Obsah

PŘEDMLUVA

Dostává se vám do rukou skriptum, jež pojednává zejména o metodách řešení pokročilých matematických úloh vzešlých z řešení konkrétních problémů v praktických aplikacích (fyzice, ekonomii, biologii, sociálních vědách, zpracování obrazu apod). Seznámíme se v něm nejen se samotnými metodami řešení, ale především s důkladným teoretickým pozadím, které formulaci řešení předchází. Před samotným započetím studia úloh matematické fyziky je však nezbytné, aby čtenář zvládl základy matematické analýzy funkce více proměnných a lineární algebry. Bez pochopení příslušných elementárních poznatků bude studium následujícího textu bezúčelné.

První kapitola skript pojednává o obecných vlastnostech funkcionálních Hilbertových prostorů a jejich bází a o lineárních operátorech, jež jsou na těchto Hilbertových prostorech definovány. Vlastnosti takových lineárních operátorů jsou pak zužitkovány v dalších partiích skript. Ve druhé kapitole je rámcově nastíněna teorie pravděpodobnosti pro absolutně spojité náhodné veličiny s důrazem na korektní zavedení pojmu konvoluce. Třetí kapitola těchto skript představuje tři základní metody na řešení integrálních rovnic a sumarizuje vlastnosti jejich řešení. Ve čtvrté kapitole se zaobíráme metodikou převádění parciálních diferenciálních rovnic na normální tvary a některými způsoby jejich řešení. Hlavní kapitola skript podrobně rozebírá teorii zobecněných funkcí, tj. lineárních a spojitých funkcionálů vystavěných nad třídou testovacích funkcí. V rámci šesté kapitoly je probrána teorie integrálních transformací: Laplaceovy a Fourierovy. Tato teorie je poté rozšířena na transformace zobecněných funkcí. V sedmé kapitole jsou aplikací fundamentální věty o řešení diferenciálních rovnic zkonstruována obecná řešení základních Cauchyových úloh. V poslední kapitole jsou pak řešeny úlohy na vlastní hodnoty a vlastní funkce eliptických diferenciálních operátorů a následně také předvedena konstrukce řešení okrajových úloh.

Značení

Symbol	Význam
$\mathbf{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbf{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbf{Z}$	množina celých čísel
$\mathbf{R}$	množina reálných čísel
$\mathbf{C}$	množina komplexních čísel
$\widehat{n}$	$\{m \in \mathbf{N} : m \leqslant n\}$
$\underline{\widehat{n}}$	$\{m \in \mathbf{N}_0 : m \leqslant n\}$
$\mathbf{R}^r$	množina uspořádaných $r-$tic reálných čísel
$\mathbf{R}^+$	množina kladných reálných čísel
$\mathbf{R}^-$	množina záporných reálných čísel
$\mathbf{X}_0$	$\mathbf{X} \cup \{0\}$, kde $\mathbf{X}$ je libovolná číselná množina
$\mathbf{R}^\star$	$\mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
$\mathbf{E}^r$	$r-$rozměrný euklidovský prostor
A, B, C	množiny
$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$	matice
$\mathscr{C}^n(M)$	třída všech funkcí, jež mají na množině M spojité derivace až do řádu n
$\mathscr{C}^\infty(M)$	třída všech funkcí, jež mají na množině M spojité derivace všech řádů
$f'(x), f''(x), f'''(x)$	první, druhá, třetí derivace funkce $f(x)$ podle proměnné x
$f^{(n)}(x)$	$n-$tá derivace funkce $f(x)$ podle proměnné x
$\dot{f}(t), \ddot{f}(t)$	první, druhá derivace funkce $f(t)$ podle proměnné t
$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}\varepsilon^n}$	$n-$tá derivace funkce $f(\varepsilon)$ podle proměnné ε
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	parciální derivace funkce $f(\vec{x})$ podle proměnné x_i
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$	druhá parciální derivace funkce $f(\vec{x})$ podle proměnných x_i a x_j (v uvedeném pořadí)
$\mathrm{d}^n f_a(h)$	$n-$tý totální diferenciál funkce $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ v bodě $a \in \mathbf{R}$
$\mathrm{d}^n f_{\vec{a}}(\vec{h})$	$n-$tý totální diferenciál funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{R}^r \mapsto \mathbf{R}$ v bodě $\vec{a} \in \mathbf{R}^r$
$\overrightarrow{F}(\vec{x})$	vektor funkcí (funkcionální vektor)
$\mathbb{A}(\vec{x})$	matice funkcí (funkcionální matice)
$\mathfrak{D}(\vec{x})$	$r-$rozměrná Dirichletova funkce
$\mathcal{U}(x), \mathcal{U}_\varepsilon(x)$	okolí bodu x
$\mathcal{U}^\star(x), \mathcal{U}_\varepsilon^\star(x)$	redukované okolí bodu x
$\cup, \uplus, \cap$	sjednocení, disjunktní sjednocení a průnik množin
$\subset, \subsetneqq$	podmnožina a vlastní podmnožina množiny
$\mathrm{Dom}(f)$, $\mathrm{Ran}(f)$	definiční obor a obor hodnot funkce $f(\vec{x})$
$f(A)$	obraz množiny A při zobrazení $f(\vec{x})$
$f^{-1}(A)$	vzor množiny A při zobrazení $f(\vec{x})$
$f^{-1}(a)$	vzor jednoprvkové množiny $\{a\}$ při zobrazení $f(\vec{x})$
$\approx$	přibližně
$\propto$	úměrně
$\sim$	ekvivalence funkcí (tj. rovnost skoro všude)
$A^o, \overline{A}$	vnitřek, resp. uzávěr množiny A
$\mathrm{der}(A)$	derivace množiny A
$\mathrm{bd}(A) = \partial A$	hranice množiny A

Symbol	Význam
$\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_r)^\mathsf{T}$	sloupcový vektor nebo bod prostoru $\mathbf{R}^r$
$\vec{b}_n$	prvek posloupnosti $(\vec{b}_n)_{n=1}^{\infty}$ z $\mathbf{R}^r$
$\mathbb{A}^\mathsf{T}$	matice transponovaná k matici $\mathbb{A}$
$\mathbb{I}$	jednotková (Croneckerova) matice
δ_{ij}	prvek matice $\mathbb{I}$
$\det(\mathbb{A})$	determinant matice $\mathbb{A}$
$\mathrm{h}(\mathbb{A})$	hodnost matice $\mathbb{A}$
$\vec{x} \mapsto f(\vec{x}; a)$	funkce proměnných $\vec{x}$ s parametrem a
$\lfloor x \rfloor$	dolní celá část čísla x
$\mathrm{sgn}(x)$	funkce signum
$\mathtt{C}$	libovolná reálná konstanta
$\mathtt{C}(\vec{x})$	libovolná funkce proměnných $\vec{x}$ (tedy konstantní vůči ostatním proměnným)
$\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$	třída testovacích funkcí na $\mathbf{E}^r$
$\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$	třída zobecněných funkcí (distribucí) na $\mathbf{E}^r$
$\mathscr{L}^\star(G)$	třída všech funkcí majících Lebesgueův integrál přes množinu G
$\mathscr{L}(G)$	třída lebesgueovsky integrovatelných funkcí na množině G
$\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(G)$	třída lebesgueovsky lokálně integrovatelných funkcí na množině G
$\mathscr{L}_p(G)$	třída funkcí, pro něž je integrál $(\mathscr{L}) \int_G \lvert f(\vec{x})\rvert^p \, \mathrm{d}\vec{x}$ konečný
$\Lambda(G)$	třída měřitelných funkcí na oblasti G
$\widehat{L}$, $\widehat{O}$	označení operátorů
$\delta(\vec{x})$	Diracova delta-funkce (obecně vícerozměrná)
$\delta(\vec{x} - \vec{\mu})$	centrovaná Diracova delta-funkce (obecně vícerozměrná)
$\Theta(\vec{x})$	Heavisideova theta-funkce (obecně vícerozměrná)
$\Theta(\vec{x} - \vec{\mu})$	centrovaná Heavisideova theta-funkce (obecně vícerozměrná)
∇	Hamiltonův nabla operátor
Δ	Laplaceův operátor
$\oslash$	operátor vedení tepla
$\Box$	d'Alembertův (vlnový) operátor
$\lVert \cdot \rVert$	norma
$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$	skalární součin
$\mathcal{J}_k(x)$	Besselova funkce řádu k, resp. její hodnota v bodě x
$\mathfrak{F}[f(\vec{x})](\vec{\xi})$	Fourierův obraz funkce $f(\vec{x})$
$\mathfrak{L}[f(\vec{t})](\vec{p})$	Laplaceův obraz funkce $f(\vec{t})$
$\vec{x} \cdot \vec{y}$	standardní skalární součin $\sum_{k=1}^{n} x_k \, y_k$ v prostoru $\mathbf{R}^n$
id_M	identita na množině M
$\lhd, \rhd$	negativní, resp. pozitivní definitnost
$\unlhd, \unrhd$	negativní, resp. pozitivní semidefinitnost
$\lhd\rhd$	indefinitnost
$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$	lineární obal souboru vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$
$a^\star$	komplexně sdružené číslo k číslu a
$\mathrm{Re}(a)$	reálná část čísla a
$\mathrm{Im}(a)$	imaginární část čísla a
$o(\vec{x})$	ryze nulová funkce, tj. $\forall \vec{x} \in \mathbf{E}^r : \ o(\vec{x}) = 0$

Symbol	Význam
$\vec{\epsilon}_i$	$i-$tý vektor standardní báze v $\mathbf{R}^r$, tj. $\epsilon_{i_j} = \delta_{ij}$
$\mathcal{E}_r = (\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \ldots, \vec{\epsilon}_r)$	standardní báze v $\mathbf{R}^r$
$B_{\vec{a},\mathtt{R}}$	$r-$dimenzionální otevřená koule o poloměru $\mathtt{R} > 0$ se středem v bodě $\vec{a}$
$S_{\vec{a},\mathtt{R}}$	$r-$dimenzionální uzavřená koule o poloměru $\mathtt{R} > 0$ se středem v bodě $\vec{a}$
$B_{\mathtt{R}}$	$r-$dimenzionální otevřená koule o poloměru $\mathtt{R} > 0$ se středem v bodě $\vec{0}$
$S_{\mathtt{R}}$	$r-$dimenzionální uzavřená koule o poloměru $\mathtt{R} > 0$ se středem v bodě $\vec{0}$
$f(\vec{x}) \star g(\vec{x})$	konvoluce funkcí, resp. zobecněných funkcí (obecně vícerozměrných)
$f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y})$	tenzorový součin funkcí, resp. zobecněných funkcí
$\mathbb{L}_2(G)$	třída faktorových funkcí, pro něž je integrál $(\mathscr{L}) \int_G \vert f(\vec{x})\vert^2 \, \mathrm{d}\vec{x}$ konečný
$\mathbb{L}(G)$	třída faktorových funkcí, jež jsou lebesgueovsky integrovatelné na množině G
$\mathbb{L}_{\mathrm{loc}}(G)$	třída faktorových funkcí, jež jsou lebesgueovsky lokálně integrovatelné na množině G
$\mathbb{L}_p(G)$	třída faktorových funkcí, pro něž je integrál $(\mathscr{L}) \int_G \vert f(\vec{x})\vert^p \, \mathrm{d}\vec{x}$ konečný
$\aleph_0$	kardinální číslo (počet prvků) množiny $\mathbf{N}$
s.v.	skoro všude, tj. až na $\mu-$nulovou množinu
$\mathrm{P}[\mathcal{X} < x]$	pravděpodobnost, že náhodná veličina $\mathcal{X}$ nabude hodnoty menší než x
$\langle x \rangle = \mathtt{E}(\mathcal{X})$	střední hodnota náhodné veličiny $\mathcal{X}$
$\mathtt{VAR}(\mathcal{X})$	rozptyl náhodné veličiny $\mathcal{X}$
$\mathtt{SD}(\mathcal{X})$	směrodatná odchylka náhodné veličiny $\mathcal{X}$
$\mathcal{X} \backsim ROZ_{(\alpha,\beta)}$	náhodná veličina $\mathcal{X}$ je vybrána z rozdělení ROZ s parametry α a β
$\mathcal{V}_1 \subset\subset \mathcal{V}_2$	$\mathcal{V}_1$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathcal{V}_2$
$f_n(\vec{x}) \to f(\vec{x})$	bodová konvergence posloupnosti funkcí
$f_n(\vec{x}) \rightrightarrows f(\vec{x})$	stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí
$f_n(\vec{x}) \Rrightarrow f(\vec{x})$	superstejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí
$f_n(\vec{x}) \twoheadrightarrow f(\vec{x})$	konvergence posloupnosti funkcí podle normy
$\mathrm{limnorm}_{n\to\infty} f_n(\vec{x})$	limita posloupnosti funkcí vzhledem ke konvergenci podle normy
$\underline{\sum}_n f_n(\vec{x}) = s(\vec{x})$	součet řady funkcí vzhledem ke konvergenci podle normy
$\mathrm{supp}(f)$	nosič funkce
$\mathrm{card}(X)$	počet prvků (tzv. kardinální číslo) množiny X
$\aleph_0$	počet prvků množiny $\mathbf{N}$, tj $\aleph_0 = \mathrm{card}(\mathbf{N})$
$\mathfrak{C}$	počet prvků množiny $\mathbf{R}$, tj $\mathfrak{C} = \mathrm{card}(\mathbf{R})$
$\dim(\mathcal{V})$	dimenze vektorového prostoru $\mathcal{V}$

Kapitola 1

Lineární operátory na Hilbertových prostorech

V první kapitole těchto skript se budeme zabývat budováním Hilbertových prostorů funkcí, tj. vektorových prostorů, na nichž jsou metrika a norma odvozeny od funkcionálních skalárních součinů a pojem konvergence na nich splývá s pojmem cauchyovskosti. Takové prostory bývá zvykem označovat za úplné. Na takovýchto funkcionálních prostorech vybudujeme obecný pojem ortonormální báze a budeme diskutovat tzv. fourierovské rozvoje libovolného prvku těchto prostorů. Nakonec nad Hilbertovými prostory zavedeme třídu lineárních operátorů, u nichž budeme dále zkoumat jejich omezenost, spojitost, hermiticitu a podobně. Připravíme si tak aparát pro studium integrálních, resp. parciálních diferenciálních rovnic pro další kapitoly skript.

1.1 Výchozí pojmy

V prvním oddíle těchto skript nejprve zavedeme základní pojmy a symboly, jichž budeme v úvodní kapitole užívat.

1.1.1 Úmluva

V celých skriptech budeme pracovat s euklidovským prostorem, tj. s prostorem $\mathbf{R}^r$ uspořádaných $r-$tic zadaným společně se standardním skalárním součinem

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle_{\mathrm{s}} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

standardní normou vektoru

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

a tzv. euklidovskou metrikou (tj. vzdáleností)

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

1.1.2 Úmluva

Symbol G bude reprezentovat $r-$dimenzionální oblast, tj. otevřenou a souvislou podmnožinu množiny $\mathbf{E}^r$.

1.1.3 Úmluva

V celých skriptech dále předpokládáme, že je zadána klasická a úplná Lebesgueova míra $\mu(X) : \mathscr{M}_\mu \mapsto \mathbf{R}^\star$ generovaná ve všech dimenzích klasickou vytvořující $\varphi(x) = x$. Tudíž soustava $\mathscr{M}_\mu$ všech $\mu-$měřitelných podmnožin množiny $\mathbf{E}^r$ je Lebesgueovou $\sigma-$algebrou a $\mu(X)$ je na ní $\sigma-$aditivní mírou. Systém $\left\{\mathbf{E}^r, \mathscr{M}_\mu, \mu(X)\right\}$ je tedy pro účely těchto skript výchozím prostorem s úplnou mírou.

1.1.4 Definice

Funkcí budeme rozumět libovolné zobrazení $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{C}$. *Vektorem funkcí* pak zobrazení $\mathbb{F}(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{C}^r$. Je-li pro jakákoli $i, j \in \hat{r}$ definována funkce $\mathbb{F}_{ij}(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{C}$, pak matici

$$\mathbb{F}(\vec{x}) := \begin{pmatrix} \mathbb{F}_{11}(\vec{x}) & \mathbb{F}_{12}(\vec{x}) & \dots & \mathbb{F}_{1r}(\vec{x}) \\ \mathbb{F}_{21}(\vec{x}) & \mathbb{F}_{22}(\vec{x}) & \dots & \mathbb{F}_{2r}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{F}_{r1}(\vec{x}) & \mathbb{F}_{r2}(\vec{x}) & \dots & \mathbb{F}_{rr}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

nazýváme *maticí funkcí* na oblasti G a značíme $\mathbb{F}(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{C}^r \times \mathbf{C}^r$. Řekneme, že vektor funkcí, popř. matice funkcí má jistou vlastnost (typicky spojitost, diferencovatelnost nebo integrovatelnost), mají-li tuto vlastnost všechny příslušné funkce.

1.1.5 Příklad

Ku příkladu symbol $\mathbb{F}(\vec{x}) \in \mathscr{C}^n(M)$ značí, že všechny funkce $\mathbb{F}_{ij}(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{C}$ jsou spojitě diferencovatelné na množině $M \subset G$ až do řádu n včetně.

1.1.6 Definice

Nechť je dána matice funkcí $\mathbb{F}(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{C}^r \times \mathbf{C}^r$. Řekneme, že $\mathbb{F}(\vec{x})$ je symetrická, resp. hermitovská na množině $M \subset G$, pokud pro každé $\vec{x} \in M$ je číselná matice $\mathbb{F}(\vec{x})$ symetrická, resp. hermitovská. Řekneme, že $\mathbb{F}(\vec{x})$ je pozitivně (semi-)definitní, resp. negativně (semi-)definitní, resp. indefinitní na množině $M \subset G$, pokud pro každé $\vec{x} \in M$ je číselná matice $\mathbb{F}(\vec{x})$ pozitivně (semi-)definitní, resp. negativně (semi-)definitní, resp. indefinitní. Pro označení typů definitnosti užíváme standardního značení $\mathbb{F}(\vec{x}) \rhd 0$, $\mathbb{F}(\vec{x}) \unrhd 0$, $\mathbb{F}(\vec{x}) \lhd 0$, $\mathbb{F}(\vec{x}) \unlhd 0$ a $\mathbb{F}(\vec{x}) \lhd\rhd 0$. Řekneme, že $\mathbb{F}(\vec{x})$ je regulární, resp. singulární na množině $M \subset G$, pokud pro každé $\vec{x} \in M$ je číselná matice $\mathbb{F}(\vec{x})$ regulární, resp. singulární.

1.1.7 Definice

Nechť $r \in \mathbf{N}$ a $\vec{\mu} \in \mathbf{R}^r$. *Heavisideovou* `[hevisajd]` funkcí budeme rozumět funkci $\Theta(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \{0, 1\}$ definovanou předpisem

$$\Theta(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & \dots \quad x_1 > 0 \wedge x_2 > 0 \wedge \dots \wedge x_r > 0 \\ 0 & \dots \quad x_1 \leqslant 0 \vee x_2 \leqslant 0 \vee \dots \vee x_r \leqslant 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Centrovanou Heavisideovou funkcí budeme rozumět funkci $\Theta_{\vec{\mu}}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \{0, 1\}$ definovanou předpisem

$$\Theta_{\vec{\mu}}(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & \dots \quad x_1 > \mu_1 \wedge x_2 > \mu_2 \wedge \dots \wedge x_r > \mu_r \\ 0 & \dots \quad x_1 \leqslant \mu_1 \vee x_2 \leqslant \mu_2 \vee \dots \vee x_r \leqslant \mu_r. \end{cases} \tag{1.2}$$

1.1.8 Úmluva

Pro integrální výpočty budeme v těchto skriptech důsledně užívat klasického Lebesgueova integrálu vybudovaného na výše citovaném prostoru $\{\mathbf{E}^r, \mathscr{M}_\mu, \mu(X)\}$ s úplnou mírou. Funkce mající na G příslušný Lebesgueův integrál budou zahrnuty do obecného znaku $\mathscr{L}^\star\big(G, \mu(X)\big)$, zatímco symbolem $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}\big(G, \mu(X)\big)$ budeme v souladu se značením zavedeným ve skriptech [12] označovat skutečnost, že

$$\int_G f(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) \in \mathbf{R}.$$

Tedy $\mathscr{L}\big(G, \mu(X)\big) \subset \mathscr{L}^\star\big(G, \mu(X)\big)$.

1.1.9 Definice

Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{R}$. Řekneme, že funkce $f(\vec{x})$ je *lokálně integrabilní* na G a označíme symbolem $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}\big(G, \mu(X)\big)$ nebo zkráceně $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(G)$, jestliže pro každý bod $\vec{c} \in G$ existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}\big(\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})\big)$, tj.

$$\int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})} f(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) \in \mathbf{R}.$$

1.1.10 Věta

Funkce $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{R}$ je lokálně integrabilní na G právě tehdy, když pro každou kompaktní množinu $M \subset G$ platí, že

$$\int_M f(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) \in \mathbf{R}.$$

Důkaz:

- dokážeme nejprve, že pokud pro každou kompaktní množinu $M \subset G$ platí, že integrál $\int_M f(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})$ konverguje, pak je $f(\vec{x})$ je lokálně integrabilní na G
- zvolme tedy libovolně bod $\vec{x} \in G$
- jelikož G je otevřená, jistě existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $K = \overline{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x})}$, $K \subset G$ a $\vec{x} \in K$
- integrál $\int_K f(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})$ ale existuje z předpokladu
- jelikož $\mathrm{bd}(K)$ je $\mu-$nulová množina, platí z teorie Lebesgueova integrálu, že $\int_K f(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) = \int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x})} f(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})$, což dokončuje důkaz první implikace
- pro důkaz obrácené implikace předpokládejme, že $f(\vec{x})$ je lokálně integrabilní na G
- zvolme K jako libovolnou kompaktní množinu, jež je podmnožinou oblasti G
- podle Borelovy věty lze ale z každého otevřeného pokrytí kompaktní množiny vybrat pokrytí konečné, tj. existuje soustava oblastí $\{G_k : k \in \widehat{n}\}$ tak, že $\cup_{k=1}^n G_k \supset K$ a $G_k = \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_k)$ pro jisté body $\vec{x}_k \in K$
- všechny integrály $\int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_k)} f(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})$ ale existují z předpokladu této implikace
- dále také existují (jak víme z teorie Lebesgueova integrálu všechny integrály) $\int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_k)\cap\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_\ell)} f(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})$ pro $k, \ell \in \widehat{n}$
- existují rovněž integrály $\int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_k)\cap K} f(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})$, což společně garantuje existenci integrálu $\int_K f(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})$
- tímto je důkaz proveden

1.1.11 Příklad

Poměrně lehko prokážeme, že funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ je lokálně integrabilní v $\mathbf{R}$. Vzhledem k tomu, že $\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$, platí, že $\mathrm{e}^{-x^2} \in \mathscr{L}(\mathbf{R})$. A protože z definice 1.1.9 ihned vyplývá inkluze $\mathscr{L}\big(G, \mu(X)\big) \subset \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}\big(G, \mu(X)\big)$, je tím prokázáno, že $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ je skutečně lokálně integrabilní v $\mathbf{R}$. Naproti tomu funkce $g(x) = x$ do $\mathscr{L}(\mathbf{R})$ nepatří, neboť podle definice Lebesgueova integrálu platí, že $g^+(x) = \Theta(x)x$ a $g^-(x) = -\Theta(-x)x$ a

$$\int_{\mathbf{R}} g^+(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \Theta(x)x\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x\,\mathrm{d}x = \infty,$$

podobně jako

$$\int_{\mathbf{R}} g^-(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbf{R}} \Theta(-x)x\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^0 x\,\mathrm{d}x = \infty.$$

Hodnota $\int_{\mathbf{R}} g(x)\,\mathrm{d}x := \int_{\mathbf{R}} g^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}} g^-(x)\,\mathrm{d}x$ není ale definována, tedy podle definice 4.2.25 ze strany 213 ve skriptech [12] integrál $\int_{\mathbf{R}} g(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje, tudíž $g(x) \notin \mathscr{L}(\mathbf{R})$. Přesto ale $g(x) \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, neboť pro jakékoliv $c \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$ integrál

$$\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} = \frac{1}{2}\big(c^2 + \varepsilon^2 + 2c\varepsilon - c^2 - \varepsilon^2 + 2c\varepsilon\big) = 2c\varepsilon$$

konverguje. Funkce $h(x) = \frac{1}{x}$ je příkladem funkce, která lokálně integrabilní není. Pro $c = 0$ totiž neexistuje žádné $\varepsilon > 0$ tak, aby integrál $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(x)\,\mathrm{d}x$ existoval. To plyne z faktu, že

$$\int_0^\varepsilon h^+(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{x} = \infty, \quad \int_{-\varepsilon}^0 h^-(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\varepsilon}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \infty.$$

1.1.12 Definice

Dirichletovou funkcí budeme rozumět funkci

$$\mathfrak{D}(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & \dots \quad \vec{x} \in \mathbf{Q}^r \\ 0 & \dots \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^r \setminus \mathbf{Q}^r. \end{cases} \tag{1.3}$$

1.1.13 Definice

Nechť je dán bod $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ a kladné číslo $\mathtt{R} > 0$. *Otevřenou* $r-$*dimenzionální koulí* o poloměru $\mathtt{R}$ se středem v bodě $\vec{a}$ budeme rozumět množinu

$$B_{\vec{a},\mathtt{R}} := \big\{\vec{x} \in \mathbf{E}^r : \varrho(\vec{x}, \vec{a}) < \mathtt{R}\big\}.$$

Uzavřenou $r-$*dimenzionální koulí* o poloměru $\mathtt{R}$ se středem v bodě $\vec{a}$ budeme rozumět množinu

$$S_{\vec{a},\mathtt{R}} := \big\{\vec{x} \in \mathbf{E}^r : \varrho(\vec{x}, \vec{a}) \leqslant \mathtt{R}\big\}.$$

Dále definujeme zjednodušené symboly $B_{\mathtt{R}} := B_{\vec{0},\mathtt{R}}$ a $S_{\mathtt{R}} := S_{\vec{0},\mathtt{R}}$.

1.1.14 Definice

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a množina $M \subset \mathbf{E}^r$. Pak $\varepsilon-$*ovým okolím množiny* M budeme rozumět množinu

$$M_\varepsilon := \Big\{\vec{x} \in \mathbf{E}^r : \vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \wedge \vec{y} \in M \wedge \|\vec{z}\| < \varepsilon\Big\}.$$

1.1.15 Věta

Nechť je dáno $\vec{a} \in G$ a nechť

$$\delta_{\vec{a}}(\vec{x}) := \begin{cases} 0 & \dots \quad \vec{x} \neq \vec{a} \\ +\infty & \dots \quad \vec{x} = \vec{a}. \end{cases}$$

Pak platí

$$\int_G \delta_{\vec{a}}(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) = 0.$$

Důkaz:

- funkce $\delta_{\vec{a}}(\vec{x})$ se rovná nule skoro všude, neboť míra množiny $M = \{\vec{x} \in G : \delta_{\vec{a}}(\vec{x}) \neq 0\} = \{\vec{a}\}$ je zcela zjevně nulová
- tedy $\delta_{\vec{a}}(\vec{x}) \sim 0,$ tj. nulová funkce a funkce $\delta_{\vec{a}}(\vec{x})$ jsou $\mu-$ekvivalentní
- podle věty o Lebesgueově integrálu ekvivalentních funkcích (viz věta 4.2.29, str. 214 v [12]) platí, že integrály z ekvivalentních funkcí se rovnají
- proto $\int_G \delta_{\vec{a}}(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) = \int_G 0\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) = 0$

1.1.16 Poznámka

Předešlou větu bereme jako motivaci k zavedení tzv. $\delta-$funkce (viz 5.2.22), resp. centrované $\delta-$funkce (viz 5.2.26). V některých zdrojích se totiž $\delta-$funkce nesprávně zavádí jako funkce, pro níž zároveň platí, že

- $\delta(x) = 0$ pro $x < 0,$
- $\delta(x) = 0$ pro $x > 0,$
- $\int_{\mathbf{R}} \delta(x)\, \mathrm{d}x = 1,$

což je zcela nekorektní zavedení. Obě zmíněné funkce totiž nemohou být chápány jako obyčejné funkce více proměnných, ale jako tzv. zobecněné funkce (neboli distribuce) zaváděné pomocí pojmu funkcionál. Důkladnější pochopení přinese další text.

1.1.17 Definice

Nechť $\mathscr{A}$ je prostor funkcí definovaných na množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Každé zobrazení $\big(f, \varphi(\vec{x})\big) : \mathscr{A} \mapsto \mathbf{C}$, které funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{A}$ přiřazuje komplexní číslo $(f, \varphi(\vec{x})) \in \mathbf{C}$, nazveme *(komplexním) funkcionálem* na $\mathscr{A}$.

1.1.18 Poznámka

Symbol $(f, \varphi(\vec{x}))$ představuje jednak znak pro funkcionál a jednak jeho hodnotu. Z kontextu ale bude vždy jasné, o jakou interpretaci se jedná. Pro srovnání: symbol $f(\vec{x})$ z klasické analýzy představuje buď funkci více proměnných nebo hodnotu funkce v bodě $\vec{x} \in \mathbf{E}^r$.

1.1.19 Příklad

Příkladem funkcionálu je např. zobrazení, které každé spojité funkci $\varphi(x)$ přiřadí hodnotu

$$\big(f, \varphi(x)\big) := \int_0^1 x^2 \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.1.20 Definice

Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor funkcí definovaných na množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Každé zobrazení $\widehat{L} : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$, které funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ přiřazuje funkci $\widehat{L}(\varphi(\vec{x})) \in \mathcal{V}$, nazveme *operátorem* na $\mathcal{V}$.

1.1.21 Příklad

Příkladem operátoru je např. zobrazení, které každé hladké funkci $u(x)$ přiřadí hladkou funkci

$$w(x) := x^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + x \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + 3u(x).$$

Příslušný operátor je tedy tvaru

$$\widehat{L} = x^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 3.$$

1.2 Posloupnosti a řady funkcí více proměnných

Vzhledem k tomu, že se v těchto skriptech budeme hojně zaobírat obecnou konvergencí posloupností a řad vícerozměrných funkcí, bude nejprve nutné rozšířit poznatky o posloupnostech a řadách jednorozměrných funkcí prezentované ve skriptech [11] na posloupnosti $\big(f_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$, resp. řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$, jejichž definičními obory budou množiny $M \subset \mathbf{E}^r$.

1.2.1 Definice

Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbf{E}^r$. Potom každé zobrazení množiny $\mathbf{N}$ do množiny všech funkcí definovaných na M nazýváme *posloupností funkcí* na M. Je-li číslu $n \in \mathbf{N}$ tímto způsobem přiřazena funkce $f_n(\vec{x})$, zapisujeme funkční posloupnost

$$f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots \qquad \text{nebo} \qquad \big(f_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}. \tag{1.4}$$

Přirozené číslo n přitom nazýváme *indexem* a funkci $f_n(\vec{x})$ $n-$tým členem posloupnosti (1.4).

1.2.2 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (1.4) definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Řekneme, že posloupnost funkcí (1.4) *konverguje v bodě* $\vec{c} \in M$, jestliže konverguje číselná posloupnost $\big(f_n(\vec{c})\big)_{n=1}^{\infty}$, tj. existuje-li $\gamma \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna $n \geqslant n_0$ platí nerovnost $\big|f_n(\vec{c}) - \gamma\big| < \varepsilon$. Řekneme, že posloupnost funkcí (1.4) *konverguje (bodově) na množině* $N \subset M$, jestliže konverguje v každém bodě množiny N.

1.2.3 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (1.4) definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Nechť pro každé $\vec{c} \in N$, kde $N \subset M$, posloupnost $\big(f_n(\vec{c})\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje. Označme $f(\vec{c})$ hodnotu limity posloupnosti $\big(f_n(\vec{c})\big)_{n=1}^{\infty}$. Tímto způsobem je na množině N definována funkce $\vec{x} \mapsto f(\vec{x})$, kterou nazýváme *limitou posloupnosti funkcí* (1.4) (nebo zkráceně *limitní funkcí*) a značíme

$$f(\vec{x}) = \lim_{n\to\infty} f_n(\vec{x}).$$

Oborem konvergence $\mathcal{O}$ posloupnosti (1.4) nazýváme množinu všech bodů $\vec{c} \in M$, ve kterých tato posloupnost konverguje.

1.2.4 Definice

Nechť (1.4) je posloupnost funkcí definovaných na množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Řekneme, že tato posloupnost *stejnoměrně konverguje na* M k funkci $f(\vec{x})$, jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geqslant n_0$ a pro všechna $\vec{x} \in M$ platí nerovnost $\big|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\big| < \varepsilon$.

1.2.5 Poznámka

Bodovou konvergenci značíme obyčejně symbolem $f_n(\vec{x}) \to f(\vec{x})$, stejnoměrnou pak $f_n(\vec{x}) \rightrightarrows f(\vec{x})$. Rozdíl mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí je dobře patrný z kvantifikátorového zápisu definic obou pojmů:

- bodová konvergence

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\forall\vec{x} \in M)\,(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \qquad n \in \mathbf{N} \wedge n \geqslant n_0 \Rightarrow \big|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\big| < \varepsilon. \tag{1.5}$$

- stejnoměrná konvergence

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \qquad n \in \mathbf{N} \wedge n \geqslant n_0 \wedge \vec{x} \in M \Rightarrow \big|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\big| < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Stejnoměrná konvergence tedy požaduje existenci "univerzálního" n_0, které plní svoji roli pro všechna $\vec{x} \in M$.

1.2.6 Věta – Bolzanova-Cauchyova podmínka

Posloupnost funkcí (1.4) je stejnoměrně konvergentní na $M \subset \mathbf{E}^r$ právě tehdy, když splňuje tzv. *Bolzanovu-Cauchyovu podmínku* tvaru

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \qquad m, n \geqslant n_0 \wedge \vec{x} \in M \Rightarrow \big|f_n(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\big| < \varepsilon. \tag{1.7}$$

Důkaz:

- První implikace:
  - nechť $\big(f_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje na M k jisté funkci $f(x)$
  - pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro libovolná $m, n \in \mathbf{N}$ taková, že $m, n \geqslant n_0$, a pro všechna $\vec{x} \in M$ platí
  $$\big|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\big| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad |f_m(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$$
  - a tedy
  $$\big|f_n(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\big| \leqslant \big|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\big| + \big|f_m(\vec{x}) - f(\vec{x})\big| < \varepsilon$$
- Druhá implikace:
  - nechť posloupnost funkcí splňuje vztah (1.7)
  - podle Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro číselné posloupnosti posloupnost (1.4) konverguje bodově k jisté funkci na množině M (označme ji $f(\vec{x})$)
  - chceme dokázat $f_n(\vec{x}) \rightrightarrows f(\vec{x})$ na M
  - zvolme $\varepsilon > 0$ a k číslu $\frac{\varepsilon}{2}$ vyberme podle (1.7) n_0 tak, aby pro všechna $m, n \geqslant n_0$ platilo
  $$\big|f_n(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\big| < \frac{\varepsilon}{2}$$
  - pro libovolné pevně zvolené $n \geqslant n_0$ a pro m rostoucí nade všechny meze pak odsud dostaneme nerovnost $\big|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\big| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$ platnou pro každé $\vec{x} \in M$
- tím je důkaz zkompletován

1.2.7 Věta – supremální kritérium

Nechť $f(\vec{x})$ a $f_n(\vec{x})$ pro všechna n jsou funkce definované na množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Označme

$$\sigma_n := \sup_{\vec{x}\in M} \big| f_n(\vec{x}) - f(\vec{x}) \big|$$

pro každé n. Pak posloupnost funkcí $\big(f_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množině M stejnoměrně k funkci $f(\vec{x})$ právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

Důkaz:

- pro všechna $\vec{x} \in M$ a všechna $n \in \mathbf{N}$ zřejmě platí nerovnost $\big| f_n(\vec{x}) - f(\vec{x}) \big| \leqslant \sigma_n$
- První implikace:
  - předpokládejme, že $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$
  - z definice limity číselné posloupnosti $\big(\sigma_n\big)_{n=1}^{\infty}$ plyne, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že $|\sigma_n| = \sigma_n < \varepsilon$ pro všechna $n \geqslant n_0$
  - to značí (jak vyplývá z definice suprema), že pro všechna $n \geqslant n_0$ a všechna $\vec{x} \in M$ platí také $\big| f_n(\vec{x}) - f(\vec{x}) \big| < \varepsilon$, a tedy $f_n(\vec{x}) \rightrightarrows f(\vec{x})$ na M
- Druhá implikace:
  - předpokládejme, že $f_n(\vec{x}) \rightrightarrows f(\vec{x})$ na M
  - zvolme libovolné $\varepsilon > 0$, k němuž jistě existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geqslant n_0$ a všechna $\vec{x} \in M$ platí nerovnost $\big| f_n(\vec{x}) - f(\vec{x}) \big| < \varepsilon/2$
  - odtud a z vlastností suprema plyne, že pro $n \geqslant n_0$ platí $\sigma_n \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$, a tedy $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$

1.2.8 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (1.4) definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Potom nekonečný součet

$$f_1(\vec{x}) + f_2(\vec{x}) + \ldots + f_n(\vec{x}) + \ldots$$

nazýváme *řadou funkcí* na M a značíme symbolem

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}). \tag{1.8}$$

1.2.9 Definice

Nechť je dána funkční řada (1.8) definovaná na množině M. Funkci $s_n(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} f_k(\vec{x})$ pro $n \in \mathbf{N}$ a $\vec{x} \in M$ budeme nazývat $n-$*tým částečným součtem* řady (1.8) a posloupnost $\big(s_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ pak *posloupností částečných součtů* dané řady.

1.2.10 Definice

Nechť je dána funkční řada (1.8) definovaná na množině M. Nechť $\big(s_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ je příslušná posloupnost částečných součtů. Řekneme, že řada (1.8) *konverguje v bodě* $\vec{c} \in M$, jestliže konverguje číselná posloupnost $\big(s_n(\vec{c})\big)_{n=1}^{\infty}$. Řekneme, že řada (1.8) *konverguje (bodově)* na množině $N \subset M$, jestliže konverguje v každém bodě množiny N. Vlastní limitu

$$s(\vec{x}) := \lim_{n\to\infty} s_n(\vec{x})$$

posloupnosti částečných součtů pak nazýváme *součtem řady* (1.8) a zapisujeme

$$s(\vec{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}). \tag{1.9}$$

Definiční obor $\mathrm{Dom}(s)$, tj. množinu všech $\vec{c} \in M$, pro něž posloupnost $\big(s_n(\vec{c})\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje, budeme dále nazývat *oborem konvergence řady* (1.8) a značit symbolem $\mathcal{O}$.

1.2.11 Definice

Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ konverguje na množině $M \subset \mathbf{E}^r$ *stejnoměrně* ke svému součtu $s(\vec{x})$ a označíme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}) \overset{M}{\equiv} s(\vec{x})$, jestliže posloupnost jejích částečných součtů konverguje na M stejnoměrně k funkci $s(\vec{x})$.

1.2.12 Věta – Bolzanova-Cauchyova podmínka

Řada funkcí (1.8) konverguje na množině $M \subset \mathbf{E}^r$ stejnoměrně právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbf{N}$ takový, že pro jakékoli dva indexy $m, n \in \mathbf{N}$ takové, že $m \geqslant n \geqslant n_0$ a pro jakékoliv $\vec{x} \in M$ je splněna nerovnost

$$\big|f_n(\vec{x}) + f_{n+1}(\vec{x}) + \ldots + f_m(\vec{x})\big| < \varepsilon.$$

Důkaz:

- tvrzení této věty bezprostředně plyne z věty 1.2.6
- označíme-li totiž $\big(s_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ příslušnou posloupnost částečných součtů, získáváme rovnosti

$$s_{n-1}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k(\vec{x}), \qquad s_m(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{m} f_k(\vec{x})$$

- podle věty 1.2.6 (v nepatrné obměně) konverguje posloupnost $\big(s_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ na M stejnoměrně právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbf{N}$ takový, že pro jakékoli dva indexy $m, n \in \mathbf{N}$ takové, že $m \geqslant n \geqslant n_0$ a pro jakékoliv $\vec{x} \in M$ je splněna nerovnost $\big|s_m(\vec{x}) - s_{n-1}(\vec{x})\big| < \varepsilon$
- z této nerovnosti ovšem vyplývá, že

$$\left|\sum_{k=1}^{m} f_k(\vec{x}) - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(\vec{x})\right| = \big|f_n(\vec{x}) + f_{n+1}(\vec{x}) + \ldots + f_m(\vec{x})\big| < \varepsilon$$

1.2.13 Definice

Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ konverguje na množině $M \subset \mathbf{E}^r$ *regulárně*, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty}\big|f_n(\vec{x})\big|$ konverguje na M stejnoměrně.

1.2.14 Věta – nutná podmínka stejnoměrné konvergence

Jestliže řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ konverguje na množině $M \subset \mathbf{E}^r$ stejnoměrně, potom posloupnost funkcí $\big(f_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na této množině stejnoměrně k nulové funkci.

Důkaz:

- z předpokladů věty plyne, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall m, n \in \mathbf{N})\big(m \geqslant n \geqslant n_0\big)(\forall \vec{x} \in M): \quad \big|f_n(\vec{x}) + f_{n+1}(\vec{x}) + \ldots + f_m(\vec{x})\big| < \varepsilon$$

- jelikož toto tvrzení platí pro jakákoli $m, n \in \mathbf{N}$ taková, že $m \geqslant n \geqslant n_0$, platí také při speciální volbě $m = n$
- pak ale

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})\big(n \geqslant n_0\big)(\forall \vec{x} \in M): \quad \big|f_n(\vec{x})\big| = \big|f_n(\vec{x}) - o(\vec{x})\big| < \varepsilon$$

- tento výrok je ale ekvivalentní tvrzení, že posloupnost funkcí $\big(f_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množině M stejnoměrně k nulové funkci

1.2.15 Definice

Nechť jsou dány funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ definované na množině M. Nechť existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geqslant n_0$ a všechna $\vec{x} \in M$ platí $\big|f_n(\vec{x})\big| \leqslant g_n(\vec{x})$. Pak řadu $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ nazýváme řadou *majorantní* k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$.

1.2.16 Věta – srovnávací kritérium

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ je na množině $M \subset \mathbf{E}^r$ majorantní k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ a nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ je stejnoměrně konvergentní na M. Pak jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\vec{x})|$ stejnoměrně konvergentní na M, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ konverguje na M regulárně.

Důkaz:

- užijeme Bolzanovu-Cauchyovu podmínku 1.2.12
- z předpokladu víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ stejnoměrně konverguje na M, tedy pro jakékoli $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená $m \geqslant n \geqslant n_0$ a pro všechna $\vec{x} \in M$ platí

$$0 \leqslant g_n(\vec{x}) + g_{n+1}(\vec{x}) + \ldots + g_m(\vec{x}) < \varepsilon$$

- dále víme, že existuje m_0 tak, že pro všechna $x \in M$ a všechny indexy $n \geqslant m_0$ platí $|f_n(\vec{x})| \leqslant g_n(\vec{x})$
- pro zvolené ε a všechna $n \geqslant \max\{n_0, m_0\}$ pak platí

$$|f_n(\vec{x}) + f_{n+1}(\vec{x}) + \ldots + f_m(\vec{x})| \leqslant |f_n(\vec{x})| + |f_{n+1}(\vec{x})| + \ldots + |f_m(\vec{x})| \leqslant g_n(\vec{x}) + g_{n+1}(\vec{x}) + \ldots + g_m(\vec{x}) < \varepsilon$$

- to dokazuje obě tvrzení věty

1.2.17 Důsledek

Konverguje-li řada na množině M regulárně, konverguje na M také stejnoměrně.

1.2.18 Věta – Weierstrassovo kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní číselná řada, $f_n(\vec{x})$ jsou funkce a pro všechna $\vec{x} \in M \subset \mathbf{E}^r$ a všechna $n \in \mathbf{N} \setminus \widehat{n_0}$ je $|f_n(\vec{x})| \leqslant a_n$. Pak řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\vec{x})|$ stejnoměrně konvergují na M, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ konverguje na M regulárně.

Důkaz:

- v předchozí větě položíme $g_n(\vec{x}) := a_n$ pro všechna $\vec{x} \in M$ a uvědomíme si, že pojmy bodové a stejnoměrné konvergence u řady konstantních funkcí splývají

1.3 Prehilbertovské prostory funkcí

V této sekci se pokusíme rozhodnout, zda lze z vybraných vektorových prostorů funkcí vytvořit tzv. prehilbertovské prostory, tj. vektorové prostory se skalárním součinem. Budeme se přitom odkazovat na definici 6.2.1. na straně 172 skript [11].

1.3.1 Poznámka

Pro účely tohoto odstavce připomeneme definici skalárního součinu.

Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$. Zobrazení $\langle .|. \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbf{C}$ nazveme *skalárním součinem*, jestliže splňuje tzv. *axiomy skalárního součinu*:

- *levá linearita:* pro všechna $f(\vec{x}), g(\vec{x}), h(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ a každé $\alpha \in \mathbf{C}$ platí $\langle \alpha f + g | h \rangle = \alpha \langle f|h \rangle + \langle g|h \rangle$
- *hermiticita:* pro všechna $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ platí $\langle f|g \rangle = \langle g|f \rangle^\star$
- *pozitivní definitnost:* pro všechna $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ platí $\langle f|f \rangle \geqslant 0$ a navíc $\langle f|f \rangle = 0$ právě tehdy, když $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$.

Dvojici $\big\{\mathcal{V}, \langle .|. \rangle\big\}$ nazýváme *prehilbertovským prostorem.*

1.3.2 Lemma

Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$ a $\langle .|. \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbf{C}$ skalárním součin. Pak pro všechna $f(\vec{x}), g(\vec{x}), h(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ a $\alpha \in \mathbf{C}$ platí rovnosti $\langle o|f \rangle = \langle f|o \rangle = 0$, $\langle f|\alpha g + h \rangle = \alpha^\star \langle f|g \rangle + \langle f|h \rangle$.

1.3.3 Věta

Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$ a $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ dvě libovolné funkce. Nechť je pro každou funkci $h(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ splněna rovnost $\langle f|h\rangle = \langle g|h\rangle$. Pak $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$.

Důkaz:

- za daných předpokladů a s ohledem na axiomy skalárního součinu je rovnost $\langle f - g|h\rangle = 0$ splněna pro všechny funkce $h(\vec{x}) \in \mathcal{V}$
- tedy i v příapadě, že $h(\vec{x}) = f(\vec{x}) - g(\vec{x})$
- $\langle f - g|f - g\rangle = 0$ ovšem z axiomu pozitivní definitnosti implikuje skutečnost, že $f(\vec{x}) - g(\vec{x}) = o(\vec{x})$

1.3.4 Věta – Schwarzova-Cauchyova-Bunjakovského nerovnost

Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$ a $\langle .|.\rangle$ skalární součin na $\mathcal{V}$. Pak pro všechna $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ platí nerovnost

$$\big|\langle f|g\rangle\big| \leqslant \sqrt{\langle f|f\rangle\,\langle g|g\rangle}. \tag{1.10}$$

Důkaz:

- triviálně ověříme, že pro $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$ platí v Schwarzově-Cauchyově-Bunjakovského vztahu znaménko rovnosti
- podobně tomu bude, pokud je vektor $g(\vec{x})$ lineární kombinací vektoru $f(\vec{x})$, tj. když existuje $\lambda \in \mathbf{C}$ takové, že $g(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$
- pak totiž $|\langle f|g\rangle| = |\langle f|\lambda f\rangle| = |\lambda^\star|\langle f|f\rangle = |\lambda|\langle f|f\rangle$
- a také
$$\sqrt{\langle f|f\rangle\,\langle g|g\rangle} = \sqrt{\langle f|f\rangle\,\langle \lambda f|\lambda f\rangle} = \sqrt{\lambda\lambda^\star\langle f|f\rangle\,\langle f|f\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\langle f|f\rangle^2} = |\lambda|\langle f|f\rangle$$
- zbývá tedy zkoumat případ lineárně nezávislých nenulových vektorů, kdy tedy pro všechna nenulová $\lambda \in \mathbf{C}$ platí nerovnost $\lambda f(\vec{x}) - g(\vec{x}) \neq o(\vec{x})$
- v tomto případě tedy z axiomu pozitivní definitnosti vyplývá, že $\langle \lambda f - g|\lambda f - g\rangle > 0$
- budeme nyní upravovat levou stranu této nerovnosti, čímž získáme vztah
$$|\lambda|^2\langle f|f\rangle - \lambda\langle f|g\rangle - \lambda^\star\langle g|f\rangle + \langle g|g\rangle > 0 \tag{1.11}$$
- uvedený vztah platí pro všechna λ, my však zvolíme jedno speciálně vybrané, a sice
$$\lambda = \frac{\langle g|f\rangle}{\langle f|f\rangle} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda^\star = \frac{\langle f|g\rangle}{\langle f|f\rangle}$$
- tyto dvě hodnoty dosadíme do vztahu (1.11) a získáme
$$\frac{|\langle g|f\rangle|^2}{\langle f|f\rangle} - \frac{|\langle g|f\rangle|^2}{\langle f|f\rangle} - \frac{|\langle g|f\rangle|^2}{\langle f|f\rangle} + \langle g|g\rangle > 0$$
- odkud již plyne nerovnost
$$-\frac{|\langle g|f\rangle|^2}{\langle f|f\rangle} + \langle g|g\rangle > 0,$$
- tím je nerovnost (1.10) dokázána

1.3.5 Poznámka

Vztah (1.10) je spojován se jmény tří matematiků: jsou to francouz Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), rus Viktor Jakovlevič Bunjakovskij (1804 – 1889) a němec Karl Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921). Zatímco Cauchy odvodil roku 1821 nerovnost

$$\left|\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell y_\ell^\star\right| \leqslant \sqrt{\sum_{\ell=1}^{n} |x_\ell|^2} \cdot \sqrt{\sum_{\ell=1}^{n} |y_\ell|^2},$$

která je rovností (1.10) na konkrétním Hilbertově prostoru, Bunjakovskij dokázal v roce 1859 integrální variantu této nerovnosti. Nezávisle na něm k téže nerovnosti dospěl roku 1875 také Schwarz, který ji pak v roce 1885 dále zobecnil pro případ vícerozměrných integrálů.

1.3.6 Definice

Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor funkcí nad tělesem $\mathbf{C}$. Zobrazení $\|\,.\,\| : \mathcal{V} \mapsto \mathbf{R}$ nazveme *normou*, jestliže splňuje tzv. *axiomy normy*:

- *nulovost:* $\|f\| = 0$ právě tehdy, když $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$
- *trojúhelníková nerovnost:* pro všechna $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ platí: $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$
- *homogenita:* pro všechna $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ a každé $\lambda \in \mathbf{C}$ platí: $\|\lambda f\| = |\lambda| \, \|f\|$.

Dvojici $\big\{\mathcal{V}, \|.\|\big\}$ nazýváme *normovaným prostorem*.

1.3.7 Příklad

Ukážeme, že pro libovolnou funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ z normovaného prostoru $\mathcal{V}$ s normou $\|\,.\,\|$ platí nerovnost $\|f\| \geqslant 0$. Nejprve snadno prokážeme, že norma opačného vektoru je stejná jako norma vektoru původního. Položme $\lambda = -1$. Pak z axiomu homogenity plyne $\|-f\| = |-1| \, \|f\| = \|f\|$. Dále pak v trojúhelníkové nerovnosti položme $g(\vec{x}) := -f(\vec{x})$. Pak

$$0 = \|o(\vec{x})\| = \big\|f(\vec{x}) + \big(-f(\vec{x})\big)\big\| \leqslant \big\|\vec{f}(\vec{x})\big\| + \big\|-f(\vec{x})\big\| = 2\big\|\vec{f}(\vec{x})\big\|,$$

odkud je již patrno, že $\|f\| \geqslant 0$.

1.3.8 Věta

Nechť $\langle .|. \rangle$ je skalární součin definovaný na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$. Pak zobrazení $\mathbb{n}(f)$ definované předpisem

$$\mathbb{n}(f) := \sqrt{\langle f|f \rangle} \tag{1.12}$$

je normou na $\mathcal{V}$.

<u>*Důkaz:*</u>

- ověříme axiomy normy
- axiom nulovosti:
  - je-li $f(\vec{x}) = 0$, pak $\mathbb{n}^2(0) := \langle o, o \rangle = 0$
  - je-li $\mathbb{n}(f) = 0$, pak tedy $\langle f, f \rangle = 0$, ale podle axiomu pozitivní definitnosti skalárního součinu toto může nastat pouze tehdy, je-li $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$
  - tím je ekvivalence požadovaná v axiomu nulovosti normy prokázána
- axiom trojúhelníkové nerovnosti:
  - provedeme následující sérii úprav

$$\mathbb{n}^2\big(f + g\big) = \langle f + g | f + g \rangle = \langle f|f \rangle + \langle f|g \rangle + \langle g|f \rangle + \langle g|g \rangle =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\big(\langle f|g \rangle\big) + \langle f|f \rangle + \langle g|g \rangle \leqslant 2\big|\langle f|g \rangle\big| + \mathbb{n}^2(f) + \mathbb{n}^2(g)$$

  - užijeme-li nyní Schwarzovy-Cauchyovy-Bunjakovského nerovnosti (1.10), dostáváme

$$\mathbb{n}^2\big(f + g\big) \leqslant 2\,\mathbb{n}(f)\mathbb{n}(g) + \mathbb{n}^2(f) + \mathbb{n}^2(g) = \big(\mathbb{n}(f) + \mathbb{n}(g)\big)^2$$

  - tím je dokázáno, že $\mathbb{n}\big(f + g\big) \leqslant \mathbb{n}(f) + \mathbb{n}(g)$
- axiom homogenity:
  - nechť tedy $\lambda \in \mathbf{C}$ je zvoleno libovolně
  - pak snadno $\mathbb{n}\big(\lambda f\big) := \sqrt{\langle \lambda f | \lambda f \rangle} = \sqrt{\lambda \lambda^\star}\sqrt{\langle f|f \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2}\,\mathbb{n}(f) = |\lambda|\,\mathbb{n}(f)$
- tím je prokázáno, že zobrazení $\mathbb{n}(f)$ je normou na $\mathcal{V}$

1.3.9 Definice

Nechť $\langle .|. \rangle$ je skalární součin definovaný na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$. Pak zobrazení $\mathtt{n}(f)$ definované vztahem (1.12) nazýváme *normou generovanou skalárním součinem.*

1.3.10 Věta

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$ a skalární součin $\langle .|. \rangle$. Nechť $\|.\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Nechť je dána posloupnost funkcí $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ z prostoru $\mathcal{V}$, pro níž existuje funkce $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ tak, že platí následující implikace:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \quad n > n_0 \quad \Longrightarrow \quad \big\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\big\| < \varepsilon.$$

Nechť je funkce $g(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ zvolena libovolně. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n | g \rangle = \langle f | g \rangle, \quad \lim_{n\to\infty} \langle g | f_n \rangle = \langle g | f \rangle.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- snadno nahlédneme, že pro $g(\vec{x}) = o(\vec{x})$ platí citovaná rovnost triviálně
- uvažujme tedy nyní pouze ty funkce, které nejsou nulové, tedy ty, pro něž $\|g(\vec{x})\| \neq 0$
- chceme dokázat, že číselná posloupnost $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $\gamma_n := \langle f_n | g \rangle$ konverguje k číslu $\gamma := \langle f | g \rangle$
- je tedy třeba prokázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $m_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechny indexy $m > m_0$ platí nerovnost $|\gamma_m - \gamma| < \varepsilon$
- z předpokladu

  $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \quad n > n_0 \quad \Longrightarrow \quad \big\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\big\| < \frac{\varepsilon}{\|g\|},$$

  z axiomů skalárního součinu a z Schwarzovy-Cauchyovy-Bunjakovského nerovnosti ale vyplývá, že

  $$|\gamma_m - \gamma| = \big|\langle f_m | g \rangle - \langle f | g \rangle\big| = \big|\langle f_m - f | g \rangle\big| \leqslant \|f_m - f\| \cdot \|g\| < \frac{\varepsilon}{\|g\|}\|g\| = \varepsilon$$

- postačí tedy volit $m_0 := n_0$
- tvrzení $\lim_{n\to\infty} \langle g | f_n \rangle = \langle g | f \rangle$ lze dokázat zcela analogicky

1.3.11 Věta

Nechť $G \subset \mathbf{E}^r$ je neprázdná omezená oblast. Nechť

$$\mathscr{A}(G) = \Big\{ f(\vec{x}) : \; f(\vec{x}) \in \mathbf{C}(\overline{G}) \Big\}.$$

Pak zobrazení

$$\big\|f\big\|_{\sigma} := \max_{\vec{x} \in \overline{G}} \big|f(\vec{x})\big|$$

je normou na $\mathscr{A}(G)$.

<u>*Důkaz:*</u>

- snadno se lze přesvědčit, že za daných okolností je pro každou funkci $f(\vec{x}) \in \mathscr{A}(G)$ splněno, že $\big\|f\big\|_{\sigma} \in \mathbf{R}$
- je-li tedy $\big\|f\big\|_{\sigma} = \alpha$, pak pro jakékoliv $\lambda \in \mathbf{R}$ platí, že

  $$\big\|\lambda \cdot f\big\|_{\sigma} = \max_{\vec{x} \in \overline{G}} \big|\lambda \cdot f(\vec{x})\big| = \lambda \cdot \max_{\vec{x} \in \overline{G}} \big|f(\vec{x})\big| = \lambda \big\|f\big\|_{\sigma} = \lambda \alpha,$$

  což potvrzuje homogenitu normy
- zřejmé také je, že rovnost $\big\|f\big\|_{\sigma} = 0$ může nastat pouze v případě, že $f(\vec{x})$ je ryze nulová funkce, tj. $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$
- z nerovnosti

  $$\max_{\vec{x} \in \overline{G}} \big|f(\vec{x}) + g(\vec{x})\big| \leqslant \max_{\vec{x} \in \overline{G}} \big|f(\vec{x})\big| + \max_{\vec{x} \in \overline{G}} \big|g(\vec{x})\big|$$

  pak také plyne, že pro jakékoli dvě funkce $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{A}(G)$ platí trojúhelníková nerovnost tvaru $\big\|f + g\big\|_{\sigma} \leqslant \big\|f\big\|_{\sigma} + \big\|g\big\|_{\sigma}$
- zadané zobrazení je tedy normou

1.3.12 Definice

Nechť $G \subset \mathbf{E}^r$ je neprázdná omezená oblast. Nechť

$$\mathscr{A}(G) = \Big\{ f(\vec{x}) : \ f(\vec{x}) \in \mathbf{C}(\overline{G}) \Big\}.$$

Pak zobrazení

$$\big\| f \big\|_\sigma := \max_{\vec{x} \in \overline{G}} \big| f(\vec{x}) \big|$$

nazýváme *funkcionální $\sigma-$normou.*

1.3.13 Věta – rovnoběžníková rovnost

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$ a skalární součin $\langle .|. \rangle$. Nechť $\|.\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Pak pro každé $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ platí tzv. *rovnoběžníková rovnost* tvaru

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2.$$

Důkaz:

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = \langle f+g|f+g \rangle + \langle f-g|f-g \rangle = \langle f|f \rangle + \langle f|g \rangle + \langle g|f \rangle + \langle g|g \rangle +$$
$$+ \langle f|f \rangle + \langle f|-g \rangle + \langle -g|f \rangle + \langle g|g \rangle = 2\langle f|f \rangle + 2\langle g|g \rangle = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

1.3.14 Věta – Pythagorova věta

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$ a skalární součin $\langle .|. \rangle$. Nechť $\|.\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Pak platí implikace

$$\langle f|g \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \|f\|^2 + \|g\|^2 = \|f+g\|^2.$$

Důkaz:

- jelikož $\langle f|g \rangle = 0$, plyne z hermiticity skalárního součinu, že také $\langle g|f \rangle = 0$
- dále snadno $\|f+g\|^2 = \langle f+g|f+g \rangle = \langle f|f \rangle + \langle f|g \rangle + \langle g|f \rangle + \langle g|g \rangle$
- a protože prostřední dva členy tohoto součtu jsou nulové, platí $\|f+g\|^2 = \langle f|f \rangle + \langle g|g \rangle = \|f\|^2 + \|g\|^2$

1.3.15 Lemma – polarizační rovnost

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$ a skalární součin $\langle .|. \rangle$. Nechť $\|.\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Pak platí rovnost

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{4} \left(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + \mathtt{i}\|f+\mathtt{i}g\|^2 - \mathtt{i}\|f-\mathtt{i}g\|^2 \right)^2.$$

1.3.16 Definice

Nechť M je libovolná neprázdná množina. Zobrazení $\varrho : M \times M \mapsto \mathbf{R}$ nazveme *metrikou*, jestliže splňuje tzv. *axiomy metriky*:

- *nulovost:* $\varrho(f,g) = 0$ právě tehdy, když $f = g$
- *symetrie:* pro všechna $f, g \in M$ platí $\varrho(f,g) = \varrho(g,f)$
- *trojúhelníková nerovnost:* pro všechna $f, g, h \in M$ platí $\varrho(f,h) \leqslant \varrho(f,g) + \varrho(g,h)$

Dvojici $\big\{M, \varrho\big\}$ nazýváme *metrickým prostorem.*

1.3.17 Lemma

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ a norma $\|.\|$. Pak zobrazení $\|f-g\|$ je metrikou na $\mathcal{V}$.

1.3.18 Definice

Metriku zavedenou na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ vztahem $\|f-g\|$ nazýváme *metrikou generovanou normou*.

1.3.19 Definice

Nechť je dán metrický prostor $\{M, \varrho\}$ s libovolnou metrikou $\varrho(f,g)$. Řekneme, že posloupnost $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ prvků z M je *cauchyovská* v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $m, n \geqslant n_0$ platí

$$\varrho(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

1.3.20 Definice

Množinu všech polynomů $\wp(\vec{x}) : M \mapsto \mathbf{R}$ na množině $M \subset \mathbf{E}^r$, jejichž stupeň je maximálně $n \in \mathbf{N}$, označíme symbolem $\mathscr{P}_M^n$.

1.3.21 Definice

Nechť M je otevřená podmnožina prostoru $\mathbf{E}^r$. Množinu všech funkcí $f(\vec{x}) : M \mapsto \mathbf{C}$, jejichž parciální derivace až do řádu $m \in \mathbf{N}$ včetně jsou spojitými funkcemi na M, označíme symbolem $\mathscr{C}^m(M)$. Řekneme, že funkce $f(\vec{x})$ je *hladká* na M a označíme symbolem $f(\vec{x}) \in \mathscr{C}^\infty(M)$, jsou-li všechny parciální derivace funkce $f(\vec{x})$ spojitými funkcemi na M.

1.3.22 Definice

Prostor všech spojitých funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a \in \mathbf{R}$ nebo $a = -\infty$, resp. $b \in (a, \infty)$ nebo $b = \infty$, nazveme *Sobolevovým prostorem funkcí* a označíme symbolem $\mathscr{S}_{\langle a,b\rangle}$. Prostor všech spojitých funkcí na kompaktní množině $K \subset \mathbf{E}^r$ nazveme *Sobolevovým prostorem vícerozměrných funkcí* a označíme symbolem $\mathscr{S}_K$.

1.3.23 Definice

Řekneme, že funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je analytická na G, jestliže pro každé $\vec{c} \in G$ existuje okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})$ platí rovnost

$$f(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathsf{d}^n f_{\vec{c}}(\vec{x})}{n!},$$

kde symbol $\mathsf{d}^n f_{\vec{c}}(\vec{x})$ představuje $n-$tý totální diferenciál v bodě funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{c}$. Třídu všech analytických funkcí na oblasti G označujeme symbolem $\mathscr{A}_G$.

1.3.24 Definice

Nechť $p \geqslant 1$ je pevně zvolený parametr. Pak třídu všech funkcí $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{R}$, pro něž

$$\int_G \left|f(\vec{x})\right|^p \mathsf{d}\mu(\vec{x}) \in \mathbf{R},$$

označujeme symbolem $\mathscr{L}_p\big(G, \mu(X)\big)$.

