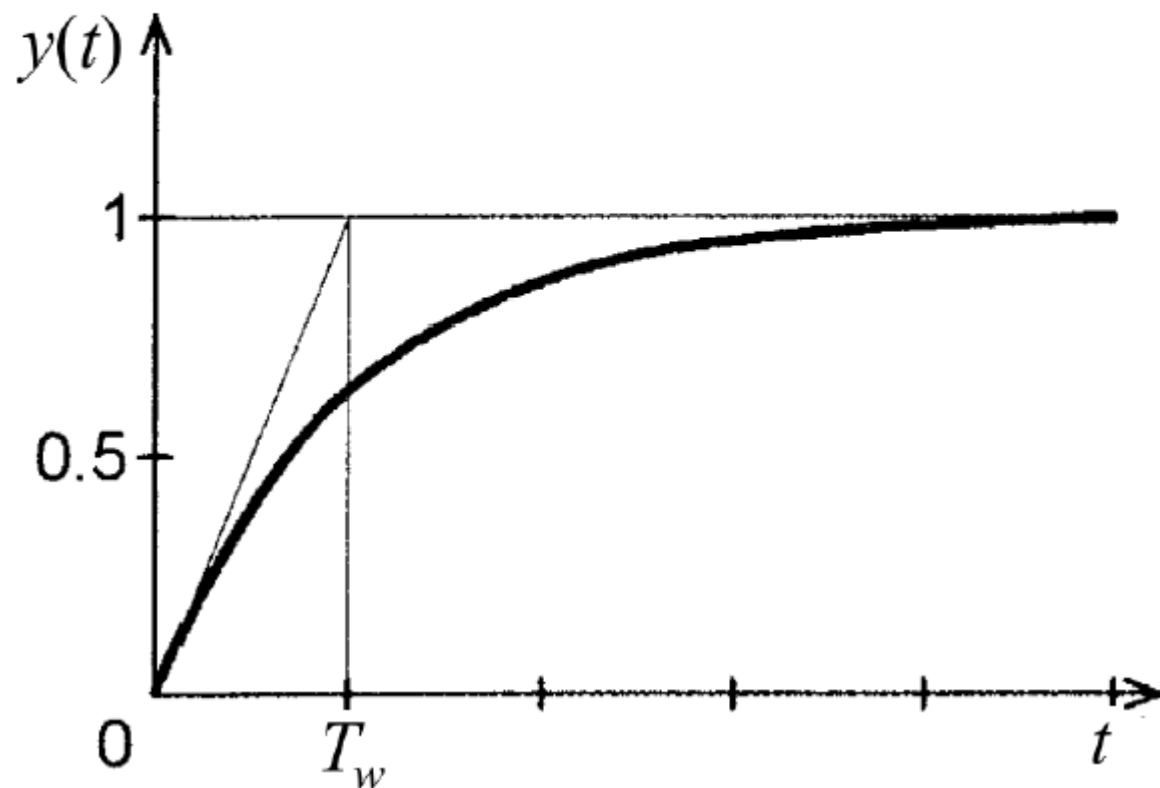
- $G_R(s)$ musí byť implementovateľný – štruktúra musí korešpondovať s existujúcimi PID formami

Voľba požadovanej odozvy URO ($G_{Y/W}(s)$)

99

Pre riadený systém **bez** dopravného oneskorenia ($D=0$)

