

Formelzettel Theo 2

Zylinderkoordinaten

Wir verwenden $\vec{x}(r, \phi, z)$ mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{z} \end{pmatrix}.$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

Kugelkoordinaten

Wir verwenden $\vec{x}(r, \phi, \theta)$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \sin \theta \\ r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \phi \sin \theta - r \dot{\phi} \sin \phi \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \phi \cos \theta \\ \dot{r} \sin \phi \sin \theta + r \dot{\phi} \cos \phi \sin \theta + r \dot{\theta} \sin \phi \cos \theta \\ \dot{z} - r \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix}.$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2)$$

Oszillator-Gleichung

$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = c \cos \omega t$. Die homogene Gleichung ($\ddot{x}_{hom} + a\dot{x}_{hom} + bx = 0$) wird mit dem Ansatz $x_h = e^{i\omega t}$ gelöst um ω zu erhalten. Die inhomogene Lösung erhalten wir durch den Ansatz $x_{inh} = Ae^{i\omega t}$ mit $A = |A|e^{i \arctan(Im(A)/Re(A))}$. Die Gesamtlösung ist die Summe $X = X_{hom} + X_{inh}$.

Normalkoordinaten

Ein System wird durch Koordinaten q_i beschrieben. Damit folgen die kinetische und potentielle Energie aus:

$$T = \frac{1}{2} \mathcal{T}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, V = \frac{1}{2} \mathcal{V}_{ik} q_i q_k.$$

Für die Bewegungsgleichungen gilt

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{T} \dot{\vec{q}}) + \mathcal{V} \vec{q} = 0.$$

Andersherum können so auch die Matrizen aus Bewegungsgleichungen abgelesen werden. Wir definieren neue Koordinaten

$$A\vec{u} = B^{-1}\vec{u} = \vec{q}$$

Diese u_i sind *Normalkoordinaten*, wenn $\mathcal{V}a_i = \lambda_i \mathcal{T} \vec{a}_i$.

Die Spalten der Matrix A sind also die Eigenvektoren \vec{a}_i zu den Eigenwerten λ_i welche wir aus dem *charakteristischen Polynom* $\det(\mathcal{V} - \lambda \mathcal{T}) = 0$ erhalten, die \vec{a}_i müssen dabei $\vec{a}_i^T \mathcal{T} \vec{a}_j = \delta_{ij}$ erfüllen, die \vec{a}_i sind also *orthonormal* bezüglich \mathcal{T} . Letztlich gilt dann $u_i = A \cos(\sqrt{\lambda_i} t + \delta_i)$.

Zwangsbedingungen

Zwangsbedingungen der Form $g_i(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = 0$ mit $1 \leq i \leq r$ reduzieren die Freiheitsgrade in d Dimensionen auf $f = dN - r$. Diese Zwangsbedingungen sind *"holonom"*, z.B. die Bewegung auf einer Ebene $\vec{x} \cdot \vec{n} = 0$. *"Nicht-holonom"* Zwangsbedingungen wären z.B. die Bewegung innerhalb einer Kugel $|\vec{x}| - R \leq 0$. *"Rheonome"* Zwangsbedingungen sind zeitabhängig, *"Skleronome"* zeitunabhängig.

Lagrange-Multiplikatoren

Lagrange-Multiplikatoren helfen, die Extrema von Funktionen unter Nebenbedingungen zu finden.

$$\vec{\nabla} f + \lambda \vec{\nabla} g = 0.$$

Jede Zwangsbedingung erzeugt einen

Lagrange-Multiplikator λ_k , also muss insbesondere $\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j} = 0$ gelten.

Zwangskräfte

Die Zwangskraft \vec{Z} zu einer Zwangsbedingung g ist definiert als $\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} g$

Nach Newton folgt

$$\vec{p} = \vec{F} + \vec{Z} \Rightarrow (\vec{p} - \vec{F} - \lambda \vec{\nabla} g) = 0.$$

Lagrange-Gleichungen 1. Art

Die Lagrange-Gleichung 1. Art beschreibt die Bewegung eines Systems unter Zwangsbedingungen: $(\vec{p} - \vec{F} - \lambda \vec{\nabla} g) \delta \vec{x}_{all} g = 0$.

D'Alembertsches Prinzip

Das D'Alembertsche Prinzip besagt, dass die virtuelle Arbeit bei virtuellen Verrückungen $\delta \vec{x}$, welche die Zwangsbedingungen erfüllen, verschwindet. $(\vec{p} - \vec{F}) \delta \vec{x}_{kompatibel} = 0$.

