Číslicové riadenie

6. prednáška

Časovo optimálne stabilné riadenie

SLABÁ verzia

6. Prednáška - OBSAH

- Diofantická rovnica a jej riešenie

- Algebraická teória riadenia

  Časovo optimálne regulátory

  SLABÁ verzia

Metódy riešenia diofantických rovníc

- **metóda neurčitých koeficientov**

- využitie Euklidovho algoritmu
– skriptá prof. Kozák: Lineárne číslicové systémy I

Diofantická rovnica

Diofantická rovnica s dvoma neznámymi polynómami *X'*(*z*) a *Y'*(*z*)

$$\boxed{A(z)X'(z)+B(z)Y'(z)=C(z)} \qquad (1)$$

Riešenie diofantickej rovnice (1) existuje vtedy, ak najväčší spoločný deliteľ ***D*(*z*)** (môže byť aj 1) polynómov ***A*(*z*)**, ***B*(*z*)** delí ***C*(*z*)**

$$D(z)=\mathrm{d}(A(z),B(z)) \longrightarrow D(z) \text{ delí } C(z)$$

$\Longrightarrow$ existuje riešenie diofantickej rovnice

Ekvivalentná diofantická rovnica vznikne z (1) predelením *D*(*z*) (polynómy *A'*(*z*) a *B'*(*z*) sú už nesúdeliteľné):

$$\boxed{A'(z)X'(z)+B'(z)Y'(z)=C'(z)} \qquad (2)$$

*<u>Pozn</u>. Všetky polynómy budú vyjadrené pomocou záporných mocnín **z** a napr. polynóm A(z) môže byť označený aj ako A, ostatné polynómy podobne.*

Metóda neurčitých koeficientov (1/3)

Ekvivalentná diofantická rovnica (2):

$$A'(z)X'(z)+B'(z)Y'(z)=C'(z)$$

riešenie existuje vtedy, ak najväčší spoločný deliteľ (môže byť 1) polynómov ***A'*(*z*)**, ***B'*(*z*)** delí ***C'*(*z*)**

1. Určíme minimálne stupne (deg) neznámych polynómov $X' \quad a \quad Y'$

a) Ak

$$\deg A' + \deg B' > \deg C'$$

$$\Downarrow$$

$$\deg X' \leq \deg B' - 1$$
$$\deg Y' \leq \deg A' - 1$$

i. Ak $\deg B' = 0, \quad potom \quad \deg X' < \deg B' \quad a \quad X' = 0$

ii. Ak $\deg A' = 0, \quad potom \quad \deg Y' < \deg A' \quad a \quad Y' = 0$

Metóda neurčitých koeficientov (2/3)

b) Ak

$$\boxed{\deg A' + \deg B' \le \deg C'}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\deg X' \le \deg B' - 1 \\ &\deg Y' \le \deg C' - \deg B' \end{aligned}}$$

alebo

$$\boxed{\begin{aligned} &\deg Y' \le \deg A' - 1 \\ &\deg X' \le \deg C' - \deg A' \end{aligned}}$$

2. **Určíme neznáme koeficienty polynómov** $\boxed{X' \quad a \quad Y'}$ **ich dosadením do diofantickej rovnice**

   a následným porovnaním pravej a ľavej strany pri rovnakých mocninách z^{-i} dostaneme sústavu lineárnych algebraických rovníc, riešením ktorých získame koeficienty polynómov.

Metóda neurčitých koeficientov (3/3)

Ekvivalentná diofantická rovnica:

$$A'(z)X'(z) + B'(z)Y'(z) = C'(z)$$

Existuje nekonečne veľa všeobecných riešení diofantickej rovnice:

všeobecné riešenie:

$$X_V = X' + B'H$$
$$Y_V = Y' - A'H$$

alebo

$$X_V = X' - B'H$$
$$Y_V = Y' + A'H$$

kde X' a Y' sú partikulárnym riešením diofantickej rovnice a polynóm H je ľubovoľný polynóm

PRÍKLAD 1 - Metóda neurčitých koeficientov

Pr1: Nájdite riešenie diofantickej rovnice s minimálnymi stupňami polynómov $X'(z)$ a $Y'(z)$.

$$\underbrace{\left(1+2z^{-1}+z^{-2}\right)}_{A(z)}X' + \underbrace{\left(1+z^{-1}\right)}_{B(z)}Y' = \underbrace{1+3z^{-1}}_{C(z)}$$

Riešenie:

riešenie existuje vtedy, ak najväčší spoločný deliteľ ***D*** (môže byť 1) polynómov ***A*(*z*)**, ***B*(*z*)** delí ***C*(*z*)**

$$d\left(A,B\right)=D=1+z^{-1} \quad \Longrightarrow \quad D \text{ nedelí } C$$

$\Longrightarrow$ neexistuje riešenie diofantickej rovnice

PRÍKLAD 2 - Metóda neurčitých koeficientov (1/2)

Pr2: Nájdite riešenie diofantickej rovnice s minimálnymi stupňami polynómov $X'(z)$ a $Y'(z)$.

$$\underbrace{\left(1+2z^{-1}+z^{-2}\right)}_{A(z)}X' + \underbrace{\left(1+z^{-1}\right)}_{B(z)}Y' = \underbrace{1+z^{-1}}_{C(z)}$$

Riešenie:

riešenie existuje vtedy, ak najväčší spoločný deliteľ ***D*** (môže byť 1) polynómov ***A*(*z*)**, ***B*(*z*)** delí ***C*(*z*)**

$$d\left(A,B\right)=D=1+z^{-1} \quad \Longrightarrow \quad D \text{ delí } C$$

$\Rightarrow$ existuje riešenie diofantickej rovnice

PRÍKLAD 2 - Metóda neurčitých koeficientov (2/2)

Ekvivalentná diofantická rovnica, ktorá vznikne predelením *D*:

$$\underbrace{\left(1+z^{-1}\right)}_{A'(z)}X'+\underbrace{1}_{B'(z)}.Y'=\underbrace{1}_{C'(z)}$$

Určíme stupne polynómov $X' \quad a \quad Y'$

$$\deg A' + \deg B' > \deg C' \longrightarrow \begin{array}{l} \deg X' = \deg B' - 1 = 0 - 1 = -1 \\ \deg Y' = \deg A' - 1 = 1 - 1 = 0 \end{array}$$

Určíme neznáme koeficienty polynómov

$\deg B' = 0, \quad potom \quad \deg X' < \deg B' \quad a \quad X' = 0$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} X' = 0 \\ Y' = y_0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \left(1+z^{-1}\right)0 + 1.y_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 1$$

partikulárne riešenie:

$$X' = 0$$
$$Y' = 1$$

všeobecné riešenie:

$$X_V = X' + B'H = H$$
$$Y_V = Y' - A'H = 1 - \left(1 + z^{-1}\right)H$$

kde *H* je ľubovoľný polynóm

PRÍKLAD 3 - Metóda neurčitých koeficientov (1/3)