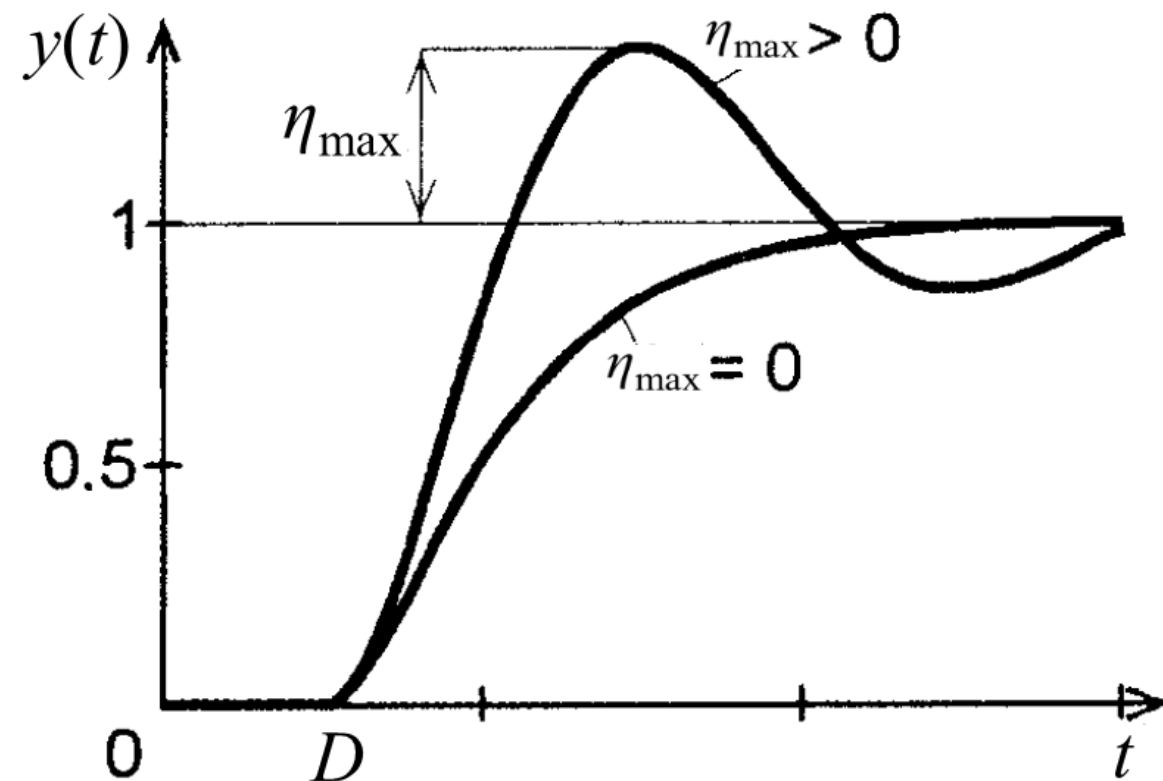
$$G_{Y/W}(s) = \frac{1}{T_w s + 1}$$



Pre riadený systém **s** dopravným oneskorením ($D \neq 0$)

$$G_{Y/W}(s) = \frac{a}{s + a} e^{-Ds}$$

a je zosilnenie ORO



$G_{Y/W}(s)$ - zaručujúca požadovanú dynamiku URO

- Univerzálny návrh (pre riadený systém **bez** dopravného oneskorenia)

$$G_{Y/W}(s) = \frac{1}{T_w s + 1} = \frac{Y(s)}{W(s)} \Rightarrow \boxed{G_R(s)} = \frac{1}{G(s)} \frac{G_{Y/W}(s)}{1 - G_{Y/W}(s)} = \frac{1}{G(s)} \frac{\frac{1}{T_w s + 1}}{1 - \frac{1}{T_w s + 1}} = \boxed{\frac{1}{G(s)} \frac{1}{T_w s}}$$

- $T_w > 0$ je požadovaná časová konštanta URO
- $G_{Y/W}(s)$ je stabilná
- $G_{Y/W}(s)$ má ustálený stav (zosilnenie 1) bez trvalej regulačnej odchýlky vzhľadom na integračný člen
- Časová konštanta URO je determinovaná výberom T_w

Demonštračný príklad

- Dynamický systém 1. rádu bez dopravného oneskorenia

$$G(s) = \frac{K}{T_1 s + 1}, \quad G_{Y/W}(s) = \frac{1}{T_w s + 1}$$
$$G_R(s) = \frac{1}{G(s)} \frac{1}{T_w s} = \frac{1}{K} \frac{T_1 s + 1}{T_w s} = \boxed{\frac{T_1}{K T_w}} \left(1 + \frac{1}{\boxed{T_1} s} \right) \equiv \boxed{P} \left(1 + \frac{1}{\boxed{T_I} s} \right)$$

– PI regulátor

Voľba T_w



Simulácie pre $T_w = 0.3, 0.5, 0.7$ [s]