1.3.25 Věta

Prostory $\mathscr{P}_M^n$, $\mathscr{C}^m(G)$, $\mathscr{C}^\infty(G)$, $\mathscr{S}_{\langle a,b\rangle}$, $\mathscr{S}_K$, $\mathscr{A}_G$ a $\mathscr{L}_p\big(G, \mu(X)\big)$ spolu s operací sčítání funkcí a násobení funkce prvkem z $\mathbf{C}$ jsou vektorovými prostory nad tělesem $\mathbf{C}$.

Důkaz:

- ve všech případech reprezentuje nulový prvek zkoumaných vektorových prostorů ryze nulová funkce $f(x) = o(\vec{x})$
- inverzním prvkem k prvku $f(\vec{x})$ je zcela zjevně funkce $-f(\vec{x})$, která vždy do prostoru patří
- poté postačí pouze zkoumat uzavřenost na sčítání a násobení prvkem z $\mathbf{C}$
- snadno ale nahlédneme, že pro všechny funkce $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ a všechna čísla $c \in \mathbf{C}$ platí, že $f(\vec{x}) + c \cdot g(\vec{x}) \in \mathcal{V}$
- to vše platí pro libovolný vektorový prostor $\mathcal{V}$ uvedený ve znění věty

1.3.26 Definice

Nechť A a B jsou podmnožiny Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$. Řekneme, že A je *hustá v množině* B, jestliže $\overline{A} \supset B$. Řekneme, že A je *všude hustá v množině* B, jestliže $\overline{A} = B$.

1.3.27 Věta

Množina A je všude hustá v množině B právě tehdy, když pro každé $\vec{y} \in B$ existuje posloupnost $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ vektorů z množiny A taková, že $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{y}$, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že platí implikace

$$n > n_0 \quad \Longrightarrow \quad \varrho(\vec{x}_n, \vec{y}) < \varepsilon. \tag{1.13}$$

Důkaz:

- nejprve dokážeme první implikaci
- předpokládejme tedy, že $\vec{y} \in B$ a $\overline{A} = B$
- jelikož $\vec{y} \in \overline{A}$, pak buď $\vec{y} \in A^{\circ}$ nebo $\vec{y} \in \mathrm{bd}(A)$
- v každém případě ale existuje v libovolném okolí $\mathcal{U}_{\varepsilon}(\vec{y})$, kde $\varepsilon = \frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbf{N}$, bod $\vec{x}_n \in A$
- tvrdíme, že $\vec{x}_n \to \vec{y}$
- vezměme proto $\delta > 0$
- k němu ale vždy existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že platí implikace $n > n_0 \Longrightarrow \varrho(\vec{x}_n, \vec{y}) < \delta$, jak vyplývá z konstrukce posloupnosti $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$
- dokažme druhou implikaci
- pro spor předpokládejme, že existuje $\vec{y} \in B \setminus \overline{A}$
- nechť tedy existuje posloupnost $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ vektorů z množiny A taková, že $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{y}$
- tudíž pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že platí implikace (1.13)
- to ale značí, že v každém okolí $\mathcal{U}_{\varepsilon}(\vec{y})$ leží bod z množiny A
- proto $\vec{y}$ je hraničním bodem množiny A, což je očekávaný spor

1.3.28 Příklad

Např. množina racionálních čísel $\mathbf{Q}$ je všude hustá v množině reálných čísel. Tj. každé číslo $r \in \mathbf{R}$ může být reprezentováno jako limita jisté posloupnosti $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ racionálních čísel.

1.3.29 Lemma

Nechť $a \in \mathbf{R}$ (nebo $a = -\infty$) a $b \in (a, \infty)$ (nebo $b = +\infty$). Nechť $\mathscr{S}_{\langle a,b\rangle}$ je vektorový prostor všech funkcí $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ spojitých na intervalu $\langle a, b\rangle$ zavedený nad tělesem $\mathbf{C}$. Nechť je dána funkce $w(x) \in \mathscr{S}_{\langle a,b\rangle}$ nenulová nezáporná na $\langle a, b\rangle$. Pak formule

$$\big\langle f(x) | g(x) \big\rangle_w := \int_a^b f(x) g^{\star}(x) w(x)\, \mathrm{d}x \tag{1.14}$$

splňuje axiomy skalárního součinu na $\mathscr{S}_{\langle a,b\rangle}$.

1.3.30 Definice

Funkci $w(x)$ z předešlého lemmatu nazýváme *vahou skalárního součinu* a vybrané reprezentanty nazýváme následovně:

- *standardní (Legendreova) váha:* pro libovolnou volbu $a, b \in \mathbf{R}$ a $w(x) = \Theta(a)\Theta(b - x)$,
- *Laguerreova váha:* pro volbu $a = 0$, $b = \infty$ a $w(x) = \Theta(x)\mathrm{e}^{-x}$,
- *Hermiteova váha:* pro volbu $a = -\infty$, $b = \infty$ a $w(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$,
- *Čebyševova váha:* pro volbu $a = -1$, $b = 1$ a $w(x) = \frac{\Theta(1-|x|)}{\sqrt{1-x^2}}$.

1.3.31 Poznámka

Lemma 1.3.29 a definice 1.3.30 mohou být pochopitelně reformulovány také pro případ prostoru $\mathscr{S}_K$ vícedimenzionálních spojitých funkcí, kde K je kompaktní $r-$dimenzionální množina. Po příslušné váze $w(\vec{x})$ analogicky požadujeme, aby byla nenulová a nezáporná na K a navíc aby $w(\vec{x}) \in \mathscr{S}_K$.

1.3.32 Poznámka

Vztahy $\int_G f(x)g^\star(x)w(x)\,\mathrm{d}x$, resp. $\int_G f(\vec{x})g^\star(\vec{x})w(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}$ však na některých vektorových prostorech skalární součin nedefinují. Jedním z takových prostorů je např. prostor např. prostor analytických funkcí $\mathscr{A}_{(0,1)}$. Funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ do prostoru $\mathscr{A}_{(0,1)}$ patří, ale integrál

$$\int_G \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_G \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

nekonverguje. Podobně také prostoru $\mathscr{L}_1(G)$ nebo $\mathscr{L}(G)$ pro $G = (0, \infty)$ negenerují spolu s operací $\int_0^\infty f(x)g^\star(x)\,\mathrm{d}x$ prehilbertovský prostor. Prehilbertovskými prostory jsou naproti tomu prostory $\mathscr{P}^n_{(a,b)}$, $\mathscr{P}^\infty_{(a,b)}$, $\mathscr{P}^\infty_G$, kde G je omezená oblast, dále $\mathscr{S}_{\langle a,b\rangle}$, nebo $\mathscr{S}_K$, kde K je uzavřená oblast.

1.3.33 Příklad

Laguerreova váha lze pro vícedimenzionální případy zavést vztahem

$$w(\vec{x}) = \prod_{i=1}^r \Theta(x_i)\mathrm{e}^{-x_i} = \Theta(\vec{x})\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^r x_i}.$$

Zcela analogicky má vícedimenzionální Hermiteova váha následující podobu

$$w(\vec{x}) = \prod_{i=1}^r \Theta(x_i)\mathrm{e}^{-x_i^2} = \Theta(\vec{x})\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^r x_i^2} = \Theta(\vec{x})\mathrm{e}^{-\|\vec{x}\|^2}.$$

1.4 Faktorové prostory funkcí a prostory Hilbertovy

V této sekci budeme diskutovat otázku, jak vytvořit Hilbertův prostor, tj. úplný prostor se skalárním součinem a odvozenou normou, resp. metrikou, z vektorových prostorů funkcí.

1.4.1 Úmluva

Označme zkráceně $\mathscr{L}_p(G) := \mathscr{L}_p\big(G, \mu(X)\big)$.

1.4.2 Poznámka

Zavedeme-li na prostoru $\mathscr{L}_2(G)$ zobrazení $\langle f|g\rangle : \mathscr{L}_2(G) \times \mathscr{L}_2(G) \mapsto \mathbf{C}$ předpisem

$$\big\langle f|g\big\rangle = \int_G f(\vec{x})\,g^\star(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}),$$

pak toto zobrazení není skalárním součinem, neboť není splněn axiom pozitivní definitnosti z definice skalárního součinu. Rovnost $\langle f|f\rangle = 0$ by podle něho měla být splněna tehdy a jen tehdy, pokud $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$, tedy pokud $f(\vec{x})$ je ryze nulová funkce. Snadno ale nahlédneme, že pro Dirichletovu funkci (1.3) platí rovnost $\mathfrak{D}^2(\vec{x}) = \mathfrak{D}(\vec{x})$, a tudíž (podle teorie Lebesgueova integrálu)

$$\big\langle\mathfrak{D}|\mathfrak{D}\big\rangle = \int_G \mathfrak{D}(\vec{x})\,\mathfrak{D}^\star(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) = \int_G \mathfrak{D}(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) = 0.$$

Z tohoto důvodu je nutno přistoupit k následujícím úvahám a zobecněním.

1.4.3 Poznámka

Přejdeme nyní od termínu funkce k tzv. faktorové funkci, resp. k faktorovému prostoru funkcí. Termínem *faktorová skupina funkcí* budeme označovat třídu všech funkcí, jež jsou měřitelné a zároveň jsou mezi sebou po dvou $\mu-$ekvivalentní, t.j. liší se pouze na množině, jež má míru $\mu(X)$ nulovou. Symbolem $\mathcal{F}_0$ budeme značit speciální případ faktorové skupiny funkcí, a sice třídu všech funkcí, jež jsou měřitelné a zároveň ekvivalentní s ryze nulovou funkcí $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$. Do třídy $\mathcal{F}_0$ tedy např. patří také Dirichletova funkce $\mathfrak{D}(\vec{x})$. Tím se poměrně rozsáhlá třída všech měřitelných funkcí rozpadá na separátní třídy navzájem ekvivalentních funkcí. Libovolně vybraného zástupce z jedné faktorové skupiny funkcí nazveme *faktorovou funkcí.* Pro jednoduchost formulací v celém dalším textu budeme ale i nadále užívat termín funkce (namísto správného termínu faktorová funkce) s vědomím, že se jedná o jednoho vybraného reprezentanta celé třídy funkcí. Připomínáme, že všechny funkce z téže faktorové skupiny funkcí mají (podle již citované věty o Lebesgueově integrálu z $\mu-$ekvivalentních funkcí) stejnou hodnotu Lebesgueova integrálu.

K vybudování faktorového prostoru funkcí lze přistoupit také přes teorii faktorových rozkladů známou z učiva obecné algebry. Jelikož operace ekvivalence $\sim$ zavedená na třídě všech měřitelných funkcí $\Lambda(\mathbf{E}^r)$ je

- reflexivní, neboť $\forall f(\vec{x}) :\ f(\vec{x}) \sim f(\vec{x})$
- symetrická, neboť $\forall f(\vec{x}), \forall g(\vec{x}) :\ f(\vec{x}) \sim g(\vec{x}) \implies g(\vec{x}) \sim f(\vec{x})$
- a tranzitivní, neboť $\forall f(\vec{x}), \forall g(\vec{x}), \forall h(\vec{x}) :\ f(\vec{x}) \sim g(\vec{x}) \ \wedge\ g(\vec{x}) \sim h(\vec{x}) \implies f(\vec{x}) \sim h(\vec{x})$,

rozkládá relace ekvivalence $\sim$ třídu všech měřitelných funkcí $\Lambda(\mathbf{E}^r)$ na disjunktní třídy navzájem ekvivalentních funkcí. Užitím značení z obecné algebry lze tedy psát $\mathcal{F}(\mathbf{E}^r) := \Lambda(\mathbf{E}^r)/\mathcal{F}_0(\mathbf{E}^r)$.

1.4.4 Definice

Faktorovou funkcí $\hat{f}(\vec{x})$ nazveme množinu všech funkcí, jež jsou vzájemně $\mu-$ekvivalentní s vybranou měřitelnou funkcí $f(\vec{x}) \in \Lambda(G)$, tj.

$$\hat{f}(\vec{x}) := \big\{ g(\vec{x}) \in \Lambda(G) :\ g \sim f \big\}.$$

Množinu všech faktorových funkcí nazveme *faktorovým prostorem* nad G a označíme $\mathcal{F}(G)$.

1.4.5 Poznámka

Tedy funkce $f(\vec{x})$ a $g(\vec{x})$ z předešlé definice se liší pouze na množině nulové míry. Dále si uvědomme, že integrál všech prvků faktorové funkce na dané oblasti G má stejnou hodnotu. Má tedy smysl definovat

$$\int_G \hat{f}(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) := \int_G f(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}),$$

kde $f(\vec{x})$ je libovolný zástupce faktorové funkce $\hat{f}(\vec{x})$.

1.4.6 Poznámka

Od této chvíle budeme tedy např. pod pojmem funkce $\hat{f}(x) = x$ rozumět nespočetně mnoho funkcí, a to všech takových, které se liší na $\mathbf{R}$ od funkce $f(x) = x$ na množině nulové míry. Přitom, pokud to nebude matoucí, nebudeme dále užívat odlišné symboliky $\hat{f}(\vec{x})$ pro faktorovou funkci, ale přidržíme se symboliky původní, tj. $f(x)$. Budeme mít ale na paměti pozměněné chápání tohoto symbolu. Vzhledem k výše uvedené definici pozbývá smyslu hovořit o funkční hodnotě funkce, přesněji faktorové funkce. Uvažte proč.

1.4.7 Definice

Nechť $p \geqslant 1$. Symbolem $\mathbb{L}_p(G)$ označíme množinu všech (faktorových) funkcí $f(\vec{x}) :\ G \mapsto \mathbf{C}$, pro něž $|f(\vec{x})|^p \in \mathscr{L}(G)$, tedy

$$\int_G |f(\vec{x})|^p\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) < +\infty.$$

1.4.8 Věta

Zobrazení $\langle f|g\rangle : \mathbb{L}_2(G)\times\mathbb{L}_2(G)\mapsto \mathbf{C}$ zavedené na $\mathbb{L}_2(G)$ předpisem

$$\big\langle f|g\big\rangle = \int_G f(\vec{x})\, g^\star(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) \tag{1.15}$$

reprezentuje skalární součin. Prostor $\mathbb{L}_2(G)$ je tudíž prehilbertovským prostorem.

Důkaz:

- axiom levé linearity je splněn triviálně, podobně jako hermiticita
- pro libovolnou funkci $f(\vec{x})\in\mathbb{L}_2(G)$ pak platí, že
$$\big\langle f|f\big\rangle = \int_G f(\vec{x})\, f^\star(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) = \int_G |f(\vec{x})|^2\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) \geqslant 0$$
a navíc rovnost
$$\big\langle f|f\big\rangle = \int_G f(\vec{x})\, f^\star(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) = \int_G |f(\vec{x})|^2\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) = 0$$
nastává pouze pro nulovou faktorou funkci
- tím je naplněn axiom pozitivní definitnosti
- zbývá dokázat, že pro libovolné dvě funkce $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$ je výraz $\big\langle f|g\big\rangle = \int_G f(\vec{x})\, g^\star(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x})$ dobře definován
- jelikož je na G splněna nerovnost
$$2\big|f(\vec{x})g^\star(\vec{x})\big| \leqslant \big|f(\vec{x})\big|^2 + \big|g^\star(\vec{x})\big|^2$$
a oba integrály $\int_G\big|f(\vec{x})\big|^2\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})$ a $\int_G\big|g^\star(\vec{x})\big|^2\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})$ existují z definice prostoru $\mathbb{L}_2(G)$ a z věty o absolutní hodnotě Lebesgueova integrálu, existuje podle srovnávacího kritéria také integrál $\int_G f(\vec{x})g^\star(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})$

1.4.9 Příklad

Nechť $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$. Přepíšeme-li obecnou Schwarzovu-Cauchyovu-Bunjakovského nerovnost (viz věta 6.2.3. str. 172 ve skriptech [11]) do funkcionálního tvaru, dostáváme nerovnost tvaru

$$\left|\int_G f(\vec{x})g^\star(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})\right| \leqslant \sqrt{\int_G |f(\vec{x})|^2\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})}\sqrt{\int_G |g(\vec{x})|^2\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})}. \tag{1.16}$$

1.4.10 Poznámka

Je-li vztah (1.15) skalárním součinem na $\mathbb{L}_2(G)$, pak je zobrazení

$$\big\|f(\vec{x})\big\| = \sqrt{\int_G \big|f(\vec{x})\big|^2\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})}$$

normou na $\mathbb{L}_2(G)$. Podle lemmatu 1.3.17 je navíc zobrazení

$$\varrho(f,g) := \sqrt{\int_G \big|f(\vec{x})-g(\vec{x})\big|^2\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})}$$

metrikou na $\mathbb{L}_2(G)$.

1.4.11 Definice

Řekneme, že posloupnost funkcí $\big(f_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ z prostoru $\mathbb{L}_2(G)$ *konverguje podle normy* k funkci $f(\vec{x})\in\mathbb{L}_2(G)$, pokud pro každé $\varepsilon>0$ existuje $n_0\in\mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n\geqslant n_0$ platí

$$\big\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\big\| < \varepsilon,$$

to jest

$$\sqrt{\int_G \big|f_n(\vec{x})-f(\vec{x})\big|^2\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})} < \varepsilon.$$

Konvergenci podle normy zapisujeme symbolem $f_n(\vec{x}) \rightharpoonup f(\vec{x})$.

1.4.12 Příklad

Rozhodněme podle definice, zda posloupnost funkcí $\left(\mathrm{e}^{-nx^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ z prostoru $\mathbb{L}_2(\mathbf{R})$ konverguje podle normy k nulové funkci. Nechť $\varepsilon > 0$ je zvoleno libovolně. Limitní faktorovou funkcí pro zkoumanou posloupnost je nulová funkce. Zkoumejme tedy nerovnost

$$\left\|\mathrm{e}^{-nx^2}\right\| = \sqrt{\int_G \mathrm{e}^{-2nx^2}\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})} = \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{1/4} < \varepsilon.$$

Za hledané $n_0 \in \mathbf{N}$ z definice konvergence podle normy tedy stačí volit

$$n_0 := \left\lfloor \frac{\pi}{2\varepsilon^4} \right\rfloor + 1.$$

Povšimněme si ale paradoxu, že posloupnost $\left(\mathrm{e}^{-nx^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje (uvažujeme-li konvergenci klasickou) k nulové funkci ani stejnoměrně ani bodově. Vztah mezi klasickou konvergencí a konvergencí podle normy lze shrnout v následující větě.

1.4.13 Věta

Nechť je dána posloupnost funkcí $\left(f_n(\vec{x})\right)_{n=1}^{\infty}$ z prostoru $\mathbb{L}_2(G)$ taková, že $f_n(\vec{x}) \overset{G}{\rightrightarrows} f(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$. Nechť dále $0 < \mu(G) < \infty$. Pak $f_n(\vec{x}) \rightharpoonup f(\vec{x})$.

<u>*Důkaz:*</u>

- z předpokladů plyne, že pro všechna $\widetilde{\varepsilon} > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geqslant n_0$ a pro všechna $\vec{x} \in G$ platí nerovnost
$$\left|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right| < \widetilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\mu(G)}}$$
- jelikož zjevně
$$\left\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right\|^2 = \langle f_n - f | f_n - f\rangle = \int_G \left|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right|^2 \mathrm{d}\mu(\vec{x}) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4\mu(G)}\mu(G) = \frac{\varepsilon^2}{4},$$
zjišťujeme, že pro indexy $n \geqslant n_0$ platí nerovnost $\left\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$
- to dokazuje skutečnost, že posloupnost funkcí $\left(f_n(\vec{x})\right)_{n=1}^{\infty}$ konverguje podle normy k funkci $f(\vec{x})$

1.4.14 Věta

Nechť $f_n(\vec{x}) \rightharpoonup f(\vec{x})$. Pak existuje podposloupnost $\left(f_{k_n}(\vec{x})\right)_{n=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\left(f_n(\vec{x})\right)_{n=1}^{\infty}$ taková, že platí $f_{k_n}(\vec{x}) \to f(\vec{x})$ skoro všude v M.

<u>*Důkaz:*</u>

- viz [1], str. 42, příklad 2.2.2

1.4.15 Definice

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ se skalárním součinem $\langle .|. \rangle$. Nechť $\|.\|$ je norma generovaná zadaným skalárním součinem a $\varrho(x, y)$ metrika generovaná výše uvedenou normou. Nechť navíc $\{\mathcal{V}, \varrho\}$ je úplným metrickým prostorem. Pak takový prostor $\mathcal{H} := \left\{\mathcal{V}, \langle .|. \rangle, \|.\|, \varrho\right\}$ nazýváme *Hilbertovým* prostorem.

1.4.16 Poznámka

Metrický prostor $\{M, \varrho\}$ s libovolnou metrikou $\varrho(f, g)$ nazveme *úplným,* jestliže každá cauchyovská posloupnost je v něm konvergentní.

1.4.17 Věta – o spojitosti skalárního součinu

Nechť je dán Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem $\mathbf{C}$. Nechť je dána posloupnost funkcí $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ z prostoru $\mathcal{H}$, která konverguje podle normy k funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$, a funkce $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n|g\rangle = \langle f|g\rangle, \quad \lim_{n\to\infty} \langle g|f_n\rangle = \langle g|f\rangle.$$

Důkaz:

- jedná se o bezprostřední důsledek věty 1.3.10

1.4.18 Definice

Řekneme, řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ z Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ *konverguje podle normy* ke svému součtu $s(\vec{x}) \in \mathcal{H}$, pokud posloupnost $\big(s_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ jejích částečných součtů

$$s_n(\vec{x}) := \sum_{k=1}^{n} f_k(\vec{x})$$

konverguje podle normy k funkci $s(\vec{x})$, tj. $\operatorname{limnorm}_{n\to\infty} s_n(\vec{x}) = s(\vec{x})$. Konvergenci podle normy zapisujeme symbolem $\underline{\sum}_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}) = s(\vec{x})$.

1.4.19 Věta

Nechť je dán Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem $\mathbf{C}$. Pak pro každou konvergentní (ve smyslu konvergence podle normy) řadu funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ z prostoru $\mathcal{H}$, jejímž součtem je funkce $s(\vec{x}) \in \mathcal{H}$, pro každou funkci $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big\langle f_n|g\big\rangle = \big\langle s|g\big\rangle,$$

tedy

$$\underline{\sum_{n=1}^{\infty}} f_n(\vec{x}) = s(\vec{x}) \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \big\langle f_n|g\big\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}) \middle| g \right\rangle.$$

Důkaz:

- předpokládejme tedy, že $\underline{\sum}_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}) = s(\vec{x})$
- označme $s_n(\vec{x}) := \sum_{k=1}^{n} f_k(\vec{x})$ posloupnost částečných součtů dotčené řady
- pak platí

$$\langle s|g\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} f_n|g \right\rangle = \big\langle \operatorname*{limnorm}_{n\to\infty} s_n|g\big\rangle = \left\langle \operatorname*{limnorm}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k \middle| g \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \big\langle f_k|g\big\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \big\langle f_k|g\big\rangle,$$

  kde bylo využito předpokladu, že $\operatorname{limnorm}_{n\to\infty} s_n(\vec{x}) = s(\vec{x})$ dle definice 1.4.18, linearity skalárního součtu a platnosti tvrzení věty 1.4.17

1.4.20 Věta

Faktorový prostor $\mathbb{L}_2(G)$ společně se skalárním součinem zavedeným vztahem (1.15) je úplný, tj. jedná se o Hilbertův prostor.

Důkaz:

Jelikož již bylo prokázáno, že $\mathbb{L}_2(G)$ je vektorový prostor nad $\mathbf{C}$, zbývá dokázat úplnost. Vyberme tedy z libovolné cauchyovské posloupnosti $\big(f_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ podposloupnost $\big(f_{k_\ell}(\vec{x})\big)_{\ell=1}^{\infty}$, jež konverguje skoro všude na G. To je díky cauchyovskosti možné. Cílem důkazu je de facto prokázat, že $\big(f_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ je konvergentní v $\mathbb{L}_2(G)$. První člen podposloupnosti $\big(f_{k_\ell}(\vec{x})\big)_{\ell=1}^{\infty}$ vyberme tak, aby pro všechna $m > k_1$ platilo

$$\|f_{k_1}(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \frac{1}{2}.$$

To je opět díky cauchyovskosti možné. Druhý člen podposloupnosti vyberme tak, aby pro všechna $m > k_2$ platilo

$$\|f_{k_2}(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \frac{1}{2^2}.$$

Analogicky vyberme $\ell-$tý člen podposloupnosti tak, aby pro všechna $m > k_\ell$ platilo

$$\|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \frac{1}{2^\ell}.$$

Označíme-li nyní

$$g_k(\vec{x}) = \sum_{s=1}^{k} \big|f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\big|,$$

$$g(\vec{x}) = \sum_{s=1}^{\infty} \big|f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\big|,$$

bude

$$\|g_k(\vec{x})\| \leqslant \sum_{s=1}^{k} \big\|f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\big\| < \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{2^s} < 1.$$

Je proto $\int_M |g_n(\vec{x})|^2 \,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) < 1$ a podle Leviho věty také

$$\int_M |g(\vec{x})|^2 \,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) = \lim_{k\to\infty} \int_M |g_k(\vec{x})|^2 \,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) \leqslant 1$$

a $g(\vec{x})$ je konečná skoro všude na M. Navíc řada $\sum_{s=1}^{k} \big|f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\big|$ má pro skoro všechna $\vec{x} \in M$ konečný součet a tudíž i řada $\sum_{s=1}^{k} \big(f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\big)$ je konvergentní, a tedy také posloupnost

$$f_k(\vec{x}) = \sum_{s=1}^{k-1} \big(f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\big) + f_{k_1}(\vec{x}).$$

Označme $f(\vec{x})$ její limitu. Ta je samozřejmě měřitelná jako limita posloupnosti měřitelných funkcí.

Ve druhé části důkazu ukážeme, že posloupnost $\big(f_{k_\ell}(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ konverguje právě k této funkci $f(\vec{x})$ v $\mathbb{L}_2(G)$. Předně z cauchyovskosti posloupnosti $\big(f_{k_\ell}(\vec{x})\big)_{\ell=1}^{\infty}$ plyne cauchyovskost podposloupnosti $\big(f_{k_\ell}(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$, a tedy pro $\epsilon = 1$ existuje $k_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro $\ell > k_0$ a $m > k_0$ je

$$\int_M \big|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f_{k_m}(\vec{x})\big|^2 \,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) < 1.$$

Podle Fatouovy věty (viz věta 2.1.7, str. 26 v [13]) je

$$\int_M \big|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f(\vec{x})\big|^2 \,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) < 1,$$

odkud plyne, že funkce $f(\vec{x})$ rozepsaná jako $\big(f(\vec{x}) - f_{k_\ell}(\vec{x})\big) + f_{k_\ell}(\vec{x})$ patří do $\mathbb{L}_2(G)$. Provedeme-li stejnou úvahu s libovolně malým ϵ, získáme

$$\int_M \big|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f(\vec{x})\big|^2 \,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) < \epsilon^2,$$

což neznamená nic jiného, než že

$$\lim_{\ell\to\infty} f_{k_\ell}(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

V poslední části důkazu ukážeme, že k funkci $f(\vec{x})$ konverguje celá posloupnost $\big(f_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$. To ovšem plyne ihned z nerovností

$$\big\|f(\vec{x}) - f_k(\vec{x})\big\| \leqslant \big\|f(\vec{x}) - f_{k_\ell}(\vec{x})\big\| + \big\|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f_k(\vec{x})\big\|,$$

neboť první člen napravo můžeme udělat libovolně malým (pro velká k_ℓ) díky dokázané konvergenci zmiňované podposloupnosti a druhý díky cauchyovskosti posloupnosti $\big(f_k(x)\big)_{k=1}^{\infty}$.

1.4.21 Poznámka

Z první části předešlého důkazu také vyplývá inkluze

$$\mathbb{L}_1(G) \subset \mathbb{L}_2(G),$$

kde $\mathbb{L}_1(G) = \big\{ f(\vec{x}) \in F : (\mathscr{L}) \int_G |f(\vec{x})| \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) \in \mathbf{R} \big\}$.

1.4.22 Důsledek

Nechť $w(\vec{x}) \in \mathscr{C}(\overline{G})$ je nenulová a nezáporná funkce. Faktorový prostor

$$\mathbb{L}_w(G) = \big\{ f(\vec{x}) \in F(G) : \int_G |f(\vec{x})|^2 w(\vec{x}) \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) < +\infty \big\},$$

kde $w(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G)$, společně se skalárním součinem zavedeným vztahem $\int_G f(\vec{x}) g^\star(\vec{x}) w(\vec{x}) \, \mathrm{d}\vec{x}$ je Hilbertovým prostorem.

1.5 Obecné vlastnosti ortonormálních množin

V této partii se budeme zaobírat konstrukcí a vlastnostmi ortogonálních množin sestavených z vybraných prvků Hilbertova prostoru. Ukážeme také, jak libovolnou množinu lineárně nezávislých funkcí ortogonalizovat, popř. ortonormalizovat.

1.5.1 Definice

Nechť je dán Hilbertův prostor $\mathcal{H}$. Nechť S je neprázdná množina funkcí z $\mathcal{H}$ neobsahující nulovou funkci (nulový vektor). Řekneme, že množina $S \subset \mathcal{H}$ je *ortogonální* v $\mathcal{H}$, jestliže pro každé $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in S$ takové, že $f(\vec{x}) \neq g(\vec{x})$, platí rovnost $\langle f|g \rangle = 0$. Množinu $S \subset \mathcal{H}$ nazveme *ortonormální,* je-li ortogonální a platí-li navíc, že pro každé $f(\vec{x}) \in S$ je $\|f(\vec{x})\| = 1$.

1.5.2 Věta

Nechť je množina $S \subset \mathcal{H}$ ortogonální v $\mathcal{H}$. Pak jsou všechny její prvky lineárně nezávislé.

Důkaz:

- postupujeme metodou sporu
- dokážeme tedy obměněnou verzi tohoto tvrzení, a sice, že jsou-li prvky množiny S lineárně závislé, pak S nemůže být ortogonální
- předpokládejme tedy, že pro nenulové funkce $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}) \in S$ existuje netriviální kombinace konstant $(\mathtt{C}_1, \mathtt{C}_2, \ldots, \mathtt{C}_n) \neq \vec{0}$ tak, že $\sum_{k=1}^n \mathtt{C}_k f_k(\vec{x}) = \vec{0}$
- řekněme, že např. $\mathtt{C}_\ell \neq 0$
- pak pro $\alpha_k := \mathtt{C}_k / \mathtt{C}_\ell$ platí:

$$f_\ell(\vec{x}) = - \sum_{k=1, k\neq \ell}^{n} \alpha_k f_k(\vec{x})$$

- aplikujeme-li na tuto rovnost skalární násobení funkcí $f_\ell(\vec{x})$ a užijeme-li (pro spor) předpokladu, že všechny dotčené funkce jsou po dvou ortogonální, dostáváme rovnost

$$\langle f_\ell | f_\ell \rangle = - \sum_{k=1, k\neq \ell}^{n} \alpha_k \langle f_k | f_\ell \rangle = 0$$

- z axiomu pozitivní definitnosti ale odtud vyplývá, že $f_\ell(x) = o(\vec{x})$, což je zřetelný spor

1.5.3 Definice

Nechť je dán Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ se skalárním součinem $\langle . | . \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto \mathbf{C}$. Nechť $\nu(f)$ je výroková formule na $\mathcal{H}$. Řekneme, že neprázdná množina S funkcí z $\mathcal{H}$ je *maximální množinou s vlastností* ν, jestliže pro všechny funkce $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí, že $\nu(f) = 1$, tj. výrok "funkce $f(\vec{x})$ má vlastnost ν" je pravdivý pro všechny funkce $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$, a je-li $T \subset \mathcal{H}$ množina, jejíž všechny prvky splňují touž vlastnost, pak $T \subset S$.

1.5.4 Věta – Besselova nerovnost

Nechť $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x})\}$ je ortonormální množina v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Nechť $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ je zvolen libovolně. Označme $a_k := \langle f_k | g \rangle$. Pak platí

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqslant \|g(\vec{x})\|^2. \tag{1.17}$$

Důkaz:

- zvolme funkci $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ libovolně
- pak platí série rovností , resp. nerovností

$$0 \leqslant \left\| g - \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \right\|^2 = \left\langle g - \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \,\middle|\, g - \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \right\rangle = \|g(\vec{x})\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^\star \langle g | f_k \rangle - \sum_{k=1}^{n} a_k \langle f_k | g \rangle +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_k^\star a_\ell \langle f_\ell | f_k \rangle = \|g(\vec{x})\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^\star a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k a_k^\star + \sum_{k=1}^{n} a_k^\star a_k = \|g\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$$

1.5.5 Poznámka

Zvolíme-li v předešlé větě $S = \{f(\vec{x})\}$, kde $\|f(\vec{x})\| = 1$, redukuje se rovnost (1.17) de facto na Schwarzovu-Cauchyovu-Bunjakovského nerovnost, neboť

$$|a|^2 = |\langle f | g \rangle|^2 \leqslant \|g(\vec{x})\|^2 = \|f(\vec{x})\|^2 \|g(\vec{x})\|^2,$$

potažmo

$$|\langle f | g \rangle| \leqslant \|f(\vec{x})\| \cdot \|g(\vec{x})\|.$$

1.5.6 Věta

Nechť $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}), \dots\}$ je ortonormální množina v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Nechť je funkce $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ zvolena libovolně. Označme $a_k = \langle g | f_k \rangle$. Pak existuje limita

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x}) =: h(\vec{x}) \in \mathcal{H}.$$

Navíc pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí $\langle g - h | f_k \rangle = 0$.

Důkaz:

- pro funkci $h_n(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(\vec{x})$ platí jednoduchá rovnost

$$\left\| h_{n+p}(\vec{x}) - h_n(\vec{x}) \right\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k f_k(\vec{x}) \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2, \tag{1.18}$$

  kde bylo využito kolmosti a normality funkcí v systému S
- z Besselovy nerovnosti plyne, že pro jakékoli $n \in \mathbf{N}$ je $\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqslant \|f(\vec{x})\|^2$
- protože $\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$ je řadou s nezápornými členy a je omezená, jistě také konverguje
- proto ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro indexy $n > n_0$ a $p \in \mathbf{N}$ je $\sum_{k=n+1}^{n} |a_k|^2 < \varepsilon^2$
- z rovnosti (1.18) pak lehce vyvodíme, že posloupnost $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská
- a protože $\mathcal{H}$ je prostorem Hilbertovým, je $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ rovněž konvergentní
- existuje tudíž $h(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x}) \in \mathcal{H}$
- pro pevné $k \in \mathbf{N}$ a $n > k$ je zřejmě $\langle g - h_n | f_k \rangle = 0$
- užijeme-li v předešlém vztahu limitní přechod $n \to \infty$ a aplikujeme-li větu 1.4.17, plyne odsud, že $\langle g - h | f_k \rangle = 0$ pro všechny $k \in \mathbf{N}$

1.5.7 Poznámka

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x})$ z předešlé věty tedy konverguje regulárně, což značí, že její součet nezávisí na přerovnání jejích členů. Konkrétně, je-li $\varphi(n) : \mathbf{N} \mapsto \mathbf{N}$ bijektivní zobrazení množiny přirozených čísel na sebe, pak

$$h(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} f_{\varphi(k)}(\vec{x}).$$

1.5.8 Věta

Nechť $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}), \ldots\}$ je ortonormální množina v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

1. S je maximální ortonormální podmnožina v $\mathcal{H}$,
2. je-li $\langle g|f_k\rangle = 0$ pro každé $k \in \mathbf{N}$, je $g(\vec{x}) = 0$,
3. pro každé $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí rovnost
$$g(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x}),$$
kde $a_k = \langle g|f_k\rangle$,
4. pro všechny $g(\vec{x}), h(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí rovnost
$$\langle g|h\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k^{\star},$$
kde $a_k = \langle g|f_k\rangle$ a $b_k = \langle h|f_k\rangle$,
5. pro každé $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí rovnost
$$\|g(\vec{x})\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2,$$
kde $a_k = \langle g|f_k\rangle$.

Důkaz:

- nejprve je třeba si uvědomit, že číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k^{\star}$ ze čtvrtého bodu věty konverguje absolutně, jak je patrno z Schwarzovy-Cauchyovy-Bunjakovského nerovnosti tvaru
$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k^{\star}| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2}$$
a faktu, že obě řady $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|a_k f_k(\vec{x})\|^2$ a $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|b_k f_k(\vec{x})\|^2$ konvergují podle věty 1.5.6
- dokážeme implikaci ❶ $\Rightarrow$ ❷
  - abychom dokázali, že z prvního tvrzení plyne tvrzení druhé, užijeme důkaz sporem
  - předpokládejme tedy, že existuje funkce $g(\vec{x}) \neq 0$ taková, že $\langle g|f_k\rangle = 0$ pro každé $k \in \mathbf{N}$
  - označme
$$\ell(\vec{x}) = \frac{g(\vec{x})}{\|g(\vec{x})\|}$$
  - zjevně $\|\ell(\vec{x})\| = 1$ a $\langle \ell|f_k\rangle = 0$ a množina $S' = S \cup \{\ell(\vec{x})\}$ je ortonormání a navíc $S' \supsetneqq S$ a S tedy není maximální ortonormální podmnožinou v $\mathcal{H}$, což je spor
- dokážeme implikaci ❷ $\Rightarrow$ ❸
  - nechť nyní platí tvrzení č. 2
  - z věty 1.5.6 plyne, že pro funkci $h(\vec{x}) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x})$ a každé $k \in \mathbf{N}$ platí $\langle g - h|f_k\rangle = 0$, což společně s tvrzením č. 2 implikuje skutečnost, že $g(\vec{x}) - h(\vec{x}) = 0$, tedy $h(\vec{x}) = g(\vec{x})$

- dokážeme implikaci ❸ $\Rightarrow$ ❹
  - pro důkaz implikace $(3) \Rightarrow (4)$ položme $g_n(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(\vec{x})$ a $h_m(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m} d_i f_i(\vec{x})$, kde $c_k = \langle g|f_k\rangle$ a $d_i = \langle h|f_i\rangle$
  - pak
    $$\langle g_n|h_m\rangle = \sum_{k=1}^{\min\{n,m\}} c_k d_k^\star,$$
    kde bylo využito ortogonality funkcí $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots$
  - přejdeme-li k limitě $n \to \infty$ a $m \to \infty$ a v důsledku spojitosti skalárního součinu (viz věta 1.4.17) dostáváme čtvrté tvrzení
- páté tvrzení je pouze tvrzení č. 4 specifikované pro speciální případ, kdy $h(\vec{x}) = g(\vec{x})$
- zbývá ukázat, že z tvrzení č. 5 plyne tvrzení první, tj. implikaci ❺ $\Rightarrow$ ❶
  - není-li ale množina $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}), \ldots\}$ maximální ortonormální podmnožinou v $\mathcal{H}$, existuje funkce $\ell(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ tak, že $\|\ell(\vec{x})\| = 1$ a pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí $\langle \ell|f_k\rangle = 0$
  - tehdy ale z tvrzení č. 5 vyplývá spor tvaru $\|\ell(\vec{x})\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\langle \ell|f_k\rangle\right|^2 = 0 \neq 1$

1.5.9 Poznámka

V následující větě představíme obecný návod, jak z obecných neortogonálních množin konstruovat množiny ortonormální.

1.5.10 Věta – Grammova-Schmidtova

Nechť $M = \{g_n(\vec{x}) \in \mathcal{H} : n \in \mathbf{N}\}$ je množina lineárně nezávislých vektorů z Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$. Pak existuje ortonormální množina $S = \{f_n(\vec{x}) \in \mathcal{H} : n \in \mathbf{N}\}$ vektorů z Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ taková, že pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí

$$\big[g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), \ldots, g_k(\vec{x})\big]_\lambda = \big[f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_k(\vec{x})\big]_\lambda.$$

Důkaz:

- označme $\vec{u}_1(\vec{x}) = g_1(\vec{x})$
- jelikož $\|\vec{u}_1\| \neq 0$, lze definovat
  $$f_1(\vec{x}) = \frac{\vec{u}_1(\vec{x})}{\|\vec{u}_1\|}$$
- tedy $\|f_1\| = 1$
- položme $\vec{u}_2(\vec{x}) = g_2(\vec{x}) - \langle g_2|f_1\rangle\, f_1(\vec{x})$
- pak platí $\langle \vec{u}_2|f_1\rangle = \langle g_2|f_1\rangle - \langle g_2|f_1\rangle \|f_1\|^2 = 0$
- protože jsou funkce $g_1(\vec{x})$ a $g_2(\vec{x})$ lineárně nezávislé, je $\|\vec{u}_2\| \neq 0$ a lze definovat
  $$f_2(\vec{x}) = \frac{\vec{u}_2(\vec{x})}{\|\vec{u}_2\|}$$
- množina vektorů $\{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x})\}$ je ortonormální a navíc jelikož $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x})$ jsou lineárními kombinacemi funkcí $g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x})$, máme
  $$\big[g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x})\big]_\lambda = \big[f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x})\big]_\lambda.$$
- dále postupujeme indukcí
- nechť máme sestrojenu ortonormální množinu
  $$S_m = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x})\}$$
  takovou, že
  $$\big[g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x})\big]_\lambda = \big[f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x})\big]_\lambda$$

- uvažme prvek
$$\vec{u}_{m+1}(\vec{x}) = g_{m+1}(\vec{x}) - \sum_{k=1}^{m} \langle g_{m+1}|f_k\rangle\, f_k(\vec{x})$$
- zřejmě $\langle \vec{u}_{m+1}|f_k\rangle = 0$ pro každé $k = \widehat{m}$
- protože dle předpokladů věty jsou vektory $g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x}), g_{m+1}(\vec{x})$ lineárně nezávislé, je $\vec{u}_{m+1}(\vec{x}) \neq 0$
- definujme vektor
$$f_{m+1}(\vec{x}) = \frac{\vec{u}_{m+1}(\vec{x})}{\|\vec{u}_{m+1}\|}$$
- pak je množina
$$S_{m+1} = \big\{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}), f_{m+1}(\vec{x})\big\}$$
ortonormální v $\mathcal{H}$ a navíc
$$\big[g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x}), g_{m+1}(\vec{x})\big]_\lambda = \big[f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}), f_{m+1}(\vec{x})\big]_\lambda.$$
- tím je důkaz proveden

1.6 Báze v Hilbertových prostorech a jejich ortogonalizace

Ve vektorových prostorech se skalárním součinem, tj. v Hilberových prostorech, lze podobně jako v konečně dimenzionálních prostorech definovat pojem báze. Přitom je třeba mít na paměti, že v obecných Hilbertových prostorech mohou existovat množiny lineárně nezávislých vektorů, které nejsou konečné. Proto bude nutné upravit i stavající definici pojmu báze.

1.6.1 Definice

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem T. *Bází prostoru* $\mathcal{V}$ rozumíme každý maximální uspořádaný soubor B lineárně nezávislých vektorů z $\mathcal{V}$. Jsou-li navíc funkce (vektory) uspořádaného souboru B po dvou ortogonální, budeme bázi B nazývat *ortogonální bází* v $\mathcal{H}$. Jestliže pro každou funkci $f(\vec{x}) \in B$ ortogonální báze platí rovnost $\|f(\vec{x})\| = 1$, prohlásíme navíc bázi B za *ortonormální.*

1.6.2 Definice

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem T a nechť B je jeho báze. Pak *dimenzí vektorového prostoru* rozumíme kardinální číslo množiny B, tj. číslo definované předpisem $\dim(\mathcal{V}) := \mathrm{card}(B)$.

1.6.3 Věta – o Fourierově rozvoji

Nechť $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots\}$ je ortonormální báze v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Pak pro každou funkci $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí
$$g(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x}), \tag{1.19}$$
kde $a_k = \langle g|f_k\rangle$, přičemž řada (1.19) konverguje regulárně.

Důkaz:

- plyne z definice 1.6.1 a ze třetího bodu tvrzení 1.5.8

1.6.4 Definice

Řadu (1.19) nazýváme *Fourierovou řadou* funkce $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ podle báze B a čísla $a_k = \langle g|f_k\rangle$ *Fourierovými koeficienty* funkce $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$.

1.6.5 Věta – o Parsevalově rovnosti

Nechť $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots\}$ je ortonormální báze v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Pak pro každou funkci $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí

$$\|g(\vec{x})\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|^2, \tag{1.20}$$

kde $a_k = \langle g|f_k \rangle$.

Důkaz:

- plyne z definice 1.6.1 a ze pátého bodu tvrzení 1.5.8

1.6.6 Definice

Rovnost (1.20) nazýváme *Parsevalovou rovností.*

1.6.7 Příklad

Vypočtěme wronskián systému funkcí $\left\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^k\right\}$. Sestavme tedy příslušný determinant. Je jím

$$W_{1,x,x^2,x^3,\ldots,x^k}(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{k-1} & x^k \\ 0 & 1 & 2x & \ldots & (k-1)x^{k-2} & kx^{k-1} \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & (k-1)(k-2)x^{k-3} & k(k-1)x^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (k-1)! & k!\,x \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & k! \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{k} i!$$

Odtud tedy vyplývá, že systém $\left\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^k\right\}$ je systémem lineárně nezávislých funkcí.

1.6.8 Věta

Nechť $G = (a, b) \subset \mathbf{R}$. Pak vektorový prostor $\mathscr{P}_G^n$ má dimenzi $n + 1$ a jednou z jeho bází je uspořádaný soubor $(1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n)$. Tedy

$$\mathscr{P}_G^n = \left[1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\right]_\lambda.$$

Důkaz:

- každý polynom $\wp(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ lze zjevně nakombinovat z funkcí $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n$, přičemž tyto funkce jsou lineárně nezávislé
- o lineární nezávislosti svědčí např. hodnota Wronského determinantu vypočteného v příkladě 1.6.7
- uspořádaný soubor $B = (1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n)$ tedy tvoří bázi v prostoru $\mathscr{P}_G^n$
- dimenzí prostoru $\mathscr{P}_G^n$ je podle definice 1.6.2 kardinální číslo (tj. počet prvků) zmíněného uspořádaného souboru $B = (1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n)$, tj. $\dim(\mathscr{P}_G^n) := \operatorname{card}(B) = n + 1$

1.6.9 Poznámka

Pro každou funkci $f(x)$ z prostoru analytických funkcí $\mathscr{A}_{(a,b)}$ platí, že pro vybrané $c \in (a, b)$ je na intervalu (a, b) splněna rovnost

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n.$$

Ačkoliv je prostor $\mathscr{A}_{(a,b)}$ zjevně nekonečně-dimenzionální, snadno nahlédneme, že

$$\mathscr{A}_{(a,b)} = \left[1, x - c, (x - c)^2, (x - c)^3, \ldots\right]_\lambda.$$

Uspořádaný soubor $\left(1, x - c, (x - c)^2, (x - c)^3, \ldots\right)$ je tedy bází vektorového prostoru $\mathscr{A}_{(a,b)}$. Podobně je také soubor $\left(1, x, x^2, x^3, \ldots\right)$ bází vektorového prostoru všech polynomů na $\mathbf{R}$. Odtud také snadno nahlédneme, že $\dim(\mathscr{A}_{(a,b)}) = \aleph_0$.

1.6.10 Věta

Množina

$$S = \{1, \sin(nx), \cos(nx) : n \in \mathbf{N}\} \tag{1.21}$$

představuje maximální ortogonální množinu v prostoru $\mathbb{L}_2(0, 2\pi)$, tj. jedná se o bázi tohoto prostoru.

Důkaz:

- funkce množiny S jsou zjevně lineárně nezávislé
- snadno také nahlédneme, že pro $n \in \mathbf{N}_0$ a $m \in \mathbf{N}_0$ je

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0$$

- dále pro $n \in \mathbf{N}_0$ a $m \neq m$ platí

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0$$

- hlavní část důkazu, tj. prokázání úplnosti systému (1.21), je náplní stran 547–560 v knize [8]

1.6.11 Definice

Ortonormální bázi

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} : n \in \mathbf{N} \right\}$$

v prostoru $\mathbb{L}_2(0, 2\pi)$ nazýváme *trigonometrickou bází.*

1.6.12 Příklad

Pokusme se na obecném otevřeném omezeném intervalu (α, β) zkonstruovat z ortonormální množiny

$$\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$$

ortonormální bázi. Pro normalizaci volíme standardní Grammovu-Schmidtovu proceduru 1.5.10 prováděnou při standardním funkčním skalárním součinu (1.15). Celý výpočet provedeme bez újmy na obecnosti pro speciální volbu $\alpha = -1$ a $\beta = 1$, tj. proces normalizace provádíme na faktorovém prostoru $\mathbb{L}_2(-1, 1)$. Za první funkci v nově vznikajícím ortogonálním souboru klademe $\omega_0 = 1$ a druhou podle Grammova-Schmidtova schématu hledáme ve tvaru $\omega_1(x) = x + a$. Podmínka ortogonality pak vede na rovnost

$$\langle \omega_0 | \omega_1 \rangle = \int_{-1}^{1} (x + a)\,\mathrm{d}x = 2a = 0.$$

Proto $\omega_1(x) = x$. Dále uvažujeme $\omega_2(x) = x^2 + bx + c$. Dvě podmínky ortogonality tentokráte vedou na dvě rovnosti

$$\langle \omega_0 | \omega_2 \rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 + bx + c)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} + 2c = 0.$$

$$\langle \omega_1 | \omega_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x(x^2 + bx + c)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}b = 0.$$

Odtud $b = 0$ a $c = -\frac{1}{3}$. Proto $\omega_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$. Analogickým postupem bychom ze systému funkcí $\omega_3(x) = x^3 + dx^2 + ex + f$ vybrali díky třem podmínkám ortogonality

$$\langle \omega_0 | \omega_3 \rangle = \langle \omega_1 | \omega_3 \rangle = \langle \omega_2 | \omega_3 \rangle = 0$$

funkci $\omega_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$. Naznačený postup tudíž vede k přímé konstrukci ortogonální báze v prostoru $\mathbb{L}_2(-1, 1)$. Její normalizaci provedeme snadno. Jelikož

$$\|\omega_0\|^2 = \int_{-1}^{1} \omega_0^2(x)\,\mathrm{d}x = 2,$$

je prvním normovaným vektorem hledané ortonormální báze funkce $\mathtt{L}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Stejnou metodou snadno zjišťujeme, že další polynomy ortonormální báze jsou tvaru

$$\mathtt{L}_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad \mathtt{L}_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}}\frac{1}{2}(3x^2-1), \quad \mathtt{L}_3(x) = \sqrt{\frac{7}{2}}\frac{1}{2}(5x^3-3x), \quad \ldots .$$

Ačkoliv je tato metoda úplná a vede postupně k nalezení celé ortonormální báze ve faktorovém prostoru $\mathbb{L}_2(-1,1)$, je její praktické provedení poněkud zdlouhavé. Nabídneme proto schůdnější variantu, jak takovou bázi sestrojit.

1.6.13 Příklad – Legendreovy polynomy

Zachovejme značení z předešlého příkladu a uvažme, že každá z funkcí $\omega_n(x)$, $n \in \mathbf{N}$ je polynomem řádu n. Má proto smysl předpokládat, že existuje polynom $\mathtt{Y}(x)$ stupně $\deg(\mathtt{Y}) = 2n$ tak, že

$$\omega_n(x) = \frac{\mathtt{d}^n}{\mathtt{d}x^n}\mathtt{Y}(x) = \mathtt{Y}^{(n)}(x).$$

Označme $\wp(x)$ libovolný polynom stupně $\deg(\wp) = m < n$ menšího než n. Pak po násobné aplikaci metody per partes platí

$$\begin{aligned}\langle\omega_n|\wp\rangle &= \int_{-1}^{1}\omega_n(x)\wp(x)\,\mathtt{d}x = \int_{-1}^{1}\mathtt{Y}^{(n)}(x)\wp(x)\,\mathtt{d}x = \Big[\wp(x)\mathtt{Y}^{(n-1)}(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\wp'(x)\mathtt{Y}^{(n-1)}(x)\,\mathtt{d}x = \\ &= \Big[\wp(x)\mathtt{Y}^{(n-1)}(x) - \wp'(x)\mathtt{Y}^{(n-2)}(x)\Big]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\wp''(x)\mathtt{Y}^{(n-2)}(x)\,\mathtt{d}x = \ldots = \\ &= \Big[\wp(x)\mathtt{Y}^{(n-1)}(x) - \wp'(x)\mathtt{Y}^{(n-2)}(x) + \ldots + (-1)^n\wp^{(n-1)}(x)\mathtt{Y}(x)\Big]_{-1}^{1}.\end{aligned}$$

Má-li získaný výraz být nulový, což je požadováno z důvodů ortogonality $\langle\omega_n|\omega_m\rangle = 0$ pro všechna $m < n$, je třeba docílit nulovosti výrazu

$$\Big[\wp(x)\mathtt{Y}^{(n-1)}(x) - \wp'(x)\mathtt{Y}^{(n-2)}(x) + \ldots + (-1)^n\wp^{(n-1)}(x)\mathtt{Y}(x)\Big]_{-1}^{1} = 0$$

vhodnou volnou polynomu $\mathtt{Y}(x)$. Pro nulovost výše uvedeného výrazu postačí, aby čísla $x = -1$ i $x = 1$ byla $n-$násobným kořenem polynomu $\mathtt{Y}(x)$. Proto tedy položme $\mathtt{Y}(x) = (x-1)^n(x+1)^n$. Odtud

$$\omega_n(x) = \frac{\mathtt{d}^n}{\mathtt{d}x^n}\left((x^2-1)^n\right).$$

Nyní zbývá tyto polynomy normalizovat. Protože $\frac{\mathtt{d}^n}{\mathtt{d}x^n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}x^{2i}$, dostáváme snadno, že

$$\begin{aligned}\big\|\omega_n(x)\big\|^2 &= \int_{-1}^{1}\mathtt{Y}^{(n)}(x)\mathtt{Y}^{(n)}(x)\,\mathtt{d}x = \Big[\mathtt{Y}^{(n)}(x)\mathtt{Y}^{(n-1)}(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\mathtt{Y}^{(n+1)}(x)\mathtt{Y}^{(n-1)}(x)\,\mathtt{d}x = \\ &= \Big[\mathtt{Y}^{(n)}(x)\mathtt{Y}^{(n-1)}(x) - \mathtt{Y}^{(n+1)}(x)\mathtt{Y}^{(n-2)}(x) - \ldots + (-1)^{n+1}\mathtt{Y}^{(2n-1)}(x)\mathtt{Y}(x)\Big]_{-1}^{1} + (-1)^n\int_{-1}^{1}\mathtt{Y}^{(2n)}(x)\mathtt{Y}(x)\,\mathtt{d}x = \\ &= (-1)^n\int_{-1}^{1}\mathtt{Y}^{(2n)}(x)\mathtt{Y}(x)\,\mathtt{d}x = (-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,\mathtt{d}x = (2n)!\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,\mathtt{d}x = \left|\begin{array}{c} x = \sin(t) \\ \mathtt{d}x = \cos(t)\,\mathtt{d}t\end{array}\right| = \\ &= 2(2n)!\int_{0}^{\pi/2}\cos^{2n+1}(x)\,\mathtt{d}x = 2(2n)!\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2}{2n+1}\big[(2n)!!\big]^2.\end{aligned}$$

Normalizovaný tvar zkoumaných polynomů má tedy podobu

$$\mathtt{L}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{(2n)!!}\frac{\mathtt{d}^n}{\mathtt{d}x^n}\left((x^2-1)^n\right). \tag{1.22}$$

Jejich nenormalizovaný tvar je vyobrazen níže.

Obrázek 1.1
Nenormalizované Legendreovy polynomy $\wp_n(x) = \frac{\mathrm{L}_n(x)}{\sqrt{2n-1}}$.

1.6.14 Definice

Polynomy $\mathrm{L}_n(x)$ z rovnice (1.22) nazýváme *Legendreovými polynomy* a rovnici (1.22) *Rodriguesovou formulí* pro Legendreovy polynomy.

1.6.15 Příklad – Legendreova diferenciální rovnice

Pokusme se nyní odvodit diferenciální rovnici, jíž vyhovují Legendreovy polynomy. Vycházejme z rovnosti

$$\mathtt{Y}(x) = (x-1)^n(x+1)^n$$

a derivujme ji podle proměnné x. Po drobné úpravě obdržíme rovnici

$$\mathtt{Y}'(x^2-1) = 2nx\mathtt{Y}.$$

Derivujme ji dále $(n+1)$kráte podle x. Dostáváme

$$\sum_{i=0}^{n+1} \begin{pmatrix} n+1 \\ i \end{pmatrix} \mathtt{Y}^{(n+2+i)}(x^2-1)^{(i)} = 2n \sum_{i=0}^{n+1} \begin{pmatrix} n+1 \\ i \end{pmatrix} x^{(i)}\mathtt{Y}^{(n+1-i)}$$

a po dalších úpravách

$$\mathtt{Y}^{(n+2)} + 2(n+1)x\mathtt{Y}^{(n+1)} + n(n+1)\mathtt{Y}^{(n)} = 2n\left(x\mathtt{Y}^{(n+1)} + (n+1)\mathtt{Y}^{(n)}\right),$$

čili

$$(x^2-1)\mathtt{Y}^{(n+2)} + 2x\mathtt{Y}^{(n+1)} = n(n+1)\mathtt{Y}^{(n)}.$$

Ze vztahu (1.22) pak odtud získáváme hledanou diferenciální rovnici

$$(x^2-1)\mathrm{L}''(x) + 2x\mathrm{L}'(x) = n(n+1)\mathrm{L}(x).$$

1.6.16 Definice

Diferenciální rovnici

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0 \tag{1.23}$$

nazýváme *Legendreovou diferenciální rovnicí.*

1.6.17 Poznámka

Rovnici (1.23) lze také přepsat do tvaru $\left((x^2-1)y'\right)' - n(n+1)y = 0$.

1.6.18 Poznámka

Další z bází prostoru $\mathbb{L}_2(G)$, která může být standardním ortonormalizačním procesem převedena na bázi ortonormální, je báze

$$\left(\mathsf{e}^{-\frac{x}{2}}, x\mathsf{e}^{-\frac{x}{2}}, x^2\mathsf{e}^{-\frac{x}{2}}, x^3\mathsf{e}^{-\frac{x}{2}}, \ldots\right).$$

Tentokrát ale klademe za oblast G interval $G = (0, +\infty)$. Skalární součiny mezi funkcemi tvaru $x^n\mathsf{e}^{-\frac{x}{2}}$ budou mít podobu $\int_0^\infty x^{n+m}\mathsf{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Proto je úloha normalizovat výše uvedenou množinu ekvivalentní úloze normalizovat množinu $\left\{1, x, x^2, x^3, \ldots,\right\}$ vzhledem ke skalárnímu součinu

$$\langle f|g\rangle_{\mathsf{e}^{-x}} := \int_0^\infty f(x)g(x)\mathsf{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \tag{1.24}$$

s Laguerreovou vahou. Polynomy ortogonální vzhledem k tomuto skalárnímu součinu budeme nazývat Lauerreovými polynomy.

1.6.19 Příklad – Laguerreovy polynomy

Způsobů, jak zavést Laguerreovy polynomy, je více. Zřejmě nejobvyklejším je zavedení pomocí diferenciálního výrazu

$$\widetilde{\mathrm{L}_n}(x)\mathrm{e}^{-x} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n\mathrm{e}^{-x}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{1.25}$$

nazývaného (podobně jako u Legendreových plynomů) Rodriguesovou formulí. Pomocí Leibnizovy formule pro derivování součinu dostaneme explicitní výraz Laguerreových polynomů ve tvaru

$$\widetilde{\mathrm{L}_n}(x)\mathrm{e}^{-x} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{(k)}(\mathrm{e}^{-x})^{(n-k)} = \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k},$$

a tedy

$$\widetilde{\mathrm{L}_n}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{\big(n(n-1)\dots(n-k+1)\big)^2}{k!}x^{n-k},$$

což reprezentuje zjevně polynom stupně n. Snadno ukážeme, že se jedná o ortogonální polynomy při skalárním součinu s vahou e^{-x}, neboť platí, že

$$\left\langle x^k|\widetilde{\mathrm{L}_n}(x)\right\rangle_{\mathrm{e}^{-x}} = 0 \quad (k < n).$$

To prokážeme následujícím výpočtem. Zjevně

$$\left\langle x^k|\widetilde{\mathrm{L}_n}(x)\right\rangle_{\mathrm{e}^{-x}} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^k\widetilde{\mathrm{L}_n}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x^k\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x$$

a násobným použitím integrace per partes pak

$$\left\langle x^k|\widetilde{\mathrm{L}_n}(x)\right\rangle_{\mathrm{e}^{-x}} = \underbrace{\left[x^k\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(x^n\mathrm{e}^{-x}\right)\right]_0^\infty}_{=0} - k\int_0^\infty x^{k-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^n\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = \dots =$$

$$= (-1)^k k!\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(x^n\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = (-1)^k k!\left[\frac{\mathrm{d}^{n-k-1}}{\mathrm{d}x^{n-k-1}}(x^n\mathrm{e}^{-x})\right]_0^\infty = 0. \tag{1.26}$$

Poslední rovnost je skutečně zaručena právě pro všechna $k < n$, neboť vždy po provedení $(n-k-1)$ derivací bude stupeň polynomu před e^{-x} větší nebo roven jedné. Tedy Laguerreovy polynomy jsou skutečně ortogonální. Zbývá spočíst normu. Analogickými úpravami dostáváme

$$\left\|\widetilde{\mathrm{L}_n}(x)\right\|^2 = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\widetilde{\mathrm{L}_n}^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\widetilde{\mathrm{L}_n}(x)(-1)^n x^n\mathrm{d}x = (-1)^{2n}n!\int_0^\infty x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = (n!)^2.$$

Normalizovaný tvar vyšetřovaných polynomů je tedy

$$\mathrm{L}_n(x) = \frac{1}{\left\|\widetilde{\mathrm{L}_n}(x)\right\|}\widetilde{\mathrm{L}_n}(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n\mathrm{e}^{-x}\right). \tag{1.27}$$

Obrázek 1.2
Normalizované Laguerreovy polynomy $\mathrm{L}_n(x)$.

1.6.20 Definice

Polynomy $\mathrm{L}_n(x)$ z rovnice (1.27) nazýváme *Laguerreovými polynomy* a rovnici (1.27) *Rodriguesovou formulí* pro Laguerreovy polynomy.

1.6.21 Příklad – Laguerreova diferenciální rovnice

Jiný možný způsob zavedení ortogonálních polynomů je za pomoci rekurentního vztahu. Pro Laguerreovy polynomy má tento rekurentní vztah podle [8] podobu

$$\mathrm{L}_{n+1}(x) - (2n+1-x)\mathrm{L}_n(x) + n^2\mathrm{L}_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{1.28}$$

Ekvivalence zavedení Laguerreových polynomů pomocí Rodriguesovy formule či pomocí tohoto rekurentního vztahu je prověřena například v [8]. Důležitý vztah obdržíme také derivováním rovnice (1.25), a sice

$$\mathrm{L}_{n+1}(x)\mathrm{e}^{-x} = \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}) = x\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(x^n\mathrm{e}^{-x}) + (n+1)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-x}) = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\mathrm{L}_n(x)\mathrm{e}^{-x}\big) + (n+1)\mathrm{L}_n(x)\mathrm{e}^{-x},$$

což přenásobením rovnice funkcí e^x převedeme na

$$\mathrm{L}_{n+1}(x) = x\big(\mathrm{L}'_n(x) - \mathrm{L}_n(x)\big) + (n+1)\mathrm{L}_n(x).$$

Nyní kombinováním posledního vztahu s rekuretním vzorcem (1.28) obdržíme rovnici

$$x\mathrm{L}'_n(x) = n\mathrm{L}_n(x) - n^2\mathrm{L}_{n-1}(x). \tag{1.29}$$

Sečteme-li dále rovnice (1.29) vyjádřené pro n a $n+1$, získáme

$$x\big(\mathrm{L}'_{n+1}(x) - (n+1)\mathrm{L}'_n(x)\big) = (n+1)\big(\mathrm{L}_{n+1}(x) - (2n+1)\mathrm{L}_n(x) + n^2\mathrm{L}_{n-1}(x)\big)$$

a po dosazení zderivovaného rekurentního vztahu (1.28) odtud plyne

$$\mathrm{L}'_n(x) = n\mathrm{L}'_{n-1}(x) - n\mathrm{L}_{n-1}(x).$$

Ještě si přepíšeme tuto rovnici pro $n+1$:

$$\mathrm{L}'_{n+1}(x) = (n+1)\mathrm{L}'_n(x) - (n+1)\mathrm{L}_n(x).$$

Zbýva zderivovat vztah (1.29)

$$n\mathrm{L}'_n(x) - x\mathrm{L}''_n(x) - \mathrm{L}'_n(x) = n^2\mathrm{L}'_{n-1}(x)$$

a sečtením posledních dvou uvedených rovnic spolu se zderivovaným rekurentním vztahem

$$\mathrm{L}'_{n+1}(x) - (2n+1-x)\mathrm{L}'_n(x) + \mathrm{L}_n(x) + n^2\mathrm{L}'_{n-1}(x) = 0$$

vede na diferenciální rovnici

$$x\mathrm{L}''_n(x) + (1-x)\mathrm{L}'_n(x) + n\mathrm{L}_n(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

jejímž řešením jsou právě Laguerreovy polynomy.

