

# Obsah

<b>1</b>	<b>Posloupnosti a řady funkcí více proměnných</b>	<b>3</b>
1.1	Co zpracovat: . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Funkcionální Hilbertovy prostory</b>	<b>9</b>
2.1	Výchozí pojmy . . . . .	9
2.2	Prehilbertovské prostory funkcí . . . . .	10
2.3	Faktorové prostory funkcí, Hilbertovy prostory . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Teorie pravděpodobnosti</b>	<b>25</b>
3.1	Axiomatická definice pravděpodobnosti . . . . .	25
3.2	Absolutně spojitá náhodná veličina . . . . .	26
3.3	Vícerozměrná náhodná veličina . . . . .	31
3.4	Konvoluce funkcí . . . . .	36
3.5	Báze ve funkcionálních Hilbertových prostorech . . . . .	40



# Kapitola 1

## Posloupnosti a řady funkcí více proměnných

### 1.1 Co zpracovat:

1. je ale  $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$  úplný? (není) - zmínit, okomentovat a vložit asi jako poznámku za poznámku 2.2.12, možná na vhodném místě zmínit definici úplnosti (možná už to někde je, teď si nejsem jistý)

#### 1.1.1 Definice

Nechť  $\emptyset \neq M \subset \mathbf{E}^r$ . Potom každé zobrazení množiny  $\mathbf{N}$  do množiny všech funkcí definovaných na  $M$  nazýváme *posloupností funkcí* na  $M$ . Je-li číslu  $n \in \mathbf{N}$  tímto způsobem přiřazena funkce  $f_n(\vec{x})$ , zapisujeme funkční posloupnost

$$f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots \quad \text{nebo} \quad (f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}. \quad (1.1)$$

Přirozené číslo  $n$  přitom nazýváme *indexem* a funkci  $f_n(\vec{x})$   $n$ -tým členem posloupnosti (1.1).

#### 1.1.2 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (1.1) definovaná na neprázdné množině  $M \subset \mathbf{E}^r$ . Řekneme, že posloupnost funkcí (1.1) *konverguje v bodě*  $\vec{c} \in M$ , jestliže konverguje číselná posloupnost  $(f_n(\vec{c}))_{n=1}^{\infty}$ , tj. existuje-li  $\gamma \in \mathbf{R}$  takové, že pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje přirozené  $n_0$  tak, že pro všechna  $n \geq n_0$  platí nerovnost  $|f_n(\vec{c}) - \gamma| < \varepsilon$ . Řekneme, že posloupnost funkcí (1.1) *konverguje (bodově) na množině*  $N \subset M$ , jestliže konverguje v každém bodě množiny  $N$ .

#### 1.1.3 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (1.1) definovaná na neprázdné množině  $M \subset \mathbf{E}^r$ . Necht' pro každé  $\vec{c} \in N$ , kde  $N \subset M$ , posloupnost  $(f_n(\vec{c}))_{n=1}^{\infty}$  konverguje. Označme  $f(\vec{c})$  hodnotu limity posloupnosti  $(f_n(\vec{c}))_{n=1}^{\infty}$ . Tímto způsobem je na množině  $N$  definována funkce  $\vec{x} \mapsto f(\vec{x})$ , kterou nazýváme *limitou posloupnosti funkcí* (1.1) (nebo zkráceně *limitní funkcí*) a značíme

$$f(\vec{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\vec{x}).$$

*Oborem konvergence*  $\mathcal{O}$  posloupnosti (1.1) nazýváme množinu všech bodů  $\vec{c} \in M$ , ve kterých tato posloupnost konverguje.

#### 1.1.4 Definice

Nechť (1.1) je posloupnost funkcí definovaných na množině  $M \subset \mathbf{E}^r$ . Řekneme, že tato posloupnost *stejněměrně konverguje na*  $M$  k funkci  $f(\vec{x})$ , jestliže pro všechna  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0$  tak, že pro všechna  $n \geq n_0$  a pro všechna  $\vec{x} \in M$  platí nerovnost  $|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \varepsilon$ .

#### 1.1.5 Poznámka

Bodovou konvergenci značíme obvykle symbolem  $f_n(\vec{x}) \rightarrow f(\vec{x})$ , stejněměrnou pak  $f_n(\vec{x}) \Rightarrow f(\vec{x})$ . Rozdíl mezi bodovou a stejněměrnou konvergencí je dobře patrný z kvantifikátorového zápisu definic obou pojmů:

- bodová konvergence

$$(\forall \varepsilon > 0) (\forall \vec{x} \in M) (\exists n_0 \in \mathbf{N}) : \quad n \in \mathbf{N} \wedge n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \varepsilon. \quad (1.2)$$

- stejnoměrná konvergence

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbf{N}) : \quad n \in \mathbf{N} \wedge n \geq n_0 \wedge \vec{x} \in M \Rightarrow |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \varepsilon. \quad (1.3)$$

Stejnomořná konvergence tedy požaduje existenci "univerzálního"  $n_0$ , které plní svoji roli pro všechna  $\vec{x} \in M$ .

### 1.1.6 Věta – Bolzanova-Cauchyova podmínka

Posloupnost funkcí (1.1) je stejnoměrně konvergentní na  $M \subset \mathbf{E}^r$  právě tehdy, když splňuje tzv. *Bolzanovu-Cauchyovu podmínku* tvaru

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbf{N}) : \quad m, n \geq n_0 \wedge \vec{x} \in M \Rightarrow |f_n(\vec{x}) - f_m(\vec{x})| < \varepsilon. \quad (1.4)$$

Důkaz:

- První implikace:

- necht'  $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$  stejnoměrně konverguje na  $M$  k jisté funkci  $f(x)$
- pak pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbf{N}$  takové, že pro libovolná  $m, n \in \mathbf{N}$  taková, že  $m, n \geq n_0$ , a pro všechna  $\vec{x} \in M$  platí

$$|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad |f_m(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- a tedy

$$|f_n(\vec{x}) - f_m(\vec{x})| \leq |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| + |f_m(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \varepsilon$$

- Druhá implikace:

- necht' posloupnost funkcí splňuje vztah (1.4)
- podle Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro číselné posloupnosti posloupnost (1.1) konverguje bodově k jisté funkci na množině  $M$  (označme ji  $f(\vec{x})$ )
- chceme dokázat  $f_n(\vec{x}) \rightrightarrows f(\vec{x})$  na  $M$
- zvolme  $\varepsilon > 0$  a k číslu  $\frac{\varepsilon}{2}$  vyberme podle (1.4)  $n_0$  tak, aby pro všechna  $m, n \geq n_0$  platilo

$$|f_n(\vec{x}) - f_m(\vec{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- pro libovolné pevně zvolené  $n \geq n_0$  a pro  $m$  rostoucí nade všechny meze pak odsud dostaneme nerovnost  $|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$  platnou pro každé  $\vec{x} \in M$

- tím je důkaz zkompletován

### 1.1.7 Věta – supremální kritérium

Necht'  $f(\vec{x})$  a  $f_n(\vec{x})$  pro všechna  $n$  jsou funkce definované na množině  $M \subset \mathbf{E}^r$ . Označme

$$\sigma_n := \sup_{\vec{x} \in M} |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})|$$

pro každé  $n$ . Pak posloupnost funkcí  $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$  konverguje na množině  $M$  stejnoměrně k funkci  $f(\vec{x})$  právě tehdy, když  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$ .

Důkaz:

- pro všechna  $\vec{x} \in M$  a všechna  $n \in \mathbf{N}$  zřejmě platí nerovnost  $|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| \leq \sigma_n$

- První implikace:

- předpokládejme, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$
- z definice limity číselné posloupnosti  $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$  plyne, že pro libovolné  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0$  takové, že  $|\sigma_n| = \sigma_n < \varepsilon$  pro všechna  $n \geq n_0$
- to značí (jak vyplývá z definice suprema), že pro všechna  $n \geq n_0$  a všechna  $\vec{x} \in M$  platí také  $|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \varepsilon$ , a tedy  $f_n(\vec{x}) \rightrightarrows f(\vec{x})$  na  $M$

• Druhá implikace:

- předpokládejme, že  $f_n(\vec{x}) \Rightarrow f(\vec{x})$  na  $M$
- zvolme libovolné  $\varepsilon > 0$ , k němuž jistě existuje  $n_0$  takové, že pro všechna  $n \geq n_0$  a všechna  $\vec{x} \in M$  platí nerovnost  $|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \varepsilon/2$
- odtud a z vlastností suprema plyne, že pro  $n \geq n_0$  platí  $\sigma_n \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ , a tedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$

### 1.1.8 Definice

Necht' je dána posloupnost funkcí (1.1) definovaná na neprázdné množině  $M \subset \mathbf{E}^r$ . Potom nekonečný součet

$$f_1(\vec{x}) + f_2(\vec{x}) + \dots + f_n(\vec{x}) + \dots$$

nazýváme *řadou funkcí* na  $M$  a značíme symbolem

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}). \quad (1.5)$$

### 1.1.9 Definice

Necht' je dána funkční řada (1.5) definovaná na množině  $M$ . Funkci  $s_n(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n f_k(\vec{x})$  pro  $n \in \mathbf{N}$  a  $\vec{x} \in M$  budeme nazývat *n-tým částečným součtem* řady (1.5) a posloupnost  $(s_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$  pak *posloupností částečných součtů* dané řady.

### 1.1.10 Definice

Necht' je dána funkční řada (1.5) definovaná na množině  $M$ . Necht'  $(s_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$  je příslušná posloupnost částečných součtů. Řekneme, že řada (1.5) *konverguje v bodě*  $\vec{c} \in M$ , jestliže konverguje číselná posloupnost  $(s_n(\vec{c}))_{n=1}^{\infty}$ . Řekneme, že řada (1.5) *konverguje (bodově)* na množině  $N \subset M$ , jestliže konverguje v každém bodě množiny  $N$ . Vlastní limitu

$$s(\vec{x}) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\vec{x})$$

posloupnosti částečných součtů pak nazýváme *součtem řady* (1.5) a zapisujeme

$$s(\vec{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}). \quad (1.6)$$

Definiční obor  $\text{Dom}(s)$ , tj. množinu všech  $\vec{c} \in M$ , pro něž posloupnost  $(s_n(\vec{c}))_{n=1}^{\infty}$  konverguje, budeme dále nazývat *oborem konvergence řady* (1.5) a značit symbolem  $\mathcal{O}$ .

### 1.1.11 Definice

Řekneme, že řada funkcí  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$  konverguje na množině  $M \subset \mathbf{E}^r$  *stejněměrně* ke svému součtu  $s(\vec{x})$  a označíme  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}) \stackrel{M}{\equiv} s(\vec{x})$ , jestliže posloupnost jejích částečných součtů konverguje na  $M$  stejněměrně k funkci  $s(\vec{x})$ .

### 1.1.12 Věta – Bolzanova-Cauchyova podmínka

Řada funkcí (1.5) konverguje na množině  $M \subset \mathbf{E}^r$  stejněměrně právě tehdy, když pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje index  $n_0 \in \mathbf{N}$  takový, že pro jakékoli dva indexy  $m, n \in \mathbf{N}$  takové, že  $m \geq n \geq n_0$  a pro jakékoliv  $\vec{x} \in M$  je splněna nerovnost

$$|f_n(\vec{x}) + f_{n+1}(\vec{x}) + \dots + f_m(\vec{x})| < \varepsilon.$$

Důkaz:

- tvrzení této věty bezprostředně plyne z věty 1.1.6
- označíme-li totiž  $(s_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$  příslušnou posloupnost částečných součtů, získáváme rovnosti

$$s_{n-1}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k(\vec{x}), \quad s_m(\vec{x}) = \sum_{k=1}^m f_k(\vec{x})$$

- podle věty 1.1.6 (v nepatrné obměně) konverguje posloupnost  $(s_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$  na  $M$  stejnoměrně právě tehdy, když pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje index  $n_0 \in \mathbf{N}$  takový, že pro jakékoli dva indexy  $m, n \in \mathbf{N}$  takové, že  $m \geq n \geq n_0$  a pro jakékoliv  $\vec{x} \in M$  je splněna nerovnost  $|s_m(\vec{x}) - s_{n-1}(\vec{x})| < \varepsilon$
- z této nerovnosti ovšem vyplývá, že

$$\left| \sum_{k=1}^m f_k(\vec{x}) - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(\vec{x}) \right| = |f_n(\vec{x}) + f_{n+1}(\vec{x}) + \dots + f_m(\vec{x})| < \varepsilon$$

### 1.1.13 Definice

Řekneme, že řada funkcí  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$  konverguje na množině  $M \subset \mathbf{E}^r$  *regulárně*, jestliže řada  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\vec{x})|$  konverguje na  $M$  stejnoměrně.

### 1.1.14 Věta – nutná podmínka stejnoměrné konvergence

Jestliže řada funkcí  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$  konverguje na množině  $M \subset \mathbf{E}^r$  stejnoměrně, potom posloupnost funkcí  $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$  konverguje na této množině stejnoměrně k nulové funkci.

Důkaz:

- z předpokladů věty plyne, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall m, n \in \mathbf{N})(m \geq n \geq n_0)(\forall \vec{x} \in M) : |f_n(\vec{x}) + f_{n+1}(\vec{x}) + \dots + f_m(\vec{x})| < \varepsilon$$

- jelikož toto tvrzení platí pro jakákoli  $m, n \in \mathbf{N}$  taková, že  $m \geq n \geq n_0$ , platí také při speciální volbě  $m = n$
- pak ale

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n \geq n_0)(\forall \vec{x} \in M) : |f_n(\vec{x})| = |f_n(\vec{x}) - o(\vec{x})| < \varepsilon$$

- tento výrok je ale ekvivalentní tvrzení, že posloupnost funkcí  $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$  konverguje na množině  $M$  stejnoměrně k nulové funkci

### 1.1.15 Definice

Nechť jsou dány funkční řady  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$  definované na množině  $M$ . Nechť existuje  $n_0 \in \mathbf{N}$  tak, že pro všechna  $n \geq n_0$  a všechna  $\vec{x} \in M$  platí  $|f_n(\vec{x})| \leq g_n(\vec{x})$ . Pak řadu  $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$  nazýváme řadou *majorantní* k řadě  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ .

### 1.1.16 Věta – srovnávací kritérium

Nechť řada  $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$  je na množině  $M \subset \mathbf{E}^r$  majorantní k řadě  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$  a nechť řada  $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$  je stejnoměrně konvergentní na  $M$ . Pak jsou řady  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\vec{x})|$  stejnoměrně konvergentní na  $M$ , tj. řada  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$  konverguje na  $M$  regulárně.

Důkaz:

- užijeme Bolzanovu-Cauchyovu podmínku 1.1.12
- z předpokladu víme, že řada  $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$  stejnoměrně konverguje na  $M$ , tedy pro jakékoli  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0$  takové, že pro všechna přirozená  $m \geq n \geq n_0$  a pro všechna  $\vec{x} \in M$  platí

$$0 \leq g_n(\vec{x}) + g_{n+1}(\vec{x}) + \dots + g_m(\vec{x}) < \varepsilon$$

- dále víme, že existuje  $m_0$  tak, že pro všechna  $x \in M$  a všechny indexy  $n \geq m_0$  platí  $|f_n(\vec{x})| \leq g_n(\vec{x})$
- pro zvolené  $\varepsilon$  a všechna  $n \geq \max\{n_0, m_0\}$  pak platí

$$|f_n(\vec{x}) + f_{n+1}(\vec{x}) + \dots + f_m(\vec{x})| \leq |f_n(\vec{x})| + |f_{n+1}(\vec{x})| + \dots + |f_m(\vec{x})| \leq g_n(\vec{x}) + g_{n+1}(\vec{x}) + \dots + g_m(\vec{x}) < \varepsilon$$

- to dokazuje obě tvrzení věty

**1.1.17 Důsledek**

Konverguje-li řada na množině  $M$  regulárně, konverguje na  $M$  také stejnoměrně.

**1.1.18 Věta – Weierstrassovo kritérium**

Necht'  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je konvergentní číselná řada,  $f_n(\vec{x})$  jsou funkce a pro všechna  $\vec{x} \in M \subset \mathbf{E}^r$  a všechna  $n \in \mathbf{N} \setminus \widehat{n_0}$  je  $|f_n(\vec{x})| \leq a_n$ . Pak řady  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\vec{x})|$  stejnoměrně konvergují na  $M$ , tj. řada  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$  konverguje na  $M$  regulárně.

Důkaz:

- v předchozí větě položíme  $g_n(\vec{x}) := a_n$  pro všechna  $\vec{x} \in M$  a uvědomíme si, že pojmy bodové a stejnoměrné konvergence u řady konstantních funkcí splývají





## Kapitola 2

# Funkcionální Hilbertovy prostory

### 2.1 Výchozí pojmy

#### 2.1.1 Značení

$\mathcal{C}^n(M)$  je třída všech funkcí, které mají na množině  $M$  spojitě derivace až do řádu  $n$ , přičemž  $\mathcal{C}(M) = \mathcal{C}^0(M)$ . Nachází-li se index nula dole  $\mathcal{C}_0^n(M)$ , pak  $M$  je kompaktní. Symbol  $\mathcal{C}_0^n$  značí všechny funkce třídy  $\mathcal{C}^n(\mathbf{E}^r)$ , které mají libovolný, ale kompaktní nosič.  $\mathcal{L}(G)$  je třída Lebesgueovsky integrovatelných funkcí na množině  $G$ . Třída funkcí majících Lebesgueův integrál na  $G$  se značí  $\mathcal{L}^*(G)$ . Třidu Lebesgueovsky lokálně integrovatelných funkcí značíme  $\mathcal{L}_{\text{loc}}(G)$  a definujeme ji v následujícím textu.

