´i1.1.64

# Obsah

# Kapitola 1

# Posloupnosti a řady funkcí více proměnných

## 1.1 Co zpracovat:

1. je ale $\mathscr{C}(\langle a,b\rangle)$ úplný? (není) - zmínit, okomentovat a vložit asi jako poznámku za poznámku 2.2.12, možná na vhodném místě zmínit definici úplnosti (možná už to někde je, teď si nejsem jistej)

### 1.1.1 Definice

Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbf{E}^r$. Potom každé zobrazení množiny $\mathbf{N}$ do množiny všech funkcí definovaných na $M$ nazýváme *posloupností funkcí* na $M$. Je-li číslu $n \in \mathbf{N}$ tímto způsobem přiřazena funkce $f_n(\vec{x})$, zapisujeme funkční posloupnost

$$f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots \qquad \text{nebo} \qquad \big(f_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}. \tag{1.1}$$

Přirozené číslo $n$ přitom nazýváme *indexem* a funkci $f_n(\vec{x})$ $n-$tým členem posloupnosti (1.1).

### 1.1.2 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (1.1) definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Řekneme, že posloupnost funkcí (1.1) *konverguje v bodě* $\vec{c} \in M$, jestliže konverguje číselná posloupnost $\big(f_n(\vec{c})\big)_{n=1}^{\infty}$, tj. existuje-li $\gamma \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje přirozené $n_0$ tak, že pro všechna $n \geqslant n_0$ platí nerovnost $\big|f_n(\vec{c}) - \gamma\big| < \varepsilon$. Řekneme, že posloupnost funkcí (1.1) *konverguje (bodově) na množině* $N \subset M$, jestliže konverguje v každém bodě množiny $N$.

### 1.1.3 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (1.1) definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Nechť pro každé $\vec{c} \in N$, kde $N \subset M$, posloupnost $\big(f_n(\vec{c})\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje. Označme $f(\vec{c})$ hodnotu limity posloupnosti $\big(f_n(\vec{c})\big)_{n=1}^{\infty}$. Tímto způsobem je na množině $N$ definována funkce $\vec{x} \mapsto f(\vec{x})$, kterou nazýváme *limitou posloupnosti funkcí* (1.1) (nebo zkráceně *limitní funkcí*) a značíme

$$f(\vec{x}) = \lim_{n\to\infty} f_n(\vec{x}).$$

*Oborem konvergence* $\mathcal{O}$ posloupnosti (1.1) nazýváme množinu všech bodů $\vec{c} \in M$, ve kterých tato posloupnost konverguje.

### 1.1.4 Definice

Nechť (1.1) je posloupnost funkcí definovaných na množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Řekneme, že tato posloupnost *stejnoměrně konverguje na* $M$ k funkci $f(\vec{x})$, jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $n_0$ tak, že pro všechna $n \geqslant n_0$ a pro všechna $\vec{x} \in M$ platí nerovnost $\big|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\big| < \varepsilon$.

### 1.1.5 Poznámka

Bodovou konvergenci značíme obyčejně symbolem $f_n(\vec{x}) \to f(\vec{x})$, stejnoměrnou pak $f_n(\vec{x}) \rightrightarrows f(\vec{x})$. Rozdíl mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí je dobře patrný z kvantifikátorového zápisu definic obou pojmů:

- bodová konvergence

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall \vec{x} \in M)\,(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \qquad n \in \mathbf{N} \wedge n \geqslant n_0 \Rightarrow \big|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\big| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

- stejnoměrná konvergence

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \qquad n \in \mathbf{N} \wedge n \geqslant n_0 \wedge \vec{x} \in M \Rightarrow \left|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Stejnoměrná konvergence tedy požaduje existenci "univerzálního"$n_0$, které plní svoji roli pro všechna $\vec{x} \in M$.

### 1.1.6 Věta – *Bolzanova-Cauchyova podmínka*

Posloupnost funkcí (1.1) je stejnoměrně konvergentní na $M \subset \mathbf{E}^r$ právě tehdy, když splňuje tzv. *Bolzanovu-Cauchyovu podmínku* tvaru

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \qquad m, n \geqslant n_0 \wedge \vec{x} \in M \Rightarrow \left|f_n(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\right| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

*Důkaz:*

- První implikace:
  - nechť $\left(f_n(\vec{x})\right)_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje na $M$ k jisté funkci $f(x)$
  - pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro libovolná $m, n \in \mathbf{N}$ taková, že $m, n \geqslant n_0$, a pro všechna $\vec{x} \in M$ platí
  $$\left|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad |f_m(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$$
  - a tedy
  $$\left|f_n(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\right| \leqslant \left|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right| + \left|f_m(\vec{x}) - f(\vec{x})\right| < \varepsilon$$
- Druhá implikace:
  - nechť posloupnost funkcí splňuje vztah (1.4)
  - podle Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro číselné posloupnosti posloupnost (1.1) konverguje bodově k jisté funkci na množině $M$ (označme ji $f(\vec{x})$)
  - chceme dokázat $f_n(\vec{x}) \rightrightarrows f(\vec{x})$ na $M$
  - zvolme $\varepsilon > 0$ a k číslu $\frac{\varepsilon}{2}$ vyberme podle (1.4) $n_0$ tak, aby pro všechna $m, n \geqslant n_0$ platilo
  $$\left|f_n(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$
  - pro libovolné pevně zvolené $n \geqslant n_0$ a pro $m$ rostoucí nade všechny meze pak odsud dostaneme nerovnost $\left|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$ platnou pro každé $\vec{x} \in M$
- tím je důkaz zkompletován

### 1.1.7 Věta – *supremální kritérium*

Nechť $f(\vec{x})$ a $f_n(\vec{x})$ pro všechna $n$ jsou funkce definované na množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Označme

$$\sigma_n := \sup_{\vec{x} \in M} \left|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right|$$

pro každé $n$. Pak posloupnost funkcí $\left(f_n(\vec{x})\right)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množině $M$ stejnoměrně k funkci $f(\vec{x})$ právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

*Důkaz:*

- pro všechna $\vec{x} \in M$ a všechna $n \in \mathbf{N}$ zřejmě platí nerovnost $\left|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right| \leqslant \sigma_n$
- První implikace:
  - předpokládejme, že $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$
  - z definice limity číselné posloupnosti $\left(\sigma_n\right)_{n=1}^{\infty}$ plyne, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $n_0$ takové, že $|\sigma_n| = \sigma_n < \varepsilon$ pro všechna $n \geqslant n_0$
  - to značí (jak vyplývá z definice suprema), že pro všechna $n \geqslant n_0$ a všechna $\vec{x} \in M$ platí také $\left|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right| < \varepsilon$, a tedy $f_n(\vec{x}) \rightrightarrows f(\vec{x})$ na $M$

- Druhá implikace:
  - předpokládejme, že $f_n(\vec{x}) \rightrightarrows f(\vec{x})$ na $M$
  - zvolme libovolné $\varepsilon > 0$, k němuž jistě existuje $n_0$ takové, že pro všechna $n \geqslant n_0$ a všechna $\vec{x} \in M$ platí nerovnost $\big|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\big| < \varepsilon/2$
  - odtud a z vlastností suprema plyne, že pro $n \geqslant n_0$ platí $\sigma_n \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$, a tedy $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$

### 1.1.8 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (1.1) definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Potom nekonečný součet

$$f_1(\vec{x}) + f_2(\vec{x}) + \ldots + f_n(\vec{x}) + \ldots$$

nazýváme *řadou funkcí* na $M$ a značíme symbolem

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}). \tag{1.5}$$

### 1.1.9 Definice

Nechť je dána funkční řada (1.5) definovaná na množině $M$. Funkci $s_n(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} f_k(\vec{x})$ pro $n \in \mathbf{N}$ a $\vec{x} \in M$ budeme nazývat $n-$*tým částečným součtem* řady (1.5) a posloupnost $\big(s_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ pak *posloupností částečných součtů* dané řady.