Pr3: Nájdite riešenie diofantickej rovnice s minimálnymi stupňami polynómov $X'(z)$ a $Y'(z)$.

$$\underbrace{\left(1+2z^{-1}+z^{-2}\right)}_{A(z)}X' + \underbrace{\left(1+2z^{-1}\right)}_{B(z)}Y' = \underbrace{1+z^{-1}}_{C(z)}$$

Riešenie:

riešenie existuje vtedy, ak najväčší spoločný deliteľ ***D*** (môže byť 1) polynómov ***A*(*z*)**, ***B*(*z*)** delí ***C*(*z*)**

$$d(A,B) = D = 1 \quad \Longrightarrow \quad D \text{ delí } C$$

$\Longrightarrow$ existuje riešenie diofantickej rovnice

PRÍKLAD 3 - Metóda neurčitých koeficientov (2/3)

Ekvivalentná diofantická rovnica, ktorá vznikne predelením D:

$$\underbrace{\left(1+2z^{-1}+z^{-2}\right)}_{A'(z)}X' + \underbrace{\left(1+2z^{-1}\right)}_{B'(z)}Y' = \underbrace{1+z^{-1}}_{C'(z)}$$

Určíme stupne polynómov X' a Y'

$$\deg A' + \deg B' > \deg C' \longrightarrow \begin{array}{l} \deg X' = \deg B' - 1 = 1 - 1 = 0 \\ \deg Y' = \deg A' - 1 = 2 - 1 = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} \deg X' = 0 & X' = x_0 \\ \deg Y' = 1 & Y' = y_0 + y_1 z^{-1} \end{array}$$

Určíme neznáme koeficienty polynómov

$$\left(1+2z^{-1}+z^{-2}\right)x_0 + (1+2z^{-1})(y_0 + y_1 z^{-1}) = 1 + z^{-1}$$

PRÍKLAD 3 - Metóda neurčitých koeficientov (3/3)

Určíme neznáme koeficienty polynómov

$$\left(1+2z^{-1}+z^{-2}\right)x_0+(1+2z^{-1})(y_0+y_1z^{-1})=1+z^{-1}$$

$$\begin{array}{l} z^0: \\ z^{-1}: \\ z^{-2}: \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_0=2 \\ y_0=-1 \\ y_1=-1 \end{array}$$

partikulárne riešenie:

$$X'=2$$

$$Y'=-1-z^{-1}$$

všeobecné riešenie: $X_V=X'+B'H=2+(1+2z^{-1})H$

$$Y_V=Y'-A'H=\left(-1-z^{-1}\right)-\left(1+2z^{-1}+z^{-2}\right)H$$

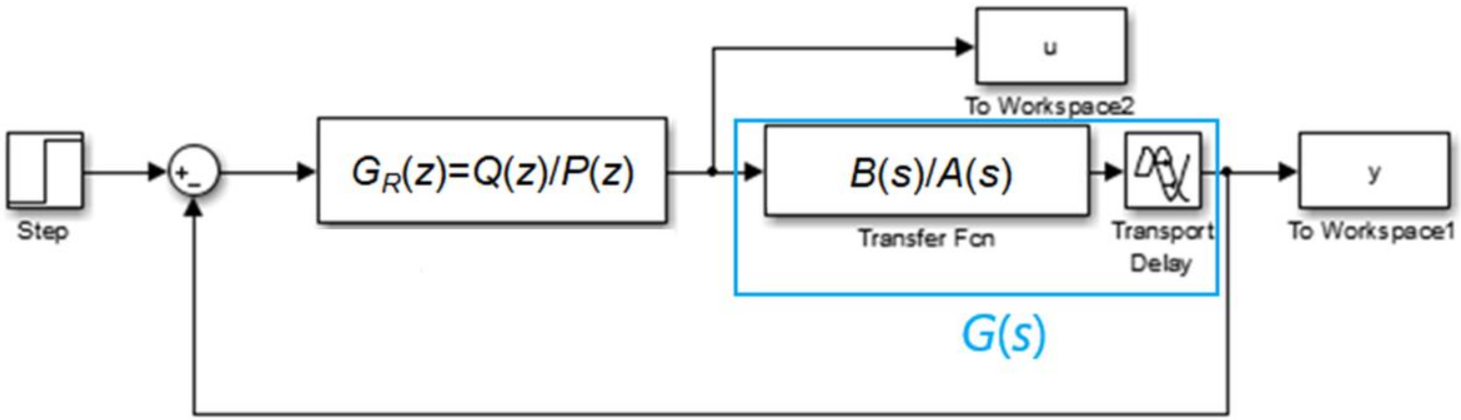
kde H je ľubovoľný polynóm

Pozn. Na str. 15-19 v tejto prednáške označíme kvôli odlíšeniu:

- *polynómy vyjadrené pomocou **záporných** mocnín **z*** $\longrightarrow$ $A(z^{-1})$
- *polynómy vyjadrené pomocou **kladných** mocnín **z*** $\longrightarrow$ $A(z)$

Pozn. pre ostatné strany prednášky.
*Všetky polynómy budú vyjadrené pomocou záporných mocnín **z** a napr. polynóm A(z) môže byť označený aj ako A, ostatné polynómy podobne.*

Návrh regulátora (poleplacement) pre minimálne stupne polynómov *Q*(*z*) a *P*(*z*)



Spojitý systém s prenosovou funkciou *G*(*s*) prepočítame na diskrétny *G*(*z*)=*B*(*z*)/*A*(*z*). Pre charakteristickú rovnicu URO platí:

$$A(z)P(z)+B(z)Q(z)=A_z(z) \tag{3}$$

$A_z(z)$ je želaný polynóm, ktorého korene musia ležať v jednotkovej kružnici.

Napr. pre systém 1. rádu bez dopravného oneskorenia môžeme voliť $A_z(z)=z$. Získame diofantickú rovnicu:

$$(z+a_1)P(z)+b_1Q(z)=z$$

Môžeme ju upraviť:

$$\frac{(z+a_1)}{z}P(z)+\frac{b_1}{z}Q(z)=1$$

$$(1+a_1z^{-1})P(z^{-1})+b_1z^{-1}Q(z^{-1})=1 \quad \Rightarrow \boxed{A(z^{-1})P(z^{-1})+B(z^{-1})Q(z^{-1})=1}$$

Príklad 4: Návrh regulátora (poleplacement)

Navrhnite regulátor $G_R(z)=\dfrac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}$ pomocou metódy poleplacement (pre minimálne stupne polynómov *Q*(*z*) a *P*(*z*))

pre systém 1. rádu s prenosovou funkciou $G(z)=\dfrac{0.5}{z+0.1}$ pre periódu vzorkovania *T*=0.1.