#### 2.1.2 Úmluva

Symbol  $G$  bude nadále reprezentovat  $r$ -dimenzionální *oblast*, tj. otevřenou a souvislou podmnožinu množiny  $\mathbf{E}^r$ . Dále symbol  $J$  bude označovat *kompakt*, tj. uzavřenou a omezenou podmnožinu množiny  $\mathbf{E}^r$ . Funkcí budeme rozumět zobrazení  $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{C}$ .

#### 2.1.3 Úmluva

V celém následujícím textu budeme předpokládat, že je zadána klasická a úplná Lebesgueova míra  $\lambda(X) : \mathcal{M}_\lambda \mapsto \mathbf{R}^+$  generovaná ve všech dimenzích klasickou vytvořující  $\varphi(x) = x$ . Tudíž soustava  $\mathcal{M}_\lambda$  všech  $\lambda$ -měřitelných podmnožin množiny  $\mathbf{E}^r$  je  $\sigma$ -algebrou a  $\lambda(X)$  je na ní  $\sigma$ -aditivní mírou. Systém  $\{\mathbf{E}^r, \mathcal{M}_\lambda, \lambda(X)\}$  je tedy pro nás nyní výchozím prostorem s úplnou mírou.

#### 2.1.4 Definice

Nechť  $r \in \mathbf{N}$  a  $\vec{\mu} \in \mathbf{R}^r$ . *Heavisideovou* [hevisajdovou] funkcí budeme rozumět funkci  $\Theta(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \{0, 1\}$  definovanou předpisem

$$\Theta(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & \dots & x_1 > 0 \wedge x_2 > 0 \wedge \dots \wedge x_r > 0 \\ 0 & \dots & x_1 \leq 0 \vee x_2 \leq 0 \vee \dots \vee x_r \leq 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

*Centrovanou Heavisideovou* funkcí budeme rozumět funkci  $\Theta_{\vec{\mu}}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \{0, 1\}$  definovanou předpisem

$$\Theta_{\vec{\mu}}(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & \dots & x_1 > \mu_1 \wedge x_2 > \mu_2 \wedge \dots \wedge x_r > \mu_r \\ 0 & \dots & x_1 \leq \mu_1 \vee x_2 \leq \mu_2 \vee \dots \vee x_r \leq \mu_r. \end{cases} \quad (2.2)$$

#### 2.1.5 Poznámka

Funkce  $f(\vec{x})$  je, podle věty 5.3.45 a důsledku 5.3.46 v [5], na  $G$  Lebesgueovsky integrovatelná právě tehdy, když je  $\lambda$ -měřitelná a její absolutní hodnota je Lebesgueovsky integrovatelná.

$$f(\vec{x}) \in \mathcal{L}(G, \mu) \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| \in \mathcal{L}(G, \mu) \wedge f(x) \in L_\mu(G).$$

Budeme-li tedy mluvit o měřitelných funkcích, tak platí, že

$$f(x) \in \mathcal{L}(G, \mu) \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| \in \mathcal{L}(G, \mu)$$

### 2.1.6 Definice

Nechť je dána funkce  $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{R}$ . Řekneme, že funkce  $f(\vec{x})$  je *lokálně integrabilní* na  $G$  a označíme symbolem  $f(\vec{x}) \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(G, \mu(X))$  nebo zkráceně  $f(\vec{x}) \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(G)$ , jestliže pro každý bod  $\vec{c} \in G$  existuje  $\varepsilon > 0$  tak, že  $f(\vec{x}) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c}))$ , tj.

$$\int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})} f(\vec{x}) \, d\mu(\vec{x}) \in \mathbf{R}.$$

### 2.1.7 Věta

Nechť  $G$  je oblast v  $\mathbf{E}^r$ . Funkce  $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{R}$  je lokálně integrabilní na  $G$  právě tehdy, když pro každou kompaktní množinu  $J \subset G$  platí, že

$$\int_J f(\vec{x}) \, d\mu(\vec{x}) \in \mathbf{R}.$$

Důkaz:

- dokážeme nejprve, že pokud pro každou kompaktní množinu  $J \subset G$  platí, že integrál  $\int_J f(\vec{x}) \, d\mu(\vec{x})$  konverguje, pak je  $f(\vec{x})$  je lokálně integrabilní na  $G$
- zvolme tedy libovolně bod  $\vec{c} \in G$
- jelikož  $G$  je otevřená, jistě existuje  $\varepsilon > 0$  tak, že  $K = \overline{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})}$ ,  $K \subset G$ ,  $K$  je kompaktní a  $\vec{c} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})$
- integrál  $\int_K f(\vec{x}) \, d\mu(\vec{x})$  ale existuje z předpokladu
- $\text{bd}(K)$  je  $\mu$ -nulová množina, neboť se jedná o plášť  $r$ -rozměrné koule, a z teorie Lebesgueova integrálu tudíž platí, že  $\int_K f(\vec{x}) \, d\mu(\vec{x}) = \int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})} f(\vec{x}) \, d\mu(\vec{x})$ , a navíc jsme  $\vec{c}$  volili libovolně.
- pro důkaz obrácené implikace předpokládejme, že  $f(\vec{x})$  je lokálně integrabilní na  $G$
- zvolme  $K$  jako libovolnou kompaktní množinu, která je podmnožinou oblasti  $G$
- podle teorie míry jistě  $K \in \mathcal{M}_\mu$ , neboť  $\mathbf{E}^r \in \mathcal{S}_r \subset \mathcal{M}_\mu$ , a  $\mathcal{M}_\mu$  je  $\sigma$ -algebra **zde je nedefinovaný příkaz \setminusminusK, co ma znamenat?**
- Borelova věta ale říká, že z každého otevřeného pokrytí kompaktní množiny lze vybrat pokrytí konečné, tj. existuje soustava oblastí  $\{G_k : k \in \widehat{n}\}$  tak, že  $\bigcup_{k=1}^n G_k \supset K$  a  $G_k = \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_k)$  pro jisté body  $\vec{x}_k \in K$
- všechny integrály  $\int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_k)} f(\vec{x}) \, d\mu(\vec{x})$  ale existují z předpokladu této implikace
- dále také existují (jak víme z teorie Lebesgueova integrálu všechny integrály)  $\int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_k) \cap \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_\ell)} f(\vec{x}) \, d\mu(\vec{x})$  pro  $k, \ell \in \widehat{n}$
- existují rovněž integrály  $\int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_k) \cap K} f(\vec{x}) \, d\mu(\vec{x})$ , což společně garantuje existenci integrálu  $\int_K f(\vec{x}) \, d\mu(\vec{x})$
- tímto je důkaz dokončen

## 2.2 Prehilbertovské prostory funkcí

V této sekci se pokusíme rozhodnout jestli z vybraných vektorových prostorů funkcí lze vytvořit prehilbertovské prostory funkcí, tj. vektorové prostory se skalárním součinem. Připomeňme si definici skalárního součinu.

### 2.2.1 Definice

Nechť  $\mathcal{V}$  je libovolný vektorový prostor nad tělesem  $\mathbf{C}$ . Zobrazení  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbf{C}$  nazveme *skalárním součinem*, jestliže splňuje tzv. *axiomy skalárního součinu*:

- *levá linearita*: pro všechna  $f(\vec{x}), g(\vec{x}), h(\vec{x}) \in \mathcal{V}$  a každé  $\alpha \in \mathbf{C}$  platí  $\langle \alpha f + g | h \rangle = \alpha \langle f | h \rangle + \langle g | h \rangle$
- *hermiticity*: pro všechna  $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{V}$  platí  $\langle f | g \rangle = \langle g | f \rangle^*$
- *pozitivní definitnost*: pro všechna  $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}$  platí  $\langle f | f \rangle \geq 0$  a navíc  $\langle f | f \rangle = 0$  právě tehdy, když  $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$ .

Dvojici  $\{\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$  nazýváme *prehilbertovským prostorem*.

### 2.2.2 Definice

Nechť  $\mathcal{V}$  je vektorový prostor funkcí nad tělesem  $\mathbf{C}$ . Zobrazení  $\|\cdot\| : \mathcal{V} \mapsto \mathbf{R}$  nazveme *normou*, jestliže splňuje tzv. *axiomy normy*:

- *nulovost*:  $\|f\| = 0$  právě tehdy, když  $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$
- *trojúhelníková nerovnost*: pro všechna  $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{V}$  platí:  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$
- *homogenita*: pro všechna  $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}$  a každé  $\lambda \in \mathbf{C}$  platí:  $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ .

Dvojici  $\{\mathcal{V}, \|\cdot\|\}$  nazýváme *normovaným prostorem*.

### 2.2.3 Příklad

Ukážeme, že pro libovolnou funkci  $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}$  z normovaného prostoru  $\mathcal{V}$  s normou  $\|\cdot\|$  platí nerovnost  $\|f\| \geq 0$ . Nejprve snadno prokážeme, že norma opačného vektoru je stejná jako norma vektoru původního. Položme  $\lambda = -1$ . Pak z axiomu homogenity plyne  $\|-f\| = |-1| \|f\| = \|f\|$ . Dále pak v trojúhelníkové nerovnosti položíme  $g(\vec{x}) := -f(\vec{x})$ . Pak

$$0 = \|o(\vec{x})\| = \|f(\vec{x}) + (-f(\vec{x}))\| \leq \|\vec{f}(\vec{x})\| + \|-f(\vec{x})\| = 2\|\vec{f}(\vec{x})\|,$$

odkud je již patrné, že  $\|f\| \geq 0$ .

### 2.2.4 Věta

Nechť  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  je skalární součin definovaný na vektorovém prostoru  $\mathcal{V}$  nad tělesem  $\mathbf{C}$ . Pak zobrazení  $\mathfrak{n}(f)$  definované předpisem

$$\mathfrak{n}(f) := \sqrt{\langle f | f \rangle} \quad (2.3)$$

je normou na  $\mathcal{V}$ .

Důkaz:

- ověříme axiomy normy
- axiom nulovosti:
  - je-li  $f(\vec{x}) = 0$ , pak  $\mathfrak{n}^2(0) := \langle o, o \rangle = 0$
  - je-li  $\mathfrak{n}(f) = 0$ , pak tedy  $\langle f, f \rangle = 0$ , ale podle axiomu pozitivní definitnosti skalárního součinu toto může nastat pouze tehdy, je-li  $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$
  - tím je ekvivalence požadovaná v axiomu nulovosti normy prokázána
- axiom trojúhelníkové nerovnosti:
  - provedeme následující sérii úprav
 
$$\begin{aligned} \mathfrak{n}^2(f + g) &= \langle f + g | f + g \rangle = \langle f | f \rangle + \langle f | g \rangle + \langle g | f \rangle + \langle g | g \rangle = \\ &= 2 \operatorname{Re}(\langle f | g \rangle) + \langle f | f \rangle + \langle g | g \rangle \leq 2|\langle f | g \rangle| + \mathfrak{n}^2(f) + \mathfrak{n}^2(g) \end{aligned}$$
  - uijeme-li nyní Schwarzovy-Cauchyovy-Bunjakovského nerovnosti (viz [2]), dostáváme
 
$$\mathfrak{n}^2(f + g) \leq 2 \mathfrak{n}(f) \mathfrak{n}(g) + \mathfrak{n}^2(f) + \mathfrak{n}^2(g) = (\mathfrak{n}(f) + \mathfrak{n}(g))^2$$
  - tím je dokázáno, že  $\mathfrak{n}(f + g) \leq \mathfrak{n}(f) + \mathfrak{n}(g)$
- axiom homogenity:
  - nechť tedy  $\lambda \in \mathbf{C}$  je zvoleno libovolně
  - pak snadno  $\mathfrak{n}(\lambda f) := \sqrt{\langle \lambda f | \lambda f \rangle} = \sqrt{\lambda \lambda^*} \sqrt{\langle f | f \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2} \mathfrak{n}(f) = |\lambda| \mathfrak{n}(f)$
- tím je prokázáno, že zobrazení  $\mathfrak{n}(f)$  je normou na  $\mathcal{V}$

### 2.2.5 Definice

Nechť  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  je skalární součin definovaný na vektorovém prostoru  $\mathcal{V}$  nad tělesem  $\mathbf{C}$ . Pak zobrazení  $\mathfrak{n}(f)$  definované vztahem (2.3) nazýváme *normou generovanou skalárním součinem*.

### 2.2.6 Věta

Nechť je dán vektorový prostor  $\mathcal{V}$  nad tělesem  $\mathbf{C}$  a skalární součin  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . Nechť  $\|\cdot\|$  je norma generovaná tímto skalárním součinem. Nechť je dána posloupnost funkcí  $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$  z prostoru  $\mathcal{V}$ , pro niž existuje funkce  $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}$  tak, že platí následující implikace:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : n > n_0 \implies \|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\| < \varepsilon.$$

Nechť je funkce  $g(\vec{x}) \in \mathcal{V}$  zvolena libovolně. Pak platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n | g \rangle = \langle f | g \rangle, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g | f_n \rangle = \langle g | f \rangle.$$

Důkaz:

- snadno nahlédneme, že pro  $g(\vec{x}) = o(\vec{x})$  platí citovaná rovnost triviálně
- uvažujme tedy nyní pouze ty funkce, které nejsou nulové, tedy ty, pro něž  $\|g(\vec{x})\| \neq 0$
- chceme dokázat, že číselná posloupnost  $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ , kde  $\gamma_n := \langle f_n | g \rangle$  konverguje k číslu  $\gamma := \langle f | g \rangle$
- je tedy třeba prokázat, že pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $m_0 \in \mathbf{N}$  tak, že pro všechny indexy  $m > m_0$  platí nerovnost  $|\gamma_m - \gamma| < \varepsilon$
- z předpokladu

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : n > n_0 \implies \|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\| < \frac{\varepsilon}{\|g\|},$$

z axiomů skalárního součinu a z Schwarzovy-Cauchyovy-Bunjakovského nerovnosti ale vyplývá, že

$$|\gamma_m - \gamma| = |\langle f_m | g \rangle - \langle f | g \rangle| = |\langle f_m - f | g \rangle| \leq \|f_m - f\| \cdot \|g\| < \frac{\varepsilon}{\|g\|} \|g\| = \varepsilon$$

- postačí tedy volit  $m_0 := n_0$
- tvrzení  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle g | f_n \rangle = \langle g | f \rangle$  lze dokázat zcela analogicky

### 2.2.7 Lemma

Nechť  $a \in \mathbf{R}$  a  $b \in (a, \infty)$ . Nechť  $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$  je vektorový prostor všech funkcí  $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$  spojitých na intervalu  $\langle a, b \rangle$  zavedený nad tělesem  $\mathbf{C}$ . Nechť je dána funkce  $w(x) \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$  kladná na  $\langle a, b \rangle$ . Pak formule

$$\langle f(x) | g(x) \rangle_w := \int_a^b f(x) g^*(x) w(x) dx \quad (2.4)$$

splňuje axiomy skalárního součinu na  $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$ .

### 2.2.8 Lemma

Nechť  $a \in \mathbf{R}$  (nebo  $a = -\infty$ ) a  $b \in (a, \infty)$  (nebo  $b = +\infty$ ). Nechť  $\mathcal{V}$  je vektorový prostor všech omezených a spojitých funkcí na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Nechť  $w(x)$  je kladná funkce na  $(a, b)$ , pro kterou platí  $w(x) \in \mathcal{L}(\langle a, b \rangle)$ . Pak (2.4) splňuje axiomy skalárního součinu na  $\mathcal{V}$ .

### 2.2.9 Definice

Spojitou a kladnou funkci  $w(x)$  z předešlých lemmat nazýváme *vahou skalárního součinu* a vybrané reprezentanty nazýváme následovně:

- *standardní (Legendreova) váha*: pro libovolnou volbu  $a, b \in \mathbf{R}$  a  $w(x) = \Theta(a)\Theta(b-x)$ ,
- *Laguerreova váha*: pro volbu  $a = 0, b = \infty$  a  $w(x) = \Theta(x)e^{-x}$ ,
- *Hermiteova váha*: pro volbu  $a = -\infty, b = \infty$  a  $w(x) = e^{-x^2}$ ,
- *Čebyševova váha*: pro volbu  $a = -1, b = 1$  a  $w(x) = \frac{\Theta(1-|x|)}{\sqrt{1-x^2}}$ .

### 2.2.10 Definice

Nechť  $p \geq 1$  je pevně zvolený parametr. Pak třídu všech měřitelných funkcí  $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{C}$ , pro něž

$$\int_G |f(\vec{x})|^p d\lambda(\vec{x}) \in \mathbf{R},$$

označujeme symbolem  $\mathcal{L}_p(G)$ . Neboli

$$\mathcal{L}_p(G) = \left\{ f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{C} : \int_G |f(\vec{x})|^p d\mu(\vec{x}) \in \mathbf{R} \right\}$$

### 2.2.11 Věta

Nechť  $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{L}_2(G)$ . Potom  $f(\vec{x})g^*(\vec{x}) \in \mathcal{L}_1(G)$ .