1.6.22 Definice

Diferenciální rovnici

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \tag{1.30}$$

nazýváme *Laguerreovou diferenciální rovnicí.*

1.6.23 Poznámka

Rovnici (1.30) lze také přepsat do tvaru $xy'' + (1-x)y' = \lambda y$, což je úloha na hledání vlastních hodnot diferenciálního operátoru

$$\widehat{L} = x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + (1-x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}.$$

1.6.24 Poznámka

Bází v prostoru $\mathbb{L}_2(G)$, která může být podobně jako v předešlých případech ortonormalizována, je báze

$$\big(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, x^3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \dots\big).$$

Tentokrát je voleno $G = \mathbf{R}$. Skalární součiny mezi funkcemi tvaru $x^n\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ budou mít podobu $\int_0^\infty x^{n+m}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Proto je úloha normalizovat výše uvedenou množinu ekvivalentní úloze normalizovat množinu $\{1, x, x^2, x^3, \dots,\}$ vzhledem ke skalárnímu součinu

$$\langle f|g\rangle_{\mathrm{e}^{-x^2}} := \int_{\mathbf{R}} f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \tag{1.31}$$

s Hermiteovou vahou. Polynomy ortogonální vzhledem k tomuto skalárnímu součinu budeme nazývat Hermiteovými polynomy.

1.6.25 Příklad – Hermiteovy polynomy

Zřejmě nejsnadnější zavedení Hermiteových polynomů je pomocí diferenciálního výrazu

$$\frac{\mathsf{d}^n}{\mathsf{d}x^n}\left(\mathsf{e}^{-x^2}\right) = (-1)^n \mathsf{e}^{-x^2}\widetilde{\mathtt{H}}_n(x), \quad n \in \mathbf{N}_0. \tag{1.32}$$

Čtenář sám se snadno přesvědčí, že se jedná skutečně o polynom $n-$tého stupně s nejvyšším koeficientem rovným 2^n. K tomu lze užít derivaci předchozího vztahu pro $n+1$

$$(-1)^{n+1}\mathsf{e}^{-x^2}\widetilde{\mathtt{H}}_{n+1}(x) = (-1)^n \mathsf{e}^{-x^2}\Big(-2x\widetilde{\mathtt{H}}_n(x) + \widetilde{\mathtt{H}}_n'(x)\Big). \tag{1.33}$$

Polynomy $\widetilde{\mathtt{H}}_n(x)$ se nazývají Hermiteovy polynomy. Snadno například spočítáme $\widetilde{\mathtt{H}}_0(x) = 1$, $\widetilde{\mathtt{H}}_1(x) = 2x$ a $\widetilde{\mathtt{H}}_2(x) = 4x^2-2$. Z rekurentního vztahu (1.36) indukcí vyplývá, že $\widetilde{\mathtt{H}}_n(x)$ je sudou, resp. lichou funkcí, a to podle toho, zda n je sudé či liché.

Před samotným vyšetřením ortogonality polynomů $\widetilde{\mathtt{H}}_n$ si nejprve uvědomíme, že pro libovolný polynom $\wp(x)$ má výraz

$$\wp(x)\frac{\mathsf{d}^n}{\mathsf{d}x^n}\left(\mathsf{e}^{-x^2}\right)$$

pro $x \to \pm\infty$ nulovou limitu pro všechna n. Proto pro $0 \leqslant m \leqslant n$ dostáváme s využitím integrace per partes a vztahů (1.32) a (1.37) sadu rovností

$$\begin{aligned}\big\langle\widetilde{\mathtt{H}}_m(x)|\widetilde{\mathtt{H}}_n(x)\big\rangle_{\mathsf{e}^{-x^2}} &= \int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\mathtt{H}}_m(x)\widetilde{\mathtt{H}}_n(x)\mathsf{e}^{-x^2}\mathsf{d}x = (-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\mathtt{H}}_m(x)\frac{\mathsf{d}^n\mathsf{e}^{-x^2}}{\mathsf{d}x^n}\mathsf{d}x = \Big|\text{per-partes} \,\&\, (1.37)\Big| = \\ &= (-1)^{n-1}2m\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\mathtt{H}}_{m-1}(x)\frac{\mathsf{d}^{n-1}\mathsf{e}^{-x^2}}{\mathsf{d}x^{n-1}}\mathsf{d}x = \ldots = (-1)^{n-m}2^m m!\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\mathtt{H}}_0(x)\frac{\mathsf{d}^{n-m}\mathsf{e}^{-x^2}}{\mathsf{d}x^{n-m}}\mathsf{d}x = \\ &= \Big|\widetilde{\mathtt{H}}_0(x) = 1\Big| = (-1)^{n-m}2^m m!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathsf{d}^{n-m}\mathsf{e}^{-x^2}}{\mathsf{d}x^{n-m}}\mathsf{d}x.\end{aligned}$$

Tedy pro $n > m$ dostáváme, že

$$\big\langle\widetilde{\mathtt{H}}_m(x)|\widetilde{\mathtt{H}}_n(x)\big\rangle_{\mathsf{e}^{-x^2}} = \left[\frac{\mathsf{d}^{n-m-1}\mathsf{e}^{-x^2}}{\mathsf{d}x^{n-m-1}}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0, \tag{1.34}$$

odkud plyne ortogonalita polynomů $\widetilde{\mathtt{H}}_n(x)$. A pro $n = m$ spočítáme normu $\widetilde{\mathtt{H}}_n(x)$

$$\begin{aligned}\big\langle\widetilde{\mathtt{H}}_n(x)|\widetilde{\mathtt{H}}_n(x)\big\rangle_{\mathsf{e}^{-x^2}} = \big\langle\widetilde{\mathtt{H}}_m(x)|\widetilde{\mathtt{H}}_n(x)\big\rangle_{\mathsf{e}^{-x^2}}\Big|_{n=m} &= (-1)^{n-m}2^m m!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathsf{d}^{n-m}\mathsf{e}^{-x^2}}{\mathsf{d}x^{n-m}}\mathsf{d}x\Big|_{n=m} = \\ &= 2^n n!\int_{-\infty}^{\infty}\mathsf{e}^{-x^2}\mathsf{d}x = 2^n\, n!\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Normalizovaný tvar vyšetřovaných polynomů je tedy

$$\mathtt{H}_n(x) = \frac{1}{\big\|\widetilde{\mathtt{H}}_n(x)\big\|}\widetilde{\mathtt{H}}_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n\, n!\sqrt{\pi}}\,\mathsf{e}^{x^2}\frac{\mathsf{d}^n}{\mathsf{d}x^n}\left(\mathsf{e}^{-x^2}\right). \tag{1.35}$$

Grafickou podobu Hermiteových polynomů přibližuje následující obrázek. K jejich vyobrazení byla z důvodu větší názornosti použita škálovaná varianta $\wp_n(x) = (n+1)\mathtt{H}_n(x)$.

Obrázek 1.3
Nenormalizované Hermiteovy polynomy $\wp_n(x) = (n+1)\mathtt{H}_n(x)$.

1.6.26 Definice

Polynomy $\mathtt{H}_n(x)$ z rovnice (1.35) nazýváme *Hermiteovými polynomy* a rovnici (1.32) *Rodriguesovou formulí* pro Hermiteovy polynomy.

1.6.27 Příklad – Hermiteova diferenciální rovnice

Hermiteovy polynomy je možno získat také metodou tzv. *vytvořující funkce.* Tak byl získán i následující rekurentní vztah (viz [8])

$$\widetilde{\mathtt{H}}_{n+1}(x) - 2x\widetilde{\mathtt{H}}_n(x) + 2n\widetilde{\mathtt{H}}_{n-1}(x) = 0. \tag{1.36}$$

Z rovnice (1.33) plyne, že $\widetilde{\mathtt{H}}_{n+1} - 2x\widetilde{\mathtt{H}}_n + \widetilde{\mathtt{H}}'_n = 0$. Zkombinováním tohoto vztahu a rekurentní formule (1.36) dostáváme, že pro $n \in \mathbf{N}$ platí

$$\widetilde{\mathtt{H}}'_n(x) = 2n\widetilde{\mathtt{H}}_{n-1}(x). \tag{1.37}$$

A konečně, dosadíme-li tento vztah do rekurentního vztahu pro Hermiteovy polynomy, získáme diferenciální rovnici, jejímž řešením jsou Hermiteovy polynomy. Jedná se o rovnici

$$\widetilde{\mathtt{H}}''_n(x) - 2x\widetilde{\mathtt{H}}'_n(x) + 2n\widetilde{\mathtt{H}}_n(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.38}$$

1.6.28 Definice

Diferenciální rovnici

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \tag{1.39}$$

nazýváme *Hermiteovou diferenciální rovnicí.*

1.6.29 Poznámka

Rovnici (1.39) lze také přepsat do tvaru $-\frac{1}{2}y'' + xy' = \lambda y$, což představuje úlohu na hledání vlastních hodnot diferenciálního operátoru

$$\widehat{L} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}.$$

1.7 Hermiteovské operátory na Hilbertových prostorech

Budeme se nyní zamýšlet nad obecnými vlastnostmi diferenciálních operátorů. Jelikož naše operátory vzejdou z úloh na řešení parciálních diferenciálních rovnic, budou příslušnými prostory, na nichž probírané operátory operují, prostory funkcí (obecně více proměnných), zejména pak Hilbertovy prostory funkcí. Proto budeme prvky těchto prostorů nazývat funkcemi, ačkoliv obecně by se jednalo o vektory.

1.7.1 Definice

Nechť je dán Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ funkcí nad tělesem komplexních čísel $\mathbf{C}$. Řekneme, že operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ je *lineární na* $\mathcal{H}$, pokud pro všechny funkce $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ a každé komplexní číslo $\vec{c} \in \mathbf{C}$ platí rovnost $\widehat{L}(f + cg) = \widehat{L}(f) + c\widehat{L}(g)$.

1.7.2 Věta

Nechť je dán Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ funkcí nad tělesem komplexních čísel $\mathbf{C}$ a lineární operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$. Nechť $o(\vec{x})$ je nulový prvek prostoru $\mathcal{H}$, tj. nulová funkce. Pak platí $\widehat{L}(o) = o(\vec{x})$, tj. lineární operátor zobrazuje nulovou funkci zásadně na sebe.

Důkaz:

- zvolme $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ libovolně
- z linearity operátoru $\widehat{L}$ plyne, že $\widehat{L}(o) = \widehat{L}(0 \cdot f) = 0 \cdot \widehat{L}(f) = o(\vec{x})$, což bylo dokázat

1.7.3 Poznámka

V dalším textu již nebudeme nulovou funkci z Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ značit přesným symbolem $o(\vec{x})$, ale pouze nulou. Tedy $0 \in \mathcal{H}$ je nulový prvek vektorového prostoru $\mathcal{H}$.

1.7.4 Definice

Nechť je dán Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ funkcí. Řekneme, že operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ je *nulový na* $\mathcal{H}$, pokud pro každou funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí, že $\widehat{L}(f) = 0$. Nulový operátor budeme označovat symbolem $\widehat{O}$.

1.7.5 Definice

Nechť je dán lineární operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ definovaný na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$, na němž je zaveden skalární součin $\langle .|. \rangle$. *Kvadratickou formou* indukovanou operátorem $\widehat{L}$ rozumíme zobrazení $\langle \widehat{L}(.)|. \rangle : \mathcal{H} \mapsto \mathbf{C}$, které každé funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ přiřazuje komplexní číslo $\langle \widehat{L}(f)|f \rangle$. *Bilineární formou* indukovanou operátorem $\widehat{L}$ rozumíme zobrazení $\langle \widehat{L}(.)|. \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto \mathbf{C}$, které funkcím $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ přiřazuje komplexní číslo $\langle \widehat{L}(f)|g \rangle$. Jsou-li kvadratická i bilineární forma indukovány týmž lineárním operátorem, říkáme, že jsou *asociované* nebo *přidružené.*

1.7.6 Poznámka

Upozorňujeme čtenáře, že operátor $\widehat{L}$ bude v dalším textu převážně reprezentovám parciálním diferenciálním operátorem působícím na Hilbertově prostoru faktorových funkcí, např. $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2(G)$, kde G je libovolná oblast v $\mathbf{E}^r$.

1.7.7 Poznámka

Jelikož jsou jak kvadratická i bilineární forma definovány pomocí skalárního součinu, lze pro ně odvodit celou řadu obecných vlastností. Doporučujeme čtenáři, aby některé vlastnosti sám detekoval.

1.7.8 Definice

Nechť je dán lineární operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ definovaný na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Řekneme, že operátor $\widehat{L}$ je *hermiteovský,* pokud pro všechny funkce $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí rovnost

$$\big\langle \widehat{L}(f)|g \big\rangle = \big\langle f|\widehat{L}(g) \big\rangle.$$

1.7.9 Věta

Nechť je dán hermiteovský operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ definovaný na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Pak pro každou konvergentní (ve smyslu konvergence podle normy) posloupnost funkcí $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ z prostoru $\mathcal{H}$, která konverguje podle normy k funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$, a pro každou funkci $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \big\langle \widehat{L}(f_n)|g \big\rangle = \big\langle \widehat{L}(f)|g \big\rangle.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- při použití věty 1.4.17 snadno prokážeme, že

$$\lim_{n\to\infty} \big\langle \widehat{L}(f_n)|g \big\rangle = \lim_{n\to\infty} \big\langle f_n|\widehat{L}(g) \big\rangle = \big\langle f|\widehat{L}(g) \big\rangle = \big\langle \widehat{L}(f)|g \big\rangle$$

1.7.10 Věta

Nechť je dán hermiteovský operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ definovaný na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Pak pro každou konvergentní (ve smyslu konvergence podle normy) řadu funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ z prostoru $\mathcal{H}$, která konverguje podle normy k součtu $s(\vec{x}) \in \mathcal{H}$, a pro každou funkci $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big\langle \widehat{L}(f_n)|g \big\rangle = \big\langle \widehat{L}(s)|g \big\rangle.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- při použití věty 1.4.19 snadno prokážeme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big\langle \widehat{L}(f_n)|g \big\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \big\langle f_n|\widehat{L}(g) \big\rangle = \big\langle s|\widehat{L}(g) \big\rangle = \big\langle \widehat{L}(s)|g \big\rangle$$

1.7.11 Poznámka

Pouze upozorňujeme čtenáře, že věta 1.7.9 netvrdí, že pro libovolný hermiteovský operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ definovaný na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ a každou konvergentní posloupnost funkcí $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ z prostoru $\mathcal{H}$, která konverguje podle normy k funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$, platí rovnost $\lim_{n\to\infty} \widehat{L}(f_n) = \widehat{L}(f)$. Toto bude obecně diskutováno v kapitole 1.8. Podobně také věta 1.7.10 obecně negarantuje implikaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}) = s(\vec{x}) \quad \wedge \quad \widehat{L} \text{ je hermiteovský} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{L}(f_n) = \widehat{L}(s).$$

1.7.12 Definice

Nechť jsou dány lineární operátory $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ a $\widehat{K} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ definované na stejném Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Řekneme, že operátory $\widehat{L}$ a $\widehat{K}$ *komutují*, pokud pro všechny funkce $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí rovnost $\widehat{K}\big(\widehat{L}(f)\big) = \widehat{L}\big(\widehat{K}(f)\big)$.

1.7.13 Věta

Nechť jsou dány lineární operátory $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ a $\widehat{K} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ hermiteovské na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Nechť $\widehat{L}$ a $\widehat{K}$ komutují na $\mathcal{H}$. Pak operátory $\widehat{L}\widehat{K}$ a $\widehat{K}\widehat{L}$ jsou rovněž hermiteovské na $\mathcal{H}$.

Důkaz:

- snahou je dokázat, že pro všechny funkce $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí rovnost $\big\langle \widehat{L}\widehat{K}(f)|g\big\rangle = \big\langle f|\widehat{L}\widehat{K}(g)\big\rangle$
- vycházíme přitom z předpokladu, že operátory $\widehat{L}$ a $\widehat{K}$ komutují, tj. pro všechny funkce $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí rovnost $\widehat{K}\big(\widehat{L}(f)\big) = \widehat{L}\big(\widehat{K}(f)\big)$
- odtud
$$\big\langle \widehat{L}\widehat{K}(f)|g\big\rangle = \big\langle \widehat{K}\widehat{L}(f)|g\big\rangle = \big\langle \widehat{L}(f)|\widehat{K}(g)\big\rangle = \big\langle f|\widehat{L}\widehat{K}(g)\big\rangle$$
- analogicky se prokáže hermiticita operátoru $\widehat{K}\widehat{L}$

1.7.14 Příklad

Uvažme následující kvantové operátory. Operátor $z-$tové složky momentu hybnosti

$$\widehat{L}_z = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.40}$$

a operátor kvadrátu momentu hybnosti

$$\widehat{L^2} = -\hbar^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \operatorname{cotg}(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \equiv -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]. \tag{1.41}$$

Spočtěme pro ně komutační relaci

$$\widehat{L^2}\widehat{L} - \widehat{L}\widehat{L^2} = \mathrm{i}\hbar^3\left(\frac{\partial^3}{\partial\vartheta^2\partial\varphi} + \operatorname{cotg}(\vartheta)\frac{\partial^2}{\partial\vartheta\partial\varphi} + \frac{1}{\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^3}{\partial\varphi^3} - \frac{\partial^3}{\partial\varphi\partial\vartheta^2} - \operatorname{cotg}(\vartheta)\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\vartheta} - \frac{1}{\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^3}{\partial\varphi^3}\right) = 0.$$

Operátory (1.40) a (1.41) tedy podle definice 1.7.12 komutují.

1.7.15 Definice

Nechť je dán hermiteovský operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ definovaný na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Řekneme, že operátor $\widehat{L}$ je *pozitivně definitní*, pokud pro každou nenulovou funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí $\big\langle \widehat{L}(f)|f\big\rangle > 0$. Řekneme, že operátor $\widehat{L}$ je *pozitivně semidefinitní*, pokud pro každou funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí $\big\langle \widehat{L}(f)|f\big\rangle \geqslant 0$ a existuje nenulová funkce $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ tak, že $\big\langle \widehat{L}(g)|g\big\rangle = 0$. Řekneme, že operátor $\widehat{L}$ je *negativně definitní*, pokud pro každou nenulovou funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí $\big\langle \widehat{L}(f)|f\big\rangle < 0$. Řekneme, že operátor $\widehat{L}$ je *negativně semidefinitní*, pokud pro každou funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí $\big\langle \widehat{L}(f)|f\big\rangle \leqslant 0$ a existuje nenulová funkce $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ tak, že $\big\langle \widehat{L}(g)|g\big\rangle = 0$. Řekneme, že operátor $\widehat{L}$ je *indefinitní*, existují-li funkce $f(\vec{x})$, $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ tak, že $\big\langle \widehat{L}(f)|f\big\rangle > 0$ a zároveň $\big\langle \widehat{L}(g)|g\big\rangle < 0$.

1.7.16 Definice

Nechť je zadán lineární operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Rovnici

$$\widehat{L}(f) = \lambda \cdot f(\vec{x}) \tag{1.42}$$

budeme nazývat *úlohou na vlastní hodnoty a vlastní funkce* operátoru $\widehat{L}$. Přitom každé takové $\lambda_k \in \mathbf{C}$, pro něž má rovnice (1.42) nenulové řešení $f_k(\vec{x}) \in \mathcal{H}$, nazýváme *vlastní hodnotou* operátoru $\widehat{L}$ a příslušnou nenulovou funkci $f_k(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ *vlastní funkcí*. *Spektrem operátoru* $\widehat{L}$ pak rozumíme množinu

$$\sigma\big(\widehat{L}\big) := \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\}$$

všech jeho vlastních hodnot.

1.7.17 Věta

Lineární operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ je hermiteovský právě tehdy, když kvadratická forma $\big\langle \widehat{L}(f) \,|\, f \big\rangle$ nabývá pouze reálných hodnot.

Důkaz:

- v důkazu užijeme následujících pomocných výpočtů

$$\langle \widehat{L}(f + \mathtt{i}g) \,|\, f + \mathtt{i}g \rangle = \langle \widehat{L}(f) \,|\, f \rangle + \langle \widehat{L}(g) \,|\, g \rangle + \mathtt{i}\, \langle \widehat{L}(f) \,|\, g \rangle - \mathtt{i}\, \langle \widehat{L}(g) \,|\, f \rangle$$

$$\langle \widehat{L}(f + g) \,|\, f + g \rangle = \langle \widehat{L}(f) \,|\, f \rangle + \langle \widehat{L}(g) \,|\, g \rangle + \langle \widehat{L}(f) \,|\, g \rangle + \langle \widehat{L}(g) \,|\, f \rangle$$

- nejprve prokážeme první implikaci
- snadno dokážeme (z definice 1.7.8 a z axiomů skalárního součinu) rovnost

$$\big\langle \widehat{L}(f) \,|\, f \big\rangle = \big\langle f \,|\, \widehat{L}(f) \big\rangle = \big\langle \widehat{L}(f) \,|\, f \big\rangle^{\star}$$

- forma $\langle \widehat{L}(f) \,|\, f \rangle$ má tudíž reálnou hodnotu
- dokazujme druhou implikaci
- vyjdeme z faktu, že $\langle \widehat{L}(f) \,|\, f \rangle \in \mathbf{R}$
- pak platí

$$\mathrm{Re}\left[\langle \widehat{L}(g) \,|\, f \rangle - \langle \widehat{L}(f) \,|\, g \rangle\right] = \mathrm{Re}\frac{1}{\mathtt{i}}\left[\langle \widehat{L}(f + \mathtt{i}g) \,|\, f + \mathtt{i}g \rangle - \langle \widehat{L}(f) \,|\, f \rangle - \langle \widehat{L}(g) \,|\, g \rangle\right] = 0$$

- jelikož $\langle \widehat{L}(f + g) \,|\, f + g \rangle \in \mathbf{R}$, dostáváme podobně, že

$$\mathrm{Im}\left[\langle \widehat{L}(g) \,|\, f \rangle + \langle \widehat{L}(f) \,|\, g \rangle\right] = \mathrm{Im}\left[\langle \widehat{L}(f + g) \,|\, f + g \rangle - \langle \widehat{L}(f) \,|\, f \rangle - \langle \widehat{L}(g) \,|\, g \rangle\right] = 0$$

- pak ale

$$\langle \widehat{L}(f) \,|\, g \rangle = \mathrm{Re}\left[\langle \widehat{L}(f) \,|\, g \rangle\right] + \mathtt{i}\,\mathrm{Im}\left[\langle \widehat{L}(f) \,|\, g \rangle\right] = \mathrm{Re}\left[\langle \widehat{L}(g) \,|\, f \rangle\right] - \mathtt{i}\,\mathrm{Im}\left[\langle \widehat{L}(g) \,|\, f \rangle\right] = \\ = \langle \widehat{L}(g) \,|\, f \rangle^{\star} = \langle f \,|\, \widehat{L}(g) \rangle \quad (1.43)$$

1.7.18 Věta

Všechna vlastní čísla hermiteovského operátoru $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ definovaného na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ jsou reálná.

Důkaz:

- pro vlastní čísla a vlastní funkce (nenulové) platí rovnost $\widehat{L}(f) = \lambda f(\vec{x})$
- dále pro příslušné vlastní funkce platí sada rovností $\big\langle \widehat{L}(f) | f \big\rangle = \big\langle \lambda f | f \big\rangle = \lambda \big\langle f | f \big\rangle$
- odtud

$$\lambda = \frac{\big\langle \widehat{L}(f) | f \big\rangle}{\langle f | f \rangle} = \frac{\big\langle \widehat{L}(f) | f \big\rangle}{\| f \|^2}$$

- tedy λ je (využijeme-li hermitovskosti operátoru $\widehat{L}$ a tvrzení věty 1.7.17) podílem dvou reálných čísel (z nichž $\langle f | f \rangle$ je navíc kladné), a je tudíž rovněž reálným číslem

1.7.19 Věta

Všechna vlastní čísla pozitivně definitního operátoru $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ definovaného na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ jsou kladná.

Důkaz:

- pro vlastní čísla a vlastní funkce (nenulové) platí rovnost $\widehat{L}(f) = \lambda f(\vec{x})$
- jelikož pro všechny nenulové funkce z $\mathcal{H}$ platí z předpokladů věty, že $\big\langle \widehat{L}(f)|f \big\rangle > 0$, dostáváme odtud, že

$$\lambda \big\langle f|f \big\rangle = \big\langle \lambda f|f \big\rangle = \big\langle \widehat{L}(f)|f \big\rangle > 0$$

- pak ale

$$\lambda = \frac{\big\langle \widehat{L}(f)|f \big\rangle}{\langle f|f \rangle} > 0,$$

  neboť z definice skalárního součinu vyplývá, že pro nenulové funkce je $\langle f|f \rangle > 0$

1.7.20 Věta

Nechť $\mathcal{H}$ je Hilbertův prostor funkcí. Nechť $f(\vec{x})$ a $g(\vec{x})$ jsou vlastní funkce lineárního hermiteovského operátoru $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ příslušné různým vlastním číslům. Pak $f(\vec{x})$ a $g(\vec{x})$ jsou ortogonální, tj. $\langle f|g \rangle = 0$.

Důkaz:

- z předpokladů věty vyvozujeme, že $\widehat{L}(f) = \lambda f(\vec{x})$, $\widehat{L}(g) = \mu g(\vec{x})$, přičemž $\mu \neq \lambda$
- navíc také $\mu, \lambda \in \mathbf{R}$ podle věty 1.7.18
- dále $\big\langle \widehat{L}(f)|g \big\rangle = \lambda \big\langle f|g \big\rangle$ a zároveň $\big\langle \widehat{L}(f)|g \big\rangle = \big\langle f|\widehat{L}(g) \big\rangle = \mu \big\langle f|g \big\rangle$
- proto by mělo platit, že $\lambda \langle f|g \rangle = \mu \langle f|g \rangle$, což lze garantovat při nerovnosti $\mu \neq \lambda$ pouze kolmostí funkcí $f(\vec{x})$ a $g(\vec{x})$, kdy tedy $\langle f|g \rangle = 0$, nebo $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$ nebo $g(\vec{x}) = o(\vec{x})$, což ale podle definice vlastní funkce nastat nemůže
- proto tedy $\langle f|g \rangle = 0$

1.7.21 Věta

Nechť $\mathcal{H}$ je Hilbertův prostor funkcí. Nechť $f(\vec{x})$, resp. $g(\vec{x})$ jsou vlastní funkce lineárního operátoru $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ příslušné vlastním číslům λ_f, resp. λ_g. Pak platí

$$\Big\langle \widehat{L}(f)|\widehat{L}(g) \Big\rangle = \begin{cases} 0 & \ldots \quad \lambda_f \neq \lambda_g, \\ |\lambda_f|^2 \big\langle f|g \big\rangle & \ldots \quad \lambda_f = \lambda_g. \end{cases}$$

Důkaz:

- jsou-li vlastní čísla λ_f a λ_g různá, plyne rovnost $\big\langle \widehat{L}(f)|\widehat{L}(g) \big\rangle = 0$ přímo z věty 1.7.20, neboť

$$\big\langle \widehat{L}(f)|\widehat{L}(g) \big\rangle = \big\langle \lambda_f f|\lambda_g g \big\rangle = \lambda_f \lambda_g^\star \big\langle f|g \big\rangle = 0$$

- pokud $\lambda_f = \lambda_g$, pak

$$\big\langle \widehat{L}(f)|\widehat{L}(g) \big\rangle = \big\langle \lambda_f f|\lambda_f g \big\rangle = |\lambda_f|^2 \big\langle f|g \big\rangle$$

- tím je tvrzení věty prokázáno

1.7.22 Věta

Nechť je dán lineární operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ definovaný na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Nechť W_λ je množina všech vlastních funkcí operátoru $\widehat{L}$ příslušných témuž vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbf{C}$. Pak množina

$$\mathcal{V}_\lambda = W_\lambda \cup \{0\}$$

tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$.

<u>*Důkaz:*</u>

- nechť $\lambda \in \mathbf{C}$ je vlastní číslo lineárního operátoru $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$
- jelikož $\mathcal{V}_\lambda \subset \mathcal{H}$, postačí prokázat uzavřenost množiny $\mathcal{V}_\lambda$ vůči sčítaní a násobení číslem z tělesa $\mathbf{C}$
- nechť tedy $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{V}_\lambda$ a $c \in \mathbf{C}$ jsou zvoleny libovolně
- zjevně $\widehat{L}(f) = \lambda f(\vec{x})$ a $\widehat{L}(g) = \lambda g(\vec{x})$
- z linearity operátoru $\widehat{L}$ pak ale ihned plyne, že

  $$\widehat{L}(f + c\,g) = \widehat{L}(f) + c\widehat{L}(g) = \lambda f(\vec{x}) + c\lambda g(\vec{x}) = \lambda\big(f(\vec{x}) + c\,g(\vec{x})\big),$$

  odkud ihned vyplývá, že také funkce $f(\vec{x}) + cg(\vec{x})$ je vlastní funkcí operátoru $\widehat{L}$ příslušnou vlastnímu číslu λ, a tedy také patří do W_λ (tedy pokud není $f(\vec{x}) + c\,g(\vec{x})$ nulovou funkcí)
- platí tedy implikace

  $$f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{V}_\lambda \quad \wedge \quad c \in \mathbf{C} \quad \Longrightarrow \quad f(\vec{x}) + c\,g(\vec{x}) \in \mathcal{V}_\lambda$$
- vzhledem k tomu, že v prostoru $\mathcal{V}_\lambda$ existuje nulový prvek, uzavíráme důkaz tvrzením, že $\mathcal{V}_\lambda$ je vektorový prostor, tj. $\mathcal{V}_\lambda \subset\subset \mathcal{H}$

1.7.23 Definice

Nechť je dán lineární operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ definovaný na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Nechť $\mathcal{V}_\lambda$ je vektorový prostor popsaný ve větě 1.7.22. Pak číslo $\nu_\lambda = \dim(\mathcal{V}_\lambda)$, tj. dimenzi prostoru $\mathcal{V}_\lambda$, nazýváme *geometrickou násobností* vlastního čísla $\lambda \in \mathbf{C}$ operátoru $\widehat{L}$. Řekneme, že operátor $\widehat{L}$ je *nedegenerovaný,* je-li geometrická násobnost každého jeho vlastního čísla rovna jedné. Není-li operátor nedegenerovaný, nazveme jej *degenerovaným.* Je-li geometrická násobnost vlastního čísla λ rovna jedné, řekneme, že číslo λ je *prosté.*

1.7.24 Poznámka

Geometrická násobnost ν_λ vlastního čísla $\lambda \in \mathbf{C}$ je rovna počtu lineárně nezávislých vlastních funkcí $f_\lambda(\vec{x}) \in \mathcal{H}$, jež k němu příslušejí.

1.7.25 Definice

Řekneme, že lineární operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ má *čistě bodové spektrum,* jestliže množina jeho vlastních hodnot je spočetná, geometrická násobnost každého vlastního čísla je konečná a každou funkci Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vlastních funkcí operátoru $\widehat{L}$.

1.7.26 Věta

Má-li lineární operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ čistě bodové spektrum, pak v Hilbertově prostoru existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory operátoru $\widehat{L}$.

<u>*Důkaz:*</u>

- ke každému vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbf{C}$ existuje $\nu_\lambda \in \mathbf{N}$ vzájemně ortogonálních vlastních funkcí

  $$f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_{\nu_\lambda}(\vec{x}) \in \mathcal{H}$$

- pro jiné vlastní číslo $\mu \in \mathbf{C}$ existuje ν_μ ortogonálních vlastních funkcí $g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), \dots, g_{\nu_\mu}(\vec{x}) \in \mathcal{H}$, které jsou navíc ortogonální ke všem funkcím $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_{\nu_\lambda(\vec{x})}$
- tímto způsobem lze v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ nalézt spočetně mnoho funkcí, jež jsou po dvou ortogonální a představují tudíž spočetnou ortogonální množinu v $\mathcal{H}$
- označme ji pro jednoduchost jako $S = \{s_1(\vec{x}), s_2(\vec{x}), s_3(\vec{x}), \dots\}$
- přitom $s_i(\vec{x})$ jsou vlastní funkce operátoru $\widehat{L}$
- zbývá prokázat, že S je maximální ortogonální množinou v $\mathcal{H}$
- předpokládejme pro spor, že existuje funkce $\ell(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ kolmá ke všem funkcím $s_1(\vec{x}), s_2(\vec{x}), s_3(\vec{x}), \dots,$ tj.

$$\forall i \in \mathbf{N}: \quad \langle s_i | \ell \rangle = 0$$

- z předpokladu věty, konkrétně z faktu, že každou funkci Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ lze podle definice 1.7.25 vyjádřit jako lineární kombinaci vlastních funkcí operátoru $\widehat{L}$, plyne, že existují čísla $c_i \in \mathbf{C}$ $(i \in \mathbf{N})$ tak, že

$$\ell(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i s_i(\vec{x})$$

- vynásobme tuto rovnost zprava funkcí $\ell(\vec{x})$
- pak

$$\big\langle \ell | \ell \big\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \big\langle s_i | \ell \big\rangle = 0$$

- tedy $\|\ell\| = \sqrt{\langle \ell | \ell \rangle} = 0$, což podle definice normy splňuje pouze nulová funkce, tj. $\ell(\vec{x}) = o(\vec{x})$
- proto je množina S bází v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$
- standardní Grammovou-Schmidtovou procedurou (viz 1.5.10) lze pak tuto bázi ortonormalizovat

1.7.27 Definice

Nechť je dán lineární operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ s čistě bodovým spektrem. *Unfoldovaným spektrem* operátoru $\widehat{L}$ rozumíme uspořádaný soubor

$$\sigma_{\mathrm{unf}} = \Big(\overbrace{\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_1}^{\nu_1}, \overbrace{\lambda_2, \lambda_2, \dots, \lambda_2}^{\nu_2}, \overbrace{\lambda_3, \lambda_3, \dots, \lambda_3}^{\nu_3}, \dots\Big),$$

kde $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ jsou uspořádaná vlastní čísla operátoru $\widehat{L}$, přičemž každé je do unfoldovaného spektra zahrnuto právě tolikrát, kolik je jeho geometrická násobnost. *Systémem vlastních funkcí* operátoru $\widehat{L}$ budeme rozumět množinu

$$B = \big\{f_{11}(\vec{x}), f_{12}(\vec{x}), \dots, f_{1\nu_1}(\vec{x}), f_{21}(\vec{x}), f_{12}(\vec{x}), \dots, f_{2\nu_2}(\vec{x}), f_{31}(\vec{x}), f_{32}(\vec{x}), \dots, f_{3\nu_3}(\vec{x}), \dots\big\} \tag{1.44}$$

zkonstruovanou podle věty 1.7.26

1.7.28 Věta - o Fourierově rozvoji

Nechť je dán lineární operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ s čistě bodovým spektrem. Nechť

$$B = \big\{u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), u_3(\vec{x}), \dots\big\}$$

je příslušný systém všech jeho vlastních funkcí takových, že pro každé $\ell \in \mathbf{N}$ platí $\|u_\ell\| = 1$. Pak pro každou funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(\vec{x}), \tag{1.45}$$

kde $a_k = \langle f | u_k \rangle$, přičemž řada (1.45) konverguje regulárně.

Důkaz:

- tvrzení plyne přímo z vět 1.7.26 a 1.6.3

1.7.29 Věta

Nechť jsou dány lineární operátory $\widehat{L}, \widehat{K} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ s čistě bodovými spektry, jejichž systém vlastních funkcí je totožný. Pak operátory $\widehat{L}$, $\widehat{K}$ komutují.

- označme $B = \big\{u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), u_3(\vec{x}), \dots\big\}$ zmiňovaný systém vlastních funkcí obou operátorů
- bez újmy na obecnosti předpokládáme, že B je ortonormalizovaná
- není obtížné nahlédnout, že pro libovolné $\ell \in \mathbf{N}$ platí
$$\widehat{L}\widehat{K}(u_\ell) = \widehat{K}\widehat{L}(u_\ell) = \mu\lambda u_\ell,$$
kde λ je vlastní číslo operátoru $\widehat{L}$ příslušné vlastní funkci u_ℓ a μ je vlastní číslo operátoru $\widehat{K}$ příslušné funkci u_ℓ
- vezměme libovolnou funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$
- podle věty 1.7.28 pro ni platí rovnost $f(\vec{x}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle f|u_\ell\rangle u_\ell(\vec{x})$
- pak ale
$$\widehat{L}\widehat{K}(f) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle f|u_\ell\rangle \widehat{L}\widehat{K}(u_\ell) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle f|u_\ell\rangle \mu\lambda u_\ell(\vec{x}) = \mu\lambda f(\vec{x})$$
- analogicky
$$\widehat{K}\widehat{L}(f) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle f|u_\ell\rangle \widehat{K}\widehat{L}(u_\ell) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle f|u_\ell\rangle \lambda\mu u_\ell(\vec{x}) = \lambda\mu f(\vec{x})$$
- jelikož bylo prokázáno, že pro každou funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí rovnost $\widehat{L}\widehat{K}(f) = \widehat{K}\widehat{L}(f)$, je tím důkaz dokončen
- podotýkáme ale, že komutující operátory nemusejí mít stejné vlastní hodnoty

1.7.30 Věta

Nechť jsou dány lineární operátory $\widehat{L}, \widehat{K} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ s čistě bodovými spektry, jež komutují na $\mathcal{H}$. Nechť operátor $\widehat{L}$ má navíc nedegenerované spektrum. Nechť B je systém vlastních funkcí operátoru $\widehat{L}$, pak B je rovněž systémem vlastních funkcí operátoru $\widehat{K}$.

Důkaz:

- označme $B = \big\{u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), u_3(\vec{x}), \dots\big\}$ ortonormální systém vlastních funkcí operátoru $\widehat{L}$
- nechť dle předpokladu $\widehat{L}\widehat{K} - \widehat{K}\widehat{L} = \widehat{O}$, kde $\widehat{O}$ je nulový operátor
- zvolme $u_\ell(\vec{x}) \in B$ libovolně a $\lambda_\ell \in \mathbf{C}$ příslušnou vlastní hodnotu operátoru $\widehat{L}$
- zjevně platí
$$\widehat{K}\widehat{L}(u_\ell) = \widehat{K}\big(\lambda_\ell u_\ell\big) = \lambda_\ell \widehat{K}(u_\ell)$$
- díky komutativitě ale platí $\widehat{L}\widehat{K}(u_\ell) = \lambda_\ell \widehat{K}(u_\ell)$
- funkce $\widehat{K}(u_\ell)$ je proto vlastní funkcí operátoru $\widehat{L}$ příslušnou vlastnímu číslu λ_ℓ
- jelikož je ale vektorový prostor všech vlastních funkcí příslušných jedinému vlastnímu číslu jednodimenzionální (neboť $\widehat{L}$ je nedegenerovaný), pak zcela jistě existuje číslo $\gamma_\ell \in \mathbf{C}$ tak, že $\widehat{K}(u_\ell) = \gamma_\ell u_\ell$
- funkce $u_\ell(\vec{x})$ je tedy vlastní funkcí také pro operátor $\widehat{K}$
- a to bylo cílem dokázat

1.8 Omezené operátory na Hilbertových prostorech

Ze třídy všech lineárních operátorů vybereme nyní pouze ty, jež jsou tzv. omezené na Hilbertově prostoru. A budeme zkoumat, jaké další vlastnosti operátoru omezenost implikuje.

1.8.1 Definice

Nechť je dán Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ a lineární operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$. Řekneme, že operátor $\widehat{L}$ je *spojitý* na $\mathcal{H}$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí implikace

$$\|f - g\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left\|\widehat{L}(f) - \widehat{L}(g)\right\| < \varepsilon. \tag{1.46}$$

1.8.2 Věta

Lineární operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ spojitý na $\mathcal{H}$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí implikace

$$\|h\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left\|\widehat{L}(h)\right\| < \varepsilon. \tag{1.47}$$

Důkaz:

- důkaz plyne ihned z faktu, že $\mathcal{H}$ je vektorovým prostorem a $\widehat{L}$ lineárním operátorem
- označíme-li totiž $h(\vec{x}) := f(\vec{x}) - g(\vec{x})$, platí, že $\widehat{L}(h) = \widehat{L}(f) - \widehat{L}(g)$ a tvrzení (1.46) a (1.47) jsou ekvivalentní

1.8.3 Poznámka

Předešlá věta de facto tvrdí, že spojitost operátoru na $\mathcal{H}$ je ekvivalentní jeho spojitosti v nule (přesněji pro nulovou funkci z $\mathcal{H}$).

1.8.4 Věta

Lineární operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ spojitý na $\mathcal{H}$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\big(f_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ takovou, že $\operatorname{limnorm}_{k\to\infty} f_k(\vec{x}) = f(\vec{x})$ v $\mathcal{H}$, platí

$$\operatorname*{limnorm}_{k\to\infty} \widehat{L}(f_k) = \widehat{L}(f).$$

Důkaz:

- důkaz plyne ihned z definice konvergence podle normy, neboť

$$\operatorname*{limnorm}_{k\to\infty} f_k(\vec{x}) = f(\vec{x}) \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : n \geqslant n_0 \Rightarrow \left\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right\| < \varepsilon,$$

$$\operatorname*{limnorm}_{k\to\infty} \widehat{L}(f_k) = \widehat{L}(f) \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : n \geqslant n_0 \Rightarrow \left\|\widehat{L}(f_k) - \widehat{L}(f)\right\| < \varepsilon$$

- označíme-li $h(\vec{x}) := f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})$, plyne dokazované tvrzení přímo z věty 1.8.2

1.8.5 Věta

Nechť je lineární operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ spojitý na $\mathcal{H}$. Pak každou funkcionální řadu $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\vec{x})$ takovou, že $\underline{\sum}_k f_k(\vec{x}) = s(\vec{x})$ v $\mathcal{H}$, platí rovnost

$$\underline{\sum_k} \widehat{L}(f_k) = \widehat{L}(s).$$

Důkaz:

- důkaz plyne z předešlé věty po převodu řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\vec{x})$ na posloupnost $\big(s_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ jejich částečných součtů

1.8.6 Definice

Nechť $\mathcal{H}$ je Hilbertův prostor. Řekneme, že lineární operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ je *omezený,* existuje-li $\mathtt{K} > 0$ tak, že pro každou funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí

$$\left\|\widehat{L}(f)\right\| \leqslant \mathtt{K}\,\|f\|,$$

kde $\|.\|$ je norma generovaná uvažovaným skalárním součinem.

1.8.7 Věta

Každý spojitý operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ je omezený na $\mathcal{H}$ a zároveň každý omezený operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ je spojitý na $\mathcal{H}$, tj. pojmy omezenosti a spojitosti operátoru jsou ekvivalentní.

<u>*Důkaz:*</u>

- dokážeme nejprve, že je-li $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ spojitý (tedy i lineární) operátor, pak existuje číslo $\mathtt{K} > 0$ tak, že pro každé $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí
$$\|\widehat{L}(f)\| \leqslant \mathtt{K}\|f\|,$$
tedy že každý spojitý operátor je omezený
- je-li tedy operátor $\widehat{L}$ spojitý, pak podle věty 1.8.2 platí
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : \quad \|f\| < \delta \;\Rightarrow\; \|\widehat{L}(f)\| < \varepsilon$$
- vezměme $c \in (0, \delta)$ libovolné
- pak pro každé $f(\vec{x}) \in \mathcal{H} \setminus \{o(\vec{x})\}$ platí
$$\left\| \frac{cf}{\|f\|} \right\| < \delta$$
- pak ale z předpokladu vyplývá, že
$$\left\| \widehat{L}\left(\frac{cf}{\|f\|} \right) \right\| = c\frac{\|\widehat{L}(f)\|}{\|f\|} < \varepsilon$$
- položíme-li tedy $\mathtt{K} = \varepsilon c^{-1}$, dostáváme pro každou funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ nerovnost $\|\widehat{L}(f)\| < \mathtt{K}\|f\|$
- dokažme nyní obrácenou implikaci
- proto předpokládejme, že existuje $\mathtt{K} > 0$ tak, že pro každou funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí $\left\|\widehat{L}(f)\right\| \leqslant \mathtt{K}\,\|f\|$
- vezměme všechny funkce $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ takové, že $\|f\| < \delta = \frac{\varepsilon}{\mathtt{K}}$
- pak ale
$$\|\widehat{L}(f)\| < \mathtt{K}\|f\| = \mathtt{K}\frac{\varepsilon}{\mathtt{K}} = \varepsilon,$$
což prokazuje spojitost operátoru $\widehat{L}$

1.8.8 Definice

Nechť $\mathcal{H}$ je Hilbertův prostor. Množinu všech spojitých (tj. omezených a také lineárních) operátorů $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ označíme symbolem $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ a nazveme *duálním prostorem* k Hilbertovu prostoru $\mathcal{H}$.

1.8.9 Věta

Nechť $\mathcal{H}$ je Hilbertův prostor a $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ jeho duální prostor, tj. třída všech spojitých operátorů $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$. Pak operátorové zobrazení $\mathbbm{n}(\widehat{L}) : \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \mapsto \mathbf{R}$ definované předpisem

$$\mathbbm{n}(\widehat{L}) := \sup\left\{ \frac{\left\|\widehat{L}(f)\right\|}{\|f\|} : f(\vec{x}) \in \mathcal{H} \,\wedge\, f(\vec{x}) \neq \vec{0} \right\} \tag{1.48}$$

splňuje axiomy normy a představuje tudíž normu na $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

<u>*Důkaz:*</u>

- označme nejprve
$$A = \left\{ \frac{\left\|\widehat{L}(f)\right\|}{\|f\|} : f(\vec{x}) \in \mathcal{H} \,\wedge\, f(\vec{x}) \neq \vec{0} \right\}$$
- ověřme axiomy normy

- axiom nulovosti plyne ihned z faktu, že $\mathbb{n}(\widehat{L}) = 0$ pouze tehdy, pokud $A = \{0\}$, a to může nastat pouze pro nulový operátor, tedy pokud $\widehat{L} = \widehat{O}$
- dále by mělo platit, že pro všechny spojité operátory $\widehat{L}$ a každé $\lambda \in \mathbf{C}$ platí: $\mathbb{n}(\lambda\widehat{L}) = |\lambda|\,\mathbb{n}(\widehat{L})$
- vidíme ale, že
$$\frac{\|\widehat{L}(\lambda f)\|}{\|f\|} = \frac{\|\lambda\widehat{L}(f)\|}{\|f\|} = |\lambda|\,\frac{\|\widehat{L}(f)\|}{\|f\|},$$
což se pochopitelně příslušně odrazí i do vlastností suprema množiny A
- zbývá ještě prokázat trojúhelníkovou nerovnost, tedy skutečnost, že pro všechny spojité operátory $\widehat{L}, \widehat{K}$ platí nerovnost $\mathbb{n}(\widehat{L} + \widehat{K}) \leqslant \mathbb{n}(\widehat{L}) + \mathbb{n}(\widehat{K})$
- zde
$$\frac{\|(\widehat{L} + \widehat{K})f\|}{\|f\|} \leqslant \frac{\|\widehat{L}(f)\|}{\|f\|} + \frac{\|\widehat{L}(g)\|}{\|f\|},$$
jak plyne z trojúhelníkové nerovnosti pro obecné normy, která je tvaru $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
- proto je tedy zobrazení $\mathbb{n}(\widehat{L}) : \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \mapsto \mathbf{R}$ normou na prostoru $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$

1.8.10 Definice

Zobrazení zavedené na prostoru $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ vztahem (1.48) označíme symbolem $\|\widehat{L}\|$ a nazveme *duální normou* na prostoru $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ a příslušný normovaný prostor nazveme *duálním prostorem (duálem)*.

1.8.11 Věta

Nechť $\widehat{L}$ je spojitý operátor zavedený na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Pak je definiční rovnost
$$\|\widehat{L}\| = \sup \frac{\|\widehat{L}(f)\|}{\|f\|}$$
ekvivalentní rovnosti
$$\|\widehat{L}\| = \sup_{\|f\|=1} \|\widehat{L}(f)\|.$$

Důkaz:

- naším cílem je ukázat, že množina
$$A = \left\{ \frac{\|\widehat{L}(f)\|}{\|f\|} \,:\, f(\vec{x}) \in \mathcal{H} \,\wedge\, f(\vec{x}) \neq o(\vec{x}) \right\}$$
a množina
$$B = \left\{ \|\widehat{L}(f)\| \,:\, f(\vec{x}) \in \mathcal{H} \,\wedge\, \|f\| = 1 \right\}$$
jsou totožné
- inkluze $B \subset A$ je zřejmá
- prokážeme tedy, že také $A \subset B$
- vezměme proto libovolnou nenulovou funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$
- nechť je její normou číslo $\|f\| = c$
- zřejmě $c \neq 0$, jak plyne z axiomů normy
- pak jistě $c^{-1}\|\widehat{L}(f)\| \in A$
- je-li $c = 1$, pak je triviální nahlédnout, že $c^{-1}\|\widehat{L}(f)\| \in B$
- uvažme tudíž případ, kdy $c \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$

- definujme funkci
$$g(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x})}{c} \in \mathcal{H}$$
- její norma je bez pochyby jednotková a platí
$$\frac{\|\widehat{L}(f)\|}{\|f\|} = \frac{\|\widehat{L}(cg)\|}{\|cg\|} = \frac{|c|}{|c|}\frac{\|\widehat{L}(g)\|}{\|g\|} = \|\widehat{L}(g)\|.$$
- tudíž, bylo-li číslo $\frac{\|\widehat{L}(f)\|}{\|f\|}$ v množině A, pak je zcela jistě také v množině B, tj. $A \subset B$
- odtud $A = B$, potažmo také $\sup(A) = \sup(B)$

1.8.12 Důsledek

Nechť $\mathcal{H}$ je Hilbertův prostor a $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ jeho duální prostor. Pak pro jeho duální normu platí rovnost

$$\mathbb{n}(\widehat{L}) := \sup\big\{\big\|\widehat{L}(f)\big\| : \ f(\vec{x}) \in \mathcal{H} \wedge \|f(\vec{x})\| = 1\big\}.$$

1.8.13 Věta

Nechť je dán omezený operátor $\widehat{L}$ a nechť $\|\widehat{L}\|$ je jeho norma. Pak pro jakékoliv jeho vlastní číslo λ platí nerovnost

$$|\lambda| \leqslant \|\widehat{L}\|.$$

Důkaz:

- z rovnice $\widehat{L}(f) = \lambda f(\vec{x})$ pro vlastní hodnoty λ a vlastní funkce $f(\vec{x})$ ihned vyplývá, že $\|\widehat{L}(f)\| = \|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$
- odtud ale (také s ohledem na fakt, že pro vlastní funkce je nutně $\|f\| > 0$)
$$|\lambda| = \frac{\|\widehat{L}(f)\|}{\|f\|} \leqslant \|\widehat{L}\|$$

1.8.14 Věta – Hellingerův-Toeplitzův teorém

Nechť je zadán hermiteovský operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$, pro nějž $\mathrm{Dom}(\widehat{L}) = \mathcal{H}$. Pak je $\widehat{L}$ omezený na $\mathcal{H}$.

Bez důkazu.

1.8.15 Poznámka

Hellingerův-Toeplitzův teorém (pojmenovaný po Ernstu Davidovi Hellingerovi a Otto Toeplitzovi) dokazuje, že každý hermiteovský operátor definovaný na celém Hilbertově prostoru je omezený, tedy podle věty 1.8.7 také spojitý.

1.9 Pomocné vztahy a výpočty

V posledním oddíle první kapitoly budeme prezentovat několik výpočtů, které dále zužitkujeme v další části těchto skript.

1.9.1 Příklad

V tomto příkladě se pokusíme odvodit vztah pro hodnotu integrálu $\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$, kde $\alpha > 0$. Poměrně banálně se přesvědčíme, že $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = \alpha^{-1}$. Budeme-li tento vztah derivovat podle α, tj. užijeme-li větu o derivaci integrálu podle parametru (viz věta 4.4.6 ve skriptech [12]), dostaneme po formální aplikaci derivace vztah

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\alpha^n}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = (-1)^n\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\alpha^n}(\alpha^{-1}) = (-1)^n\frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

Odtud tedy

$$\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}. \tag{1.49}$$

Korektně tento vztah prokážeme matematickou indukcí. Předpokládejme tedy, že platí vztah (1.49) (minimálně platí pro případ, kdy $n = 0$) a pokusme se prokázat jeho platnost pro $\int_0^\infty x^{n+1}\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$. Podle věty o derivaci integrálu podle parametru, je třeba prokázat, že hodnota integrálu (1.49) existuje alespoň pro jedno $\alpha > 0$, což je zřejmé, dále že integrand $x \mapsto x^n\mathrm{e}^{-\alpha x}$ je měřitelnou funkcí, což je vzhledem k jeho spojitosti rovněž triviální, a v poslední řadě že existuje integrabilní majoranta k derivaci původního integrandu podle parametru α. Jelikož pro $0 < \alpha_0 < \alpha$ platí

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(x^n\mathrm{e}^{-\alpha x}\right)\right| = \left|-x^{n+1}\mathrm{e}^{-\alpha x}\right| \leqslant x^{n+1}\mathrm{e}^{-\alpha_0 x} \in \mathscr{L}(0,+\infty),$$

je i třetí předpoklad věty prokázán. Pak tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^\infty x^n\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty x^{n+1}\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{n!}{\alpha^{n+1}}\right) = -\frac{(n+1)\,n!}{\alpha^{n+2}}.$$

Odtud

$$\int_0^\infty x^{n+1}\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{(n+1)!}{\alpha^{n+2}},$$

což finalizuje prováděný důkaz.

1.9.2 Příklad

Vypočtěme nyní hodnotu tzv. *Gaussova integrálu* $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$ pro $a > 0$. Při výpočtu užijeme s výhodou Fubiniovy věty. Podle ní totiž

$$\left(\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-ay^2}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-a(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} x = \varrho\cos(\varphi) & \\ & \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi \\ y = \varrho\sin(\varphi) & \end{array}\right| = \int_0^\infty\int_0^{2\pi} \varrho\,\mathrm{e}^{-a\varrho^2}\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varrho = \frac{\pi}{a}.$$

Odtud pak snadno nahlédneme, že

$$\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \tag{1.50}$$

1.9.3 Příklad

V tomto příkladě vypočteme hodnoty integrálů $\int_0^\infty x^k\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$ pro $k \in \mathbf{N}$ a $a > 0$. Řešení rozdělíme na dva případy. Je-li k liché, tj. existuje-li $n \in \mathbf{N}$ tak, že $k = 2n+1$, pak

$$\int_0^\infty x^k\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x\,x^{2n}\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} y = x^2 \\ \mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int_0^\infty y^n\mathrm{e}^{-ay}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}},$$

kde bylo využito výsledku příkladu 1.9.1. Je-li k sudé, tj. existuje-li $n \in \mathbf{N}$ tak, že $k = 2n$, pak lze hledaný vztah získat derivováním vztahu (1.50). Snadno tak ukážeme, že

$$\int_0^\infty x^{2n}\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}a^{-\frac{2n+1}{2}} \tag{1.51}$$

Platnost tohoto vztahu prokážeme opět matematickou indukcí. Pro $n = 1$ vztah zjevně platí. Indukčním předpokladem je tedy vztah (1.51). Derivujme ho podle α. Odtud

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\int_0^\infty x^{2n}\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x\right) = -\int_0^\infty x^{2n+2}\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}a^{-\frac{2n+1}{2}}\right) = -\sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\frac{2n+1}{2}a^{-\frac{2n+3}{2}},$$

odkud pak ihned plyne, že

$$\int_0^\infty x^{2n+2}\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\frac{(2n+1)!!}{2^{n+2}}a^{-\frac{2n+3}{2}},$$

což prokazuje platnost vztahu (1.51) pro všechna $n \in \mathbf{N}$. To, že byla výše provedená záměna derivace a integrálu operací oprávněnou, prokáže laskavý čtenář samostatně podle návodu prezentovaného v příkladě 1.9.1.

1.9.4 Definice

Funkci

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \tag{1.52}$$

definovanou na definičním oboru $\mathrm{Dom}(\Gamma) := \left\{x \in \mathbf{R} : \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \in \mathbf{R}\right\}$ nazýváme *gamma funkcí.*

1.9.5 Věta

Pro všechna $x \in \mathrm{Dom}(\Gamma)$ a všechna $\alpha > 0$ platí rovnosti

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)}{\alpha^x}. \tag{1.53}$$

Důkaz:

- snadno provedeme (aplikací metody per partes) následující sadu výpočtů

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x)$$

- a podobně snadno také

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{c} y = \alpha t \\ \mathrm{d}y = \alpha\mathrm{d}t \end{array}\right| = \frac{1}{\alpha^x}\int_0^\infty y^{x-1}\,\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{\Gamma(x)}{\alpha^x}$$

1.9.6 Věta

Nechť $n \in \mathbf{N}$. Pak

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$
$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\frac{(2n-1)!!}{2^n}.$$

Důkaz:

- pro $n \in \mathbf{N}$ lze dokazovanou rovnost snadno odvodit ze vztahu (1.49) po dosazení $\alpha = 1$
- dále pak

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{n-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{c} t = x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \end{array}\right| = 2\int_0^\infty x^{2n}\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n},$$

  kde bylo využito výsledku příkladu 1.9.3

1.9.7 Příklad

Pokusme se vyčíslit hodnotu integrálu $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ také pro obecné $x > 1$. Pro pozdější účely nyní představíme limitu

$$\Gamma(x) = \lim_{c\to\infty}\int_0^c t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Použijeme-li nyní Maclaurinova rozvoje funkce e^{-t} a uvědomíme-li si, že příslušná řada konverguje stejnoměrně na $\langle 0, c\rangle$. Lze pak na $\langle 0, c\rangle$ provést následující sérii úprav

$$\int_0^c t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^c t^{x-1}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^c t^{n+x-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\frac{c^{n+x}}{x+n}.$$

Odtud pak získáváme aproximativní rovnost

$$\Gamma(x) = \lim_{c\to\infty}\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\frac{c^{n+x}}{x+n}.$$

Graf gamma funkce je pro ilustraci vyobrazen na následujícím obrázku

Obrázek 1.4
Graf gamma funkce $\Gamma(x)$.

1.9.8 Definice

Funkci

$$\mathrm{Erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

nazýváme *chybovou funkci* (error function).