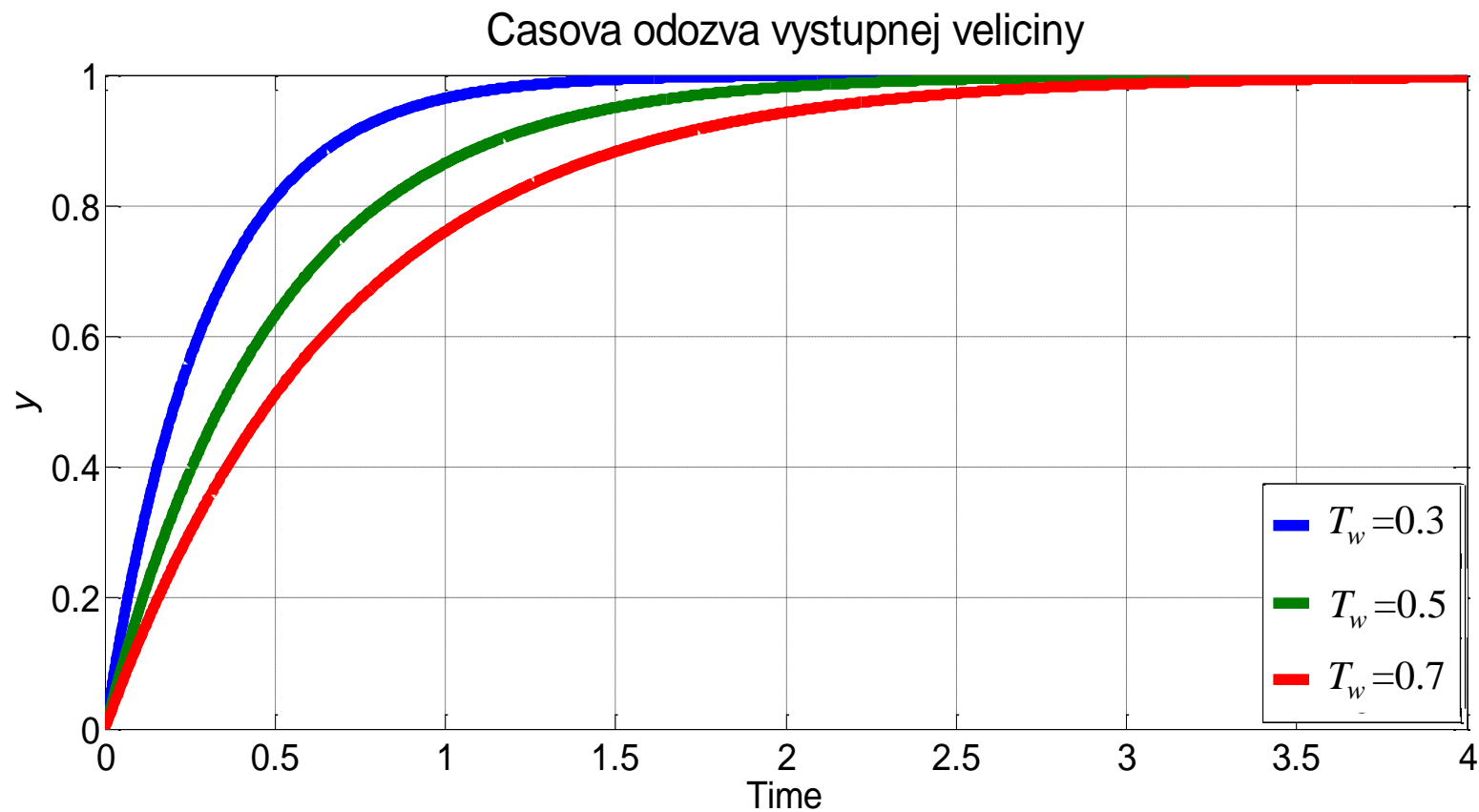
Simulácia pre:

RIADENIE

- agresívne: $T_w > 0.1 T_1$
- stredné: $T_w > T_1$
- konzervatívne: $T_w > 10 T_1$

$$G(s) = \frac{K}{T_1 s + 1} = \frac{1}{0.5 s + 1}$$

$$G_R(s) = P + \frac{I}{s}, \quad \text{kde} \quad P = \frac{T_1}{K T_w}, \quad I = \frac{P}{T_I} = \frac{P}{T_1} = \frac{1}{K T_w}$$



Kritérium absolútnej regulačnej plochy

$$I_{AE} = \int_0^{t_{\max}} |e(t) - e(\infty)| dt = \int_0^{t_{\max}} |w(t) - y(t)| dt \rightarrow \min$$

T_w [s]	I_{AE}
0.3	0.3
0.5	0.4998
0.7	0.6977

Inverzia dynamiky – postup návrhu regulátora (1/3)

Postup pre získanie prenosovej funkcie **spojitého** regulátora
(D – dopravné oneskorenie):

Pozn. ak je dopravné oneskorenie $D=0$, volíme časovú konštantu URO – T_w
a pokračujeme až krokom 3.