### 1.1.10 Definice

Nechť je dána funkční řada (1.5) definovaná na množině $M$. Nechť $\big(s_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ je příslušná posloupnost částečných součtů. Řekneme, že řada (1.5) *konverguje v bodě* $\vec{c} \in M$, jestliže konverguje číselná posloupnost $\big(s_n(\vec{c})\big)_{n=1}^{\infty}$. Řekneme, že řada (1.5) *konverguje (bodově)* na množině $N \subset M$, jestliže konverguje v každém bodě množiny $N$. Vlastní limitu

$$s(\vec{x}) := \lim_{n\to\infty} s_n(\vec{x})$$

posloupnosti částečných součtů pak nazýváme *součtem řady* (1.5) a zapisujeme

$$s(\vec{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}). \tag{1.6}$$

Definiční obor $\mathrm{Dom}(s)$, tj. množinu všech $\vec{c} \in M$, pro něž posloupnost $\big(s_n(\vec{c})\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje, budeme dále nazývat *oborem konvergence řady* (1.5) a značit symbolem $\mathcal{O}$.

### 1.1.11 Definice

Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ konverguje na množině $M \subset \mathbf{E}^r$ *stejnoměrně* ke svému součtu $s(\vec{x})$ a označíme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}) \overset{M}{\equiv} s(\vec{x})$, jestliže posloupnost jejích částečných součtů konverguje na $M$ stejnoměrně k funkci $s(\vec{x})$.

### 1.1.12 Věta – *Bolzanova-Cauchyova podmínka*

Řada funkcí (1.5) konverguje na množině $M \subset \mathbf{E}^r$ stejnoměrně právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbf{N}$ takový, že pro jakékoli dva indexy $m, n \in \mathbf{N}$ takové, že $m \geqslant n \geqslant n_0$ a pro jakékoliv $\vec{x} \in M$ je splněna nerovnost

$$\big|f_n(\vec{x}) + f_{n+1}(\vec{x}) + \ldots + f_m(\vec{x})\big| < \varepsilon.$$

*Důkaz:*

- tvrzení této věty bezprostředně plyne z věty 1.1.6
- označíme-li totiž $\big(s_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ příslušnou posloupnost částečných součtů, získáváme rovnosti

$$s_{n-1}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k(\vec{x}), \qquad s_m(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{m} f_k(\vec{x})$$

- podle věty 1.1.6 (v nepatrné obměně) konverguje posloupnost $\big(s_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ na $M$ stejnoměrně právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbf{N}$ takový, že pro jakékoli dva indexy $m, n \in \mathbf{N}$ takové, že $m \geqslant n \geqslant n_0$ a pro jakékoliv $\vec{x} \in M$ je splněna nerovnost $\big|s_m(\vec{x}) - s_{n-1}(\vec{x})\big| < \varepsilon$
- z této nerovnosti ovšem vyplývá, že

$$\left|\sum_{k=1}^{m} f_k(\vec{x}) - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(\vec{x})\right| = \big|f_n(\vec{x}) + f_{n+1}(\vec{x}) + \ldots + f_m(\vec{x})\big| < \varepsilon$$

### 1.1.13 Definice

Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ konverguje na množině $M \subset \mathbf{E}^r$ *regulárně*, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty}\big|f_n(\vec{x})\big|$ konverguje na $M$ stejnoměrně.

### 1.1.14 Věta – *nutná podmínka stejnoměrné konvergence*

Jestliže řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ konverguje na množině $M \subset \mathbf{E}^r$ stejnoměrně, potom posloupnost funkcí $\big(f_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na této množině stejnoměrně k nulové funkci.

*Důkaz:*

- z předpokladů věty plyne, že

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall m, n \in \mathbf{N})\big(m \geqslant n \geqslant n_0\big)(\forall\vec{x} \in M): \quad \big|f_n(\vec{x}) + f_{n+1}(\vec{x}) + \ldots + f_m(\vec{x})\big| < \varepsilon$$

- jelikož toto tvrzení platí pro jakákoli $m, n \in \mathbf{N}$ taková, že $m \geqslant n \geqslant n_0$, platí také při speciální volbě $m = n$
- pak ale

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})\big(n \geqslant n_0\big)(\forall\vec{x} \in M): \quad \big|f_n(\vec{x})\big| = \big|f_n(\vec{x}) - o(\vec{x})\big| < \varepsilon$$

- tento výrok je ale ekvivalentní tvrzení, že posloupnost funkcí $\big(f_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množině $M$ stejnoměrně k nulové funkci

### 1.1.15 Definice

Nechť jsou dány funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ definované na množině $M$. Nechť existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geqslant n_0$ a všechna $\vec{x} \in M$ platí $\big|f_n(\vec{x})\big| \leqslant g_n(\vec{x})$. Pak řadu $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ nazýváme řadou *majorantní* k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$.

### 1.1.16 Věta – *srovnávací kritérium*

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ je na množině $M \subset \mathbf{E}^r$ majorantní k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ a nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ je stejnoměrně konvergentní na $M$. Pak jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\vec{x})|$ stejnoměrně konvergentní na $M$, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ konverguje na $M$ regulárně.

*Důkaz:*

- užijeme Bolzanovu-Cauchyovu podmínku 1.1.12
- z předpokladu víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ stejnoměrně konverguje na $M$, tedy pro jakékoli $\varepsilon > 0$ existuje $n_0$ takové, že pro všechna přirozená $m \geqslant n \geqslant n_0$ a pro všechna $\vec{x} \in M$ platí

$$0 \leqslant g_n(\vec{x}) + g_{n+1}(\vec{x}) + \ldots + g_m(\vec{x}) < \varepsilon$$

- dále víme, že existuje $m_0$ tak, že pro všechna $x \in M$ a všechny indexy $n \geqslant m_0$ platí $|f_n(\vec{x})| \leqslant g_n(\vec{x})$
- pro zvolené $\varepsilon$ a všechna $n \geqslant \max\{n_0, m_0\}$ pak platí

$$|f_n(\vec{x}) + f_{n+1}(\vec{x}) + \ldots + f_m(\vec{x})| \leqslant |f_n(\vec{x})| + |f_{n+1}(\vec{x})| + \ldots + |f_m(\vec{x})| \leqslant g_n(\vec{x}) + g_{n+1}(\vec{x}) + \ldots + g_m(\vec{x}) < \varepsilon$$

- to dokazuje obě tvrzení věty

### 1.1.17 Důsledek

Konverguje-li řada na množině $M$ regulárně, konverguje na $M$ také stejnoměrně.

### 1.1.18 Věta – *Weierstrassovo kritérium*

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní číselná řada, $f_n(\vec{x})$ jsou funkce a pro všechna $\vec{x} \in M \subset \mathbf{E}^r$ a všechna $n \in \mathbf{N} \setminus \widehat{n_0}$ je $|f_n(\vec{x})| \leqslant a_n$. Pak řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\vec{x})|$ stejnoměrně konvergují na $M$, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ konverguje na $M$ regulárně.