Lagrange-Formalismus

Die verallgemeinerten Koordinaten q_1, \dots, q_f parametrisieren den durch die Zwangsbedingungen eingeschränkten Ortsraum, den *"Konfigurationsraum"*. Die verallgemeinerte Kraft ist $Q_j = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad \forall j \in [1, f]$.

Lagrange-Gleichung 2. Art

Für allgemeine Kräfte gilt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

Für konservative *Potentialkräfte* gilt

$$Q_j = - \frac{\partial V(q_1, \dots, q_j, t)}{\partial q_j}, \text{ daraus ergibt sich}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Lagrange-Funktion

Die Lagrange-Funktion lautet

$$L = T - V$$

Die aus dieser Funktion abgeleiteten Größen

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

heißen *kanonisch konjugierte Impulse*. Wenn

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \text{ ist, nennen wir } q_i \text{ "zyklisch"}$$

Wirkung

Die Wirkung ist das Funktional

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt$$

Hamiltonsches Prinzip

Genau dann wenn $q(t)$ eine extremale Lösung ist, wird die Variation der Wirkung $\delta S[q] = 0$. Die Variation der Wirkung $0 = \delta S[q] = \int_{t_0}^{t_1} dt \delta L(q, \dot{q}, t) = \int_{t_0}^{t_1} dt L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)$ ist eine äquivalente Aussage zu den Lagrange-Gleichungen 2. Art.

Hamilton-Funktion

Die Hamilton-Funktion ergibt sich aus der Lagrange-Funktion über

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^f \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)$$

wobei f die Anzahl an Freiheitsgraden und somit die Anzahl an generalisierten Koordinaten darstellt.

Die totale Zeitableitung ist $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$

Hamiltonsche Gleichungen

Die Hamiltonschen Gleichungen lauten

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

Hamilton-Energie-Beziehung

Die Hamilton-Funktion entspricht der Gesamtenergie unter folgenden Voraussetzungen:

- Alle Zwangsbedingungen *skleronom*

- T ist homogen 2. Grades in \dot{q}_i

- V hängt nicht explizit von \dot{q}_i ab

Insbesondere gilt unter diesen Voraussetzungen auch Energieerhaltung.

Legendre-Transformation

Mit Legendre-Transformationen wird z.B. aus dem Lagrange-Formalismus in den Hamilton-Formalismus gewechselt. Sie lautet

$$f(x) \rightarrow f(u) = xu - f(x) \text{ mit } u = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

oder für mehrere Argumente

$$f(x, y, \dots) \rightarrow f(u, y, \dots) = \sum_i u_i x_i - f(x, y, \dots) \text{ mit}$$

$$u_i = \frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial x_i}$$

Noether-Theorem

Sei eine Transformation gegeben:

$$t \rightarrow t' = t + \delta t$$

$$\vec{x}(t) \rightarrow \vec{x}'(t') = \vec{x}(t) + \delta \vec{x}(t)$$

Damit die Transformation eine Symmetrie darstellt, muss folgende Relation gelten

$$L(x, \dot{x}, t) \rightarrow L(x', \dot{x}', t) = L(x, \dot{x}, t) + \frac{df(\vec{x}, t)}{dt}$$

Das Noether-Theorem liefert die zugehörige

Erhaltungsgröße

$$\vec{p} \delta \vec{x} - H \delta t - f(\delta \vec{x}, \delta t)$$

Kanonische Transformation

Wir definieren neue Koordinaten

$$Q = Q(q, t), P = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}, \text{ sodass sich die}$$

Hamilton-Funktion nur um eine totale Zeitableitung

$$\frac{d}{dt} \Phi(q, p, t) \text{ ändert.}$$

Die erzeugende Funktion dieser Transformation Φ liefert

$$P_j = \frac{\partial \Phi(q, q', t)}{\partial q_j}, P'_j = - \frac{\partial \Phi}{\partial q'_j}, H' - H = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Hamilton-Jacobi-Gleichung

Es existiert eine Transformation $\Phi(q, q', t)$ so dass

$$H' = H(\vec{q}, \vec{\nabla}_q \Phi, t) + \frac{\partial \Phi(q, q', t)}{\partial t} = 0 \text{ "auf Ruhe"}$$

transformiert wird.