1. Vyberieme si požadovanú hodnotu maximálneho preregulovania η_{\max} pre URO.
Tejto hodnote je priradená hodnota koeficientu β podľa tabuľky:

η_{\max}	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.40	0.45
β	2.718	1.944	1.720	1.561	1.473	1.337	1.248	1.172	1.104	1.045

2. Vypočítame hodnotu zosilnenia ORO – a podľa vzorca:

$$a = \frac{1}{\beta D}$$

3. Na základe hodnoty zosilnenia a alebo zvolenej časovej konštanty URO - T_w a parametrov modelu riadeného procesu vypočítame parametre regulátora podľa nasledovnej tabuľky:

Inverzia dynamiky – postup návrhu regulátora (2/3)

parametre spojitého regulátora

$G(s)$	Typ regulátora	$D=0$ P	$D>0$ P	T_I	T_D
$\frac{K}{s} e^{-Ds}$	P	$\frac{1}{K T_w}$	$\frac{a}{K}$	-	-
$\frac{K}{T_1 s + 1} e^{-Ds}$	PI	$\frac{T_I}{K T_w}$	$\frac{a}{K} T_I$	T_1	-
$\frac{K}{s(T_1 s + 1)} e^{-Ds}$	PD	$\frac{1}{K T_w}$	$\frac{a}{K}$	-	T_1
$\frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-Ds}$	PID	$\frac{T_I}{K T_w}$	$\frac{a}{K} T_I$	$T_1 + T_2$	$\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$
$\frac{K}{T_1^2 s^2 + 2b T_1 s + 1} e^{-Ds}$	PID	$\frac{T_I}{K T_w}$	$\frac{a}{K} T_I$	$2b T_1$	$\frac{T_1}{2b}$

Inverzia dynamiky – postup návrhu regulátora (3/3)

4. Parametre regulátora dosadíme do prenosovej funkcie $G_R(s)$ podľa tab.

Typ regulátora	$G_R(s)$
P	P
I	$\frac{1}{T_I s}$
PI	$P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$
PD	$P(1 + T_D s)$
PID	$P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$

$$I=P/T_I, \quad D=PT_D$$

PR. 1: Navrhните spojitý regulátor metódou inverzie dynamiky pre systém:

$$G(s) = \frac{0.75}{(4.35s + 1)(1.15s + 1)}$$

Keďže systém nemá dopravné oneskorenie ($D=0$), volíme časovú konštantu URO – T_w . Podľa tabuľky vypočítame parametre PID regulátora.