*Důkaz:*

- v předchozí větě položíme $g_n(\vec{x}) := a_n$ pro všechna $\vec{x} \in M$ a uvědomíme si, že pojmy bodové a stejnoměrné konvergence u řady konstantních funkcí splývají

# Kapitola 2

# Funkcionální Hilbertovy prostory

## 2.1 Výchozí pojmy

### 2.1.1 Značení

$\mathscr{C}^n(M)$ je třída všech funkcí, které mají na množině $M$ spojité derivace až do řádu $n$, přičemž $\mathscr{C}(M) = \mathscr{C}^0(M)$. Nachází-li se index nula dole $\mathscr{C}_0^n(M)$, pak $M$ je kompakt. Symbol $\mathscr{C}_0^n$ značí všechny funkce třídy $\mathscr{C}^n(\mathbf{E}^r)$, které mají libovolný, ale kompatní nosič. $\mathscr{L}(G)$ je třída Lebesgueovsky integrovatelných funkcí na množině G. Třída funkcí majících Lebesgueův integrál na G se značí $\mathscr{L}^\star(G)$. Třídu Lebesgueovsky lokálně integrabilních funkcí značíme $\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(G)$ a definujeme ji v následujícím textu.

### 2.1.2 Úmluva

Symbol $G$ bude nadále reprezentovat $r-$dimenzionální *oblast*, tj. otevřenou a souvislou podmnožinu množiny $\mathbf{E}^r$. Dále symbol $J$ bude označovat *kompakt*, tj. uzavřenou a omezenou podmnožinu množiny $\mathbf{E}^r$. Funkcí budeme rozumět zobrazení $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{C}$.

### 2.1.3 Úmluva

V celém následujícím textu budeme předpokládat, že je zadána klasická a úplná Lebesgueova míra $\lambda(X) : \mathscr{M}_\lambda \mapsto \mathbf{R}^\star$ generovaná ve všech dimenzích klasickou vytvořující $\varphi(x) = x$. Tudíž soustava $\mathscr{M}_\lambda$ všech $\lambda-$měřitelných podmnožin množiny $\mathbf{E}^r$ je $\sigma-$algebrou a $\lambda(X)$ je na ní $\sigma-$aditivní mírou. Systém $\left\{\mathbf{E}^r, \mathscr{M}_\lambda, \lambda(X)\right\}$ je tedy pro nás nyní výchozím prostorem s úplnou mírou.

### 2.1.4 Definice

Nech? $r \in \mathbf{N}$ a $\vec{\mu} \in \mathbf{R}^r$. *Heavisideovou* `[hevisajdovou]` funkcí budeme rozumět funkci $\Theta(\vec{x}) :\ \mathbf{E}^r \mapsto \{0,1\}$ definovanou předpisem

$$\Theta(\vec{x}) := \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \ldots & x_1 > 0 \wedge x_2 > 0 \wedge \ldots \wedge x_r > 0 \\ 0 & \ldots & x_1 \leqslant 0 \vee x_2 \leqslant 0 \vee \ldots \vee x_r \leqslant 0. \end{array} \right. \tag{2.1}$$

*Centrovanou Heavisideovou* funkcí budeme rozumět funkci $\Theta_{\vec{\mu}}(\vec{x}) :\ \mathbf{E}^r \mapsto \{0,1\}$ definovanou předpisem

$$\Theta_{\vec{\mu}}(\vec{x}) := \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \ldots & x_1 > \mu_1 \wedge x_2 > \mu_2 \wedge \ldots \wedge x_r > \mu_r \\ 0 & \ldots & x_1 \leqslant \mu_1 \vee x_2 \leqslant \mu_2 \vee \ldots \vee x_r \leqslant \mu_r. \end{array} \right. \tag{2.2}$$

### 2.1.5 Poznámka

Funkce $f(\vec{x})$ je, podle věty 5.3.45 a důsledku 5.3.46 v [5], na G Lebesgueovsky integrabilní právě tehdy, když je $\lambda$-měřitelná a její absolutní hodnota je Lebesgueovsky integrabilní.

$$f(\vec{x}) \in \mathscr{L}(G,\mu) \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| \in \mathscr{L}(G,\mu) \wedge f(x) \in \Lambda_\mu(G).$$

Budeme-li tedy mluvit o měřitelných funkcích, tak platí, že

$$f(x) \in \mathscr{L}(G,\mu) \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| \in \mathscr{L}(G,\mu)$$

### 2.1.6 Definice

Nech?je dána funkce $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{R}$. Řekneme, že funkce $f(\vec{x})$ je *lokálně integrabilní* na $G$ a označíme symbolem $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}\big(G, \mu(X)\big)$ nebo zkráceně $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(G)$, jestliže pro každý bod $\vec{c} \in G$ existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}\big(\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})\big)$, tj.

$$\int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})} f(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) \in \mathbf{R}.$$

### 2.1.7 Věta

Nech?$G$ je oblast v $\mathbf{E}^r$. Funkce $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{R}$ je lokálně integrabilní na $G$ právě tehdy, když pro každou kompaktní množinu $J \subset G$ platí, že

$$\int_J f(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) \in \mathbf{R}.$$

*Důkaz:*

- dokážeme nejprve, že pokud pro každou kompaktní množinu $J \subset G$ platí, že integrál $\int_J f(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x})$ konverguje, pak je $f(\vec{x})$ je lokálně integrabilní na $G$
- zvolme tedy libovolně bod $\vec{c} \in G$
- jelikož $G$ je otevřená, jistě existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $K = \overline{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})}$, $K \subset G$, $K$ je kompakt a $\vec{c} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})$
- integrál $\int_K f(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x})$ ale existuje z předpokladu
- $\mathrm{bd}(K)$ je $\mu-$nulová množina, nebo?se jedná o pláš?r-rozměrné koule, a z teorie Lebesgueova integrálu tudíž platí, že $\int_K f(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) = \int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})} f(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x})$, a navíc jsme $\vec{c}$ volili libovolně.
- pro důkaz obrácené implikace předpokládejme, že $f(\vec{x})$ je lokálně integrabilní na $G$
- zvolme $K$ jako libovolnou kompaktní množinu, která je podmnožinou oblasti $G$
- podle teorie míry jistě $K \in \mathscr{M}_\mu$, nebo?$\mathbf{E}^r \in \mathscr{S}_r \subset \mathscr{M}_\mu$, a $\mathscr{M}_\mu$ je $\sigma$-algebra
- Borelova věta ale říká, že z každého otevřeného pokrytí kompaktní množiny lze vybrat pokrytí konečné, tj. existuje soustava oblastí $\{G_k : k \in \widehat{n}\}$ tak, že $\cup_{k=1}^n G_k \supset K$ a $G_k = \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_k)$ pro jisté body $\vec{x}_k \in K$
- všechny integrály $\int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_k)} f(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x})$ ale existují z předpokladu této implikace
- dále také existují (jak víme z teorie Lebesgueova integrálu všechny integrály) $\int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_k)\cap\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_\ell)} f(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x})$ pro $k, \ell \in \widehat{n}$
- existují rovněž integrály $\int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_k)\cap K} f(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x})$, což společně garantuje existenci integrálu $\int_K f(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x})$
- tímto je důkaz dokončen

## 2.2 Prehilbertovské prostory funkcí

V této sekci se pokusíme rozhodnout jestli z vybraných vektorových prostorů funkcí lze vytvořit prehilbertovské prostory funkcí, tj. vektorové prostory se skalárním součinem. Připomeňme si definici skalárního součinu.