Satz von Liouville

Das Phasenraumvolumen ist zeitlich konstant:

$$dq(t)p(t) = dq(0)p(0)$$

$$\Rightarrow \rho(q, p, t) = \rho(q_0, p_0, 0)$$

Stabilität und Chaos

Gegeben sei eine DGL der Form $\dot{\vec{z}} = F(\vec{z})$

Für gewisse *"kritische/singuläre"* Punkte gilt

$$F(\vec{z}_0) = 0$$

Wir linearisieren die DGL um diese Punkte

$$\dot{\vec{z}} = \vec{F}(\vec{z}_0) + \left. \frac{\partial \vec{F}}{\partial z_j} \right|_{\vec{z}=\vec{z}_0} (\vec{z} - \vec{z}_0)_j$$

und definieren dafür $\vec{y} = \vec{z} - \vec{z}_0$

$$\dot{\vec{y}} = A \vec{y} \text{ mit } A_{ij} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial z_j} \right|_{\vec{z}=\vec{z}_0}$$

Die Eigenwerte von A geben das Verhalten im kritischen Punkt an:

$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: Rein imaginärer Eigenwert, stabile Bahn

und Oszillation um kritischen Punkt

$Re(\lambda) < 0$: stabile Bahn, asymptotisches Annähern

an kritischen Punkt durch gedämpfte Schwingung

$Re(\lambda) > 0$: instabile Bahn, exponentielles Entfernen vom kritischen Punkt durch wachsende Schwingung

Informationsentropie

In Mikrozuständen ist die Informationsentropie über eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert.

$$S = \sum_{(j=1)}^{\Omega} -P_j \ln P_j$$

Sie ist ein Maß über die "Unsicherheit" eines

Systems und wird maximal für eine uniforme

$$\text{Verteilung } P_j = 1/\Omega$$

$$S_{max} = \sum_{(j=1)}^{\Omega} -\frac{1}{\Omega} \ln \frac{1}{\Omega} = \ln \Omega.$$

Entropie

Die physikalische *Entropie* wird definiert durch

$$S = k_B \ln \Omega$$

Temperatur & Druck

Die *absolute Temperatur* wird definiert als Änderung der Entropie (\approx Anzahl der möglichen Zustände") pro Energieänderung

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$$

Ähnlich wird der Druck als Änderung der Entropie entlang des Volumens definiert

$$\frac{P}{T} = \frac{\partial S}{\partial V}$$

chemisches Potential

$$\frac{\partial S}{\partial N} = \frac{\mu}{T}$$

Differentielle Entropie

Aus den vorigen Größen ergibt sich

$$dS = \frac{dQ}{T} + \frac{P}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN$$

2. Hauptsatz der Thermodynamik

Für quasistatische Zustandsänderung gilt immer $S \geq 0$.

Wenn dabei $\Delta S = 0$ bleibt, ist der Prozess *"reversibel"*, für $\Delta S > 0$ ist er *"irreversibel"*

Wärmekapazitäten

Die Wärmekapazität ist definiert als

$$c_x = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{x=const}$$

Damit folgt die differentiell Wärme

$$\Rightarrow dQ = \sum_x \left(\frac{dQ}{dT} \right)_x dT$$

Maxwell-Relation

Aus dem Differential $dE = TdS - PdV$ folgt

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S} = \frac{\partial^2 E}{\partial S \partial V} = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = \left(- \frac{\partial P}{\partial S} \right)_V$$

Mit einer Legendre-Transformation

$$E \rightarrow F = E - TS \Rightarrow dF = TdS - PdV - TdS - SdT =$$

$$-PdV - SdT \Rightarrow F = F(V, T) \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V}$$

Folgt der nützliche Zusammenhang

$$\left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = \left(- \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T$$

Enthalpie

Mit einer Legendre-Transformation definieren wir die

$$\text{Enthalpie } H(S, P) = E + PV$$

$$\text{und die "freie" Enthalpie } G(T, P) = E - TS + PV$$

Carnot'scher Wirkungsgrad

Der Wirkungsgrad μ eines Carnot-Prozesses ist das Verhältnis der verrichteten Arbeit zur zugeführten

Wärme $\frac{W}{|Q_1|} = \mu$. Er hängt nur von den

Temperaturen der beiden Wärmereservoirs ab und

$$\text{ist gegeben durch } \mu = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Polynomdivision

Der Ausdruck im Zähler kann mit schriftlicher

Division durch den Nenner dividiert werden.

Beispiel: $\frac{(x^3+2x^2-x+1)}{(x+1)}$. Wir vergleichen die

x-Terme höchster Ordnung (hier zuerst x^3 und x):

$$(x^3 + 2x^2 - x + 1) : (x + 1) = x^2 + \frac{x^2 - x + 1}{x + 1}$$

$$\underline{-(x^3 + x^2)}$$

$$x^2 - x + 1$$

Nach Ausführung aller Schritte lautet der Ausdruck:

$$(x^3 + 2x^2 - x + 1) : (x + 1) = x^2 + x - 2 + \frac{3}{x + 1}$$

$$\underline{-(x^3 + x^2)}$$

$$(x^2 - x + 1)$$

$$\underline{-(x^2 + x)}$$

$$(-2x + 1)$$

$$\underline{-(-2x - 2)}$$

$$3$$

Gekoppelte Punktmassen

Zwei Punktmassen der Massen m_1 und m_2 (mit x_1 und x_2) seien durch eine ideale Feder mit einer Federkonstanten k und Länge L_0 verbunden. Die Bewegung sei auf eine Dimension beschränkt.