1.9.9 Věta

Maclaurinovým rozvojem chybové funkce pro libovolné $x \in \mathbf{R}$ je řada

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} = \mathrm{Erf}(x).$$

Důkaz:

- užijeme známého Maclaurinova rozvoje exponenciální funkce, který je tvaru $\mathrm{e}^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$
- po dosazení $y = -t^2$ odtud dostáváme, že $\mathrm{e}^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}$
- přitom oborem konvergence dotčených řad je množina $\mathcal{O} = \mathbf{R}$
- jelikož se integrováním ani derivováním poloměr konvergence mocninných řad nemění, lze posledně uvedenou řadu integrovat člen po členu s následujícím výsledkem

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{n!}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)n!} \right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!},$$

ze kterého již bezprostředně vyplývá dokazovaná rovnost

1.9.10 Definice

Nechť jsou dána čísla $a, b, c \in \mathbf{R}$ tak, že $a < c < b$. Nechť je funkce $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ definovaná alespoň na množině $(a, c) \cup (c, b)$ a pro všechna $\beta \in (a, c)$ a $\gamma \in (c, b)$ existují Lebesgueovy integrály

$$\int_a^{\beta} f(x)\, \mathrm{d}\mu(x), \quad \int_{\gamma}^{b} f(x)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

Existuje-li vlastní či nevlastní limita

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \right),$$

pak ji nazveme *hlavní hodnotou integrálu (v Cauchyově smyslu)* a označíme

$$\mathrm{Vp} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}\mu(x),$$

kde zkratka Vp pochází z francouzského *valeur principale (de Cauchy)*. Za hlavní hodnotu integrálů $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}\mu(x)$, $\int_a^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}\mu(x)$, resp. $\int_{-\infty}^{b} f(x)\, \mathrm{d}\mu(x)$ klademe po řadě limity (existují-li jako vlastní nebo nevlastní)

$$\mathrm{Vp} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) := \lim_{c \to +\infty} \mathrm{Vp} \int_{-c}^{c} f(x)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

$$\mathrm{Vp} \int_a^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) := \lim_{c \to +\infty} \mathrm{Vp} \int_a^{c} f(x)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

$$\mathrm{Vp} \int_{-\infty}^{b} f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) := \lim_{c \to +\infty} \mathrm{Vp} \int_{-c}^{b} f(x)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

1.9.11 Příklad

Vypočtěme integrál $\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Snadno

$$\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to\infty}\mathrm{Vp}\int_{-a}^{a}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0_+}\left[\int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{a}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right]=$$

$$=\lim_{a\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0_+}\big[\ln(\varepsilon)-\ln(a)+\ln(a)-\ln(\varepsilon)\big]=\lim_{a\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0_+}0=0.$$

Tedy

$$\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=0.$$

1.9.12 Lemma

Nechť $a,b\in\mathbf{R}$ jsou pevně zvolené parametry a $(a,b)\neq\vec{0}$. Pak platí

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x=\frac{a}{a^2+b^2},\qquad\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x=\frac{b}{a^2+b^2}.\tag{1.54}$$

1.9.13 Příklad

Pokusme se vypočítat hodnotu integrálů

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin(bx)}{x}\,\mathrm{d}x,\qquad\int_0^{\infty}\frac{\sin(bx)}{x}\,\mathrm{d}x.\tag{1.55}$$

Označme $F(b)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ a pokusme se tuto funkci derivovat podle parametru b. Aby bylo možno zaměnit derivaci $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}$ a integrál $\int_0^{\infty}\mathrm{d}x$, je třeba aby integrál $F(b)$ konvergoval alespoň v jednom bodě (zde $F(0)=0$), aby integrand $x\mapsto\mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin(bx)}{x}$ byl měřitelnou funkcí na $(0,\infty)$ (což je, neboť je spojitou funkcí) a aby existovala lebesgueovsky integrabilní funkce $g(x)\in\mathscr{L}(0,\infty)$ nezávislá na parametru b, jež je majorantní k derivovanému integrandu. Zde

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left(\mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin(bx)}{x}\right)\right|=\left|\mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\right|\leqslant\mathrm{e}^{-ax}=:g(x)\in\mathscr{L}(0,\infty).$$

Pak tedy podle vztahu (1.54)

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}b}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin(bx)}{x}\,\mathrm{d}x\right)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

Odtud

$$F(b)=\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)+\mathtt{C},$$

kde $\mathtt{C}=0$, jak lze dopočítat z podmínky $F(0)=0$. Proto

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right).\tag{1.56}$$

Pro výpočet druhého ze zadaných integrálů použijeme limitní přechod

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to 0_+}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to 0_+}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{\pi\,\mathrm{sgn}(b)}{2}.\tag{1.57}$$

Jeho oprávněnost je ale třeba potvrzit tím, že prověříme předpoklady věty o limitě integrálu s parametrem (viz věta 4.4.1 str. 228 ve skriptech [12]). Existence limity $\lim_{a\to 0_+}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$ a měřitelnost integrandu jsou splněny triviálně. K integrandu původního integrálu je ale třeba nalézt lebesgueovsky integrabilní majorantu $g(x)\in\mathscr{L}(0,\infty)$ nezávislou na parametru a. Zde

$$\left|\mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin(bx)}{x}\right|\leqslant\left|\frac{\sin(bx)}{x}\right|\in\mathscr{L}(0,\infty).$$

1.9.14 Příklad

Vypočtěme určitý integrál $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$, kde $a>0$ a $b\in\mathbf{R}$. Při kontrole naplnění předpokladů věty o derivaci integrálu s parametrem snadno zjišťujeme, že integrál konverguje pro $b=0$ a jeho hodnotou je podle výsledku příkladu 1.9.2 číslo

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Spojitost integrandu $x\mapsto \mathrm{e}^{-ax^2}\cos(bx)$ implikuje podle věty 4.1.9 na straně 203 skript [12], že integrand je měřitelnou funkcí pro skoro všechny (zde de facto všechny) hodnoty parametru $b\in\mathbf{R}$. Zbývá proto nalézt integrabilní majorantní funkci k derivaci integrandu podle x. Protože ale

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-ax^2}\cos(bx)\right)\right| = \left|x\mathrm{e}^{-ax^2}\sin(bx)\right| \leqslant x\mathrm{e}^{-ax^2}\in\mathscr{L}(\mathbf{R}^+),$$

což lze potvrdit výpočtem

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2a}\,\mathrm{e}^{-ax^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{2a}\in\mathbf{R}^+,$$

je také poslední předpoklad citované věty naplněn. Proto platí

$$\frac{\partial I}{\partial b} = -\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\sin(bx)\,\mathrm{d}x \overset{\text{p.p.}}{=} \left[\frac{1}{2a}\sin(bx)\mathrm{e}^{-ax^2}\right]_0^\infty - \frac{b}{2a}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}\cos(bx)\,\mathrm{d}x = -\frac{b}{2a}I.$$

Tím získáváme obyčejnou diferenciální rovnici pro neznámou funkci $I(b)$ tvaru

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}b} = -\frac{b}{2a}I.$$

Rovnici lze řešit např. separací proměnných, která vede k následujícím mezivýpočtům:

$$\int\frac{\mathrm{d}I}{I} = -\frac{1}{2a}\int b\,\mathrm{d}b,$$

$$I = \mathtt{C}\,\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}},$$

kde hodnotu dosud neznámé konstanty vypočteme z okrajové podmínky $I(0)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, odkud ihned vidíme, že $\mathtt{C}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Finálním výsledkem této úlohy je tudíž

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

1.9.15 Příklad

Vypočtěme integrál $\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(ax)}{x+b}\,\mathrm{d}x$, kde $a,b\in\mathbf{R}$ jsou pevně zvolené parametry. Z definice hlavní hodnoty integrálu v Cauchyově smyslu vyplývá, že

$$\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(ax)}{x+b}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\left(\int_{-\infty}^{b-\varepsilon}\frac{\sin(ax)}{x+b}\,\mathrm{d}x + \int_{b+\varepsilon}^\infty \frac{\sin(ax)}{x+b}\,\mathrm{d}x\right) = \left|\begin{array}{c} y = x+b \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0_+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\sin(ay-ab)}{y}\,\mathrm{d}y + \int_\varepsilon^\infty \frac{\sin(ay-ab)}{y}\,\mathrm{d}y\right).$$

Po aplikaci součtových vzorců odsud dostáváme

$$\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(ax)}{x+b}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0_+}\left(\cos(ab)\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\sin(ay)}{y}\,\mathrm{d}y - \sin(ab)\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\cos(ay)}{y}\,\mathrm{d}y + \cos(ab)\int_\varepsilon^\infty\frac{\sin(ay)}{y}\,\mathrm{d}y - \sin(ab)\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos(ay)}{y}\,\mathrm{d}y\right) =$$

$$= 2\cos(ab)\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_\varepsilon^\infty \frac{\sin(ay)}{y}\,\mathrm{d}y = 2\cos(ab)\int_0^\infty \frac{\sin(ay)}{y}\,\mathrm{d}y.$$

Na základě rovnosti (1.55) pak uzavíráme, že

$$\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(ax)}{x+b}\,\mathrm{d}x = \pi\,\mathrm{sgn}(a)\cos(ab).$$

1.9.16 Věta – Cimrmanova

Určitý integrál

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\,\mathrm{d}x$$

konverguje a jeho hodnota se rovná *Cimrmanově konstantě prvního druhu* ζ_1, kde

$$\zeta_1 = \lim_{c\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{c} - \ln(c) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{c^{n-1}-1}{n-1}\right) = 0.148496\ldots$$

Důkaz:

- snadno nahlédneme, že pro $c > 1$ platí rovnost

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{1}{t-1}}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{l} x = (t-1)^{-1} \\ \mathrm{d}t = -x^{-2}\mathrm{d}x \end{array}\right| = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_1^c \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_c^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

- tedy

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{1}{t-1}}\,\mathrm{d}t \approx \int_1^c \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

- příslušnou chybou je hodnota

$$\mathrm{R} = \int_c^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_c^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}^c}$$

- čili chyba může být zvolena libovolně malou
- dále

$$\int_1^c \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_1^c \frac{1}{x^2}\left(1 - x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right)\mathrm{d}x = \int_1^c\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n-2}}{n!}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= 1 - \frac{1}{c} - \ln(c) + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{x^{n-1}}{n!(n-1)}\right]_1^c = 1 - \frac{1}{c} - \ln(c) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{c^{n-1}-1}{n-1}$$

- odtud již plyne tvrzení

1.9.17 Lemma – Cimrmanovo

$$\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \zeta_2,$$

kde $\zeta_2 \approx 0.4439940$ je *Cimrmanova konstanta druhého druhu.*

1.9.18 Věta

Nechť $n \in \mathbf{N}$. Pak platí

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\big(n+\frac{3}{2}\big)} \tag{1.58}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}(x)\,\sin^{2m+1}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{n!\,m!}{2(n+m)!} = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(m+1)}{2\,\Gamma(m+n+1)} \tag{1.59}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} \tag{1.60}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}(x)\,\sin^{2m}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!\,(2m-1)!!}{(2n+2m)!!} = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\Gamma(m+\frac{1}{2})}{2\,\Gamma(m+n+1)} \tag{1.61}$$

Důkaz:

- všechny uvedené vztahy lze prokázat metodou matematické indukce
- dokažme např. vztah

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \tag{1.62}$$

- tento vztah dokážeme matematickou indukcí
- pro $n = 1$ snadno vypočteme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2}\,\frac{1!!}{2!!}$$

- nechť tedy platí indukční předpoklad

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-2}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,\frac{(k-3)!!}{(k-2)!!}$$

- pak

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-1}(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{cc} u = \sin^{k-1}(x) & v' = \sin(x) \\ u' = (k-1)\sin^{k-2}(x)\cos(x) & v = -\cos(x) \end{array}\right| =$$

$$= \Big[-\sin^{k-1}(x)\,\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-2}(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= (k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-2}(x)\,\mathrm{d}x - (k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k(x)\,\mathrm{d}x.$$

- tato sada jednoduchých úprav, jak patrno, vede k rovnici pro hledanou hodnotu integrálu, konkrétně:

$$k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k(x)\,\mathrm{d}x = (k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-2}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k(x)\,\mathrm{d}x = (k-1)\frac{\pi}{2}\,\frac{(k-3)!!}{(k-2)!!}$$

- uzavíráme tedy, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,\frac{(k-1)!!}{k!!},$$

  čímž je potvrzena platnost vztahu (1.62)

1.9.19 Definice

Funkce $\mathcal{J}_\alpha(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ definované pro všechna $x \in \mathbf{R}$ a $\alpha \in \mathbf{R}$ předpisem

$$\mathcal{J}_\alpha(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha} \tag{1.63}$$

budeme nazývat *Besselovými funkcemi prvního druhu řádu* α.

1.9.20 Definice

Diferenciální rovnici

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\alpha^2)y = 0$$

budeme nazývat *Besselovou diferenciální rovnicí.*

1.9.21 Poznámka

Besselovy funkce $\mathcal{J}_\alpha(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ jsou právě řešením Besselovy diferenciální rovnice $x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$. Pokud $\alpha = n \in \mathbf{N}$, platí rovnost $\mathcal{J}_{-n}(x) = (-1)^n \mathcal{J}_n(x)$. Besselovy funkce se někdy též nazývají *cylindrickými funkcemi* nebo *cylindrickými harmonickými funkcemi*, neboť jsou součástí řešení Laplaceovy rovnice v cylindrických souřadnicích. Pro neceločíselné hodnoty řádu α jsou funkce $\mathcal{J}_{-\alpha}(x)$, $\mathcal{J}_\alpha(x)$ lineárně nezávislé a reprezentují tudíž bázi v prostoru všech řešení Besselovy diferenciální rovnice. Integrální reprezentace Besselových funkcí jsou tvaru

$$\mathcal{J}_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos\big(nt - x\sin(t)\big)\, \mathrm{d}t,$$

respektive

$$\mathcal{J}_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(nt - x\sin(t)\right)}\, \mathrm{d}t.$$

Obrázek 1.5
Graf Besselových funkcí $\mathcal{J}_\alpha(x)$ prvního druhu.

1.9.22 Věta

Oborem konvergence mocninné řady (1.63) je množina $\mathcal{O} = \mathbf{R}$. Besselovy funkce $\mathcal{J}_\alpha(x)$ prvního druhu řádu α jsou řešením Besselovy diferenciální rovnice, jejímž parametrem je číslo α.

Důkaz:

- poloměrem konvergence $\mathtt{R}_t$ řady
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} t^n$$
je převrácená hodnota čísla
$$\mathtt{L} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)}{(n+1)!\,\Gamma(n+\alpha+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n+\alpha+2)} = 0,$$
což implikuje jednak fakt, že $\mathtt{R}_t = \mathtt{R}_x = \infty$, ale také skutečnost, že oborem konvergence mocninnné řady
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}$$
je skutečně množina $\mathcal{O} = \mathbf{R}$

- jelikož lze na oboru konvergence derivovat i integrovat každou mocninnou řadu člen po členu, dostáváme odtud, že
$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}_\alpha}{\mathrm{d}x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+\alpha)}{2\cdot n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha-1}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{J}_\alpha}{\mathrm{d}x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+\alpha)(2n+\alpha-1)}{4\cdot n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha-2}$$

- odtud
$$\begin{aligned} x^2\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{J}_\alpha}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}_\alpha}{\mathrm{d}x} + (x^2-\alpha^2)\mathcal{J}_\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+\alpha)(2n+\alpha-1)}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+\alpha)}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha} + \\ &\quad + 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha+2} - \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha} \left(4n^2 + 4\alpha n - 2n + \alpha^2 - \alpha + 2n + \alpha - \alpha^2\right) + 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha+2} \\ &= 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!\,\Gamma(n+\alpha)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha} + 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha+2} = \\ &= -4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha+2} + 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha+2} = 0 \end{aligned}$$

1.9.23 Lemma

Besselovy funkce $\mathcal{J}_\alpha(x)$ prvního druhu splňují sadu následujících rekurentních rovností.

$$2\alpha\mathcal{J}_\alpha(x) = x\mathcal{J}_{\alpha-1}(x) + x\mathcal{J}_{\alpha+1}(x). \tag{1.64}$$

$$2\mathcal{J}'_\alpha(x) = \mathcal{J}_{\alpha-1}(x) - \mathcal{J}_{\alpha+1}(x). \tag{1.65}$$

$$x\mathcal{J}'_\alpha(x) = \alpha\mathcal{J}_\alpha(x) - x\mathcal{J}_{\alpha+1}(x). \tag{1.66}$$

$$x\mathcal{J}'_\alpha(x) = -\alpha\mathcal{J}_\alpha(x) + x\mathcal{J}_{\alpha-1}(x). \tag{1.67}$$

1.9.24 Definice

Funkce $\mathcal{Y}_\alpha(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ definované pro všechna $x \in \mathbf{R}$ a $\alpha \in \mathbf{R}$ předpisy

$$\mathcal{Y}_\alpha(x) = \lim_{\nu\to\alpha} \frac{\mathcal{J}_\nu(x)\cos(\nu x) - \mathcal{J}_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

budeme nazývat *Besselovými funkcemi druhého druhu řádu* α, nebo *Weberovými funkcemi*, popř. *Newmannovými funkcemi.*

1.9.25 Lemma

Besselovy funkce $\mathcal{Y}_\alpha(x)$ prvního druhu splňují sadu následujících rekurentních rovností.

$$2\alpha\mathcal{Y}_\alpha(x) = x\mathcal{Y}_{\alpha-1}(x) + x\mathcal{Y}_{\alpha+1}(x). \tag{1.68}$$

$$2\mathcal{Y}'_\alpha(x) = \mathcal{Y}_{\alpha-1}(x) - \mathcal{Y}_{\alpha+1}(x). \tag{1.69}$$

$$x\mathcal{Y}'_\alpha(x) = \alpha\mathcal{Y}_\alpha(x) - x\mathcal{Y}_{\alpha+1}(x). \tag{1.70}$$

$$x\mathcal{Y}'_\alpha(x) = -\alpha\mathcal{Y}_\alpha(x) + x\mathcal{Y}_{\alpha-1}(x). \tag{1.71}$$

1.9.26 Poznámka

Zde vyobrazujeme grafy vybraných zástupců Besselových funkcí druhého druhu.

Obrázek 1.6
Graf Besselových funkcí $\mathcal{Y}_\alpha(x)$ druhého druhu.

1.9.27 Definice

Funkce $\mathcal{I}_\alpha(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, $\mathcal{K}_\alpha(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ definované pro všechna $x \in \mathbf{R}$ a $\alpha \in \mathbf{R}$ předpisy

$$\mathcal{I}_\alpha(x) := \mathtt{i}^{-\alpha}\mathcal{J}_\alpha(\mathtt{i}x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}, \tag{1.72}$$

$$\mathcal{K}_\alpha(x) = \frac{\pi}{2} \lim_{\nu\to\alpha} \frac{\mathcal{I}_{-\nu}(x) - \mathcal{I}_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

budeme nazývat *modifikovanými Besselovými funkcemi prvního, resp. druhého druhu řádu* α.

1.9.28 Definice

Diferenciální rovnici

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + \alpha^2)y = 0$$

budeme nazývat *modifikovanou Besselovou diferenciální rovnicí.*

1.9.29 Poznámka

Besselovy funkce $\mathcal{I}_\alpha(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ a $\mathcal{K}_\alpha(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ jsou lineárně nezávislými řešeními modifikované Besselovy diferenciální rovnice $x^2y'' + xy' - (x^2 + \alpha^2)y = 0$. Je-li $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, platí v definici 1.9.27 zjednodušení tvaru

$$\mathcal{K}_\alpha(x) = \frac{\pi}{2} \lim_{\nu \to \alpha} \frac{\mathcal{I}_{-\nu}(x) - \mathcal{I}_n u(x)}{\sin(\nu\pi)} = \frac{\pi}{2} \frac{\mathcal{I}_{-\alpha}(x) - \mathcal{I}_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Obrázek 1.7
Graf modifikovaných Besselových funkcí $\mathcal{I}_\alpha(x)$ prvního druhu.

1.9.30 Věta

Oborem konvergence mocninné řady (1.72) je množina $\mathcal{O} = \mathbf{R}$. Modifikované Besselovy funkce $\mathcal{I}_\alpha(x)$ prvního druhu řádu α (i modifikované Besselovy funkce $\mathcal{K}_\alpha(x)$ druhého druhu řádu α) jsou řešením modifikované Besselovy diferenciální rovnice, jejímž parametrem je číslo α.

Důkaz:

- poloměrem konvergence $\mathtt{R}_t$ řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} t^n$$

je převrácená hodnota čísla

$$\mathtt{L} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)}{(n+1)!\,\Gamma(n+\alpha+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n+\alpha+2)} = 0,$$

což implikuje jednak fakt, že $\mathtt{R}_t = \mathtt{R}_x = \infty$, ale také skutečnost, že oborem konvergence mocninnné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}$$

je skutečně množina $\mathcal{O} = \mathbf{R}$

- jelikož lze na oboru konvergence derivovat i integrovat každou mocninnou řadu člen po členu, dostáváme odtud, že

$$\frac{\mathtt{d}\mathcal{I}_\alpha}{\mathtt{d}x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+\alpha)}{2\cdot n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha-1}$$

$$\frac{\mathtt{d}^2\mathcal{I}_\alpha}{\mathtt{d}x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+\alpha)(2n+\alpha-1)}{4\cdot n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha-2}$$

- odtud

$$x^2\frac{\mathtt{d}^2\mathcal{I}_\alpha}{\mathtt{d}x^2} + x\frac{\mathtt{d}\mathcal{I}_\alpha}{\mathtt{d}x} - (x^2+\alpha^2)\mathcal{I}_\alpha = \mathtt{i}^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+\alpha)(2n+\alpha-1)}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha} + \mathtt{i}^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+\alpha)}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha} +$$

$$-4\mathtt{i}^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha+2} - \alpha^2\mathtt{i}^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha} =$$

$$= \mathtt{i}^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha} \left(4n^2+4\alpha n-2n+\alpha^2-\alpha+2n+\alpha-\alpha^2\right) - 4\mathtt{i}^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha+2}$$

$$= 4\mathtt{i}^{-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!\,\Gamma(n+\alpha)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha} - 4\mathtt{i}^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha+2} =$$

$$= 4\mathtt{i}^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha+2} - 4\mathtt{i}^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha+2} = 0$$

- jelikož řeší rovnici $x^2y'' + xy' - (x^2+\alpha^2)y = 0$ jak funkce $\mathcal{I}_\alpha(x)$, tak funkce $\mathcal{I}_{-\alpha}(x)$, plyne z teorie diferenciálních rovnic, že ji řeší i jakákoliv jejich lineární kombinace, tedy i modifikovaná Besselova funkce druhého druhu

1.9.31 Věta

Modifikované Besselovy funkce $\mathcal{I}_\alpha(x)$ prvního druhu splňují sadu následujících rekurentních rovností.

$$2\alpha\mathcal{I}_\alpha(x) = x\mathcal{I}_{\alpha-1}(x) - x\mathcal{I}_{\alpha+1}(x). \tag{1.73}$$

$$2\mathcal{I}'_\alpha(x) = \mathcal{I}_{\alpha-1}(x) + \mathcal{I}_{\alpha+1}(x). \tag{1.74}$$

$$x\mathcal{I}'_\alpha(x) = \alpha\mathcal{I}_\alpha(x) + x\mathcal{I}_{\alpha+1}(x). \tag{1.75}$$

$$x\mathcal{I}'_\alpha(x) = -\alpha\mathcal{I}_\alpha(x) + x\mathcal{I}_{\alpha-1}(x). \tag{1.76}$$

Důkaz:

- plyne z lemmatu 1.9.23 a definičního vztahu $\mathcal{I}_\alpha(x) := \mathtt{i}^{-\alpha}\mathcal{J}_\alpha(\mathtt{i}x)$

1.9.32 Poznámka

Modifikované Besselovy funkce $\mathcal{K}_\alpha(x)$ druhého druhu bývají často nazývány také *MacDonaldovými funkcemi.* Jednou z elegantních integrálních reprezentací MacDonaldových funkcí je vztah

$$\int_0^\infty t^\alpha \mathsf{e}^{-\frac{x^2}{4t}}\mathsf{e}^{-t}\,\mathsf{d}t = \frac{1}{2^\alpha}x^{\alpha+1}\mathcal{K}_{\alpha+1}(x). \tag{1.77}$$

Obrázek 1.8
Graf MacDonaldových funkcí $\mathcal{K}_\alpha(x)$.

1.9.33 Lemma

MacDonaldovy funkce $\mathcal{K}_\alpha(x)$ splňují sadu následujících rekurentních rovností.

$$2\alpha\mathcal{K}_\alpha(x) = x\mathcal{K}_{\alpha+1}(x) - x\mathcal{K}_{\alpha-1}(x). \tag{1.78}$$

$$2\mathcal{K}'_\alpha(x) = -\mathcal{K}_{\alpha+1}(x) - \mathcal{K}_{\alpha-1}(x). \tag{1.79}$$

$$x\mathcal{K}'_\alpha(x) = \alpha\mathcal{K}_\alpha(x) - x\mathcal{K}_{\alpha+1}(x). \tag{1.80}$$

$$x\mathcal{K}'_\alpha(x) = -\alpha\mathcal{K}_\alpha(x) - x\mathcal{K}_{\alpha-1}(x). \tag{1.81}$$

1.9.34 Příklad

Nechť $\mathtt{R} > 0$. V množině $\mathbf{R}^2$ vypočtěme integrál

$$\int_{\|\vec{x}\|<\mathtt{R}} \frac{\mathsf{e}^{\mathtt{i}\langle\vec{\xi}\,|\vec{x}\rangle}}{\sqrt{\mathtt{R}^2 - \|\vec{x}\|^2}}\,\mathsf{d}\mu(\vec{x}).$$

Jeho hodnota bude využita při hledání Fourierova obrazu jisté funkce (viz příklad 6.9.6). Užijeme-li větu o substituci, platí

$$\int_{\|\vec{x}\|<\mathtt{R}} \frac{\mathsf{e}^{\mathtt{i}\langle\vec{\xi}\,|\vec{x}\rangle}}{\sqrt{\mathtt{R}^2 - \|\vec{x}\|^2}}\,\mathsf{d}\mu(\vec{x}) = \left|\begin{array}{l} x_1 = \varrho\,\cos(\varphi) \\ x_2 = \varrho\,\sin(\varphi) \\ |\Delta| = \varrho \end{array}\right| = \int_0^{\mathtt{R}}\int_0^{2\pi} \frac{\varrho}{\sqrt{\mathtt{R}^2 - \varrho^2}}\,\mathsf{e}^{\mathtt{i}\|\vec{\xi}\|\varrho\cos(\alpha-\varphi)}\,\mathsf{d}\varphi\mathsf{d}\varrho.$$

Zde bylo využito rovnosti $\langle\vec{\xi}\,|\vec{x}\rangle = \|\vec{\xi}\| \cdot \|\vec{x}\| \cdot \cos(\psi)$, kde ψ reprezentuje úhel mezi vektory $\vec{\xi}$ a $\vec{x}$. Odtud

$$\cos(\psi) = \frac{\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2}{\|\vec{\xi}\| \cdot \|\vec{x}\|} = \frac{\xi_1\,\cos(\varphi) + \xi_2\,\sin(\varphi)}{\|\vec{\xi}\|}.$$

Označíme-li α úhel, který svírá vektor $\vec{\xi}$ kladnou částí osy x, pak platí

$$\cos(\psi) = \cos(\alpha)\,\cos(\varphi) + \sin(\alpha)\,\sin(\varphi) = \cos(\alpha - \varphi).$$

Odtud po drobné úpravě již plyne vztah

$$\int_{\|\vec{x}\|<\mathtt{R}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle\vec{\xi}|\vec{x}\rangle}}{\sqrt{\mathtt{R}^2-\|\vec{x}\|^2}}\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) = \int_0^{\mathtt{R}}\int_0^{2\pi} \frac{\varrho}{\sqrt{\mathtt{R}^2-\varrho^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\|\vec{\xi}\|\varrho\cos(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varrho.$$

Jelikož

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\cos(t)}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathcal{J}_0(a),$$

kde $\mathcal{J}_k(x)$ je Besselova funkce řádu k v bodě x, platí dále

$$\int_0^{\mathtt{R}}\int_0^{2\pi} \frac{\varrho}{\sqrt{\mathtt{R}^2-\varrho^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\|\vec{\xi}\|\varrho\cos(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varrho = 2\pi\int_0^{\mathtt{R}} \frac{\varrho\,\mathcal{J}_0(\varrho\,\|\vec{\xi}\|)}{\sqrt{\mathtt{R}^2-\varrho^2}}\,\mathrm{d}\varrho = \left|\begin{array}{c} \varrho = \mathtt{R}\,u \\ \mathrm{d}\varrho = \mathtt{R}\,\mathrm{d}u \end{array}\right| =$$

$$= 2\pi\mathtt{R}\int_0^1 \mathcal{J}_0(\mathtt{R}\|\vec{\xi}\|\,u)\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = 2\pi\frac{\sin\left(\mathtt{R}\|\vec{\xi}\|\right)}{\|\vec{\xi}\|}.$$

1.9.35 Příklad

Pokusme se vypočítat integrál $\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2+\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x$. Užijeme přitom znalosti tzv. *Fresnelova integrálu*

$$\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

Jeho hodnota může být odvozena na základě teorie integrálů z funkcí komplexní proměnné. Pro náš výpočet dále

$$\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2+\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty,M\to\infty}\int_{-M}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2+\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty,M\to\infty}\int_{-M}^{N} \exp\left[\mathrm{i}\left(x+\frac{\xi}{2}\right)^2-\frac{\mathrm{i}}{4}\xi^2\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{4}\xi^2}\lim_{N\to\infty,M\to\infty,}\int_{-M+\frac{\xi}{2}}^{N+\frac{\xi}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}y^2}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{4}\xi^2}\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}y^2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{4}(\xi^2-\pi)}.$$

Odtud pak plyne, že

$$\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2+\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{4}(\xi^2-\pi)}. \tag{1.82}$$

1.9.36 Příklad

Tento příklad budeme věnovat výpočtům tzv. *úplných eliptických integrálů*, jejichž hodnoty bývají hojně užívány v celé řadě matematických i fyzikálních partií. Nechť tedy $k\in\langle -1,1\rangle$ je pevně zvolený parametr. Spočtěme hodnotu integrálu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+k^2\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Užijeme Maclaurinova rozvoje funkce $(1+t)^a$, pro nějž bylo v [11] dokázáno, že

$$(1+t)^a = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}t^n, \qquad t\in\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \dots & a\in\mathbf{N}_0 \\ \langle -1,1\rangle & \dots & a\in\mathbf{R}^+\setminus\mathbf{N} \\ (-1,1\rangle & \dots & a\in(-1,0) \\ (-1,1) & \dots & a\leqslant -1. \end{array}\right.$$

Připomínáme, že zobecněné kombinační číslo je pro $a\in\mathbf{R}$ a $n\in\mathbf{N}$ definováno předpisem

$$\binom{a}{0} := 1, \qquad \binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}.$$

Za pomoci těchto poznatků lze provádět následující výpočet.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+k^2\sin^2(x)\right)^{1/2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}k^{2n}\cdot\sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} k^{2n} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Na tomto místě poznamenáváme, že záměna sumy a integrálu mohla být provedena díky stejnoměrné konvergenci řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} k^{2n} \cdot \sin^{2n}(x)$$

na množině $M = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Tuto stejnoměrnou konvergenci korektně vyšetříme v rámci příkladu 1.9.37. Díky možnosti této záměny a díky vztahu (1.62) lze v prováděném výpočtu pokračovat následovně.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + k^2 \sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} k^{2n} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} k^2 + \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} k^2 + \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n}.$$

Výpočet uzavíráme shrnující výsledkem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + k^2 \sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} k^2 + \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!\,(2n-1)!!}{\big((2n)!!\big)^2} k^{2n}. \tag{1.83}$$

Zbývá rozřešit zásadní otázku, pro která $k \in \mathbf{R}$ prezentovaná rovnost platí. Řešit tuto otázku znamená de facto vyšetřovat obor konvergence uvedené řady. Vypočtěme tedy nejprve poloměr konvergence řady. Pro jeho převrácenou hodnotu platí (z teorie o mocninných řadách - viz [11]) vztah

$$\mathtt{R}^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!\,(2n+1)!!}{(2n+2)!!\,(2n+2)!!} \cdot \frac{(2n)!!\,(2n)!!}{(2n-3)!!\,(2n-3)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+2)(2n+2)} = 1,$$

a poloměr konvergence $\mathtt{R}$ je tudíž jednotkový. Ještě je ovšem nutno rozřešit otázku konvergence v krajních bodech $k = \pm\mathtt{R} = \pm 1$. Zde s výhodou využijeme Raabeova kritéria. Jelikož je limita

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{(2n+2)(2n+2)}{(2n-1)(2n+1)} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} n \, \frac{4n^2 + 8n + 4 - 4n^2 - 1}{4n^2 - 1} = 2$$

větší než jedna, konvergují obě zkoumané číselné řady dokonce absolutně. Shrnujeme tedy, že vztah (1.83) platí pro $k \in \langle -1, 1 \rangle$. Čtenář se může sám přesvědčit, že řada (1.83) konverguje na svém oboru konvergence $\mathcal{O} = \langle -1, 1 \rangle$ navíc i stejnoměrně.

1.9.37 Příklad

Jako podpora předešlého příkladu zkoumejme nyní stejnoměrnou konvergenci funkční řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} k^{2n} \cdot \sin^{2n}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \cdot \sin^{2n}(x) \tag{1.84}$$

na množině $M = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Jelikož na množině M platí nerovnost

$$\left| (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \cdot \sin^{2n}(x) \right| \leqslant \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n},$$

je číselná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n}$$

s parametrem $k \in \mathbf{R}$ majorantní číselnou řadou k řadě vyšetřované. Navíc je podle předešlého příkladu pro $k \in \langle -1, 1 \rangle$ řadou konvergentní. Z Weierstrassova kritéria ihned vyplývá, že řada (1.84) konverguje na množině M stejnoměrně.

1.9.38 Příklad

Jako dalšího zástupce eliptických integrálů budeme zkoumat integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+k^2\sin^2(x)}}\,\mathrm{d}x.$$

Opět užijeme Maclaurinova rozvoje funkce $(1+t)^a$ a obdržíme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+k^2\sin^2(x)\right)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} k^{2n}\cdot\sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ n \end{pmatrix} k^{2n}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Na tomto místě analogicky jako příkladě 1.9.36 poznamenáváme, že záměna sumy a integrálu může být provedena díky stejnoměrné konvergenci příslušné řady. Pak tedy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+k^2\sin^2(x)}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} k^{2n}\cdot\frac{\pi}{2}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,k^{2n} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,k^{2n}.$$

Výpočet uzavíráme shrnující výsledkem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+k^2\sin^2(x)}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 k^{2n}. \tag{1.85}$$

Dále zjistíme, pro která $k\in\mathbf{R}$ prezentovaná rovnost platí. Pro převrácenou hodnotu poloměru konvergence platí

$$\mathtt{R}^{-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!\,(2n+1)!!}{(2n+2)!!\,(2n+2)!!}\cdot\frac{(2n)!!\,(2n)!!}{(2n-1)!!\,(2n-1)!!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+1)}{(2n+2)(2n+2)} = 1,$$

a poloměr konvergence $\mathtt{R}$ je tudíž jednotkový. Ještě je ovšem nutno rozřešit otázku konvergence v krajních bodech $k=\pm\mathtt{R}=\pm1$. Zde opětovně využijeme zobecněného Raabeova kritéria. V tomto případě je ale limita

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+2)(2n+2)}{(2n+1)(2n+1)}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{4n^2+8n+4-4n^2-4n-4}{4n^2+4n+1} = 1$$

jednotková, což značí, že o absolutní konvergenci nelze aktuálně rozhodnout. Jelikož je ale řada (1.85) v obou krajních bodech $k=\pm1$ řadou střídavých znamének, je podle zobecněného Raabeova kritéria řada (1.85) konvergentní pro $k\in\langle-1,1\rangle$.

Kapitola 2

Úvod do teorie pravděpodobnosti

S ohledem na praktické aplikace, jejichž matematické pozadí je v rámci těchto skript probíráno, nabídneme v této kapitole čtenáři také krátký vhled do úvodních partií teorie pravděpodobnosti. Hlavní motivací k sepsání této partie je přitom především zavedení operace konvoluce tak, aby čtenář nenabyl dojmu, že se jedná o ryze abstraktní operaci bez konkrétních aplikací.

2.1 Elementární pojmy axiomatické teorie pravděpodobnosti

Budeme-li uvažovat jistý náhodný proces (hru, fyzikální pokus nebo např. sociální experiment) bude základním pojmem množina všech přípustných výsledků tohoto procesu. Tuto množinu budeme nazývat *základním pravděpodobnostním prostorem* a označovat symbolem Ω. Množinu Ω bývá zvykem též pojmenovávat výrazem *jistý jev.* Všechny ostatní jevy jsou v jistém smyslu podmnožinou základního prostoru Ω. To upřesníme v dalším textu.

2.1.1 Poznámka

Libovolný možný výsledek náhodného procesu značíme symbolem $\omega \in \Omega$ a nazýváme ho *elementárním jevem.* Při hodu kostkou je tedy $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a jedním z elementárních jevů je např. $\omega = 5$, což je označení skutečnosti, že při jednom hodu kostkou padne pětka.

2.1.2 Poznámka

Sjednocení libovolných elementárních jevů budeme nazývat *jevem* a značit velkým písmenem, např. A, B, C atd. Libovolný jev je tudíž podmnožinou základního pravděpodobnostního prostoru Ω. Jev, který nastat nemůže, označíme symbolem $\emptyset$ prázdné množiny a nazveme *nemožným jevem.*

2.1.3 Definice

Řekneme, že jev $A \subset \Omega$ je *komplementární* k jevu $B \subset \Omega$ a označíme $A^{\mathsf{C}} = B$, pokud $A = \Omega \setminus B$.

2.1.4 Definice

Nechť jsou dány jevy $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$. *Sjednocením* jevů $A_1, A_2, \dots, A_n$ rozumíme jev, který nastane právě tehdy, když nastane alespoň jeden z jevů $A_1, A_2, \dots, A_n$. Označíme ho symbolem $\cup_{i=1}^n A_i$.

2.1.5 Definice

Nechť jsou dány jevy $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$. *Průnikem* jevů $A_1, A_2, \dots, A_n$ rozumíme jev, který nastane právě tehdy, když nastanou všechny jevy $A_1, A_2, \dots, A_n$ zároveň. Označíme ho symbolem $\cap_{i=1}^n A_i$.

2.1.6 Definice

Nechť jsou dány jevy $A, B \subset \Omega$. Řekneme, že jevy A a B jsou *disjunktní (neslučitelné),* pokud nemohou nastat současně, tj. pokud $A \cap B = \emptyset$.

2.1.7 Definice

Nechť jsou dány jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ tak, že pro každé $i, j \in \widehat{n}$ platí implikace

$$i \neq j \quad \Longrightarrow \quad A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Pak sjednocení $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$ jevů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nazveme *disjunktním* a označíme symbolem $A = \uplus_{i=1}^{n} A_i$.

2.1.8 Definice

Nechť jsou dány jevy $A, B \subset \Omega$. Řekneme, že jev A *implikuje* jev B nebo jev B *má za následek* jev A, jestliže jev B nastane vždy, když nastane jev A. Tuto vlastnost označíme symbolem $A \subset B$.

2.1.9 Věta

Pro libovolné jevy $A, B, C \subset \Omega$ platí:

1. $A \subset A$
2. $A \subset B \wedge B \subset C \quad \Longrightarrow \quad A \subset C$
3. $A \cap A = A$ a $A \cup A = A$
4. $A \cap B = B \cap A$ a $A \cup B = B \cup A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ a $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
6. $\emptyset \subset A \subset \Omega$
7. $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$
8. $\emptyset \cap A = \emptyset$ a $\emptyset \cup A = A$
9. $\Omega \cap A = A$ a $\Omega \cup A = \Omega$
10. $\left(A^{\mathsf{C}}\right)^{\mathsf{C}} = A$
11. $(A \cup B)^{\mathsf{C}} = A^{\mathsf{C}} \cap B^{\mathsf{C}}$ a $(A \cap B)^{\mathsf{C}} = A^{\mathsf{C}} \cup B^{\mathsf{C}}$ (de Morganovy vzorce)

Důkaz:

- jedná se o zřejmý důsledek příslušných definic

2.2 Axiomatická definice pravděpodobnosti

Způsobů, jak vybudovat teorii pravděpodobnosti je více. My se v tomto textu přidržíme axiomatické výstavby pojmu pravděpodobnost, kdy s výhodou využijeme obecné poznatky z teorie míry.

2.2.1 Definice

Nechť je dán základní pravděpodobností prostor Ω. Nechť $\mathscr{X} \subset 2^{\Omega}$ je množinová sigma-algebra a $\Omega \in \mathscr{X}$ její prezident. Pak každou sigma-aditivní míru $\mathrm{P}(X) : \mathscr{X} \mapsto \langle 0, 1 \rangle$ nazýváme *pravděpodobnostní mírou (pravděpodobností)* na $\mathscr{X}$, pokud je tzv. *normalizovaná,* tj. platí-li, že

$$\mathrm{P}[\Omega] = 1.$$

2.2.2 Poznámka

Díky definici 2.2.1 splňuje každá pravděpodobnostní míra následující axiomy známé z obecné definice míry (viz definice 3.1.18, str. 167 v [12]):

1. *axiom nulové množiny:* $\emptyset \in \mathscr{X}$, kde symbol $\emptyset$ reprezentuje nemožný jev,
2. *axiom míry nulové množiny:* $\mathrm{P}[\emptyset] = 0$,
3. *axiom nezápornosti*: $\forall X \in \mathscr{X} : \mathrm{P}[X] \geqslant 0$,
4. *axiom monotónie*: $X_1 \subset X_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{P}[X_1] \leqslant \mathrm{P}[X_2]$,
5. *axiom aditivity*: $\mathrm{P}[X_1 \uplus X_2] = \mathrm{P}[X_1] + \mathrm{P}[X_2]$,
6. *axiom normality*: $\mathrm{P}[\Omega] = 1$.
7. *axiom $\sigma-$aditivity*: $\mathrm{P}[\uplus_{\ell=1}^{\infty} X_\ell] = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathrm{P}[X_\ell]$.

Pro jistotu upozorňujeme, že symbol $\uplus$ reprezentuje disjunktní sjednocení.

2.2.3 Definice

Nechť je dán základní pravděpodobností prostor Ω, $\sigma-$algebra $\mathscr{X} \subset 2^\Omega$ $\mathrm{P}-$měřitelných množin a příslušná pravděpodobnostní míra $\mathrm{P}(X) : \mathscr{X} \mapsto \langle 0, 1\rangle$. Pak trojici $\{\Omega, \mathscr{X}, \mathrm{P}\}$ budeme nazývat *pravděpodobnostním prostorem.*

2.2.4 Definice

Nechť jsou dány jevy $A, B \subset \Omega$. Řekneme, že jevy A a B jsou *nezávislé,* jestliže platí

$$\mathrm{P}[A \cap B] = \mathrm{P}[A] \cdot \mathrm{P}[B].$$

2.2.5 Definice

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $\{\Omega, \mathscr{X}, \mathrm{P}\}$. Každé zobrazení $\mathcal{X} :\ \Omega \mapsto \mathbf{R}$ takové, že pro každé $c \in \mathbf{R}$ platí

$$\mathcal{X}^{-1}\big((-\infty, c\rangle\big) = \big\{\omega \in \Omega :\ \mathcal{X}(\omega) \leqslant c\big\} \in \mathscr{X}, \tag{2.1}$$

nazveme *náhodnou veličinou.*

2.2.6 Poznámka

Vztah (2.1) vlastně požaduje, aby vzory všech intervalů $(-\infty, c\rangle$ byly $\mathrm{P}-$měřitelnými množinami. Z hlediska obecné teorie míry je definice náhodné veličiny de facto shodná s definicí měřitelné funkce (viz definice 4.1.5, str. 201 ve skriptech [12]).

2.2.7 Poznámka

Symbolem $\mathrm{P}[\mathcal{X} < x]$ budeme označovat pravděpodobnost, že náhodná veličina $\mathcal{X}$ nabude hodnoty menší než x. Podobně označuje symbol $\mathrm{P}[\mathcal{X} \in A]$ pravděpodobnost, že náhodná veličina $\mathcal{X}$ nabude hodnoty z množiny A. Alternativně to zapisujeme též znakem $\mathrm{P}[A]$, není-li nutné explicitně zmiňovat o jakou náhodnou veličinu se jedná. Analogicky dále zavádíme symboly $\mathrm{P}[\mathcal{X} \geqslant x]$, $\mathrm{P}[\mathcal{X} = 7]$, $\mathrm{P}[\mathbf{N}]$ a podobně.

2.2.8 Definice

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $\{\Omega, \mathscr{X}, \mathrm{P}\}$ a náhodná veličina $\mathcal{X} :\ \Omega \mapsto \mathbf{R}$. Reálnou funkci zavedenou předpisem

$$F_{\mathcal{X}}(x) := \mathrm{P}[\mathcal{X} \leqslant x]$$

nazýváme *distribuční funkcí* náhodné veličiny $\mathcal{X}$.

2.2.9 Poznámka

Je-li pravděpodobnost $\mathrm{P}(X) : \mathscr{X} \mapsto \langle 0,1\rangle$ definována jako míra, pak distribuční funkce $F_{\mathcal{X}}(x)$ představuje de facto vytvořující funkci míry. Jako taková musí splňovat následující předpoklady:

- je neklesající na $\mathbf{R}$,
- $\mathrm{Ran}(F) \subset \langle 0,1\rangle$,
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$,
- $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$,
- $F(x)$ je spojitá zprava na $\mathbf{R}$, tj. pro každé $c \in \mathbf{R}$ platí $\lim_{x\to c_+} F(x) = F(c)$,
- $F(x)$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.

2.3 Absolutně spojitá náhodná veličina

Nejprve se budeme zabývat speciálními případy jednorozměrných náhodných veličin. Vybereme přitom pouze ty, které mají přímou vazbu k teorii, jež je náplní těchto skript, tj. k teorii parciálních diferenciálních rovnic.

2.3.1 Definice

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $\{\Omega, \mathscr{X}, \mathrm{P}\}$ a náhodná veličina $\mathcal{X} : \Omega \mapsto \mathbf{R}$. Řekneme, že náhodná veličina $\mathcal{X}$ má *absolutně spojité rozdělení,* existuje-li nezáporná funkce $f_{\mathcal{X}}(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ taková, že pro distribuční funkci $F_{\mathcal{X}}(x)$ náhodné veličiny $\mathcal{X}$ platí

$$F_{\mathcal{X}}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\mathcal{X}}(t)\,\mathrm{d}t.$$

2.3.2 Definice

Nechť je dána náhodná veličina $\mathcal{X}$. Existuje-li pro ni funkce $f_{\mathcal{X}}(x)$ z předešlé definice, pak tuto funkci $f_{\mathcal{X}}(x)$ nazýváme *hustotou pravděpodobnosti* náhodné veličiny $\mathcal{X}$.

2.3.3 Úmluva

V dalším textu předpokládáme, že je pevně zvolen pravděpodobnostní prostor $\{\Omega, \mathscr{X}, \mathrm{P}\}$.

2.3.4 Věta

Nechť má náhodná veličina $\mathcal{X}$ absolutně spojité rozdělení. Nechť $F_{\mathcal{X}}(x)$ je její distribuční funkce a $f_{\mathcal{X}}(x)$ její hustota pravděpodobnosti. Potom ve všech bodech, kde existuje derivace funkce $F_{\mathcal{X}}(x)$, platí

$$f_{\mathcal{X}}(x) = \frac{\mathrm{d}F_{\mathcal{X}}}{\mathrm{d}x}(x). \tag{2.2}$$

Důkaz:

- plyne z vlastnosti integrálu a derivace

2.3.5 Poznámka

Pro hustotu pravděpodobnosti platí z výše uvedeného tzv. *normalizační podmínka* tvaru

$$\int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Formální součin $f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x$ pak (velmi populárně řečeno) představuje pravděpodobnost, že náhodně vybrané x padne do intervalu $(x, x + \mathrm{d}x)$.

2.3.6 Poznámka

Každá nezáporná funkce $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, pro níž

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

může být chápána jako hustota pravděpodobnosti určité jednorozměrné náhodné veličiny.

2.3.7 Věta

Nechť má náhodná veličina $\mathcal{X}$ absolutně spojité rozdělení s hustotou pravděpodobnosti $f_{\mathcal{X}}(x)$. Potom pro každou množinu $A = (a, b\rangle$, kde $a, b \in \mathbf{R}^\star$ a $a \leqslant b$, platí

$$\mathrm{P}\big[\mathcal{X} \in A\big] = \int_A f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz:

- označme $F_{\mathcal{X}}(x)$ příslušnou distribuční funkci
- pak

$$\mathrm{P}\big[a < \mathcal{X} \leqslant b\big] = F_{\mathcal{X}}(b) - F_{\mathcal{X}}(a) = \int_{-\infty}^{b} f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{a} f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x$$

2.3.8 Poznámka

Předešlá věta zůstává v platnosti i pro obecné množiny A, tedy ne pouze pro intervaly.

2.3.9 Definice

Nechť je dána náhodná veličina $\mathcal{X}$, jež má absolutně spojité rozdělení, a příslušná hustota pravděpodobnosti $f_{\mathcal{X}}(x)$. Konverguje-li integrál

$$\int_{\mathbf{R}} x f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x,$$

pak jeho hodnotu nazýváme *střední hodnotou* náhodné veličiny $\mathcal{X}$ (*expected value of* $\mathcal{X}$) a značíme jedním ze symbolů $\mathtt{E}(\mathcal{X})$ nebo $\langle x\rangle$.

2.3.10 Definice

Nechť je dána náhodná veličina $\mathcal{X}$, příslušná hustota pravděpodobnosti $f_{\mathcal{X}}(x)$ a její střední hodnota $\langle x\rangle$. Konverguje-li integrál

$$\int_{\mathbf{R}} \big(x - \langle x\rangle\big)^2 f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.3}$$

pak příslušnou hodnotu nazýváme *rozptylem* náhodné veličiny $\mathcal{X}$ (*variance of* $\mathcal{X}$) a značíme symbolem $\mathtt{VAR}(\mathcal{X})$.

2.3.11 Věta

Nechť je dána náhodná veličina $\mathcal{X}$ a její střední hodnota $\langle x\rangle$. Konverguje-li integrál $\int_{\mathbf{R}} x^2 f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x$, pak platí

$$\mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \int_{\mathbf{R}} x^2 f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x - \langle x\rangle^2 \geqslant 0,$$

tj. $\mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \mathtt{E}(\mathcal{X}^2) - \big(\mathtt{E}(\mathcal{X})\big)^2$.

Důkaz:

- snadno vypočteme

$$\big\langle (x - \langle x\rangle)^2\big\rangle = \int_{\mathbf{R}} \big(x - \langle x\rangle\big)^2 f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} x^2 f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_{\mathbf{R}} x\langle x\rangle f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}} \langle x\rangle^2 f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \langle x^2\rangle - 2\langle x\rangle \underbrace{\int_{\mathbf{R}} x f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x}_{=\langle x\rangle} + \langle x\rangle^2 \underbrace{\int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x}_{=1} = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \mathtt{E}(\mathcal{X}^2) - \mathtt{E}^2(\mathcal{X})$$

- to, že $\mathtt{VAR}(\mathcal{X}) \geqslant 0,$ plyne bezprostředně z faktu, že integrand $(x - \langle x \rangle)^2$ v definičním vztahu (2.3) je nezápornou funkcí

2.3.12 Definice

Nechť je dána náhodná veličina $\mathcal{X}$ a její rozptyl $\mathtt{VAR}(\mathcal{X})$. *Směrodatnou odchylkou* (standard deviation) rozumíme hodnotu

$$\mathtt{SD}(\mathcal{X}) := \sqrt{\mathtt{VAR}(\mathcal{X})}.$$

2.3.13 Definice

Řekneme, že náhodná veličina $\mathcal{X}$ má *rovnoměrné rozdělení* (uniform distribution) s parametry $a, b \in \mathbf{R}$ $(a < b)$ a označíme $\mathcal{X} \backsim U_{(a,b)}$, pokud pro její hustotu pravděpodobnosti platí vztah

$$f_{\mathcal{X}}(x) = \frac{\Theta(x-a)\cdot\Theta(b-x)}{b-a}.$$

2.3.14 Věta

Nechť $\mathcal{X} \backsim U_{(a,b)}$. Pak

$$\langle x \rangle = \frac{a+b}{2}, \quad \mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- snadno nahlédneme, že hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení je správně normalizovaná, neboť

$$\int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = 1$$

- dále

$$\mathtt{E}(\mathcal{X}) = \int_{\mathbf{R}} x\, f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$$

- pro výpočet rozptylu užijeme nejprve pomocný výpočet

$$\mathtt{E}(\mathcal{X}^2) = \int_{\mathbf{R}} x^2\, f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

- podle věty 2.3.11 pak snadno

$$\mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \mathtt{E}(\mathcal{X}^2) - \mathtt{E}^2(\mathcal{X}) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

2.3.15 Definice

Řekneme, že náhodná veličina $\mathcal{X}$ má *Gaussovo (normální) rozdělení* (Gaussian normal distribution) s parametry $\mu, \sigma \in \mathbf{R}$ a označíme $\mathcal{X} \backsim N_{(\mu,\sigma)}$, pokud pro její hustotu pravděpodobnosti platí vztah

$$f_{\mathcal{X}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathsf{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

2.3.16 Věta

Nechť $\mathcal{X} \backsim N_{(\mu,\sigma)}$. Pak

$$\langle x \rangle = \mu, \quad \mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \sigma^2.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- snadno nahlédneme, že hustota pravděpodobnosti Gaussova rozdělení je správně normalizovaná, neboť

$$\int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathsf{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}\sigma} \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbf{R}} \mathsf{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y \overset{(1.50)}{=} 1$$

- dále

$$\mathtt{E}(\mathcal{X}) = \int_{\mathbf{R}} x\, f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \frac{x-\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \mu,$$

  kde jsme s výhodou užili faktu, že první z integrálů je nulový díky liché symetrii integrandu a druhý z integrálů je normalizačním integrálem pouze přenásobeným konstantou μ

- pro výpočet rozptylu užijeme nejprve pomocný výpočet

$$\mathtt{E}(\mathcal{X}^2) = \int_{\mathbf{R}} x^2\, f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \frac{(x-\mu+\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}} \frac{2(x-\mu)\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}} \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x + \mu^2 =$$

$$= \left| \begin{array}{c} y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}\sigma} \end{array} \right| = \mu^2 + 2\sigma^2 \int_{\mathbf{R}} \frac{y^2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x = \mu^2 + 2\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \mu^2 + \sigma^2,$$

  kde bylo využito odvozeného vztahu (1.51)

- podle věty 2.3.11 pak snadno $\mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \mathtt{E}(\mathcal{X}^2) - \mathtt{E}^2(\mathcal{X}) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$

2.3.17 Definice

Řekneme, že náhodná veličina $\mathcal{X}$ má *exponenciální rozdělení* (exponential distribution) s parametry $\mu, \beta \in \mathbf{R}$ a označíme $\mathcal{X} \backsim Exp_{(\mu,\beta)}$, pokud pro její hustotu pravděpodobnosti platí vztah

$$f_{\mathcal{X}}(x) = \Theta(x-\mu)\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\beta}}.$$

2.3.18 Věta

Nechť $\mathcal{X} \backsim Exp_{(\mu,\beta)}$. Pak

$$\langle x \rangle = \mu + \beta, \quad \mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \beta^2.$$

Důkaz:

- snadno nahlédneme, že hustota pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení je správně normalizovaná, neboť

$$\int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \Theta(x-\mu)\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\beta}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mu}^{\infty} \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\beta}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} y = \frac{x-\mu}{\beta} \\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{\beta} \end{array} \right| = \int_0^1 \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = 1$$

- dále

$$\mathtt{E}(\mathcal{X}) = \int_{\mathbf{R}} x\, f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \Theta(x-\mu)\frac{x}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\beta}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mu}^{\infty} \frac{x-\mu+\mu}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\beta}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} y = \frac{x-\mu}{\beta} \\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{\beta} \end{array} \right| =$$

$$= \beta \int_0^1 y\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y + \mu \int_0^1 \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \beta + \mu$$

  kde užili rovnosti (1.49)

- pro výpočet rozptylu užijeme nejprve pomocný výpočet

$$\mathtt{E}(\mathcal{X}^2) = \int_{\mathbf{R}} x^2\, f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \Theta(x-\mu)\frac{x^2}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\beta}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mu}^{\infty} \frac{x^2}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\beta}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} y = \frac{x-\mu}{\beta} \\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{\beta} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\infty} (\mu+\beta y)^2\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \mu^2 \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y + 2\mu\beta \int_0^{\infty} y\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y + \beta^2 \int_0^{\infty} y^2\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y \overset{(1.49)}{=} \mu^2 + 2\mu\beta + 2\beta^2$$

- podle věty 2.3.11 pak snadno

$$\mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \mathtt{E}(\mathcal{X}^2) - \mathtt{E}^2(\mathcal{X}) = \mu^2 + 2\mu\beta + 2\beta^2 - (\beta+\mu)^2 = \beta^2$$

2.3.19 Definice

Řekneme, že náhodná veličina $\mathcal{X}$ má *Gamma rozdělení* (Gamma distribution) s parametry $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ $(\alpha > 1, \beta > 0)$ a označíme $\mathcal{X} \backsim Gamma_{(\alpha,\beta)}$, pokud pro její hustotu pravděpodobnosti platí vztah

$$f_{\mathcal{X}}(x) = \frac{\Theta(x)}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}}.$$

2.3.20 Věta

Nechť $\mathcal{X} \backsim Gamma_{(\alpha,\beta)}$. Pak

$$\langle x \rangle = \alpha\beta, \quad \mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \alpha\beta^2.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- nejprve prověříme, zda je skutečně normalizační integrál $\int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x$ jednotkový
- protože ale

$$\int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \frac{\Theta(x)}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \beta y \\ \mathrm{d}x = \beta \mathrm{d}y \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y \overset{(1.52)}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha) = 1,$$

  je funkce $f_{\mathcal{X}}(x) = \frac{\Theta(x)}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}}$ skutečně hustotou pravděpodobnosti

- dále

$$\mathtt{E}(\mathcal{X}) = \int_{\mathbf{R}} x\, f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty x^{\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \beta y \\ \mathrm{d}x = \beta \mathrm{d}y \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^{\alpha}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y \overset{(1.52)}{=} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+1) \overset{(1.53)}{=} \alpha\beta$$

- střední hodnotou Gamma rozdělení je tedy součin obou parametrů rozdělení
- dále

$$\mathtt{E}(\mathcal{X}^2) = \int_{\mathbf{R}} x^2\, f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty x^{\alpha+1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \beta y \\ \mathrm{d}x = \beta \mathrm{d}y \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^{\alpha+1}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y \overset{(1.52)}{=} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+2) \overset{(1.53)}{=} \beta^2(\alpha+1)\alpha$$

- odsud už lehce dovozujeme, že rozptylem zkoumaného rozdělení je hodnota

$$\mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \mathtt{E}(\mathcal{X}^2) - \mathtt{E}^2(\mathcal{X}) = \beta^2(\alpha+1)\alpha - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2,$$

  což bylo dokázat

2.4 Vícerozměrná náhodná veličina

Nyní rozšíříme pojmy náhodné veličiny, distribuční funkce a hustoty pravděpodobnosti na vícerozměrné případy.

2.4.1 Definice

Nechť $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jsou náhodné veličiny. *Sdruženou distribuční funkci* náhodných veličin $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ definujeme pro všechna $(x, y) \in \mathbf{E}^2$ předpisem

$$F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = \mathrm{P}\left(\left[\mathcal{X} \leqslant x\right]\left[\mathcal{Y} \leqslant y\right]\right). \tag{2.4}$$

2.4.2 Věta

Nechť $F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y)$ je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Potom pro všechna $x_1 \leqslant x_2$ a $y_1 \leqslant y_2$ platí nerovnost

$$F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x_1,y_1) \leqslant F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x_1,y_2).$$

Důkaz:

- důkaz plyne přímo z definičního vztahu (2.4), neboť

$$F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x_1,y_1) = \mathrm{P}\left(\left[\mathcal{X} \leqslant x_1\right]\left[\mathcal{Y} \leqslant y_1\right]\right) \leqslant \left| \begin{array}{c} x_1 \leqslant x_2 \\ y_1 \leqslant y_2 \end{array} \right| \leqslant \mathrm{P}\left(\left[\mathcal{X} \leqslant x_1\right]\left[\mathcal{Y} \leqslant y_2\right]\right) \leqslant F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x_1,y_2)$$

2.4.3 Věta

Nechť $F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y)$ je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Potom

$$\forall y \in \mathbf{R}: \quad \lim_{x\to-\infty} F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x\to\infty} F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y) = F_{\mathcal{Y}}(y)$$

a také

$$\forall x \in \mathbf{R}: \quad \lim_{y\to-\infty} F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{y\to\infty} F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y) = F_{\mathcal{X}}(x).$$

Důkaz:

- důkaz plyne přímo z definičního vztahu (2.4) a z definice pravděpodobnostní míry, neboť např.

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{P}\left(\left[\mathcal{X} \leqslant x\right]\left[\mathcal{Y} \leqslant y\right]\right) = 0$$

- dále

$$\lim_{x\to\infty} F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y) = \lim_{x\to\infty} \mathrm{P}\left(\left[\mathcal{X} \leqslant x\right]\left[\mathcal{Y} \leqslant y\right]\right) = \mathrm{P}\left(\left[\mathcal{X} \in \mathbf{R}\right]\left[\mathcal{Y} \leqslant y\right]\right) = \mathrm{P}\left(\left[\mathcal{Y} \leqslant y\right]\right)$$

- výraz na pravé straně zjevně konverguje a jeho hodnota závisí na proměnné y
- definujme tedy $F_{\mathcal{Y}}(y) := \mathrm{P}\left(\left[\mathcal{Y} \leqslant y\right]\right)$
- tato funkce je tudíž jakousi dílčí distribuční funkcí

2.4.4 Definice

Nechť $F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y)$ je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Potom funkce $F_{\mathcal{X}}(x)$ a $F_{\mathcal{Y}}(y)$ z předešlé věty budeme nazývat *marginálními distribučními funkcemi* náhodného vektoru $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Veličiny $\mathcal{X}$, resp. $\mathcal{Y}$ nazýváme analogicky *marginálními náhodnými veličinami.*

2.4.5 Definice

Řekneme, že náhodné veličiny $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jsou *(statisticky) nezávislé,* jestliže jsou jevy

$$\left[a < \mathcal{X} \leqslant b\right], \quad \left[c < \mathcal{Y} \leqslant d\right]$$

nezávislé pro všechny $a,b,c,d \in \mathbf{R}^\star$, pro které $a \leqslant b$ a $c \leqslant d$.

2.4.6 Věta

Náhodné veličiny $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ jsou nezávislé právě tehdy, když pro každou dvojici $(x,y) \in \mathbf{E}^2$ platí rovnost

$$F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y) = F_{\mathcal{X}}(x) \cdot F_{\mathcal{Y}}(y),$$

tj. sdružená distribuční funkce $F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y)$ je rovna součinu tzv. *marginálních distribučních funkcí* $F_{\mathcal{X}}(x)$ a $F_{\mathcal{Y}}(y)$.

Důkaz:

- předpokládejme nejprve, že $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou nezávislé náhodné veličiny, tj. pro všechny $a, b, c, d \in \mathbf{R}^\star$, pro něž $a \leqslant b$ a $c \leqslant d$, platí
$$\mathrm{P}\left(\left[a < \mathcal{X} \leqslant b\right], \left[c < \mathcal{Y} \leqslant d\right]\right) = \mathrm{P}\left(\left[a < \mathcal{X} \leqslant b\right]\right) \cdot \mathrm{P}\left(\left[c < \mathcal{Y} \leqslant d\right]\right)$$
- položíme-li v předešlém výraze $a = -\infty$, $b = x$, $c = -\infty$, $d = y$, pak pro libovolnou uspořádanou dvojici $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ platí sada rovností
$$F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = \mathrm{P}\left(\left[-\infty < \mathcal{X} \leqslant x\right]\left[-\infty < \mathcal{Y} \leqslant y\right]\right) = \mathrm{P}\left(\left[-\infty < \mathcal{X} \leqslant x\right]\right) \cdot \mathrm{P}\left(\left[-\infty < \mathcal{Y} \leqslant y\right]\right) = F_{\mathcal{X}}(x) \cdot F_{\mathcal{Y}}(y)$$
- obrácenou implikaci prokáže sada rovností
$$\mathrm{P}\left(\left[a < \mathcal{X} \leqslant b\right], \left[c < \mathcal{Y} \leqslant d\right]\right) = F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(b, d) - F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(b, yc) - F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(a, d) + F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(a, c) =$$
$$= F_{\mathcal{X}}(b)F_{\mathcal{Y}}(d) - F_{\mathcal{X}}(b)F_{\mathcal{Y}}(c) - F_{\mathcal{X}}(a)F_{\mathcal{Y}}(d) + F_{\mathcal{X}}(a)F_{\mathcal{Y}}(c) = \big(F_{\mathcal{X}}(b) - F_{\mathcal{X}}(a)\big)\big(F_{\mathcal{Y}}(d) - F_{\mathcal{Y}}(c)\big) =$$
$$= \mathrm{P}\left(\left[a < \mathcal{X} \leqslant b\right]\right) \cdot \mathrm{P}\left(\left[c < \mathcal{Y} \leqslant d\right]\right)$$

2.4.7 Definice

Řekneme, že náhodné veličiny $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ mají *sdružené absolutně spojité rozdělení,* jestliže existuje nezáporná funkce $f_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ taková, že
$$F_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n}(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n)\,\mathrm{d}\vec{t} \tag{2.5}$$
pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{E}^n$. Funkci $f_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n}(\vec{x})$ nazýváme *sdruženou hustotou pravděpodobnosti* náhodných veličin $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$.

2.4.8 Poznámka

Veličiny $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ z předešlé definice někdy nazýváme zjednodušeně jako *absolutně spojité.* Navíc každá nezáporná funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$, pro níž $\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = 1$, může být chápána jako hustota pravděpodobnosti určité vícerozměrné náhodné veličiny.

2.4.9 Věta

Nechť mají náhodné veličiny $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ sdružené absolutně spojité rozdělení. Potom $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ jsou nezávislé právě tehdy, když pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{E}^n$ platí
$$f_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n}(\vec{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{\mathcal{X}_i}(x_i).$$

Důkaz:

- důkaz budeme demonstrovat na případu $n = 2$
- chceme tedy dokázat, že $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou nezávislé právě tehdy, když $f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = f_{\mathcal{X}}(x) \cdot f_{\mathcal{Y}}(y)$
- pro důkaz první implikace vyjdeme z předpokladu, že $f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = f_{\mathcal{X}}(x) \cdot f_{\mathcal{Y}}(y)$
- pro distribuční funkci $F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y)$ pak podle vztahu (2.5) a dostáváme
$$F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(t, s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{\mathcal{X}}(t)f_{\mathcal{Y}}(s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s$$
- z Fubiniovy věty pak
$$F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = \left(\int_{-\infty}^{x} f_{\mathcal{X}}(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{-\infty}^{y} f_{\mathcal{Y}}(s)\,\mathrm{d}s\right) = F_{\mathcal{X}}(x) \cdot F_{\mathcal{Y}}(y)$$
- to ale podle věty 2.4.6 implikuje skutečnost, že $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou nezávislé
- pro druhou implikaci předpokládejme, že $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou nezávislé náhodné veličiny
- z tohoto předpokladu plyne, že
$$F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = F_{\mathcal{X}}(x) \cdot F_{\mathcal{Y}}(y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(t, s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s$$
- z definice 2.4.7 odtud ihned vyplývá, že $f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = f_{\mathcal{X}}(x) \cdot f_{\mathcal{Y}}(y)$

2.4.10 Poznámka

Zcela analogicky vztahu (2.2) platí také pro vícerozměrné náhodné veličiny vztah

$$f_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n}(\vec{x}) = \frac{\partial^n F_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n}}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n},$$

pokud je pravá strana definována. Dále také

$$\mathrm{P}\big[a_1 < \mathcal{X} \leqslant b_1, a_2 < \mathcal{X} \leqslant b_2, \ldots, a_n < \mathcal{X} \leqslant b_n\big] = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n}(\vec{x})\, \mathtt{d}x_n \mathtt{d}x_{n-1} \ldots \mathtt{d}x_2 \mathtt{d}x_1.$$

2.4.11 Definice

Nechť je dána vícerozměrná náhodná veličina $\overrightarrow{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n)$ mající sdružené absolutně spojité rozdělení a příslušná vícerozměrná hustota pravděpodobnosti $f(\vec{x})$. Konverguje-li integrál druhého druhu

$$\int_{\mathbf{R}} \vec{x} f(\vec{x})\, \mathtt{d}\vec{x} = \left(\int_{\mathbf{R}} x_1 f(\vec{x})\, \mathtt{d}\vec{x}, \int_{\mathbf{R}} x_2 f(\vec{x})\, \mathtt{d}\vec{x}, \ldots, \int_{\mathbf{R}} x_n f(\vec{x})\, \mathtt{d}\vec{x} \right),$$

pak příslušný vektor nazýváme *střední hodnotou* vícerozměrné náhodné veličiny $\overrightarrow{\mathcal{X}}$ a značíme jedním ze symbolů $\mathtt{E}(\overrightarrow{\mathcal{X}})$ nebo $\langle \vec{x} \rangle$.