Důkaz:

- stačí si uvědomit, že  $|f(\vec{x})g^*(\vec{x})| \leq \frac{1}{2}|f(\vec{x})|^2 + \frac{1}{2}|g(\vec{x})|^2$
- jelikož oba členy součtu patří do  $\mathcal{L}(G)$ , tak ze srovnávacího kritéria plyne, že také  $|f(\vec{x})g^*(\vec{x})| \in \mathcal{L}(G)$
- je vhodné si zopakovat poznámku 2.1.5 a uvědomit si, že pro měřitelné funkce platí  $f(\vec{x}) \in \mathcal{L}(G) \Leftrightarrow |f(\vec{x})| \in \mathcal{L}(G)$

### 2.2.12 Poznámka

Vztahy  $\int_G f(x)g^*(x)w(x) dx$ , resp.  $\int_G f(\vec{x})g^*(\vec{x})w(\vec{x}) d\vec{x}$  však na některých vektorových prostorech skalární součin nedefinují. Jedním z takových prostorů je např. prostor  $\mathcal{L}_1(0, 1)$ . Funkce  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  do prostoru  $\mathcal{L}_1(0, 1)$  patří, nebo?

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2,$$

ale integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

nekonverguje. Podobně také prostory  $\mathcal{L}(G)$  nebo  $\mathcal{L}_1(G)$  pro  $G = (0, \infty)$  negenerují spolu s operací  $\int_0^\infty f(x)g^*(x) dx$  prehilbertovský prostor.

$\mathcal{L}_2(G)$  také není prehilbertovský, protože není splněn axiom pozitivní definitnosti skalárního součinu, tedy neplatí, že

$$\langle f(x)|f(x) \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0$$

Může totiž existovat  $f(x) \neq 0$  taková, že bude  $\int_a^b f(x)f^*(x)dx = 0$ . Například tak, že má nenulovou hodnotu na množině míry nula.

### 2.2.13 Definice

Dirichletovou funkcí budeme rozumět funkci

$$\mathfrak{D}(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & \dots & \vec{x} \in \mathbf{Q}^r \\ 0 & \dots & \vec{x} \in \mathbf{R}^r \setminus \mathbf{Q}^r. \end{cases} \quad (2.5)$$

### 2.2.14 Poznámka

Zavedeme-li na prostoru  $\mathcal{L}_2(G)$  zobrazení  $\langle f|g \rangle : \mathcal{L}_2(G) \times \mathcal{L}_2(G) \mapsto \mathbf{C}$  předpisem

$$\langle f|g \rangle = \int_G f(\vec{x}) g^*(\vec{x}) d\mu(\vec{x}),$$

pak toto zobrazení není skalárním součinem, neboť není splněn axiom pozitivní definitnosti z definice skalárního součinu. Rovnost  $\langle f|f \rangle = 0$  by podle něho měla být splněna tehdy a jen tehdy, pokud  $f(\vec{x}) = 0(\vec{x})$ , tedy pokud  $f(\vec{x})$  je ryze nulová funkce. Snadno ale nahlédneme, že pro Dirichletovu funkci platí rovnost  $\mathfrak{D}^2(\vec{x}) = \mathfrak{D}(\vec{x})$ , a tudíž (podle teorie Lebesgueova integrálu)

$$\langle \mathfrak{D}|\mathfrak{D} \rangle = \int_G \mathfrak{D}(\vec{x}) \mathfrak{D}^*(\vec{x}) d\mu(\vec{x}) = \int_G \mathfrak{D}(\vec{x}) d\mu(\vec{x}) = 0.$$

Abychom se tedy konečně dostali k nějakému prehilbertovu, a následně Hilbertovu, prostoru budeme potřebovat zobecnění a úvahy, které probereme v následující sekci.

## 2.3 Faktorové prostory funkcí, Hilbertovy prostory

Od termínu funkce nyní přejdeme k faktorové funkci, resp. faktorovému prostoru funkcí. Třidu všech funkcí, jež jsou měřitelné a zároveň jsou mezi sebou vzájemně  $\mu$ -ekvivalentní, tj. liší se pouze na množině míry nula, nazveme *faktorová skupina funkcí*. Třidu všech funkcí, které jsou měřitelné a zároveň ekvivalentní s nulovou funkcí ( $f(\vec{x}) = 0(\vec{x})$ ) označíme symbolem  $F_0$ . Do třídy  $F_0$  tedy patří i Dirichletova funkce  $\mathfrak{D}(\vec{x})$ . Libovolného zástupce z vybrané faktorové skupiny funkci nazveme *faktorovou funkcí*. Pro jednoduchost budeme nadále používat termín funkce, ale mějme pořád na paměti, že jde jen o jednoho vybraného zástupce celé skupiny funkcí.

### 2.3.1 Definice

*Faktorovou funkcí*  $\hat{f}(\vec{x})$  nazveme množinu všech funkcí, jež jsou vzájemně  $\mu$ -ekvivalentní s vybranou měřitelnou funkcí  $f(\vec{x}) \in \Lambda(G)$ , tj.

$$\hat{f}(\vec{x}) := \{g(\vec{x}) \in \Lambda(G) : g \sim f\}.$$

Množinu všech faktorových funkcí nazveme *faktorovým prostorem* nad  $G$  a označíme  $F(G)$ .

### 2.3.2 Poznámka

Tedy funkce  $f(\vec{x})$  a  $g(\vec{x})$  z předešlé definice se liší pouze na množině nulové míry. Dále si uvědomme, že integrál všech prvků faktorové funkce na dané oblasti  $G$  má stejnou hodnotu. Má tedy smysl definovat

$$\int_G \hat{f}(\vec{x}) \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) := \int_G f(\vec{x}) \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}),$$

kde  $f(\vec{x})$  je libovolný zástupce faktorové funkce  $\hat{f}(\vec{x})$ .

### 2.3.3 Definice

Nechť  $p \geq 1$ . Symbolem  $\mathbb{L}_p(G)$  označíme množinu všech (faktorových) funkcí  $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbb{C}$ , pro něž  $|f(\vec{x})|^p \in \mathcal{L}(G)$ , tedy

$$\int_G |f(\vec{x})|^p \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) < +\infty.$$

### 2.3.4 Věta

Zobrazení  $\langle f|g \rangle : \mathbb{L}_2(G) \times \mathbb{L}_2(G) \mapsto \mathbb{C}$  zavedené na  $\mathbb{L}_2(G)$  předpisem

$$\langle f|g \rangle = \int_G f(\vec{x}) g^*(\vec{x}) \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) \tag{2.6}$$

reprezentuje skalární součin. Prostor  $\mathbb{L}_2(G)$  je tudíž prehilbertovským prostorem.

Důkaz:

- axiom levé linearit je splněn triviálně, podobně jako hermiticity
- pro libovolnou funkci  $f(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$  pak platí, že

$$\langle f|f \rangle = \int_G f(\vec{x}) f^*(\vec{x}) \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) = \int_G |f(\vec{x})|^2 \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) \geq 0$$

a navíc rovnost

$$\langle f|f \rangle = \int_G f(\vec{x}) f^*(\vec{x}) \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) = \int_G |f(\vec{x})|^2 \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) = 0$$

nastává pouze pro nulovou faktorovou funkci

- tím je naplněn axiom pozitivní definitnosti
- zbývá dokázat, že pro libovolné dvě funkce  $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$  je výraz  $\langle f|g \rangle = \int_G f(\vec{x}) g^*(\vec{x}) \, \mathrm{d}\mu(\vec{x})$  dobře definován

- jelikož je na  $G$  splněna nerovnost

$$2|f(\vec{x})g^*(\vec{x})| \leq |f(\vec{x})|^2 + |g^*(\vec{x})|^2 = |f(\vec{x})|^2 + |g(\vec{x})|^2$$

a oba integrály  $\int_G |f(\vec{x})|^2 d\lambda(\vec{x})$  a  $\int_G |g(\vec{x})|^2 d\lambda(\vec{x})$  existují z definice prostoru  $\mathbb{L}_2(G)$  a z věty o absolutní hodnotě Lebesgueova integrálu, existuje podle srovnávacího kritéria také integrál  $\int_G f(\vec{x})g^*(\vec{x}) d\mu(\vec{x})$

### 2.3.5 Poznámka

Je-li vztah (2.6) skalárním součinem na  $\mathbb{L}_2(G)$ , pak je zobrazení

$$\|f(\vec{x})\| = \sqrt{\int_G |f(\vec{x})|^2 d\lambda(\vec{x})}$$

normou na  $\mathbb{L}_2(G)$ . Zobrazení

$$\varrho(f, g) := \sqrt{\int_G |f(\vec{x}) - g(\vec{x})|^2 d\lambda(\vec{x})}$$

je metrikou na  $\mathbb{L}_2(G)$ .

### 2.3.6 Definice

Řekneme, že posloupnost funkcí  $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^\infty$  z prostoru  $\mathbb{L}_2(G)$  *konverguje podle normy* k funkci  $f(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$ , pokud pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pro všechna  $n \geq n_0$  platí

$$\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\| < \varepsilon,$$

to jest

$$\sqrt{\int_G |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})|^2 d\mu(\vec{x})} < \varepsilon.$$

Konvergenci podle normy zapisujeme symbolem  $f_n(\vec{x}) \rightarrow f(\vec{x})$ .

### 2.3.7 Příklad

Rozhodněme podle definice, zda posloupnost funkcí  $(e^{-nx^2})_{n=1}^\infty$  z prostoru  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$  konverguje podle normy k nulové funkci. Necht'  $\varepsilon > 0$  je zvoleno libovolně. Limitní faktorovou funkcí pro zkoumanou posloupnost je nulová funkce. Zkoumejme tedy nerovnost

$$\|e^{-nx^2}\| = \sqrt{\int_G e^{-2nx^2} d\mu(\vec{x})} = \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{1/4} < \varepsilon.$$

Za hledané  $n_0 \in \mathbb{N}$  z definice konvergence podle normy tedy stačí volit

$$n_0 := \left\lfloor \frac{\pi}{2\varepsilon^4} \right\rfloor + 1.$$

Povšimněme si ale paradoxu, že posloupnost  $(e^{-nx^2})_{n=1}^\infty$  *nekonverguje* (uvažujeme-li konvergenci klasickou) k nulové funkci ani stejnoměrně ani bodově. Vztah mezi klasickou konvergencí a konvergencí podle normy lze shrnout v následující větě.

### 2.3.8 Věta

Necht' je dána posloupnost funkcí  $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^\infty$  z prostoru  $\mathbb{L}_2(G)$  taková, že  $f_n(\vec{x}) \xrightarrow{G} f(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$ . Necht' dále  $0 < \mu(G) < \infty$ . Pak  $f_n(\vec{x}) \rightarrow f(\vec{x})$ .

Důkaz:

- z předpokladů plyne, že pro všechna  $\tilde{\varepsilon} > 0$  existuje  $n_0$  tak, že pro všechna  $n \geq n_0$  a pro všechna  $\vec{x} \in G$  platí nerovnost

$$|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\mu(G)}}$$

- jelikož zjevně

$$\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\|^2 = \langle f_n - f | f_n - f \rangle = \int_G |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})|^2 d\mu(\vec{x}) \leq \frac{\varepsilon^2}{4\mu(G)} \mu(G) = \frac{\varepsilon^2}{4},$$

zjistíme, že pro indexy  $n \geq n_0$  platí nerovnost  $\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

- to dokazuje skutečnost, že posloupnost funkcí  $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^\infty$  konverguje podle normy k funkci  $f(\vec{x})$

### 2.3.9 Věta

Nechť  $f_n(\vec{x}) \rightarrow f(\vec{x})$ . Pak existuje podposloupnost  $(f_{k_n}(\vec{x}))_{n=1}^\infty$  vybraná z posloupnosti  $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^\infty$  taková, že platí  $f_{k_n}(\vec{x}) \rightarrow f(\vec{x})$  skoro všude v  $M$ .

Důkaz:

- viz [odkázat se na zdroj](#), str. 42, příklad 2.2.2

### 2.3.10 Definice

Nechť je dán vektorový prostor  $\mathcal{V}$  se skalárním součinem  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . Nechť  $\|\cdot\|$  je norma generovaná zadaným skalárním součinem a  $\varrho(x, y)$  metrika generovaná výše uvedenou normou. Nechť navíc  $\{\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle, \|\cdot\|, \varrho\}$  je úplným metrickým prostorem. Pak takový prostor  $\mathcal{H} := \{\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle, \|\cdot\|, \varrho\}$  nazýváme *Hilbertovým prostorem*.

### 2.3.11 Poznámka

Metrický prostor  $\{M, \varrho\}$  s libovolnou metrikou  $\varrho(f, g)$  nazveme *úplným*, jestliže každá cauchyovská posloupnost je v něm konvergentní.

### 2.3.12 Věta – o spojitosti skalárního součinu

Nechť je dán Hilbertův prostor  $\mathcal{H}$  nad tělesem  $\mathbf{C}$ . Nechť je dána posloupnost funkcí  $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^\infty$  z prostoru  $\mathcal{H}$ , která konverguje podle normy k funkci  $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ , a funkce  $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ . Pak platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n | g \rangle = \langle f | g \rangle, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g | f_n \rangle = \langle g | f \rangle.$$

Důkaz:

- jedná se o bezprostřední důsledek věty 2.2.6

### 2.3.13 Definice

Řekneme, řada funkcí  $\sum_{n=1}^\infty f_n(\vec{x})$  z Hilbertova prostoru  $\mathcal{H}$  *konverguje podle normy* ke svému součtu  $s(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ , pokud posloupnost  $(s_n(\vec{x}))_{n=1}^\infty$  jejích částečných součtů

$$s_n(\vec{x}) := \sum_{k=1}^n f_k(\vec{x})$$

konverguje podle normy k funkci  $s(\vec{x})$ , tj.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n(\vec{x}) - s(\vec{x})\| = 0$ . Konvergenci podle normy zapisujeme symbolem  $\sum_{n=1}^\infty f_n(\vec{x}) = s(\vec{x})$ .

### 2.3.14 Věta

Faktorový prostor  $\mathbb{L}_2(G)$  společně se skalárním součinem zavedeným vztahem (2.6) je úplný, tj. jedná se o Hilbertův prostor.

Důkaz:



Jelikož již bylo prokázáno, že  $\mathbb{L}_2(G)$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{C}$ , zbývá dokázat úplnost. Vyberme tedy z libovolné cauchyovské posloupnosti  $(f_k(\vec{x}))_{k=1}^\infty$  podposloupnost  $(f_{k_\ell}(\vec{x}))_{\ell=1}^\infty$ , jež konverguje skoro všude na  $G$ . To je díky cauchyovskosti možné. Cílem důkazu je de facto prokázat, že  $(f_k(\vec{x}))_{k=1}^\infty$  je konvergentní v  $\mathbb{L}_2(G)$ . První člen podposloupnosti  $(f_{k_\ell}(\vec{x}))_{\ell=1}^\infty$  vyberme tak, aby pro všechna  $m > k_1$  platilo

$$\|f_{k_1}(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \frac{1}{2}.$$

To je opět díky cauchyovskosti možné. Druhý člen podposloupnosti vyberme tak, aby pro všechna  $m > k_2$  platilo

$$\|f_{k_2}(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \frac{1}{2^2}.$$

Analogicky vyberme  $\ell$ -tý člen podposloupnosti tak, aby pro všechna  $m > k_\ell$  platilo

$$\|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \frac{1}{2^\ell}.$$

Označíme-li nyní

$$g_k(\vec{x}) = \sum_{s=1}^k |f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})|,$$

$$g(\vec{x}) = \sum_{s=1}^\infty |f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})|,$$

bude

$$\|g_k(\vec{x})\| \leq \sum_{s=1}^k \|f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\| < \sum_{s=1}^k \frac{1}{2^s} < 1.$$

Je proto  $\int_M |g_n(\vec{x})|^2 d\mu(\vec{x}) < 1$  a podle Leviho věty také

$$\int_M |g(\vec{x})|^2 d\mu(\vec{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M |g_k(\vec{x})|^2 d\mu(\vec{x}) \leq 1$$

a  $g(\vec{x})$  je konečná skoro všude na  $M$ . Navíc řada  $\sum_{s=1}^k |f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})|$  má pro skoro všechna  $\vec{x} \in M$  konečný součet a tudíž i řada  $\sum_{s=1}^k (f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x}))$  je konvergentní, a tedy také posloupnost

$$f_k(\vec{x}) = \sum_{s=1}^{k-1} (f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})) + f_{k_1}(\vec{x}).$$

Označme  $f(\vec{x})$  její limitu. Ta je samozřejmě měřitelná jako limita posloupnosti měřitelných funkcí.

Ve druhé části důkazu ukážeme, že posloupnost  $(f_{k_\ell}(\vec{x}))_{\ell=1}^\infty$  konverguje právě k této funkci  $f(\vec{x})$  v  $\mathbb{L}_2(G)$ . Předně z cauchyovskosti posloupnosti  $(f_{k_\ell}(\vec{x}))_{\ell=1}^\infty$  plyne cauchyovskost podposloupnosti  $(f_{k_\ell}(\vec{x}))_{k=1}^\infty$ , a tedy pro  $\epsilon = 1$  existuje  $k_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro  $\ell > k_0$  a  $m > k_0$  je

$$\int_M |f_{k_\ell}(\vec{x}) - f_{k_m}(\vec{x})|^2 d\mu(\vec{x}) < 1.$$

Podle Fatouovy věty (viz věta 2.1.7, str. 26 v (někde - **DOPLNIT**)) je

$$\int_M |f_{k_\ell}(\vec{x}) - f(\vec{x})|^2 d\mu(\vec{x}) < 1,$$

odkud plyne, že funkce  $f(\vec{x})$  rozepsaná jako  $(f(\vec{x}) - f_{k_\ell}(\vec{x})) + f_{k_\ell}(\vec{x})$  patří do  $\mathbb{L}_2(G)$ . Provedeme-li stejnou úvahu s libovolně malým  $\epsilon$ , získáme

$$\int_M |f_{k_\ell}(\vec{x}) - f(\vec{x})|^2 d\mu(\vec{x}) < \epsilon^2,$$

což znamená nic jiného, než že

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} f_{k_\ell}(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

V poslední části důkazu ukážeme, že k funkci  $f(\vec{x})$  konverguje celá posloupnost  $(f_k(\vec{x}))_{k=1}^\infty$ . To ovšem plyne ihned z nerovností

$$\|f(\vec{x}) - f_k(\vec{x})\| \leq \|f(\vec{x}) - f_{k_\ell}(\vec{x})\| + \|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f_k(\vec{x})\|,$$

neboť první člen napravo můžeme udělat libovolně malým (pro velká  $k_\ell$ ) díky dokázané konvergenci zmiňované podposloupnosti a druhý díky cauchyovskosti posloupnosti  $(f_k(x))_{k=1}^\infty$ .