### 2.2.1 Definice

Nech?$\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$. Zobrazení $\langle .|. \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbf{C}$ nazveme *skalárním součinem*, jestliže splňuje tzv. *axiomy skalárního součinu*:

- *levá linearita:* pro všechna $f(\vec{x}), g(\vec{x}), h(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ a každé $\alpha \in \mathbf{C}$ platí $\langle \alpha f + g | h \rangle = \alpha \langle f|h \rangle + \langle g|h \rangle$
- *hermiticita:* pro všechna $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ platí $\langle f|g \rangle = \langle g|f \rangle^\star$
- *pozitivní definitnost:* pro všechna $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ platí $\langle f|f \rangle \geqslant 0$ a navíc $\langle f|f \rangle = 0$ právě tehdy, když $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$.

Dvojici $\big\{\mathcal{V}, \langle .|. \rangle\big\}$ nazýváme *prehilbertovským prostorem.*

### 2.2.2 Definice

Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor funkcí nad tělesem $\mathbf{C}$. Zobrazení $\| \, . \, \| : \mathcal{V} \mapsto \mathbf{R}$ nazveme *normou*, jestliže splňuje tzv. *axiomy normy*:

- *nulovost:* $\|f\| = 0$ právě tehdy, když $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$
- *trojúhelníková nerovnost:* pro všechna $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ platí: $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$
- *homogenita:* pro všechna $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ a každé $\lambda \in \mathbf{C}$ platí: $\|\lambda\, f\| = |\lambda| \, \|f\|$ .

Dvojici $\big\{\mathcal{V}, \|.\|\big\}$ nazýváme *normovaným prostorem.*

### 2.2.3 Příklad

Ukážeme, že pro libovolnou funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ z normovaného prostoru $\mathcal{V}$ s normou $\| \, . \, \|$ platí nerovnost $\|f\| \geqslant 0$. Nejprve snadno prokážeme, že norma opačného vektoru je stejná jako norma vektoru původního. Položme $\lambda = -1$. Pak z axiomu homogenity plyne $\|-f\| = |-1| \, \|f\| = \|f\|$ . Dále pak v trojúhelníkové nerovnosti položme $g(\vec{x}) := -f(\vec{x})$. Pak

$$0 = \|o(\vec{x})\| = \big\|f(\vec{x}) + \big(-f(\vec{x})\big)\big\| \leqslant \big\|\vec{f}(\vec{x})\big\| + \big\|-f(\vec{x})\big\| = 2\big\|\vec{f}(\vec{x})\big\|,$$

odkud je již patrno, že $\|f\| \geqslant 0$.

### 2.2.4 Věta

Nechť $\langle .|. \rangle$ je skalární součin definovaný na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$. Pak zobrazení $\mathbb{n}(f)$ definované předpisem

$$\mathbb{n}(f) := \sqrt{\langle f|f \rangle} \tag{2.3}$$

je normou na $\mathcal{V}$.

<u>*Důkaz:*</u>

- ověříme axiomy normy
- axiom nulovosti:
  - je-li $f(\vec{x}) = 0$, pak $\mathbb{n}^2(0) := \langle o, o \rangle = 0$
  - je-li $\mathbb{n}(f) = 0$, pak tedy $\langle f, f \rangle = 0$, ale podle axiomu pozitivní definitnosti skalárního součinu toto může nastat pouze tehdy, je-li $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$
  - tím je ekvivalence požadovaná v axiomu nulovosti normy prokázána
- axiom trojúhelníkové nerovnosti:
  - provedeme následující sérii úprav

    $$\mathbb{n}^2\big(f + g\big) = \langle f + g|f + g \rangle = \langle f|f \rangle + \langle f|g \rangle + \langle g|f \rangle + \langle g|g \rangle =$$

    $$= 2\,\mathrm{Re}\big(\langle f|g \rangle\big) + \langle f|f \rangle + \langle g|g \rangle \leqslant 2\big|\langle f|g \rangle\big| + \mathbb{n}^2(f) + \mathbb{n}^2(g)$$
  - užijeme-li nyní Schwarzovy-Cauchyovy-Bunjakovského nerovnosti (viz [2]), dostáváme

    $$\mathbb{n}^2\big(f + g\big) \leqslant 2\,\mathbb{n}(f)\mathbb{n}(g) + \mathbb{n}^2(f) + \mathbb{n}^2(g) = \big(\mathbb{n}(f) + \mathbb{n}(g)\big)^2$$
  - tím je dokázáno, že $\mathbb{n}\big(f + g\big) \leqslant \mathbb{n}(f) + \mathbb{n}(g)$
- axiom homogenity:
  - nechť tedy $\lambda \in \mathbf{C}$ je zvoleno libovolně
  - pak snadno $\mathbb{n}\big(\lambda f\big) := \sqrt{\langle \lambda f|\lambda f \rangle} = \sqrt{\lambda\lambda^\star}\sqrt{\langle f|f \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2}\,\mathbb{n}(f) = |\lambda|\,\mathbb{n}(f)$
- tím je prokázáno, že zobrazení $\mathbb{n}(f)$ je normou na $\mathcal{V}$

### 2.2.5 Definice

Nechť $\langle .|. \rangle$ je skalární součin definovaný na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$. Pak zobrazení $\mathbb{n}(f)$ definované vztahem (2.3) nazýváme *normou generovanou skalárním součinem.*

### 2.2.6 Věta

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$ a skalární součin $\langle .|. \rangle$. Nechť $\|.\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Nechť je dána posloupnost funkcí $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ z prostoru $\mathcal{V}$, pro níž existuje funkce $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ tak, že platí následující implikace:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \quad n > n_0 \quad \Longrightarrow \quad \big\| f_n(\vec{x}) - f(\vec{x}) \big\| < \varepsilon.$$

Nechť je funkce $g(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ zvolena libovolně. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n|g \rangle = \langle f|g \rangle, \quad \lim_{n\to\infty} \langle g|f_n \rangle = \langle g|f \rangle.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- snadno nahlédneme, že pro $g(\vec{x}) = o(\vec{x})$ platí citovaná rovnost triviálně
- uvažujme tedy nyní pouze ty funkce, které nejsou nulové, tedy ty, pro něž $\|g(\vec{x})\| \neq 0$
- chceme dokázat, že číselná posloupnost $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $\gamma_n := \langle f_n|g \rangle$ konverguje k číslu $\gamma := \langle f|g \rangle$
- je tedy třeba prokázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $m_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechny indexy $m > m_0$ platí nerovnost $|\gamma_m - \gamma| < \varepsilon$
- z předpokladu

  $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \quad n > n_0 \quad \Longrightarrow \quad \big\| f_n(\vec{x}) - f(\vec{x}) \big\| < \frac{\varepsilon}{\|g\|},$$

  z axiomů skalárního součinu a z Schwarzovy-Cauchyovy-Bunjakovského nerovnosti ale vyplývá, že

  $$|\gamma_m - \gamma| = \big|\langle f_m|g \rangle - \langle f|g \rangle\big| = \big|\langle f_m - f|g \rangle\big| \leqslant \|f_m - f\| \cdot \|g\| < \frac{\varepsilon}{\|g\|}\|g\| = \varepsilon$$

- postačí tedy volit $m_0 := n_0$
- tvrzení $\lim_{n\to\infty} \langle g|f_n \rangle = \langle g|f \rangle$ lze dokázat zcela analogicky

### 2.2.7 Lemma

Nechť $a \in \mathbf{R}$ a $b \in (a, \infty)$. Nechť $\mathscr{C}(\langle a, b \rangle)$ je vektorový prostor všech funkcí $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ spojitých na intervalu $\langle a, b \rangle$ zavedený nad tělesem $\mathbf{C}$. Nechť je dána funkce $w(x) \in \mathscr{C}(\langle a, b \rangle)$ kladná na $\langle a, b \rangle$. Pak formule

$$\big\langle f(x)|g(x) \big\rangle_w := \int_a^b f(x) g^{\star}(x) w(x)\, \mathtt{d}x \tag{2.4}$$

splňuje axiomy skalárního součinu na $\mathscr{C}(\langle a, b \rangle)$.