2.4.12 Lemma

Nechť $\mathscr{A}$ je třída všech absolutně spojitých náhodných veličin $\mathcal{X}$, pro něž existují střední hodnoty $\mathtt{E}(\mathcal{X})$. Pak pro každé $c \in \mathbf{R}$ a všechny $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathscr{A}$ platí, že

$$\mathtt{E}(c\mathcal{X}) = c\,\mathtt{E}(\mathcal{X}), \quad \mathtt{E}(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = \mathtt{E}(\mathcal{X}) + \mathtt{E}(\mathcal{Y}).$$

2.4.13 Definice

Nechť jsou dány náhodné veličiny $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$. Nechť existují střední hodnoty $\mathtt{E}(\mathcal{X})$ a $\mathtt{E}(\mathcal{Y})$. Pak *kovariancí náhodných veličin* rozumíme číslo

$$\mathtt{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \mathtt{E}\Big[\big(\mathcal{X} - \mathtt{E}(\mathcal{X})\big)\big(\mathcal{Y} - \mathtt{E}(\mathcal{Y})\big)\Big], \tag{2.6}$$

pokud pravá strana existuje.

2.4.14 Věta

Nechť $\mathscr{A}$ je třída všech náhodných veličin $\mathcal{X}$, pro něž existují střední hodnoty $\mathtt{E}(\mathcal{X})$ a rozptyly $\mathtt{VAR}(\mathcal{X})$. Pak zobrazení definované předpisem (2.6) splňuje axiomy skalárního součinu, tj. kovariance náhodných veličin je skalárním součinem.

Důkaz:

- nejprve podotýkáme, že prvky třídy $\mathscr{A}$ musejí být nyní chápány poněkud obecněji, neboť je třeba, aby do $\mathscr{A}$ patřily i náhodné veličiny, jež mají nulový rozptyl a nejsou tudíž absolutně spojité
- nejprve prokážeme, že zobrazení definované předpisem (2.6) splňuje axiom homogenity
- pro libovolné $c \in \mathbf{R}$ ale zcela jasně (při aplikaci lemmatu 2.4.12) platí

$$\mathtt{COV}(c\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \mathtt{E}\Big[\big(c\mathcal{X} - \mathtt{E}(c\mathcal{X})\big)\big(\mathcal{Y} - \mathtt{E}(\mathcal{Y})\big)\Big] = c\,\mathtt{E}\Big[\big(\mathcal{X} - \mathtt{E}(\mathcal{X})\big)\big(\mathcal{Y} - \mathtt{E}(\mathcal{Y})\big)\Big] = c\,\mathtt{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

- podobně také pro všechny $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \in \mathscr{A}$ platí, že

$$\begin{aligned}\mathtt{COV}(\mathcal{X} + \mathcal{Z}, \mathcal{Y}) := \mathtt{E}\Big[\big(\mathcal{X} + \mathcal{Z} - \mathtt{E}(\mathcal{X} + \mathcal{Z})\big)\big(\mathcal{Y} - \mathtt{E}(\mathcal{Y})\big)\Big] = \mathtt{E}\Big[\big(\mathcal{X} + \mathcal{Z} - \mathtt{E}(\mathcal{X}) - \mathtt{E}(\mathcal{Z})\big)\big(\mathcal{Y} - \mathtt{E}(\mathcal{Y})\big)\Big] = \\ = \mathtt{E}\Big[\big(\mathcal{X} - \mathtt{E}(\mathcal{X})\big)\big(\mathcal{Y} - \mathtt{E}(\mathcal{Y})\big)\Big] + \mathtt{E}\Big[\big(\mathcal{Z} - \mathtt{E}(\mathcal{Z})\big)\big(\mathcal{Y} - \mathtt{E}(\mathcal{Y})\big)\Big] = \mathtt{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) + \mathtt{COV}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})\end{aligned}$$

- symetrie $\mathtt{COV}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathtt{COV}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ je splněna triviálně

- zbývá tedy prokázat axiom pozitivní definitnosti
- označme $f(x,y)$ sdruženou hustotu pravděpodobnosti pro náhodné veličiny $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ a pro všechny $\mathcal{X}\in\mathscr{A}$ zkoumejme kovarianci $\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{X})$
- jedná se tedy o výraz $\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) := \mathtt{E}\Big[\big(\mathcal{X}-\mathtt{E}(\mathcal{X})\big)^2\Big]$, který je na první pohled nezáporný, neboť

$$\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{X}) = \int_{\mathbf{E}^r} \big(x-\mathtt{E}(x)\big)^2 f(x,x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

  což je splněno kvůli nezápornosti integrandu
- poslední, co je třeba prověřit, je skutečnost, že rovnost $\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{X})=0$ nastává pouze tehdy, je-li $\mathcal{X}$ nulový prvek třídy $\mathscr{A}$
- přitom ale integrand $\big(x-\mathtt{E}(x)\big)^2 f(x,x)$ může být zjevně nulový pouze pokud náhodná veličina nabývá pouze konstantních hodnot $\gamma\in\mathbf{R}$, kdy $\mathtt{E}(x)=\gamma$
- nulovým prvkem třídy $\mathscr{A}$ je tedy skupina náhodných veličin, jež mají nulový rozptyl
- zde ovšem vyvstává otázka, jak bude vypadat hustota pravděpodobnosti pro takové veličiny
- zde musíme s předstihem konstatovat, že takovými hustotami pravděpodobnosti budou zobecněné funkce zavedené v dalších kapitolách, speciálně Diracova $\delta-$funkce, resp. centrovaná Diracova $\delta-$funkce
- za takových okolností je pak skutečně kovariance $\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ náhodných veličin skalárním součinem na $\mathscr{A}$

2.4.15 Věta

Nechť jsou dány absolutně spojité náhodné veličiny $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ a nechť existuje jejich kovariance $\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Pak platí

$$\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \mathtt{E}(\mathcal{X}\mathcal{Y}) - \mathtt{E}(\mathcal{X})\mathtt{E}(\mathcal{Y}).$$

<u>*Důkaz:*</u>

- z definice kovariance přímo vyplývá, že

$$\begin{aligned}\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) &= \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} \big(x-\mathtt{E}(x)\big)\big(y-\mathtt{E}(y)\big) f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \\ &- \mathtt{E}(y)\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} xf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \mathtt{E}(x)\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} yf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathtt{E}(x)\mathtt{E}(y)\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \mathtt{E}(xy) - \mathtt{E}(x)\mathtt{E}(y) - \mathtt{E}(x)\mathtt{E}(y) + \mathtt{E}(x)\mathtt{E}(y) = \mathtt{E}(\mathcal{X}\mathcal{Y}) - \mathtt{E}(\mathcal{X})\mathtt{E}(\mathcal{Y})\end{aligned}$$

2.4.16 Věta

Nechť jsou dány absolutně spojité nezávislé náhodné veličiny $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$. Nechť existuje jejich kovariance $\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Pak $\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y})=0$.

<u>*Důkaz:*</u>

- označme $h(x,y)$ sdruženou hustotu pravděpodobnosti pro náhodné veličiny $\mathcal{X},\mathcal{Y}$
- jelikož $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jsou nezávislé náhodné veličiny, existují podle věty 2.4.9 funkce $f(x)$ a $g(y)$ tak, že $h(x,y) = f(x)\cdot g(y)$
- pak ale z Fubiniovy věty, resp. z věty o separabilitě plyne, že

$$\mathtt{E}(\mathcal{X}\mathcal{Y}) = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} xyf(x)g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}} xf(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbf{R}} y\,g(y)\,\mathrm{d}y = \mathtt{E}(\mathcal{X})\mathtt{E}(\mathcal{Y})$$

- z věty 2.4.15 pak ihned vyplývá, že

$$\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \mathtt{E}(\mathcal{X}\mathcal{Y}) - \mathtt{E}(\mathcal{X})\mathtt{E}(\mathcal{Y}) = \mathtt{E}(\mathcal{X})\mathtt{E}(\mathcal{Y}) - \mathtt{E}(\mathcal{X})\mathtt{E}(\mathcal{Y}) = 0$$

2.4.17 Definice

Nechť jsou dány absolutně spojité náhodné veličiny $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$. Nechť existují jejich kovariance $\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ a směrodatné odchylky $\mathtt{SD}(\mathcal{X})$, resp. $\mathtt{SD}(\mathcal{Y})$. Pak *koeficientem korelace náhodných veličin* rozumíme číslo

$$\varrho(\mathcal{X},\mathcal{Y}) := \frac{\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}{\mathtt{SD}(\mathcal{X})\mathtt{SD}(\mathcal{Y})}.$$

2.4.18 Poznámka

Kovariance náhodných veličin splňuje podle věty 2.4.14 axiomy skalárního součinu, a tedy $\sqrt{\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{X})} = \mathtt{VAR}(\mathcal{X})$ je normou náhodné veličiny $\mathcal{X}$. Odtud a z Schwarzovy-Cauchyovy-Bunjakovského nerovnosti (věta 6.2.3 ve skriptech [11]) tvaru

$$\big|\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y})\big| \leqslant \mathtt{SD}(\mathcal{X})\mathtt{SD}(\mathcal{Y})$$

ale ihned vyplývá, že koeficient korelace náhodných veličin reprezentuje de facto kosinus úhlu náhodných veličiny $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ (viz poznámka 6.2.8 ve skriptech [11]).

2.4.19 Věta

Nechť jsou dány absolutně spojité náhodné veličiny $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$. Nechť existuje jejich koeficient korelace $\varrho(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Pak platí

$$-1 \leqslant \varrho(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \leqslant 1,$$

přičemž rovnosti $\varrho(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = 1$, resp. $\varrho(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = -1$ nastávají právě tehdy, když existuje číslo $\mathtt{C} > 0$ tak, že

$$\mathcal{Y} - \mathtt{E}(\mathcal{Y}) = \mathtt{C}\big(\mathcal{Y} - \mathtt{E}(\mathcal{Y})\big), \quad \text{resp.} \quad \mathcal{Y} - \mathtt{E}(\mathcal{Y}) = -\mathtt{C}\big(\mathcal{Y} - \mathtt{E}(\mathcal{Y})\big).$$

Důkaz:

- plyne z poznámky 2.4.18

2.4.20 Definice

Nechť $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ je vektor náhodných veličin. Nechť pro všechna $k, \ell \in \widehat{n}$ existují kovariance $\sigma_{k\ell} = \mathtt{COV}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_\ell)$. Pak matici

$$\mathbb{S}_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n} := \begin{pmatrix} \sigma_{11}(\vec{x}) & \sigma_{12}(\vec{x}) & \ldots & \sigma_{1r}(\vec{x}) \\ \sigma_{21}(\vec{x}) & \sigma_{22}(\vec{x}) & \ldots & \sigma_{2r}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{r1}(\vec{x}) & \sigma_{r2}(\vec{x}) & \ldots & \sigma_{rr}(\vec{x}) \end{pmatrix} = \big(\sigma_{k\ell}\big)_{k,\ell=1}^{n}$$

nazveme *kovariancí náhodného vektoru* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ nebo *kovarianční maticí.*

2.4.21 Poznámka

Z definice 2.4.20 vyplývá, že kovarianční matice $\mathbb{S}_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n}$ je symetrická, na diagonále má rozptyly $\sigma_{\ell\ell} = \mathtt{COV}(\mathcal{X}_\ell, \mathcal{X}_\ell) = \mathtt{VAR}(\mathcal{X}_\ell)$ náhodných veličin $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ a pokud jsou tyto veličiny nezávislé, pak je $\mathbb{S}_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n}$ diagonální maticí.

2.5 Konvoluce funkcí

Prezentovanou teorii pravděpodobnosti nyní zužitkujeme při specifickém zavedení pojmu konvoluce funkcí. Nejprve představíme tuto operaci pro hustoty pravděpodobnosti, a poté tuto definici rozšíříme na co nejširší třídu funkcí.

2.5.1 Věta

Nechť jsou dány nezávislé jednorozměrné náhodné veličiny $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ s absolutně spojitým rozdělením. Nechť $f_\mathcal{X}(x)$ a $f_\mathcal{Y}(y)$ jsou příslušné hustoty pravděpodobnosti. Pak hustotou pravděpodobnosti $f_\mathcal{Z}(z)$ náhodné veličiny $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ je funkce

$$f_\mathcal{Z}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\mathcal{X}(x) f_\mathcal{Y}(r - x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.7}$$

Důkaz:

- označme $F_{\mathcal{Z}}(z)$ distribuční funkci náhodné veličiny $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$
- pro ni platí
$$F_{\mathcal{Z}}(z) = \mathrm{P}\big[\mathcal{Z} \leqslant z\big] = \mathrm{P}\big[\mathcal{X} + \mathcal{Y} \leqslant z\big] = \iint_{x+y\leqslant z} f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
- označme $M_z = \big\{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : x + y \leqslant z\big\}$
- množina M_z představuje polorovinu v $\mathbf{E}^2$
- užijeme-li dále předpokladu, že $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou nezávislé, pak z věty 2.4.9 plyne rovnost
$$F_{\mathcal{Z}}(z) = \iint_{M_z} f_{\mathcal{X}}(x) f_{\mathcal{Y}}(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f_{\mathcal{X}}(x) f_{\mathcal{Y}}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} r = x + y \\ \mathrm{d}r = \mathrm{d}y \end{array}\right| =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z} f_{\mathcal{X}}(x) f_{\mathcal{Y}}(r-x)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathcal{X}}(x) f_{\mathcal{Y}}(r-x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}r = \int_{-\infty}^{z} f_{\mathcal{Z}}(r)\,\mathrm{d}r$$
- proto je hledanou hustotou pravděpodobnosti funkce $f_{\mathcal{Z}}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathcal{X}}(x) f_{\mathcal{Y}}(r-x)\,\mathrm{d}x$

2.5.2 Poznámka

Analogicky lze ukázat, že pro nezávislé vícerozměrné náhodné veličiny $\vec{\mathcal{X}}, \vec{\mathcal{Y}}$ a $\vec{\mathcal{Z}} = \vec{\mathcal{X}} + \vec{\mathcal{Y}}$ platí vztah
$$f_{\vec{\mathcal{Z}}}(\vec{r}) = \int_{\mathbf{E}^r} f_{\vec{\mathcal{X}}}(\vec{x}) f_{\vec{\mathcal{Y}}}(\vec{r}-\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}. \tag{2.8}$$

2.5.3 Poznámka

Vztah (2.8) je jedním ze základních vztahů celé teorie o řešení parciálních diferenciálních rovnic. Jeho platnost nebudeme zužovat pouze na případ hustot pravděpodobnosti, ale zobecníme ho pro obecné vícerozměrné funkce.

2.5.4 Definice

Nechť jsou dány funkce $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$. Zobrazení $(f \star g)(\vec{x}) : \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r) \times \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r) \mapsto \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$ definované předpisem
$$(f \star g)(\vec{x}) := \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) g(\vec{x}-\vec{s})\,\mathrm{d}\vec{s}$$
nazveme *konvolucí* funkcí, pokud pravá strana existuje a patří do třídy $\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$.

2.5.5 Věta

Nechť jsou dány funkce $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$. Pak jejich konvoluce $(f \star g)(\vec{x})$ existuje pro skoro všechna $\vec{x} \in \mathbf{E}^r$ a navíc patří do třídy $\mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$. Dále
$$\int_{\mathbf{E}^r} (f \star g)(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} \leqslant \|f\|_{\mathscr{L}_1} \cdot \|g\|_{\mathscr{L}_1}. \tag{2.9}$$

Důkaz:

- vyjdeme z předpokladů, že $\int_{\mathbf{E}^r} |f(\vec{x})|\,\mathrm{d}\vec{x} \in \mathbf{R}$ a $\int_{\mathbf{E}^r} |g(\vec{x})|\,\mathrm{d}\vec{x} \in \mathbf{R}$
- chceme ukázat, že také $\int_{\mathbf{E}^r} \big|(f \star g)(\vec{x})\big|\,\mathrm{d}\vec{x} \in \mathbf{R}$
- zkoumejme proto integrál
$$\int_{\mathbf{E}^r} \big|(f \star g)(\vec{x})\big|\,\mathrm{d}\vec{x} =$$
$$= \int_{\mathbf{E}^r}\left|\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) g(\vec{x}-\vec{s})\,\mathrm{d}\vec{s}\right|\mathrm{d}\vec{x} \leqslant \int_{\mathbf{E}^r}\int_{\mathbf{E}^r} \big|f(\vec{s}) g(\vec{x}-\vec{s})\big|\,\mathrm{d}\vec{s}\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r}\left(\int_{\mathbf{E}^r} \big|g(\vec{x}-\vec{s})\big|\,\mathrm{d}\vec{x}\right)|f(\vec{s})|\,\mathrm{d}\vec{s} =$$
$$= \left|\begin{array}{c} \vec{y} = \vec{x} - \vec{s} \\ \mathrm{d}\vec{y} = \mathrm{d}\vec{s} \end{array}\right| = \int_{\mathbf{E}^r}\left(\int_{\mathbf{E}^r} \big|g(\vec{y})\big|\,\mathrm{d}\vec{y}\right)|f(\vec{s})|\,\mathrm{d}\vec{s} = \int_{\mathbf{E}^r} \big|g(\vec{y})\big|\,\mathrm{d}\vec{y} \cdot \int_{\mathbf{E}^r} \big|f(\vec{x})\big|\,\mathrm{d}\vec{x} \in \mathbf{R}$$

- podle tvrzení Fubiniovy věty platí, že $f(\vec{x}-\vec{y})g(\vec{y}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ pro skoro všechna $\vec{x} \in \mathbf{E}^r$, a tedy konvoluce $(f\star g)(\vec{x})$ je definována pro skoro všechna $\vec{x} \in \mathbf{E}^r$
- a protože $\|h\|_{\mathscr{L}_1} := \int_{\mathbf{E}^r} |h(\vec{x})| \, \mathrm{d}\vec{x}$, vychází z předchozích úvah také platnost vztahu (2.9)
- využíváme přitom věty 4.2.37, 4.3.5 a 4.3.7 ze skript [12]
- pro funkce nezáporné s.v. navíc platí ve vztahu (2.9) rovnost, tj. $\|f \star g\|_{\mathscr{L}_1} = \|f\|_{\mathscr{L}_1} \cdot \|g\|_{\mathscr{L}_1}$
- TENTO DUKAZ PRECIZNEJI KOMENTOVAT (HLAVNE, PROC JSOU SPLNENY PREDPOKLADY FUBINIHO)

2.5.6 Věta

Konvoluce funkcí je lineární operací na $\mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$, a sice v obou argumentech.

Důkaz:

- snadno ověříme, že pro libovolné $c \in \mathbf{R}$ a libovolné $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ platí rovnost

$$(c \cdot f \star g)(\vec{x}) = c(f \star g)(\vec{x}) = (f \star c \cdot g)(\vec{x})$$

- dále také pro $f(\vec{x}), g(\vec{x}), h(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ platí

$$\big((f+g) \star h\big)(\vec{x}) = (f \star h)(\vec{x}) + (g \star h)(\vec{x})$$

- analogicky

$$\big((f \star (g+h)\big)(\vec{x}) = (f \star g)(\vec{x}) + (f \star h)(\vec{x})$$

2.5.7 Věta

Konvoluce je komutativní operací na $\mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$.

Důkaz:

- užijeme-li větu o substituci ve vícerozměrném integrálu dostáváme snadno

$$(f \star g)(\vec{x}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})g(\vec{x}-\vec{s}) \, \mathrm{d}\vec{s} = \left| \begin{array}{c} \vec{x}-\vec{s}=\vec{y} \\ \mathrm{d}\vec{s}=\mathrm{d}\vec{y} \end{array} \right| = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x}-\vec{y})g(\vec{y}) \, \mathrm{d}\vec{y} = (g \star f)(\vec{x})$$

2.5.8 Věta

Nechť $f(x), g(x) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{R})$ jsou funkce, pro něž platí, že $\operatorname{supp}(f) \subset (0,+\infty)$ a $\operatorname{supp}(g) \subset (0,+\infty)$, tj. existují funkce $F(x), G(x) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{R}^+)$ takové, že $f(x) = \Theta(x)F(x), g(x) = \Theta(x)G(x)$. Potom pro jejich konvoluci platí

$$(f \star g)(x) = \Theta(x) \int_0^x F(s)G(x-s) \, \mathrm{d}s.$$

Důkaz:

- plyne bezprostředně z vlastností Heavisideovy funkce $\Theta(x)$, neboť

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbf{R}} \Theta(s)\Theta(x-s)F(s)G(x-s) \, \mathrm{d}s = \Theta(x) \int_0^x F(s)G(x-s) \, \mathrm{d}s$$

2.5.9 Věta

Nechť $f(\vec{x})$ a $g(\vec{y})$ jsou hustoty pravděpodobnosti. Potom $(f \star g)(\vec{x})$ je hustota pravděpodobnosti.

Důkaz:

- zcela jistě platí, že $(f \star g)(\vec{x})$ je nezáporná
- dále chceme ukázat, že pokud $\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = 1$ a $\int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} = 1$, potom i $\int_{\mathbf{E}^r} (f \star g)(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = 1$
- použitím Fubiniovy věty a jednoduchou substitucí dostáváme

$$\int_{\mathbf{E}^r} (f \star g)(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} \left(\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) g(\vec{x} - \vec{s})\,\mathrm{d}\vec{s} \right) \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \left(\int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} \right) \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})\,\mathrm{d}\vec{s} = 1$$

- dohromady tedy dostáváme, že $(f \star g)(\vec{x})$ má vlastnosti hustoty pravděpodobnosti

2.5.10 Příklad

Nechť

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Vypočtěme konvoluci $f(x) \star g(x)$. Z definice konvoluce a ze vztahu (1.50) vyvozujeme sadu rovností

$$\begin{aligned}
f(x) \star g(x) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(s-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-s-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\,\mathrm{d}s = \left| \begin{array}{c} y = s - \mu_1 \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}s \end{array} \right| = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma_1^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y-\mu_1-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\,\mathrm{d}y = \\
&= \left| \lambda := x - \mu_1 - \mu_2 \right| = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\mathbf{R}} \exp\left[-\frac{\sigma_2 y^2 + \sigma_1 (y-\lambda)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \right] \mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\mathbf{R}} \exp\left[-\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \left(\left(y - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\lambda\right)^2 + \lambda^2 \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2} \right) \right] \mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \int_{\mathbf{R}} \exp\left[-\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \left(y - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\lambda \right)^2 \right] \mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} z^2}\,\mathrm{d}z = \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}.
\end{aligned}$$

Konvolucí dvou hustot pravděpodobnosti Gaussova rozdělení je tedy podle dosaženého výsledku opět hustota pravděpodobnosti Gaussova rozdělení. Mají-li vstupující hustoty střední hodnoty po řadě μ_1, μ_2 a rozptyly σ_1^2, σ_2^2, má výsledná konvoluce střední hodnotu $\mu_1 + \mu_2$ a rozptyl $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Univerzalitu tohoto tvrzení prokážeme v následujících větách.

2.5.11 Věta

Nechť $\mathcal{X}$, resp. $\mathcal{Y}$ jsou nezávislé náhodné veličiny mající absolutně spojité rozdělení. Nechť jejich hustoty pravděpodobnosti jsou $f_{\mathcal{X}}(x) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{R})$, resp. $g_{\mathcal{Y}}(y) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{R})$ a navíc $\langle x \rangle = \mu_1$ a $\langle y \rangle = \mu_2$. Potom hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ je funkce $(f_{\mathcal{X}} \star g_{\mathcal{Y}})(z)$ a platí $\langle z \rangle = \mu_1 + \mu_2$.

Důkaz:

- označme $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ součet náhodných veličin
- pro příslušnou hustotu pravděpodobnosti veličiny $\mathcal{Z}$ byla ve větě 2.5.1 odvozena rovnost

$$f_{\mathcal{Z}}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathcal{X}}(x) f_{\mathcal{Y}}(r-x)\,\mathrm{d}x,$$

  která reprezentuje první z dokazovaných tvrzení

- zbývá proto dokázat, že střední hodnotou součtu náhodných veličin je součet středních hodnot těchto veličin

- použitím Fubiniovy věty, jednoduché substituce a definice střední hodnoty náhodné veličiny dostáváme

$$\langle z\rangle = \int_{\mathbf{R}} z\left(\int_{\mathbf{R}} f(x)g(z-x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}z = \int_{\mathbf{R}} f(x)\left(\int_{\mathbf{R}} z\cdot g(z-x)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\begin{array}{c} y = z-x \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}y \end{array}\right| = \int_{\mathbf{R}} f(x)\left(\int_{\mathbf{R}} (x+y)\cdot g(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} x\, f(x)g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} y\, f(x)g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \langle x\rangle \int_{\mathbf{R}} g(y)\,\mathrm{d}y + \langle y\rangle \int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \langle x\rangle + \langle y\rangle$$

- tím je důkaz proveden

2.5.12 Věta

Nechť $\mathcal{X}$, resp. $\mathcal{Y}$ jsou nezávislé náhodné veličiny mající absolutně spojité rozdělení. Nechť jejich hustoty pravděpodobnosti jsou $f_{\mathcal{X}}(x) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{R})$, resp. $g_{\mathcal{Y}}(y) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{R})$ a navíc $\mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \sigma_x^2$ a $\mathtt{VAR}(\mathcal{Y}) = \sigma_y^2$. Potom pro rozptyl náhodné veličiny $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ platí rovnost

$$\mathtt{VAR}(\mathcal{Z}) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2.$$

Důkaz:

- hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ je funkce vypočetná jako konvoluce $f(x) \star g(x)$, tj.

$$h(z) = \int_{\mathbf{R}} f(x)g(z-x)\,\mathrm{d}x$$

- snadno se lze tudíž přesvědčit, že platí série následujících rovností

$$\langle z^2\rangle = \int_{\mathbf{R}} z^2\left(\int_{\mathbf{R}} f(x)g(z-x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}z = \int_{\mathbf{R}} f(x)\left(\int_{\mathbf{R}} z^2\cdot g(z-x)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\begin{array}{c} y = z-x \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}y \end{array}\right| = \int_{\mathbf{R}} f(x)\left(\int_{\mathbf{R}} (x+y)^2\cdot g(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} x^2\, f(x)g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x +$$

$$+ 2\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} xy\, f(x)g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} y^2\, f(x)g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \langle x^2\rangle \int_{\mathbf{R}} g(y)\,\mathrm{d}y + 2\int_{\mathbf{R}^2} xyf(x)g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \langle y^2\rangle \int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \langle x^2\rangle + 2\langle xy\rangle + \langle y^2\rangle$$

- jelikož pro nezávislé náhodné veličiny platí, že jejich kovariance je nulová (viz věta 2.4.16), dostáváme rovnost

$$\mathtt{VAR}(\mathcal{Z}) = \langle z^2\rangle - \langle z\rangle^2 = \langle x^2\rangle + 2\langle xy\rangle + \langle y^2\rangle - \langle x\rangle^2 - 2\langle x\rangle\langle y\rangle - \langle y\rangle^2 =$$

$$= \mathtt{VAR}(\mathcal{X}) + \mathtt{VAR}(\mathcal{Y}) + 2\,\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \mathtt{VAR}(\mathcal{X}) + \mathtt{VAR}(\mathcal{Y})$$

- ta ale kompletuje důkaz

2.5.13 Věta

Nechť jsou dány libovolné funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ a $g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ a vektor $\vec{b} \in \mathbf{E}^r$. Pak platí

$$f(\vec{x}+\vec{b}) \star g(\vec{x}) = f(\vec{x}) \star g(\vec{x}+\vec{b}) = \big(f \star g\big)(\vec{x}+\vec{b}).$$

Důkaz:

- není pravděpodobně obtížné nahlédnout, že

$$\big(f \star g\big)(\vec{x}+\vec{b}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})g(\vec{x}+\vec{b}-\vec{s})\,\mathrm{d}\vec{s} = f(\vec{x}) \star g(\vec{x}+\vec{b})$$

- dále

$$f(\vec{x}+\vec{b}) \star g(\vec{x}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}+\vec{b})g(\vec{x}-\vec{s})\,\mathrm{d}\vec{s} = \left|\begin{array}{c} \vec{s}+\vec{b} = \vec{r} \\ \mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}\vec{r} \end{array}\right| = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{r})g(\vec{x}+\vec{b}-\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = f(\vec{x}) \star g(\vec{x}+\vec{b})$$

- přitom existence všech dotčených integrálů je garantována větou 2.5.5

2.5.14 Věta

Nechť jsou dány libovolné funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ a $g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ a vektor $\vec{b} \in \mathbf{E}^r$. Nechť je $i \in \widehat{r}$ zvoleno libovolně. Nechť dále $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ a $\frac{\partial g}{\partial x_i} \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$. Pak platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g(\vec{x}) = f(\vec{x}) \star \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\big(f \star g\big).$$

Důkaz:

- existence všech dotčených integrálů je opět garantována větou 2.5.5
- dále

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g(\vec{x}) = \int_{\mathbf{E}^r} \frac{\partial f}{\partial s_i}(\vec{s}) g(\vec{x} - \vec{s})\, \mathrm{d}\vec{s} = \left| \begin{array}{cc} u = g(\vec{s}) & v' = \frac{\partial f}{\partial s_i}(\vec{s}) \\ u' = \frac{\partial g}{\partial (x_i - s_i)} \frac{\partial (x_i - s_i)}{\partial s_i} & v = f(\vec{s}) \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\mathbf{E}^{r-1}} \Big[f(\vec{s}) g(\vec{s}) \Big]_{s_i \to -\infty}^{s_i \to \infty} \mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2 \dots \mathrm{d}s_{i-1} \mathrm{d}s_{i+1} \dots \mathrm{d}s_r - \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \frac{\partial g}{\partial (x_i - s_i)} \frac{\partial (x_i - s_i)}{\partial s_i}\, \mathrm{d}\vec{s} =$$

$$= \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \frac{\partial g(\vec{x} - \vec{s})}{\partial (x_i - s_i)}\, \mathrm{d}\vec{s} = f(\vec{x}) \star \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

- bylo zde přitom využito tzv. *nutné podmínky konvergence Lebesgueova integrálu*, tedy implikace

$$f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{\|\vec{x}\| \to \infty} f(\vec{x}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in \widehat{r} : \lim_{x_i \to \infty} f(\vec{x}) = 0.$$

2.5.15 Příklad

Budeme nyní počítat dvojrozměrnou konvoluci funkcí

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi}\, \mathrm{e}^{-\left[(x-a)^2 - (y-b)^2)\right]}$$

a

$$g(x, y) = \frac{1}{\pi}\, \mathrm{e}^{-\left[(x-\mu)^2 - (y-\lambda)^2)\right]}.$$

Jedná se o dvojrozměrné Gaussovy funkce se stejnou směrodatnou odchylkou a se střední hodnotou v bodě (a, b) v prvním případě a bodě (μ, λ) v případě druhém. Definiční vztah pro konvoluci vede k rovnici

$$\left(f(x, y) \star g(x, y)\right)(x, y) = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{\pi^2}\, \mathrm{e}^{-\left[(t-a)^2 - (s-b)^2)\right]}\, \mathrm{e}^{-\left[(x-t-\mu)^2 - (y-s-\lambda)^2)\right]}\, \mathrm{d}t \mathrm{d}s =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-(t-a)^2}\, \mathrm{e}^{-(x-t-\mu)^2}\, \mathrm{d}t \cdot \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-(s-b)^2}\, \mathrm{e}^{-(y-s-\mu)^2}\, \mathrm{d}s.$$

Protože ale (jak snadno vypočteme) platí vztah

$$\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-(t-a)^2}\, \mathrm{e}^{-(x-t-\mu)^2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \mathrm{e}^{\frac{-(x-a-\mu)^2}{2}},$$

má výsledná konvoluce tvar

$$\big(f(x, y) \star g(x, y)\big)(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\pi}{2}\, \mathrm{e}^{\frac{-(x-a-\mu)^2}{2}}\, \mathrm{e}^{\frac{-(y-b-\lambda)^2}{2}} = \frac{1}{2\pi}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-a-\mu)^2 + (y-b-\lambda)^2}{2}}.$$

Jedná se tudíž opět o Gaussovu funkci, ovšem s menším rozptylem a střední hodnotou rovnou součtu původních středních hodnot, jak je patrno na obrázku níže.

Obrázek 2.1
Konvoluce dvojrozměrných Gaussových funkcí se středními hodnotami $(0, 5)$ a $(5, 0)$.

2.5.16 Příklad

Vypočtěme konvoluci dvou náhodných veličin $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ majících rovnoměrné rozdělení, tj $\mathcal{X} \backsim U_{(0,1)}$, resp. $\mathcal{Y} \backsim U_{(0,1)}$. V tomto případě jsou příslušnými hustotami pravděpodobnosti v obou případech funkce $f(x) = \Theta(x)\Theta(1-x)$. Odtud

$$h(x) = \int_{\mathbf{R}} \Theta(z)\Theta(1-z)\Theta(x-z)\Theta(1-x+z)\,\mathtt{d}z = \int_0^1 \Theta(x-z)\Theta(1-x+z)\,\mathtt{d}z =$$

$$= \begin{cases} \int_0^x 1\,\mathtt{d}z = x & \dots \quad x \in \langle 0,1 \rangle \\ \int_{x-1}^1 1\,\mathtt{d}z = 2-x & \dots \quad x \in \langle 1,2 \rangle \\ 0 & \dots \quad x \notin \langle 0,2 \rangle \end{cases}$$

Obrázek 2.2
Konvoluce $\Theta(x)\Theta(1-x) \star \Theta(x)\Theta(1-x)$ dvou schodovitých funkcí.

Kapitola 3

Integrální rovnice

Velice zajímavou a praktickou partií matematické analýzy je řešení rovnic, v nichž se neznámá funkce vyskytuje za znakem integrálu. Takové rovnice budeme označovat souhrnným termínem integrální rovnice. Jedná se tedy o jakousi alternativu diferenciálních rovnic. Nejedná se zde ovšem pouze o rovnice tvaru $\int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\,\varphi(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} = f(\vec{x})$, kde $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})$, $f(\vec{x})$ jsou pevně zvolené funkce, G oblast v $\mathbf{E}^r$ a $\varphi(\vec{x})$ je neznámou funkcí, ale jedná se o složitější rovnice, kde se neznámá funkce $\varphi(\vec{x})$ vyskytuje také vně integrálu. Známým zástupcem integrálních rovnic je např. rovnice tvaru

$$\varphi(\vec{x}) = \mu \int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\,\varphi(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} + f(\vec{x}).$$

V této kapitole se tedy seznámíme s možnostmi, jak takové rovnice řešit.

3.1 Obecné vlastnosti integrálního operátoru

Nejprve se seznámíme s některými vlastnostmi integrálního operátoru s cílem maximálně při hledání řešení integrálních rovnic využít obecné poznatky odvozené pro lineární operátory v první kapitole, zejména v sekcích 1.7 a 1.8.

3.1.1 Úmluva

V celé kapitole předpokládáme, že symbol G je vymezen pro omezenou neprázdnou oblast v $\mathbf{E}^r$. Vzhledem k otevřenosti oblasti G je zřejmé, že $G \in \mathscr{S}_r$ (viz definice Lebesgueovy míry v [12]), a tudíž $G \in \mathscr{M}_\mu$. Z omezenosti G pak dále plyne, že $\mu(G) \in \mathbf{R}$.

3.1.2 Definice

Nechť $G \subset \mathbf{E}^r$ je omezená oblast a $\mu \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Nechť jsou dány funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{C}(\overline{G})$ a $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) : G \times G \mapsto \mathbf{C}$. Rovnici

$$\varphi(\vec{x}) = \mu \int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\,\varphi(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} + f(\vec{x}) \tag{3.1}$$

pro neznámou funkci $\varphi(\vec{x})$ nazýváme *integrální rovnicí*. Funkci $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})$ nazýváme *jádrem integrální rovnice* a funkci $f(\vec{x})$ její *pravou stranou* nebo také *volným členem*. Číslo μ nazýváme *charakteristickým číslem* integrální rovnice.

3.1.3 Poznámka

Rovnici (3.1) někdy přesněji nazýváme *Fredholmovou integrální rovnicí druhého druhu*.

3.1.4 Definice

Nechť je dána omezená oblast $G \subset \mathbf{E}^r$ a funkce $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) : G \times G \mapsto \mathbf{C}$. Pak operátor $\widehat{K}$ definovaný předpisem

$$\widehat{K} := \int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) \bullet \mathrm{d}\vec{y}$$

budeme nazývat *integrálním operátorem*. Za definiční obor integrálního operátoru $\widehat{K}$ klademe buď Hilbertův prostor $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2(G)$ kvadraticky integrabilních faktorových funkcí nebo třídu $\mathscr{C}(\overline{G})$ funkcí spojitých na omezené oblasti $\overline{G}$.

3.1.5 Poznámka

Jelikož $\mathrm{Dom}(\widehat{K}) = \mathbb{L}_2(G)$, resp. $\mathrm{Dom}(\widehat{K}) = \mathscr{C}(\overline{G})$, je zřejmé, že za řešení integrální rovnice (3.1) považujeme funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$, resp. $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{C}(\overline{G})$, které rovnici (3.1) vyhovují.

3.1.6 Definice

Jádro $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) : G \times G \mapsto \mathbf{C}$ integrální rovnice (3.1), resp. příslušný integrální operátor nazveme *separabilním*, existují-li nenulové funkce $a_1(\vec{x}), a_2(\vec{x}), \ldots, a_m(\vec{x}) \in \mathscr{C}(\overline{G})$ a $b_1(\vec{y}), b_2(\vec{y}), \ldots, b_m(\vec{y}) \in \mathscr{C}(\overline{G})$ takové, že platí rovnost

$$\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k=1}^{m} a_k(\vec{x}) \cdot b_k(\vec{y}).$$

3.1.7 Věta

Je-li jádro $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) : G \times G \mapsto \mathbf{C}$ integrální rovnice (3.1) separabilní, pak existují systémy $a_1(\vec{x}), a_2(\vec{x}), \ldots, a_m(\vec{x}) \in \mathscr{C}(\overline{G})$ a $b_1(\vec{y}), b_2(\vec{y}), \ldots, b_m(\vec{y}) \in \mathscr{C}(\overline{G})$ lineárně nezávislých funkcí tak, že platí rovnost

$$\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k=1}^{m} a_k(\vec{x}) \cdot b_k(\vec{y}).$$

Důkaz:

- pokud by např. systém $a_1(\vec{x}), a_2(\vec{x}), \ldots, a_m(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{C}$ byl lineárně závislý, pak by existoval index $i \in \widehat{m}$ tak, že $a_i(\vec{x}) = \sum_{j=1, j\neq i}^{m} \mathsf{C}_j a_j(\vec{x})$
- pak by ale

$$\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k=1,k\neq i}^{m} a_k(\vec{x}) b_k(\vec{y}) + a_i(\vec{x}) b_i(\vec{y}) = \sum_{k=1,k\neq i}^{m} a_k(\vec{x}) b_k(\vec{y}) + \sum_{k=1,k\neq i}^{m} \mathsf{C}_k a_k(\vec{x}) b_i(\vec{y}) = \sum_{k=1,k\neq i}^{m} a_k(\vec{x}) \widetilde{b}_k(\vec{y}),$$

  kde $\widetilde{b}_k(\vec{y}) = b_k(\vec{y}) + \mathsf{C}_k b_i(\vec{y})$
- tímto postupem lze vždy docílit toho, že

$$\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k=1}^{\ell} \widetilde{a}_k(\vec{x}) \widetilde{b}_k(\vec{y})$$

  a systémy $\widetilde{a}_1(\vec{x}), \widetilde{a}_2(\vec{x}), \ldots, \widetilde{a}_\ell(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{C}$ a $\widetilde{b}_1(\vec{y}), \widetilde{b}_2(\vec{y}), \ldots, \widetilde{b}_\ell(\vec{y}) : G \mapsto \mathbf{C}$ jsou systémy lineárně nezávislých funkcí

3.1.8 Definice

Jádro $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) : G \times G \mapsto \mathbf{C}$ integrální rovnice (3.1), resp. příslušný integrální operátor nazveme *spojitým*, je-li funkce $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})$ spojitá na $\overline{G} \times \overline{G}$.

3.1.9 Poznámka

Spojitá funkce $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})$ nabývá na neprázdné kompaktní množině $\overline{G} \times \overline{G}$ podle věty 1.1.55 se skript [12] (viz strana 24) vždy svého maxima. Má tedy smysl vyslovit následující definici.

3.1.10 Definice

Nechť je zadána integrální rovnice (3.1) se spojitým jádrem $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) : G \times G \mapsto \mathbf{C}$. Pak číslo

$$\mathtt{M} := \max_{(\vec{x},\vec{y}) \in \overline{G} \times \overline{G}} \left| \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) \right|$$

nazýváme *mezí jádra* $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})$.

3.1.11 Věta

Nechť je zadána integrální rovnice (3.1) se spojitým jádrem $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) : G \times G \mapsto \mathbf{C}$. Nechť $\mathtt{M}$ je jeho mez. Označme symbolem $\mathtt{V}$ $r-$dimenzionální objem oblasti G, tj.

$$\mathtt{V} = \mu^r(G) = \int_G 1\,\mathrm{d}\vec{x} \in \mathbf{R}.$$

Pak pro všechny funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathcal{H}$, kde $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2(G)$, platí nerovnost $\big\|\widehat{K}\varphi\big\| \leqslant \mathtt{MV}\|\varphi\|$.

Důkaz:

- nejprve je třeba si uvědomit, že $\|\varphi\|^2 = \langle\varphi|\varphi\rangle = \int_G |\varphi(\vec{x})|^2\,\mathrm{d}\vec{x}$
- dále pak
$$\big\|\widehat{K}\varphi\big\|^2 = \int_G \big|\widehat{K}\varphi\big|^2\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_G \left|\int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\,\varphi(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y}\right|^2 \mathrm{d}\vec{x} = \int_G \Big|\big\langle \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\,|\,\varphi(\vec{y})\big\rangle\Big|^2\,\mathrm{d}\vec{x}$$
- užijeme-li pro skalární součin $\big\langle \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\,|\,\varphi(\vec{y})\big\rangle$ Schwarzovy-Cauchyovy-Bunjakovského nerovnosti tvaru
$$\Big|\big\langle \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\,|\,\varphi(\vec{y})\big\rangle\Big|^2 \leqslant \big\langle \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\,|\,\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\big\rangle \cdot \langle\varphi|\varphi\rangle = \big\|\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\big\|^2 \cdot \|\varphi\|^2,$$
a odhadneme-li kvadrát normy jádra výrazem
$$\big\|\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\big\|^2 = \int_G \big|\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\big|^2\,\mathrm{d}\vec{y} \leqslant \mu^r(G) \cdot \max_{(\vec{x},\vec{y})\in\overline{G}\times\overline{G}} \big|\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\big|^2 = \mathtt{VM}^2,$$
lze výraz $\big\|\widehat{K}\varphi\big\|^2$ omezit shora takto
$$\big\|\widehat{K}\varphi\big\|^2 = \int_G \Big|\big\langle \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\,|\,\varphi(\vec{y})\big\rangle\Big|^2\,\mathrm{d}\vec{x} \leqslant \int_G \mathtt{VM}^2\,\|\varphi\|^2\,\mathrm{d}\vec{x} = \mathtt{M}^2\mathtt{V}^2\|\varphi\|^2$$
- odtud $\big\|\widehat{K}\varphi\big\| \leqslant \mathtt{MV}\|\varphi\|$

3.1.12 Věta

Integrální operátor se spojitým jádrem je lineární, omezený a také spojitý.

Důkaz:

- jedná se o banální důsledek předešlé věty a věty 1.8.7

3.1.13 Definice

Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{C}$ definovaná na omezené oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$. V souladu s větou 1.3.11 budeme symbolem

$$\|f\|_\sigma = \max_{\vec{x}\in\overline{G}} \big|f(\vec{x})\big|$$

označovat tzv. $\sigma-$*normu* funkce $f(\vec{x})$.

3.1.14 Věta

Nechť je zadána integrální rovnice (3.1) se spojitým jádrem $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) : G \times G \mapsto \mathbf{C}$, kde $\mathtt{M}$ je jeho mez. Nechť $\mathtt{V} = \mu^r(G)$. Pak pro všechny funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{C}(\overline{G})$ platí $\big\|\widehat{K}\varphi\big\|_\sigma \leqslant \mathtt{MV}\|\varphi\|_\sigma$.

Důkaz:

- snadno
$$\begin{aligned}\big\|\widehat{K}\varphi\big\|_\sigma = \max_{\vec{x}\in\overline{G}} \big|\widehat{K}\varphi\big| = \max_{\vec{x}\in\overline{G}} \left|\int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\,\varphi(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y}\right| \leqslant \mu^r(G) \cdot \max_{(\vec{x},\vec{y})\in\overline{G}\times\overline{G}} \big|\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\,\varphi(\vec{y})\big| \leqslant \\ \leqslant \mathtt{V} \cdot \max_{(\vec{x},\vec{y})\in\overline{G}\times\overline{G}} \big|\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\big| \cdot \max_{\vec{y}\in\overline{G}} \big|\varphi(\vec{y})\big| = \mathtt{VM}\|\varphi\|_\sigma \qquad (3.2)\end{aligned}$$

3.1.15 Věta

Pro libovolnou vlastní hodnotu λ integrálního operátoru $\widehat{K}$ se spojitým jádrem platí nerovnost $|\lambda| \leqslant \mathtt{MV}$, kde $\mathtt{M}$ je mez příslušného jádra a $\mathtt{V} = \mu^r(G)$.

<u>*Důkaz:*</u>

- věty 3.1.11 a 3.1.14 prokazují, že operátor $\widehat{K}$ je omezený (a to $\mathbb{L}_2$−omezený i σ−omezený)
- pro všechny funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$ tudíž platí nerovnost $\left\|\widehat{K}(\varphi)\right\| \leqslant \mathtt{MV}\|\varphi\|$
- nechť $\lambda \in \mathbf{C}$ je libovolné vlastní číslo operátoru $\widehat{K}$, tj. existuje nenulová funkce $\psi(\vec{x})$ tak, že $\widehat{K}\psi(\vec{x}) = \lambda\psi(\vec{x})$
- z axiomů normy pro ni platí kromě jiného rovnost $\left\|\widehat{K}\psi\right\| = |\lambda| \cdot \|\psi\|$
- odsud lehce detekujeme, že
$$|\lambda| = \frac{\left\|\widehat{K}(\psi)\right\|}{\|\psi\|} \leqslant \left| \begin{array}{c} \psi(\vec{x}) \neq 0 \\ \|\psi\| \neq 0 \end{array} \right| \leqslant \mathtt{MV}$$

3.1.16 Věta

Integrální operátor $\widehat{K}$ se spojitým jádrem $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})$ je nulový na Hilbertově prostoru $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2(G)$ právě tehdy, když $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) = 0$ pro všechna $\vec{x},\vec{y} \in G$.

<u>*Důkaz:*</u>

- k důkazu užijeme kromě jiného základní definici 1.7.4
- nejprve prokážeme, že je-li $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) = 0$ pro všechna $\vec{x},\vec{y} \in G$, pak je pro všechny funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$ splněna rovnost $\widehat{K}\varphi(\vec{x}) = 0$
- to lze ale snadno, neboť $\widehat{K}\varphi(\vec{x}) = \int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\,\varphi(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} = \int_G 0\,\mathrm{d}\vec{y} = 0$
- pokud je naopak pro všechny funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$ splněna rovnost $\widehat{K}\varphi(\vec{x}) = \int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\,\varphi(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} = 0$, znamená to podle teorie Lebesgueova integrálu, že $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) = 0$ skoro všude
- a protože je jádro $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})$ spojitou funkcí, plyne odsud, že $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) = 0$ pro všechna $(\vec{x},\vec{y}) \in G \times G$

3.1.17 Věta

Nechť je dán integrální operátor $\widehat{K}$ se spojitým jádrem definovaný na Hilbertově prostoru $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2(G)$. Pak jestliže pro všechny funkce $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí $\langle\widehat{K}(f)|g\rangle = 0$, pak $\widehat{K}$ je nulový na $\mathcal{H}$.

<u>*Důkaz:*</u>

- k důkazu užijeme větu 1.3.3
- je-li totiž pro všechny funkce $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ splněna rovnost $\langle\widehat{K}(f)|g\rangle = 0 = \langle 0|g\rangle$, pak je podle věty 1.3.3 funkce $\widehat{K}(f)$ nulová, tedy $\widehat{K}(f) = 0$
- rovnost $\widehat{K}(f) = 0$ ale platí pro jakoukoliv funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$, čímž je naplněna definice 1.7.4 nulového operátoru

3.2 Řešení integrálních rovnic se separabilním jádrem

Mezi integrální rovnice nejsnadněji řešitelné patří beze sporu rovnice se separabilním jádrem, kdy lze příslušné jádro $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})$ rozložit na konečný součet separovaných funkcí tvaru $g(\vec{x})h(\vec{y})$. Tehdy je totiž možno řešení integrální rovnice převést na řešení soustavy algebraických rovnic. Jak tento převod uskutečnit naznačíme v dalším textu.

3.2.1 Věta

Nechť je jádro integrálního operátoru spojité a separabilní tak, že $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k=1}^{m} g_k(\vec{x})h_k(\vec{y})$ a funkce $g_1(\vec{x})$, $g_2(\vec{x}),\ldots,g_m(\vec{x})$, resp. $h_1(\vec{y})$, $h_2(\vec{y}),\ldots,h_m(\vec{y})$ jsou lineárně nezávislé. Označme

$$\mathbb{B} = \big(\beta_{k\ell}\big)_{k,\ell=1}^{m} = \big(\langle g_k|h_\ell\rangle\big)_{k,\ell=1}^{m}.$$

Pak vlastní hodnoty $\lambda \in \mathbf{C}$ integrálního operátoru $\widehat{K} = \mu \int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) \bullet \mathrm{d}\vec{y}$ jsou právě všechna čísla vyhovující rovnici $\det\big(\mathbb{B} - \frac{\lambda}{\mu}\mathbb{I}\big) = 0$.

Důkaz:

- úloha na vlastní hodnoty integrálního operátoru se spojitým a separabilním jádrem fakticky spočívá v řešení rovnice

$$\mu \int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\,\varphi(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} = \mu \sum_{k=1}^{m} g_k(\vec{x}) \int_G h_k(\vec{y})\,\varphi(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} = \lambda\varphi(\vec{x})$$

- tato rovnice je ekvivalentní rovnici

$$\mu \sum_{k=1}^{m} \mathtt{C}_k g_k(\vec{x}) = \lambda\varphi(\vec{x}),$$

  kde $\mathtt{C}_k := \big\langle\varphi|h_k\big\rangle = \int_G h_k(\vec{y})\,\varphi(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} \in \mathbf{R}$

- vlastní funkce integrálního operátoru se spojitým a separabilním jádrem (příslušné vlastnímu číslu λ) jsou tudíž tvaru

$$\lambda\varphi_\lambda(\vec{x}) = \mu \sum_{k=1}^{m} \mathtt{C}_k g_k(\vec{x}) \tag{3.3}$$

- vynásobíme-li ale rovnost (3.3) funkcí $h_\ell(x)$ a zintegrujeme-li poté celou rovnost přes oblast G, dostáváme

$$\lambda\mathtt{C}_\ell = \mu \sum_{k=1}^{m} \mathtt{C}_k \int_G h_\ell(\vec{x})\,g_k(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} \quad \big(\ell \in \widehat{m}\big)$$

- označíme-li $\beta_{\ell k} := \int_G h_\ell(\vec{x})\,g_k(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}$, přechází celá úloha na řešení algebraické soustavy

$$\lambda \begin{pmatrix} \mathtt{C}_1 \\ \mathtt{C}_2 \\ \vdots \\ \mathtt{C}_m \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \ldots & \beta_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathtt{C}_1 \\ \mathtt{C}_2 \\ \vdots \\ \mathtt{C}_m \end{pmatrix},$$

  resp.

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} - \frac{\lambda}{\mu} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} - \frac{\lambda}{\mu} & \ldots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \ldots & \beta_{mm} - \frac{\lambda}{\mu} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathtt{C}_1 \\ \mathtt{C}_2 \\ \vdots \\ \mathtt{C}_m \end{pmatrix} = \vec{0}$$

- označme $\mathbb{B} = \big(\beta_{k\ell}\big)_{k,\ell=1}^{m}$

- tato soustava má řešení pouze tehdy, je-li determinant $\det\big(\mathbb{B} - \frac{\lambda}{\mu}\mathbb{I}\big)$ nulový

- vlastními čísly jsou tudíž právě ta $\lambda \in \mathbf{C}$, pro která jsou čísla $\lambda\mu^{-1}$ vlastními čísly matice $\mathbb{B}$

3.2.2 Poznámka

Ukážeme nyní metodu, jak řešit integrální rovnice v případě, že příslušné jádro je spojité a separabilní. Uvažme tedy rovnici

$$\varphi(\vec{x}) = \mu \int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\, \varphi(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y} + f(\vec{x}),$$

kde

$$\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k=1}^{m} g_k(\vec{x}) \cdot h_k(\vec{y})$$

a funkce $g_1(\vec{x})$, $g_2(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x})$, resp. $h_1(\vec{y})$, $h_2(\vec{y}), \ldots, h_m(\vec{y})$ jsou lineárně nezávislé. Pak

$$\varphi(\vec{x}) = \mu \int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\, \varphi(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y} + f(\vec{x}) = \mu \sum_{k=1}^{m} h_k(\vec{x}) \int_G h_k(\vec{y})\, \varphi(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y} + f(\vec{x}).$$

Jelikož hodnoty integrálů $\int_G h_k(\vec{y})\, \varphi(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y}$ jsou číselné (zde je třeba si také uvědomit, že všechny funkce $g_1(\vec{x})$, $g_2(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x})$, resp. $h_1(\vec{y})$, $h_2(\vec{y}), \ldots, h_m(\vec{y})$ jsou nutně spojité), lze definovat

$$\mathtt{C}_k := \langle \varphi | h_k \rangle = \int_G h_k(\vec{y})\, \varphi(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y} \in \mathbf{R}.$$

Pak ale hledaná funkce $\varphi(\vec{x})$ bude zcela jasně tvaru

$$\varphi(\vec{x}) = \mu \sum_{k=1}^{m} \mathtt{C}_k g_k(\vec{x}) + f(\vec{x}), \tag{3.4}$$

a zbývá tedy dopočíst hodnoty neznámých konstant $\mathtt{C}_k$. Vynásobíme-li ale rovnost (3.4) funkcí $h_\ell(x)$ a zintegrujeme-li poté celou rovnost přes oblast G, dostáváme

$$\mathtt{C}_\ell = \mu \sum_{k=1}^{m} \mathtt{C}_k \int_G h_\ell(\vec{x})\, g_k(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x} + \int_G h_\ell(\vec{x})\, f(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x}.$$

Označíme-li

$$\beta_{\ell k} := \int_G h_\ell(\vec{x})\, g_k(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x}, \quad \omega_\ell := \int_G h_\ell(\vec{x})\, f(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x},$$

přechází celá úloha na řešení algebraické soustavy

$$\begin{pmatrix} \mathtt{C}_1 \\ \mathtt{C}_2 \\ \vdots \\ \mathtt{C}_m \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \ldots & \beta_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathtt{C}_1 \\ \mathtt{C}_2 \\ \vdots \\ \mathtt{C}_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix},$$

resp. $\vec{\mathtt{C}} = \mu \mathbb{B} \vec{\mathtt{C}} + \vec{\omega}$, kde $\mathbb{B} = (\beta_{i,j})_{i,j=1}^{m}$. O její řešitelnosti pak rozhodne především hodnota parametru μ. Tímto způsobem lze tedy integrální rovnici převést na soustavu algebraických rovnic, což je jistě značně výhodné. Zmíněnou soustavu nyní upravme do tvaru

$$(\mathbb{I} - \mu \mathbb{B})\vec{\mathtt{C}} = \vec{\omega}.$$

Determinant $\mathtt{D}(\mu)$ matice $\mathbb{I} - \mu\mathbb{B}$ je tudíž nenulový, není-li charakteristické číslo integrální rovnice μ rovno převrácené hodnotě vlastního čísla ν matice $\mathbb{B}$. Pro vlastní čísla ν matice $\mathbb{B}$ je totiž splněna rovnost $\det(\mathbb{B} - \nu\mathbb{I}) = 0$. Pokud je tedy $\mathtt{D}(\mu) \neq 0$, dostáváme odsud, že

$$\mathtt{C}_\ell = \frac{\mathtt{D}_\ell(\mu)}{\mathtt{D}(\mu)},$$

kde

$$\mathtt{D}_\ell(\mu) = \det \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1,\ell-1} & \omega_1 & \beta_{1,\ell+1} & \ldots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2,\ell-1} & \omega_2 & \beta_{2,\ell+1} & \ldots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \ldots & \beta_{m,\ell-1} & \omega_m & \beta_{m,\ell+1} & \ldots & \beta_{mm} \end{pmatrix}.$$

3.2.3 Věta

Nechť jádro integrální rovnice

$$\varphi(\vec{x}) = \mu \int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\,\varphi(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} + f(\vec{x}) \tag{3.5}$$

je separabilní tak, že $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k=1}^m g_k(\vec{x})h_k(\vec{y})$ a všechny funkce $g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x})$ a také $h_1(\vec{y}), h_2(\vec{y}), \dots, h_m(\vec{y})$ jsou lineárně nezávislé. Označme $\beta_{k\ell} = \langle g_k | h_\ell \rangle$, $\omega_\ell = \langle f | h_\ell \rangle$ a pro hledané řešení také

$$\mathtt{C}_\ell = \langle \varphi | h_\ell \rangle = \int_G \varphi(\vec{y}) h_\ell(\vec{y})\,\mathrm{d}y.$$

Pak integrální rovnice (3.5) a soustava lineárních rovnic

$$\mathtt{C}_k = \mu \sum_{\ell=1}^m \beta_{k\ell}\mathtt{C}_\ell + \omega_k$$

jsou ekvivalentní, tj. pomocí jedné rovnice lze jednoznačně sestrojit řešení druhé.

<u>*Důkaz:*</u>

- v poznámce 3.2.2 bylo dokázáno, že je-li funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{C}(\overline{G})$ řešením integrální rovnice (3.5) ze separabilním jádrem, pak jsou konstanty $\mathtt{C}_\ell$ $(\ell \in \widehat{m}$ řešením algebraické rovnice (3.2.2)
- jsou-li naopak konstanty $\mathtt{C}_\ell$ řešením rovnice (3.2.2), platí, že

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{x}) - \mu \int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\,\varphi(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} - f(\vec{x}) &= \varphi(\vec{x}) - \mu \sum_{k=1}^m g_k(\vec{x}) \int_G h_k(\vec{y})\,\varphi(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} - f(\vec{x}) = \\
&= \mu \sum_{k=1}^m \mathtt{C}_k g_k(\vec{x}) + f(\vec{x}) - \mu \sum_{k=1}^m g_k(\vec{x}) \int_G h_k(\vec{y}) \left(\mu \sum_{\ell=1}^m \mathtt{C}_\ell g_\ell(\vec{y}) + f(\vec{y}) \right) \mathrm{d}\vec{y} - f(\vec{x}) = \\
&= \mu \sum_{k=1}^m \mathtt{C}_k g_k(\vec{x}) - \mu^2 \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m \beta_{k\ell} g_k(\vec{x}) - \mu \sum_{k=1}^m \omega_k g_k(\vec{x}) = \\
&= \mu \sum_{k=1}^m \left(\mathtt{C}_k - \mu \sum_{\ell=1}^m \beta_{k\ell} - \omega_k \right) g_k(\vec{x}) = \mu \sum_{k=1}^m 0\, g_k(\vec{x}) = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

- funkce $\varphi(\vec{x}) = \mu \sum_{k=1}^m \mathtt{C}_k g_k(\vec{x}) + f(\vec{x})$ tedy integrální rovnici (3.5) řeší

3.2.4 Příklad

Demonstrovanou metodu budeme v této úloze aplikovat na rovnici

$$\varphi(\vec{x}) = \mu \int_0^{2\pi} \sin(x+y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \sin(x).$$

Užijeme-li separability zadaného integrálního operátoru, snadno nahlédneme, že

$$\varphi(\vec{x}) = \mu \sin(x) \int_0^{2\pi} \cos(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \mu\cos(x) \int_0^{2\pi} \sin(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \sin(x).$$

Označíme-li nyní

$$a = \int_0^{2\pi} \cos(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y, \qquad b = \int_0^{2\pi} \sin(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y,$$

bude mít hledané řešení tvar

$$\varphi(\vec{x}) = \mu a \sin(x) + \mu b \cos(x) + \sin(x).$$

Vynásobíme-li nyní tento vztah funkcí $\sin(x)$ a aplikujeme-li znovu integrální operátor $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x$, obdržíme rovnost

$$a = \mu a \int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x + \mu b \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podobně: vynásobíme-li uvedenou rovnici funkcí $\cos(x)$ a aplikujeme-li následně integrální operátor $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x$, obdržíme druhou rovnost tvaru

$$b = \mu a \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x + \mu b \int_0^{2\pi} \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jak je patrno, obdrželi jsme tím nehomogenní soustavu

$$a = \mu b\pi, \quad b = \mu a\pi + \pi. \tag{3.7}$$

Pro $\mu \neq \pm\frac{1}{\pi}$ má tato soustava řešení

$$a = \frac{\pi}{1-\mu^2\pi^2}, \qquad b = \frac{\mu\pi^2}{1-\mu^2\pi^2}.$$

Odtud pak

$$\varphi(x) = \frac{\sin(x+y) + \mu\pi\cos(x-y)}{1-\mu^2\pi^2}.$$

Podotýkáme, že pro hodnoty parametru $\mu_{1,2} = \pm\frac{1}{\pi}$ zadaná integrální rovnice řešení nemá, jak vyplývá ihned ze soustavy (3.7) po dosazení $\mu_{1,2} = \pm\frac{1}{\pi}$.

3.2.5 Věta

Integrální operátor se separabilním jádrem má konečný počet vlastních hodnot.

Důkaz:

- z věty 3.2.1 plyne, že vlastní čísla integrálního operátoru $\widehat{K} = \mu \int_G \mathscr{K}(\vec{x}, \vec{y}) \bullet \mathrm{d}\vec{y}$ se separabilním jádrem jsou čísla vyhovující rovnici $\det\big(\mathbb{B} - \frac{\lambda}{\mu}\mathbb{I}\big) = 0$
- pro $\mu \neq 0$ (což je garantováno definicí integrální rovnice), je tato rovnice rovnicí polynomickou
- polynom $\det\big(\mathbb{B} - \frac{\lambda}{\mu}\mathbb{I}\big)$ je přitom stupně m, a má tudíž právě m kořenů

3.3 Řešení integrálních rovnic metodou postupných aproximací

Řešit integrální rovnici (3.1) se spojitým jádrem metodou postupných aproximací znamená najít posloupnost funkcí $\varphi_\ell(\vec{x})$ definovaných na G tak, že její limitní funkce

$$\varphi(\vec{x}) = \lim_{\ell\to\infty} \varphi_\ell(\vec{x})$$

bude řešením rovnice (3.1). V následujícím textu ukážeme, že $\ell-$tý člen hledané posloupnosti může být definován rekurentním předpisem

$$\varphi_\ell(\vec{x}) = \mu \int_G \mathscr{K}(\vec{x}, \vec{y})\, \varphi_{\ell-1}(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} + f(\vec{x}). \tag{3.8}$$

3.3.1 Úmluva

V následujících dvou sekcích 3.3 a 3.4 předpokládáme, že je dán integrální operátor $\widehat{K}$ se spojitým jádrem na omezené oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$. Označme $\mathtt{M}$ mez příslušného jádra a $\mathtt{V} = \mu^r(G)$.