Riešenie:

$$G(z)=\frac{0.5}{z+0.1}=\frac{0.5z^{-1}}{1+0.1z^{-1}}=\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

Riešime diofantickú rovnicu:

$$A(z^{-1})P(z^{-1})+B(z^{-1})Q(z^{-1})=1$$
$$(1+0.1z^{-1})P(z^{-1})+0.5z^{-1}Q(z^{-1})=1$$

najväčší spoločný deliteľ *D* delí pravú stranu diofantickej rovnice $D=\deg(A,B)=1$

Určenie minimálnych stupňov neznámych polynómov *P* a *Q*:

$$\deg(A)+\deg(B)=1+1=2>\deg(1)=0$$

$$\left.\begin{aligned}\deg(P)&=\deg(B)-1=1-1=0\\ \deg(Q)&=\deg(A)-1=1-1=0\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}P&=p_0\\ Q&=q_0\end{aligned}$$

$$(1+0.1z^{-1})p_0+0.5z^{-1}q_0=1 \quad\Rightarrow\quad p_0=1,\ q_0=-0.2$$

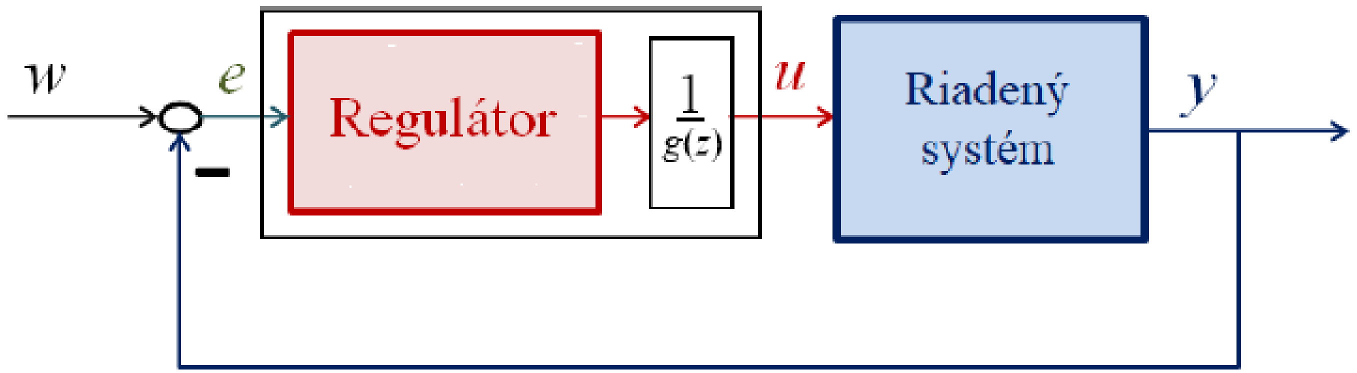
$G_R(z)$=-0.2

všeobecné riešenie:

$$P(z^{-1})=1+0.5z^{-1}H(z^{-1})$$
$$Q(z^{-1})=-0.2-(1+0.1z^{-1})H(z^{-1})$$

kde *H* je ľubovoľný polynóm

Ak je riadený systém statický (po skokovej zmene vstupnej veličiny výstupná veličina prejde do nového ustáleného stavu), potrebujeme zabezpečiť integračnú činnosť regulátora. Do regulačného obvodu musíme pridať člen $\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}}$



URO s integračnou činnosťou.

Charakteristická rovnica URO sa potom zmení na

$$\boxed{A(z)(1 - z^{-1})P(z) + B(z)Q(z) = A_z(z)} \quad (4)$$

teda polynóm $g(z) = 1 - z^{-1}$ najprv priradíme k menovateľu prenosovej funkcie systému $A(z)$ a vyriešime diofantickú rovnicu (4).

Pri implementácii regulátora presunieme integračný člen do prenosovej funkcie regulátora. Výsledná prenosová funkcia regulátora potom bude:

$$\boxed{G_R(z) = \frac{Q(z)}{(1 - z^{-1})P(z)}.}$$

Príklad 5: Návrh regulátora (poleplacement)

Navrhnite regulátor $G_R(z)=\dfrac{Q(z^{-1})}{(1-z^{-1})P(z^{-1})}$ (s integračným charakterom) pomocou metódy poleplacement (pre minimálne stupne polynómov $Q(z)$ a $P(z)$) pre systém 1. rádu s prenosovou funkciou $G(z)=\dfrac{0.5}{z+0.1}$ pre periódu vzorkovania T=0.1.

Riešenie:

$$G(z)=\frac{0.5}{z+0.1}=\frac{0.5z^{-1}}{1+0.1z^{-1}}=\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

Riešime diofantickú rovnicu:

$$A(z^{-1})(1-z^{-1})P(z^{-1})+B(z^{-1})Q(z^{-1})=1$$
$$(1+0.1z^{-1})(1-z^{-1})P(z^{-1})+0.5z^{-1}Q(z^{-1})=1$$

najväčší spoločný deliteľ D delí pravú stranu diofantickej rovnice $D=\deg\left(A(1-z^{-1}),B\right)=1$

Určenie stupňov neznámych polynómov P a Q:

$$\deg(A(1-z^{-1}))+\deg(\mathrm{B})=2+1=3>\deg(1)=0$$
$$\left.\begin{aligned}\deg(\mathrm{P}) &= \deg(\mathrm{B})-1=1-1=0\\ \deg(\mathrm{Q}) &= \deg(\mathrm{A}(1-z^{-1}))-1=2-1=1\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}\mathbf{P}&=\mathbf{p_0}\\ \mathbf{Q}&=\mathbf{q_0}+\mathbf{q_1 z^{-1}}\end{aligned}$$

$$(1+0.1z^{-1})(1-z^{-1})p_0+0.5z^{-1}(q_0+q_1z^{-1})=1 \quad\Rightarrow\quad p_0=1,\ q_0=1.8,\ q_1=0.2$$

Prenosová funkcia regulátora:

$$G_R(z)=\frac{Q(z^{-1})}{(1-z^{-1})P(z^{-1})}=\frac{1.8+0.2z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