### 2.2.8 Lemma

Nechť $a \in \mathbf{R}$ (nebo $a = -\infty$) a $b \in (a, \infty)$ (nebo $b = +\infty$). Nechť $\mathscr{V}$ je vektorový prostor všech omezených a spojitých funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$. Nech?$w(x)$ je kladná funkce na $(a, b)$, pro kterou platí $w(x) \in \mathscr{L}(\langle a, b \rangle)$. Pak (2.4) splňuje axiomy skalárního součinu na $\mathscr{V}$.

### 2.2.9 Definice

Spojitou a kladnou funkci $w(x)$ z předešlých lemmat nazýváme *vahou skalárního součinu* a vybrané reprezentanty nazýváme následovně:

- *standardní (Legendreova) váha:* pro libovolnou volbu $a, b \in \mathbf{R}$ a $w(x) = \Theta(a)\Theta(b - x)$,
- *Laguerreova váha:* pro volbu $a = 0$, $b = \infty$ a $w(x) = \Theta(x)\mathtt{e}^{-x}$,
- *Hermiteova váha:* pro volbu $a = -\infty$, $b = \infty$ a $w(x) = \mathtt{e}^{-x^2}$,
- *Čebyševova váha:* pro volbu $a = -1$, $b = 1$ a $w(x) = \frac{\Theta(1-|x|)}{\sqrt{1-x^2}}$.

### 2.2.10 Definice

Nechť $p \geqslant 1$ je pevně zvolený parametr. Pak třídu všech měřitelných funkcí $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{C}$, pro něž

$$\int_G \big|f(\vec{x})\big|^p \, \mathrm{d}\lambda(\vec{x}) \in \mathbf{R},$$

označujeme symbolem $\mathscr{L}_p\big(G\big)$. Neboli

$$\mathscr{L}_p\big(G\big) = \left\{ f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{C} : \int_G \big|f(\vec{x})\big|^p \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) \in \mathbf{R} \right\}$$

### 2.2.11 Věta

Nech?$f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_2(G)$. Potom $f(\vec{x})g^\star(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(G)$.

*Důkaz:*

- stačí si uvědomit, že $|f(\vec{x})g^\star(\vec{x})| \leqslant \frac{1}{2}|f(\vec{x})|^2 + \frac{1}{2}|g(\vec{x})|^2$
- jelikož oba členy součtu patří do $\mathscr{L}(G)$, tak ze srovnávacího kritéria plyne, že také $|f(\vec{x})g^\star(\vec{x})| \in \mathscr{L}(G)$
- je vhodné si zopakovat poznámku 2.1.5 a uvědomit si, že pro měřitelné funkce platí $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}(G) \Leftrightarrow |f(\vec{x})| \in \mathscr{L}(G)$

### 2.2.12 Poznámka

Vztahy $\int_G f(x)g^\star(x)w(x)\,\mathrm{d}x$, resp. $\int_G f(\vec{x})g^\star(\vec{x})w(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}$ však na některých vektorových prostorech skalární součin nedefinují. Jedním z takových prostorů je např. prostor $\mathscr{L}_1(0,1)$. Funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ do prostoru $\mathscr{L}_1(0,1)$ patří, nebo?

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2,$$

ale integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

nekonverguje. Podobně také prostory $\mathscr{L}(G)$ nebo $\mathscr{L}_1(G)$ pro $G = (0,\infty)$ negenerují spolu s operací $\int_0^\infty f(x)g^\star(x)\,\mathrm{d}x$ prehilbertovský prostor.

$\mathscr{L}_2(G)$ také není prehilbertovský, protože není splněn axiom pozitivní definitnosti skalárního součinu, tedy neplatí, že

$$\big\langle f(x)|f(x)\big\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0$$

Může totiž existovat $f(x) \neq 0$ taková, že bude $\int_a^b f(x)f^\star(x)\mathrm{d}x = 0$. Například tak, že má nenulovou hodnotu na množině míry nula.

### 2.2.13 Definice

*Dirichletovou funkcí* budeme rozumět funkci

$$\mathfrak{D}(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & \ldots \quad \vec{x} \in \mathbf{Q}^r \\ 0 & \ldots \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^r \setminus \mathbf{Q}^r. \end{cases} \tag{2.5}$$

### 2.2.14 Poznámka

Zavedeme-li na prostoru $\mathscr{L}_2(G)$ zobrazení $\langle f|g\rangle : \mathscr{L}_2(G) \times \mathscr{L}_2(G) \mapsto \mathbf{C}$ předpisem

$$\big\langle f|g\big\rangle = \int_G f(\vec{x})\,g^\star(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}),$$

pak toto zobrazení není skalárním součinem, neboť není splněn axiom pozitivní definitnosti z definice skalárního součinu. Rovnost $\langle f|f\rangle = 0$ by podle něho měla být splněna tehdy a jen tehdy, pokud $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$, tedy pokud $f(\vec{x})$ je ryze nulová funkce. Snadno ale nahlédneme, že pro Dirichletovu funkci platí rovnost $\mathfrak{D}^2(\vec{x}) = \mathfrak{D}(\vec{x})$, a tudíž (podle teorie Lebesgueova integrálu)

$$\big\langle \mathfrak{D}|\mathfrak{D}\big\rangle = \int_G \mathfrak{D}(\vec{x})\,\mathfrak{D}^\star(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) = \int_G \mathfrak{D}(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) = 0.$$

Abychom se tedy konečně dostali k nějakému prehilbertovu, a následně Hilbertovu, prostoru budeme potřebovat zobecnění a úvahy, které probereme v následující sekci.

## 2.3 Faktorové prostory funkcí, Hilbertovy prostory

Od termínu funkce nyní přejděme k faktorové funkci, resp. faktorovému prostoru funkcí. Třídu všech funkcí, jež jsou měřitelné a zároveň jsou mezi sebou vzájemně $\mu$-ekvivalentní, tj. liší se pouze na množině míry nula, nazveme *faktorová skupina funkcí*. Třídu všech funkcí, které jsou měřitelné a zároveň ekvivalentní s nulovou funkcí ($f(\vec{x}) = 0(\vec{x})$) označíme symbolem $\mathcal{F}_0$. Do třídy $\mathcal{F}_0$ tedy patří i Dirichletova funkce $\mathfrak{D}(\vec{x})$. Libovolného zástupce z vybrané faktorové skupiny funkci nazveme *faktorovou funkcí*. Pro jednoduchost budeme nadále používat termín funkce, ale mějme pořád na paměti, že jde jen o jednoho vybraného zástupce celé skupiny funkcí.