3.3.2 Věta

Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{C}(\overline{G})$ a číslo $\mu \in \mathbf{C}$. Označme $\varphi_0(\vec{x}) = f(\vec{x})$ a pro $\ell \in \mathbf{N}$ položme v souladu s rovnicí (3.8) $\varphi_\ell = \mu\widehat{K}(\varphi_{\ell-1}) + f$. Pak platí

$$\varphi_\ell(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\ell} \mu^k \widehat{K}^k(f), \quad \big\|\widehat{K}^\ell(\varphi)\big\| \leqslant (\mathtt{MV})^\ell \|\varphi\|, \quad \big\|\widehat{K}^\ell(\varphi)\big\|_\sigma \leqslant (\mathtt{MV})^\ell \|\varphi\|_\sigma.$$

Důkaz:

- nechť tedy $\varphi_0(\vec{x}) = f(\vec{x})$

- pak $\varphi_1(\vec{x}) = \mu\widehat{K}(\varphi_0) + f(\vec{x}) = \mu\widehat{K}(f) + f(\vec{x})$
- dále analogicky $\varphi_2(\vec{x}) = \mu\widehat{K}(\varphi_1) + f(\vec{x}) = \mu^2\widehat{K}^2(f) + \mu\widehat{K}(f) + f(\vec{x})$, odkud pak snadno nahlédnout, že

$$\varphi_\ell(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\ell} \mu^k \widehat{K}^k(f)$$

- vícenásobnou aplikací věty 3.1.11 také dostáváme

$$\big\|\widehat{K}^\ell(\varphi)\big\| = \big\|\widehat{K}\widehat{K}\ldots\widehat{K}(\varphi)\big\| \leqslant \mathtt{MV}\big\|\widehat{K}^{\ell-1}(\varphi)\big\| \leqslant \mathtt{M}^2\mathtt{V}^2\big\|\widehat{K}^{\ell-2}(\varphi)\big\| \leqslant \ldots \leqslant (\mathtt{MV})^\ell\|\varphi\|$$

- analogicky dostáváme užitím věty 3.1.14 i druhou nerovnost

$$\big\|\widehat{K}^\ell(\varphi)\big\|_\sigma = \big\|\widehat{K}\widehat{K}\ldots\widehat{K}(\varphi)\big\|_\sigma \leqslant \mathtt{MV}\big\|\widehat{K}^{\ell-1}(\varphi)\big\|_\sigma \leqslant \mathtt{M}^2\mathtt{V}^2\big\|\widehat{K}^{\ell-2}(\varphi)\big\|_\sigma \leqslant \ldots \leqslant (\mathtt{MV})^\ell\|\varphi\|_\sigma$$

3.3.3 Věta – o řešení integrální rovnice metodou postupných aproximací

Integrální rovnice se spojitým jádrem má ve třídě $\mathscr{C}(\overline{G})$ pro každé $\mu \in \mathbf{C}$ takové, že $|\mu| < (\mathtt{MV})^{-1}$, a pro každé $f(\vec{x}) \in \mathscr{C}(\overline{G})$ právě jediné řešení, a sice

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \widehat{K}^k(f). \tag{3.9}$$

Navíc pro něj platí

$$\|\varphi\|_\sigma \leqslant \frac{\|f\|_\sigma}{1 - |\lambda|\mathtt{MV}}.$$

Přitom řada funkcí (3.9) konverguje regulárně na $\overline{G}$.

<u>*Důkaz:*</u>

- pro všechna $\vec{x} \in \overline{G}$ platí podle větě 3.3.2 nerovnost

$$\Big\|\mu^k\widehat{K}^k(f)\Big\|_\sigma \leqslant |\mu|^k\mathtt{M}^k\mathtt{V}^k\|f\|_\sigma$$

- tedy číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty}|\mu|^k\mathtt{M}^k\mathtt{V}^k\|f\|_\sigma$ je majorantní k řadě funkcí (3.9)
- protože číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty}|\mu|^k\mathtt{M}^k\mathtt{V}^k\|f\|_\sigma$ konverguje, jak je patrno z rovnosti

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\mu|^k\mathtt{M}^k\mathtt{V}^k\|f\|_\sigma = \frac{\|f\|_\sigma}{1-|\mu|\mathtt{MV}}, \qquad \big(|\mu\mathtt{MV}| < 1\big),$$

  konverguje řada funkcí (3.9) podle Weierstrassova kritéria regulárně na $\overline{G}$
- dokažme nyní, že její součet $\varphi(\vec{x})$ je na $\overline{G}$ řešením příslušné integrální rovnice
- to prokážeme přímým dosazením

$$\mu\int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\,\varphi(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} + f(\vec{x}) = \mu\int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\sum_{\ell=0}^{\infty}\mu^k\widehat{K}^k(f) + f(\vec{x}) = \mu\widehat{K}\sum_{\ell=0}^{\infty}\mu^k\widehat{K}^k(f) + f(\vec{x}) =$$
$$= \sum_{\ell=0}^{\infty}\mu^{k+1}\widehat{K}^{k+1}(f) + f(\vec{x}) = \sum_{m=0}^{\infty}\mu^m\widehat{K}^m(f) = \varphi(\vec{x}) \tag{3.10}$$

- zbývá dokázat, že vztah (3.9) zadává řešení, jež je jediné
- to je ekvivalentní důkazu, že homogenní rovnice $\varphi = \mu\widehat{K}(\varphi)$ má pouze jedno řešení
- jelikož z obecné vlastnosti víme, že $\|\widehat{K}(\varphi)\| \leqslant \mathtt{MV}\|\varphi\|$, dostáváme odtud

$$\|\varphi\| = \|\mu\widehat{K}(\varphi)\| \leqslant |\mu|\mathtt{MV}\|\varphi\|$$

- mělo by tedy platit, že $|\mu|\mathtt{MV} \geqslant 1$, což je spor s předpokladem $|\mu| < (\mathtt{MV})^{-1}$
- tím je důkaz zkompletován

3.3.4 Definice

Řadu funkcí (3.9) nazýváme *Neumannovou řadou* integrální rovnice.

3.3.5 Příklad

Řešme integrální rovnici

$$\varphi(x) = \mu \int_0^1 x^2 y^3 \varphi(y)\, \mathrm{d}y + x$$

metodou postupných aproximací. Hledáme tedy posloupnost $\left(\varphi_\ell(x)\right)_{\ell=1}^{\infty}$ takovou, že hledané řešení $\varphi(x)$ je její limitou, tedy $\varphi(x) = \lim_{\ell\to\infty} \varphi_\ell(x)$. Z teorie ale víme, že pro $\ell-$ tý člen takové posloupnosti platí rekurentní formule

$$\varphi_\ell(x) = \mu \int_G \mathscr{K}(x,y)\, \varphi_{\ell-1}(y)\, \mathrm{d}y + f(x) = \mu \int_0^1 x^2 y^3 \varphi_{\ell-1}(y)\, \mathrm{d}y + x.$$

Položíme $\varphi_0(x) = x$ a vypočteme

$$\varphi_1(x) = \mu \int_0^1 x^2 y^3 \varphi_0(y)\, \mathrm{d}y + x = \mu \int_0^1 x^2 y^4\, \mathrm{d}y + x = x + \frac{1}{5}\mu x^2,$$

$$\varphi_2(x) = \mu \int_0^1 x^2 y^3 \varphi_1(y)\, \mathrm{d}y + x = \mu \int_0^1 x^2 y^3 \left(y + \frac{1}{5}\mu y^2\right) \mathrm{d}y + x = x + \frac{1}{5}\mu x^2 + \frac{1}{5}\frac{1}{6}\mu^2 x^2,$$

$$\varphi_3(x) = \mu \int_0^1 x^2 y^3 \varphi_2(y)\, \mathrm{d}y + x = \mu \int_0^1 x^2 y^3 \left(y + \frac{1}{5}\mu y^2 + \frac{1}{5}\frac{1}{6}\mu^2 y^2\right) \mathrm{d}y + x = x + \frac{1}{5}\mu x^2 + \frac{1}{5}\frac{1}{6}\mu^2 x^2 + \frac{1}{5}\frac{1}{6^2}\mu^3 x^2,$$

$$\varphi_4(x) = \mu \int_0^1 x^2 y^3 \left(y + \frac{1}{5}\mu y^2 + \frac{1}{5}\frac{1}{6}\mu^2 y^2 + \frac{1}{5}\frac{1}{6^2}\mu^3 y^2\right) \mathrm{d}y + x = x + \frac{1}{5}\mu x^2 + \frac{1}{5}\frac{1}{6}\mu^2 x^2 + \frac{1}{5}\frac{1}{6^2}\mu^3 x^2 + \frac{1}{5}\frac{1}{6^3}\mu^4 x^2.$$

Odtud již snadno vyvozujeme, že

$$\varphi_\ell(x) = x + \frac{1}{5}\mu x^2 \sum_{k=0}^{\ell} \left(\frac{\mu}{6}\right)^k.$$

Hledaným řešením této úlohy je tudíž (pro hodnoty parametru $|\mu| < 6$) funkce

$$\varphi(x) = \lim_{\ell\to\infty} \varphi_\ell(x) = \lim_{\ell\to\infty} \left(x + \frac{1}{5}\mu x^2 \sum_{k=0}^{\ell} \left(\frac{\mu}{6}\right)^k\right) = x + \frac{1}{5}\mu x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{6}\right)^k = x + \frac{1}{5}\mu x^2 \frac{1}{1-\frac{\mu}{6}} = x + \frac{6\mu x^2}{5(6-\mu)}.$$

3.4 Řešení integrálních rovnic metodou iterovaných jader

Alternativní metodou, jak řešit integrální rovnice, je sestavit tzv. rezolventu a s jejím použitím vypočítat hledané řešení. Jak tuto rezolventu sestavit a jak ji užít k řešení ukážeme v tomto oddíle.

3.4.1 Věta

Nechť jsou dány dva integrální operátory $\widehat{K}_1$, resp. $\widehat{K}_2$ se spojitými jádry $\mathscr{K}_1(\vec{x},\vec{y})$, resp. $\mathscr{K}_2(\vec{x},\vec{y})$. Pak $\widehat{K}_3 = \widehat{K}_2\widehat{K}_1$ je integrální operátor se spojitým jádrem

$$\mathscr{K}_3(\vec{x},\vec{y}) = \int_G \mathscr{K}_2(\vec{x},\vec{z})\mathscr{K}_1(\vec{z},\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{z}.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- nechť jsou tedy dány dva integrální operátory $\widehat{K}_1 := \int_G \mathscr{K}_1(\vec{x},\vec{y}) \bullet \mathrm{d}\vec{y}$ a $\widehat{K}_2 := \int_G \mathscr{K}_2(\vec{x},\vec{y}) \bullet \mathrm{d}\vec{y}$
- pak aplikací Fubiniovy věty dostáváme

$$\widehat{K}_3(\varphi) = \widehat{K}_2\widehat{K}_1(\varphi) = \widehat{K}_2\left(\int_G \mathscr{K}_1(\vec{z},\vec{y})\, \varphi(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y}\right) = \int_G \mathscr{K}_2(\vec{x},\vec{z}) \left(\int_G \mathscr{K}_1(\vec{z},\vec{y})\, \varphi(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y}\right) \mathrm{d}\vec{z} =$$

$$= \int_G \int_G \mathscr{K}_2(\vec{x},\vec{z})\mathscr{K}_1(\vec{z},\vec{y})\, \varphi(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y}\mathrm{d}\vec{z} = \int_G \mathscr{K}_3(\vec{x},\vec{y})\, \varphi(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y},$$

  kde $\mathscr{K}_3(\vec{x},\vec{y}) = \int_G \mathscr{K}_2(\vec{x},\vec{z})\mathscr{K}_1(\vec{z},\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{z}$
- jsou-li jádra $\mathscr{K}_1(\vec{x},\vec{y})$, $\mathscr{K}_2(\vec{x},\vec{y})$ spojitá, je tudíž spojité i jádro $\mathscr{K}_3(\vec{x},\vec{y})$

3.4.2 Věta

Nechť je dán integrální operátor $\widehat{K}$ se spojitým jádrem $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})$. Pak pro každé $\ell \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ je integrální operátor $\widehat{K}^\ell = \widehat{K}(\widehat{K}^{\ell-1}) = (\widehat{K}_{\ell-1})\widehat{K}$ operátorem se spojitým jádrem

$$\mathscr{K}_\ell(\vec{x},\vec{y}) = \int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{z})\mathscr{K}_{\ell-1}(\vec{z},\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{z} = \int_G \mathscr{K}_{\ell-1}(\vec{x},\vec{z})\mathscr{K}(\vec{z},\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{z}.$$

Důkaz:

- pro důkaz postačí ve větě 3.4.1 položit $\widehat{K}_1 = \widehat{K}$ a $\widehat{K}_2 = \widehat{K}^{\ell-1}$
- tvrzení o tvaru jádra operátoru $\widehat{K}_\ell$ pak ihned vyplývá z citované věty

3.4.3 Definice

Jádra $\mathscr{K}_\ell(\vec{x},\vec{y})$ z předešlé věty nazýváme *iterovanými jádry* odvozenými od jádra $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})$. Posloupnost $\big(\mathscr{K}_\ell(\vec{x},\vec{y})\big)_{\ell=0}^\infty$ nazýváme *posloupností iterovaných jader*.

3.4.4 Věta

Nechť $\big(\mathscr{K}_\ell(\vec{x},\vec{y})\big)_{\ell=0}^\infty$ je posloupnost iterovaných jader odvozených od jádra $\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})$. Nechť $\mathtt{M}$ je mez tohoto jádra a $\mathtt{V} = \mu^r(G)$. Pak pro každé $|\mu| < (\mathtt{MV})^{-1}$ řada

$$\mathscr{R}(x,y;\mu) := \sum_{\ell=0}^\infty \mu^\ell \mathscr{K}_{\ell+1}(\vec{x},\vec{y})$$

konverguje regulárně na $\overline{G}$.

Důkaz:

- z rovnice $\mathscr{K}_\ell(\vec{x},\vec{y}) = \int_G \mathscr{K}(\vec{x},\vec{z})\mathscr{K}_{\ell-1}(\vec{z},\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{z}$ a z nerovnosti $\big\|\widehat{K}(\varphi)\big\|_\sigma \leqslant \mathtt{MV}\|\varphi\|_\sigma$ dokázané ve větě 3.1.14 indukcí prokážeme, že pro jakékoli přirozené ℓ platí nerovnost
$$\big|\mathscr{K}_\ell(\vec{x},\vec{y})\big| \leqslant \mathtt{M}^\ell\mathtt{V}^{\ell-1}$$
- z této rovnosti zjišťujeme, že číselná řada $\sum_{\ell=0}^\infty |\mu|^\ell \mathtt{M}^{\ell+1}\mathtt{V}^\ell$ je majorantní k funkční řadě $\sum_{\ell=0}^\infty \mu^\ell \mathscr{K}_{\ell+1}(\vec{x},\vec{y})$
- a protože majorantní číselná řada konverguje pro $|\mu| < (\mathtt{MV})^{-1}$, konverguje řada $\sum_{\ell=0}^\infty \mu^\ell \mathscr{K}_{\ell+1}(\vec{x},\vec{y})$ regulárně na $\overline{G}\times\overline{G}$ ke svému součtu $\mathscr{R}(\vec{x},\vec{y};\mu)$

3.4.5 Definice

Funkci $\mathscr{R}(\vec{x},\vec{y};\mu)$ z věty 3.4.4 nazýváme *rezolventou* integrálního operátoru $\widehat{K}$.

3.4.6 Důsledek

Rezolventa $\mathscr{R}(\vec{x},\vec{y};\mu)$ integrálního operátoru $\widehat{K}$ se spojitým jádrem je spojitá na množině $\overline{G}\times\overline{G}\times B_{(\mathtt{MV})^{-1}}$ a jako funkce parametru $\mu \in \mathbf{C}$ je v kruhu $B_{(\mathtt{MV})^{-1}}$ analytická.

3.4.7 Věta – o řešení integrální rovnice metodou iterovaných jader

Integrální rovnice se spojitým jádrem má ve třídě $\mathscr{C}(\overline{G})$ pro každé $\mu \in \mathbf{C}$ takové, že $|\mu| < (\mathtt{MV})^{-1}$, a pro každé $f(\vec{x}) \in \mathscr{C}(\overline{G})$ právě jediné řešení, a sice

$$\varphi(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \mu\int_G \mathscr{R}(\vec{x},\vec{y};\mu)f(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y}. \tag{3.11}$$

Důkaz:

- podle věty 3.3.3 existuje pro všechna charakteristická čísla μ, pro něž $|\mu| < (\mathtt{MV})^{-1}$, a každou funkci $f(\vec{x}) \in \mathscr{C}(\overline{G})$ právě jediné řešení integrální rovnice

$$\varphi(\vec{x}) = \mu \int_G \mathscr{K}(\vec{x}, \vec{y})\, \varphi(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y} + f(\vec{x})$$

- toto řešení je třídy $\mathscr{C}(\overline{G})$ a lze jej vyjádřit pomocí Neumannovy řady jako

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mu^k \widehat{K}^k(f)$$

- jestliže do této řady dosadíme vyjádření operátoru $\widehat{K}^k(f)$ pomocí iterovaného jádra $\mathscr{K}_k(\vec{x}, \vec{y})$, konkrétně $\widehat{K}^k(f) = \int_G \mathscr{K}_k(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y}$, dostáváme

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \widehat{K}^k(f) = f(\vec{x}) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \int_G \mathscr{K}_k(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y} = f(\vec{x}) + \mu \int_G \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{k-1} \mathscr{K}_k(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y} =$$

$$= f(\vec{x}) + \mu \int_G \mathscr{R}(\vec{x}, \vec{y}; \mu) f(\vec{y})\, \mathrm{d}\vec{y}$$

3.4.8 Příklad

Metodou iterovaých jader řešme integrální rovnici

$$\varphi(\vec{x}) = \mu \int_0^{2\pi} \sin(x+y)\varphi(y)\, \mathrm{d}y + \sin(x).$$

Sestavíme nejprve posloupnost iterovaných jader. Snadno

$$\mathscr{K}_1(x, y) = \mathscr{K}(x, y) = \sin(x+y).$$

Dále

$$\mathscr{K}_2(x, y) = \int_0^{2\pi} \mathscr{K}_1(x, s)\mathscr{K}(s, y)\, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \big[\sin(x+s)\sin(s+y)\big]\, \mathrm{d}s = \pi\cos(x-y)$$

$$\mathscr{K}_3(x, y) = \pi \int_0^{2\pi} \mathscr{K}_2(x, s)\mathscr{K}(s, y)\, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \big[\cos(x-s)\sin(s+y)\big]\, \mathrm{d}s = \pi^2\sin(x+y)$$

$$\mathscr{K}_4(x, y) = \pi^2 \int_0^{2\pi} \mathscr{K}_3(x, s)\mathscr{K}(s, y)\, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \big[\sin(x+s)\sin(s+y)\big]\, \mathrm{d}s = \pi^3\cos(x-y).$$

Nyní již snadno zkonstruujeme celou posloupnost iterovaných jader:

$$\mathscr{K}_{2\ell-1}(x, y) = \pi^{2\ell-2}\sin(x+y).$$

$$\mathscr{K}_{2\ell}(x, y) = \pi^{2\ell-1}\cos(x-y).$$

Pro rezolventu tudíž platí

$$\mathscr{R}(x, y; \mu) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu^{\ell-1}\mathscr{K}_\ell(x, y) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu^{2\ell-2}\pi^{2\ell-2}\sin(x+y) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu^{2\ell-1}\pi^{2\ell-1}\cos(x-y) =$$

$$= \big(\sin(x+y) + \mu\pi\cos(x-y)\big)\sum_{\ell=1}^{\infty}(\mu\pi)^{2\ell-2} = \frac{\sin(x+y) + \mu\pi\cos(x-y)}{1-\mu^2\pi^2}.$$

Upozorňujeme čtenáře, že výše uvedený vztah byl získán za předpokladu, že $|\mu\pi| < 1$. Ze vztahu (3.11) pak lze již vypočíst hledané řešení, neboť

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-\mu^2\pi^2}\int_0^{2\pi}\big(\sin(x+y) + \mu\pi\cos(x-y)\big)\sin(y)\, \mathrm{d}y + \sin(x) = \frac{1}{1-\mu^2\pi^2}\big(\sin(x) + \mu\pi\cos(x)\big).$$

Podotýkáme, že problematické hodnoty parametru μ ve zlomku $\frac{1}{1-\mu^2\pi^2}$ jsou právě převrácené hodnoty vlastních čísel příslušného operátoru, což je univerzální rys integrálních rovnic.

3.5 Volterrovy integrální rovnice a jejich řešení

Nyní se budeme zaobírat řešením speciálního typu integrálních rovnic, jejichž dvoudimenzionální jádro $\mathscr{K}(x,y)$ je nulové v trojúhelníku

$$T = \big\{(x,y) \in \langle 0,a\rangle \times \langle 0,a\rangle : 0 < x < y < a\big\}.$$

Ve většině případů takové jádro není spojité, a nebude tedy možno užít předešlých výsledků. Jak ale ukážeme v nadcházející sekci, jak metoda postupných aproximací, tak také metoda iterovaných jader budou mít své alternativy i pro Volterrovy integrální rovnice.

3.5.1 Definice

Nechť $a > 0$ je pevně zvolený parametr. Jádro $\mathscr{K}_\ell(x,y)$ definované na uzavřené oblasti $\overline{G} \times \overline{G}$, kde $G = (0,a)$, nazveme *Volterrovým jádrem,* je-li splněna následující implikace

$$0 < x < y < a \quad \Rightarrow \quad \mathscr{K}(x,y) = 0.$$

Operátor $\widehat{K}$ definovaný předpisem

$$\widehat{K} := \int_0^x \mathscr{K}(x,y) \bullet \mathtt{d}y$$

budeme nazývat *Volterrovým integrálním operátorem.*

3.5.2 Definice

Nechť $a > 0$ je pevně zvolený parametr a $f(x) \in \mathscr{C}\big(\langle 0,a\rangle\big)$. Nechť $\mathscr{K}(x,y)$ je Volterrovo jádro definované na množině $\overline{G} \times \overline{G}$, kde $G = (0,a)$. Pak integrální rovnici

$$\varphi(x) = \mu \int_G \mathscr{K}(x,y)\,\varphi(y)\,\mathtt{d}y + f(x) = \mu \int_0^x \mathscr{K}(x,y)\,\varphi(y)\,\mathtt{d}y + f(x) \tag{3.12}$$

pro neznámou funkci $\varphi(x)$ nazýváme *Volterrovou integrální rovnicí*.

3.5.3 Definice

Řekneme, že Volterrovo jádro $\mathscr{K}(x,y) : (0,a) \times (0,a) \mapsto \mathbf{C}$ je *spojité*, je-li funkce $\mathscr{K}(x,y)$ spojitá na uzavřeném trojúhelníku

$$T = \big\{(x,y) \in \langle 0,a\rangle \times \langle 0,a\rangle : 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant a\big\}.$$

3.5.4 Definice

Nechť je zadána Volterrova integrální rovnice (3.12) se spojitým jádrem $\mathscr{K}(x,y) : (0,a) \times (0,a) \mapsto \mathbf{C}$. Pak číslo

$$\mathtt{M} := \max_{(\vec{x},\vec{y}) \in \overline{G} \times \overline{G}} \big|\mathscr{K}(\vec{x},\vec{y})\big|$$

nazýváme *mezí Volterrova jádra* $\mathscr{K}(x,y)$.

3.5.5 Věta

Nechť $a > 0$ je pevně zvolený parametr, $\widehat{K}$ je Volterrův integrální operátor definovaný na $G = (0,a)$ a $\mathtt{M}$ je jeho mez. Pak pro každé $\ell \in \mathbf{N}_0$ a každou funkci $f(x) \in \mathscr{C}\big(\langle 0,a\rangle\big)$ je $\widehat{K}^\ell(f) \in \mathscr{C}\big(\langle 0,a\rangle\big)$ a pro každé $x \in \overline{G}$ platí

$$\Big|\big(\widehat{K}^\ell(f)\big)(x)\Big| \leqslant \frac{(\mathtt{M}x)^\ell}{\ell!}\|f\|_\sigma.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- pro $\ell = 0$ tvrzení zjevně platí
- předpokládejme tedy, že tvrzení platí pro jisté $\ell \in \mathbf{N}_0$
- pak

$$\big(\widehat{K}^{\ell+1}(f)\big)(x) = \int_0^x \mathscr{K}(x,y)\,\big(\widehat{K}^\ell(f)\big)(y)\,\mathtt{d}y$$

- protože jak jádro $\mathscr{K}(x,y)$, tak funkce $\big(\widehat{K}^\ell(f)\big)(y)$ jsou podle předpokladů dokazované věty spojitými funkcemi na trojúhelníku $T = \big\{(x,y) \in \langle 0,a\rangle \times \langle 0,a\rangle : 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant a\big\}$, je spojitá také funkce $\big(\widehat{K}^{\ell+1}(f)\big)(x)$
- pokud se týká její omezenosti, není obtížné odvodit, že

$$\left|\big(\widehat{K}^\ell(f)\big)(x)\right| = \left|\int_0^x \mathscr{K}(x,y)\,\big(\widehat{K}^\ell(f)\big)(y)\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{\mathtt{M}^{\ell+1}\|f\|_\sigma}{\ell!}\int_0^x y^\ell\,\mathrm{d}y = \frac{(\mathtt{M}x)^{\ell+1}}{(\ell+1)!}\|f\|_\sigma$$

- tím je tvrzení dokázáno

3.5.6 Věta – o řešení Volterrovy integrální rovnice metodou postupných aproximací

Nechť $a > 0$ je pevně zvolený parametr, $\widehat{K}$ je Volterrův integrální operátor se spojitým jádrem definovaný na $G = (0,a)$ a $\mathtt{M}$ je jeho mez. Pak příslušná Volterrova integrální rovnice má ve třídě $\mathscr{C}(\overline{G})$ pro každé $\mu \in \mathbf{C}$ a pro každou funkci $f(\vec{x}) \in \mathscr{C}(\overline{G})$ právě jediné řešení, a sice

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left(\widehat{K}^k(f)\right)(x). \tag{3.13}$$

Navíc pro něj platí

$$\|\varphi\|_\sigma \leqslant \|f\|_\sigma\, \mathrm{e}^{\mu a \mathtt{M}}. \tag{3.14}$$

Přitom řada funkcí (3.13) konverguje na $\overline{G}$ regulárně.

<u>*Důkaz:*</u>

- z věty 3.5.5 vyplývá, že Neumannova řada (3.13) je majorizována konvergentní číselnou řadou

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} |\mu|^\ell \frac{(\mathtt{M}x)^\ell}{\ell!}\|f\|_\sigma = \|f\|_\sigma\, \mathrm{e}^{\mu a \mathtt{M}},$$

  jejímž součtem je právě číslo $\|f\|_\sigma\, \mathrm{e}^{\mu a \mathtt{M}}$
- proto konverguje posloupnost

$$\big(\varphi_\ell(x)\big)_{\ell=0}^{\infty} = \left(\sum_{k=0}^{\ell} \mu^k \left(\widehat{K}^k(f)\right)(x)\right)_{\ell=0}^{\infty}$$

  podle Weierstrassova kritéria regulárně a její limitou je spojitá funkce $\varphi(\vec{x})$
- navíc je tím prokázán také odhad (3.14)
- dokažme nyní, že takto zkonstruované $\varphi(x)$ je na $\overline{G}$ řešením příslušné Volterrovy integrální rovnice
- to prokážeme přímým dosazením

$$\mu\int_G \mathscr{K}(x,y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y + f(x) = \mu\int_0^x \mathscr{K}(x,y)\,\sum_{\ell=0}^{\infty}\mu^k\widehat{K}^k(f)(y)\,\mathrm{d}y + f(x) = \mu\widehat{K}\,\sum_{\ell=0}^{\infty}\mu^k\widehat{K}^k(f) + f(x) =$$
$$= \sum_{\ell=0}^{\infty}\mu^{k+1}\widehat{K}^{k+1}(f) + f(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\mu^m\widehat{K}^m(f) = \varphi(x) \tag{3.15}$$

- zbývá dokázat, že vztah (3.13) definuje řešení, jež je jedinečné
- to je ekvivalentní důkazu, že homogenní rovnice $\varphi = \mu\widehat{K}(\varphi)$ (kdy tedy $f(x) = 0$, potažmo $\|f\|_\sigma = 0$) má pouze jediné řešení
- jelikož jsme ale výše prokázali (jak plyne z odhadu (3.14)), že

$$\|\varphi\|_\sigma \leqslant \|f\|_\sigma\, \mathrm{e}^{\mu a \mathtt{M}} = 0,$$

  jediným spojitým řešením této úlohy je skutečně pouze nulová funkce $\varphi(x) = 0$
- tím je důkaz zkompletován

3.5.7 Příklad

Řešme integrální rovnici

$$\varphi(x) = \mu \int_0^x \sqrt{xy}\, \varphi(y)\, \mathtt{d}y + \sqrt{x}$$

metodou postupných aproximací. Hledáme tedy posloupnost $\left(\varphi_\ell(x)\right)_{\ell=1}^{\infty}$ takovou, že hledané řešení $\varphi(x)$ je její limitou, tedy $\varphi(x) = \lim_{\ell\to\infty} \varphi_\ell(x)$. Z teorie ale víme, že pro $\ell-$ tý člen takové posloupnosti platí rekurentní formule

$$\varphi_\ell(x) = \mu \int_0^x \mathscr{K}(x,y)\, \varphi_{\ell-1}(y)\, \mathtt{d}y + f(x) = \mu \int_0^x \sqrt{xy}\, \varphi_{\ell-1}(y)\, \mathtt{d}y + \sqrt{x}.$$

Položíme $\varphi_0(x) = \sqrt{x}$ a vypočteme

$$\varphi_1(x) = \mu \int_0^x \sqrt{xy}\sqrt{y}\, \mathtt{d}y + \sqrt{x} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\mu\sqrt{x}\, x^2$$

$$\varphi_2(x) = \mu \int_0^x \sqrt{xy}\left(\sqrt{y} + \frac{1}{2}\mu\sqrt{y}\, y^2\right)\, \mathtt{d}y + \sqrt{x} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\mu\sqrt{x}\, x^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\mu^2\sqrt{x}\, x^4.$$

Pokusme se tedy nyní matematickou indukcí prokázat, že platí předpis

$$\varphi_\ell(x) = \sqrt{x}\sum_{k=0}^{\ell} \frac{\mu^k}{(2k)!!} x^{2k} \tag{3.16}$$

Jelikož

$$\varphi_{\ell+1}(x) = \mu \int_0^x \mathscr{K}(x,y)\, \varphi_\ell(y)\, \mathtt{d}y + f(x) = \mu \int_0^x \sqrt{x}\sum_{k=0}^{\ell} \frac{\mu^k}{(2k)!!} y^{2k+1}\, \mathtt{d}y + \sqrt{x} =$$

$$= \sqrt{x}\sum_{k=0}^{\ell} \frac{\mu^{k+1}}{(2k)!!}\int_0^x y^{2k+1}\, \mathtt{d}y + \sqrt{x} = \sqrt{x}\sum_{k=0}^{\ell} \frac{\mu^{k+1}}{(2k+2)!!} x^{2k+2} + \sqrt{x} = \left|m = k+1\right| = \sqrt{x}\sum_{m=0}^{\ell+1} \frac{\mu^m}{(2m)!!} x^{2m},$$

je platnost vztahu (3.16) prokázána. Proto je hledaným řešením funkce

$$\varphi(x) = \lim_{\ell\to\infty} \varphi_\ell(x) = \lim_{\ell\to\infty} \sqrt{x}\sum_{k=0}^{\ell} \frac{\mu^k}{(2k)!!} x^{2k} = \sqrt{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{(2k)!!} x^{2k} = \sqrt{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{\mu x^2}{2}\right)^k = \sqrt{x}\mathsf{e}^{\frac{\mu x^2}{2}}.$$

3.5.8 Věta – o řešení Volterrovy integrální rovnice metodou iterovaných jader

Nechť $a > 0$ je pevně zvolený parametr, $\widehat{K}$ je Volterrův integrální operátor se spojitým jádrem definovaný na $G = (0, a)$ a $\mathtt{M}$ je jeho mez. Pak příslušná Volterrova integrální rovnice má ve třídě $\mathscr{C}(\overline{G})$ pro každé $\mu \in \mathbf{C}$ a pro každé $f(x) \in \mathscr{C}(\overline{G})$ právě jediné řešení, a sice

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int_G \mathscr{R}(x,y;\mu) f(y)\, \mathtt{d}y, \tag{3.17}$$

kde

$$\mathscr{R}(x,y;\mu) := \sum_{\ell=0}^{\infty} \mu^\ell \mathscr{K}_{\ell+1}(x,y),$$

a pro iterovaná jádra platí rekurentní vztah

$$\mathscr{K}_{\ell+1}(x,y) = \int_y^x \mathscr{K}(x,z)\mathscr{K}_\ell(z,y)\, \mathtt{d}z = \int_y^x \mathscr{K}_\ell(x,z)\mathscr{K}(z,y)\, \mathtt{d}z.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- podle věty 3.5.6 existuje pro všechna charakteristická čísla μ a každou funkci $f(x) \in \mathscr{C}(\overline{G})$ právě jediné řešení integrální rovnice

$$\varphi(x) = \mu \int_0^x \mathscr{K}(x,y)\, \varphi(y)\, \mathtt{d}y + f(x)$$

- toto řešení je třídy $\mathscr{C}(\overline{G})$ a lze jej vyjádřit pomocí Neumannovy řady jako

$$\varphi(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mu^k \widehat{K}^k(f)$$

- jestliže do této řady dosadíme vyjádření operátoru $\widehat{K}^k(f)$ pomocí iterovaného jádra $\mathscr{K}_k(x,y)$, konkrétně $\widehat{K}^k(f) = \int_0^x \mathscr{K}_k(x,y) f(y)\,\mathtt{d}y$, dostáváme

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \widehat{K}^k(f) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \int_0^x \mathscr{K}_k(x,\vec{y}) f(y)\,\mathtt{d}y = f(x) + \mu \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{k-1} \mathscr{K}_k(x,y) f(y)\,\mathtt{d}y =$$

$$= f(x) + \mu \int_0^x \mathscr{R}(x,y;\mu) f(y)\,\mathtt{d}y$$

- zbývá prokázat platnost rekurentní formule pro iterovaná jádra
- jak bylo již diskutováno, platí pro $(\ell+1)$ní iterované jádro obecná formule

$$\mathscr{K}_{\ell+1}(x,y) = \int_0^a \mathscr{K}_\ell(x,z) \mathscr{K}(z,y)\,\mathtt{d}z$$

- jelikož je ale pro Volterrova jádra splněna nulovost na uzavřeném trojúhelníku $T = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant a\big\}$, má smysl v posledně uvedeném integrálu integrovat pouze přes ta $s \in \langle 0, a\rangle$, pro něž $0 \leqslant y \leqslant s \leqslant a$ a zároveň $0 \leqslant s \leqslant x \leqslant a$
- proto

$$\mathscr{K}_{\ell+1}(x,y) = \int_y^x \mathscr{K}_\ell(x,z) \mathscr{K}(z,y)\,\mathtt{d}z$$

3.5.9 Příklad

Metodou postupných aproximací budeme nyní řešit Volterrovu integrální rovnici

$$\varphi(x) = \mu \int_0^x xy\varphi(y)\,\mathtt{d}y + x.$$

Sestavíme nejprve posloupnost Volterrových iterovaných jader. Snadno

$$\mathscr{K}_1(x,y) = \mathscr{K}(x,y) = xy.$$

Dále

$$\mathscr{K}_2(x,y) = \int_0^a \mathscr{K}_1(x,s)\mathscr{K}(s,y)\,\mathtt{d}s = \left| \begin{array}{c} 0 \leqslant y \leqslant s \leqslant a \\ 0 \leqslant s \leqslant x \leqslant a \end{array} \right| = \int_y^x xys^2\,\mathtt{d}s = \frac{1}{3}xy(x^3-y^3)$$

$$\mathscr{K}_3(x,y) = \int_y^x \frac{1}{3}xs(x^3-s^3)sy\,\mathtt{d}s = \left| \begin{array}{c} u = x^3 - s^3 \\ \mathtt{d}u = -3s^2\mathtt{d}s \end{array} \right| = \frac{1}{9}xy \int_0^{x^3-y^3} u\,\mathtt{d}u =$$

$$= \frac{1}{9}xy \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{x^3-y^3} = \frac{1}{18}xy(x^3-y^3)^2$$

$$\mathscr{K}_4(x,y) = \int_y^x \frac{1}{18}xs(x^3-s^3)^2sy\,\mathtt{d}s = \left| \begin{array}{c} u = x^3 - s^3 \\ \mathtt{d}u = -3s^2\mathtt{d}s \end{array} \right| = \frac{1}{54}xy \int_0^{x^3-y^3} u^2\,\mathtt{d}u =$$

$$= \frac{1}{54}xy \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^{x^3-y^3} = \frac{1}{162}xy(x^3-y^3)^3.$$

Poměrně snadno tedy nahlédneme, že

$$\mathscr{K}_\ell(x,y) = \frac{xy}{(\ell-1)!}\left(\frac{x^3-y^3}{3}\right)^{\ell-1}.$$

Pro rezolventu pak tedy po použití Maclaurinova rozvoje funkce e^x dostáváme

$$\mathscr{R}(x, y; \mu) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu^{\ell-1} \mathscr{K}_\ell(x, y) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\mu^{\ell-1}}{(\ell-1)!} xy \left(\frac{x^3 - y^3}{3} \right)^{\ell-1} = xy\mathrm{e}^{-\mu \frac{x^3-y^3}{3}}.$$

Odtud lze přímo stanovit hledané řešení, a sice

$$\varphi(x) = x + \mu x \int_0^x y^2 \mathrm{e}^{-\mu \frac{x^3-y^3}{3}} \, \mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} u = x^3 - s^3 \\ \mathrm{d}u = -3y^2 \mathrm{d}y \end{array} \right| = x\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{3} x}.$$

Kapitola 4

Úvod do teorie parciálních diferenciálních rovnic

Hlavní náplní těchto skript je teorie parciálních diferenciálních rovnic a metodika jejich řešení. V této kapitole nejprve seznámíme čtenáře s obecnou klasifikací těchto rovnic a se způsoby, jak parciální diferenciální rovnice normalizovat a podle normálních tvarů také klasifikovat.

4.1 Parciální diferenciální rovnice druhého řádu

Rozsáhlou oblast parciálních diferenciálních rovnic na úvod kapitoly razantně zúžíme na lineární diferenciální rovnice druhého řádu, tj. na případ, kdy nejvyšší derivací v rovnici je libovolná parciální derivace druhého řádu. Důvod pro takové zúžení je ukryt zejména v praktickém pozadí zkoumaných rovnic. Většina z nich totiž vzešla ze studia konkrétních fyzikálních či příbuzných systémů (úlohy na vedení tepla, šíření jednorozměrných či vícerozměrných vln, teorie kmitání, úlohy kvantové mechaniky, úlohy z teorie mikroskopických dopravních modelů apod).

V prvním oddíle této kapitoly tedy budeme definovat pojem parciální diferenciální rovnice druhého řádu a specifikovat některé její speciální typy.

4.1.1 Definice

Nechť

$$\mathbb{A}(\vec{x}) = \big(a_{ij}(\vec{x})\big)_{i,j=1}^{r}$$

je nenulová symetrická matice spojitých funkcí $a_{ij}(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{R}$. Nechť je dán $r-$rozměrný vektor $\vec{b}(\vec{x})$ spojitých funkcí $b_i(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{R}$ a spojitá funkce $c(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{R}$. *Parciálním diferenciálním operátorem druhého řádu* na oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$ rozumíme operátor

$$\widehat{L} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(\vec{x})\,\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{r} b_i(\vec{x})\,\frac{\partial}{\partial x_i} + c(\vec{x}). \tag{4.1}$$

Přitom za definiční obor operátoru $\widehat{L}$ klademe $\mathrm{Dom}(\widehat{L}) = \mathscr{C}^2(G)$. Je-li matice $\mathbb{A}$ číselná, jsou-li všechny funkce $a_{ij}(\vec{x})$ konstantní, a jsou-li rovněž všechny funkce $b_1(\vec{x}), b_2(\vec{x}), \ldots, b_r(\vec{x}), c(\vec{x})$ konstantní, specifikujeme dále, že operátor $\widehat{L}$ je operátorem *s konstantními koeficienty.*

4.1.2 Věta

Parciální diferenciální operátor druhého řádu $\widehat{L}$ je lineární na $\mathrm{Dom}(\widehat{L})$.

Důkaz:

- úkolem je dokázat, že $\widehat{L}$ je aditivní a homogenní
- zvolíme libovolné $u(\vec{x}), v(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{L})$

- z linearity derivace vyplývá

$$\widehat{L}(u+v) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(\vec{x})\,\frac{\partial^2(u+v)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{r} b_i(\vec{x})\,\frac{\partial(u+v)}{\partial x_i} + c(\vec{x})(u+v) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(\vec{x})\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{r} b_i(\vec{x})\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\vec{x})\,u + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(\vec{x})\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{r} b_i(\vec{x})\,\frac{\partial v}{\partial x_i} + c(\vec{x})\,v =$$

$$= \widehat{L}(u) + \widehat{L}(v)$$

- to dokazuje aditivitu operátoru $\widehat{L}$
- podobným způsobem dokážeme pro libovolné $\alpha \in \mathbf{R}$ homogenitu tvaru

$$\widehat{L}(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot \widehat{L}(u)$$

4.1.3 Definice

Nechť je na oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$ zadán parciální diferenciální operátor druhého řádu $\widehat{L}$ a funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G)$. Pak rovnici

$$\widehat{L}(u) = f(\vec{x}) \tag{4.2}$$

nazýváme *lineární parciální diferenciální rovnicí druhého řádu.* Zkráceně ji značíme zkratkou *PDE*, tj. *partial differential equation.* Rovnici $\widehat{L}(u) = 0$ nazýváme lineární parciální diferenciální rovnicí druhého řádu *s nulovou pravou stranou* přidruženou k rovnici (4.2).

4.1.4 Definice

Nechť je na oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$ zadán parciální diferenciální operátor druhého řádu $\widehat{L}$ a funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G)$. *Řešením* parciální diferenciální rovnice (4.2) na oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$ rozumíme každou funkci $u(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{L}) = \mathscr{C}^2(G)$, pro niž $\widehat{L}(u) = f(\vec{x})$.

4.1.5 Lemma

Nechť je na oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$ zadán parciální diferenciální operátor druhého řádu $\widehat{L}$ a funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G)$. Množina všech řešení rovnice $\widehat{L}(u) = 0$ tvoří vektorový prostor. Množina všech řešení rovnice $\widehat{L}(u) = f(\vec{x})$, kde $f(\vec{x})$ je nenulovou spojitou funkcí na G, tvoří lineární varietu.

4.1.6 Věta

Všechna řešení rovnice $\widehat{L}(u) = f(\vec{x})$ jsou tvaru

$$u(\vec{x}) = z(\vec{x}) + z_p(\vec{x}), \tag{4.3}$$

kde $z(\vec{x})$ jsou všechna řešení rovnice $\widehat{L}(z) = 0$ a $z_p(\vec{x})$ je jedno řešení rovnice $\widehat{L}(z_p) = f(\vec{x})$.

Důkaz:

- jako první dokážeme, že funkce $u(\vec{x}) = z(\vec{x}) + z_p(\vec{x})$ řeší rovnici $\widehat{L}(u) = f(\vec{x})$
- jelikož $\widehat{L}(z) = 0$ a $\widehat{L}(z_p) = f(\vec{x})$, pak snadno z linearity operátoru $\widehat{L}$ vyvozujeme, že

$$\widehat{L}(u) = \widehat{L}(z) + \widehat{L}(z_p) = 0 + f(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

- sporem dokážeme, že řešení, které není ve tvaru (4.3), neexistuje
- nechť $u(\vec{x}) = z(\vec{x}) + z_p(\vec{x})$ je výše uvedeného tvaru
- předpokládejme pro spor, že $\widehat{L}(v) = f(\vec{x})$, ale $v(\vec{x})$ nelze zapsat jako (4.3)
- zjevně tedy platí $\widehat{L}(u - v) = \widehat{L}(u) - \widehat{L}(v) = 0$
- rozdíl $u(\vec{x}) - v(\vec{x})$ proto řeší rovnici s nulovou pravou stranou, tj. $u(\vec{x}) - v(\vec{x}) = \widetilde{z}(\vec{x})$
- odtud $v(\vec{x}) = u(\vec{x}) - \widetilde{z}(\vec{x}) = z(\vec{x}) - \widetilde{z}(\vec{x}) + z_p(\vec{x}) = \widetilde{\widetilde{z}}(\vec{x}) + z_p(\vec{x})$
- to je očekávaný spor

4.1.7 Poznámka

Funkci $z_p(\vec{x})$ z předešlé věty nazýváme *partikulárním řešením* parciální diferenciální rovnice (4.2). Upozorňujeme raději, že rovnice $\widehat{L}(u) = f(\vec{x})$ má obvykle nekonečně mnoho partikulárních řešení.

4.2 Transformace parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu

V této kapitole se zaměříme na hledání vhodných transformací nezávislých proměnných v parciálních diferenciálních rovnicích. Hledat přitom budeme takové transformace, které parciální diferenciální rovnici převedou do výhodnějších tvarů, jež budou snáze řešitelné.

4.2.1 Definice

Nechť je dána lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu (4.2) na oblasti G. Pak kvadratickou formu

$$q_{\vec{x}}(\vec{\nu}) = \vec{\nu}^{\mathsf{T}} \mathbb{A}(\vec{x})\, \vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_r) \begin{pmatrix} a_{11}(\vec{x}) & a_{12}(\vec{x}) & a_{13}(\vec{x}) & \ldots & a_{1r}(\vec{x}) \\ a_{21}(\vec{x}) & a_{22}(\vec{x}) & a_{23}(\vec{x}) & \ldots & a_{2r}(\vec{x}) \\ a_{31}(\vec{x}) & a_{32}(\vec{x}) & a_{33}(\vec{x}) & \ldots & a_{3r}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}(\vec{x}) & a_{r2}(\vec{x}) & a_{r3}(\vec{x}) & \ldots & a_{rr}(\vec{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \vdots \\ \nu_r \end{pmatrix}$$

příslušnou každému bodu $\vec{x} \in G$ nazýváme *kvadratickou formou přidruženou* k parciální diferenciální rovnici (4.2).

4.2.2 Úmluva

Budeme-li hovořít v další textu o parciální diferenciální rovnici, budeme mít na mysli lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu, není-li uvedeno jinak.

4.2.3 Definice

Řekněme, že parciální diferenciální rovnice (4.2) je v bodě $\vec{x} \in G$ *eliptická*, resp. *parabolická*, resp. *hyperbolická* právě tehdy, když je eliptická, resp. parabolická, resp. hyperbolická její přidružená kvadratická forma.

4.2.4 Poznámka

Pro úplnost dodáváme, že kvadratická forma je eliptická, má-li všechny vlastní čísla nenulová a stejného znaménka, parabolická, má-li alespoň jedno vlastní číslo nulové a hyperbolická, má-li všechna vlastní čísla nenulová ale s různými znaménky. Pro bližší studium kvadratických forem doporučujeme učebnici [11].

4.2.5 Definice

Řekněme, že parciální diferenciální rovnice (4.2) je *eliptická,* resp. *parabolická,* resp. *hyperbolická na množině* $M \subset G$ právě tehdy, když je eliptická, resp. parabolická, resp. hyperbolická v každém bodě $\vec{x} \in M$.

4.2.6 Definice

Množinu všech $\vec{x} \in G$, pro něž je parciální diferenciální rovnice (4.2) je eliptická, budeme označovat symbolem G_E a nazývat *oborem elipticity* parciální diferenciální rovnice. Množinu všech $\vec{x} \in G$, pro něž je rovnice (4.2) je hyperbolická, budeme označovat symbolem G_H a nazývat *oborem hyperbolicity.* Množinu všech $\vec{x} \in G$, pro něž je rovnice (4.2) je parabolická, budeme označovat symbolem G_P a nazývat *oborem parabolicity.* Souhrnně nazýváme množiny G_E, G_H, a G_P *oblastmi excentricity.*

4.2.7 Věta

Nechť G_E, G_P a G_H jsou množiny z definice 4.2.6. Potom platí $G_E \uplus G_P \uplus G_H = G$.

<u>*Důkaz:*</u>

- tvrzení plyne ze skutečnosti, že typ kvadratické formy je dán jednoznačně, t.j. každá kvadratická forma je právě jednoho typu

4.2.8 Příklad

Rozhodněme o typu parciální diferenciální rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

je-li chápána jako diferenciální rovnice pro neznámou funkci $u = u(x, y)$. Z definice 4.2.1 pro matici příslušné kvadratické formy platí

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{pmatrix}.$$

Snadno nahlédneme, že pro $x = 0$ je daná rovnice parabolická, pro $x \neq 0$ je rovnice hyperbolická a žádná jiná možnost nastat nemůže. Proto tedy $G_E = \emptyset$, $G_P = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = 0\}$ a $G_H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq 0\}$.

4.2.9 Definice

Řekneme, že parciální diferenciální rovnice

$$\sum_{k=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{r} \tilde{a}_{k\ell}(\vec{y}) \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_\ell} + \sum_{k=1}^{r} \tilde{b}_k(\vec{y}) \frac{\partial u}{\partial y_k} + \tilde{c}(\vec{y}) u(\vec{y}) = \tilde{f}(\vec{y})$$

je v *normálním tvaru* právě tehdy, když matice $\widetilde{\mathbb{A}}(\vec{y})$ koeficientů $\tilde{a}_{k\ell}(\vec{y})$ je maticí konstantních funkcí (přesněji po částech konstantních funkcí), pro níž

$$\widetilde{\mathbb{A}}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{a}_{rr} \end{pmatrix}$$

a $\tilde{a}_{\ell\ell} \in \{0, -1, 1\}$.

4.2.10 Příklad

Uvažujme následující parciální diferenciální rovnice pro neznámou funkci $u(x, y)$ a zjistěme jejich typy. Rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial u}{\partial x} = 8y$$

je v normálním tvaru a všude v $\mathbf{R}^2$ je parabolická. Zajímavostí je, že tato rovnice je pouze *kvaziparciální* lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty, tj. lze na ni nahlížet jako na obyčejnou diferenciální rovnici s parametrem y. Rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 + y^2$$

je rovněž v normálním tvaru, ale je hyperbolická na $\mathbf{R}^2$. Parciální diferenciální rovnice $\Delta u = 0$ je rovněž v normálním tvaru, je ale na $\mathbf{R}^2$ eliptická. Běžně se nazývá *Laplaceovou rovnicí.* Funkce řešící Laplaceovu rovnici nazýváme *harmonickými funkcemi.*

4.2.11 Definice

Řekneme, že parciální diferenciální rovnice (4.2) je *v alternativním normálním tvaru,* právě tehdy, když je rovnicí pro funkci $u(x, y)$ dvou proměnných a je ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \Phi\big(\mathrm{grad} u, u(x, y)\big) = f(x, y).$$

4.2.12 Poznámka

Parciální diferenciální rovnici (4.2) bývá někdy zvykem zapisovat ve zformalizovaném tvaru

$$\big(\nabla^{\mathsf{T}} u\big)\mathbb{A}(\vec{x})\big(\nabla u\big) + \Phi\big(\nabla u, u(\vec{x})\big) = f(\vec{x}),$$

kde

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_r} \end{pmatrix}$$

je *Hamiltonův operátor*, a tudíž $\operatorname{grad} u = \nabla u$. Výraz $\Phi(\nabla u, u)$ někdy nazýváme *lineární částí* parciální diferenciální rovnice.

4.2.13 Poznámka

Parciální diferenciální rovnice v alternativním normálním tvaru je vždy hyperbolická, neboť po zavedení regulární substituce $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ dostáváme transformovaný tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \widetilde{\Phi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u(\xi,\eta)\right) = \tilde{f}(\xi,\eta).$$

Druhý normální tvar je výhodný z hlediska řešení. Např. zavedením substituce

$$v = \frac{\partial u}{\partial y}$$

v rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

dostáváme kvaziparciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial v}{\partial x} + 2yv = 0$$

reprezentující lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty s parametrem y.

4.2.14 Poznámka

Naším cílem je za pomoci vhodného zobrazení $\vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^r$ převést obecnou parciální diferenciální rovnici

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(\vec{x})\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{r} b_i(\vec{x})\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\vec{x})u(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

na tzv. *normální tvar*

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r} \tilde{a}_{k\ell}(\vec{y})\,\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_\ell} + \sum_{k=1}^{r} \tilde{b}_k(\vec{y})\,\frac{\partial u}{\partial y_k} + \tilde{c}(\vec{y})u(\vec{y}) = \tilde{f}(\vec{y}),$$

pro který platí, že matice $\widetilde{\mathbb{A}}(\vec{x})$ koeficientů $\tilde{a}_{k\ell}(\vec{x})$ je maticí konstantních funkcí, pro níž $\tilde{a}_{k\ell} = \tilde{a}_{k\ell}\delta_{k\ell}$ a $\tilde{a}_{\ell\ell} \in \{0,-1,1\}$. Přitom požadujeme, aby zobrazení $\vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^r$ bylo regulární a prosté na $G \subset \mathbf{E}^r$ a navíc, aby $\vec{\varphi}(\vec{x}) \in \mathscr{C}^2(G)$. To implikuje vztah

$$\det\left(\frac{\mathcal{D}(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_r)}{\mathcal{D}(x_1,x_2,\ldots,x_r)}\right) \overset{G}{\neq} 0,$$

a existuje tudíž inverzní zobrazení $\vec{x} = \vec{\psi}(\vec{y})$, pro nějž $\vec{\psi}\big(\vec{\varphi}(\vec{x})\big) = \mathrm{id}_G$. Pomocí vztahů pro derivaci složené funkce dostaneme vzorce

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial u}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \qquad (i \in \widehat{r}) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_\ell}\cdot\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial u}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (i,j \in \widehat{r}).
\end{aligned}$$

Z nich již snadno vyjádříme hledané vztahy

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{k\ell}(\vec{y}) &= \sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r} a_{ij}\big(\vec{\psi}(\vec{y})\big)\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_\ell}{\partial x_j},\\
\tilde{b}_k(\vec{y}) &= \sum_{k=1}^{r} b_i\big(\vec{\psi}(\vec{y})\big)\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}\big(\vec{\psi}(\vec{y})\big)\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_i\partial x_j},\\
\tilde{c}(\vec{y}) &= c\big(\vec{\psi}(\vec{y})\big),\\
\tilde{f}(\vec{y}) &= f\big(\vec{\psi}(\vec{y})\big),
\end{aligned}$$

4.3 Kvaziparciální diferenciální rovnice

Do kategorie parciálních diferenciálních rovnic spadají také rovnice, jež jsou převeditelné na obyčejné diferenciální rovnice. Lze pak na ně aplikovat celou rozsáhlou teorii o řešení obyčejných diferenciálních rovnic, tedy např. metodu integračního faktoru, Bernoulliovu metodu, separaci proměnných, snížení řádu, popř. metodu variace konstant. Podrobněji je problematika zpracována ve druhé kapitole skript [11]. Pro ilustraci zde uvedeme několik možných aplikací.

4.3.1 Příklad

Řešme parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2x\frac{\partial u}{\partial y} = 8x^3 y.$$

Zavedeme-li substituci $v(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$, přejde rovnice do kvazi-obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{\partial v}{\partial x} + 2xv = 8x^3 y$$

řešitelné metodou integračního faktoru. Vynásobíme-li tuto rovnici faktorem e^{x^2}, dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathsf{e}^{x^2}\cdot v\right) = 8x^3\mathsf{e}^{x^2}y.$$

$$\mathsf{e}^{x^2}\cdot v = 4y\mathsf{e}^{x^2}(x^2-1) + \mathtt{C}(y),$$

odkud

$$v(x,y) = \mathtt{C}(y)\,\mathsf{e}^{-x^2} + 4y(x^2-1).$$

Návratem k původní funkci (tedy integrací funkce $v(x,y)$ podle nezávisle proměnné y) získáme úplné řešení zadané rovnice ve tvaru

$$u(x,y) = \mathtt{C}(y)\,\mathsf{e}^{-x^2} + \widetilde{\mathtt{C}}(x) + 2y^2(x^2-1), \qquad \mathrm{Dom}(u) = \mathbf{R}^2.$$

Podotýkáme, že $\mathtt{C}(y)$, resp. $\widetilde{\mathtt{C}}(x)$ jsou libovolné funkce nezávisle proměnné y, resp. x. Navíc musí platit $\mathtt{C}(y)\in\mathscr{C}^1(\mathbf{R})$.

4.3.2 Příklad

Budeme nyní řešit parciální diferenciální rovnici

$$y^2\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial x} + 2y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - 6\frac{\partial u}{\partial x} = 8xy.$$

Zaveďme substituci

$$v(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Pak zadaná rovnice přechází do tvaru

$$y^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2y\frac{\partial v}{\partial y} - 6v = 8xy.$$

Zde se opět jedná o kvazi-obyčejnou diferenciální rovnici, která je viditelně Eulerovou diferenciální rovnicí. Pro kladná y ji budeme řešit osvědčenou substitucí $y = \mathsf{e}^t$, resp. $t = \ln(y)$. Odtud

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{y}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial v}{\partial t},$$

což po dosazení vede na rovnici

$$\ddot{v} + \dot{v} - 6v = 8x\mathrm{e}^t$$

s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou. Jelikož pro charakteristický polynom této rovnice platí

$$\lambda^2 + \lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3),$$

je fundamentálním systémem rovnice množina $\{\mathrm{e}^{2t}, \mathrm{e}^{-3t}\}$. Řešení s pravou stranou navrhujeme (podle příslušné věty) ve tvaru $v_p(y) = a\mathrm{e}^t$, kde hodnotu neznámé konstanty stanovíme pouhým dosazením na $a = -2$. Pak tedy

$$v(x,t) = \mathtt{C}_1(x)\,\mathrm{e}^{2t} + \mathtt{C}_2(x)\,\mathrm{e}^{-3t} - 2x\mathrm{e}^t.$$

Návratem k původním proměnným získáme

$$v(x,y) = \mathtt{C}_1(x)\,y^2 + \frac{\mathtt{C}_2(x)}{y^3} - 2xy. \tag{4.4}$$

Pokud bychom hledali řešení pro $y < 0$, převedla by substituce $y = -\mathrm{e}^t$ rovnici na lehce pozměněný tvar

$$\ddot{v} + \dot{v} - 6v = -8x\mathrm{e}^t,$$

který ale generuje tentýž výsledek (4.4). Uvažte proč. Sumarizujeme tedy, že výsledkem této úlohy je funkce

$$u(x,y) = \mathtt{C}_1(x)\,y^2 + \frac{\mathtt{C}_2(x)}{y^3} + \mathtt{C}_3(y) - yx^2,$$

kde $\mathrm{Dom}(u) = \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\})$ a $\mathtt{C}_i \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R})$ pro $i \in \widehat{3}$.

4.3.3 Příklad

Řešme parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\frac{\partial u}{\partial y} = 3\frac{\mathrm{e}^{3(x+y)}}{x}.$$

Aplikujeme-li substituci

$$v(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y},$$

získáme rovnici

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 6\frac{\partial v}{\partial x} + 9v = 3\frac{\mathrm{e}^{3(x+y)}}{x}.$$

Opět se jedná o rovnici a konstantními koeficienty. Jelikož pro charakteristický polynom této rovnice platí

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2,$$

je fundamentálním systémem rovnice množina $\{\mathrm{e}^{3x}; x\mathrm{e}^{3x}\}$. Řešení s pravou stranou získáme metodou variace konstant(viz věta 2.4.14 v [11]), neboť pravá strana není v žádném ze speciálních tvarů. Pro wronskián funkcí ze základního systému platí

$$\mathtt{D} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{3x} & x\mathrm{e}^{3x} \\ 3\mathrm{e}^{3x} & (1+3x)\mathrm{e}^{3x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{6x}.$$

Dále platí

$$\mathtt{D}_1 = \begin{vmatrix} 0 & x\mathrm{e}^{3x} \\ 3\frac{\mathrm{e}^{3(x+y)}}{x} & (1+3x)\mathrm{e}^{3x} \end{vmatrix} = -3\mathrm{e}^{6x+3y}$$

$$\mathtt{D}_2 = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{3x} & 0 \\ 3\mathrm{e}^{3x} & 3\frac{\mathrm{e}^{3(x+y)}}{x} \end{vmatrix} = 3\frac{\mathrm{e}^{6x+3y}}{x}.$$

Označíme-li v souladu s větou o metodě variace konstant

$$f_1(x) = \frac{\mathtt{D}_1}{\mathtt{D}} \equiv -3\mathsf{e}^{3y}, \qquad f_2(x) = \frac{\mathtt{D}_2}{\mathtt{D}} \equiv 3\frac{\mathsf{e}^{3y}}{x},$$

obdržíme

$$F_1(x,y) = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x = -3x\mathsf{e}^{3y} + \mathtt{C}_1(y),$$

$$F_2(x,y) = \int f_2(x)\,\mathrm{d}x = 3\mathsf{e}^{3y}\ln|x| + \mathtt{C}_2(y).$$

Pak tedy

$$v(x,y) = F_1(x,y)\,\mathsf{e}^{3x} + F_2(x,y)\,x\,\mathsf{e}^{3x} \equiv \mathtt{C}_1(y)\,\mathsf{e}^{3x} + \mathtt{C}_2(y)\,x\,\mathsf{e}^{3x} - 3x\mathsf{e}^{3(x+y)} + 3x\mathsf{e}^{3(x+y)}\,\ln|x|,$$

což po úpravě vede na

$$v(x,y) = \mathtt{C}_1(y)\,\mathsf{e}^{3x} + \mathtt{C}_2(y)\,x\,\mathsf{e}^{3x} + 3x\mathsf{e}^{3(x+y)}\,\ln|x|.$$

Finální podoba výsledku celé úlohy je tudíž

$$u(x,y) = \mathtt{C}_1(y)\,\mathsf{e}^{3x} + \mathtt{C}_2(y)\,x\,\mathsf{e}^{3x} + \mathtt{C}_3(x) + x\mathsf{e}^{3(x+y)}\,\ln|x|,$$

$\mathrm{Dom}(u) = (\mathbf{R}\setminus\{0\})\times\mathbf{R}$ a $\mathtt{C}_i \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R})$ pro $i \in \widehat{3}$.

4.4 Parciální diferenciální rovnice druhého řádu pro funkci dvou proměnných

Ze širokého spektra parciálních diferenciálních rovnic se v tomto oddíle budeme blíže zabývat lineárními parciálními diferenciálními rovnicemi funkcí dvou proměnných. Ty se při zachování platnosti definice 4.1.3 dají sumarizovat do obecného tvaru

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi\big(\operatorname{grad} u, u(x,y)\big) = f(x,y), \tag{4.5}$$

kde $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $f(x,y) \in \mathscr{C}(G)$ a $G \subset \mathbf{E}^2$ je libovolná neprázdná dvoudimenzionální oblast.