### 2.3.15 Důsledek

Necht'  $w(\vec{x}) \in \mathcal{C}(G)$  je kladná funkce. Faktorový prostor

$$\mathbb{L}_2^{(w)}(G) = \{f(\vec{x}) \in F(G) : \int_G |f(\vec{x})|^2 w(\vec{x}) d\mu(\vec{x}) < +\infty\},$$

společně se skalárním součinem zavedeným vztahem  $\int_G f(\vec{x}) g^*(\vec{x}) w(\vec{x}) d\vec{x}$  je Hilbertovým prostorem.

### 2.3.16 Věta

$$f(\vec{x}) \in \mathcal{L}_2(G) \wedge H \subset G \wedge \mu(H) < +\infty \Rightarrow f(\vec{x}) \in \mathcal{L}_1(H)$$

Důkaz:

- chceme  $\int_H |f(\vec{x})| d\vec{x} \in \mathbf{R}$

$$\bullet \int_H |f(\vec{x})| d\vec{x} = \int_G |f(\vec{x})| \chi_H(\vec{x}) d\vec{x} \leq \overbrace{\frac{1}{2} \int_G |f(\vec{x})|^2 d\vec{x}}^{\in \mathbf{R}} + \overbrace{\frac{1}{2} \int_G \chi_H(\vec{x}) d\vec{x}}^{\frac{1}{2} \lambda(H)}$$

### 2.3.17 Důsledek

Pro  $H \in \mathcal{M}_\lambda$ , pro které  $\mu(H) < \infty$ , platí  $\mathcal{L}_2(H) \not\subset \mathcal{L}_1(H)$

### 2.3.18 Poznámka

Víme, že  $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$  je prehilbertovským prostorem a že skalární součin je definován integrálem  $\int_a^b f(x) g^*(x) w(x) dx = \langle f | g \rangle_w$ . Zkoumejme, je-li také prostorem Hilbertovským.

**Doplnit obrazek**

Tato posloupnost, ačkoli je Cauchyovská, (viz obrázek) nemá limitu v  $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$ , což je spor s definicí limity. Tím pádem je  $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$  neúplným, tedy nehilbertovským prostorem.

### 2.3.19 Příklad

Posloupnost  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbf{Q}$ . Posloupnost  $(a_n)_{n=1}^\infty$  je Cauchyovská, ale  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{\mathbf{Q}}{=} \text{neexistuje}$ .

### 2.3.20 Věta

Faktorový prostor  $\mathbb{L}_2(G)$  společně se skalárním součinem zavedeným vztahem (2.6) je úplný, tj. jedná se o Hilbertův prostor.

Důkaz:

Jelikož již bylo prokázáno, že  $\mathbb{L}_2(G)$  je vektorový prostor nad  $\mathbf{C}$ , zbývá dokázat úplnost. Vyberme tedy z libovolné cauchyovské posloupnosti  $(f_k(\vec{x}))_{k=1}^\infty$  podposloupnost  $(f_{k_\ell}(\vec{x}))_{\ell=1}^\infty$ , jež konverguje skoro všude na  $G$ . To je díky cauchyovskosti možné. Cílem důkazu je de facto prokázat, že  $(f_k(\vec{x}))_{k=1}^\infty$  je konvergentní v  $\mathbb{L}_2(G)$ . První člen podposloupnosti  $(f_{k_\ell}(\vec{x}))_{\ell=1}^\infty$  vyberme tak, aby pro všechna  $m > k_1$  platilo

$$\|f_{k_1}(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \frac{1}{2}.$$

To je opět díky cauchyovskosti možné. Druhý člen podposloupnosti vyberme tak, aby pro všechna  $m > k_2$  platilo

$$\|f_{k_2}(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \frac{1}{2^2}.$$

Analogicky vyberme  $\ell$ -tý člen podposloupnosti tak, aby pro všechna  $m > k_\ell$  platilo

$$\|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \frac{1}{2^\ell}.$$

Označíme-li nyní

$$g_k(\vec{x}) = \sum_{s=1}^k |f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})|,$$

$$g(\vec{x}) = \sum_{s=1}^{\infty} |f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})|,$$

bude

$$\|g_k(\vec{x})\| \leq \sum_{s=1}^k \|f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\| < \sum_{s=1}^k \frac{1}{2^s} < 1.$$

Je proto  $\int_M |g_n(\vec{x})|^2 d\mu(\vec{x}) < 1$  a podle Leviho věty také

$$\int_M |g(\vec{x})|^2 d\mu(\vec{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M |g_k(\vec{x})|^2 d\mu(\vec{x}) \leq 1$$

a  $g(\vec{x})$  je konečná skoro všude na  $M$ . Navíc řada  $\sum_{s=1}^k |f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})|$  má pro skoro všechna  $\vec{x} \in M$  konečný součet a tudíž i řada  $\sum_{s=1}^k (f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x}))$  je konvergentní, a tedy také posloupnost

$$f_k(\vec{x}) = \sum_{s=1}^{k-1} (f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})) + f_{k_1}(\vec{x}).$$

Označme  $f(\vec{x})$  její limitu. Ta je samozřejmě měřitelná jako limita posloupnosti měřitelných funkcí.

Ve druhé části důkazu ukážeme, že posloupnost  $(f_{k_\ell}(\vec{x}))_{\ell=1}^{\infty}$  konverguje právě k této funkci  $f(\vec{x})$  v  $\mathbb{L}_2(G)$ . Předně z cauchyovskosti posloupnosti  $(f_{k_\ell}(\vec{x}))_{\ell=1}^{\infty}$  plyne cauchyovskost podposloupnosti  $(f_{k_\ell}(\vec{x}))_{\ell=1}^{\infty}$ , a tedy pro  $\epsilon = 1$  existuje  $k_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro  $\ell > k_0$  a  $m > k_0$  je

$$\int_M |f_{k_\ell}(\vec{x}) - f_{k_m}(\vec{x})|^2 d\mu(\vec{x}) < 1.$$

Podle Fatouovy věty (viz věta 2.1.7, str. 26 v [4]) je

$$\int_M |f_{k_\ell}(\vec{x}) - f(\vec{x})|^2 d\mu(\vec{x}) < 1,$$

odkud plyne, že funkce  $f(\vec{x})$  rozepsaná jako  $(f(\vec{x}) - f_{k_\ell}(\vec{x})) + f_{k_\ell}(\vec{x})$  patří do  $\mathbb{L}_2(G)$ . Provedeme-li stejnou úvahu s libovolně malým  $\epsilon$ , získáme

$$\int_M |f_{k_\ell}(\vec{x}) - f(\vec{x})|^2 d\mu(\vec{x}) < \epsilon^2,$$

což neznamená nic jiného, než že

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} f_{k_\ell}(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

V poslední části důkazu ukážeme, že k funkci  $f(\vec{x})$  konverguje celá posloupnost  $(f_k(\vec{x}))_{k=1}^{\infty}$ . To ovšem plyne ihned z nerovností

$$\|f(\vec{x}) - f_k(\vec{x})\| \leq \|f(\vec{x}) - f_{k_\ell}(\vec{x})\| + \|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f_k(\vec{x})\|,$$

neboť první člen napravo můžeme udělat libovolně malým (pro velká  $k_\ell$ ) díky dokázané konvergenci zmiňované podposloupnosti a druhý díky cauchyovskosti posloupnosti  $(f_k(x))_{k=1}^{\infty}$ .

### 2.3.21 Důsledek

Necht'  $w(\vec{x}) \in \mathcal{C}(\overline{G})$  je nenulová a nezáporná funkce. Faktorový prostor

$$\mathbb{L}_w(G) = \left\{ f(\vec{x}) \in F(G) : \int_G |f(\vec{x})|^2 w(\vec{x}) d\mu(\vec{x}) < +\infty \right\},$$

kde  $0 < w(\vec{x}) \in \mathcal{C}(G)$ , společně se skalárním součinem zavedeným vztahem  $\int_G f(\vec{x}) g^*(\vec{x}) w(\vec{x}) d\vec{x}$  je Hilbertovým prostorem.

### 2.3.22 Příklad

Skalární součiny na funkcionálních vektorových prostorech jednorozměrných funkcí

- Legendre  $\Theta(x-a)\Theta(b-x)$ ,  $G = (a, b)$
- Laguerre  $\Theta(x)e^{-x}$ ,  $G = (0, +\infty)$
- Hermite  $e^{-x^2}$ ,  $G = \mathbf{R}$

dualita s 2.2.9

### 2.3.23 Definice

Řekneme, že funkce  $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$  je analytická na  $G$ , jestliže pro každé  $\vec{c} \in G$  existuje okolí  $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})$  tak, že pro všechna  $\vec{x} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})$  platí rovnost

$$f(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f_{\vec{c}}(\vec{x})}{n!},$$

kde symbol  $d^n f_{\vec{c}}(\vec{x})$  představuje  $n$ -tý totální diferenciál v bodě funkce  $f(\vec{x})$  v bodě  $\vec{c}$ . Třidu všech analytických funkcí na oblasti  $G$  označujeme symbolem  $\mathcal{A}_G$ . **Tady mi to nesedi s poznámkami, overit.**

### 2.3.24 Značení

Nadále budeme značit funkcionální Hilbertův prostor symbolem  $\mathcal{H}$ , přičemž předpokládáme prostor faktorových funkcí  $\mathbb{L}_2$  nebo  $\mathbb{L}_2^{(w)}$ .

### 2.3.25 Poznámka

Rozlišujeme 3 typy konvergence:

- bodová:  $f_n(\vec{x}) \xrightarrow{G} f(\vec{x})$
- stejnoměrná:  $f_n(\vec{x}) \xrightarrow{G} f(\vec{x}) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(n > n_0 \wedge \vec{x} \in G \Rightarrow |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \varepsilon)$
- podle normy:  $f_n(\vec{x}) \rightarrow f(\vec{x}) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(n > n_0 \wedge \|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\| < \varepsilon)$

Poznamenejme, že ve výrazu  $\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\|$  je skryt Lebesgueův integrál, který konverguje i tam, kde na množině nulové míry nekonverguje.

### 2.3.26 Věta

Nechť  $f_n(\vec{x}) \xrightarrow{\langle a, b \rangle} f(\vec{x})$  a  $\langle f|g \rangle_w$  je skalární součin dle definice 2.6 pro  $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$ . Pak  $f_n(\vec{x}) \rightarrow (\vec{x})$ .

Bez důkazu.

### 2.3.27 Věta

$f_n(\vec{x}) \xrightarrow{G} f(\vec{x}) \wedge \mu(G) < +\infty \Rightarrow f_n(\vec{x}) \xrightarrow{\mathcal{L}_2^{(w)}(G)} f(\vec{x})$ . Je-li váha omezená na  $G$ .

Důkaz:

- $\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\|^2 = \langle f_n(\vec{x}) - f(\vec{x}) | f_n(\vec{x}) - f(\vec{x}) \rangle = \int_G |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})|^2 d\vec{x} \leq \mu(G) \sup |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})|^2 \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$
- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) \left( (n \leq n_0 \wedge \vec{x} \in G) \Rightarrow |f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\mu(G)}} \right)$

**2.3.28 Věta – o spojitosti skalárního součinu**

Nechť je dán Hilbertův prostor  $\mathcal{H}$  nad tělesem  $\mathbb{C}$ . Nechť je dána posloupnost funkcí  $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$  z prostoru  $\mathcal{H}$ , která konverguje podle normy k funkci  $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ , a funkce  $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ . Pak platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n | g \rangle = \langle f | g \rangle, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g | f_n \rangle = \langle g | f \rangle.$$

Důkaz:

- $|\langle f_n(\vec{x}) | g(\vec{x}) \rangle - \langle f(\vec{x}) | g(\vec{x}) \rangle| = |\langle f_n(\vec{x}) - f(\vec{x}) | g(\vec{x}) \rangle| \leq \|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\| \cdot \|g(\vec{x})\| < \varepsilon$
- $\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\| < \frac{\varepsilon}{\|g(\vec{x})\|}$
- Toto platí ve všech případech kromě  $\|g(\vec{x})\| = 0$ , což je však triviální

**2.3.29 Definice**

Nechť  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\vec{x})$  je funkcionální řada, a  $s_n(\vec{x})$  její  $n$ -tý částečný součet. Pak označíme:

- součet podle normy  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\vec{x})$
- limitu podle normy  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\vec{x}) = s(\vec{x}) \in \mathcal{H}$
- tedy  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\vec{x}) = s(\vec{x}) \in \mathcal{H}$

**2.3.30 Věta**

$f_n(\vec{x}), s(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$  a  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\vec{x}) = s(\vec{x})$ . Pak platí

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \langle f_n(\vec{x}) | g(\vec{x}) \rangle = \langle s(\vec{x}) | g(\vec{x}) \rangle \equiv \left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\vec{x}) | g(\vec{x}) \right\rangle.$$

Důkaz:

dodelam (prejit na posloupnost castecnych souctu)

**2.3.31 Poznámka**

Domácí úkol: Je  $\|f\|_{\infty} := \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f|$  normou na  $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$ ? A je  $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$  s touto normou úplný?

**2.3.32 Poznámka**

Operace konvoluce na prostoru klasických funkcí – definice na  $\mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbb{E}^r)$

**2.3.33 Věta**

o existenci konvoluce v  $\mathcal{L}_1(\mathbb{E}^r)$

**2.3.34 Poznámka**

Bilinearita konvoluce v  $\mathcal{L}_1(\mathbb{E}^r)$  (ve cvičení)

**2.3.35 Poznámka**

Komutativita konvoluce v  $\mathcal{L}_1(\mathbb{E}^r)$

**2.3.36 Poznámka**

o konvoluci funkcí tvaru  $\Theta(x)F(x)$ , kde  $F(x) \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbb{R})$

**2.3.37 Poznámka**

definice pojmů hustota a hustota pravděpodobnosti

**2.3.38 Věta**

$f(\vec{x}), g(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$  jsou hustoty, pak  $(f * g)(\vec{x})$  je rovněž hustotou a vždy existuje.

Důkaz:

$$\bullet f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{L}_{\bullet}(\mathbf{E}^r) \Rightarrow (f * g)(\vec{x}) \in \mathcal{L}_1(\mathbf{E}^r)$$

• nezápornost:

$$(f * g)(\vec{x}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})g(\vec{x} - \vec{s}) \, d\vec{s} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{E}^r,$$

neboť z definice hustot je integrál větší nebo roven 0 a existuje

•

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{E}^r} (f * g)(\vec{x}) \, d\vec{x} &= \int_{\mathbf{E}^r} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})g(\vec{x} - \vec{s}) \, d\vec{s} \, d\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{x} - \vec{s}) \, d\vec{x} \, d\vec{s} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \vec{y} = \vec{x} - \vec{s} \\ d\vec{y} = d\vec{x} \end{array} \right| = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{y}) \, d\vec{y} \, d\vec{s} = 1 \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \, d\vec{s} = 1 \end{aligned}$$

**2.3.39 Poznámka**

Střední hodnota z  $r$ ,  $f(r)$  je  $\langle r \rangle = \int_{\mathbf{R}} r f(r) \, dr$ .

**2.3.40 Věta**

Nechť  $f(x), g(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$  jsou hustoty. Nechť  $\int_{\mathbf{R}} x f(x) \, dx = \mu_1$  a  $\int_{\mathbf{R}} x g(x) \, dx = \mu_2$ . Pak  $\int_{\mathbf{R}} (f * g)(x) \, dx = \mu_1 + \mu_2$ .

Důkaz:

• teoretické požadavky již byly dokázány v předchozí větě

•

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} x (f * g)(x) \, dx &= \int_{\mathbf{R}} x \int_{\mathbf{R}} f(s)g(x - s) \, ds \, dx = \int_{\mathbf{R}} f(s) \int_{\mathbf{R}} x g(x - s) \, dx \, ds = \\ &= \left| \begin{array}{l} y = x - s \\ dy = dx \end{array} \right| = \int_{\mathbf{R}} f(s) \int_{\mathbf{R}} (y + s)g(y) \, dy \, ds = \int_{\mathbf{R}} f(s) y g(y) \, dy \, ds + \int_{\mathbf{R}} f(s) s g(y) \, dy \, ds = \\ &= \left| \text{Věta o separabilitě} \right| = \int_{\mathbf{R}} f(s) \, ds \int_{\mathbf{R}} y g(y) \, dy + \int_{\mathbf{R}} s f(s) \, ds \int_{\mathbf{R}} g(y) \, dy = \mu_1 + \mu_2 \end{aligned}$$

**2.3.41 Věta – o posunutí v konvoluci**

$f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{L}_1(\mathbf{E}^r), \vec{\mu} \in \mathbf{E}^r$ . Pak platí:  $(f \star g)(\vec{x} - \vec{\mu}) = f(\vec{x}) \star g(\vec{x} - \vec{\mu}) = f(\vec{x} - \vec{\mu}) \star g(\vec{x})$

**2.3.42 Poznámka**

Zde používáme afinní transformaci, tudíž za každé  $\vec{x}$  dosadíme  $\vec{x} - \vec{\mu}$ . Souvislost s předchozí větou je taková, že lze posunout střední hodnotu v případě, že za  $f, g$  zvolíme hustoty.