- Bestimmen Sie die kinetische Energie T und die potentielle Energie V und leiten sie die Bewegungsgleichungen her.
- Schreiben Sie die kinetische und die potentielle Energie in Matrixform, T und V . Sie können hierbei $\vec{x}_2 = x_2 - L_0$ definieren.
- Entkoppeln Sie das System und bestimmen Sie dessen Normalkoordinaten.
- Interpretieren Sie die beiden Eigenmoden des Systems. Hätte man das schon an den Bewegungsgleichungen von a) sehen können?

Ansatz a) $m_i(\ddot{x}) = F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$ mit $T = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$, $V = \frac{1}{2} k(x_2 - x_1 - L_0)^2 \Rightarrow \dot{x}_1' = \frac{k}{m_1} (x_2 - x_1 - L_0)$, $\ddot{x}_2 = -\frac{k}{m_2} (x_2 - x_1 - L_0)$

Ansatz b)

$T\ddot{x} + Vx = 0 \Rightarrow T = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$

Ansatz c) Eigenwerte:

$\det(V - \lambda T) = 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} k - \lambda m_1 & -k \\ -k & k - \lambda m_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = k \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} = \frac{k}{\mu}$

Eigenvektoren:

$(V - \lambda T)\vec{v} = 0 \Rightarrow \lambda_1 : \begin{pmatrix} k - 0 & -k \\ -k & k - 0 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = 0 \rightarrow \vec{v}_1 =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 : \begin{pmatrix} k - \frac{k}{\mu} m_1 & -k \\ -k & k - \frac{k}{\mu} m_2 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = 0 \rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -m_2 \\ m_1 \end{pmatrix}$

Normierung: $\vec{n}_1^T T \vec{n}_j = \delta_{ij}$ mit Normierungsfaktor

$\vec{n}_i = N_i \vec{v}_i \cdot N_1 = \frac{1}{\sqrt{m_1+m_2}} \rightarrow \vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{m_1+m_2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, N_2 =$

$\frac{1}{\sqrt{m_1^2 m_2 + m_1 m_2^2}} \rightarrow n_2 = \frac{1}{\sqrt{m_1^2 m_2 + m_1 m_2^2}} \begin{pmatrix} -m_2 \\ m_1 \end{pmatrix}$

Interpretation d) \vec{v}_1 beschreibt eine Bewegung des Gesamtsystems in eine Richtung, \vec{v}_2 beschreibt eine gegenphasige Bewegung der Massen

Flucht von einem Tisch

Gegeben sei ein Tisch in der (x,y) -Ebene mit einem Loch im Ursprung. Eine Masse m kann sich reibungsfrei auf dem Tisch bewegen und wird über ein masseloses Seil der Länge l in konstanter Geschwindigkeit u in die Mitte gezogen. Zu Beginn ist das Seil in voller Länge auf dem Tisch und die Masse hat eine Geschwindigkeit $\vec{v}(0) = v_0 \vec{e}_\phi$.

- Stellen sie die Zwangsbedingung und die Lagrangefunktion auf.
- Nutzen sie die Lagrange-Gleichungen 2. Art um Erhaltungsgrößen und ggf. zyklische Koordinaten zu identifizieren.
- Berechnen sie die Bahnkurve $r(\phi)$ indem sie $\frac{d\phi}{dr}$ betrachten. Verwenden sie ihre Ergebnisse aus a) und b).

Ansatz a) Wir verwenden Polarkoordinaten, die Zwangsbedingung entsteht durch die Länge des Seils auf dem Tisch: $r(t) = l - ut$. $L = T - V$. V ist 0 weil die Masse auf dem Tisch bleibt. T erhalten wir mit

$x = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{x} = \dot{r} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} + r \cdot \dot{\phi} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \Rightarrow L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) = \frac{m}{2} (u^2 + (l - ut)^2 \dot{\phi}^2)$

Ansatz b) $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$. In unserem Fall ist $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$,

da L nicht von ϕ abhängt. $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi} \Rightarrow \frac{d}{dt} mr^2 \dot{\phi} = 0$.