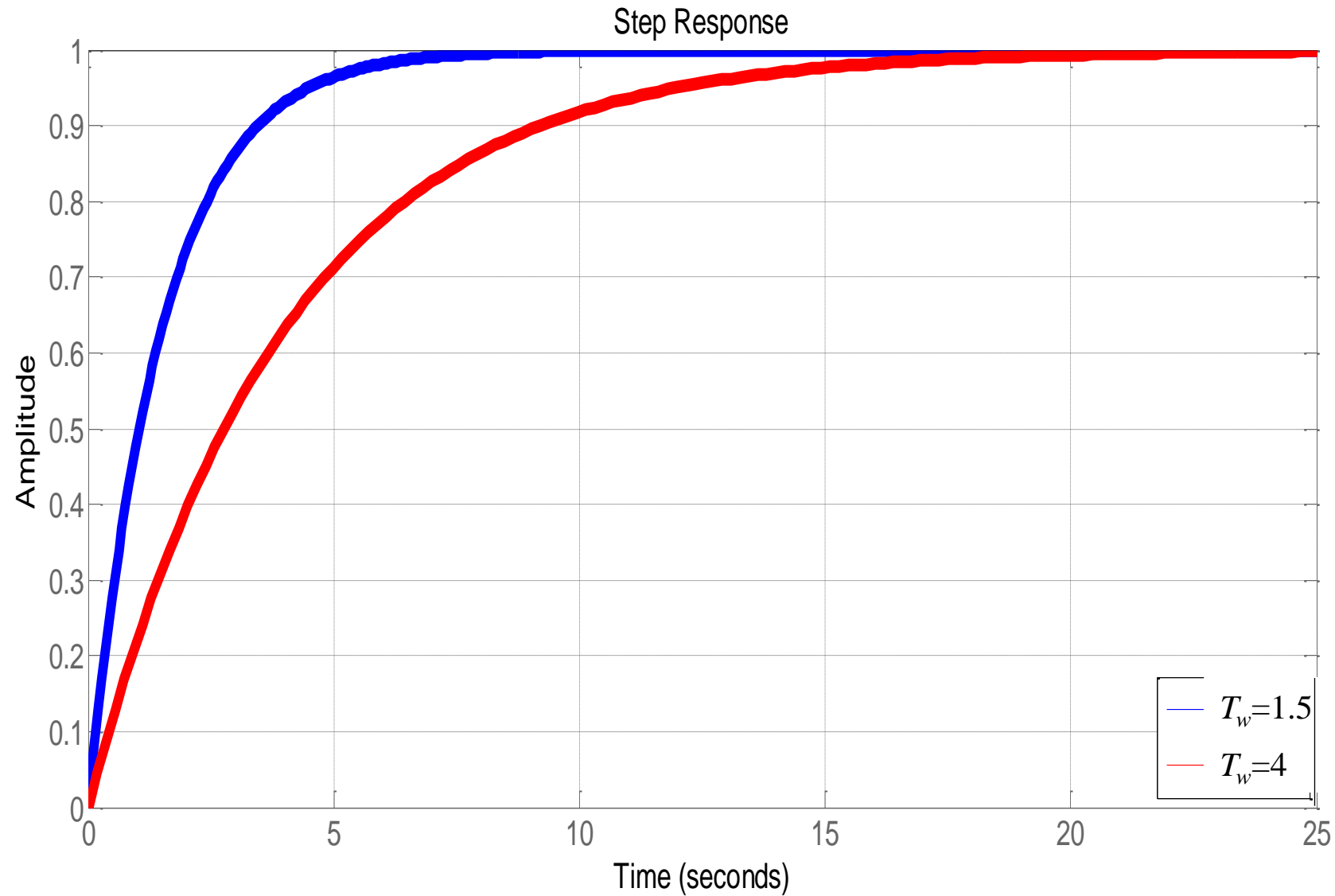
$G(s)$	Typ regulátora	$D=0$ P	$D>0$ P	T_I	T_D
$\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}e^{-Ds}$	PID	$\frac{T_I}{K T_w}$	$\frac{a}{K} T_I$	$T_1 + T_2$	$\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$

$$P = \frac{T_I}{K T_w} \doteq \frac{7.333}{T_w}$$

$$T_I = T_1 + T_2 = 5.5 \text{ [s]}$$

$$T_D = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \doteq 0.9095 \text{ [s]}$$

$$G_R(s) = P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$



PR. 2: Navrhnite spojitý regulátor metódou inverzie dynamiky pre systém s **dopravným oneskorením**:

$$G(s) = \frac{0.75}{(4.35s + 1)(1.15s + 1)} e^{-2s}$$

Keďže systém má dopravné oneskorenie ($D=2$ [s]), vyberieme si požadovanú hodnotu preregulovania napr. 5% pre URO ($\eta_{\max}=0.05$). Tejto hodnote zároveň zodpovedá hodnota koeficienta $\beta=1.944$.

Vypočítame hodnotu zosilnenia ORO – a .

$$a = \frac{1}{\beta D} = 0.2572$$

Podľa tabuľky vypočítame parametre spojitého PID regulátora.

$G(s)$	Typ regulátora	$D=0$ P	$D>0$ P	T_I	T_D
$\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)} e^{-Ds}$	PID	$\frac{T_I}{K T_w}$	$\frac{a}{K} T_I$	$T_1 + T_2$	$\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$