**2.3.43 Věta – o derivaci konvoluce**

$f(\vec{x}) \in \mathcal{L}_1(\mathbf{E}^r), g(\vec{x}) \in \mathcal{L}_1(\mathbf{E}^r) \cap \mathcal{C}_0^1$ . Pak platí  $\frac{\partial}{\partial x_k} (f \star g) = f(\vec{x}) \star \frac{\partial g}{\partial x_k}(\vec{x})$ .

Důkaz:

$$\bullet \frac{\partial}{\partial x_k} (f \star g) = \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})g(\vec{x} - \vec{s}) \, d\vec{s}$$

• použijeme větu o derivaci integrálu s parametrem

- $\frac{d}{d\alpha} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x}|\alpha) d\vec{x} \rightarrow \frac{d}{d\alpha_k} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x}|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) d\vec{x}$
- ověříme předpoklady věty:
  - výraz v integrálu musí konvergovat, což je splněno
  - měřitelnost je splněna, jelikož výraz je z  $\mathcal{L}_1$
  - diferencovatelnost, výraz nahradíme integrabilní majorantou:  $\left| f(\vec{s}) \frac{\partial g}{\partial x_k}(\vec{x} - \vec{s}) \right| \leq K |f(\vec{s})| \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$ ,  
a využijeme vlastnost, že funkce na kompaktu nabývá maxima
- $\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \frac{\partial g}{\partial x_k}(\vec{x} - \vec{s}) d\vec{s} = \left( f \star \frac{\partial g}{\partial x_k} \right)(\vec{x})$

### 2.3.44 Poznámka

Povšimněme si, že se věta jeví na první pohled nevyvážená, je to z důvodu požadavku na diferencovatelnost pouze pro  $g$ . Zároveň si povšimněme absence dodatku "pokud levá (pravá) strana existuje". U konvoluce pozorujeme tzv. vyhlazovací efekt, kdy pokud je  $g(x)$  hladká, pak existuje konvoluce i její derivace bez ohledu na to, jak nespojitá je funkce  $f(x)$ .

### 2.3.45 Příklad

Spočítejme konvoluci dvou Gaussových funkcí. Položme  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$  a  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$ . Pak   
 **dopočítám později.**





## Kapitola 3

# Teorie pravděpodobnosti

### 3.1 Axiomatická definice pravděpodobnosti

Způsobů, jak vybudovat teorii pravděpodobnosti je více. My se v tomto textu přidržíme axiomatické výstavby pojmu pravděpodobnost, kdy s výhodou využijeme obecné poznatky z teorie míry.

#### 3.1.1 Definice

Nechť je dán základní pravděpodobnostní prostor  $\Omega$ . Nechť  $\mathcal{X} \subset 2^\Omega$  je množinová sigma-algebra a  $\Omega \in \mathcal{X}$  její prezident. Pak každou sigma-aditivní míru  $P(X) : \mathcal{X} \mapsto \langle 0, 1 \rangle$  nazýváme *pravděpodobnostní mírou (pravděpodobností)* na  $\mathcal{X}$ , pokud je tzv. *normalizovaná*, tj. platí-li, že

$$P[\Omega] = 1.$$

#### 3.1.2 Poznámka

Díky definici 3.1.1 splňuje každá pravděpodobnostní míra následující axiomy známé z obecné definice míry (viz definice 3.1.18, str. 167 v [3]):

1. *axiom nulové množiny*:  $\emptyset \in \mathcal{X}$ , kde symbol  $\emptyset$  reprezentuje nemožný jev,
2. *axiom míry nulové množiny*:  $P[\emptyset] = 0$ ,
3. *axiom nezápornosti*:  $\forall X \in \mathcal{X} : P[X] \geq 0$ ,
4. *axiom monotónie*:  $X_1 \subset X_2 \implies P[X_1] \leq P[X_2]$ ,
5. *axiom aditivity*:  $P[X_1 \uplus X_2] = P[X_1] + P[X_2]$ ,
6. *axiom normality*:  $P[\Omega] = 1$ .
7. *axiom  $\sigma$ -aditivity*:  $P[\uplus_{\ell=1}^{\infty} X_\ell] = \sum_{\ell=1}^{\infty} P[X_\ell]$ .

Pro jistotu upozorňujeme, že symbol  $\uplus$  reprezentuje disjunktní sjednocení.

#### 3.1.3 Definice

Nechť je dán základní pravděpodobnostní prostor  $\Omega$ ,  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{X} \subset 2^\Omega$   $P$ -měřitelných množin a příslušná pravděpodobnostní míra  $P(X) : \mathcal{X} \mapsto \langle 0, 1 \rangle$ . Pak trojici  $\{\Omega, \mathcal{X}, P\}$  budeme nazývat *pravděpodobnostním prostorem*.

#### 3.1.4 Definice

Nechť jsou dány jevy  $A, B \subset \Omega$ . Řekneme, že jevy  $A$  a  $B$  jsou *nezávislé*, jestliže platí

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B].$$

### 3.1.5 Definice

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor  $\{\Omega, \mathcal{X}, P\}$ . Každé zobrazení  $\mathcal{X} : \Omega \mapsto \mathbf{R}$  takové, že pro každé  $c \in \mathbf{R}$  platí

$$\mathcal{X}^{-1}((-\infty, c)) = \{\omega \in \Omega : \mathcal{X}(\omega) \leq c\} \in \mathcal{X}, \quad (3.1)$$

nazveme *náhodnou veličinou*.

### 3.1.6 Poznámka

Vztah (3.1) vlastně požaduje, aby vzory všech intervalů  $(-\infty, c)$  byly  $P$ -měřitelnými množinami. Z hlediska obecné teorie míry je definice náhodné veličiny de facto shodná s definicí měřitelné funkce (viz definice 4.1.5, str. 201 ve skriptech [3]).

### 3.1.7 Poznámka

Symbolem  $P[\mathcal{X} < x]$  budeme označovat pravděpodobnost, že náhodná veličina  $\mathcal{X}$  nabude hodnoty menší než  $x$ . Podobně označuje symbol  $P[\mathcal{X} \in A]$  pravděpodobnost, že náhodná veličina  $\mathcal{X}$  nabude hodnoty z množiny  $A$ . Alternativně to zapisujeme též znakem  $P[A]$ , není-li nutné explicitně zmiňovat o jakou náhodnou veličinu se jedná. Analogicky dále zavádíme symboly  $P[\mathcal{X} \geq x]$ ,  $P[\mathcal{X} = 7]$ ,  $P[\mathbf{N}]$  a podobně.

### 3.1.8 Definice

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor  $\{\Omega, \mathcal{X}, P\}$  a náhodná veličina  $\mathcal{X} : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ . Reálnou funkci zavedenou předpisem

$$F_{\mathcal{X}}(x) := P[\mathcal{X} \leq x]$$

nazýváme *distribuční funkcí* náhodné veličiny  $\mathcal{X}$ .

### 3.1.9 Poznámka

Je-li pravděpodobnost  $P(X) : \mathcal{X} \mapsto \langle 0, 1 \rangle$  definována jako míra, pak distribuční funkce  $F_{\mathcal{X}}(x)$  představuje de facto vytvářející funkci míry. Jako taková musí splňovat následující předpoklady:

- je neklesající na  $\mathbf{R}$ ,
- $\text{Ran}(F) \subset \langle 0, 1 \rangle$ ,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ ,
- $F(x)$  je spojitá zprava na  $\mathbf{R}$ , tj. pro každé  $c \in \mathbf{R}$  platí  $\lim_{x \rightarrow c+} F(x) = F(c)$ ,
- $F(x)$  má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.

## 3.2 Absolutně spojitá náhodná veličina

Nejprve se budeme zabývat speciálními případy jednorozměrných náhodných veličin. Vybereme přitom pouze ty, které mají přímou vazbu k teorii, jež je náplní těchto skript, tj. k teorii parciálních diferenciálních rovnic.

### 3.2.1 Definice

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor  $\{\Omega, \mathcal{X}, P\}$  a náhodná veličina  $\mathcal{X} : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ . Řekneme, že náhodná veličina  $\mathcal{X}$  má *absolutně spojitě rozdělení*, existuje-li nezáporná funkce  $f_{\mathcal{X}}(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$  taková, že pro distribuční funkci  $F_{\mathcal{X}}(x)$  náhodné veličiny  $\mathcal{X}$  platí

$$F_{\mathcal{X}}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\mathcal{X}}(t) dt.$$

### 3.2.2 Definice

Nechť je dána náhodná veličina  $\mathcal{X}$ . Existuje-li pro ni funkce  $f_{\mathcal{X}}(x)$  z předešlé definice, pak tuto funkci  $f_{\mathcal{X}}(x)$  nazýváme *hustotou pravděpodobnosti* náhodné veličiny  $\mathcal{X}$ .

### 3.2.3 Úmluva

V dalším textu předpokládáme, že je pevně zvolen pravděpodobnostní prostor  $\{\Omega, \mathcal{X}, P\}$ .

### 3.2.4 Věta

Nechť má náhodná veličina  $\mathcal{X}$  absolutně spojitě rozdělení. Nechť  $F_{\mathcal{X}}(x)$  je její distribuční funkce a  $f_{\mathcal{X}}(x)$  její hustota pravděpodobnosti. Potom ve všech bodech, kde existuje derivace funkce  $F_{\mathcal{X}}(x)$ , platí

$$f_{\mathcal{X}}(x) = \frac{dF_{\mathcal{X}}}{dx}(x). \quad (3.2)$$

Důkaz:

- plyne z vlastností integrálu a derivace

### 3.2.5 Poznámka

Pro hustotu pravděpodobnosti platí z výše uvedeného tzv. *normalizační podmínka* tvaru

$$\int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(x) dx = 1.$$

Formální součin  $f_{\mathcal{X}}(x) dx$  pak (velmi populárně řečeno) představuje pravděpodobnost, že náhodně vybrané  $x$  padne do intervalu  $(x, x + dx)$ .

### 3.2.6 Poznámka

Každá nezáporná funkce  $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ , pro níž

$$\int_{\mathbf{R}} f(x) dx = 1,$$

může být chápána jako hustota pravděpodobnosti určité jednorozměrné náhodné veličiny.

### 3.2.7 Věta

Nechť má náhodná veličina  $\mathcal{X}$  absolutně spojitě rozdělení s hustotou pravděpodobnosti  $f_{\mathcal{X}}(x)$ . Potom pro každou množinu  $A = (a, b)$ , kde  $a, b \in \mathbf{R}^*$  a  $a \leq b$ , platí

$$P[\mathcal{X} \in A] = \int_A f_{\mathcal{X}}(x) dx.$$

Důkaz:

- označme  $F_{\mathcal{X}}(x)$  příslušnou distribuční funkci
- pak

$$P[a < \mathcal{X} \leq b] = F_{\mathcal{X}}(b) - F_{\mathcal{X}}(a) = \int_{-\infty}^b f_{\mathcal{X}}(x) dx - \int_{-\infty}^a f_{\mathcal{X}}(x) dx = \int_a^b f_{\mathcal{X}}(x) dx$$

### 3.2.8 Poznámka

Předešlá věta zůstává v platnosti i pro obecné množiny  $A$ , tedy ne pouze pro intervaly.

### 3.2.9 Definice

Nechť je dána náhodná veličina  $\mathcal{X}$ , jež má absolutně spojitě rozdělení, a příslušná hustota pravděpodobnosti  $f_{\mathcal{X}}(x)$ . Konverguje-li integrál

$$\int_{\mathbf{R}} x f_{\mathcal{X}}(x) dx,$$

pak jeho hodnotu nazýváme *střední hodnotou* náhodné veličiny  $\mathcal{X}$  (*expected value of  $\mathcal{X}$* ) a značíme jedním ze symbolů  $E(\mathcal{X})$  nebo  $\langle x \rangle$ .

### 3.2.10 Definice

Nechť je dána náhodná veličina  $\mathcal{X}$ , příslušná hustota pravděpodobnosti  $f_{\mathcal{X}}(x)$  a její střední hodnota  $\langle x \rangle$ . Konverguje-li integrál

$$\int_{\mathbf{R}} (x - \langle x \rangle)^2 f_{\mathcal{X}}(x) \, dx, \quad (3.3)$$

pak příslušnou hodnotu nazýváme *rozptylem* náhodné veličiny  $\mathcal{X}$  (*variance of  $\mathcal{X}$* ) a značíme symbolem  $\text{VAR}(\mathcal{X})$ .

### 3.2.11 Věta

Nechť je dána náhodná veličina  $\mathcal{X}$  a její střední hodnota  $\langle x \rangle$ . Konverguje-li integrál  $\int_{\mathbf{R}} x^2 f_{\mathcal{X}}(x) \, dx$ , pak platí

$$\text{VAR}(\mathcal{X}) = \int_{\mathbf{R}} x^2 f_{\mathcal{X}}(x) \, dx - \langle x \rangle^2 \geq 0,$$

tj.  $\text{VAR}(\mathcal{X}) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \mathbf{E}(\mathcal{X}^2) - (\mathbf{E}(\mathcal{X}))^2$ .

Důkaz:

- snadno vypočteme

$$\begin{aligned} \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle &= \int_{\mathbf{R}} (x - \langle x \rangle)^2 f_{\mathcal{X}}(x) \, dx = \int_{\mathbf{R}} x^2 f_{\mathcal{X}}(x) \, dx - 2 \int_{\mathbf{R}} x \langle x \rangle f_{\mathcal{X}}(x) \, dx + \int_{\mathbf{R}} \langle x \rangle^2 f_{\mathcal{X}}(x) \, dx = \\ &= \langle x^2 \rangle - 2 \langle x \rangle \underbrace{\int_{\mathbf{R}} x f_{\mathcal{X}}(x) \, dx}_{=\langle x \rangle} + \langle x \rangle^2 \underbrace{\int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(x) \, dx}_{=1} = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \mathbf{E}(\mathcal{X}^2) - \mathbf{E}^2(\mathcal{X}) \end{aligned}$$

- to, že  $\text{VAR}(\mathcal{X}) \geq 0$ , plyne bezprostředně z faktu, že integrand  $(x - \langle x \rangle)^2$  v definičním vztahu (3.3) je nezápornou funkcí

### 3.2.12 Definice

Nechť je dána náhodná veličina  $\mathcal{X}$  a její rozptyl  $\text{VAR}(\mathcal{X})$ . *Směrodatnou odchylkou* (standard deviation) rozumíme hodnotu

$$\text{SD}(\mathcal{X}) := \sqrt{\text{VAR}(\mathcal{X})}.$$

### 3.2.13 Definice

Řekneme, že náhodná veličina  $\mathcal{X}$  má *rovnoměrné rozdělení* (uniform distribution) s parametry  $a, b \in \mathbf{R}$  ( $a < b$ ) a označíme  $\mathcal{X} \sim U_{(a,b)}$ , pokud pro její hustotu pravděpodobnosti platí vztah

$$f_{\mathcal{X}}(x) = \frac{\Theta(x - a) \cdot \Theta(b - x)}{b - a}.$$

### 3.2.14 Věta

Nechť  $\mathcal{X} \sim U_{(a,b)}$ . Pak

$$\langle x \rangle = \frac{a + b}{2}, \quad \text{VAR}(\mathcal{X}) = \frac{(b - a)^2}{12}.$$

Důkaz:

- snadno nahlédneme, že hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení je správně normalizovaná, neboť

$$\int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(x) \, dx = \int_a^b \frac{1}{b - a} \, dx = 1$$

- dále

$$\mathbf{E}(\mathcal{X}) = \int_{\mathbf{R}} x f_{\mathcal{X}}(x) \, dx = \int_a^b \frac{x}{b - a} \, dx = \frac{1}{b - a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a + b}{2}$$

- pro výpočet rozptylu užijeme nejprve pomocný výpočet

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}^2) = \int_{\mathbf{R}} x^2 f_{\mathcal{X}}(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

- podle věty 3.2.11 pak snadno

$$\text{VAR}(\mathcal{X}) = \mathbb{E}(\mathcal{X}^2) - \mathbb{E}^2(\mathcal{X}) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

### 3.2.15 Definice

Řekneme, že náhodná veličina  $\mathcal{X}$  má *Gaussovo (normální) rozdělení* (Gaussian normal distribution) s parametry  $\mu, \sigma \in \mathbf{R}$  a označíme  $\mathcal{X} \sim N_{(\mu, \sigma)}$ , pokud pro její hustotu pravděpodobnosti platí vztah

$$f_{\mathcal{X}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

### 3.2.16 Věta

Nechť  $\mathcal{X} \sim N_{(\mu, \sigma)}$ . Pak

$$\langle x \rangle = \mu, \quad \text{VAR}(\mathcal{X}) = \sigma^2.$$

Důkaz:

- snadno nahlédneme, že hustota pravděpodobnosti Gaussova rozdělení je správně normalizovaná, neboť

$$\int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(x) dx = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{array}{l} y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \\ dy = \frac{dx}{\sqrt{2}\sigma} \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-y^2} dy \stackrel{??}{=} 1$$

- dále

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}) = \int_{\mathbf{R}} x f_{\mathcal{X}}(x) dx = \int_{\mathbf{R}} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{\mathbf{R}} \frac{x-\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \int_{\mathbf{R}} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu,$$

kde jsme s výhodou užili faktu, že první z integrálů je nulový díky liché symetrii integrandu a druhý z integrálů je normalizačním integrálem pouze přenásobeným konstantou  $\mu$

- pro výpočet rozptylu užijeme nejprve pomocný výpočet

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathcal{X}^2) &= \int_{\mathbf{R}} x^2 f_{\mathcal{X}}(x) dx = \int_{\mathbf{R}} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{\mathbf{R}} \frac{(x-\mu+\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \int_{\mathbf{R}} \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \int_{\mathbf{R}} \frac{2(x-\mu)\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \int_{\mathbf{R}} \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{\mathbf{R}} \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \mu^2 = \\ &= \left| \begin{array}{l} y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \\ dy = \frac{dx}{\sqrt{2}\sigma} \end{array} \right| = \mu^2 + 2\sigma^2 \int_{\mathbf{R}} \frac{y^2}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} dy = \mu^2 + 2\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \mu^2 + \sigma^2, \end{aligned}$$

kde bylo využito odvozeného vztahu (??)