Dies ist die Erhaltungsgröße Drehimpuls. Wir erhalten seinen Betrag über $t = 0$: $p_\phi(t = 0) = m(\vec{r}(0) \times \vec{v}(0)) =$

$mlv_0 \vec{e}_z \Rightarrow p_\phi = mlv_0 \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} = \frac{v_0 l}{r^2}$.

Ansatz c) $\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} \Rightarrow d\phi = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} dr$. Unter

Verwendung von b) erhalten wir $\frac{d\phi}{dr} = -\frac{lv_0}{ur^3} \Rightarrow d\phi = -\frac{lv_0}{ur^2} dr \Rightarrow \phi - \phi_0 = \frac{lv_0}{u} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r} \right) \Rightarrow r(\phi) = \frac{1}{\frac{1}{r_0} + \frac{l}{v_0} (\phi - \phi_0)}$

Perle auf rotierendem Draht

Ein masseloser Draht ist im Punkt $\vec{P} = (0, 0, \alpha), 0 < \alpha < \pi$ befestigt. Er rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse. Eine Masse m kann sich reibungsfrei entlang des Drahtes bewegen.

- Wählen sie geeignete Koordinaten für die Masse und bestimmen sie die Lagrange-Funktion.
- Wie lautet der konjugierte Impuls zu Ihren Koordinaten? Ist die Koordinate zyklisch?
- Bestimmen sie die Hamilton-Funktion. Entspricht sie der Gesamtenergie? Sind beide zeitlich erhalten?
- Berechnen sie die kanonischen Bewegungsgleichungen für die Perle.

Ansatz a) Kugelkoordinaten $\vec{r} = r\vec{e}_r + a\vec{e}_z$ mit $\vec{e}_r = (-\sin \theta \cos \phi, -\sin \theta \sin \phi, -\cos \theta$ und $L = T_V$. Unser Ortsvektor ist $\vec{r} = r\vec{e}_r + r\vec{e}_r = \dot{r}\vec{e}_r - r\omega \sin(\alpha)(-\sin \phi, \cos \phi, 0) \Rightarrow T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2 \sin^2 \alpha), V = mgz = -mgr \cos \theta \Rightarrow L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2 \sin^2 \alpha) + mgr \cos \alpha$.

Ansatz b) Wir betrachten $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$ und $\frac{\partial L}{\partial r}$. $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ ist der Impuls. Wegen $\frac{\partial L}{\partial r} \neq 0$ ist r nicht zyklisch.

Ansatz c)

$H(p, r) = p\dot{r} - L \Rightarrow H = \frac{m}{2} (\frac{p^2}{m^2} - r^2 \omega^2 \sin^2 \alpha) -$

$mgr \cos \alpha \neq E = \frac{m}{2} (\frac{p^2}{m^2} + r^2 \omega^2 \sin^2 \alpha) + mgr \cos \alpha$. Aus

$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ folgt dass H erhalten ist, während E es nicht ist.

Ansatz d) Wir nutzen die Hamiltongleichungen

$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial r} = mr\omega^2 \sin^2 \alpha + mg \cos \alpha \Rightarrow \ddot{r} =$

$\frac{\dot{p}}{m} = r\omega^2 \sin^2 \alpha + g \cos \alpha$. Diese DGL wird durch Sinus/Cosinus hyperbolicus gelöst, $r(t) = r_1 \sinh(\sin \alpha \omega t) + r_2 \cosh(\sin \alpha \omega t) + \frac{g \cos \alpha}{\sin \alpha \omega^2}$.

Doppelt schiefe Ebene

Zwei Massenpunkte m_1 und m_2 , verbunden durch ein masseloses Seil der Länge L bewegen sich reibungsfrei auf einer doppelten schiefen Ebene unter dem Einfluss der Schwerkraft. Die schiefen Ebenen sind dabei um $0 < \alpha, \beta < \pi/2$ geneigt. Betrachten sie den Fall mit m_1 auf der linken und m_2 auf der rechten Seite.

a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen mithilfe der Lagrange-Gleichungen erster Art.

b) Unter welcher Bedingung bleiben die Massen in Ruhe?

Wie groß ist die Fadenspannung (Zwangskraft entlag des Seiles) in dieser Ruhelage?

c) Wählen Sie geeignete generalisierte Koordinaten, bestimmen Sie die Lagrange-Funktion sowie die Bewegungsgleichung mithilfe der Lagrange-Gleichung zweiter Art.

Ansatz a) Aufstellen der Zwangsbedingungen, Lagrange 1.