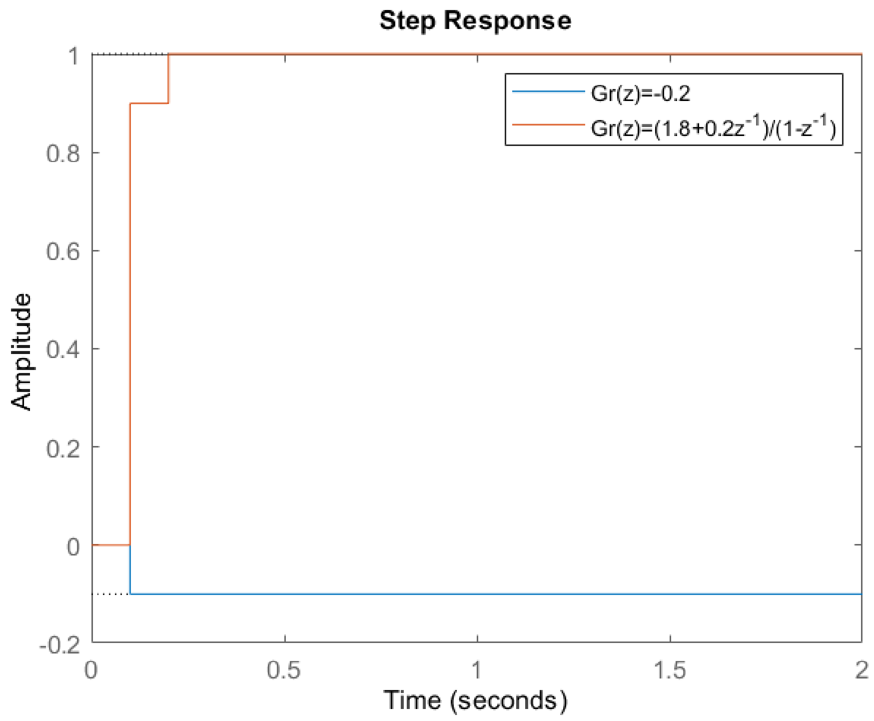
Príklad 4 a 5: Návrh regulátora (poleplacement) - SIMULÁCIE

Prenosová funkcia regulátora (z Pr. 4):

$$G_R(z)=-0.2$$

Prenosová funkcia regulátora s integračným charakterom (z Pr. 5):

$$G_R(z)=\frac{Q(z^{-1})}{(1-z^{-1})P(z^{-1})}=\frac{1.8+0.2z^{-1}}{1-z^{-1}}$$



Youlova-Kučerova parametrizácia všetkých stabilizujúcich regulátorov

Riešením diofantickej rovnice $A(z)P(z)+B(z)Q(z)=A_z(z)$ (str. 15 – charakteristická rovnica URO (3)) získame neznáme polynómy regulátora $P(z)$ a $Q(z)$ minimálnych stupňov (partikulárne riešenie). Regulátor s prenosovou funkciou

$$G_R(z)=\frac{Q(z)}{P(z)}$$

ktorý stabilizuje URO, nazývame nominálnym regulátorom. Potom všetky regulátory, ktoré stabilizujú URO sú definované ako

$$\boxed{G_R(z)=\frac{Q(z)-A(z)H(z)}{P(z)+B(z)H(z)}}$$

kde $H(z)$ je ľubovoľný polynóm, pričom platí $P(z)+B(z)H(z)\neq 0$.

Polynóm $A(z)$ je stabilný (asymptoticky stabilný), ak rád

$$\boxed{g(0) + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2} + \ldots = \frac{1}{A(z)}}$$

Konverguje k nule, to znamená, že $\boxed{\lim_{k\to\infty} g(k) = 0}$

Stabilný polynóm:

$$A(z) = 1 - 0.5z^{-1}$$

$$1 + 0.5z^{-1} + 0.125z^{-2} + \ldots = \frac{1}{A(z)}$$

Nestabilný polynóm:

$$A(z) = 1 - 1.5z^{-1}$$

$$1 + 1.5z^{-1} + 2.25z^{-2} + \ldots = \frac{1}{A(z)}$$

Faktorizácia polynómu

Polynóm $A(z)$ je daný pomocou záporných mocnín z. Faktorizáciou polynómu rozumieme nájdenie nesúdelitelných polynómov $A^+(z)$ a $A^-(z)$ k polynómu $A(z)$ tak, že platí

$$\boxed{A(z) = A^+(z)A^-(z)}$$

kde $A^+(z)$ je stabilný polynóm najvyššieho stupňa, ktorý je súčasťou polynómu $A(z)$. Faktorizácia je daná jednoznačne až na konštantu, lebo pre ľubovoľné číslo $\gamma \neq 0$ platí

$$\boxed{A(z) = (\gamma A^+(z))\left(\frac{1}{\gamma}A^-(z)\right)}$$

$$A(z) = 0.3z^{-1} - 1.35z^{-2} + 0.6z^{-3}$$

$$\gamma = 0.3$$

$$A(z) = \Big(0.3\underbrace{\boxed{(1 - 0.5z^{-1})}}_{A^+(z)}\Big)\left(\frac{1}{0.3}\underbrace{\boxed{(0.3z^{-1} - 1.2z^{-2})}}_{A^-(z)}\right)$$

Pozn. Podrobný postup je na str. 23

Príklad 6: Faktorizácia polynómu

Faktorizujte polynóm $\boxed{A(z) = 0.3z^{-1} - 1.35z^{-2} + 0.6z^{-3}}$

Riešenie:

Najprv upravíme polynóm tak, že vyjmeme jeho časť $(0.3z^{-1})$ pred zátvorku:
$A(z) = 0.3z^{-1}(1 - 4.5z^{-1} + 2z^{-2})$,

Následne rozložíme zvyšnú časť v zátvorke $(1 - 4.5z^{-1} + 2z^{-2})$ na súčin dvoch polynómov (na základe koreňov polynómu: $z_1 = 4,\ z_2 = 0.5$), takže
$A(z) = 0.3z^{-1}(1 - 4z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})$.

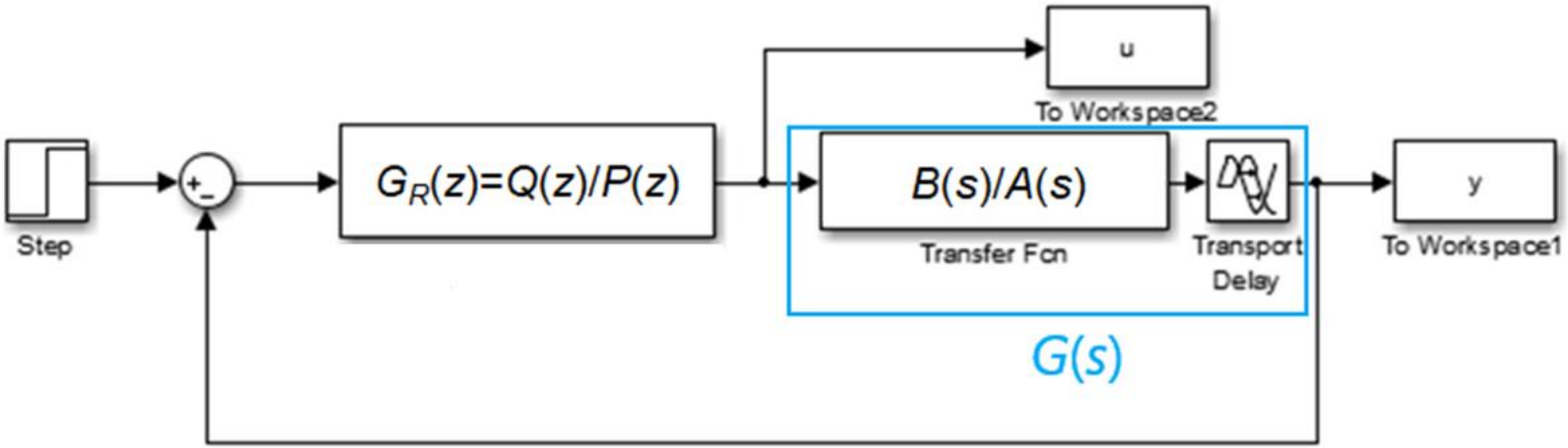
Pre určenie stability jednotlivých častí polynómu $A(z)$ (z_i sú jeho korene) platí:

- pre stabilnú časť $(A^+(z))$ polynómu $A(z)$ platí $|\mathbf{z_i}| < \mathbf{1}$,
  $\boxed{A^+(z) = 1 - 0.5z^{-1}}$
- pre nestabilnú časť $(A^-(z))$ polynómu $A(z)$ platí $|\mathbf{z_i}| \geq \mathbf{1}$,
  $\boxed{A^-(z) = 0.3z^{-1}(1 - 4z^{-1}) = 0.3z^{-1} - 1.2z^{-2}}$

$\boxed{A(z)=A^+(z)\,A^-(z)}$

Metódy sú **založené na algebre polynómov**, umožňujúce navrhovať **všeobecné štruktúry regulátorov**.

Návrh algebraických regulátorov



NÁVRH VŠEOBECNÝCH DISKRÉTNYCH REGULÁTOROV S POUŽITÍM ALGEBRAICKEJ TEÓRIE RIADENIA

Algebraické metódy riadenia je spoločný názov pre metódy analýzy a syntézy dynamických systémov, ktoré vychádzajú z vonkajšieho opisu systému, ktorý chápu ako algebraický objekt. Riadený proces je opísaný diskrétnou prenosovou funkciou. Využijeme polynomické operácie. Matematický aparát sa opiera o algebru a pracuje s algebraickými pojmami ako okruh, obor integrity a teleso.

Cieľom je nastavovanie koeficientov diskrétneho regulátora na základe predpísaných pólov URO za účelom dosiahnuť požadované dynamické vlastnosti systému.

Stabilné časovo optimálne riadenie je riadenie, pri ktorom dosiahneme nulovú trvalú regulačnú odchýlku v konečnom čase, ale oproti klasickému prístupu požadujeme naviac minimalizáciu tohto času. Rozlišujeme viacero prístupov.

1. Návrh všeobecného diskrétneho regulátora, umožňujúceho dosiahnuť stabilné časovo optimálne riadenie – SLABÁ VERZIA

Návrh regulátora vychádza z diskrétneho vyjadrenia spojitého procesu pri danej známej postupnosti referenčnej premennej $w(k)$. Úlohou je navrhnúť taký regulátor $G_R(z)$, aby uzavretý spätnoväzobný obvod bol stabilný, **riadiaci zásah *u*(*k*) bol stabilná postupnosť** a regulačná odchýlka $e(k)$ bola konečná postupnosť trvale nulová od $k \geq k_{MIN}$.

2. Návrh všeobecného diskrétneho regulátora, umožňujúceho dosiahnuť stabilné konečné časovo optimálne riadenie – SILNÁ VERZIA

Návrh regulátora vychádza z diskrétneho opisu spojitého procesu, pre danú žiadanú postupnosť referenčnej premennej $w(k)$. Úlohou je navrhnúť taký regulátor, aby **postupnosť riadiaceho zásahu bola konečná** a regulačná odchýlka $e(k)$ bola taktiež konečná postupnosť trvale nulová od $k \geq k_{MIN}$.

3. Návrh diskrétneho regulátora s obmedzením hodnôt riadiaceho zásahu

Úlohou je navrhnúť všeobecný diskrétny regulátor, pri znalosti vyjadrenia spojite riadeného procesu diskrétnou prenosovou funkciou a znalosti žiadanej referenčnej postupnosti $w(k)$. Návrh regulátora musí zaručiť konečnú postupnosť tak regulačnej odchýlky ako aj riadiaceho zásahu a zároveň splnenie ohraničujúcej podmienky $|u(k)| \leq u_{max}$, kde $u_{max} \epsilon R$, $u_{max} > 0$.

4. Návrh diskrétneho regulátora s použitím dvoch diskrétnych regulátorov

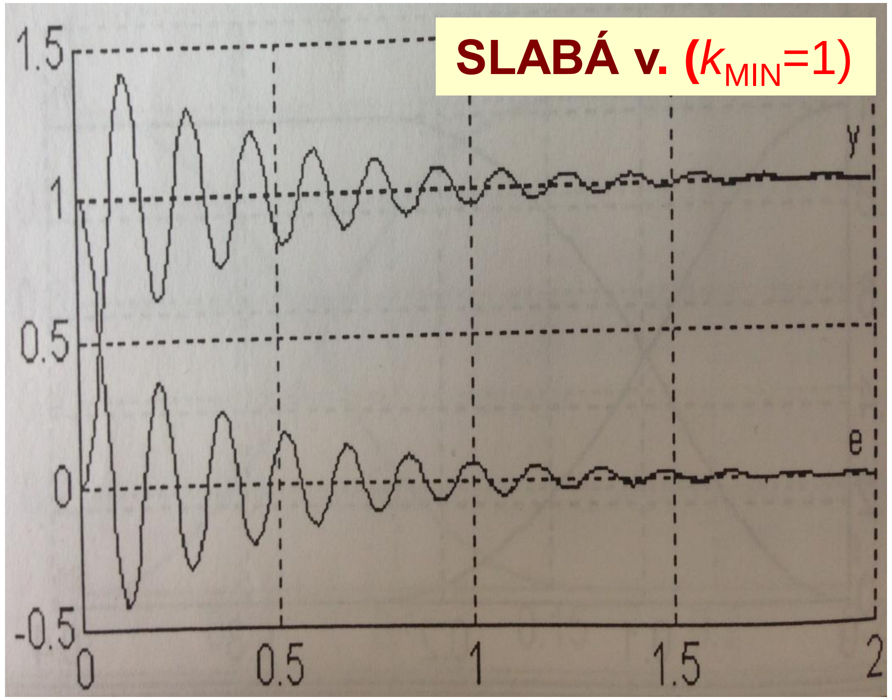
Návrh regulátorov vychádza z diskrétneho vyjadrenia spojitého procesu riadenia pri známej postupnosti referenčnej premennej $w(k)$. Postup je podobný ako v úlohe 1. a 2., s tým rozdielom, že pre návrh regulátorov využívame riešenie dvoch diofantických rovníc. Jeden z regulátorov je zabudovaný do priamej väzby, kým druhý regulátor je v spätnej väzbe.