- podle věty 3.2.11 pak snadno  $\text{VAR}(\mathcal{X}) = \mathbb{E}(\mathcal{X}^2) - \mathbb{E}^2(\mathcal{X}) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$

### 3.2.17 Definice

Řekneme, že náhodná veličina  $\mathcal{X}$  má *exponenciální rozdělení* (exponential distribution) s parametry  $\mu, \beta \in \mathbf{R}$  a označíme  $\mathcal{X} \sim \text{Exp}_{(\mu, \beta)}$ , pokud pro její hustotu pravděpodobnosti platí vztah

$$f_{\mathcal{X}}(x) = \Theta(x - \mu) \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}.$$

**3.2.18 Věta**

Nechť  $\mathcal{X} \sim \text{Exp}_{(\mu, \beta)}$ . Pak

$$\langle x \rangle = \mu + \beta, \quad \text{VAR}(\mathcal{X}) = \beta^2.$$

Důkaz:

- snadno nahlédneme, že hustota pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení je správně normalizovaná, neboť

$$\int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(x) \, dx = \int_{\mathbf{R}} \Theta(x - \mu) \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} \, dx = \int_{\mu}^{\infty} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} \, dx = \left| \begin{array}{l} y = \frac{x-\mu}{\beta} \\ dy = \frac{dx}{\beta} \end{array} \right| = \int_0^1 e^{-y} \, dy = 1$$

- dále

$$\begin{aligned} E(\mathcal{X}) &= \int_{\mathbf{R}} x f_{\mathcal{X}}(x) \, dx = \int_{\mathbf{R}} \Theta(x - \mu) \frac{x}{\beta} e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} \, dx = \int_{\mu}^{\infty} \frac{x - \mu + \mu}{\beta} e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} \, dx = \left| \begin{array}{l} y = \frac{x-\mu}{\beta} \\ dy = \frac{dx}{\beta} \end{array} \right| = \\ &= \beta \int_0^1 y e^{-y} \, dy + \mu \int_0^1 e^{-y} \, dy = \beta + \mu \end{aligned}$$

- pro výpočet rozptylu užitíme nejprve pomocný výpočet

$$\begin{aligned} E(\mathcal{X}^2) &= \int_{\mathbf{R}} x^2 f_{\mathcal{X}}(x) \, dx = \int_{\mathbf{R}} \Theta(x - \mu) \frac{x^2}{\beta} e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} \, dx = \int_{\mu}^{\infty} \frac{x^2}{\beta} e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} \, dx = \left| \begin{array}{l} y = \frac{x-\mu}{\beta} \\ dy = \frac{dx}{\beta} \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{\infty} (\mu + \beta y)^2 e^{-y} \, dy = \mu^2 \int_0^{\infty} e^{-y} \, dy + 2\mu\beta \int_0^{\infty} y e^{-y} \, dy + \beta^2 \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} \, dy \stackrel{??}{=} \mu^2 + 2\mu\beta + 2\beta^2 \end{aligned}$$

- podle věty 3.2.11 pak snadno

$$\text{VAR}(\mathcal{X}) = E(\mathcal{X}^2) - E^2(\mathcal{X}) = \mu^2 + 2\mu\beta + 2\beta^2 - (\beta + \mu)^2 = \beta^2$$

**3.2.19 Definice**

Řekneme, že náhodná veličina  $\mathcal{X}$  má *Gamma rozdělení* (Gamma distribution) s parametry  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  ( $\alpha > 1, \beta > 0$ ) a označíme  $\mathcal{X} \sim \text{Gamma}_{(\alpha, \beta)}$ , pokud pro její hustotu pravděpodobnosti platí vztah

$$f_{\mathcal{X}}(x) = \frac{\Theta(x)}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}.$$

**3.2.20 Věta**

Nechť  $\mathcal{X} \sim \text{Gamma}_{(\alpha, \beta)}$ . Pak

$$\langle x \rangle = \alpha\beta, \quad \text{VAR}(\mathcal{X}) = \alpha\beta^2.$$

Důkaz:

- nejprve ověříme, zda je skutečně normalizační integrál  $\int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(x) \, dx$  jednotkový
- protože ale

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(x) \, dx &= \int_{\mathbf{R}} \frac{\Theta(x)}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \, dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \, dx = \left| \begin{array}{l} x = \beta y \\ dx = \beta dy \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} \, dy \stackrel{??}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha) = 1, \end{aligned}$$

je funkce  $f_{\mathcal{X}}(x) = \frac{\Theta(x)}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$  skutečně hustotou pravděpodobnosti

- dále

$$\begin{aligned} E(\mathcal{X}) &= \int_{\mathbf{R}} x f_{\mathcal{X}}(x) dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \left| \begin{array}{l} x = \beta y \\ dx = \beta dy \end{array} \right| = \\ &= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^\alpha e^{-y} dy \stackrel{??}{=} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+1) \stackrel{??}{=} \alpha\beta \end{aligned}$$

- střední hodnotou Gamma rozdělení je tedy součin obou parametrů rozdělení

- dále

$$\begin{aligned} E(\mathcal{X}^2) &= \int_{\mathbf{R}} x^2 f_{\mathcal{X}}(x) dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \left| \begin{array}{l} x = \beta y \\ dx = \beta dy \end{array} \right| = \\ &= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha+1} e^{-y} dy \stackrel{??}{=} \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+2) \stackrel{??}{=} \beta^2(\alpha+1)\alpha \end{aligned}$$

- odsud už lehce dovozujeme, že rozptylem zkoumaného rozdělení je hodnota

$$\text{VAR}(\mathcal{X}) = E(\mathcal{X}^2) - E^2(\mathcal{X}) = \beta^2(\alpha+1)\alpha - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2,$$

což bylo dokázat

### 3.3 Vícerozměrná náhodná veličina

Nyní rozšíříme pojmy náhodné veličiny, distribuční funkce a hustoty pravděpodobnosti na vícerozměrné případy.

#### 3.3.1 Definice

Nechť  $\mathcal{X}$  a  $\mathcal{Y}$  jsou náhodné veličiny. *Sdruženou distribuční funkci* náhodných veličin  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  definujeme pro všechna  $(x, y) \in \mathbf{E}^2$  předpisem

$$F_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(x, y) = P([\mathcal{X} \leq x][\mathcal{Y} \leq y]). \quad (3.4)$$

#### 3.3.2 Věta

Nechť  $F_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(x, y)$  je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ . Potom pro všechna  $x_1 \leq x_2$  a  $y_1 \leq y_2$  platí nerovnost

$$F_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(x_1, y_1) \leq F_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(x_1, y_2).$$

Důkaz:

- důkaz plyne přímo z definičního vztahu (3.4), neboť

$$F_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(x_1, y_1) = P([\mathcal{X} \leq x_1][\mathcal{Y} \leq y_1]) \leq \left| \begin{array}{l} x_1 \leq x_2 \\ y_1 \leq y_2 \end{array} \right| \leq P([\mathcal{X} \leq x_1][\mathcal{Y} \leq y_2]) \leq F_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(x_1, y_2)$$

#### 3.3.3 Věta

Nechť  $F_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(x, y)$  je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ . Potom

$$\forall y \in \mathbf{R} : \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(x, y) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(x, y) = F_{\mathcal{Y}}(y)$$

a také

$$\forall x \in \mathbf{R} : \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} F_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(x, y) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{y \rightarrow \infty} F_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(x, y) = F_{\mathcal{X}}(x).$$

Důkaz:

- důkaz plyne přímo z definičního vztahu (3.4) a z definice pravděpodobnostní míry, neboť např.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P([\mathcal{X} \leq x][\mathcal{Y} \leq y]) = 0$$

- dále

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(x, y) = \lim_{x \rightarrow \infty} P([\mathcal{X} \leq x][\mathcal{Y} \leq y]) = P([\mathcal{X} \in \mathbf{R}][\mathcal{Y} \leq y]) = P([\mathcal{Y} \leq y])$$

- výraz na pravé straně zjevně konverguje a jeho hodnota závisí na proměnné  $y$
- definujeme tedy  $F_{\mathcal{Y}}(y) := P([\mathcal{Y} \leq y])$
- tato funkce je tudíž jakousi dílčí distribuční funkcí

### 3.3.4 Definice

Nechť  $F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y)$  je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ . Potom funkce  $F_{\mathcal{X}}(x)$  a  $F_{\mathcal{Y}}(y)$  z předešlé věty budeme nazývat *marginálními distribučními funkcemi* náhodného vektoru  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ . Veličiny  $\mathcal{X}$ , resp.  $\mathcal{Y}$  nazýváme analogicky *marginálními náhodnými veličinami*.

### 3.3.5 Definice

Řekneme, že náhodné veličiny  $\mathcal{X}$  a  $\mathcal{Y}$  jsou (*statisticky*) *nezávislé*, jestliže jsou jevy

$$[a < \mathcal{X} \leq b], \quad [c < \mathcal{Y} \leq d]$$

nezávislé pro všechny  $a, b, c, d \in \mathbf{R}^*$ , pro které  $a \leq b$  a  $c \leq d$ .

### 3.3.6 Věta

Náhodné veličiny  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  jsou nezávislé právě tehdy, když pro každou dvojici  $(x, y) \in \mathbf{E}^2$  platí rovnost

$$F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = F_{\mathcal{X}}(x) \cdot F_{\mathcal{Y}}(y),$$

tj. sdružená distribuční funkce  $F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y)$  je rovna součinu tzv. *marginálních distribučních funkcí*  $F_{\mathcal{X}}(x)$  a  $F_{\mathcal{Y}}(y)$ .

Důkaz:

- předpokládejme nejprve, že  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  jsou nezávislé náhodné veličiny, tj. pro všechny  $a, b, c, d \in \mathbf{R}^*$ , pro něž  $a \leq b$  a  $c \leq d$ , platí

$$P([a < \mathcal{X} \leq b], [c < \mathcal{Y} \leq d]) = P([a < \mathcal{X} \leq b]) \cdot P([c < \mathcal{Y} \leq d])$$

- položíme-li v předešlém výrazu  $a = -\infty, b = x, c = -\infty, d = y$ , pak pro libovolnou uspořádanou dvojici  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  platí sada rovností

$$F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = P([-\infty < \mathcal{X} \leq x] [-\infty < \mathcal{Y} \leq y]) = P([-\infty < \mathcal{X} \leq x]) \cdot P([-\infty < \mathcal{Y} \leq y]) = F_{\mathcal{X}}(x) \cdot F_{\mathcal{Y}}(y)$$

- obrácenou implikaci prokáže sada rovností

$$\begin{aligned} P([a < \mathcal{X} \leq b], [c < \mathcal{Y} \leq d]) &= F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(b, d) - F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(b, yc) - F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(a, d) + F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(a, c) = \\ &= F_{\mathcal{X}}(b)F_{\mathcal{Y}}(d) - F_{\mathcal{X}}(b)F_{\mathcal{Y}}(c) - F_{\mathcal{X}}(a)F_{\mathcal{Y}}(d) + F_{\mathcal{X}}(a)F_{\mathcal{Y}}(c) = (F_{\mathcal{X}}(b) - F_{\mathcal{X}}(a))(F_{\mathcal{Y}}(d) - F_{\mathcal{Y}}(c)) = \\ &= P([a < \mathcal{X} \leq b]) \cdot P([c < \mathcal{Y} \leq d]) \end{aligned}$$

### 3.3.7 Definice

Řekneme, že náhodné veličiny  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$  mají *sdružené absolutně spojitě rozdělení*, jestliže existuje nezáporná funkce  $f_{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  taková, že

$$F_{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n}(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) d\vec{t} \quad (3.5)$$

pro všechna  $\vec{x} \in \mathbf{E}^n$ . Funkci  $f_{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n}(\vec{x})$  nazýváme *sdruženou hustotou pravděpodobnosti* náhodných veličin  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ .

### 3.3.8 Poznámka

Veličiny  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$  z předešlé definice někdy nazýváme zjednodušeně jako *absolutně spojitě*. Navíc každá nezáporná funkce  $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ , pro níž  $\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x}) d\vec{x} = 1$ , může být chápána jako hustota pravděpodobnosti určité vícerozměrné náhodné veličiny.



### 3.3.9 Věta

Necht' mají náhodné veličiny  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$  sdružené absolutně spojité rozdělení. Potom  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$  jsou nezávislé právě tehdy, když pro všechna  $\vec{x} \in \mathbf{E}^n$  platí

$$f_{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n}(\vec{x}) = \prod_{i=1}^n f_{\mathcal{X}_i}(x_i).$$

Důkaz:

- důkaz budeme demonstrovat na případě  $n = 2$
- chceme tedy dokázat, že  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  jsou nezávislé právě tehdy, když  $f_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(x, y) = f_{\mathcal{X}}(x) \cdot f_{\mathcal{Y}}(y)$
- pro důkaz první implikace vyjdeme z předpokladu, že  $f_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(x, y) = f_{\mathcal{X}}(x) \cdot f_{\mathcal{Y}}(y)$
- pro distribuční funkci  $F_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(x, y)$  pak podle vztahu (3.5) a dostáváme

$$F_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(t, s) dt ds = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\mathcal{X}}(t) f_{\mathcal{Y}}(s) dt ds$$

- z Fubiniovy věty pak

$$F_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(x, y) = \left( \int_{-\infty}^x f_{\mathcal{X}}(t) dt \right) \left( \int_{-\infty}^y f_{\mathcal{Y}}(s) ds \right) = F_{\mathcal{X}}(x) \cdot F_{\mathcal{Y}}(y)$$

- to ale podle věty 3.3.6 implikuje skutečnost, že  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  jsou nezávislé
- pro druhou implikaci předpokládejme, že  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  jsou nezávislé náhodné veličiny
- z tohoto předpokladu plyne, že

$$F_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(x, y) = F_{\mathcal{X}}(x) \cdot F_{\mathcal{Y}}(y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(t, s) dt ds$$

- z definice 3.3.7 odtud ihned vyplývá, že  $f_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(x, y) = f_{\mathcal{X}}(x) \cdot f_{\mathcal{Y}}(y)$

### 3.3.10 Poznámka

Zcela analogicky vztahu (3.2) platí také pro vícerozměrné náhodné veličiny vztah

$$f_{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n}(\vec{x}) = \frac{\partial^n F_{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n}}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n},$$

pokud je pravá strana definována. Dále také

$$P[a_1 < \mathcal{X} \leq b_1, a_2 < \mathcal{X} \leq b_2, \dots, a_n < \mathcal{X} \leq b_n] = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f_{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n}(\vec{x}) dx_n dx_{n-1} \dots dx_2 dx_1.$$

### 3.3.11 Definice

Necht' je dána vícerozměrná náhodná veličina  $\vec{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n)$  mající sdružené absolutně spojité rozdělení a příslušná vícerozměrná hustota pravděpodobnosti  $f(\vec{x})$ . Konverguje-li integrál druhého druhu

$$\int_{\mathbf{R}} \vec{x} f(\vec{x}) d\vec{x} = \left( \int_{\mathbf{R}} x_1 f(\vec{x}) d\vec{x}, \int_{\mathbf{R}} x_2 f(\vec{x}) d\vec{x}, \dots, \int_{\mathbf{R}} x_n f(\vec{x}) d\vec{x} \right),$$

pak příslušný vektor nazýváme *střední hodnotou* vícerozměrné náhodné veličiny  $\vec{\mathcal{X}}$  a značíme jedním ze symbolů  $E(\vec{\mathcal{X}})$  nebo  $\langle \vec{x} \rangle$ .

### 3.3.12 Lemma

Necht'  $\mathcal{A}$  je třída všech absolutně spojitých náhodných veličin  $\mathcal{X}$ , pro něž existují střední hodnoty  $E(\mathcal{X})$ . Pak pro každé  $c \in \mathbf{R}$  a všechny  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathcal{A}$  platí, že

$$E(c\mathcal{X}) = cE(\mathcal{X}), \quad E(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = E(\mathcal{X}) + E(\mathcal{Y}).$$

### 3.3.13 Definice

Nechť jsou dány náhodné veličiny  $\mathcal{X}$  a  $\mathcal{Y}$ . Necht' existují střední hodnoty  $E(\mathcal{X})$  a  $E(\mathcal{Y})$ . Pak *kovariancí náhodných veličin* rozumíme číslo

$$\text{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := E[(\mathcal{X} - E(\mathcal{X}))(\mathcal{Y} - E(\mathcal{Y}))], \quad (3.6)$$

pokud pravá strana existuje.