Art: $\vec{F}_g - m_i \ddot{\vec{x}}_i + \sum_j^3 \lambda_j \nabla_i f_j = 0$. Die 3

Zwangsbedingungen sind durch die beiden Ebenen und die Seillänge gegeben: $f_1(x_1, y_1) = x_1 \tan \alpha - y_1 = 0, f_2(x_2, y_2) = x_2 \tan \beta - y_2 = 0, f_3 = L = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = x_1 \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} + x_2 \sqrt{1 + \tan^2 \beta}$.

Mit der externen Kraft $\vec{F}_i = -m_i \ddot{\vec{y}}_i$ ergibt sich für den Massenpunkt m_1 : $-m_1 \ddot{x}_1 + \lambda_1 \nabla_1 f_1 + \lambda_2 \nabla_1 f_2 + \lambda_3 \nabla_1 f_3 = 0$ bzw.

$\ddot{x}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2$ folgen die BwGL: ①: $m_1 \ddot{x}_1 = \lambda_1 \tan \alpha + \frac{\lambda_3}{\cos \alpha}$, ②:

$m_1 \ddot{y}_1 = -\lambda_1 - m_1 g$, ③: $m_2 \ddot{x}_2 = \lambda_2 \tan \beta - \frac{\lambda_3}{\cos \beta}$, ④:

$m_2 \ddot{y}_2 = -\lambda_2 - m_2 g$. (Außerdem wissen wir aus den Zwangsbedingungen dass $\dot{y}_1 = \dot{x}_1 \tan \alpha, \dot{y}_2 = -\dot{x}_2 \tan \beta = -\dot{x}_1 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \tan \beta = -\dot{x}_1 \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$.)

Die Gleichungen ①, ②, ③, ④ können jeweils nach λ gelöst und eingesetzt werden und ergeben am Ende

$\ddot{x}_1 = g \cos \alpha \frac{m_2 \sin \beta - m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2}$

Ansatz b) Die Ruhebedingung lautet

$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0$. Damit diese Bedingung für beliebige Winkel α, β gilt, muss der Term im Zähler, $m_2 \sin \beta - m_1 \sin \alpha$, 0 werden

$\Rightarrow m_2 \sin \beta - m_1 \sin \alpha = 0 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$.

Die Seilspannung ist $S = \vec{z}_1 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \vec{z}_2 \begin{pmatrix} -\cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$. Dabei sind

$\vec{z}_1 = \sum_j \lambda_j \nabla_1 f_j = \frac{1}{\cos \alpha} [\lambda_1 \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}], \vec{z}_2 =$

$\sum_j \lambda_j \nabla_1 f_j = \frac{1}{\cos \beta} [\lambda_2 \begin{pmatrix} \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix} - \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$

$\Rightarrow S = \lambda_3 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g(\sin \beta + \sin \alpha)$

Gekoppelte Schwingungen

Ein ebenes mathematisches Pendel der Länge L mit Masse m ist im Schwerfeld der Erde an einer Masse M aufgehängt und schwingt in der x–y-Ebene. Die Bewegung der Masse M , die durch eine Feder der Federkonstante k mit der Wand verbunden ist, sei auf die x-Achse beschränkt.

- Wählen Sie geeignete Koordinaten und bestimmen Sie die Lagrange-Funktion.
- Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen mit den Lagrange-Gleichungen zweiter Art.
- Bestimmen Sie die Eigenschwingungen des Systems unter der Annahme kleiner Auslenkung $\phi \ll 1$.

Ansatz a) Wir wählen $q_1 = X$ (Auslenkung der Masse M), $q_2 = \phi$ (Winkelauslenkung der Masse m). $L = T - V = \frac{1}{2} (M + m) \dot{X}^2 + \frac{1}{2} mL^2 \dot{\phi}^2 + mL\dot{X}\dot{\phi} \cos \phi - \frac{1}{2} kX^2 + mgL \cos \phi$

Ansatz b) Die Euler-Lagrange-Gleichungen $(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} - \frac{\partial L}{\partial X} = 0)$ liefern bezüglich der generalisierten

Koordinaten: $(M + m) \ddot{X} + mL(\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) = -kX$ und $\ddot{X} \cos \phi + L\ddot{\phi} = -g \sin \phi$

Ansatz c) Linearisierung für $\phi \ll 1 \Rightarrow \sin \phi \approx \phi, \cos \phi \approx 1$. Die Matrizen T, V erfüllen $T\ddot{q} + Vq = 0$. $(M + m) \ddot{X} + mL\ddot{\phi} = kX, \ddot{X} + L\ddot{\phi} = -g\phi \Rightarrow T = \begin{pmatrix} M + m & m \\ m & mL \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mg/L \end{pmatrix}$. Das Eigenwertpolynom

det $(T - \lambda V) = 0 \Rightarrow (M + m - \lambda k)(m - \lambda mg/L) - m^2 = 0$ kann nach λ gelöst werden, welche die Eigenfrequenzen $\lambda_{1,2} = \omega_{1,2}^2$ darstellen.