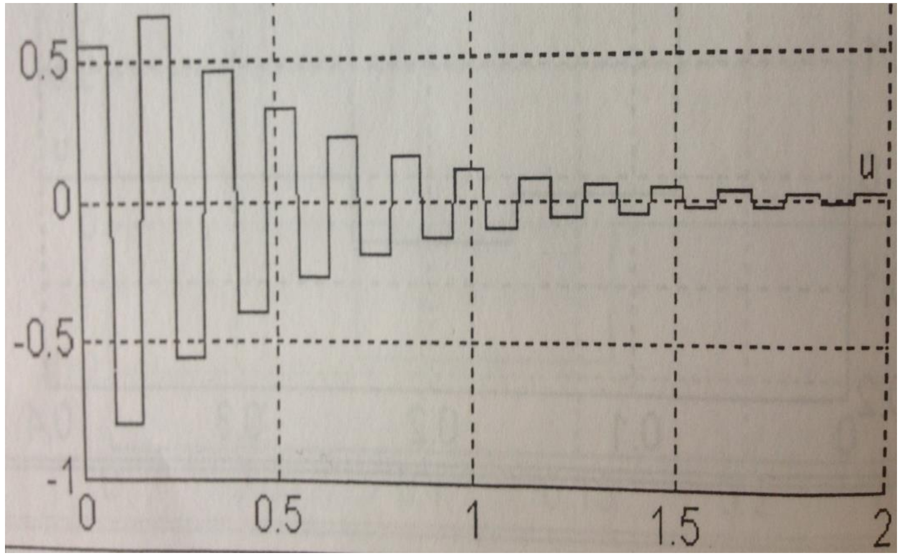
5. Návrh diskrétneho všeobecného regulátora podľa kvadratického kritéria

Úlohou je navrhnúť všeobecný diskrétny regulátor z diskrétnej prenosovej funkcie riadenej spojitej sústavy, pri znalosti žiadanej (referenčnej) postupnosti $w(k)$. Postupnosť hodnôt riadiaceho zásahu je stabilná a štvorec kvadratickej normy regulačnej odchýlky je minimálny t. j. $\| E \|_2 \rightarrow \min$

DOPLNOK – *Časové odozvy veličín pre URO s časovo optimálnym regulátorom a G(s)=100/(0.15s²+s), T=0.08*

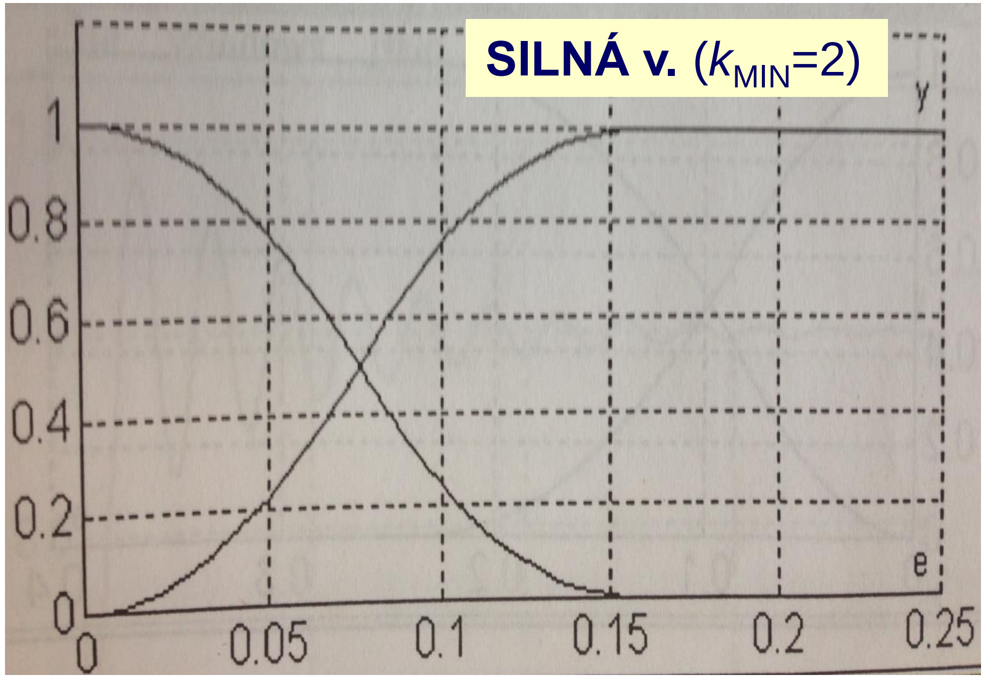
• **stabilné časovo optimálne riadenie** – SLABÁ VERZIA

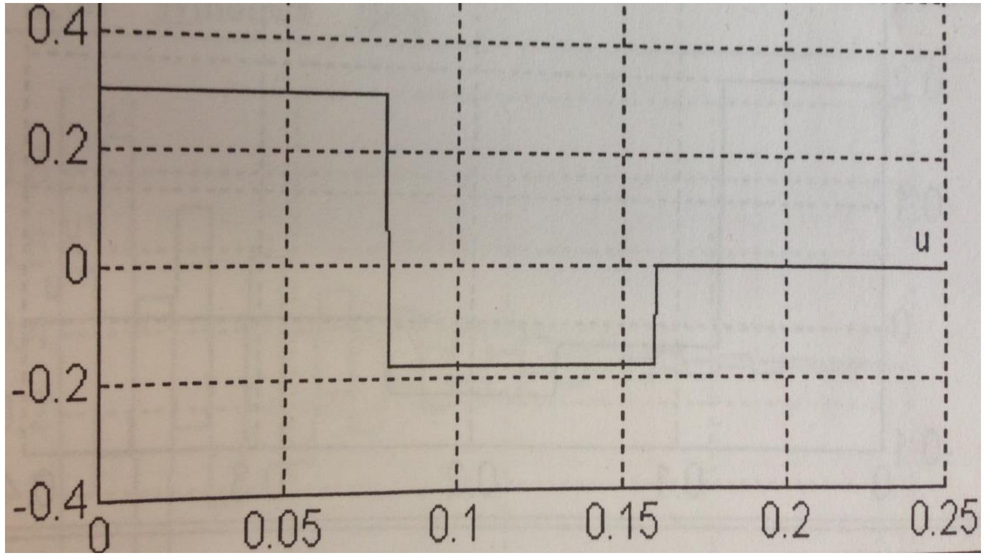




• **konečné časovo optimálne riadenie** – SILNÁ VERZIA

(7. pred.)