### 2.3.1 Definice

*Faktorovou funkcí* $\hat{f}(\vec{x})$ nazveme množinu všech funkcí, jež jsou vzájemně $\mu-$ekvivalentní s vybranou měřitelnou funkcí $f(\vec{x}) \in \Lambda(G)$, tj.

$$\hat{f}(\vec{x}) := \big\{ g(\vec{x}) \in \Lambda(G) : \, g \sim f \big\}.$$

Množinu všech faktorových funkcí nazveme *faktorovým prostorem* nad $G$ a označíme $\mathcal{F}(G)$.

### 2.3.2 Poznámka

Tedy funkce $f(\vec{x})$ a $g(\vec{x})$ z předešlé definice se liší pouze na množině nulové míry. Dále si uvědomme, že integrál všech prvků faktorové funkce na dané oblasti $G$ má stejnou hodnotu. Má tedy smysl definovat

$$\int_G \hat{f}(\vec{x}) \, \mathtt{d}\mu(\vec{x}) := \int_G f(\vec{x}) \, \mathtt{d}\mu(\vec{x}),$$

kde $f(\vec{x})$ je libovolný zástupce faktorové funkce $\hat{f}(\vec{x})$.

### 2.3.3 Definice

Nechť $p \geqslant 1$. Symbolem $\mathbb{L}_p(G)$ označíme množinu všech (faktorových) funkcí $f(\vec{x}) : \, G \mapsto \mathbf{C}$, pro něž $|f(\vec{x})|^p \in \mathscr{L}(G)$, tedy

$$\int_G |f(\vec{x})|^p \, \mathtt{d}\mu(\vec{x}) < +\infty.$$

### 2.3.4 Věta

Zobrazení $\langle f|g \rangle : \mathbb{L}_2(G) \times \mathbb{L}_2(G) \mapsto \mathbf{C}$ zavedené na $\mathbb{L}_2(G)$ předpisem

$$\big\langle f|g \big\rangle = \int_G f(\vec{x}) \, g^\star(\vec{x}) \, \mathtt{d}\mu(\vec{x}) \tag{2.6}$$

reprezentuje skalární součin. Prostor $\mathbb{L}_2(G)$ je tudíž prehilbertovským prostorem.

*Důkaz:*

- axiom levé linearity je splněn triviálně, podobně jako hermiticita
- pro libovolnou funkci $f(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$ pak platí, že

  $$\big\langle f|f \big\rangle = \int_G f(\vec{x}) \, f^\star(\vec{x}) \, \mathtt{d}\mu(\vec{x}) = \int_G |f(\vec{x})|^2 \, \mathtt{d}\mu(\vec{x}) \geqslant 0$$

  a navíc rovnost

  $$\big\langle f|f \big\rangle = \int_G f(\vec{x}) \, f^\star(\vec{x}) \, \mathtt{d}\mu(\vec{x}) = \int_G |f(\vec{x})|^2 \, \mathtt{d}\mu(\vec{x}) = 0$$

  nastává pouze pro nulovou faktorou funkci
- tím je naplněn axiom pozitivní definitnosti
- zbývá dokázat, že pro libovolné dvě funkce $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$ je výraz $\big\langle f|g \big\rangle = \int_G f(\vec{x}) \, g^\star(\vec{x}) \, \mathtt{d}\mu(\vec{x})$ dobře definován

- jelikož je na $G$ splněna nerovnost

$$2\big|f(\vec{x})g^\star(\vec{x})\big| \leqslant \big|f(\vec{x})\big|^2 + \big|g^\star(\vec{x})\big|^2 = \big|f(\vec{x})\big|^2 + \big|g(\vec{x})\big|^2$$

a oba integrály $\int_G \big|f(\vec{x})\big|^2 \,\mathrm{d}\lambda(\vec{x})$ a $\int_G \big|g(\vec{x})\big|^2 \,\mathrm{d}\lambda(\vec{x})$ existují z definice prostoru $\mathbb{L}_2(G)$ a z věty o absolutní hodnotě Lebesgueova integrálu, existuje podle srovnávacího kritéria také integrál $\int_G f(\vec{x})g^\star(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})$

## 2.3.5 Poznámka

Je-li vztah (2.6) skalárním součinem na $\mathbb{L}_2(G)$, pak je zobrazení

$$\big\|f(\vec{x})\big\| = \sqrt{\int_G \big|f(\vec{x})\big|^2 \,\mathrm{d}\lambda(\vec{x})}$$

normou na $\mathbb{L}_2(G)$. Zobrazení

$$\varrho(f,g) := \sqrt{\int_G \big|f(\vec{x}) - g(\vec{x})\big|^2 \,\mathrm{d}\lambda(\vec{x})}$$

je metrikou na $\mathbb{L}_2(G)$.

## 2.3.6 Definice

Řekneme, že posloupnost funkcí $\big(f_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ z prostoru $\mathbb{L}_2(G)$ *konverguje podle normy* k funkci $f(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geqslant n_0$ platí

$$\big\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\big\| < \varepsilon,$$

to jest

$$\sqrt{\int_G \big|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\big|^2 \,\mathrm{d}\mu(\vec{x})} < \varepsilon.$$

Konvergenci podle normy zapisujeme symbolem $f_n(\vec{x}) \twoheadrightarrow f(\vec{x})$.

## 2.3.7 Příklad

Rozhodněme podle definice, zda posloupnost funkcí $\big(\mathrm{e}^{-nx^2}\big)_{n=1}^{\infty}$ z prostoru $\mathbb{L}_2(\mathbf{R})$ konverguje podle normy k nulové funkci. Nechť $\varepsilon > 0$ je zvoleno libovolně. Limitní faktorovou funkcí pro zkoumanou posloupnost je nulová funkce. Zkoumejme tedy nerovnost

$$\big\|\mathrm{e}^{-nx^2}\big\| = \sqrt{\int_G \mathrm{e}^{-2nx^2} \,\mathrm{d}\mu(\vec{x})} = \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{1/4} < \varepsilon.$$

Za hledané $n_0 \in \mathbf{N}$ z definice konvergence podle normy tedy stačí volit

$$n_0 := \left\lfloor \frac{\pi}{2\varepsilon^4} \right\rfloor + 1.$$

Povšimněme si ale paradoxu, že posloupnost $\big(\mathrm{e}^{-nx^2}\big)_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje (uvažujeme-li konvergenci klasickou) k nulové funkci ani stejnoměrně ani bodově. Vztah mezi klasickou konvergencí a konvergencí podle normy lze shrnout v následující větě.

## 2.3.8 Věta

Nechť je dána posloupnost funkcí $\big(f_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ z prostoru $\mathbb{L}_2(G)$ taková, že $f_n(\vec{x}) \overset{G}{\rightrightarrows} f(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$. Nechť dále $0 < \mu(G) < \infty$. Pak $f_n(\vec{x}) \twoheadrightarrow f(\vec{x})$.