4.4.1 Odvození

Rovnici (4.5) zamýšlíme převést do normálního tvaru. Pro tento účel si určíme vlastní čísla příslušné matice

$$\mathbb{A}(x,y) = \begin{pmatrix} a(x,y) & \frac{b(x,y)}{2} \\ \frac{b(x,y)}{2} & c(x,y) \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice, tj. rovnice pro výpočet vlastních čísel, má známý tvar

$$\begin{vmatrix} a(x,y)-\lambda(x,y) & \frac{b(x,y)}{2} \\ \frac{b(x,y)}{2} & c(x,y)-\lambda(x,y) \end{vmatrix} = \big(\lambda(x,y)-a(x,y)\big)\cdot\big(\lambda(x,y)-c(x,y)\big) - \frac{b(x,y)^2}{4} =$$

$$= \lambda^2(x,y) - \big(a(x,y)+c(x,y)\big)\lambda(x,y) - \frac{b(x,y)^2}{4} = 0.$$

Vlastní čísla matice $\mathbb{A}(x,y)$ tedy budou tvaru

$$\lambda_{1,2}(x,y) = \frac{a(x,y)+c(x,y) \pm \sqrt{\big(a(x,y)-c(x,y)\big)^2 - b(x,y)^2}}{2}.$$

Pro zadanou rovnici nyní hledejme oblasti excentricity G_E, G_P a G_H. Pro obor parabolicity G_P vychází podmínka, že se alespoň jedno vlastní číslo musí rovnat nule. Tedy

$$a(x,y)+c(x,y) \pm \sqrt{\big(a(x,y)-c(x,y)\big)^2 + b(x,y)^2} = 0,$$

což je ekvivalentní podmínce $b(x,y)^2 - 4a(x,y)c(x,y) = 0$. Zavedeme-li diskriminant předpisem

$$d(x,y) = b^2(x,y) - 4a(x,y)c(x,y),$$

lze snadno stanovit, že $G_P = \{(x, y) \in G : d(x, y) = 0\}$. Analogicky pak zjišťujeme, že oborem hyperbolicity, resp. elipticity zadané rovnice jsou množiny $G_H = \{(x, y) \in G : d(x, y) > 0\}$, resp. $G_E = \{(x, y) \in G : d(x, y) < 0\}$. Nyní se zabývejme samotným hledáním ideálních transformačních vztahů. Prozatím je označme obecně jako

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y). \end{aligned}$$

Předpokládáme pochopitelně, že se jedná o regulární transformaci, čili

$$\det\left(\frac{\mathcal{D}(\xi, \eta)}{\mathcal{D}(x, y)}\right) \overset{G}{\neq} 0.$$

Zjistěme tedy čemu se rovnají jednotlivé první parciální derivace podle nových souřadnic. Snadno

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}. \end{aligned}$$

Zderivujeme ještě jednou podle nových souřadnic, čímž dostaneme příslušné druhé parciální derivace a vynásobíme je příslušnými koeficienty

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, && \backslash .a(x, y) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}, && \backslash .c(x, y) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}. && \backslash .b(x, y) \end{aligned}$$

Sečteme a vytkneme před závorku druhé parciální derivace podle nových proměnných, čímž dostaneme transformovanou původní rovnici (4.5), a to

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\underbrace{\left(a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + b\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right)}_{=0} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\underbrace{\left(a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + b\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right)}_{=0} + \\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(2a\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + b\frac{\partial \xi}{\partial y} + b\frac{\partial \eta}{\partial x} + 2c\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \tilde{\Phi}\big(\operatorname{grad} u, u(\xi, \eta)\big) = \tilde{f}(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Požadavek na nulovost závorek směřuje na normální tvar druhého druhu, pokud splníme podmínky

$$a(x, y)\left(\frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}}{\frac{\partial \xi}{\partial y}}\right)^2 + b(x, y)\frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}}{\frac{\partial \xi}{\partial y}} + c(x, y) = 0, \quad a(x, y)\left(\frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{\frac{\partial \eta}{\partial y}}\right)^2 + b(x, y)\frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{\frac{\partial \eta}{\partial y}} + c(x, y) = 0,$$

což jsou vlastně dvě kvadratické rovnice

$$a(x, y)\lambda^2(x, y) + b(x, y)\lambda(x, y) + c(x, y) = 0, \tag{4.6}$$

kde

$$\lambda = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}}{\frac{\partial \xi}{\partial y}}, \quad \text{resp.} \quad \lambda = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{\frac{\partial \eta}{\partial y}}.$$

Při bližším pohledu zjistíme, že se podíly $\frac{\partial \xi}{\partial x}/\frac{\partial \xi}{\partial y}$ podobají derivaci implicitně zadané funkce $y(x)$ podle nezávislé proměnné x. Uvažujme tedy implicitně zadané rovnice

$$\xi(x, y) = \mathtt{C}, \quad \eta(x, y) = \mathtt{D}. \tag{4.7}$$

Pro příslušnou obyčejnou derivaci $y\prime$ implicitní funkce $y(x)$ tudíž dostáváme

$$y\prime = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\lambda(x, y), \tag{4.8}$$

což není nic jiného než diferenciální rovnice prvního řádu. Transformační rovnice (4.7) jsou jejími formálními řešeními. Tímto způsobem jsme tudíž schopni nalézt požadované transformační vztahy. Názornější bude ukázat si daný postup na následujícím příkladě.

4.4.2 Příklad

Pokusme se naleznout transformaci, jenž převádí difereciální rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

na normální tvar. Podle rovnice (4.5) platí pro její koeficienty následující vztahy: $a(x,y) = 1, b(x,y) = 0$ a $c(x,y) = -x^2$. Řešíme nejprve kvadratickou rovnici $\lambda^2(x,y) - x^2 = 0$. Pro ni $\lambda_{1,2}(x,y) = \pm x$. Podle zásadního výsledku (4.8) bude mít pomocná diferenciální rovnice tvar

$$\begin{aligned} y\prime &= \frac{\mathtt{d}y}{\mathtt{d}x} = \mp x \\ \mathtt{d}y &= \mp x \mathtt{d}x \\ y &= \mp \frac{x^2}{2} + \mathtt{C} \\ \mathtt{C} &= y \pm \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Tím se dostáváme k hledaným transformačním vztahům

$$\xi = y + \frac{x^2}{2}, \quad \eta = y - \frac{x^2}{2}.$$

Podotýkáme, že v případě, kdy by zadaná rovnice byla parabolická (t.j. rovnice (4.6) by měla jediné řešení), našli bychom výše uvedeným postupem pouze jednu transformační rovnici. Druhou můžeme v tomto případě volit libovolně, tj. tak, aby byla co nejjednodušší, ale zároveň aby byla zachována regularita transformace.

4.4.3 Věta

Nechť $G \subset \mathbf{E}^2$ je libovolná neprázdná dvoudimenzionální oblast a $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $f(x,y) \in \mathscr{C}(G)$. Definujme funkci $d(x,y) = b^2(x,y) - 4a(x,y)c(x,y)$. Pak oblastmi excentricity parciální diferenciální rovnice

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi\big(\operatorname{grad} u, u(x,y)\big) = f(x,y), \tag{4.9}$$

jsou třídy $G_P = \{(x,y) \in G : d(x,y) = 0\}$, $G_H = \{(x,y) \in G : d(x,y) > 0\}$, resp. $G_E = \{(x,y) \in G : d(x,y) < 0\}$.

Důkaz:

- uvedená skutečnost byla prokázána v rámci odvození 4.4.1

4.4.4 Definice

Funkci definovanou ve větě 4.4.3 nazýváme *diskriminantem* parciální diferenciální rovnice (4.9).

4.4.5 Příklad

Budeme nyní řešit parciální diferenciální rovnici

$$x^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3xy \frac{\partial u}{\partial y} + 8x^4 y^5 = 0$$

pro hledanou funkci $u = u(x,y)$. Vypočteme nejprve diskriminant

$$d(x,y) = 4x^4 y^2,$$

jehož hodnota je skoro všude kladná. Zadaná parciální diferenciální rovnice je tedy skoro všude v $\mathbf{R}^2$ hyperbolická, resp. všude v množině $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$. Na doplňku $\mathbf{R}^2 \setminus M$ je pak uvedená rovnice parabolická a představuje triviální identitu $0 = 0$. Jelikož

$$\lambda_{1,2}(x,y) = \pm \frac{y}{x},$$

řešíme obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \pm\frac{y}{x}.$$

Při použití metody separace proměnných dostaneme

$$\ln|y| = \pm\ln|x| + \mathtt{C}$$
$$\mathtt{C} = y \cdot x^{\pm 1}.$$

Tyto dvě integrační konstanty vedou k učení transformačních vztahů druhého druhu ve tvaru

$$\xi = xy, \qquad\qquad \eta = \frac{y}{x}.$$

Tato transformace je na množině M regulární, neboť pro její jacobián platí

$$\det\left(\frac{\mathcal{D}(\xi,\eta)}{\mathcal{D}(x,y)}\right) = \begin{vmatrix} y & x \\ -y/x^2 & 1/x \end{vmatrix} = 2\,\frac{y}{x}.$$

Nyní budeme provádět samotnou transformaci. Zřejmě

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Podobně získáme také druhé derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}.$$

Po dosazení získáme rovnici

$$-4xy^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta} + 8y\frac{\partial u}{\partial \eta} + 8x^4y^5 = 0,$$

kterou snadno upravíme do finálního tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta} - \frac{2}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta} - 2\xi^3 = 0.$$

Jak je patrno, normalizovaná rovnice je skutečně hyperbolického typu. Navíc je snadno řešitelná, a sice substitucí

$$v(\xi,\eta) = \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Ta transformuje posledně uvedenou rovnici do tvaru

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{2}{\xi}v = 2\xi^3. \tag{4.10}$$

Jedná se fakticky o obyčejnou diferenciální rovnici (navíc lineární), řešitelnou metodou integračního faktoru, kterým je v tomto případě výraz ξ^{-2}. Vynásobíme-li rovnici (4.10) tímto faktorem získáme rovnici

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{2}{\xi^3}v = 2\xi,$$

respektive

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{v}{\xi^2}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^2 + \mathtt{C}\right).$$

Odtud pak snadno

$$v(\xi,\eta) = \mathtt{C}(\eta)\,\xi^2 + \xi^4 \equiv \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Pak ale

$$u(\xi,\eta) = \mathtt{C}(\eta)\,\xi^2 + \mathtt{D}(\xi) + \eta\xi^4.$$

Uzavíráme tedy, že hledaným obecným řešením zadané rovnice jsou funkce tvaru

$$u(x,y) = \mathtt{C}\left(\frac{y}{x}\right)\,x^2y^2 + \mathtt{D}(xy) + x^3y^5,$$

kde $\mathrm{Dom}(u) = M$ a funkce $\mathtt{C}\left(\frac{y}{x}\right)$ a $\mathtt{D}(xy)$ jsou třídy $\mathscr{C}^2(M)$.

4.4.6 Příklad

Řešme parciální diferenciální rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-4x\frac{\partial u}{\partial x}-6y\frac{\partial u}{\partial y}+6u=0.$$

Tentokrát se na celém $\mathbf{R}^2$ jedná o parabolickou diferenciální rovnici, neboť příslušný diskriminant je nulový, tj. $d(x,y)=0$. Díky nulovosti diskrinantu bude existovat pouze jediný kořen přidružené kvadratické rovnice, tj.

$$\lambda(x,y)=-2\frac{y}{x}.$$

Řešíme tedy jedinou obyčejnou diferenciální rovnici

$$y'=2\frac{y}{x}.$$

Použijeme opět osvědčenou metodu separace proměnných a dostaneme

$$\ln|y|=2\ln|x|+\mathtt{C}$$
$$\mathtt{C}=\ln|y|-\ln(x^2).$$

Tato integrační konstanta determinuje první z normalizačních transformačních vztahů. Druhý z nich je v tomto případě možno volit libovolně s jediným omezením, a sice aby vzniklá transformace byla regulární. Volíme tedy transformaci

$$\xi=\frac{y}{x^2},\qquad\qquad \eta=x.$$

Jelikož má odpovídající jacobián tvar

$$\det\left(\frac{\mathcal{D}(\xi,\eta)}{\mathcal{D}(x,y)}\right)=\begin{vmatrix}-\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2}\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-\frac{1}{x^2},$$

je zvolená transformace regulární pouze na množině $M=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\, x\neq 0\right\}$. Vyjádříme-li potřebné parciální derivace pomocí derivací podle nových proměnných, obdržíme

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2\frac{y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Podobně získáme také druhé derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-4\frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+6\frac{y}{x^4}\frac{\partial u}{\partial \xi}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-2\frac{y}{x^5}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{2}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Po dosazení získáme rovnici

$$\eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-4\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}+6u=0.$$

V tomto případě se jedná o Eulerovu diferenciální rovnici, jíž budeme řešit substitucí $\eta=\mathrm{e}^t$, která povede na rovnici

$$\ddot{u}-5\dot{u}+6u=0$$

s konstantními koeficienty. Kořeny charakteristického polynomu jsou čísla 2 a 3. Proto tedy

$$u(t)=\mathtt{C}\mathrm{e}^{2t}+\mathtt{D}\mathrm{e}^{3t},$$

potažmo

$$u(\xi,\eta)=\mathtt{C}(\xi)\eta^2+\mathtt{D}(\xi)\eta^3.$$

Hledaným řešením na množině M je tudíž systém funkcí

$$u(x,y)=\mathtt{C}\left(\frac{y}{x^2}\right)x^2+\mathtt{D}\left(\frac{y}{x^2}\right)x^3.$$

Všimněte si, že podoba množiny M eliminuje všechny problémy, jež by mohly v přespisu funkce $u(x,y)$ pro nastat.

4.4.7 Příklad

Posledním ze zástupců parciálních diferenciálních rovnic jsou rovnice eliptického typu. Jednou z nich je také rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(2 - \cos^2(x)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

neboť její diskriminant je všude na $\mathbf{R}^2$ záporný:

$$d(x,y) = 4\sin^2(x) - 4\left(2 - \cos^2(x)\right) = -4.$$

Funkce $\lambda_{1,2}(x,y)$ budou tedy různé a navíc komplexně sdružené, konkrétně

$$\lambda_{1,2}(x,y) = \sin(x) \pm \mathtt{i}.$$

Zvolme libovolně jednoho zástupce z uvedených dvou, zde např. $\lambda(x,y) = \sin(x) + \mathtt{i}$ a řešme obyčejnou diferenciální rovnici

$$y' = -\lambda(x,y) \equiv -\sin(x) - \mathtt{i}.$$

Odtud (po separaci proměnných)

$$\mathtt{C} = y - \cos(x) + \mathtt{i}x.$$

Za hledané substituční vztahy v případě eliptických rovnic volíme reálnou, resp. imaginární část integrační konstanty, a sice

$$\xi = \mathrm{Im}(\mathtt{C}) = x, \qquad \eta = \mathrm{Re}(\mathtt{C}) = y - \cos(x).$$

Transformace zadaná těmito vztahy je regulární na celém $\mathbf{R}^2$, protože pro všechny uspořádané dvojice $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ platí:

$$\det\left(\frac{\mathcal{D}(\xi,\eta)}{\mathcal{D}(x,y)}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \sin(x) & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Nyní spočteme potřebné derivace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \sin^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\sin(x)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \cos(x)\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \sin(x)\frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Dosazením do původní rovnice získáme rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \cos(x)\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

z níž po drobné úpravě dostaneme výslednou rovnici v normálním tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \cos(\xi)\frac{\partial u}{\partial \eta} \equiv \Delta u + \cos(\xi)\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Normální tvar není bohužel v tomto případě triviálně řešitelný, jako tomu v předešlých dvou příkladech. Na řešení této rovnice bude nutno vybudovat poměrně rozsáhlou teorii, která bude náplní dalších kapitol.

4.5 Parciální diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

Dalším zástupcem parciálních diferenciálních rovnic, které jsou snáze řešitelné, jsou lineární rovnice druhého řádu, jejichž parciální diferenciální operátor je operátorem s konstantními koeficienty. Za těchto okolností je totiž taková rovnice asociovaná s jistou kvadratickou formou, jejíž polární báze přímo generuje hledanou sérii normalizačních transformačních vztahů. Blíže se s celým postupem seznámíme právě v této sekci.

4.5.1 Definice

Parciální diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty rozumíme rovnici tvaru

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(\vec{x})\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi\big(\nabla u, u(\vec{x})\big) = f(\vec{x}), \tag{4.11}$$

kde $\mathbb{A}$ je nenulová symetrická číselná matice a $f(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G)$.

4.5.2 Poznámka

Předchozí definici je též možno zapsat také ve formálním tvaru

$$(\nabla u)^{\mathsf{T}}\mathbb{A}(\nabla u) + \Phi\big(\nabla u, u(\vec{x})\big) = f(\vec{x}),$$

kde $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{r}, a_{ij} \in \mathbf{R}$. Je však nutno míti na paměti, že výraz $\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ zde představuje dvojité derivování $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, nikoliv součin.

4.5.3 Odvození

Aplikujme nyní na rovnici (4.11) regulární transformaci $\vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{x})$. Její matice $\mathbb{A}$ tak přejde v matici $\widetilde{\mathbb{A}}$ s koeficienty ve tvaru

$$\tilde{a}_{k\ell}(\vec{y}) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}\big(\vec{\varphi}^{-1}(\vec{y})\big)\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_j}. \tag{4.12}$$

Naším cílem je najít takovou transformaci, aby výsledná rovnice v normálním tvaru byla opět rovnicí s konstantními koeficienty. Jelikož $a_{ij}\big(\vec{\varphi}^{-1}(\vec{y})\big)$ jsou prvky z $\mathbf{R}$, postačí, aby derivace $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$ a $\frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_j}$ byly rovněž čísly. Tuto podmínku zajistíme použitím lineárních transformačních vztahů

$$y_k = \sum_{i=1}^{r} r_{ki} x_i, \quad k \in \hat{r}.$$

Prvky matice $\widetilde{\mathbb{A}}$ tedy přejdou do tvaru

$$\tilde{a}_{k\ell} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} a_{ij} r_{ki} r_{lj} = \sum_{i=1}^{r} r_{ki}\left(\sum_{j=1}^{r} a_{ij} r_{lj}\right),$$

odkud při použití maticového zápisu dostáváme maticovou rovnost

$$\widetilde{\mathbb{A}} = \mathbb{R}^{\mathsf{T}}\mathbb{A}\mathbb{R}.$$

Z učiva o kvadratických formách probraného v [11] víme, že pro převod parciální diferenciální rovnice do normálního tvaru je třeba matici $\mathbb{R}$ sestavit z vektorů polární báze matice $\mathbb{A}$. Pokud tuto bázi označíme

$$B_P = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \ldots, \vec{w}_r\},$$

dostaneme také hledané transformační vztahy:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1_1} & w_{1_2} & w_{1_3} & \ldots & w_{1_r} \\ w_{2_1} & w_{2_2} & w_{2_3} & \ldots & w_{2_r} \\ w_{3_1} & w_{3_2} & w_{3_3} & \ldots & w_{3_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{r_1} & w_{r_2} & w_{r_3} & \ldots & w_{r_r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}.$$

Každý řádek transformační matice je tvořen složkami jednoho z vektorů $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \ldots, \vec{w}_r$. Během normalizačního procesu tedy původní rovnice (4.11) přejde na novou rovnici tvaru

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r} qq(\vec{w}_k, \vec{w}_\ell)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_\ell} + \tilde{\Phi}\big(\nabla u, u(\vec{y})\big) = f(\vec{y}),$$

respektive

$$\sum_{k=1}^{r} q(\vec{w}_k) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} + \tilde{\Phi}\big(\nabla u, u(\vec{y})\big) = f(\vec{y}).$$

Díky vlastnostem vektorů polární báze smíšené parciální derivace vymizí a druhé derivace podle téže proměnné budou mít hodnoty rovné 0, $+1$ nebo -1. Navíc lze tedy nové diagonální koeficienty vypočíst ze znalosti sdružené kvadratické formy podle vztahu

$$\widetilde{a_{\ell\ell}} = q(\vec{w}_\ell) = \vec{w}_\ell^{\mathsf{T}}\, \mathbb{A}\, \vec{w}_\ell.$$

Tudíž typ excentricity parciální diferenciální rovnice koresponduje s typem excentricity přidružené kvadratické formy.

4.5.4 Poznámka

Postup při řešení parciální diferenciální rovnice tedy můžeme shrnout do následujících kroků. 1) Nalezení transformačních vztahů. 2) Převedení rovnice do normálního tvaru. 3) Řešení daného typu normálního tvaru. 4) Návrat k původním proměnným, tj. převod řešení normálního tvaru do původních proměnných.

4.5.5 Příklad

Parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} + u = 0$$

pro neznámou funkci $u = u(x_1, x_2, x_3)$ převeďme na normální tvar a diskutujme její typ. Sdružená kvadratická forma má tvar

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

Aktuálním cílem je stanovení normálního tvaru a typu dané formy a nalezení alespoň jedné její polární báze. Pro určení normálního tvaru zadané kvadratické formy, pro stanovení její signatury a příslušné polární báze se běžně používá tzv. *Babylónská redukce*, někdy nazývaná též *Lagrangeovým algoritmem*. Ten spočívá v převedení kvadratické formy v $\mathbf{R}^r$ na maximálně r čtverců. V našem případě např.

$$q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 + x_3)^2.$$

Tedy normální tvar zadané formy má podobu

$$q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2,$$

kde $z_1 = x_1 + x_2$, $z_2 = x_2$ a $z_3 = x_2 + x_3$. Jedná se tedy o eliptickou kvadratickou formu, a tudíž půjde o eliptickou parciální diferenciální rovnici. Pro inverzní vztahy platí

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

kde jednotlivé sloupce matice přechodu představují vektory polární báze. Tedy

$$B_P = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\} \equiv \{(1,0,0); (-1,1,-1); (0,0,1)\}.$$

Snadno ověříme, že se skutečně o polární bázi jedná, neboť $q(\vec{w}_1) = 1$, $q(\vec{w}_2) = 1$, $q(\vec{w}_3) = 1$ a $qq(\vec{w}_1, \vec{w}_2) = qq(\vec{w}_1, \vec{w}_3) = qq(\vec{w}_2, \vec{w}_3) = 0$. Ze znalosti polární báze odvodíme podle návodu diskutovaného výše tvar normalizační substituce. V našem případě se jedná o vztahy

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = -x_1 + x_2 - x_3, \qquad y_3 = x_3. \tag{4.13}$$

Podle již citovaného návodu bude mít transformovaná parciální diferenciální rovnice tvar

$$\sum_{\ell=1}^{3} q(\vec{w}_\ell) \frac{\partial^2 u}{\partial y_\ell^2} + \widetilde{\Phi}(\mathrm{grad}(u), u, \overline{y}) = 0.$$

Jelikož $q(\vec{w}_1) = q(\vec{w}_2) = q(\vec{w}_3) = 1$, zbývá pouze konkretizovat tvar obecného symbolu $\widetilde{\Phi}(\mathrm{grad}(u), u, \overline{y})$ v tomto našem příkladě. Proveďme tedy transformaci (4.13). Snadno

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial y_2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = -\frac{\partial u}{\partial y_2} + \frac{\partial u}{\partial y_3}.$$

Výsledný normální tvar zkoumané rovnice má tedy podobu

$$\Delta u + \frac{\partial u}{\partial y_3} + u = 0. \tag{4.14}$$

4.5.6 Poznámka

Parciální diferenciální rovnici v normálním tvaru

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \frac{\partial^2 u}{\partial y_\ell^2} + \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell \frac{\partial u}{\partial y_\ell} + c\, u(\vec{y}) = 0,$$

kde $a_\ell \in \{0; -1; 1\}$ a $b, c \in \mathbf{R}$ lze substitucí

$$u(\vec{y}) = v(\vec{y}) \cdot \mathtt{exp}\left[\sum_{\ell=1}^{n} \mu_\ell\ y_\ell\right] \qquad (\mu_\ell \in \mathbf{R})$$

v závisle proměnných převést buď na tvar

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \frac{\partial^2 v}{\partial y_\ell^2} + \widetilde{c}\, v = 0$$

bez lineárních členů (to lze vždy) nebo v některých případech na tvar

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \frac{\partial^2 v}{\partial y_\ell^2} + \sum_{\ell=1}^{n} \widetilde{b}_\ell \frac{\partial v}{\partial y_\ell} = 0$$

bez absolutního členu. Toho lze docílit vhodnou volbou koeficientů $\mu_i \in \mathbf{R}$.

4.5.7 Příklad

Pokusme se upravit výsledek (4.14) příkladu 4.5.5 na jednodušší tvar podle předešlé poznámky. Uvažme substituci

$$u(\vec{y}) = v(\vec{y})\, \mathrm{e}^{\mu\, y_3}.$$

Pro příslušné parciální derivace platí vztahy

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{\partial v}{\partial y_1} \mathrm{e}^{\mu\, y_3}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} \mathrm{e}^{\mu\, y_3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_2} = \frac{\partial v}{\partial y_2} \mathrm{e}^{\mu\, y_3}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} \mathrm{e}^{\mu\, y_3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_3} = \frac{\partial v}{\partial y_3} \mathrm{e}^{\mu\, y_3} + \mu\, v(\vec{y})\, \mathrm{e}^{\mu\, y_3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_3^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_3^2} \mathrm{e}^{\mu\, y_3} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y_3} \mathrm{e}^{\mu\, y_3} + \mu^2\, v(\vec{y})\, \mathrm{e}^{\mu\, y_3},$$

které po dosazení do původní rovnice vedou na tvar

$$\mathrm{e}^{\mu\, y_3}\, \Delta v + (2\mu + 1) \frac{\partial v}{\partial y_3} \mathrm{e}^{\mu\, y_3} + (\mu^2 + \mu + 1)\, v(\vec{y})\, \mathrm{e}^{\mu\, y_3} = 0.$$

Zvolíme-li $\mu = -1/2$ a vydělíme-li výrazem $\mathrm{e}^{\mu\, y_3}$, získáme finální zjednodušení

$$\Delta v + \frac{3v}{4} = 0.$$

4.5.8 Poznámka

Hyperbolickou parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right) = 0 \tag{4.15}$$

pro neznámou funkci $u = u(x, y)$ lze jednoduchou substitucí

$$\xi = x + y, \qquad \eta = x - y$$

převést na normální tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \widetilde{\Phi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u, \xi, \eta\right) = 0.$$

Z tohoto důvodu bývá rovnice (4.15) nazývána alternativním normálním tvarem hyperbolické parciální diferenciální rovnice (viz definice 4.2.11). Rovnice ve tvaru (4.15) bývá v mnoha případech snadněji řešitelná (viz např. příklad 4.3.1).

4.5.9 Příklad

Pokusme se nalézt transformaci, která převádí parciální diferenciální rovnici

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 9\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 8\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - 10\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

na rovnici

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} + 6\frac{\partial^2 f}{\partial c^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial c} + 8\frac{\partial^2 f}{\partial b \partial c} = 0.$$

Hledat transformaci, jež převádí jednu rovnici na druhou, znamená hledat lineární zobrazení mezi příslušnými kvadratickými formami. V našem případě tedy mezi formou

$$q(x, y, z) = x^2 + \frac{9}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 + 4xy - 2xz - 5yz = (x + 2y - z)^2 + \frac{1}{2}(y - z)^2$$

a formou

$$\widetilde{q}(a, b, c) = a^2 + \frac{3}{2}b^2 + 3c^2 - 2ab - 2ac + 4bc = (a - b - c)^2 + \frac{1}{2}(b + cz)^2.$$

Jelikož mají obě formy stejnou signaturu, tj. $\mathrm{sg}(q) = \mathrm{sg}(\widetilde{q}) = (2, 0, 1)$, bude mít naše úloha řešení. Z výše uvedené Babylonské redukce určíme polární bázi první kvadratické formy na

$$B_P = \left\{(1, 0, 0); (-2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0); (-1, 1, 1)\right\}.$$

Ze znalosti polární báze odvodíme tvar normalizační substituce

$$\xi = x, \qquad \eta = -2\sqrt{2}x + \sqrt{2}y, \qquad \lambda = -x + y + z,$$

která převede první z rovnic na parabolický normální tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0. \tag{4.16}$$

Zdela obdobně určíme polární bázi druhé kvadratické formy na

$$\widetilde{B_P} = \left\{(1, 0, 0), (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), (-1, -2, 1)\right\}.$$

Normalizační vztahy

$$\xi = a, \qquad \eta = \sqrt{2}a + \sqrt{2}b, \qquad \lambda = -a - 2b + c$$

převedou druhou rovnici na tentýž normální tvar (4.16). Jelikož jsou ale oba normální tvary stejné, tak pouhým srovnáním obou transformačních trojic získáme hledanou substituci, a sice

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

4.5.10 Příklad

Pokusme se nalézt vztahy $\eta = \eta(x, y, z)$, $\lambda = \lambda(x, y, z)$, které vyhovují (alespoň v jednou případě) podmínce $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ a tvoří společně s funkcí $\xi = x + 7y + 4z$ transformaci, jež převádí parciální diferenciální rovnici

$$-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 7\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 18\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 3\frac{\partial u}{\partial y} - 5\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

na normální tvar. Úloha se de facto redukuje na hledání takové polární báze, jež obsahuje vektor $\vec{w}_1 = (1, 7, 4)$ a další vektor $\vec{w}_2$, jehož první složka w_{2_1} je nulová. Pokud ovšem taková báze vůbec existuje. Sdružená kvadratická forma má maticový zápis tvaru

$$q(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -4 & 6 & -9 \\ 6 & 1 & -3 \\ -9 & -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Bilineární forma sdružená se zadanou kvadratickou formou má tedy podobu

$$qq(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -4 & 6 & -9 \\ 6 & 1 & -3 \\ -9 & -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Jelikož je

$$❶ \qquad q(\vec{w}_1) = 1,$$

bude taková polární báze existovat. Její konstrukci provedeme přímo užitím patřičné definice. Začneme hledáním vektoru $\vec{w}_2 = (x_1, x_2, x_3)$ splňujícího podmínky $qq(\vec{w}_1, \vec{w}_2) = 0$ a $q(\vec{w}_2) \in \{0; -1; 1\}$. Protože ale máme pouze dvě podmínky pro tři neznámé x_1, x_2, x_3, bylo by v obecném případě možno jednu z nich volit. My zde ovšem upotřebíme požadavek $w_{2_1} = 0$. První z uvedených podmínek dává rovnost

$$(1, 7, 4)\begin{pmatrix} -4 & 6 & -9 \\ 6 & 1 & -3 \\ -9 & -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0,$$

a tedy (pro volbu $w_{2_1} = 0$) dostáváme $x_2 = 2x_3$. Dosadíme-li oba získané vztahy do druhé podmínky, obdržíme

$$❷ \qquad q(\vec{w}_2) = -x_3^2 = -1.$$

Zde podotýkáme, že hodnoty 0 nebo -1 na pravé straně této rovnosti byly z pochopitelných důvodů zavrhnuty. Rovnici řeší např. hodnota $x_3 = 1$, což vede k nalezení druhého vektoru polární báze ve tvaru $\vec{w}_2 = (0, 2, 1)$. Dále pokračujeme analogicky hledáním posledního vektoru $\vec{w}_3 = (x_1, x_2, x_3)$, splňujícího podmínky $qq(\vec{w}_1, \vec{w}_3) = 0$, $qq(\vec{w}_2, \vec{w}_3) = 0$ a $q(\vec{w}_3) \in \{0; -1; 1\}$. Uvedené podmínky q-ortogonality vedou k rovnostem

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \qquad\qquad 3x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Po vyjádření $x_2 = 8x_1$ a $x_3 = 5x_1$ získává třetí podmínka jednoduchou podobu

$$❸ \qquad q(\vec{w}_3) = x_1^2 = 1.$$

Opět jsme z množiny $\{0; -1; 1\}$ vyloučili hodnoty $0, -1$. Řešením rovnice je např. hodnota $x_1 = 1$ a tedy $\vec{w}_3 = (1, 8, 5)$. Uzavíráme tedy, že hledanou polární bází je množina

$$B_P = \{(1, 7, 4); (0, 2, 1); (1, 8, 5)\}.$$

Určíme transformační vztahy

$$\xi = x + 7y + 4z, \qquad \eta = 2y + z, \qquad \lambda = x + 8y + 5z$$

pro převod zadané parciální diferenciální rovnice na normální tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0$$

hyperbolického typu.

4.6 Parciální diferenciální rovnice vyšších řádů

V posledním odstavci této kapitole probereme obecné poznatky o lineárních parciálních diferenciálních rovnicích, jejichž řád není omezen dvojkou, jako tomu bylo v předešlých odstavcích.

4.6.1 Značení

Symboly $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ a $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$, kde $\alpha_k, \beta_k \in \mathbf{N}_0$, budou v dalším textu vždy reprezentovat tzv. *multiindexy.* Dále pro libovolný multiindex $\alpha \in \mathbf{N}_0^r$ definujeme *absolutní hodnotu multiindexu* $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r$ a *multifaktoriál* $\alpha! := \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_r!$ Pomocí tohoto značení lze zavést úsporný zápis umocňování

$$x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot x_3^{\alpha_3} \cdots x_r^{\alpha_r} = \vec{x}^{\alpha}$$

a také parciálního derivování funkce $u(\vec{x}) \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbf{E}^r)$. Ve druhém případě se jedná o zápis tvaru

$$\mathcal{D}^{\alpha} u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_r^{\alpha_r}}.$$

Je-li z nějakého důvodu třeba specifikovat, podle jakých proměnných byla funkce $u(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbf{E}^{r+s})$ derivována, pak pro multiindex $\alpha \in \mathbf{N}_0^s$ definujeme symbol

$$\mathcal{D}_{\vec{y}}^{\alpha} u(\vec{x}, \vec{y}) := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \ldots \partial y_s^{\alpha_s}}.$$

Symbol $\sum_{|\beta|=0}^{|\alpha|}$ bude v kontextu *multiindexového sčítání* značit sumaci $\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \cdots \sum_{\beta_r=0}^{\alpha_r}$.

4.6.2 Poznámka

Díky vlastnosti $u(\vec{x}) \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbf{E}^r)$ je počet parciálních derivací, jež jsou záměnné s parciální derivací $\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_r^{\alpha_r}}$, roven číslu

$$k_{\alpha} = \frac{|\alpha|!}{\alpha!},$$

jak plyne ze vztahu (1.25) na straně 39 ve skriptech [12].

4.6.3 Definice

Nechť $m \in \mathbf{N}$ a G je oblast v $\mathbf{E}^r$. Nechť pro každý multiindex $\alpha \in \mathbf{N}_0^m$ jsou definovány funkce $a_{\alpha}(\vec{x}) \in \mathscr{C}^{\infty}(G)$. Pak *diferenciálním operátorem řádu* m budeme rozumět operátor

$$\widehat{L} := \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_{\alpha}(\vec{x}) \mathcal{D}^{\alpha}. \tag{4.17}$$

Funkce $a_{\alpha}(\vec{x})$ nazýváme *(funkčními) koeficienty operátoru* $\widehat{L}$. *Definičním oborem* operátoru $\widehat{L}$ přitom rozumíme třídu $\mathrm{Dom}(\widehat{L}) = \mathscr{C}^m(G)$. Je-li pro všechny multiindexy $\alpha \in \mathbf{N}_0^m$ a všechna $\vec{x} \in G$ splněn vztah $a_{\alpha}(\vec{x}) = a_{\alpha} \in \mathbf{R}$, specifikujeme dále, že operátor $\widehat{L}$ je operátorem *s konstantními koeficienty.*

4.6.4 Věta

Diferenciální operátor (4.17) je lineární na $\mathrm{Dom}(\widehat{L})$.

Důkaz:

- úkolem je dokázat, že $\widehat{L}$ je aditivní a homogenní
- zvolíme libovolné $u(\vec{x}), v(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{L})$

- z linearity derivace vyplývá

$$\widehat{L}(u+v) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(\vec{x})\mathcal{D}^\alpha\big(u(\vec{x})+v(\vec{x})\big) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(\vec{x})\Big(\mathcal{D}^\alpha\big(u(\vec{x})\big)+\mathcal{D}^\alpha\big(v(\vec{x})\big)\Big) =$$

$$= \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(\vec{x})\mathcal{D}^\alpha\big(u(\vec{x})\big) + \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(\vec{x})\mathcal{D}^\alpha\big(v(\vec{x})\big) = \widehat{L}(u)+\widehat{L}(v)$$

- to dokazuje aditivitu operátoru $\widehat{L}$
- podobným způsobem dokážeme pro libovolné $\alpha \in \mathbf{R}$ homogenitu tvaru $\widehat{L}(\alpha\cdot u) = \alpha\cdot\widehat{L}(u)$

4.6.5 Definice

Nechť je dán lineární diferenciální operátor (4.17) řádu m na G a funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G)$, kde $G \subset \mathbf{E}^r$ je oblast. Pak rovnici

$$\widehat{L}(u) = f(\vec{x}) \tag{4.18}$$

nazýváme *lineární diferenciální rovnicí řádu* m. Funkci $f(\vec{x})$ nazýváme *pravou stranou diferenciální rovnice* (4.18) a koeficienty $a_\alpha(\vec{x})$ operátoru $\widehat{L}$ někdy též nazýváme *koeficienty diferenciální rovnice* (4.18). Rovnici $\widehat{L}(u) = 0$ nazýváme lineární diferenciální rovnicí *s nulovou pravou stranou* přidruženou k rovnici (4.18).

4.6.6 Definice

Řešením diferenciální rovnice (4.18) na oblasti G rozumíme každou funkci $u(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{L}) = \mathscr{C}^m(G)$, pro níž je splněna rovnost $\widehat{L}(u) = f(\vec{x})$.

4.6.7 Lemma

Nechť je na oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$ zadán diferenciální operátor $\widehat{L}$ a funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G)$. Množina všech řešení rovnice $\widehat{L}(u) = 0$ tvoří vektorový prostor. Množina všech řešení rovnice $\widehat{L}(u) = f(\vec{x})$, kde $f(\vec{x})$ je nenulovou spojitou funkcí na G, tvoří lineární varietu.

4.6.8 Věta

Všechna řešení rovnice $\widehat{L}(u) = f(\vec{x})$ jsou tvaru

$$u(\vec{x}) = z(\vec{x}) + z_p(\vec{x}), \tag{4.19}$$

kde $z(\vec{x})$ jsou všechna řešení rovnice $\widehat{L}(z) = 0$ a $z_p(\vec{x})$ je jedno řešení rovnice $\widehat{L}(z_p) = f(\vec{x})$.

<u>*Důkaz:*</u>

- jako první dokážeme, že funkce $u(\vec{x}) = z(\vec{x}) + z_p(\vec{x})$ řeší rovnici $\widehat{L}(u) = f(\vec{x})$
- jelikož $\widehat{L}(z) = 0$ a $\widehat{L}(z_p) = f(\vec{x})$, pak snadno $\widehat{L}(u) = \widehat{L}(z) + \widehat{L}(z_p) = 0 + f(\vec{x}) = f(\vec{x})$
- sporem dokážeme, že řešení, které není ve tvaru (4.19), neexistuje
- nechť $u(\vec{x}) = z(\vec{x}) + z_p(\vec{x})$ je výše uvedeného tvaru
- předpokládejme pro spor, že $\widehat{L}(v) = f(\vec{x})$, ale $v(\vec{x})$ nelze zapsat jako (4.19)
- zjevně tedy platí $\widehat{L}(u-v) = \widehat{L}(u) - \widehat{L}(v) = 0$
- rozdíl $u(\vec{x}) - v(\vec{x})$ proto řeší rovnici s nulovou pravou stranou, tj. $u(\vec{x}) - v(\vec{x}) = \widetilde{z}(\vec{x})$
- odtud $v(\vec{x}) = u(\vec{x}) - \widetilde{z}(\vec{x}) = z(\vec{x}) - \widetilde{z}(\vec{x}) + z_p(\vec{x}) = \widetilde{\widetilde{z}}(\vec{x}) + z_p(\vec{x})$
- to je očekávaný spor

4.6.9 Poznámka

Funkci $z_p(\vec{x})$ z předešlé věty nazýváme *partikulárním řešením* diferenciální rovnice (4.2).

Kapitola 5

Teorie zobecněných funkcí

Základem celé partie o řešení parciálních diferenciálních rovnic je teorie speciálních lineárních a spojitých funkcionálů, jejichž aplikací lze pak parciální diferenciální rovnice řešit velmi elegantně. Třídu zmíněných funkcionálů a operací s nimi zavedeme právě v této kapitole.

5.1 Třída testovacích funkcí

Chceme-li se zaobírat studiem funkcionálů

$$\big(\widetilde{f}, \varphi(\vec{x})\big) : \mathscr{A} \mapsto \mathbf{C}$$

z definice 1.1.17, je třeba nejprve korektně zavést prostor $\mathscr{A}$, tj. definiční obor funkcionálu $\widetilde{f}$, a definovat na něm pojem konvergence.

5.1.1 Definice

Prostorem testovacích funkcí $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ rozumíme třídu funkcí $\varphi(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{C}$, které jsou třídy $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$ a jejichž nosič $\operatorname{supp}(\varphi)$ je omezenou množinou v $\mathbf{E}^r$. Prvky třídy $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ nazýváme *testovacími funkcemi.*

5.1.2 Poznámka

Je-li tedy funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$, pak je podle předešlé definice hladká na $\mathbf{E}^r$ a existuje $\mathtt{R} > 0$ tak, že platí

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subset S_{\mathtt{R}} \quad \wedge \quad \overline{\operatorname{supp}(\varphi)} \subset S_{\mathtt{R}}.$$

Navíc pro každý multiindex α platí

$$\operatorname{supp}\big(\mathcal{D}^\alpha \varphi\big) \subset S_{\mathtt{R}} \quad \wedge \quad \overline{\operatorname{supp}\big(\mathcal{D}^\alpha \varphi\big)} \subset S_{\mathtt{R}},$$

odkud následně plyne, že $\mathcal{D}^\alpha \varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$. Derivováním lze tedy získávat další zástupce třídy testovacích funkcí.

5.1.3 Věta

Třída $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ je vektorovým prostorem.

Důkaz:

- postačí ukázat, že operace sčítání a násobení reálným číslem jsou uzavřené v $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$
- nechť tedy $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ a $c \in \mathbf{R}$ jsou zvoleny libovolně a zkoumejme funkci $\eta(\vec{x}) = c\,\varphi(\vec{x})$
- zřejmě $\eta(\vec{x})$ je stejně jako sama testovací funkce $\varphi(\vec{x})$ třídy $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$
- dále pro $c \neq 0$ je $\operatorname{supp}(\eta) = \operatorname{supp}(\varphi)$ nebo pro $c = 0$ je $\operatorname{supp}(\eta) = \emptyset$
- v každém případě je ale nosič $\operatorname{supp}(\eta)$ omezenou množinou
- proto $\eta(\vec{x})$ je testovací funkcí

- nechť dále $\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ a označme $\vartheta(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) + \psi(\vec{x})$
- protože z definice 5.1.1 plyne, že $\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x}) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$, je také $\vartheta(\vec{x}) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$
- dále $\mathrm{supp}(\vartheta) \subset \big(\mathrm{supp}(\varphi) \cup \mathrm{supp}(\psi)\big)$
- proto má také $\vartheta(\vec{x})$ omezený nosič, tudíž $\vartheta(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$

5.1.4 Příklad

Ukážeme, že systém funkcí

$$\omega_\varepsilon(\vec{x}) = \begin{cases} \mathtt{C}_\varepsilon \mathsf{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|\vec{x}\|^2}} & \ldots \quad \|\vec{x}\| < \varepsilon \\ 0 & \ldots \quad \|\vec{x}\| \geqslant \varepsilon, \end{cases} \tag{5.1}$$

kde je konstanta $\mathtt{C}_\varepsilon$ vypočtená z normalizačního vztahu $\int_{\mathbf{E}^r} \omega_\varepsilon(\vec{x})\,\mathsf{d}\vec{x} = 1$, patří do prostoru $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ testovacích funkcí. Při této normalizaci bývá s výhodou využívána Cimrmanova konstanta (viz 1.9.16, popř. 1.9.17). Průběh funkce $\omega_\varepsilon(x)$ v jednorozměrném případě je vyobrazen na následujícím obrázku.

Obrázek 5.1
Graf funkce $\omega_\varepsilon(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$.

Omezenost nosiče je zřejmá, neboť

$$\mathrm{supp}(\omega_\varepsilon) = B_\varepsilon.$$

Zbývá tedy dokázat hladkost. Existence a spojitost všech derivací uvnitř koule $B(\vec{0}, \varepsilon)$ jakož i vně této koule je triviální. Problémovou oblastí je hranice koule $B(\vec{0}, \varepsilon)$, tj. plášť $\|\vec{x}\| = \varepsilon$ této koule, v jednorozměrném prostoru tudíž body $x = -\varepsilon$ a $x = \varepsilon$. Nejprve budeme úlohu řešit pro jednorozměrný případ. Užijeme pomocného tvrzení, že pro libovolné $q \in \mathbf{R}^+$ je

$$\lim_{t \to 0_+} t^{-q} \mathsf{e}^{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{s \to +\infty} \frac{s^q}{\mathsf{e}^{s^2}} = 0.$$

Pak ale

$$\lim_{x \to \varepsilon_-} \mathsf{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}} = \left| t = \sqrt{\varepsilon^2 - x^2} \right| = \lim_{t \to 0_+} \mathsf{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{t^2}} = 0$$

a podobně

$$\lim_{x \to \varepsilon_-} \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x} \left(\mathsf{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}} \right) = \lim_{x \to \varepsilon_-} \frac{-2x\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 - x^2)^2} \mathsf{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}} = -2\varepsilon^3 \lim_{x \to \varepsilon_-} \frac{\mathsf{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}}{(\varepsilon^2 - x^2)^2} = -2\varepsilon^3 \lim_{t \to 0_+} \frac{1}{t^4} \mathsf{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{t^2}} = 0.$$

Analogicky

$$\lim_{x \to -\varepsilon_+} \mathsf{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}} = \lim_{t \to 0_+} \mathsf{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{t^2}} = 0,$$

respektive

$$\lim_{x \to -\varepsilon_+} \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x} \left(\mathsf{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}} \right) = \lim_{x \to -\varepsilon_+} \frac{-2x\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 - x^2)^2} \mathsf{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}} = -2\varepsilon^3 \lim_{t \to 0_+} \frac{1}{t^4} \mathsf{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{t^2}} = 0.$$

Tímto postupem podobně ukážeme, že

$$\lim_{x \to \varepsilon_-} \frac{\mathsf{d}^k \omega_\varepsilon}{\mathsf{d}x^k} = \lim_{x \to -\varepsilon_+} \frac{\mathsf{d}^k \omega_\varepsilon}{\mathsf{d}x^k} = 0.$$

Zcela jednoduše lze také prokázat, že pro všechna $k \in \mathbf{N}_0$ platí

$$\lim_{x \to \varepsilon_+} \frac{\mathsf{d}^k \omega_\varepsilon}{\mathsf{d}x^k} = \lim_{x \to -\varepsilon_-} \frac{\mathsf{d}^k \omega_\varepsilon}{\mathsf{d}x^k} = 0,$$

a tedy $\omega_\varepsilon^{(k)}(-\varepsilon) = \omega_\varepsilon^{(k)}(\varepsilon) = 0$. Funkce $\omega_\varepsilon(x)$ je tudíž hladká na $\mathbf{R}$. Jelikož je ale funkce $\|\vec{x}\|^2$ hladká na $\mathbf{E}^r$, je podle věty o spojitosti složené funkce více proměnných také funkce $\omega_\varepsilon(\vec{x})$ hladká na $\mathbf{E}^r$. Tím je prokázáno, že $\omega_\varepsilon(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$.

5.1.5 Definice

Nechť $\varepsilon > 0$. Funkci

$$\omega_\varepsilon(\vec{x}) = \begin{cases} \mathtt{C}_\varepsilon \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|\vec{x}\|^2}} & \ldots \quad \|\vec{x}\| < \varepsilon, \\ 0 & \ldots \quad \|\vec{x}\| \geqslant \varepsilon \end{cases} \tag{5.2}$$

splňující rovnost

$$\int_{\mathbf{E}^r} \omega_\varepsilon(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = 1$$

nazýváme $r-$rozměrnou *Cimrmanovou buřinkou* o poloměru ε.

5.1.6 Příklad

Rozeberme nyní konkrétně systém funkcí (5.1) ve dvojrozměrném případě. K vyčíslení normalizační konstanty $\mathtt{C}_\varepsilon$ užijeme s výhodou Cimrmanova lemmatu 1.9.16. Tedy

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon} \mathtt{C}_\varepsilon\, \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2 - y^2}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} x = \varrho\,\cos(\varphi) \\ y = \varrho\,\sin(\varphi) \\ \left|\det\left(\frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(\varrho,\varphi)}\right)\right| = \varrho \end{array} \right| = \mathtt{C}_\varepsilon \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \varrho\, \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-\varrho^2}}\, \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \mathtt{C}_\varepsilon\, 2\pi \int_0^{\varepsilon} \varrho\, \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-\varrho^2}}\, \mathrm{d}\varrho = \left| \begin{array}{c} t = \frac{\varrho^2}{\varepsilon^2} \\ \mathrm{d}t = \frac{2\varrho}{\varepsilon^2}\,\mathrm{d}\varrho \end{array} \right| = \mathtt{C}_\varepsilon\, \pi\varepsilon^2 \int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{1}{t-1}}\, \mathrm{d}t = \mathtt{C}_\varepsilon\, \pi\varepsilon^2 \zeta_1 = 1.$$

Tedy

$$\mathtt{C}_\varepsilon = \frac{1}{\pi\varepsilon^2\, \zeta_1} \approx \frac{1}{\pi\varepsilon^2\, 0.148496}.$$

Grafická podoba těchto funkcí je vyobrazena na obrázku níže.

Obrázek 5.2
Graf dvojrozměrné Cimrmanovy buřinky $\omega_\varepsilon(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^2)$.

5.1.7 Věta

Nechť $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$. Pak existuje $\mathtt{K} \in \mathbf{R}_0^+$ tak, že je pro každé $x, y \in \mathbf{R}$ $(x \neq y)$ splněna nerovnost

$$\left|\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y}\right| \leqslant \mathtt{K}.$$

Důkaz:

- testovací funkce $\varphi(x)$ je mimo jiné spojitá na $\mathbf{R}$ a diferencovatelná na $\mathbf{R}$
- proto mezi libovolnými body $x \neq y$ existuje podle Lagrangeovy věty o přírůstku číslo ξ takové, že platí

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)(x - y)$$

- jelikož je funkce $\varphi'(x)$ omezená na $\mathbf{R}$, což plyne z definice třídy $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ a faktu, že $\varphi'(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$, existuje jistě $\mathtt{K} \in \mathbf{R}_0^+$ tak, že pro všechna $x \in \mathbf{R}$ platí $|\varphi'(x)| \leqslant \mathtt{K}$
- pak snadno

$$\left|\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y}\right| = \left|\varphi'(\xi)\right| \leqslant \mathtt{K}$$

- to završuje důkaz

5.1.8 Věta

Nechť $p \geqslant 1$ a $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$. Pak $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{L}_p(\mathbf{E}^r)$, tj. $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r) \subset \mathscr{L}_p(\mathbf{E}^r)$. Navíc

$$\int_{\mathbf{E}^r} |\varphi(\vec{x})|^p \,\mathrm{d}\vec{x} \leqslant \max_{\vec{x}\in\mathbf{E}^r} \left(|\varphi(\vec{x})|^p\right) \cdot \mu^r\left(B_{\vec{0},\mathtt{R}}\right) = \max_{\vec{x}\in\mathbf{E}^r} \left(|\varphi(\vec{x})|^p\right) \cdot 2^{\frac{r+1}{2}} \pi^{\frac{r-1}{2}} \frac{\mathtt{R}^r}{r!!},$$

kde $\mathtt{R} > 0$ je zvoleno tak, že $\operatorname{supp}(\varphi) \subset S_{\mathtt{R}}$.

Důkaz:

- nechť $p \geqslant 1$
- jelikož pro libovolnou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ existuje $\mathtt{R} > 0$ tak, že $\operatorname{supp}(\varphi) \subset S_{\mathtt{R}}$, platí také, že $\operatorname{supp}\left(|\varphi|^p\right) \subset S_{\mathtt{R}}$
- snadno
$$\int_{\mathbf{E}^r} \left|\varphi(\vec{x})\right|^p \mathrm{d}\vec{x} = \int_{S_{\mathtt{R}}} \left|\varphi(\vec{x})\right|^p \mathrm{d}\vec{x}$$
- přitom ale integrand je spojitou funkcí a integrační obor $S_{\mathtt{R}} \subset \mathbf{E}^r$ je kompaktní množinou
- uvedený integrál tudíž existuje (jako Riemannův i jako Lebesgueův), tj. $\left|\varphi(\vec{x})\right|^p \in \mathscr{L}(\mathbf{E}^r)$
- jeho hodnotu lze za daných podmínek odhadnout součinem $m \cdot \mu^r\left(\operatorname{supp}(\varphi)\right)$, kde m je maximum funkce $\varphi(\vec{x})$ na $\operatorname{supp}(\varphi)$
- odtud již plyne poslední část tvrzení
- vztah
$$\mu^r\left(B_{\mathtt{R}}\right) = 2^{\frac{r+1}{2}} \pi^{\frac{r-1}{2}} \frac{\mathtt{R}^r}{r!!}$$
pro $r-$dimenzionální objem koule $B_{\mathtt{R}}$ může být odvozen užitím uživa matematické analýzy

5.1.9 Důsledek

Nechť $p \geqslant 1$ a $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$. Pak $\varphi(\vec{x}) \in \mathbb{L}_p(\mathbf{E}^r)$, tj. $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r) \subset \mathbb{L}_p(\mathbf{E}^r)$.

5.1.10 Věta – o Leibnizově formuli

Nechť $\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x}) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$. Pak platí tzv. *Leibnizova formule* pro derivaci tvaru

$$\mathcal{D}^\alpha\left(\varphi(\vec{x})\psi(\vec{x})\right) = \sum_{|\beta|=0}^{|\alpha|} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \mathcal{D}^\beta\left(\varphi(\vec{x})\right) \mathcal{D}^{\alpha-\beta}\left(\psi(\vec{x})\right),$$

kde symbol $\sum_{|\beta|=0}^{|\alpha|}$ reprezentuje sčítání přes všechny multiindexy $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$ takové, že $\alpha_k \geqslant \beta_k$ pro každé $k \in \widehat{r}$.

Důkaz:

- tvrzení lze snadno dokázat matematickou indukcí

5.1.11 Definice

Řekneme, že posloupnost testovacích funkcí $\left(\varphi_k(\vec{x})\right)_{k=1}^\infty$ ze třídy $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ *konverguje superstejnoměrně* k testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ a označíme symbolem

$$\varphi_k(\vec{x}) \rightrightarrows \varphi(\vec{x})$$

právě tehdy, když

- je *stejnoměrně omezená*, tj. existuje $\mathtt{R} > 0$ tak, že pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí
$$\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset S_{\mathtt{R}},$$
kde $S_{\mathtt{R}}$ je uzavřená koule v množině $\mathbf{E}^r$,
- pro každý multiindex $\alpha \in \mathbf{N}_0^r$ konverguje posloupnost $\left(\mathcal{D}^\alpha \varphi_k(\vec{x})\right)_{k=1}^\infty$ k funkci $\mathcal{D}^\alpha \varphi(\vec{x})$ stejnoměrně v $\mathbf{E}^r$.

5.1.12 Lemma

Nechť posloupnost testovacích funkcí $\big(\varphi_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ konverguje superstejnoměrně k funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$. Pak pro každé $k \in \mathbf{N}$ a každý multiindex α existuje $\mathtt{R} > 0$ tak, že $\operatorname{supp}\big(\mathcal{D}^\alpha \varphi_k\big) \subset S_{\mathtt{R}}$.

5.1.13 Poznámka

Řekneme, že množina A je *hustá* v množině B, pokud $\overline{A} \supset B$. Řekneme, že množina A je *všude hustá* v množině B, pokud $\overline{A} = B$.

5.1.14 Věta

Nechť $p \geqslant 1$. Vektorový prostor $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ je hustou množinou v $\mathbb{L}_p(\mathbf{E}^r)$.

Důkaz:

- korektní důkaz je prezentován ve skriptech [19], str. 20, věta 2.1.8
- my zde pouze nastíníme možné pojetí důkazu
- podle věty 5.1.18 a poznámky 5.1.19 lze charakteristickou funkci libovolné oblasti chápat jako limitu testovacích funkcí
- tj. jakoukoli *jednoduše schodovitou funkci* tvaru $\chi_H(\vec{x})$, kde H je oblast v $\mathbf{E}^r$, lze vyjádřit jako limitu posloupnosti $r-$dimenzionálních testovacích funkcí
- z linearity $\mathscr{D}$ také plyne, že každou schodovitou funkci s více schody, lze rovněž vyjádřit jako limitu posloupnosti jistých testovacích funkcí
- jelikož v teorii Lebesgueova integrálu budujeme integrál jako limitu integrálů schodovitých funkcí s omezeným nosičem (jedná se o funkce ze základního systému $\mathcal{Z}_\mu$), lze každou funkci třídy $\mathbb{L}_p(\mathbf{E}^r)$ zapsat jako jistou limitu funkcí z $\mathscr{D}$
- touto úvahou tedy intuitivně docházíme k tvrzení, že $\mathscr{D}$ je hustou množinou v $\mathbb{L}_p(\mathbf{E}^r)$

5.1.15 Poznámka

Podle předchozí věty a podle věty 1.3.27 existuje ke každé (faktorové) funkci $h(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(\mathbf{E}^r)$ posloupnost testovacích funkcí $\big(\varphi_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ s následující vlastností. Pro jakékoliv $\varepsilon > 0$ existuje $k_0 \in \mathbf{N}$ takové, že platí implikace

$$k > k_0 \quad \Longrightarrow \quad \big\|\varphi_k(\vec{x}) - h(\vec{x})\big\| < \varepsilon,$$

tj.

$$\operatorname*{limnorm}_{k\to\infty} \varphi_k(\vec{x}) \overset{\mathbb{L}_2(\mathbf{E}^r)}{=} h(\vec{x}).$$

5.1.16 Věta

Nechť je dána funkce $a(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{C}$, jež je třídy $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$, a testovací funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$. Pak součin $a(\vec{x})\varphi(\vec{x})$ patří také do $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$.

Důkaz:

- jelikož má funkce $\varphi(\vec{x})$ omezený nosič, pak také součin $a(\vec{x})\varphi(\vec{x})$ má omezený nosič, neboť platí inkluze

$$\operatorname{supp}(a\varphi) \subset \operatorname{supp}(\varphi)$$

- z Leibnizovy formule

$$\mathcal{D}^\alpha\big(a(\vec{x})\varphi(\vec{x})\big) = \sum_{|\beta|=0}^{|\alpha|} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\,\mathcal{D}^\beta\big(a(\vec{x})\big)\,\mathcal{D}^{\alpha-\beta}\big(\varphi(\vec{x})\big)$$

  pak vyplývá následující poznatek

- jelikož jak funkce $\mathcal{D}^\beta(a(\vec{x}))$, tak funkce $\mathcal{D}^{\alpha-\beta}(\varphi(\vec{x}))$ jsou spojité, je spojitá také každá derivace $\mathcal{D}^\alpha\big(a(\vec{x})\varphi(\vec{x})\big)$, a tedy $a(\vec{x})\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$

5.1.17 Poznámka

Předešlá věta nabízí další možnost, jak konstruovat další testovací funkce. Nechť $\omega_1(x)$ je jednorozměrná Cimrmanova buřinka o jednotkovém poloměru. Například $\psi_1(x) = 3x(x^2-1)\,\omega_1(x)$, $\psi_2 = \mathrm{e}^{-x}\,\omega_1(x)$ nebo $\psi_1 = \sin(9x)\,\omega_1(x)$ jsou vybranými zástupci jednorozměrných testovacích funkcí. Jejich průběhy jsou vykresleny na obrázku níže.

Obrázek 5.3
Někteří zástupci jednorozměrných testovacích funkcí.

5.1.18 Věta

Pro libovolnou oblast $G \subset \mathbf{E}^r$ a libovolné $\varepsilon > 0$ existuje funkce $\eta(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ taková, že

- $0 \leqslant \eta(\vec{x}) \leqslant 1$,
- pro všechna $\vec{x} \in G_\varepsilon$ je $\eta(\vec{x}) = 1$,
- pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{E}^r \setminus G_{3\varepsilon}$ je $\eta(\vec{x}) = 0$.

<u>*Důkaz:*</u>

- důkaz budeme demonstrovat na případě $r = 1$
- zvolme libovolně oblast $G \subset \mathbf{R}$
- označme $\chi_{G_{2\varepsilon}}(x)$ charakteristickou funkci jejího $2\varepsilon-$okolí (viz definice 1.1.14)
- tvrdíme nyní, že funkce
$$\eta(x) := \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y,$$
kde $\omega_\varepsilon(x)$ je Cimrmanova buřinka, splňuje požadavky předešlé definice
- snadné je se přesvědčit, že platí
$$0 \leqslant \eta(x) \leqslant \int_{\mathbf{R}} \omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y = 1$$
- dokažme dále, že $\eta(x) = 1$ všude na G_ε
- triviálně platí rovnost
$$\int_{\mathbf{R}} \chi_{G_{2\varepsilon}}(y)\,\omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y$$
- dále pak pro $y \notin G_{2\varepsilon}$ platí, že $|x-y| > \varepsilon$, což značí, že pro $x \in G_\varepsilon$ a $y \notin G_{2\varepsilon}$ je $\omega_\varepsilon(x-y) = 0$
- proto je integrál $\int_{\mathbf{R}\setminus G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y$ nulový
- pak ale
$$\eta(x) = \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbf{R}\setminus G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}} \omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y = 1$$
- zkoumejme na závěr chování funkce $\eta(x)$ pro $x \in \mathbf{R} \setminus G_{3\varepsilon}$
- je-li pak $y \in G_{3\varepsilon}$ platí, že $|x-y| > \varepsilon$
- proto je integrál $\int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y$ v tomto případě nulový, tj. $\eta(x) = 0$ na $\mathbf{R} \setminus G_{3\varepsilon}$

5.1.19 Poznámka

Právě dokázaná věta se zabývá tzv. *vyhlazováním charakteristických funkcí množin.* Zatímco například charakteristická funkce $\chi_{(-1-2\varepsilon,1+2\varepsilon)}(x) = \Theta(x+1+2\varepsilon)\Theta(1+2\varepsilon-x)$ intervalu $(-1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon)$ je zcela nepochybně nespojitou funkcí, je funkce

$$\eta(x) = \int_{\mathbf{R}} \Theta(x+1+2\varepsilon)\Theta(1+2\varepsilon-x)\omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y$$

hladkou variantou funkce $\chi_{(-1-2\varepsilon,1+2\varepsilon)}(x)$. Pro všechna $x \in (-\infty, -1-3\varepsilon) \cup (1+3\varepsilon, +\infty)$ je její hodnota nulová, zatímco na intervalu $(-1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ nabývá funkce $\eta(x)$ hodnoty jedna. Na intervalech $(-1-3\varepsilon, -1-\varepsilon)$ a $(1+\varepsilon, 1+3\varepsilon)$ pak funkce $\eta(x)$ hladce přechází od nulové k jednotkové hodnotě. Názorněji je proces vyhlazení charakteristických funkcí množin znázorněn na následujícím obrázku.

Obrázek 5.4
Graf vyhlazené charakteristické funkce $\eta(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$.

5.1.20 Příklad

Na základě věty 5.1.16 se lze snadno přesvědčit, že např. funkce

$$\varphi(x,y) = \cos\big(6(x^2+y^2)\big) \cdot \omega_1(x,y), \quad \psi(x,y) = x\,\omega_1(x,y),$$

kde $\omega_1(x,y)$ je dvojrozměrná Cimrmanova buřinka s poloměrem $\varepsilon = 1,$ patří do třídy $\mathscr{D}(\mathbf{E}^2)$ dvourozměrných testovacích funkcí.

Obrázek 5.5
Graf dvojrozměrných testovacích funkcí $\varphi(x,y) = \cos\big(6(x^2+y^2)\big) \cdot \omega_1(x,y)$ a $\psi(x,y) = x\,\omega_1(x,y)$.

5.2 Třída zobecněných funkcí

V této části skript vystavíme novou třídu funkcí (přesněji funkcionálů) za účelem pozdějšího řešení parciálních diferenciálních rovnic, zejména jejich normálních tvarů. Na úvod se přitom odvoláváme na obecnou definici funkcionálu 1.1.17, kde za definiční obor $\mathscr{A}$ klademe třídu obecně $r-$rozměrných testovacích funkcí, tj. $\mathscr{A} = \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$.