### 3.3.14 Věta

Nechť  $\mathcal{A}$  je třída všech náhodných veličin  $\mathcal{X}$ , pro něž existují střední hodnoty  $E(\mathcal{X})$  a rozptyly  $\text{VAR}(\mathcal{X})$ . Pak zobrazení definované předpisem (3.6) splňuje axiomy skalárního součinu, tj. kovariance náhodných veličin je skalárním součinem.

Důkaz:

- nejprve podotýkáme, že prvky třídy  $\mathcal{A}$  musejí být nyní chápány poněkud obecněji, neboť je třeba, aby do  $\mathcal{A}$  patřily i náhodné veličiny, jež mají nulový rozptyl a nejsou tudíž absolutně spojitě
- nejprve prokážeme, že zobrazení definované předpisem (3.6) splňuje axiom homogenity
- pro libovolné  $c \in \mathbf{R}$  ale zcela jasně (při aplikaci lemmatu 3.3.12) platí

$$\text{COV}(c\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := E[(c\mathcal{X} - E(c\mathcal{X}))(\mathcal{Y} - E(\mathcal{Y}))] = cE[(\mathcal{X} - E(\mathcal{X}))(\mathcal{Y} - E(\mathcal{Y}))] = c\text{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

- podobně také pro všechny  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \in \mathcal{A}$  platí, že

$$\begin{aligned} \text{COV}(\mathcal{X} + \mathcal{Z}, \mathcal{Y}) &:= E[(\mathcal{X} + \mathcal{Z} - E(\mathcal{X} + \mathcal{Z}))(\mathcal{Y} - E(\mathcal{Y}))] = E[(\mathcal{X} + \mathcal{Z} - E(\mathcal{X}) - E(\mathcal{Z}))(\mathcal{Y} - E(\mathcal{Y}))] = \\ &= E[(\mathcal{X} - E(\mathcal{X}))(\mathcal{Y} - E(\mathcal{Y}))] + E[(\mathcal{Z} - E(\mathcal{Z}))(\mathcal{Y} - E(\mathcal{Y}))] = \text{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) + \text{COV}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y}) \end{aligned}$$

- symetrie  $\text{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \text{COV}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$  je splněna triviálně
- zbývá tedy prokázat axiom pozitivní definitnosti
- označme  $f(x, y)$  sdruženou hustotu pravděpodobnosti pro náhodné veličiny  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  a pro všechny  $\mathcal{X} \in \mathcal{A}$  zkoumejme kovarianci  $\text{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$
- jedná se tedy o výraz  $\text{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) := E[(\mathcal{X} - E(\mathcal{X}))^2]$ , který je na první pohled nezáporný, neboť

$$\text{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) = \int_{\mathbf{E}^r} (x - E(x))^2 f(x, x) dx \geq 0,$$

což je splněno kvůli nezápornosti integrandu

- poslední, co je třeba prověřit, je skutečnost, že rovnost  $\text{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) = 0$  nastává pouze tehdy, je-li  $\mathcal{X}$  nulový prvek třídy  $\mathcal{A}$
- přitom ale integrand  $(x - E(x))^2 f(x, x)$  může být zjevně nulový pouze pokud náhodná veličina nabývá pouze konstantních hodnot  $\gamma \in \mathbf{R}$ , kdy  $E(x) = \gamma$
- nulovým prvkem třídy  $\mathcal{A}$  je tedy skupina náhodných veličin, jež mají nulový rozptyl
- zde ovšem vyvstává otázka, jak bude vypadat hustota pravděpodobnosti pro takové veličiny
- zde musíme s předstihem konstatovat, že takovými hustotami pravděpodobnosti budou zobecněné funkce zavedené v dalších kapitolách, speciálně Diracova  $\delta$ -funkce, resp. centrovaná Diracova  $\delta$ -funkce
- za takových okolností je pak skutečně kovariance  $\text{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  náhodných veličin skalárním součinem na  $\mathcal{A}$

### 3.3.15 Věta

Necht' jsou dány absolutně spojitě náhodné veličiny  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  a necht' existuje jejich kovariance  $\text{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ . Pak platí

$$\text{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathbb{E}(\mathcal{X}\mathcal{Y}) - \mathbb{E}(\mathcal{X})\mathbb{E}(\mathcal{Y}).$$

Důkaz:

- z definice kovariance přímo vyplývá, že

$$\begin{aligned} \text{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) &= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} (x - \mathbb{E}(x))(y - \mathbb{E}(y)) f(x, y) \, dx dy = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} xy f(x, y) \, dx dy - \\ &\quad - \mathbb{E}(y) \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} x f(x, y) \, dx dy - \mathbb{E}(x) \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} y f(x, y) \, dx dy + \mathbb{E}(x)\mathbb{E}(y) \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} f(x, y) \, dx dy = \\ &= \mathbb{E}(xy) - \mathbb{E}(x)\mathbb{E}(y) - \mathbb{E}(x)\mathbb{E}(y) + \mathbb{E}(x)\mathbb{E}(y) = \mathbb{E}(\mathcal{X}\mathcal{Y}) - \mathbb{E}(\mathcal{X})\mathbb{E}(\mathcal{Y}) \end{aligned}$$

### 3.3.16 Věta

Necht' jsou dány absolutně spojitě nezávislé náhodné veličiny  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$ . Necht' existuje jejich kovariance  $\text{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ . Pak  $\text{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$ .

Důkaz:

- označme  $h(x, y)$  sdruženou hustotu pravděpodobnosti pro náhodné veličiny  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$
- jelikož  $\mathcal{X}$  a  $\mathcal{Y}$  jsou nezávislé náhodné veličiny, existují podle věty 3.3.9 funkce  $f(x)$  a  $g(y)$  tak, že  $h(x, y) = f(x) \cdot g(y)$
- pak ale z Fubiniovy věty, resp. z věty o separabilitě plyne, že

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}\mathcal{Y}) = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} xy f(x) g(y) \, dx dy = \int_{\mathbf{R}} x f(x) \, dx \cdot \int_{\mathbf{R}} y g(y) \, dy = \mathbb{E}(\mathcal{X})\mathbb{E}(\mathcal{Y})$$

- z věty 3.3.15 pak ihned vyplývá, že

$$\text{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathbb{E}(\mathcal{X}\mathcal{Y}) - \mathbb{E}(\mathcal{X})\mathbb{E}(\mathcal{Y}) = \mathbb{E}(\mathcal{X})\mathbb{E}(\mathcal{Y}) - \mathbb{E}(\mathcal{X})\mathbb{E}(\mathcal{Y}) = 0$$

### 3.3.17 Definice

Necht' jsou dány absolutně spojitě náhodné veličiny  $\mathcal{X}$  a  $\mathcal{Y}$ . Necht' existují jejich kovariance  $\text{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  a směrodatné odchylky  $\text{SD}(\mathcal{X})$ , resp.  $\text{SD}(\mathcal{Y})$ . Pak *koefficientem korelace náhodných veličin* rozumíme číslo

$$\varrho(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \frac{\text{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}{\text{SD}(\mathcal{X})\text{SD}(\mathcal{Y})}.$$

### 3.3.18 Poznámka

Kovariance náhodných veličin splňuje podle věty 3.3.14 axiomy skalárního součinu, a tedy  $\sqrt{\text{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{X})} = \text{VAR}(\mathcal{X})$  je normou náhodné veličiny  $\mathcal{X}$ . Odtud a z Schwarzovy-Cauchyovy-Bunjakovského nerovnosti (věta 6.2.3 ve skriptech [2]) tvaru

$$|\text{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})| \leq \text{SD}(\mathcal{X})\text{SD}(\mathcal{Y})$$

ale ihned vyplývá, že koefficient korelace náhodných veličin reprezentuje de facto kosinus úhlu náhodných veličiny  $\mathcal{X}$  a  $\mathcal{Y}$  (viz poznámka 6.2.8 ve skriptech [2]).

### 3.3.19 Věta

Necht' jsou dány absolutně spojitě náhodné veličiny  $\mathcal{X}$  a  $\mathcal{Y}$ . Necht' existuje jejich koefficient korelace  $\varrho(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ . Pak platí

$$-1 \leq \varrho(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \leq 1,$$

přičemž rovnosti  $\varrho(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 1$ , resp.  $\varrho(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = -1$  nastávají právě tehdy, když existuje číslo  $C > 0$  tak, že

$$\mathcal{Y} - \mathbb{E}(\mathcal{Y}) = C(\mathcal{Y} - \mathbb{E}(\mathcal{Y})), \quad \text{resp.} \quad \mathcal{Y} - \mathbb{E}(\mathcal{Y}) = -C(\mathcal{Y} - \mathbb{E}(\mathcal{Y})).$$

Důkaz:

- plyne z poznámky 3.3.18

### 3.3.20 Definice

Nechť  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$  je vektor náhodných veličin. Necht' pro všechna  $k, \ell \in \hat{n}$  existují kovariance  $\sigma_{k\ell} = \text{COV}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_\ell)$ . Pak matici

$$\mathbb{S}_{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n} := \begin{pmatrix} \sigma_{11}(\vec{x}) & \sigma_{12}(\vec{x}) & \dots & \sigma_{1r}(\vec{x}) \\ \sigma_{21}(\vec{x}) & \sigma_{22}(\vec{x}) & \dots & \sigma_{2r}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{r1}(\vec{x}) & \sigma_{r2}(\vec{x}) & \dots & \sigma_{rr}(\vec{x}) \end{pmatrix} = (\sigma_{k\ell})_{k, \ell=1}^n$$

nazveme *kovariancí náhodného vektoru*  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$  nebo *kovarianční maticí*.

### 3.3.21 Poznámka

Z definice 3.3.20 vyplývá, že kovarianční matice  $\mathbb{S}_{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n}$  je symetrická, na diagonále má rozptyly  $\sigma_{\ell\ell} = \text{COV}(\mathcal{X}_\ell, \mathcal{X}_\ell) = \text{VAR}(\mathcal{X}_\ell)$  náhodných veličin  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$  a pokud jsou tyto veličiny nezávislé, pak je  $\mathbb{S}_{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n}$  diagonální maticí.

## 3.4 Konvoluce funkcí

Prezentovanou teorii pravděpodobnosti nyní zužitkujeme při specifickém zavedení pojmu konvoluce funkcí. Nejprve představíme tuto operaci pro hustoty pravděpodobnosti, a poté tuto definici rozšíříme na co nejširší třídu funkcí.

### 3.4.1 Věta

Nechť jsou dány nezávislé jednorozměrné náhodné veličiny  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  s absolutně spojitým rozdělením. Necht'  $f_{\mathcal{X}}(x)$  a  $f_{\mathcal{Y}}(y)$  jsou příslušné hustoty pravděpodobnosti. Pak hustotou pravděpodobnosti  $f_{\mathcal{Z}}(z)$  náhodné veličiny  $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$  je funkce

$$f_{\mathcal{Z}}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathcal{X}}(x) f_{\mathcal{Y}}(r-x) dx. \quad (3.7)$$

Důkaz:

- označme  $F_{\mathcal{Z}}(z)$  distribuční funkci náhodné veličiny  $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$
- pro ni platí

$$F_{\mathcal{Z}}(z) = \mathbb{P}[\mathcal{Z} \leq z] = \mathbb{P}[\mathcal{X} + \mathcal{Y} \leq z] = \iint_{x+y \leq z} f_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}(x, y) dx dy$$

- označme  $M_z = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : x + y \leq z\}$
- množina  $M_z$  představuje polorovinu v  $\mathbf{E}^2$
- užitíme-li dále předpokladu, že  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  jsou nezávislé, tak platí rovnost

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{Z}}(z) &= \iint_{M_z} f_{\mathcal{X}}(x) f_{\mathcal{Y}}(y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_{\mathcal{X}}(x) f_{\mathcal{Y}}(y) dy dx = \left| \begin{array}{l} r = x + y \\ dr = dy \end{array} \right| = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^z f_{\mathcal{X}}(x) f_{\mathcal{Y}}(r-x) dr dx = \int_{-\infty}^z \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathcal{X}}(x) f_{\mathcal{Y}}(r-x) dx \right) dr = \int_{-\infty}^z f_{\mathcal{Z}}(r) dr \end{aligned}$$

- proto je hledanou hustotou pravděpodobnosti funkce  $f_{\mathcal{Z}}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathcal{X}}(x) f_{\mathcal{Y}}(r-x) dx$

### 3.4.2 Poznámka

Analogicky lze ukázat, že pro nezávislé vícerozměrné náhodné veličiny  $\vec{\mathcal{X}}, \vec{\mathcal{Y}}$  a  $\vec{\mathcal{Z}} = \vec{\mathcal{X}} + \vec{\mathcal{Y}}$  platí vztah

$$f_{\vec{\mathcal{Z}}}(\vec{r}) = \int_{\mathbf{E}^r} f_{\vec{\mathcal{X}}}(\vec{x}) f_{\vec{\mathcal{Y}}}(\vec{r} - \vec{x}) d\vec{x}. \quad (3.8)$$

### 3.4.3 Poznámka

Vztah (3.8) je jedním ze základních vztahů celé teorie o řešení parciálních diferenciálních rovnic. Jeho platnost nebudeme zužovat pouze na případ hustot pravděpodobnosti, ale zobecníme ho pro obecné vícerozměrné funkce.

### 3.4.4 Definice

Nechť jsou dány funkce  $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbf{E}^r)$ . Zobrazení  $(f \star g)(\vec{x}) : \mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbf{E}^r) \times \mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbf{E}^r) \mapsto \mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbf{E}^r)$  definované předpisem

$$(f \star g)(\vec{x}) := \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})g(\vec{x} - \vec{s}) d\vec{s}$$

nazveme *konvolucí* funkcí, pokud pravá strana existuje a patří do třídy  $\mathcal{L}_{\text{loc}}(\mathbf{E}^r)$ .

### 3.4.5 Věta

Nechť jsou dány funkce  $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{L}_1(\mathbf{E}^r)$ . Pak jejich konvoluce  $(f \star g)(\vec{x})$  existuje pro skoro všechna  $\vec{x} \in \mathbf{E}^r$  a navíc patří do třídy  $\mathcal{L}_1(\mathbf{E}^r)$ . Dále

$$\int_{\mathbf{E}^r} (f \star g)(\vec{x}) d\vec{x} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_1} \cdot \|g\|_{\mathcal{L}_1}. \quad (3.9)$$

Důkaz:

- vyjdeme z předpokladů, že  $\int_{\mathbf{E}^r} |f(\vec{x})| d\vec{x} \in \mathbf{R}$  a  $\int_{\mathbf{E}^r} |g(\vec{x})| d\vec{x} \in \mathbf{R}$
- chceme ukázat, že také  $\int_{\mathbf{E}^r} |(f \star g)(\vec{x})| d\vec{x} \in \mathbf{R}$
- zkoumejme proto integrál

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{E}^r} |(f \star g)(\vec{x})| d\vec{x} = \\ &= \int_{\mathbf{E}^r} \left| \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})g(\vec{x} - \vec{s}) d\vec{s} \right| d\vec{x} \leq \int_{\mathbf{E}^r} \int_{\mathbf{E}^r} |f(\vec{s})g(\vec{x} - \vec{s})| d\vec{s} d\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} \left( \int_{\mathbf{E}^r} |g(\vec{x} - \vec{s})| d\vec{x} \right) |f(\vec{s})| d\vec{s} = \\ &= \int_{\mathbf{E}^r} \left| \frac{\vec{y} = \vec{x} - \vec{s}}{d\vec{y} = d\vec{s}} \right| = \int_{\mathbf{E}^r} \left( \int_{\mathbf{E}^r} |g(\vec{y})| d\vec{y} \right) |f(\vec{s})| d\vec{s} = \int_{\mathbf{E}^r} |g(\vec{y})| d\vec{y} \cdot \int_{\mathbf{E}^r} |f(\vec{x})| d\vec{x} \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

- podle tvrzení Fubiniovy věty platí, že  $f(\vec{x} - \vec{y})g(\vec{y}) \in \mathcal{L}_1(\mathbf{E}^r)$  pro skoro všechna  $\vec{x} \in \mathbf{E}^r$ , a tedy konvoluce  $(f \star g)(\vec{x})$  je definována pro skoro všechna  $\vec{x} \in \mathbf{E}^r$
- a protože  $\|h\|_{\mathcal{L}_1} := \int_{\mathbf{E}^r} |h(\vec{x})| d\vec{x}$ , vychází z předchozích úvah také platnost vztahu (3.9)
- využíváme přitom věty 4.2.37, 4.3.5 a 4.3.7 ze skript [3]
- pro funkce nezáporné s.v. navíc platí ve vztahu (3.9) rovnost, tj.  $\|f \star g\|_{\mathcal{L}_1} = \|f\|_{\mathcal{L}_1} \cdot \|g\|_{\mathcal{L}_1}$

### 3.4.6 Věta

Nechť jsou dány hustoty pravděpodobnosti  $f(\vec{x}), g(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ . Pak jejich konvoluce  $(f \star g)(\vec{x})$  existuje a navíc je také hustotou pravděpodobnosti.