*<u>Důkaz:</u>*

- z předpokladů plyne, že pro všechna $\widetilde{\varepsilon} > 0$ existuje $n_0$ tak, že pro všechna $n \geqslant n_0$ a pro všechna $\vec{x} \in G$ platí nerovnost

$$\big|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\big| < \widetilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\mu(G)}}$$

- jelikož zjevně

$$\left\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right\|^2 = \langle f_n - f | f_n - f\rangle = \int_G \left|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right|^2 \mathrm{d}\mu(\vec{x}) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4\mu(G)}\mu(G) = \frac{\varepsilon^2}{4},$$

  zjišťujeme, že pro indexy $n \geqslant n_0$ platí nerovnost $\left\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

- to dokazuje skutečnost, že posloupnost funkcí $\left(f_n(\vec{x})\right)_{n=1}^{\infty}$ konverguje podle normy k funkci $f(\vec{x})$

### 2.3.9 Věta

Nechť $f_n(\vec{x}) \twoheadrightarrow f(\vec{x})$. Pak existuje podposloupnost $\left(f_{k_n}(\vec{x})\right)_{n=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\left(f_n(\vec{x})\right)_{n=1}^{\infty}$ taková, že platí $f_{k_n}(\vec{x}) \to f(\vec{x})$ skoro všude v $M$.

*Důkaz:*

- viz odkázat se na zdroj, str. 42, příklad 2.2.2

### 2.3.10 Definice

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ se skalárním součinem $\langle .|.\rangle$. Nechť $\|.\|$ je norma generovaná zadaným skalárním součinem a $\varrho(x,y)$ metrika generovaná výše uvedenou normou. Nechť navíc $\{\mathcal{V},\varrho\}$ je úplným metrickým prostorem. Pak takový prostor $\mathcal{H} := \left\{\mathcal{V}, \langle .|.\rangle, \|.\|, \varrho\right\}$ nazýváme *Hilbertovým* prostorem.

### 2.3.11 Poznámka

Metrický prostor $\{M,\varrho\}$ s libovolnou metrikou $\varrho(f,g)$ nazveme *úplným,* jestliže každá cauchyovská posloupnost je v něm konvergentní.

### 2.3.12 Věta – *o spojitosti skalárního součinu*

Nechť je dán Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem $\mathbf{C}$. Nechť je dána posloupnost funkcí $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ z prostoru $\mathcal{H}$, která konverguje podle normy k funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$, a funkce $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n|g\rangle = \langle f|g\rangle, \quad \lim_{n\to\infty} \langle g|f_n\rangle = \langle g|f\rangle.$$

*Důkaz:*

- jedná se o bezprostřední důsledek věty 2.2.6

### 2.3.13 Definice

Řekneme, řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ z Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ *konverguje podle normy* ke svému součtu $s(\vec{x}) \in \mathcal{H}$, pokud posloupnost $\left(s_n(\vec{x})\right)_{n=1}^{\infty}$ jejích částečných součtů

$$s_n(\vec{x}) := \sum_{k=1}^{n} f_k(\vec{x})$$

konverguje podle normy k funkci $s(\vec{x})$, tj. $\mathrm{limnorm}_{n\to\infty} s_n(\vec{x}) = s(\vec{x})$. Konvergenci podle normy zapisujeme symbolem ${}_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}) = s(\vec{x})$. sem dát podtrženou sumu - Krbálek dodá

### 2.3.14 Věta

Faktorový prostor $\mathbb{L}_2(G)$ společně se skalárním součinem zavedeným vztahem (2.6) je úplný, tj. jedná se o Hilbertův prostor.

*Důkaz:*

Jelikož již bylo prokázáno, že $\mathbb{L}_2(G)$ je vektorový prostor nad $\mathbf{C}$, zbývá dokázat úplnost. Vyberme tedy z libovolné cauchyovské posloupnosti $\big(f_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ podposloupnost $\big(f_{k_\ell}(\vec{x})\big)_{\ell=1}^{\infty}$, jež konverguje skoro všude na $G$. To je díky cauchyovskosti možné. Cílem důkazu je de facto prokázat, že $\big(f_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ je konvergentní v $\mathbb{L}_2(G)$. První člen podposloupnosti $\big(f_{k_\ell}(\vec{x})\big)_{\ell=1}^{\infty}$ vyberme tak, aby pro všechna $m > k_1$ platilo

$$\|f_{k_1}(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \frac{1}{2}.$$

To je opět díky cauchyovskosti možné. Druhý člen podposloupnosti vyberme tak, aby pro všechna $m > k_2$ platilo

$$\|f_{k_2}(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \frac{1}{2^2}.$$

Analogicky vyberme $\ell-$tý člen podposloupnosti tak, aby pro všechna $m > k_\ell$ platilo

$$\|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \frac{1}{2^\ell}.$$

Označíme-li nyní

$$g_k(\vec{x}) = \sum_{s=1}^{k} \big|f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\big|,$$

$$g(\vec{x}) = \sum_{s=1}^{\infty} \big|f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\big|,$$

bude

$$\|g_k(\vec{x})\| \leqslant \sum_{s=1}^{k} \big\|f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\big\| < \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{2^s} < 1.$$

Je proto $\int_M |g_n(\vec{x})|^2 \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) < 1$ a podle Leviho věty také

$$\int_M |g(\vec{x})|^2 \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) = \lim_{k\to\infty} \int_M |g_k(\vec{x})|^2 \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) \leqslant 1$$

a $g(\vec{x})$ je konečná skoro všude na $M$. Navíc řada $\sum_{s=1}^{k} \big|f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\big|$ má pro skoro všechna $\vec{x} \in M$ konečný součet a tudíž i řada $\sum_{s=1}^{k} \big(f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\big)$ je konvergentní, a tedy také posloupnost

$$f_k(\vec{x}) = \sum_{s=1}^{k-1} \big(f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\big) + f_{k_1}(\vec{x}).$$

Označme $f(\vec{x})$ její limitu. Ta je samozřejmě měřitelná jako limita posloupnosti měřitelných funkcí.

Ve druhé části důkazu ukážeme, že posloupnost $\big(f_{k_\ell}(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ konverguje právě k této funkci $f(\vec{x})$ v $\mathbb{L}_2(G)$. Předně z cauchyovskosti posloupnosti $\big(f_{k_\ell}(\vec{x})\big)_{\ell=1}^{\infty}$ plyne cauchyovskost podposloupnosti $\big(f_{k_\ell}(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$, a tedy pro $\epsilon = 1$ existuje $k_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro $\ell > k_0$ a $m > k_0$ je

$$\int_M \big|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f_{k_m}(\vec{x})\big|^2 \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) < 1.$$

Podle Fatouovy věty (viz věta 2.1.7, str. 26 v (někde - DOPLNIT) je

$$\int_M \big|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f(\vec{x})\big|^2 \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) < 1,$$

odkud plyne, že funkce $f(\vec{x})$ rozepsaná jako $\big(f(\vec{x}) - f_{k_\ell}(\vec{x})\big) + f_{k_\ell}(\vec{x})$ patří do $\mathbb{L}_2(G)$. Provedeme-li stejnou úvahu s libovolně malým $\epsilon$, získáme

$$\int_M \big|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f(\vec{x})\big|^2 \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) < \epsilon^2,$$

což neznamená nic jiného, než že

$$\lim_{\ell\to\infty} f_{k_\ell}(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

V poslední části důkazu ukážeme, že k funkci $f(\vec{x})$ konverguje celá posloupnost $\big(f_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$. To ovšem plyne ihned z nerovností

$$\big\|f(\vec{x}) - f_k(\vec{x})\big\| \leqslant \big\|f(\vec{x}) - f_{k_\ell}(\vec{x})\big\| + \big\|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f_k(\vec{x})\big\|,$$

neboť první člen napravo můžeme udělat libovolně malým (pro velká $k_\ell$) díky dokázané konvergenci zmiňované podposloupnosti a druhý díky cauchyovskosti posloupnosti $\big(f_k(x)\big)_{k=1}^{\infty}$.