Hängende Kette

Bestimmen Sie die Form einer hängenden Kette homogener Dichte mit Masse m und Länge L . Parametrisieren Sie die Kette durch $(x, h(x))$, zwischen de beiden Aufhängepunkten $(-a, b)$ und (a, b) .

a) Die Kette hängt so, dass die potentielle Energie minimal ist. Stellen Sie das Funktional $F[h]$ der potentiellen Energie auf.

- Die Länge der Kette liefert eine Zwangsbedingung, die man mit einem Lagrange-Multiplikator berücksichtigen muss. Stellen Sie das Funktional $G[h]$ dieser Zwangsbedingung auf.
- Die Minimierungsbedingung lautet nun $\delta(F[h] + \lambda G[h]) = 0$. Variieren Sie dieses Funktional nach $h(x)$ und zeigen Sie, dass die erhaltene Differentialgleichung als $(g')^2 - g'' + 1 = 0$ geschrieben werden kann, wobei $g(x) = h(x) + \lambda L/(mg)$.

d) Leiten sie ab, dass $(\frac{g'}{g})' = 0$ gilt.

e) Die beiden Lösungsmöglichkeiten der letzten Differentialgleichung lauten

$g_1(x) = A \cos(\sqrt{cx}) + B \sin(\sqrt{cx})$ und

$g_2(x) = A \cosh(\sqrt{cx}) + B \sinh(\sqrt{cx})$ wobei $c > 0$.

Argumentieren sie, warum $B = 0$ sein muss.

f) Zeigen Sie durch Einsetzen dass nur der Ansatz mit Cosinus hyperbolicus möglich ist.

Ansatz a) $F[h] = \int dmgh = \int ds \frac{m}{L} gh(s)$. Mit

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$ folgt

$F[h] \frac{m}{L} \int_a^a dx \sqrt{1 + h'(x)^2} h(x)$.

Ansatz b) $\int ds = L \Rightarrow G[h] = \int_a^a dx \sqrt{1 + h'(x)^2} - L = 0$.

Ansatz c) $\delta(F[h] + \lambda G[h]) = 0 \Rightarrow$

$\delta(\int_a^a dx \sqrt{1 + h'(x)^2} (\lambda + mgh(x)/L) - \lambda L)$. Wir definieren

$L = \int_a^a + h'(x)^2 (\lambda + mgh(x)/L)$ und verwenden Euler-Lagrange:

$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial h'} - \frac{\partial L}{\partial h} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} (\frac{h'}{\sqrt{1+h'^2}} (\frac{\lambda L}{mg} - h)) - \sqrt{1 + h'^2}$.

Wir definieren weiter

$g = \frac{\lambda L}{mg} + h, g' = h' \Rightarrow \frac{d}{dx} (\frac{-gg'}{\sqrt{1+g'^2}}) - \sqrt{1 + g'^2} =$

$\frac{g'^2 + gg''}{1+g'^2} - \frac{gg'^2 g''}{\sqrt{1+g'^2}^3} - \sqrt{1 + g'^2} = 0 \Rightarrow$

$(1 + g'^2)(g'^2 + gg'') - (gg'^2 g'') - (1 + g'^2)^2 = 0 \Rightarrow$

$gg'' + gg'^2 g'' - 1 - g'^2 - gg'^2 g'' = 0 \Rightarrow gg'' - 1 - g'^2 = 0$.

Ansatz d) $g''g = g'^2 + 1 \Rightarrow \frac{g''}{g} = \frac{g'^2 + 1}{g^2} \Rightarrow (\frac{g''}{g})' =$

$(\frac{-g'}{g^2})g = \frac{g'^2 + 1}{g^2} \cdot g' = \frac{2g^2 g' g'' - 2g g'^2 (g'^2 + 1)}{g^4} =$

$\frac{2g'}{g^3} (gg'' - g'^2 - 1) = 0$.

Ansatz e) Verwenden der Randbedingungen, da $g(a) = g(-a) = 0 \Rightarrow g_1(a) - g_1(-a) = 2B \sin(\sqrt{ca}) \Rightarrow B = 0$, ebenso $g_2(a) \sin \sinh \Rightarrow B = 0$.