Návrh časovo optimálneho stabilného riadenia – teória (1/3)

Pri riadení využijeme blokovú schému URO zo str. 24.

Na vstupe do URO je referenčný signál, pre ktorý platí:

$$\boxed{W(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^+(z)f^-(z)}{g(z)}} \xrightarrow{\text{Jednotkový skok}} \boxed{W(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}}$$

$$f(z) = 1,\ f^+(z) = 1,\ f^-(z) = 1$$
$$g(z) = 1 - z^{-1} \tag{5}$$

Spojitý riadený systém $G(s)$ prepočítame na diskrétnu prenosovú funkciu s tvarovačom 0. rádu (s vhodnou periódou vzorkovania - pomocou príkazu *c2d* v MATLABe).

$$\boxed{G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B^+(z)B^-(z)}{A^+(z)A^-(z)}} \tag{6}$$

Keďže polynóm $g(z)$ je nestabilný, musíme ho nejakým spôsobom vykompenzovať v URO. Nech $D(z)$ je najväčší spoločný deliteľ polynómov $A(z)$ a $g(z)$

$$\boxed{D(z) = \mathrm{d}(A(z), g(z)); \quad A(z) = A_0(z)D(z); \quad g(z) = g_0(z)D(z)} \tag{7}$$

Návrh časovo optimálneho stabilného riadenia – teória (2/3)

Na základe (7) prenosovú funkciu (6) zapíšeme ako

$$\boxed{G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B^+(z)B^-(z)}{A_0^+(z)A_0^-(z)D(z)}}$$

Hľadáme prenosovú funkciu regulátora

$$\boxed{G_R(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}} \qquad (8)$$

Pre charakteristickú rovnicu URO (schéma na str. 23) platí

$$A(z)P(z) + B(z)Q(z) = A_z(z)$$

$$\boxed{A^+(z)A^-(z)P(z) + B^+(z)B^-(z)Q(z) = A_z(z)} \qquad (9)$$

$A_z(z)$ je želaný polynóm, ktorý musí byť stabilný (jeho korene musia ležať v jednotkovej kružnici).

Rovnica (9) je diofantická rovnica, kde hľadáme neznáme polynómy regulátora $Q(z)$ a $P(z)$ (viď (8)). Hľadáme minimálne stupne neznámych polynómov, aby sme navrhli čo najjednoduchší typ regulátora.

Návrh časovo optimálneho stabilného riadenia – teória (3/3)

Na základe znalosti blokovej algebry (schéma na str. 23) s využitím vzťahov (5) a (9) pre regulačnú odchýlku $E(z)$ a akčný zásah $U(z)$ platí:

$$\boxed{E(z) = \frac{A(z)P(z)f(z)}{A_z(z)g(z)}} \qquad \boxed{U(z) = \frac{A(z)Q(z)f(z)}{A_z(z)g(z)}} \tag{10}$$

Na základe (7) bude rovnica (9) upravená:

$$A_0(z)D(z)P(z) + B(z)Q(z) = A_z(z)$$

$$\boxed{A_0^+(z)A_0^-(z)\frac{g(z)}{g_0(z)}P(z) + B^+(z)B^-(z)Q(z) = A_z(z)} \tag{11}$$

S využitím vzťahov (5), (7) a (11) pre regulačnú odchýlku $E(z)$ a akčný zásah $U(z)$ (vzťahy (10)) platí:

$$\boxed{E(z)} = \frac{A_0(z)P(z)f(z)}{A_z(z)g_0(z)} = \boxed{\frac{A_0^+(z)A_0^-(z)P(z)f^+(z)f^-(z)}{A_z(z)g_0(z)}}$$

$$\boxed{U(z)} = \frac{A_0(z)Q(z)f(z)}{A_z(z)g_0(z)} = \boxed{\frac{A_0^+(z)A_0^-(z)Q(z)f^+(z)f^-(z)}{A_z(z)g_0(z)}} \tag{12}$$

Počet krokov riadenia je

$k_{MIN} = \deg(E(z)) + 1$

Návrh časovo optimálneho stabilného riadenia – slabá verzia (1/2)

Úlohou je **určiť diskrétnu prenosovú funkciu regulátora**, ktorý stabilizuje diskrétny regulačný obvod postupnosťou riadiacich zásahov tak, **aby polynóm regulačnej odchýlky bola konečná postupnosť (aby bola regulačná odchýlka nulová za konečný počet krokov - minimálny)**. Tomuto spôsobu riadenia sa hovorí **slabá verzia** ukončenia regulačného pochodu za konečný počet krokov (riadiaci zásah $u(k)$ je stabilná postupnosť).

Voľba charakteristického polynómu $A_z(z)$ pre slabú verziu (teda URO vnútime stabilné póly a stabilné nuly riadeného systému):

$$\boxed{A_z(z) = A_0^+(z)B^+(z)f^+(z)} \qquad (13)$$

Rovnicu (13) dosadíme do (11):

$$A_0^-(z)g(z)\frac{P(z)}{B^+(z)g_0(z)} + B^-(z)\frac{Q(z)}{A_0^+(z)} = f^+(z)$$

a následne upravíme:

$$\boxed{A_0^-(z)g(z)P_0(z) + B^-(z)Q_0(z) = f^+(z)} \qquad (14)$$

Kde sú polynómy regulátora:

$$\boxed{P(z) = B^+(z)g_0(z)P_0(z)} \qquad \boxed{Q(z) = A_0^+(z)Q_0(z)} \qquad (15)$$

Návrh časovo optimálneho stabilného riadenia – slabá verzia (2/2)

Rovnicu (13) dosadíme do (12):

$$\boxed{E(z) = A_0^-(z)P_0(z)f^-(z)}, \qquad \boxed{U(z) = \frac{A_0(z)Q_0(z)f^-(z)}{g_0(z)B^+(z)}}. \tag{16}$$

Pre stupeň polynómu $E(z)$ platí:

$$\boxed{\deg(E(z))} = \deg(A_0^-(z)) + \deg(P_0(z)) + \deg(f^-(z)) = \boxed{\deg(A_0^-(z)) + \deg(B^-(z)) - 1}$$

Počet krokov riadenia je $k_{MIN} = \deg(E(z)) + 1$

Z porovnania vzťahov (12) a (16) je zrejmé, že sme zredukovali stupeň polynómu $E(z)$ o počet stabilných núl riadeného systému a pre ľubovoľné $g_0(z)$ bude $E(z)$ konečná postupnosť (finite time tracking error). Stupeň polynómu $E(z)$ sme znížili aj napriek tomu, že v tomto prípade nebude polynóm $U(z)$ konečná postupnosť, ale bude stabilná. Prenosovú funkciu regulátora získame podľa vzťahu (8).