### 2.3.15 Důsledek

Nechť $w(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G)$ je kladná funkce. Faktorový prostor

$$\mathbb{L}_2^{(w)}(G) = \left\{ f(\vec{x}) \in \digamma(G) : \int_G |f(\vec{x})|^2 w(\vec{x}) \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) < +\infty \right\},$$

společně se skalárním součinem zavedeným vztahem $\int_G f(\vec{x}) g^\star(\vec{x}) w(\vec{x}) \, \mathrm{d}\vec{x}$ je Hilbertovým prostorem.

### 2.3.16 Věta

$f \in \mathscr{L}_2(G) \wedge H \in G \wedge \mu(H) < \infty \quad \Rightarrow \quad f \in \mathscr{L}_1(H)$ okomentovat, případně dokázat

### 2.3.17 Důsledek

$\mu(H) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}_2(H) \subset \mathscr{L}_1(H)$

### 2.3.18 Věta

$f(\vec{x}), g(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ jsou hustoty, pak $\big(f * g\big)(\vec{x})$ je rovněž hustotou a vždy existuje.

*Důkaz:*

- $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_{\mathbf{1}}(\mathbf{E}^r) \Rightarrow \big(f * g\big)(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$
- nezápornost:
$$\big(f * g\big)(\vec{x}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) g(\vec{x} - \vec{s}) \, \mathrm{d}\vec{s} \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbf{E}^r,$$
neboť z definice hustot je integrál větší nebo roven 0 a existuje
-
$$\int_{\mathbf{E}^r} \big(f * g\big)(\vec{x}) \, \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) g(\vec{x} - \vec{s}) \, \mathrm{d}\vec{s} \, \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{x} - \vec{s}) \, \mathrm{d}\vec{x} \, \mathrm{d}\vec{s} =$$
$$= \left| \begin{array}{c} \vec{y} = \vec{x} - \vec{s} \\ \mathrm{d}\vec{y} = \mathrm{d}\vec{x} \end{array} \right| = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{y}) \, \mathrm{d}\vec{y} \, \mathrm{d}\vec{s} = 1 \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \, \mathrm{d}\vec{s} = 1$$

### 2.3.19 Poznámka

Střední hodnota z $r$, $f(r)$ je $\langle r \rangle = \int_{\mathbf{R}} r f(r) \, \mathrm{d}r$.

### 2.3.20 Věta

Nechť $f(x), g(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ jsou hustoty. Nechť $\int_{\mathbf{R}} x f(x) \, \mathrm{d}x = \mu_1$ a $\int_{\mathbf{R}} x g(x) \, \mathrm{d}x = \mu_2$. Pak $\int_{\mathbf{R}} \big(f * g\big)(x) \, \mathrm{d}x = \mu_1 + \mu_2$.

*Důkaz:*

- teoretické požadavky již byly dokázány v předchozí větě
-
$$\int_{\mathbf{R}} x \big(f * g\big)(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} x \int_{\mathbf{R}} f(s) g(x - s) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} f(s) \int_{\mathbf{R}} x g(x - s) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s =$$
$$= \left| \begin{array}{c} y = x - s \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int_{\mathbf{R}} f(s) \int_{\mathbf{R}} (y + s) g(y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}s = \int_{\mathbf{R}}^2 f(s) y g(y) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}y + \int_{\mathbf{R}}^2 f(s) s g(y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}s =$$
$$= \Big| \text{Věta o separabilitě} \Big| = \int_{\mathbf{R}} f(s) \, \mathrm{d}s \int_{\mathbf{R}} y g(y) \, \mathrm{d}y + \int_{\mathbf{R}} s f(s) \, \mathrm{d}s \int_{\mathbf{R}} g(y) \, \mathrm{d}y = \mu_1 + \mu_2$$

### 2.3.21 Věta – *o posunutí v konvoluci*

$f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r), \vec{\mu} \in \mathbf{E}^r$. Pak platí: $(f \star g)(\vec{x} - \vec{\mu}) = f(\vec{x}) \star g(\vec{x} - \vec{\mu}) = f(\vec{x} - \vec{\mu}) \star g(\vec{x})$

### 2.3.22 Poznámka

Zde používaáme afinní transformaci, tudíž za každé $\vec{x}$ dosadíme $\vec{x}-\vec{\mu}$. Souvislost s předchozí větou je taková, že lze posunout střední hodnotu v případě, že za $f, g$ zvolíme hustoty.

### 2.3.23 Věta – *o derivaci konvoluce*

$f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r), g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r) \cap \mathscr{C}_0^1$. Pak platí $\dfrac{\partial}{\partial x_k}(f \star g) = f(\vec{x}) \star \dfrac{g}{x_k}(\vec{x})$.

*Důkaz:*

- $\dfrac{\partial}{\partial x_k}(f \star g) = \dfrac{\partial}{\partial x_k} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) g(\vec{x}-\vec{s})\, \mathrm{d}\vec{s}$
- použijeme větu o derivaci integrálu s parametrem
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x}|\alpha)\, \mathrm{d}\vec{x} \to \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha_k} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x}|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\, \mathrm{d}\vec{x}$
- ověřme předpoklady věty:
  - výraz v integrálu musí konvergovat, což je splněno
  - měřitelnost je splněna, jelikož výraz je z $\mathscr{L}_1$
  - diferencovatelnost, výraz nahradíme integrabilní majorantou: $\left| f(\vec{s}) \dfrac{\partial g}{\partial x_k}(\vec{x}-\vec{s}) \right| \leqslant K \left| f(\vec{s}) \right| \in \mathscr{L}(\mathbf{E})$,
    a využijeme vlastnost, že funkce na kompaktu nabývá maxima
- $\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \dfrac{\partial g}{\partial x_k}(\vec{x}-\vec{s})\, \mathrm{d}\vec{s} = \left( f \star \dfrac{\partial g}{\partial x_k} \right)(\vec{x})$

### 2.3.24 Poznámka

Povšimněme si, že se věta jeví na první pohled nevyvážená, je to z duvodu požadavku na diferencovatelnost pouze pro $g$. Zároveň si povšimněme absence dodatku "pokud levá (pravá) strana existuje". U konvoluce pozorujeme tzv. vyhlazovací efekt, kdy pokud je $g(x)$ hladká, pak existuje konvoluce i její derivace bez ohledu na to, jak nespojitá je funkce $f(x)$.

### 2.3.25 Příklad

Spočítejme konvoluci dvou Gaussovźch funkcí. Položme $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\dfrac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$ a $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\dfrac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$. Pak dopočítám později.

# Literatura


[1] T. Hobza: *Matematická statistika,* http://tjn.fjfi.cvut.cz/∼hobza/MAST/mast.pdf (2007)

[2] M. Krbálek: *Matematická analýza III (třetí přepracované vydání)*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2011

[3] M. Krbálek: *Matematická analýza IV (druhé přepracované vydání)*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2009

[4] M. Krbálek: *Úlohy matematické fyziky*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2012

[5] M. Krbálek: *Teorie míry a Lebesgueova integrálu*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2014 (Je to spravne?)