Ansatz f) Überprüfen durch Einsetzen in $g'^2 - gg'' + 1$: Mit $g_1(x)$ ist

$A^2 c \sin \sqrt{cx^2} + A^2 c \cos \sqrt{cx} + 1 = A^2 c + 1 > 0 \neq 0$, mit $g_2(x)$ ergibt sich $A^2 c \sinh \sqrt{cx^2} - A^2 c \cosh \sqrt{cx} + 1 = -A^2 c + 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{c} = 1/A$.

Informationsentropie

Gegeben sei eine Menge, A, A, B, C, C und man ziehe nacheinander 3 Elemente aus der Menge, im Versuch 1 mit und Versuch 2 ohne Zurücklegen.

a) Zeichnen Sie den Entscheidungsbaum und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Ergebnisse für beide Versuche.

b) Berechnen Sie die Informations-Entropie nachdem jeweils 1, 2, und 3 Elemente gezogen wurden. Welcher Versuch enthält mehr Unsicherheit?

Ansatz a) Verwendung der Informationsentropie

$S = -\sum_{i=1}^n -P_i \ln_2 P_i$ mit

$P_i = P(BAA) + P(CAA) + ... + P(BCC)$ mit allen erzeugten Kombinationen. In beiden Versuchen sind **Permutation die W-keiten von Permutationen identisch** $P(AAB) = P(ABA) = P(BAA)$, was die Summe vereinfacht.

Versuch 1:

$N(AAA) = 1$ Permutation, $P(AAA) = 8/125$

$N(AAB) = 3$ Permutationen, $P(AAB) = 4/125$

...

$N(CCC) = 1$ Permutation, $P(CCC) = 8/125$

$S_1(1) = P(A) \ln P(A) + P(B) \ln P(B) + P(C) \ln P(C)$

$S_1(2) =$

$P(AA) \ln P(AA) + P(AB) \ln P(AB) + ... + P(CC) \ln P(CC)$

$S_1(3) = N(AAA)P(AAA) \ln P(AAA) + ... + N(CCC)P(CCC) \ln P(CCC)$

Versuch 2:

$N(AAB) = 3$ Permutation, $P(AAB) = 2/60$

$N(AAC) = 3$ Permutationen, $P(AAC) = 4/60$

...

$N(BCC) = 1$ Permutation, $P(BCC) = 2/60$

$S_2(1) = P(A) \ln P(A) + P(B) \ln P(B) + P(C) \ln P(C)$

$S_2(2) =$

$P(AA) \ln P(AA) + P(AB) \ln P(AB) + ... + P(CC) \ln P(CC)$

$S_2(3) = N(AAB)P(AAB) \ln P(AAB) + ... + N(BCC)P(BCC) \ln P(BCC)$

Statistik ideales Gas

Die Zustandssumme für ein ideales Gas mit N Gasteilchen der Masse m im Volumen V lautet für große N in guter Näherung $\Omega(E) = (\frac{m}{3\pi h^2})^{3N/2} e^{5N/2} (\frac{V}{N})^N (\frac{E}{N})^{3N/2}$.

a) Berechnen sie die Entropie des Gases.

b) Leiten sie die Energie als Funktion der Temperatur T her.

c) Bestimmen sie nun die Zustandsgleichung des Gases, indem sie die Entropie partiell nach dem Volumen ableiten.

Ansatz a) Einsetzen in die Entropie

$S = k_B \ln \Omega \Rightarrow S = k_B (\ln (\frac{m}{3\pi h^2})^{3N/2} e^{5N/2} + N \ln V - N \ln N + 3N/2 \ln E - 3N/2 \ln N)$.

Ansatz b) Temperatur ergibt sich aus

$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{3}{2} k_B \frac{1}{E} \Rightarrow T = \frac{2}{3 N k_B} E$.

Ansatz c) $\frac{\partial S}{\partial V} = k_B N \frac{1}{V} = \frac{P}{T} \Rightarrow pV = N k_B T$.

Wärmekapazitäten Gas

Für viele Gase, bei denen die Wechselwirkung zwischen Teilchen vernachlässigbar ist, lautet die Zustandsgleichung $P(V - \nu b) = \nu RT$.

a) Berechnen sie die Differenz der Wärmekapazitäten bei konstantem Druck (C_P) und konstantem Volumen (C_V)

gegeben durch $C_P - C_V = -T (\frac{\frac{\partial V}{\partial T}}{(\frac{\partial P}{\partial T})^2}$.

b) Vergleichen sie mit der Differenz der Wärmekapazitäten für ideales Gas.

Ansatz a)

$V = \nu RT/p + \nu b \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial T} p = -\frac{\nu R}{p}, \frac{\partial V}{\partial p} T = -\frac{\nu RT}{p^2$