Slabá verzia garantuje nulovú regulačnú odchýlku za minimálny počet krokov k_{MIN}, ale iba v diskrétnych okamihoch. Mimo nich je regulačná odchýlka nenulová (obvykle rýchlo konverguje k nule). Polynóm $U(z)$ je pomer dvoch polynómov, v origináli nekonečná postupnosť, ktorá signalizuje neustále generovanie akčných zásahov, teda pokračovanie regulácie i po čase dosiahnutia diskrétneho ustálenia.

Príklad 7: Návrh časovo optimálneho stabilného riadenia – slabá verzia (1/5)

Navrhnite časovo optimálne riadenie pre riadený systém s prenosovou funkciou $G(s)=\dfrac{B(s)}{A(s)}=\dfrac{25}{0.1s^2+1.2s+2}\,e^{-0.2s}$

Určte prenosovú funkciu diskrétneho regulátora, postupnosť riadiacich zásahov $U(z)$, regulačnú odchýlku $E(z)$ a výstupnú regulovanú veličinu $Y(z)$ tak, aby trvalá regulačná odchýlka bola nulová v okamihoch vzorkovania, od $k \geq k_{MIN}$ (konečný polynóm) a riadiaca postupnosť bola stabilná (SLABÁ VERZIA). Referenčná premenná $W(z)$ je jednotkový skok.

Riešenie: Hľadáme prenosovú funkciu regulátora (polynómy $Q(z)$ a $P(z)$)

$$\boxed{G_R(z)=\frac{Q(z)}{P(z)}}$$

Na vstupe do URO je referenčný signál, pre ktorý platí:

$$\boxed{W(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}}$$

Diskrétna prenosová funkcia spojitého procesu pre $\boldsymbol{T = 0.2}$ je

$$G(z)=\frac{2.449z^{-2}+1.114z^{-3}}{1-0.8057z^{-1}+0.09072z^{-2}}=\frac{2.449z^{-2}(1+0.4549z^{-1})}{(1-0.6704z^{-1})(1-0.1353z^{-1})}=\frac{B(z)}{A(z)}$$

Príklad 7: Návrh časovo optimálneho stabilného riadenia – slabá verzia (2/5)

Pre polynómy platí:

$$B(z) = 2.4494z^{-2} + 1.1143z^{-3}, \quad B^{-}(z) = 2.4494z^{-2}, \quad B^{+}(z) = 1 + 0.4549z^{-1},$$
$$D(z) = \mathrm{d}(A(z), g(z)) = 1,$$
$$A_0(z) = 1 - 0.8057z^{-1} + 0.09072z^{-2} = (1 - 0.6704z^{-1})(1 - 0.1353z^{-1}) = A_0^{+}(z), \; A_0^{-}(z) = 1,$$
$$g(z) = g_0(z) = 1 - z^{-1}, \quad f(z) = 1, \quad f^{+}(z) = 1, \quad f^{-}(z) = 1$$

Pre charakteristickú rovnicu URO (diofantickú rovnicu) platí $\boxed{A_0^{-}(z)g(z)P_0(z) + B^{-}(z)Q_0(z) = f^{+}(z)}$

$$\boxed{(1 - z^{-1})P_0(z) + 2.449z^{-2}Q_0(z) = 1}$$

Skontrolujeme podmienku riešiteľnosti diofantickej rovnice.
Najväčší spoločný deliteľ $\mathrm{d}(1 - z^{-1}, \; 2.449z^{-2}) = 1$ delí polynóm na pravej strane rovnice.
Diofantická rovnica má teda riešenie.
Ďalej zistíme minimálne stupne neznámych polynómov $P_0(z)$ a $Q_0(z)$

$$\deg(1 - z^{-1}) + \deg(2.449z^{-2}) = 1 + 2 = 3 > \deg(1) = 0,$$
$$\deg(P_0(z)) = \deg(2.449z^{-2}) - 1 = 1 \quad \Rightarrow \boxed{P_0(z) = p_{0_0} + p_{0_1}z^{-1}},$$
$$\deg(Q_0(z)) = \deg(1 - z^{-1}) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{Q_0(z) = q_{0_0}}$$

Príklad 7: Návrh časovo optimálneho stabilného riadenia – slabá verzia (3/5)

Po určení stupňov polynómov $P_0(z)$ a $Q_0(z)$ treba vypočítať ich koeficienty. Dosadíme ich teda do diofantickej rovnice a následným porovnaním jej pravej a ľavej strany pri rovnakých mocninách z dostaneme sústavu lineárnych algebraických rovníc. Ich riešením získame koeficienty polynómov $\boxed{p_{0_0} = 1,\ p_{0_1} = 1,\ q_{0_0} = 0.4083}$.

Polynómy regulátora, prenosová funkcia regulátora a jeho diferenčná rovnica sú:

$$\boxed{P(z) = B^+(z)g_0(z)P_0(z)}$$

$$\boxed{P(z)} = (1 + z^{-1})(1 + 0.4549z^{-1})(1 - z^{-1}) = \boxed{1 + 0.4549z^{-1} - z^{-2} - 0.4549z^{-3}}$$

$$\boxed{Q(z) = A_0^+(z)Q_0(z)}$$

$$\boxed{Q(z)} = 0.4083(1 - 0.8057z^{-1} + 0.09072z^{-2}) = \boxed{0.4083 - 0.329z^{-1} + 0.03704z^{-2}}$$

$$\boxed{G_R(z) = \frac{0.4083 - 0.329z^{-1} + 0.03704z^{-2}}{1 + 0.4549z^{-1} - z^{-2} - 0.4549z^{-3}} = \frac{U(z)}{E(z)}}$$

$$u(k) = -0.4549u(k-1) + u(k-2) + 0.4549u(k-3) + 0.4083e(k) - 0.329e(k-1) + 0.03704e(k-2)$$

Príklad 7: Návrh časovo optimálneho stabilného riadenia – slabá verzia (4/5)

Pre riadiaci zásah a regulačnú odchýlku podľa platí

$$\boxed{U(z) = \frac{0.4083 - 0.329z^{-1} + 0.03704z^{-2}}{1 - 0.5451z^{-1} - 0.4549z^{-2}}},$$
$$\boxed{E(z) = 1 + z^{-1}}$$

Počet krokov regulácie je

$$\boxed{k_{MIN} = 2}$$

Výstupná regulovaná veličina:

$$\boxed{Y(z)} = W(z) - E(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - (1 + z^{-1}) = \boxed{z^{-2} + z^{-3} + \ldots}$$

Výstupná veličina dosiahne žiadanú hodnotu za 2 kroky.

Príklad 7: Návrh časovo optimálneho stabilného riadenia – slabá verzia (5/5)