Důkaz:

- o hustotách  $f(\vec{x}), g(\vec{x})$  víme, že patří do  $\mathcal{L}_1(\mathbf{E}^r)$  a chceme ukázat, že do  $\mathcal{L}_1(\mathbf{E}^r)$  patří také jejich konvoluce, a navíc, že tato konvoluce je také hustotou pravděpodobnosti
- Díky nerovnosti

$$(f \star g)(\vec{x}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})g(\vec{x} - \vec{s}) d\vec{s} \geq 0$$

víme, že je splněna nezápornost hustoty

- ověříme, že  $\int_{\mathbf{E}^r} (f \star g)(\vec{x}) d\vec{x} = 1$

$$\int_{\mathbf{E}^r} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})g(\vec{x} - \vec{s}) d\vec{x} d\vec{s} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{x} - \vec{s}) d\vec{x} d\vec{s} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) d\vec{s} \int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{y}) d\vec{y} = 1$$

přičemž jsme v první rovnosti použili Fubiniovu větu a ve druhé rovnosti substituci  $\vec{y} = \vec{x} - \vec{s}$

- integrály  $\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) d\vec{s}$  a  $\int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{y}) d\vec{y}$  jsou z definice hustoty rovny jedné a tedy  $(f \star g)(\vec{x})$  je opravdu také hustotou pravděpodobnosti

### 3.4.7 Příklad

Nechť

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Vypočtěme konvoluci  $f(x) \star g(x)$ . Z definice konvoluce a ze vztahu (??) vyvozujeme sadu rovností

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{(s-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x-s-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} ds = \left| \begin{array}{l} y = s - \mu_1 \\ dy = ds \end{array} \right| = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x-y-\mu_1-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} dy = \\ &= \left| \lambda := x - \mu_1 - \mu_2 \right| = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\mathbf{R}} \exp \left[ -\frac{\sigma_2 y^2 + \sigma_1 (y - \lambda)^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} \right] dy = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\mathbf{R}} \exp \left[ -\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} \left( (y - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \lambda)^2 + \lambda^2 \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} \right) \right] dy = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{\lambda^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \int_{\mathbf{R}} \exp \left[ -\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} \left( y - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \lambda \right)^2 \right] dy = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{\lambda^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} z^2} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{\lambda^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}. \end{aligned}$$

Konvolucí dvou hustot pravděpodobnosti Gaussova rozdělení je tedy podle dosaženého výsledku opět hustota pravděpodobnosti Gaussova rozdělení. Mají-li vstupující hustoty střední hodnoty po řadě  $\mu_1, \mu_2$  a rozptyly  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ , má výsledná konvoluce střední hodnotu  $\mu_1 + \mu_2$  a rozptyl  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ . Univerzalitu tohoto tvrzení prokážeme v následujících větách.

### 3.4.8 Věta

Nechť  $\mathcal{X}$ , resp.  $\mathcal{Y}$  jsou nezávislé náhodné veličiny mající absolutně spojitě rozdělení. Nechť jejich hustoty pravděpodobnosti jsou  $f_{\mathcal{X}}(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbf{R})$ , resp.  $g_{\mathcal{Y}}(y) \in \mathcal{L}_1(\mathbf{R})$  a navíc  $\langle x \rangle = \mu_1$  a  $\langle y \rangle = \mu_2$ . Potom hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny  $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$  je funkce  $(f_{\mathcal{X}} \star g_{\mathcal{Y}})(z)$  a platí  $\langle z \rangle = \mu_1 + \mu_2$ .

Důkaz:

- označme  $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$  součet náhodných veličin
- pro příslušnou hustotu pravděpodobnosti veličiny  $\mathcal{Z}$  byla ve větě 3.4.1 odvozena rovnost

$$f_{\mathcal{Z}}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathcal{X}}(x) f_{\mathcal{Y}}(r-x) dx,$$

kteřá reprezentuje první z dokazovaných tvrzení

- zbývá proto dokázat, že střední hodnotou součtu náhodných veličin je součet středních hodnot těchto veličin
- použitím Fubiniovy věty, jednoduché substituce a definice střední hodnoty náhodné veličiny dostáváme

$$\begin{aligned} \langle z \rangle &= \int_{\mathbf{R}} z \left( \int_{\mathbf{R}} f(x) g(z-x) dx \right) dz = \int_{\mathbf{R}} f(x) \left( \int_{\mathbf{R}} z \cdot g(z-x) dz \right) dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} y = z - x \\ dz = dy \end{array} \right| = \int_{\mathbf{R}} f(x) \left( \int_{\mathbf{R}} (x+y) \cdot g(y) dy \right) dx = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} x f(x) g(y) dy dx + \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} y f(x) g(y) dy dx = \langle x \rangle \int_{\mathbf{R}} g(y) dy + \langle y \rangle \int_{\mathbf{R}} f(x) dx = \langle x \rangle + \langle y \rangle \end{aligned}$$

- tím je důkaz proveden

### 3.4.9 Věta

Nechť  $\mathcal{X}$ , resp.  $\mathcal{Y}$  jsou nezávislé náhodné veličiny mající absolutně spojitě rozdělení. Necht' jejich hustoty pravděpodobnosti jsou  $f_{\mathcal{X}}(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbf{R})$ , resp.  $g_{\mathcal{Y}}(y) \in \mathcal{L}_1(\mathbf{R})$  a navíc  $\text{VAR}(\mathcal{X}) = \sigma_x^2$  a  $\text{VAR}(\mathcal{Y}) = \sigma_y^2$ . Potom pro rozptyl náhodné veličiny  $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$  platí rovnost

$$\text{VAR}(\mathcal{Z}) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2.$$

Důkaz:

- hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny  $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$  je funkce vypočtená jako konvoluce  $f(x) \star g(x)$ , tj.

$$h(z) = \int_{\mathbf{R}} f(x)g(z-x) \, dx$$

- snadno se lze tudíž přesvědčit, že platí série následujících rovností

$$\begin{aligned} \langle z^2 \rangle &= \int_{\mathbf{R}} z^2 \left( \int_{\mathbf{R}} f(x)g(z-x) \, dx \right) dz = \int_{\mathbf{R}} f(x) \left( \int_{\mathbf{R}} z^2 \cdot g(z-x) \, dz \right) dx = \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(x) \left( \int_{\mathbf{R}} (x+y)^2 \cdot g(y) \, dy \right) dx = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} x^2 f(x)g(y) \, dy \, dx + \\ &\quad + 2 \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} xy f(x)g(y) \, dy \, dx + \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} y^2 f(x)g(y) \, dy \, dx = \\ &= \langle x^2 \rangle \int_{\mathbf{R}} g(y) \, dy + 2 \int_{\mathbf{R}^2} xy f(x)g(y) \, dx \, dy + \langle y^2 \rangle \int_{\mathbf{R}} f(x) \, dx = \langle x^2 \rangle + 2\langle xy \rangle + \langle y^2 \rangle \end{aligned}$$

- jelikož pro nezávislé náhodné veličiny platí, že jejich kovariance je nulová (viz věta 3.3.16), dostáváme rovnost

$$\begin{aligned} \text{VAR}(\mathcal{Z}) &= \langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2 = \langle x^2 \rangle + 2\langle xy \rangle + \langle y^2 \rangle - \langle x \rangle^2 - 2\langle x \rangle \langle y \rangle - \langle y \rangle^2 = \\ &= \text{VAR}(\mathcal{X}) + \text{VAR}(\mathcal{Y}) + 2\text{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \text{VAR}(\mathcal{X}) + \text{VAR}(\mathcal{Y}) \end{aligned}$$

- ta ale kompletuje důkaz

### 3.4.10 Věta – o posunutí v konvoluci

Necht' jsou dány libovolné funkce  $f(\vec{x}) \in \mathcal{L}_1(\mathbf{E}^r)$  a  $g(\vec{x}) \in \mathcal{L}_1(\mathbf{E}^r)$  a vektor  $\vec{b} \in \mathbf{E}^r$ . Pak platí

$$f(\vec{x} + \vec{b}) \star g(\vec{x}) = f(\vec{x}) \star g(\vec{x} + \vec{b}) = (f \star g)(\vec{x} + \vec{b}).$$

Důkaz:

- není pravděpodobně obtížné nahlédnout, že

$$(f \star g)(\vec{x} + \vec{b}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})g(\vec{x} + \vec{b} - \vec{s}) \, d\vec{s} = f(\vec{x}) \star g(\vec{x} + \vec{b})$$

- dále

$$f(\vec{x} + \vec{b}) \star g(\vec{x}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s} + \vec{b})g(\vec{x} - \vec{s}) \, d\vec{s} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{r})g(\vec{x} + \vec{b} - \vec{r}) \, d\vec{r} = f(\vec{x}) \star g(\vec{x} + \vec{b})$$

- přitom existence všech dotčených integrálů je garantována větou 3.4.5

### 3.4.11 Věta – o derivaci konvoluce

Nechť jsou dány libovolné funkce  $f(\vec{x}) \in \mathcal{L}_1(\mathbf{E}^r)$  a  $g(\vec{x}) \in \mathcal{L}_1(\mathbf{E}^r)$  a vektor  $\vec{b} \in \mathbf{E}^r$ . Nechť je  $i \in \hat{r}$  zvoleno libovolně. Nechť dále  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{L}_1(\mathbf{E}^r)$  a  $\frac{\partial g}{\partial x_i} \in \mathcal{L}_1(\mathbf{E}^r)$ . Pak platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g(\vec{x}) = f(\vec{x}) \star \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (f \star g).$$

Důkaz:

- existence všech dotčených integrálů je opět garantována větou 3.4.5
- dále

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} \star g(\vec{x}) &= \int_{\mathbf{E}^r} \frac{\partial f}{\partial s_i}(\vec{s}) g(\vec{x} - \vec{s}) d\vec{s} = \left| \begin{array}{cc} u = g(\vec{s}) & v' = \frac{\partial f}{\partial s_i}(\vec{s}) \\ u' = \frac{\partial g}{\partial(x_i - s_i)} \frac{\partial(x_i - s_i)}{\partial s_i} & v = f(\vec{s}) \end{array} \right| = \\ &= \int_{\mathbf{E}^{r-1}} \left[ f(\vec{s}) g(\vec{s}) \right]_{s_i \rightarrow -\infty}^{s_i \rightarrow \infty} ds_1 ds_2 \dots ds_{i-1} ds_{i+1} \dots ds_r - \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \frac{\partial g}{\partial(x_i - s_i)} \frac{\partial(x_i - s_i)}{\partial s_i} d\vec{s} = \\ &= \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \frac{\partial g(\vec{x} - \vec{s})}{\partial(x_i - s_i)} d\vec{s} = f(\vec{x}) \star \frac{\partial g}{\partial x_i} \end{aligned}$$

- bylo zde přitom využito tzv. *nutné podmínky konvergence Lebesgueova integrálu*, tedy implikace

$$f(\vec{x}) \in \mathcal{L}_1(\mathbf{E}^r) \implies \lim_{\|\vec{x}\| \rightarrow \infty} f(\vec{x}) = 0 \implies \forall i \in \hat{r}: \lim_{x_i \rightarrow \infty} f(\vec{x}) = 0.$$

## 3.5 Báze ve funkcionálních Hilbertových prostorech

### 3.5.1 Definice

Nechť je dán Hilbertův prostor  $\mathcal{H}$ . Nechť  $S$  je neprázdna množina funkcí z  $\mathcal{H}$  neobsahující nulovou funkci (nulový vektor). Řekneme, že množina  $S \subset \mathcal{H}$  je *ortogonální* v  $\mathcal{H}$ , jestliže pro každé  $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in S$  takové, že  $f(\vec{x}) \neq g(\vec{x})$ , platí rovnost  $\langle f|g \rangle = 0$ . Množinu  $S \subset \mathcal{H}$  nazveme *ortonormální*, je-li ortogonální a platí-li navíc, že pro každé  $f(\vec{x}) \in S$  je  $\|f(\vec{x})\| = 1$ .

### 3.5.2 Definice

Nechť je dán Hilbertův prostor  $\mathcal{H}$  se skalárním součinem  $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto \mathbf{C}$ . Nechť  $\nu(f)$  je výroková formule na  $\mathcal{H}$ . Řekneme, že neprázdna množina  $S$  funkcí z  $\mathcal{H}$  je *maximální množinou s vlastností  $\nu$* , jestliže pro všechny funkce  $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$  platí, že  $\nu(f) = 1$ , tj. výrok "funkce  $f(\vec{x})$  má vlastnost  $\nu$ " je pravdivý pro všechny funkce  $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ , a je-li  $T \subset \mathcal{H}$  množina, jejíž všechny prvky splňují touž vlastnost, pak  $T \subset S$ .

### 3.5.3 Věta

Nechť je množina  $S \subset \mathcal{H}$  ortogonální v  $\mathcal{H}$ . Pak jsou všechny její prvky lineárně nezávislé.

Důkaz:

- postupujeme metodou sporu
- dokážeme tedy obměněnou verzi tohoto tvrzení, a sice, že jsou-li prvky množiny  $S$  lineárně závislé, pak  $S$  nemůže být ortogonální
- předpokládejme tedy, že pro nenulové funkce  $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}) \in S$  existuje netriviální kombinace konstant  $(C_1, C_2, \dots, C_n) \neq \vec{0}$  tak, že  $\sum_{k=1}^n C_k f_k(\vec{x}) = \vec{0}$
- řekněme, že např.  $C_\ell \neq 0$
- pak pro  $\alpha_k := C_k / C_\ell$  platí:

$$f_\ell(\vec{x}) = - \sum_{k=1, k \neq \ell}^n \alpha_k f_k(\vec{x})$$



- aplikujeme-li na tuto rovnost skalární násobení funkcí  $f_\ell(\vec{x})$  a užijeme-li (pro spor) předpokladu, že všechny dotčené funkce jsou po dvou ortogonální, dostáváme rovnost

$$\langle f_\ell | f_\ell \rangle = - \sum_{k=1, k \neq \ell}^n \alpha_k \langle f_k | f_\ell \rangle = 0$$

- z axiomu pozitivní definitnosti ale odtud vyplývá, že  $f_\ell(\vec{x}) = o(\vec{x})$ , což je zřetelný spor

### 3.5.4 Věta – Besselova nerovnost

Necht'  $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x})\}$  je ortonormální množina v Hilbertově prostoru  $\mathcal{H}$ . Necht'  $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$  je zvolen libovolně. Označme  $a_k := \langle f_k | g \rangle$ . Pak platí

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq \|g(\vec{x})\|^2. \quad (3.10)$$

Důkaz:

- zvolme funkci  $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$  libovolně
- pak platí série rovností, resp. nerovností

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\| g - \sum_{k=1}^n a_k f_k \right\|^2 &= \left\langle g - \sum_{k=1}^n a_k f_k \left| g - \sum_{k=1}^n a_k f_k \right\rangle = \|g(\vec{x})\|^2 - \sum_{k=1}^n a_k^* \langle g | f_k \rangle - \sum_{k=1}^n a_k \langle f_k | g \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_k^* a_\ell \langle f_\ell | f_k \rangle = \|g(\vec{x})\|^2 - \sum_{k=1}^n a_k^* a_k - \sum_{k=1}^n a_k a_k^* + \sum_{k=1}^n a_k^* a_k = \|g\|^2 - \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \end{aligned}$$

### 3.5.5 Věta

Necht'  $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}), \dots\}$  je (spočetná) ortonormální množina v Hilbertově prostoru  $\mathcal{H}$ . Necht' je funkce  $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$  zvolena libovolně. Označme  $a_k = \langle g | f_k \rangle$ . Pak existuje limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{norm} \sum_{k=1}^n a_k f_k(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x}) =: h(\vec{x}) \in \mathcal{H}.$$

Navíc pro každé  $k \in \mathbb{N}$  platí  $\langle g - h | f_k \rangle = 0$ .

Důkaz:

- pro funkci  $h_n(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n a_k f_k(\vec{x})$  platí jednoduchá rovnost

$$\|h_{n+p}(\vec{x}) - h_n(\vec{x})\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k f_k(\vec{x}) \right\|^2 \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2, \quad (3.11)$$

kde bylo využito kolmosti a normality funkcí v systému  $S$

- z Besselovy nerovnosti plyne, že pro jakékoli  $n \in \mathbb{N}$  je  $\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq \|g(\vec{x})\|^2$
- protože  $\sum_{k=1}^n |a_k|^2$  je řadou s nezápornými členy a je omezená, jistě také konverguje
- proto ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pro indexy  $n > n_0$  a  $p \in \mathbb{N}$  je  $\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2 < \varepsilon^2$
- z nerovnosti (3.11) pak lehce vyvodíme, že posloupnost  $(h_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$  je Cauchyovská
- a protože  $\mathcal{H}$  je prostorem Hilbertovým, je  $(h_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$  rovněž konvergentní (ve smyslu normy)
- existuje tudíž  $h(\vec{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x}) \in \mathcal{H}$
- pro pevné  $k \in \mathbb{N}$  a  $n > k$  je zřejmé  $\langle g - h_n | f_k \rangle = 0$
- užijeme-li v předešlém vztahu limitní přechod  $n \rightarrow \infty$  a aplikujeme-li větu 2.3.28, plyne odsud, že  $\langle g - h | f_k \rangle = 0$  pro všechny  $k \in \mathbb{N}$



# Literatura

- [1] T. Hobza: *Matematická statistika*, <http://tjn.fjfi.cvut.cz/~hobza/MAST/mast.pdf> (2007)
- [2] M. Krbálek: *Matematická analýza III (třetí přepracované vydání)*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2011
- [3] M. Krbálek: *Matematická analýza IV (druhé přepracované vydání)*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2009
- [4] M. Krbálek: *Úlohy matematické fyziky*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2012
- [5] M. Krbálek: *Teorie míry a Lebesgueova integrálu*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2014 (Je to správně?)