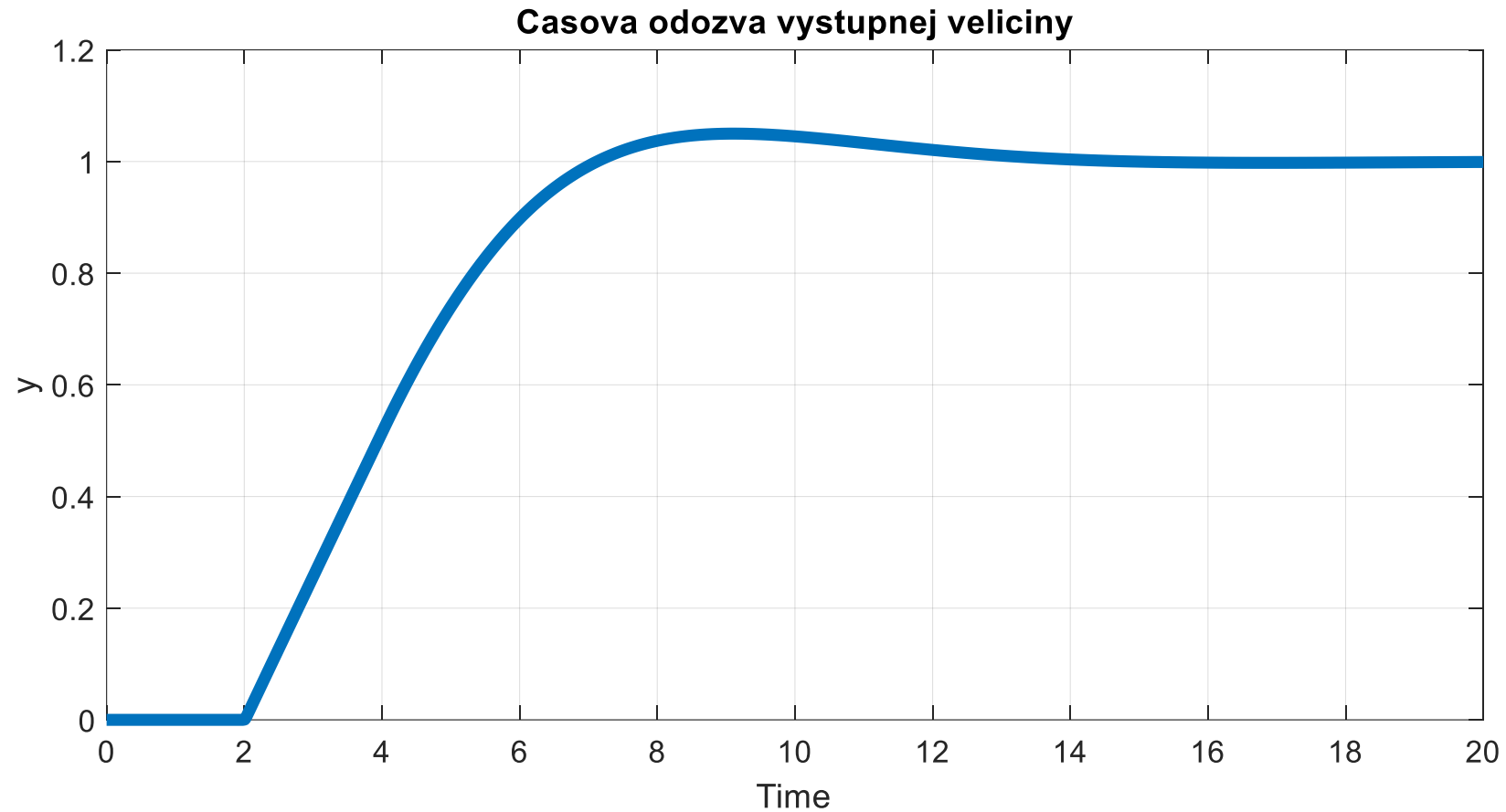
$$P = \frac{a}{K} T_I = 1.8861$$

$$T_I = T_1 + T_2 = 5.5 \text{ [s]}$$

$$T_D = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} = 0.9095 \text{ [s]}$$

$$G_R(s) = P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

$$I=P/T_I, \quad D=PT_D$$



stepinfo

RiseTime: 3.6234
SettlingTime: 12.0634
SettlingMin: 0.9032
SettlingMax: 1.0499
Overshoot: 4.9942
Undershoot: 0
Peak: 1.0499
PeakTime: 9.1034

Kontrola správnosti nastavenia PID regulátorov

Je regulátor PI správne nastavený?

1. Skontrolujte, čiperióda kmitov (časový rozdiel medzi dvomi maximami) T_Y spĺňa:

$$1.5T_I \leq T_Y \leq 2T_I$$

Ak áno, regulátor je správne nastavený.

Ak nie:

2. Ak je tlmenie príliš malé, zvýšte P a vráťte sa do bodu 1.
3. Ak $T_Y > 2T_I$, zvýšte T_I a vráťte sa na bod 1.
4. Ak $T_Y < 1.5T_I$, buď P alebo T_I sú príliš veľké. Zmeňte ich a vráťte sa do bodu 1.

Je regulátor PID správne nastavený?

- Ak $T_D/T_I < 0.25$, použite horný algoritmus. Ináč: $2T_I \leq T_Y \leq 3.33T_I$