5.2.1 Definice

Nechť $\big(\widetilde{f}, \varphi(\vec{x})\big) : \mathscr{D}(\mathbf{E}^r) \mapsto \mathbf{C}$ je funkcionál definovaný nad $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$. Řekneme, že funkcionál $\big(\widetilde{f}, \varphi(\vec{x})\big)$ je *lineární,* jestliže pro všechna $c \in \mathbf{C}$ a všechny $\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ platí

$$\big(\widetilde{f}, c\,\varphi(\vec{x})\big) = c\,\big(\widetilde{f}, \varphi(\vec{x})\big),$$

$$\big(\widetilde{f}, \varphi(\vec{x}) + \psi(\vec{x})\big) = \big(\widetilde{f}, \varphi(\vec{x})\big) + \big(\widetilde{f}, \psi(\vec{x})\big).$$

5.2.2 Definice

Nechť $\big(\widetilde{f}, \varphi(\vec{x})\big) : \mathscr{D}(\mathbf{E}^r) \mapsto \mathbf{C}$ je funkcionál definovaný nad $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$. Řekneme, že funkcionál $\big(\widetilde{f}, \varphi(\vec{x})\big)$ je *spojitý,* jestliže pro libovolnou posloupnost $\big(\varphi_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ funkcí ze třídy $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ platí implikace

$$\varphi_k(\vec{x}) \rightrightarrows \varphi(\vec{x}) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \big(\widetilde{f}, \varphi_k(\vec{x})\big) = \big(\widetilde{f}, \varphi(\vec{x})\big). \tag{5.3}$$

5.2.3 Věta

Funkcionál $\big(\widetilde{f}, \varphi(\vec{x})\big)$ je spojitý v $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ právě tehdy, když pro libovolnou posloupnost $\big(\varphi_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ funkcí ze třídy $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ platí implikace

$$\varphi_k(\vec{x}) \rightrightarrows 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \big(\widetilde{f}, \varphi_k(\vec{x})\big) = 0. \tag{5.4}$$

Důkaz:

- vezměme libovolnou posloupnost $\big(\varphi_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ funkcí z $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$, pro níž existuje limitní funkce $\varphi(\vec{x})$ tak, že
$$\varphi_k(\vec{x}) \rightrightarrows \varphi(\vec{x})$$
- označme $h_k(x) := \varphi_k(\vec{x}) - \varphi(\vec{x})$
- odtud ale zcela zjevně plyne, že $h_k(\vec{x}) \rightrightarrows 0$
- pak jsou ovšem implikace (5.3) a
$$h_k(\vec{x}) \rightrightarrows 0 \quad \Longrightarrow \quad \big(\widetilde{f}, h_k(\vec{x})\big) \to 0$$
bez pochyby implikacemi ekvivalentními
- důležité ale je, že $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ je vektorový prostor, neboť je tím zaručeno, že $h_k(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$

5.2.4 Definice

Třídu všech lineárních spojitých funkcionálů s definičním oborem $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ označíme symbolem $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a nazveme *prostorem zobecněných funkcí* nebo *prostorem distribucí*. Prvky třídy $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ budeme nazývat *zobecněnými funkcemi* nebo *distribucemi*.

5.2.5 Úmluva

Nebude-li to v dalším textu na překážku, budeme užívat zjednodušené symboliky $\mathscr{D} := \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ a $\mathscr{D}' := \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$.

5.2.6 Definice

Řekneme, že zobecněné funkce $\widetilde{f}$ a $\widetilde{g}$ se *rovnají* a označíme symbolem $\widetilde{f} = \widetilde{g}$, jestliže pro všechny testovací funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}$ platí rovnost $\big(\widetilde{f}, \varphi(\vec{x})\big) = \big(\widetilde{g}, \varphi(\vec{x})\big)$.

5.2.7 Příklad

Uvažme funkcionál
$$\big(\widetilde{f}, \varphi(x)\big) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.5}$$
Pokusme se rozhodnout, zda náleží do $\mathscr{D}'$, přesněji do $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Máme tedy rozhodnout, zda vztah (5.5) definuje lineární a spojitý funkcionál. Nejprve se ovšem ujistíme, zda skutečně integrál na pravé straně rovnosti (5.5) konverguje pro úplně všechny funkce $\varphi(x) \in \mathscr{D}$. Jelikož je ale každá funkce $\varphi(x) \in \mathscr{D}$ vně jistého intervalu $(-\mathtt{R}, \mathtt{R})$ nulová, platí fakticky, že
$$\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\mathtt{R}}^{\mathtt{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$
Integrand $\mathrm{e}^{-x^2}\varphi(x)$ je nade vší pochyby spojitou funkcí, takže konvergence integrálu je zaručena. Pusťme se do ověřování linearity. Vezměme proto $c \in \mathbf{C}$ libovolně. Pak ale snadno
$$\big(\widetilde{f}, c \cdot \varphi(x)\big) = \int_{\mathbf{R}} c\,\mathrm{e}^{-x^2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = c \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = c\,\big(\widetilde{f}, \varphi(x)\big).$$
Vezměme dále dvě testovací funkce $\varphi(x), \psi(x) \in \mathscr{D}$. Pro ně pak platí, že
$$\big(\widetilde{f}, \varphi(x) + \psi(x)\big) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \big(\varphi(x) + \psi(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \psi(x)\,\mathrm{d}x = \big(\widetilde{f}, \varphi(x)\big) + \big(\widetilde{f}, \psi(x)\big).$$
Přitom jsme ale využili vlastností obou testovacích funkcí, díky nimž máme jistotu, že všechny tři dotčené integrály skutečně konvergují. Zbývá prokázat spojitost. Vezměme k tomu podle věty 5.2.3 libovolnou posloupnost $\big(\varphi_k(x)\big)_{k=1}^{\infty}$ konvergující superstejnoměrně k nulové funkci. Pak platí
$$\lim_{k\to\infty} \big(\widetilde{f}, \varphi_k(x)\big) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \lim_{k\to\infty} \big(\mathrm{e}^{-x^2} \varphi_k(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} o(\vec{x})\,\mathrm{d}x = 0.$$
Zde je ale nezbytné zdůvodnit, proč mohla být provedena záměna integrace a limity. Podle příslušné věty (viz Lebesgueova věta 4.2.40. na str. 218 v [12]) je nutné, aby existovala integrabilní majoranta $g(x) \in \mathscr{L}(\mathbf{R})$ k integrandu. Zde bude požadovanou majorantou funkce $g(x) = \sigma \cdot \Theta(\mathtt{R} - |x|)$, kde
$$\big|\mathrm{e}^{-x^2} \varphi_k(x)\big| \leqslant \big|\varphi_k(x)\big| \leqslant \sup_{k\in\mathbf{N}} \max_{x\in\mathbf{R}} \big|\varphi_k(x)\big| =: \sigma < \infty$$

a $\mathtt{R}$ je poloměr koule (v tomto jednorozměrném případě bychom spíš měli říkat "$\mathtt{R}$ je poloměr intervalu" $(-\mathtt{R}, \mathtt{R})$) z definice 5.1.11. To, že je $g(x)$ integrabilní, lze snadno nahlédnou z jednoduché úvahy

$$\int_{\mathbf{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\mathtt{R}}^{\mathtt{R}} \sigma\,\mathrm{d}x = \sigma \int_{-\mathtt{R}}^{\mathtt{R}} \mathrm{d}x \leqslant 2\mathtt{R}\sigma \in \mathbf{R}.$$

5.2.8 Poznámka

Funkcionál $\widetilde{f}$ zavedený nad $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ předpisem

$$\big(\widetilde{f}, \varphi(x)\big) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

neleží zcela zjevně ve třídě $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Není totiž lineární, je pouze spojitý.

5.2.9 Věta

Nechť $f(\vec{x}) \in \mathbb{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$. Pak zobrazení, které libovolné testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ přiřazuje komplexní číslo

$$\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x},$$

je zobecněnou funkcí, tj. patří do třídy $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$.

<u>Důkaz:</u>

- máme tedy rozhodnout, zda vztah $\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}$ definuje lineární a spojitý funkcionál
- nejprve ověříme, zda tento integrál konverguje pro úplně všechny testovací funkce $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$
- jelikož je ale každá funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ vně jisté koule $S_{\mathtt{R}}$ nulová, platí fakticky, že
$$\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_{S_{\mathtt{R}}} f(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}$$
- jelikož $f(\vec{x}) \in \mathbb{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$, platí také, že $f(\vec{x})\varphi(\vec{x}) \in \mathbb{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$
- vzhledem k tomu, že $S_{\mathtt{R}}$ je kompaktní množina, platí pro lokálně integrabilní funkci tvrzení 1.1.10
- podle tohoto tvrzení je konvergence zkoumaného integrálu garantována
- dále
$$\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\big(\varphi(\vec{x}) + \psi(\vec{x})\big)\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} + \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\psi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x},$$
což dokazuje linearitu
- podobně platí pro superstejnoměrně konvergentní posloupnost $\big(\varphi_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$, pro niž $\varphi_k(\vec{x}) \rightrightarrows o(\vec{x})$, sada rovností
$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\varphi_k(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} \lim_{k\to\infty} f(\vec{x})\varphi_k(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} o(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = 0,$$
čímž je prokázána spojitost funkcionálu $\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}$ na $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$
- zdůvodnění možnosti záměny limity a integrálu je snadným důsledkem omezenosti nosiče všech testovacích funkcí (dle definice prostoru $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$)

5.2.10 Definice

Zobecněnou funkci $\widetilde{f} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ nazveme *regulární* a označíme symbolem $f \in \mathscr{D}'_{\mathrm{reg}}(\mathbf{E}^r)$, jestliže existuje lebesgueovsky lokálně integrovatelná funkce $f(\vec{x}) \in \mathbb{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$ taková, že pro všechny testovací funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ platí rovnost

$$\big(\widetilde{f}, \varphi(\vec{x})\big) := \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}.$$

Funkci $f(\vec{x})$ přitom nazýváme *generátorem* regulární zobecněné funkce. Zobecněnou funkci $\widetilde{f}$ nazveme *singulární*, není-li regulární.

5.2.11 Definice

Zobecněnou funkci $\widetilde{f}$ nazveme *nulovou distribucí* a označíme symbolem $\widetilde{0}$, pokud pro všechny testovací funkce $\varphi(\vec{x})$ platí rovnost $\big(\widetilde{f}, \varphi(\vec{x})\big) = 0.$

5.2.12 Věta

Nulová distribuce $\widetilde{0}$ je regulární zobecněnou funkcí a jejím generátorem je nulová funkce $o(\vec{x})$ (ve smyslu faktorových funkcí). To znamená, že ve smyslu klasických funkcí platí implikace

$$\big(\widetilde{0}, \varphi(\vec{x})\big) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\, \varphi(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(\vec{x}) = 0 \text{ s.v.}$$

Důkaz:

- korektní důkaz je uveden ve skriptech [19], str. 24, věta 2.2.5
- my zde pouze naznačíme, jak je důkaz veden
- pokud platí $f(\vec{x}) \sim 0$, lze na základě známých vět z teorie Lebesgueova integrálu snadno nahlédnout, že také $f(\vec{x})\, \varphi(\vec{x}) \sim 0$, odkud pak přímo vyplývá, že $\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\, \varphi(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x} = 0$
- prokázat platnost druhé implikace je ale značně složitější (zde tedy jen ilustrativně)
- předpokládejme pro spor, že $\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\, \varphi(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x} = 0$ pro všechny $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}$ a $f(\vec{x}) \nsim 0$
- existuje tedy množina M nenulové míry, na níž nabývá funkce $f(\vec{x})$ buď kladné nebo záporné hodnoty
- vzhledem k tomu, že $f(\vec{x})$ je chápána faktorově, lze nalézt souvislou uzavřenou množinu $N \subset M$ tak, že buď $f(N) > 0$ nebo $f(N) < 0$
- je-li $\eta(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ vyhlazená charakteristická funkce množiny N (viz věta 5.1.18 a poznámka 5.1.19), pak

$$\big(f, \eta(\vec{x})\big) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\, \eta(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x} \neq 0$$

- protože jsme nalezli testovací funkci, pro níž je hodnota funkcionálu $\big(f, \eta(\vec{x})\big)$ nenulová, přícházíme ke sporu s předpokladem, že $\big(f, \eta(\vec{x})\big) = 0$

5.2.13 Důsledek

Nechť $\widetilde{f}$ a $\widetilde{g}$ jsou regulární zobecněné funkce a $f(\vec{x}) \in \mathbb{L}_{\text{loc}}(\mathbf{E}^r)$ a $g(\vec{x}) \in \mathbb{L}_{\text{loc}}(\mathbf{E}^r)$ jejich generátory. Pak platí-li $\widetilde{f} = \widetilde{g}$ ve smyslu distribucí, pak $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$ ve smyslu faktorových funkcí nebo $f(\vec{x}) \sim g(\vec{x})$ ve smyslu klasických funkcí.

5.2.14 Poznámka

Jelikož podle předešlého tvrzení existuje jednoznačný vztah mezi generátorem a příslušnou regulární zobecněnou funkcí, pozbývá smyslu odlišovat dále znaky $\widetilde{f}$ a $f(\vec{x})$.

5.2.15 Věta

Nechť je nad prostorem $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ definován funkcionál

$$\big(\Theta, \varphi(\vec{x})\big) := \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \varphi(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x}.$$

Pak $\Theta \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$.

Důkaz:

- nejprve snadno prokážeme aditivitu funkcionálu Θ, neboť

$$\big(\Theta, \varphi(\vec{x}) + \psi(\vec{x})\big) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \big(\varphi(\vec{x}) + \psi(\vec{x})\big)\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} +$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \psi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \big(\Theta, \varphi(\vec{x})\big) + \big(\Theta, \psi(\vec{x})\big),$$

  a homogenitu, neboť

$$\big(\Theta, c\varphi(\vec{x})\big) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty c\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = c\int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} \;= c\big(\Theta, \varphi(\vec{x})\big)$$

- poté dokážeme spojitost
- předpokládejme tedy, že posloupnost testovacích funkcí $\big(\varphi_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ konverguje superstejnoměrně k nulové testovací funkci $o(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$, čili $\varphi_k(\vec{x}) \rightrightarrows o(\vec{x})$
- potom

$$\lim_{k\to\infty} \big(\Theta, \varphi_k(\vec{x})\big) = \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \varphi_k(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \lim_{k\to\infty} \varphi_k(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty 0\,\mathrm{d}\vec{x} = 0$$

- přitom limitu na integrál bylo možno zaměnit s ohledem na fakt, že existuje integrabilní majoranta k integrandu a navíc nezávislá na indexu k
- takovou majorantou je například funkce $\Theta(\vec{x})\Theta(\mathtt{R} - \|\vec{x}\|)$, kde $\mathtt{R}$ je poloměr koule $S_{\mathtt{R}}$, pro niž a pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset S_{\mathtt{R}}$
- existenci takového $\mathtt{R}$ garantuje právě definice superstejnoměrné konvergence 5.1.11

5.2.16 Definice

Zobecněnou *Heavisideovou* funkcí budeme rozumět funkcionál $\Theta \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ definovaný předpisem

$$\big(\Theta, \varphi(\vec{x})\big) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}.$$

5.2.17 Věta

Nechť $\vec{\mu} \in \mathbf{E}^r$ je pevně zvoleno. Nechť je nad prostorem $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ definován funkcionál

$$\big(\Theta_{\vec{\mu}}, \varphi(\vec{x})\big) := \int_{\mu_1}^\infty \int_{\mu_2}^\infty \dots \int_{\mu_r}^\infty \varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}.$$

Pak $\Theta_{\vec{\mu}} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$.

Důkaz:

- nejprve snadno prokážeme aditivitu funkcionálu $\Theta_{\vec{\mu}}$, neboť

$$\big(\Theta_{\vec{\mu}}, \varphi(\vec{x}) + \psi(\vec{x})\big) = \int_{\mu_1}^\infty \int_{\mu_2}^\infty \dots \int_{\mu_r}^\infty \big(\varphi(\vec{x}) + \psi(\vec{x})\big)\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mu_1}^\infty \int_{\mu_2}^\infty \dots \int_{\mu_r}^\infty \varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} +$$

$$+ \int_{\mu_1}^\infty \int_{\mu_2}^\infty \dots \int_{\mu_r}^\infty \psi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \big(\Theta_{\vec{\mu}}, \varphi(\vec{x})\big) + \big(\Theta_{\vec{\mu}}, \psi(\vec{x})\big),$$

  a homogenitu, neboť

$$\big(\Theta_{\vec{\mu}}, c\varphi(\vec{x})\big) = \int_{\mu_1}^\infty \int_{\mu_2}^\infty \dots \int_{\mu_r}^\infty c\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = c\int_{\mu_1}^\infty \int_{\mu_2}^\infty \dots \int_{\mu_r}^\infty \varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} \;= c\big(\Theta_{\vec{\mu}}, \varphi(\vec{x})\big)$$

- poté dokážeme spojitost
- předpokládejme tedy, že posloupnost testovacích funkcí $\big(\varphi_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ konverguje superstejnoměrně k nulové testovací funkci $o(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$, čili $\varphi_k(\vec{x}) \rightrightarrows o(\vec{x})$
- potom

$$\lim_{k\to\infty}\big(\Theta_{\vec{\mu}}, \varphi_k(\vec{x})\big) = \lim_{k\to\infty}\int_{\mu_1}^{\infty}\int_{\mu_2}^{\infty}\dots\int_{\mu_r}^{\infty}\varphi_k(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} =$$
$$= \int_{\mu_1}^{\infty}\int_{\mu_2}^{\infty}\dots\int_{\mu_r}^{\infty}\lim_{k\to\infty}\varphi_k(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mu_1}^{\infty}\int_{\mu_2}^{\infty}\dots\int_{\mu_r}^{\infty} 0\,\mathrm{d}\vec{x} = 0$$

- přitom limitu na integrál bylo možno zaměnit s ohledem na fakt, že existuje integrabilní majoranta k integrandu a navíc nezávislá na indexu k
- takovou majorantou je například funkce $\Theta(\vec{x})\Theta(\mathtt{R} - \|\vec{x}\|)$, kde $\mathtt{R}$ je poloměr koule $S_{\mathtt{R}}$, pro niž a pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset S_{\mathtt{R}}$
- existenci takového $\mathtt{R}$ garantuje právě definice superstejnoměrné konvergence 5.1.11

5.2.18 Definice

Nechť $\vec{\mu} \in \mathbf{E}^r$ je pevně zvoleno. Zobecněnou *centrovanou Heavisideovou* funkcí budeme rozumět funkcionál $\Theta_{\vec{\mu}} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ definovaný předpisem

$$\big(\Theta_{\vec{\mu}}, \varphi(\vec{x})\big) = \int_{\mu_1}^{\infty}\int_{\mu_2}^{\infty}\dots\int_{\mu_r}^{\infty}\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}.$$

5.2.19 Věta

Zobecněná Heavisideova funkce, resp. zobecněná centrovaná Heavisideova funkce jsou regulární zobecněné funkce. Jejich generátory jsou Heavisideova funkce (1.1), resp. centrovaná Heavisideova funkce (1.2).

Důkaz:

- stačí si uvědomit, že obě klasické Heavisideovy funkce jsou lokálně integrabilní a platí zjevně (nezávisle na volbě testovací funkce), že

$$\big(\Theta_{\vec{\mu}}, \varphi(\vec{x})\big) = \int_{\mathbf{E}^r}\Theta_{\vec{\mu}}(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x},$$

  respektive

$$\big(\Theta, \varphi(\vec{x})\big) = \int_{\mathbf{E}^r}\Theta(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}$$

5.2.20 Příklad

Nechť $\mathtt{R} > 0$ je pevně zvoleno a

$$S_{\mathtt{R}} := \big\{\vec{x} \in \mathbf{E}^r : \|\vec{x}\| \leqslant \mathtt{R}\big\}.$$

Nechť je nad prostorem $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ definován funkcionál

$$\big(\Theta_{\mathtt{R}}, \varphi(\vec{x})\big) := \int_{S_{\mathtt{R}}}\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}.$$

Není obtížné prokázat (již standardními metodami), že $\Theta_{\mathtt{R}} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a že navíc $\Theta_{\mathtt{R}}$ je regulární distribucí, jejímž generátorem je klasická funkce $\Theta(\mathtt{R} - \|\vec{x}\|)$. Je-li $r = 1$, lze tuto distribuci nahradit také alternativní (ekvivalentní) definicí (a symbolem)

$$\big(\Theta_{\mathtt{R}}, \varphi(x)\big) := \big(\Theta(\mathtt{R} - |x|), \varphi(x)\big) = \int_{-\mathtt{R}}^{\mathtt{R}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.2.21 Věta

Zobrazení, které libovolné testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ přiřazuje komplexní číslo $\varphi(\vec{0})$, je zobecněnou funkcí, tj. patří do třídy $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$.

Důkaz:

- označme pro účely důkazu zkoumaný funkcionál symbolem δ
- snadno lze nahlédnout, že pro jakékoli funkce $\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x}) \in \mathscr{D}$ a $c \in \mathbf{C}$ platí rovnosti

$$\big(\delta, \varphi(\vec{x}) + c\psi(\vec{x})\big) = \varphi(\vec{0}) + c\,\psi(\vec{0}) = \big(\delta, \varphi(\vec{x})\big) + c\,\big(\delta, \psi(\vec{x})\big)$$

- proto je δ lineárním funkcionálem
- pro důkaz spojitosti zvolme libovolnou posloupnost testovacích funkcí $\big(\varphi_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ konvergující superstejnoměrně k nulové testovací funkci $\varphi(\vec{x}) = o(\vec{x})$
- pak $\lim_{k\to\infty}\big(\delta, \varphi_k(\vec{x})\big) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(\vec{0}) = \varphi(\vec{0}) = 0$
- odtud $\delta \in \mathscr{D}'$

5.2.22 Definice

Lineární spojitý funkcionál δ definovaný předpisem $\big(\delta, \varphi(\vec{x})\big) = \varphi(\vec{0})$ nazýváme *Diracovou $\delta-$funkcí.*

5.2.23 Věta

Diracova $\delta-$funkce je singulární zobecněnou funkcí.

Důkaz:

- pro spor předpokládejme, že existuje generátor $f(\vec{x}) \in \mathbb{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$ tak, že

$$\big(\delta, \varphi(\vec{x})\big) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \varphi(\vec{0})$$

- je-li $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}$, pak podle věty 5.1.16 patří také funkce $x_1\varphi(\vec{x})$ do $\mathscr{D}$
- přitom x_1 je první složka vektoru $\vec{x}$
- podle předpokladů musí pro každou testovací funkci platit

$$\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})x_1\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = x_1\varphi(\vec{x})\Big|_{\vec{x}=\vec{0}} = 0 \cdot \varphi(\vec{0}) = 0$$

- pak ale podle věty 5.2.12 platí $x_1 f(\vec{x}) = 0$ (ve smyslu faktorových funkcí)
- to ale může platit jedině tehdy, když sama funkce $f(\vec{x})$ je nulová, což je očekávaný spor

5.2.24 Věta

Nechť $\vec{\mu} \in \mathbf{E}^r \setminus \{\vec{0}\}$. Funkcionál zavedený nad $\mathscr{D}$ definičním předpisem

$$\big(\delta_{\vec{\mu}}, \varphi(\vec{x})\big) = \varphi(\vec{\mu}) \tag{5.6}$$

patří do třídy $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$.

Důkaz:

- lze postupovat analogicky k důkazu věty 5.2.21

5.2.25 Poznámka

Symbol $\delta_{\vec{\mu}}$ je třeba chápat jako nedělitelný.

5.2.26 Definice

Lineární spojitý funkcionál $\delta_{\vec{\mu}}$ definovaný předpisem (5.6) nazýváme *centrovanou Diracovou $\delta-$funkcí.*

5.2.27 Věta

Centrovaná Diracova funkce $\delta_{\vec{\mu}}$ je singulární zobecněnou funkcí.

<u>*Důkaz:*</u>

- pro spor předpokládejme, že existuje generátor $f(\vec{x}) \in \mathbb{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$ tak, že $\big(\delta_{\vec{\mu}}, \varphi(\vec{x})\big) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \varphi(\vec{\mu})$
- je-li $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}$, pak podle věty 5.1.16 patří také funkce $(x_1 - \mu_1)\varphi(\vec{x})$ do $\mathscr{D}$
- přitom x_1 je první složka vektoru $\vec{x}$ a μ_1 je první složka vektoru $\vec{\mu}$
- podle předpokladů musí pro každou testovací funkci platit

$$\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})(x_1 - \mu_1)\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = (x_1 - \mu_1)\varphi(\vec{x})\Big|_{\vec{x}=\vec{\mu}} = 0 \cdot \varphi(\mu) = 0$$

- pak ale podle věty 5.2.12 platí $(x_1 - \mu_1)f(\vec{x}) = 0$ (ve smyslu faktorových funkcí)
- to ale může platit jedině tehdy, když sama funkce $f(\vec{x})$ je nulová, což je očekávaný spor

5.2.28 Poznámka

Nyní se naskýtá otázka, zda může být funkce x^{-1} chápána jako funkce z $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Pokud by tomu tak bylo, pak by musel existovat lokálně integrabilní generátor $g(x)$ tak, že

$$\left(x^{-1}, \varphi(\vec{x})\right) = \int_{\mathbf{R}} g(x)\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}x.$$

Takovým generátorem by ale mohla být jedině funkce $g(x) = x^{-1}$, která ovšem není lokálně integrabilní (viz příklad 1.1.11). Čili funkce x^{-1} nemůže být chápána jako zobecněná. Je tedy nutné hledat za zobecněnou funkci x^{-1} jistou náhradu. To bude námětem definic 5.2.30 a 5.2.35. Podobně bude také nutné hledat zobecněné alternativy za funkce x^{-n}, kde $n \in \mathbf{N}$.

5.2.29 Věta

Nechť je na třídě $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ jednorozměrných testovacích funkcí definován funkcionál $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ předpisem

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \mathrm{Vp}\int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{5.7}$$

Pak $\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ a navíc pro každou testovací funkci $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ platí rovnost

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{5.8}$$

<u>*Důkaz:*</u>

- nejprve prokážeme rovnost (5.8)
- upravme si proto nejprve pravou stranu vztahu (5.7) do jiného tvaru

$$\mathrm{Vp}\int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\mathbf{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right] =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0_+}\left[-\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(-t)}{t}\mathrm{d}t + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right] = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

- poslední rovnost platí, neboť integrand je spojitou funkcí i pro $x \to 0$, což vychází z rovnosti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x} = 2\varphi'(0),$$

a dále existuje integrabilní majoranta nezávislá na ε platná pro všechny $x \in (0,\infty)$

- existence této majoranty tvaru $g(x) = \mathtt{K}\,\Theta(x)\Theta(\mathtt{R}-x)$ plyne ze srovnání

$$\left|\chi_{(\varepsilon,\infty)}(x)\,\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right| \leqslant \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right| \leqslant \mathtt{K},$$

jež vychází z věty 5.1.7

- číslo $\mathtt{R} > 0$ je zvoleno tak, aby $\operatorname{supp}(\varphi) \subset S_{\mathtt{R}}$
- pro rozhodnutí, zda $\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$, postačí prokázat spojitost funcionálu (5.7), neboť linearita je zřejmá
- nechť tedy posloupnost testovacích funkcí $\big(\varphi_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ konverguje superstejnoměrně k nulové testovací funkci $o(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$, čili $\varphi_k(\vec{x}) \rightrightarrows o(\vec{x})$
- pak

$$\lim_{k\to\infty}\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k(x)\right) = \lim_{k\to\infty}\int_0^{\infty} \frac{\varphi_k(x)-\varphi_k(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \lim_{k\to\infty} \frac{\varphi_k(x)-\varphi_k(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} 0\,\mathrm{d}x = 0$$

- přitom limitu na integrál bylo možno zaměnit s ohledem na fakt, že existuje integrabilní majoranta k integrandu $x \mapsto \frac{\varphi_k(x)-\varphi_k(-x)}{x}$ a navíc nezávislá na indexu k
- takovou majorantou je již citovaná funkce $g(x) = \mathtt{K}\,\Theta(x)\Theta(\mathtt{R}-x)$, kde $\mathtt{R}$ je poloměr intervalu $(-\mathtt{R},\mathtt{R})$, pro nějž a pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset (-\mathtt{R},\mathtt{R})$
- existenci takového $\mathtt{R}$ garantuje definice superstejnoměrné konvergence 5.1.11
- tím je důkaz završen

5.2.30 Definice

Zobecněnou funkci $\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ definovanou pro každou testovací funkci $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ předpisem

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \mathrm{Vp}\int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\mathbf{R}\setminus\langle-\varepsilon,\varepsilon\rangle} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

nazveme *konečnou částí* nebo latinsky *partie finie.*

5.2.31 Věta

Nechť je na třídě $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ jednorozměrných testovacích funkcí definován funkcionál $\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$ předpisem

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right) = \mathrm{Vp}\int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{5.9}$$

Pak $\mathcal{P}\frac{1}{x^2} \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ a navíc pro každou testovací funkci $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ platí rovnost

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{5.10}$$

<u>*Důkaz:*</u>

- nejprve prokážeme rovnost (5.10)

- upravme si proto nejprve pravou stranu vztahu (5.9) do jiného tvaru

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vp}\int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\mathbf{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0_+}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right] = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0_+}\left[\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(-t)-\varphi(0)}{t^2}\mathrm{d}t + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right] = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

- poslední rovnost platí, neboť integrand je spojitou funkcí i pro $x\to 0$, což vychází z rovnosti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(-x)}{2x} = \varphi''(0),$$

  a dále existuje integrabilní majoranta nezávislá na ε platná pro všechny $x\in(0,\infty)$

- existence této majoranty plyne z faktu, že integrand

$$x\mapsto \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2} \tag{5.11}$$

  je spojitou funkcí na celém $\mathbf{R}$ a navíc je jeho nosič omezený

- pro rozhodnutí, zda $\mathcal{P}\frac{1}{x^2}\in\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ postačí prokázat spojitost funcionálu (5.9), neboť linearita je zřejmá

- nechť tedy posloupnost testovacích funkcí $\big(\varphi_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ konverguje superstejnoměrně k nulové testovací funkci $o(\vec{x})\in\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$, čili $\varphi_k(\vec{x})\rightrightarrows o(\vec{x})$

- pak

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2},\varphi_k(x)\right) &= \lim_{k\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\varphi_k(x)+\varphi_k(-x)-2\varphi_k(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\infty}\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi_k(x)+\varphi_k(-x)-2\varphi_k(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} 0\,\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}
$$

- přitom limitu na integrál bylo možno zaměnit s ohledem na fakt, že existuje integrabilní majoranta k integrandu $x\mapsto\frac{\varphi_k(x)+\varphi_k(-x)-2\varphi_k(0)}{x^2}$ a navíc nezávislá na indexu k

- takovou majorantou je funkce $g(x)=\mathtt{K}\,\Theta(x)\Theta(\mathtt{R}-x)$, kde $\mathtt{R}$ je poloměr intervalu $(-\mathtt{R},\mathtt{R})$, pro nějž a pro každé $k\in\mathbf{N}$ platí $\operatorname{supp}(\varphi_k)\subset(-\mathtt{R},\mathtt{R})$

- existenci takového $\mathtt{R}$ garantuje definice superstejnoměrné konvergence 5.1.11

- tím je důkaz dokončen

5.2.32 Definice

Zobecněnou funkci $\mathcal{P}\frac{1}{x^2}\in\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ definovanou pro každou testovací funkci $\varphi(x)\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$ předpisem

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2},\varphi(x)\right) = \mathrm{Vp}\int_{\mathbf{R}}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\mathbf{R}\setminus\langle-\varepsilon,\varepsilon\rangle}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

nazveme *druhou konečnou částí*.

5.2.33 Věta

Nechť $S \subset \mathbf{E}^r$ je hladká nadplocha v prostoru $\mathbf{E}^r$. Nechť $\nu(\vec{x}) : S \mapsto \mathbf{C}$ a $\nu(\vec{x}) \in \mathscr{C}(S)$. Funkcionál δ_S zavedený nad $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ vztahem

$$\big(\delta_s, \varphi(\vec{x})\big) = \int_S \nu(\vec{x})\varphi(\vec{x})\, \mathtt{d}\mu_s(\vec{x})$$

je z $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$.

Důkaz:

- linearita funkcionálu δ_S plyne z linearity plošného integrálu (viz věta 2.2.28, skripta [12])
- dokážeme spojitost
- uvažme posloupnost testovacích funkcí $\big(\varphi_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$, která konverguje superstejnoměrně k nulové funkci
- pro každé $\varepsilon > 0$ existuje tedy $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{E}^r$ a všechna $k > n_0$ je $|\varphi_k(\vec{x})| < \varepsilon$
- a existuje také $\mathtt{R} > 0$ tak, že pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset S_{\mathtt{R}}$, kde $S_{\mathtt{R}}$ je uzavřená koule v množině $\mathbf{E}^r$
- označme $U = S \cap B_{\mathtt{R}}$
- zřejmě $\mu(U) \in \mathbf{R}$, tj. omezená část U hladké naplochy S má konečnou plošnou míru
- pak pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí, že

$$\int_S \nu(\vec{x})\varphi_k(\vec{x})\, \mathtt{d}\mu_s(\vec{x}) = \int_U \nu(\vec{x})\varphi_k(\vec{x})\, \mathtt{d}\mu_s(\vec{x})$$

- dále s ohledem na fakt, že funkce $\nu(\vec{x})$ je spojitá na omezené množině U, existuje jistě $\mathtt{K} \geqslant 0$ tak, že na U platí $|\nu(x)| \leqslant \mathtt{K}$
- odtud

$$\left|\int_U \nu(x)\varphi_k(\vec{x})\, \mathtt{d}\mu_s(x)\right| \leqslant \int_U \big|\nu(x)\varphi_k(\vec{x})\big|\, \mathtt{d}\mu_s(x) \leqslant \mu(U)\cdot \mathtt{K} \cdot \sup_{\vec{x}\in U} |\varphi_k(\vec{x})| < \mu(U)\cdot\mathtt{K}\cdot\varepsilon$$

- tím je prokázáno, že pro $\varphi_k(\vec{x}) \rightrightarrows 0$ také čísla $\int_U \nu(x)\varphi_k(\vec{x})\, \mathtt{d}\mu_s(x)$ konvergují k nule, což završuje důkaz spojitosti

5.2.34 Definice

Nechť $S \subset \mathbf{E}^r$ je hladká nadplocha v prostoru $\mathbf{E}^r$. Nechť $\nu(\vec{x}) : S \mapsto \mathbf{C}$ a $\nu(\vec{x}) \in \mathscr{C}(S)$. Zobecněnou funkci $\delta_S \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ definovanou pro každou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ předpisem

$$\big(\delta_s, \varphi(\vec{x})\big) = \int_S \nu(\vec{x})\varphi(\vec{x})\, \mathtt{d}\mu_s(\vec{x})$$

nazveme *Diracovou prostou vrstvou* na nadploše S s hustotou $\nu(\vec{x})$.

5.2.35 Definice

Zobecněné funkce $\frac{1}{x \pm \mathtt{i}0} \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ definované vztahem

$$\left(\frac{1}{x \pm \mathtt{i}0}\,,\, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)}{x \pm \mathtt{i}\varepsilon}\, \mathtt{d}x \tag{5.12}$$

nazýváme *kladnou, resp. zápornou Sochockého distribucí.*

5.2.36 Příklad

Mezi Sochockého distribucemi, Diracovou $\delta-$funkcí a konečnou částí definovanou v definici 5.2.30 platí série jednoduchých vztahů nazývaných *Sochockého vzorce*. Tyto vzorce mají tvar

$$\frac{1}{x \pm \mathtt{i}0} = \mp \mathtt{i}\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}. \tag{5.13}$$

Sochockého vzorec dokážeme např. pro variantu se znaménkem plus. Upravujeme tedy definiční vztah (5.12), resp. jeho pravou stranu. Pro ni triviálně platí

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\mathbf{R}}\frac{\varphi(x)}{x\pm \mathtt{i}\varepsilon}\,\mathtt{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\mathbf{R}}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\,\mathtt{d}x - \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\mathbf{R}}\mathtt{i}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\,\mathtt{d}x.$$

Pro imaginární část platí

$$-\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\mathbf{R}}\frac{\varepsilon\,\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\mathtt{d}x = \left|y=\frac{x}{\varepsilon}\right| = -\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\mathbf{R}}\frac{\varphi(\varepsilon y)}{y^2+1}\mathtt{d}y = -\varphi(0)\int_{\mathbf{R}}\frac{\mathtt{d}y}{y^2+1} = -\pi\varphi(0) = \big(-\pi\delta(x),\varphi(x)\big),$$

kde záměna limity a integrálu byla možná kvůli existenci integrabilní majoranty zaručené omezeností funkce $\varphi(x)$ na $\mathbf{R}$ a existencí konečného integrálu $\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{y^2+1}\,\mathtt{d}y$. Pro reálnou část zkoumaného vztahu platí tyto rovnosti

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\mathbf{R}}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\,\mathtt{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0_+}\left[\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\,\mathtt{d}x + \int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\,\mathtt{d}x\right] = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_0^{\infty}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\big(\varphi(x)-\varphi(-x)\big)\,\mathtt{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right)\mathtt{d}x = \\ &= \int_0^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathtt{d}x = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi(x)\right).\end{aligned}$$

Záměna v předposlední rovnosti je zaručená jednak tím, že funkce $\frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}$ nabývá hodnot z $\langle 0,1\rangle$ a dále tím, že $\varphi(x)\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$. Podle věty 5.1.7 totiž

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right)\mathtt{d}x &= \int_0^{\mathtt{R}}\frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right)\mathtt{d}x \leqslant \\ &\leqslant \int_0^{\mathtt{R}}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathtt{d}x \leqslant \int_0^{\mathtt{R}}\mathtt{K} = \mathtt{KR} < \infty,\end{aligned}$$

čímž jsme ukázali, že existuje integrabilní majoranta a je možné provést příslušnou záměnu.

5.3 Elementární operace ve třídě zobecněných funkcí

Na třídě zobecněných funkcí budeme pochopitelně zavádět všechny známé elementární operace. Jejich definice budou vždy koncipovány tak, aby budou-li aplikovány na regulární zobecněné funkce, korespondovaly s operacemi mezi klasickými funkcemi.

5.3.1 Definice

Nechť jsou dány zobecněné funkce $f,g\in\mathscr{D}'$ a číslo $c\in\mathbf{C}$. Pak definujeme *součet distribucí* vztahem

$$\big(f+g,\varphi(\vec{x})\big) = \big(f,\varphi(\vec{x})\big) + \big(g,\varphi(\vec{x})\big)$$

a *číselný násobek distribuce* definičním předpisem

$$\big(cf,\varphi(\vec{x})\big) = c\big(f,\varphi(\vec{x})\big).$$

5.3.2 Lemma

Třída $\mathscr{D}'$ společně s operacemi sčítání a násobení číslem tvoří vektorový prostor.

5.3.3 Věta

Třída regulárních distribucí $\mathscr{D}'_{\mathrm{reg}}(\mathbf{E}^r)$ je podprostorem v prostoru $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$, tj. $\mathscr{D}'_{\mathrm{reg}}(\mathbf{E}^r) \subset\subset \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$.

Důkaz:

- ukážeme homogenitu a aditivitu
- nechť $f, g \in \mathscr{D}'_{\mathrm{reg}}$ a $c \in \mathbf{C}$
- potom pro všechna $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}$ platí

$$\big(c \cdot f + g, \varphi(\vec{x})\big) = c \cdot \big(f, \varphi(\vec{x})\big) + \big(g, \varphi(\vec{x})\big) = c \cdot \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} + \int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} =$$

$$= \int_{\mathbf{E}^r} \left(c \cdot f(\vec{x}) + g(\vec{x})\right)\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}$$

- našli jsme tedy generátor zobecněné funkce $c \cdot f + g$, čili podprostor je uzavřený

5.3.4 Definice

Zobecněnou funkci f nazveme *komplexně sdruženou* se zobecněnou funkcí g a označíme $f = g^\star$, platí-li pro všechny funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}$ rovnost $\big(f, \varphi(\vec{x})\big) = \big(g, \varphi(\vec{x})\big)^\star$. *Reálnou,* resp. *imaginární* částí zobecněné funkce f rozumíme zobecněné funkce definované funkcionálním zápisem

$$\big(\mathrm{Re}(f), \varphi(\vec{x})\big) := \frac{\big(f, \varphi(\vec{x})\big) + \big(f, \varphi(\vec{x})\big)^\star}{2}, \quad \big(\mathrm{Im}(f), \varphi(\vec{x})\big) := \frac{\big(f, \varphi(\vec{x})\big) - \big(f, \varphi(\vec{x})\big)^\star}{2\mathtt{i}}.$$

5.3.5 Definice

Zobecněnou funkci f nazveme *reálnou,* jestliže pro všechny funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}$ platí vztah $\big(\mathrm{Im}(f), \varphi(\vec{x})\big) = 0$.

5.3.6 Lemma

Distribuce $f \in \mathscr{D}'$ je reálnou zobecněnou funkcí právě tehdy, když $\mathrm{Re}(f) = f$.

5.3.7 Definice

Nechť $\mathbb{A}$ je regulární čtvercová matice řádu r a $\vec{b} \in \mathbf{E}^r$ libovolný vektor. Pak pro každou zobecněnou funkci $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ definujeme *afinní transformaci souřadnic* tvaru

$$\Big(f(\mathbb{A}\vec{x} + \vec{b}), \varphi(\vec{x})\Big) = \frac{1}{|\det(\mathbb{A})|}\Big(f(\vec{y}), \varphi(\mathbb{A}^{-1}\vec{y} - \mathbb{A}^{-1}\vec{b})\Big). \tag{5.14}$$

5.3.8 Poznámka

V předešlé definici je třeba ale prokázat, že funkcionál $\Big(f(\vec{y}), \varphi(\mathbb{A}^{-1}\vec{y} - \mathbb{A}^{-1}\vec{b})\Big)$ je skutečně z $\mathscr{D}'$. To ponecháváme čtenáři jako cvičení. Je-li f regulární distribuce, pak afinní transformace odpovídá lineární substituci ve vícerozměrném integrálu tvaru

$$\Big(f(\mathbb{A}\vec{x} + \vec{b}), \varphi(\vec{x})\Big) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\mathbb{A}\vec{x} + \vec{b})\,\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \left| \begin{array}{c} \vec{y} = \mathbb{A}\vec{x} + \vec{b} \\ \vec{x} = \mathbb{A}^{-1}(\vec{y} - \vec{b}) \\ \mathrm{d}\vec{x} = \frac{\mathrm{d}\vec{y}}{|\det(\mathbb{A})|} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{|\det(\mathbb{A})|}\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{y})\,\varphi(\mathbb{A}^{-1}(\vec{y} - \vec{b}))\,\mathrm{d}\vec{y} = \frac{1}{|\det(\mathbb{A})|}\Big(f(\vec{y}), \varphi(\mathbb{A}^{-1}\vec{y} - \mathbb{A}^{-1}\vec{b})\Big).$$

5.3.9 Věta

Nechť $\vec{\mu} \in \mathbf{E}^r \setminus \{\vec{0}\}$. Pak $\delta_{\vec{\mu}} = \delta(\vec{x} - \vec{\mu})$.

Důkaz:

- položíme-li v předešlé definici $\mathbb{A} = \mathbb{I}$ a $\vec{b} = \vec{\mu}$, dostáváme pro všechny testovací funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ postupně

$$\Big(\delta(\mathbb{A}\vec{x} + \vec{b}), \varphi(\vec{x})\Big) = \big(\delta(\vec{x} + \vec{\mu}), \varphi(\vec{x})\big) = \frac{1}{|\det(\mathbb{I})|}\big(\delta(\vec{x}), \varphi(\mathbb{I}\vec{x} - \mathbb{I}\vec{\mu})\big) = \big(\delta(\vec{x}), \varphi(\vec{x} - \vec{\mu})\big) = \varphi(\vec{\mu})$$

- z definice 5.2.24 ale vyplývá, že $\big(\delta_{\vec{\mu}}, \varphi(\vec{x})\big) = \varphi(\vec{\mu})$
- jelikož rovnost hodnot funkcionálů $\big(\delta(\vec{x} + \vec{\mu}), \varphi(\vec{x})\big) = \big(\delta_{\vec{\mu}}, \varphi(\vec{x})\big)$ platí pro všechny testovací funkce, je tím dokázáno, že $\delta_{\vec{\mu}} = \delta(\vec{x} - \vec{\mu})$

5.3.10 Poznámka

Narozdíl od součtu, kdy je možno sčítat libovolné zobecněné funkce, násobit libovolné zobecněné funkce obecně nebude možné. Definováno bude pouze násobení zobecněné funkce regulární distribucí, jejímž generátorem je hladká funkce $a(\vec{x}) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$. Důvod je ukryt v definičním vztahu (5.15), kdy je třeba zajistit, aby součin $a(\vec{x})\varphi(\vec{x})$ patřil do třídy $\mathscr{D}$ testovacích funkcí. Jak bylo dokázáno ve větě 5.1.16, je-li $a(\vec{x}) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$ a $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}$, pak $a(\vec{x})\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}$.

5.3.11 Definice

Nechť je dána funkce $a(\vec{x}) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$ a zobecněná funkce $f \in \mathscr{D}'$. Nechť $a \in \mathscr{D}'$ je regulární zobecněná funkce generovaná funkcí $a(\vec{x})$. Pak definujeme *součin distribucí* vztahem

$$\big(af, \varphi(\vec{x})\big) = \big(f, a(\vec{x})\varphi(\vec{x})\big). \tag{5.15}$$

5.3.12 Definice

Nechť je dána zobecněná funkce $f \in \mathscr{D}'$ a multiindex $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Pak definujeme *derivaci* $\mathcal{D}^\alpha f \in \mathscr{D}'$ *distribuce* f vztahem

$$\big(\mathcal{D}^\alpha f, \varphi(\vec{x})\big) = (-1)^{|\alpha|}\big(f, \mathcal{D}^\alpha \varphi(\vec{x})\big).$$

5.3.13 Příklad

Vypočteme derivaci jednorozměrné Heavisideovy distribuce $\Theta \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Výpočet je značně snadný, neboť

$$\big(\Theta', \varphi(x)\big) = -\big(\Theta, \varphi'(x)\big) = -\int_{\mathbf{R}} \Theta(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\big[\varphi(x)\big]_0^\infty = -\lim_{x\to\infty}\varphi(x) + \varphi(0) = \varphi(0) = \big(\delta, \varphi(x)\big).$$

Derivací jednorozměrné Heavisideovy funkce je tedy Diracova $\delta-$ funkce. Podobná situace nastane u derivace vícerozměrné Heavisideovy distribuce. Pro ni platí

$$\big(\mathcal{D}^{(1,1,\ldots,1)}\Theta(\vec{x}), \varphi(\vec{x})\big) = (-1)^r\left(\Theta(\vec{x}), \frac{\partial^r \varphi}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_r}\right) = \int_{\mathbf{R}_+^r} \frac{\partial^r \varphi}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_r}\,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_r =$$

$$= \int_{\mathbf{R}_+^{r-1}} \left[\frac{\partial^{r-1}\varphi}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{r-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_r)\right]_0^\infty \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_{r-1} =$$

$$= \int_{\mathbf{R}_+^{r-1}} \frac{\partial^{r-1}\varphi}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{r-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}, 0)\,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_{r-1} = \ldots = \int_0^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, 0, 0, \ldots, 0)\,\mathrm{d}x_1 =$$

$$= \Big[\varphi(x_1, 0, 0, \ldots, 0)\Big]_0^\infty = \varphi(\vec{0}) = \big(\delta, \varphi(\vec{x})\big).$$

Odtud

$$\mathcal{D}^{(1,1,\ldots,1)}\Theta(\vec{x}) = \frac{\partial^r \Theta}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_r} = \delta(\vec{x}).$$

Podobně také

$$\left(\mathcal{D}^{(1,1,\ldots,1)}\Theta_{\vec{\mu}}(\vec{x}),\varphi(\vec{x})\right)=(-1)^r\left(\Theta_{\vec{\mu}}(\vec{x}),\frac{\partial^r\varphi}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_r}\right)=\int_{\mu_1}^{\infty}\int_{\mu_2}^{\infty}\cdots\int_{\mu_r}^{\infty}\frac{\partial^r\varphi}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_r}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_r=$$

$$=\int_{\mu_1}^{\infty}\int_{\mu_2}^{\infty}\cdots\int_{\mu_{r-1}}^{\infty}\left[\frac{\partial^{r-1}\varphi}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_{r-1}}(x_1,x_2,\ldots,x_r)\right]_{\mu_r}^{\infty}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_{r-1}=$$

$$=\int_{\mu_1}^{\infty}\int_{\mu_2}^{\infty}\cdots\int_{\mu_{r-1}}^{\infty}\frac{\partial^{r-1}\varphi}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_{r-1}}(x_1,x_2,\ldots,x_{r-1},\mu_r)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_{r-1}=\ldots=\int_{\mu_1}^{\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1,\mu_2,\mu_3,\ldots,\mu_r)\,\mathrm{d}x_1=$$

$$=\Big[\varphi(x_1,\mu_2,\mu_3,\ldots,\mu_r)\Big]_{\mu_1}^{\infty}=\varphi(\vec{\mu})=\left(\delta_{\vec{\mu}},\varphi(\vec{x})\right).$$

A proto

$$\mathcal{D}^{(1,1,\ldots,1)}\Theta_{\vec{\mu}}(\vec{x})=\frac{\partial^r\Theta_{\vec{\mu}}}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_r}=\delta_{\vec{\mu}}(\vec{x}).$$

5.3.14 Příklad

Nechť $a(\vec{x})\in\mathscr{C}^{\infty}(\mathbf{E}^r)$. Vypočtěme součin $\delta(\vec{x}-\vec{\gamma})\,a(\vec{x})$. Z příslušných definic snadno odvodíme

$$\left(\delta(\vec{x}-\vec{\gamma})\,a(\vec{x}),\varphi(\vec{x})\right)=\left(\delta(\vec{x}-\vec{\gamma}),a(\vec{x})\,\varphi(\vec{x})\right)=a(\vec{\gamma})\varphi(\vec{\gamma})=\left(a(\vec{\gamma})\,\delta(\vec{x}-\vec{\gamma}),\varphi(\vec{x})\right),$$

a proto tedy

$$\delta(\vec{x}-\vec{\gamma})\,a(\vec{x})=a(\vec{\gamma})\,\delta(\vec{x}-\vec{\gamma}),$$

speciálně $\delta(\vec{x})\,a(\vec{x})=a(\vec{0})\,\delta(\vec{x})$.

5.3.15 Příklad

Vypočtěme, čemu se rovná součin $x^n\delta^{(n)}(x)$. Z definice rovnosti distribucí je zřejmé, že je třeba upravovat funkcionál

$$\left(x^n\delta^{(n)}(x),\varphi(x)\right)\overset{❶}{=}\left(\delta^{(n)}(x),x^n\varphi(x)\right)\overset{❷}{=}(-1)^n\left(\delta(x),\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^n)\varphi^{(n-k)}(x)\right)\overset{❸}{=}$$

$$\overset{❸}{=}(-1)^n\left(\delta(x),\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}\varphi^{(n-k)}(x)\right)\overset{❹}{=}(-1)^n n!\,\varphi(0)\overset{❺}{=}\Big((-1)^n n!\,\delta(x),\varphi(x)\Big),$$

odkud vidíme, že $x^n\delta^{(n)}(x)=(-1)^n n!\,\delta(x)$. Pro preciznost specifikujeme, že ve výše uvedených úpravách bylo užito definice násobení regulární distribucí s hladkým generátorem ❶, definice derivace v $\mathscr{D}'$ ❷, Leibnizova pravidla pro derivování součinu ❸, definice Diracovy $\delta-$funkce ❹ a ❺.

5.3.16 Věta - o parciální derivaci součinu distribucí

Nechť je dána funkce $a(\vec{x})\in\mathscr{C}^{\infty}(\mathbf{E}^r)$ a zobecněná funkce $f\in\mathscr{D}'$. Nechť $a\in\mathscr{D}'_{\mathrm{reg}}$ je generována funkcí $a(\vec{x})$. Pak pro libovolné $i\in\hat{r}$ platí

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(af)=\frac{\partial a}{\partial x_i}f+a\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- z definice rovnosti zobecněných funkcí je třeba prokázat, že pro všechny testovací funkce je splněna rovnost

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(af),\varphi(\vec{x})\right)=\left(\frac{\partial a}{\partial x_i}f+a\frac{\partial f}{\partial x_i},\varphi(\vec{x})\right)$$

- snadno ale ověříme sadu rovností

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(af),\varphi(\vec{x})\right)\overset{❶}{=}-\left(af,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\overset{❷}{=}-\left(f,a(\vec{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\overset{❸}{=}-\left(f,\frac{\partial}{\partial x_i}\big(a(\vec{x})\varphi(\vec{x})\big)-\frac{\partial a}{\partial x_i}\varphi(\vec{x})\right)\overset{❹}{=}$$

$$\overset{❹}{=}-\left(f,\frac{\partial}{\partial x_i}\big(a(\vec{x})\varphi(\vec{x})\big)\right)+\left(f,\frac{\partial a}{\partial x_i}\varphi(\vec{x})\right)\overset{❺}{=}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i},a(\vec{x})\varphi(\vec{x})\right)+\left(f\frac{\partial a}{\partial x_i},\varphi(\vec{x})\right)\overset{❻}{=}\left(a\frac{\partial f}{\partial x_i}+f\frac{\partial a}{\partial x_i},\varphi(\vec{x})\right)$$

- v předešlém odvození přitom bylo užito definice derivace ❶, definice násobení regulární distribucí s hladkým generátorem ❷, metody per partes pro testovací funkce ❸, linearity funkcionálu ❹, opět definice derivace ❺ a nakonec také definice sčítání zobecněných funkcí ❻

5.3.17 Důsledek – Leibnizovo pravidlo pro distribuce

Nechť je dána funkce $a(\vec{x}) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$ a zobecněná funkce $f \in \mathscr{D}'$. Nechť $a \in \mathscr{D}'_{\text{reg}}$ je generována funkcí $a(\vec{x})$. Pak pro libovolný multiindex $\alpha \in \mathbf{N}_0^r$ platí

$$\mathcal{D}^\alpha\big(af\big) = \sum_{|\beta|=0}^{|\alpha|} \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!} \mathcal{D}^\beta f\ \mathcal{D}^{\alpha-\beta} a.$$

5.3.18 Poznámka

Výše uvedená definice zobecnené derivace pro distribuci $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ splňuje též následující rovnost, která je používaná u klasických funkcí k zavedení derivace funkce jedné promenné:

$$f' = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(f(x+h) - f(x)\Big) \text{ v } \mathscr{D}'. \tag{5.16}$$

Jedná se tedy o další argument, proč nazýváme funkcionály z $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ a operace na nich zobecněnými. Jde se však o zcela jiné symboly a pojmy než v případě klasických funkcí. To je nutno mít na zřeteli. Zejména však neopomeňme fakt, že rovnice (5.16) je rovnicí v $\mathscr{D}'$, a vyjadřuje tedy rovnost funkcionálů. Rovnost dvou zobecněných funkcí v $\mathscr{D}'$ znamená

$$\big(f', \varphi(x)\big) = \Big(\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f(x+h)-f(x)\big), \varphi(x)\Big) = \lim_{h\to 0}\Big(\frac{1}{h}\big(f(x+h)-f(x)\big), \varphi(x)\Big).$$

Je výhodné nejdříve upravit levou stranu této rovnosti do tvaru

$$\big(f', \varphi(x)\big) = -\big(f, \varphi'(x)\big)$$

a následne ukázat, že pravou stranu lze upravit do výše uvedeného tvaru. Pomocí série rovností využívajících pouze definicní vztahy na $\mathscr{D}'$ lze provést následující sérii úprav:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\Big(f(x+h)-f(x), \varphi(x)\Big)\right] &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\Big(f(x+h), \varphi(x)\Big) - \frac{1}{h}\Big(f(x), \varphi(x)\Big)\right] = \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\Big(f(x), \varphi(x-h)\Big) - \frac{1}{h}\Big(f(x), \varphi(x)\Big)\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\Big(f(x), \varphi(x-h)-\varphi(x)\Big)\right] = \\
&= \lim_{h\to 0}\Big(f(x), \frac{1}{h}\big(\varphi(x-h)-\varphi(x)\big)\Big) = -\lim_{h\to 0}\Big(f(x), \frac{1}{h}\big(\varphi(x)-\varphi(x-h)\big)\Big).
\end{aligned}$$

Zbývá vsunout limitu v posledním výrazu do druhého argumentu, poněvadž následně bude možno užít definici derivace funkce $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$. Jedná se však o netriviální úvahu. Je totiž třeba ukázat, že posloupnost funkcí

$$\eta_h(x) := \frac{1}{h}\Big(\varphi(x) - \varphi(x-h)\Big)$$

superstejnoměrně konverguje v $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ k $\varphi'(x)$. Pokud se toto podaří prokázat, bude úloha vyřešena.

Nejprve je třeba prokázat, že soubor funkcí $\eta_h(x)$ má stejnomerně omezené nosiče. Protože zkoumáme limitu $h \to 0$, stačí se samozřejme omezit například na interval $h \in (-1,1)$ Pak ale

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subset \big\langle -\mathtt{R}, \mathtt{R}\big\rangle \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{supp}\big(\varphi(x-h)\big) \subset \big\langle -\mathtt{R}-1, \mathtt{R}+1\big\rangle.$$

Dále je třeba prokázat superstejnoměrnou konvergenci všech derivací, tj. je třeba ukázat, že pro $h \to 0$ a pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí

$$\frac{1}{h}\Big(\varphi^{(n)}(x) - \varphi^{(n)}(x-h)\Big) - \varphi^{(n+1)}(x) \rightrightarrows o(\vec{x}),$$

což se dá po označení $\varphi^{(n)} \overset{ozn}{=} \psi \in \mathscr{D}$ shrnout do vyšetrování konvergence

$$\frac{1}{h}\Big(\psi(x) - \psi(x-h)\Big) - \psi'(x) \rightrightarrows o(\vec{x}). \tag{5.17}$$

K prokázání platnosti (5.17) je výhodné vyjádřit přírůstek funkce $\psi(x)$ pomocí Taylorova rozvoje, kde příslušný zbytek vyjádříme v integrálním tvaru

$$\begin{aligned}
\psi(x) - \psi(x-h) &= -\int_0^h \psi'(x-\tilde{t})\,\mathtt{d}t = \left|t = \frac{\tilde{t}}{h}\right| = h\int_0^1 \psi'(x-ht)\,\mathtt{d}t = -h\int_0^1 \psi'(x-th)\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}(1-t)\,\mathtt{d}t = \\
&= -h\Big[\psi'(x-th)(1-t)\Big]_0^1 - h^2\int_0^1 \psi''(x-th)(1-t)\,\mathtt{d}t = h\psi'(x) - h^2\int_0^1 \psi''(x-th)(1-t)\,\mathtt{d}t,
\end{aligned}$$

kde bylo užito integrace per partes. Nyní již snadno dokážeme stejnoměrnou konvergenci (5.17)

$$\left|\frac{1}{h}\Big(\psi(x)-\psi(x-h)\Big)-\psi'(x)\right| = \left|-h\int_0^1 \psi''(x-th)(1-x)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |h|\int_0^1 \mathtt{K}(1-t)\mathrm{d}t = \frac{\mathtt{K}}{2}|h|,$$

kde $\mathtt{K} = \max_{x\in\mathbf{R}} |\psi''(x)| < \infty$.

5.3.19 Příklad

V prostoru distribucí $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ nalezněme první derivaci konečné části $\mathcal{P}\frac{1}{x}$. Z definice derivace 5.3.12 a z definice konečné části 5.2.30 dostáváme

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right),\varphi(x)\right) = -\left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi'(x)\right) = -\mathrm{Vp}\int_{\mathbf{R}}\frac{\varphi'(x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to0_+}\int_{\mathbf{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)}\frac{\varphi'(x)}{x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left|\begin{array}{ll} u=-x^{-1} & v'=\varphi'(x) \\ u'=x^{-2} & v=\varphi(x)\end{array}\right| = \lim_{\varepsilon\to0_+}\left[\frac{\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon}+\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}+\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right].$$

Tento výraz ale není obecně možno zaměnit za součet limit jednotlivých sčítanců, neboť např. limita $\lim_{\varepsilon\to0_+}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ existuje pouze pro speciální volbu testovacích funkcí, ne tedy obecně na $\mathscr{D}(\mathbf{R})$. Proto je postup následující.

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right),\varphi(x)\right) = -\lim_{\varepsilon\to0_+}\left[-\frac{\varphi(-\varepsilon)+\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}+\varphi(0)\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}+\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right] =$$
$$= -\mathrm{Vp}\int_{\mathbf{R}}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \lim_{\varepsilon\to0_+}\left[2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}-\frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon}\right] = -\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2},\varphi(x)\right)+\lim_{\varepsilon\to0_+}\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}+$$
$$+\lim_{\varepsilon\to0_+}\frac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} = -\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2},\varphi(x)\right)+\varphi'(0)-\varphi'(0) = -\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2},\varphi(x)\right).$$

Prokázali jsme tedy rovnost

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right) = -\mathcal{P}\frac{1}{x^2}.$$

5.3.20 Definice

Zobecněnou funkci $g\in\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ nazveme *primitivní* ke zobecněné funkci $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R})$, pokud $g'=f$.

5.3.21 Věta

Nechť $c\in\mathbf{R}$ je zvoleno pevně. Nechť je dána funkce $f(x):\mathbf{R}\mapsto\mathbf{R}$ taková, že $f(x)\in\mathscr{C}^1(x<c)$ a $f(x)\in\mathscr{C}^1(x>c)$, a f reprezentuje příslušnou zobecněnou funkci. Označme symbolem $\lceil f\rceil_c$ délku skoku funkce $f(x)$ v bodě c, tedy

$$\lceil f\rceil_c := \lim_{x\to c_+} f(x) - \lim_{x\to c_-} f(x).$$

Nechť symbol $f^\sharp$ představuje distribuci generovanou derivací funkce $f(x)$ na množině $\mathbf{R}\setminus\{c\}$. Pak pro zobecněnou derivaci distribuce f ve třídě $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ platí vztah

$$f' = f^\sharp + \lceil f\rceil_c\cdot\delta(x-c).$$

<u>*Důkaz:*</u>

- při důkazu využijeme pouze definice derivace v $\mathscr{D}'$, vlastností testovacích funkcí a metody per partes

$$\big(f',\varphi(x)\big) = -\big(f,\varphi'(x)\big) = -\int_{-\infty}^{c} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u=f(x) & v'=\varphi'(x) \\ u'=f^\sharp(x) & v=\varphi(x)\end{array}\right| =$$
$$= -\big[f(x)\varphi(x)\big]_{-\infty}^{c} + \int_{-\infty}^{c} f^\sharp(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \big[f(x)\varphi(x)\big]_c^{\infty} + \int_c^{\infty} f^\sharp(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\varphi(c)\lim_{x\to c_-} f(x) + \varphi(c)\lim_{x\to c_+} f(x) + \int_{\mathbf{R}} f^\sharp(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \lceil f\rceil_c\,\varphi(c) + \int_{\mathbf{R}} f^\sharp(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \big(f^\sharp + \lceil f\rceil_c\cdot\delta(x-c)\,,\,\varphi(x)\big).$$

5.3.22 Důsledek

Nechť $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ jsou zvoleny pevně. Nechť je dána funkce $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ tak, že pro $i \in \widehat{n-1}$ platí

$$f(x) \in \mathscr{C}^1(x < c_1), \quad f(x) \in \mathscr{C}^1(c_i < x < c_{i+1}), \quad f(x) \in \mathscr{C}^1(x > c_n).$$

Nechť f reprezentuje příslušnou zobecněnou funkci. Označme symbolem $\lceil f \rceil_{c_i}$ délku skoku funkce $f(x)$ v bodě c_i, tedy

$$\lceil f \rceil_{c_i} := \lim_{x \to c_{i+}} f(x) - \lim_{x \to c_{i-}} f(x).$$

Nechť symbol $f^\sharp$ představuje distribuci generovanou derivací funkce $f(x)$ na množině $\mathbf{R} \setminus \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. Pak pro zobecněnou derivaci distribuce f ve třídě $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ platí vztah

$$f' = f^\sharp + \sum_{i=1}^{n} \lceil f \rceil_{c_i} \cdot \delta(x - c_i).$$

5.3.23 Věta

Nechť G je otevřená podmnožina prostoru $\mathbf{E}^r$. Označme $H = \mathbf{E}^r \setminus \overline{G}$. Nechť $\operatorname{bd}(G) = \operatorname{bd}(H)$ je po částech hladká nadplocha v $\mathbf{E}^r$, k níž tedy existuje skoro všude normovaný normálový vektor $\vec{n}(\vec{x})$ směřující do doplňku H. Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{C}^1(G \cup H)$. Označme $f_G(\vec{x})$, $f_H(\vec{x})$, zúžení $f(\vec{x})$ na G, resp. H. Nechť $f_G(\vec{x})$ lze spojitě rozšířit na uzávěr $\overline{G}$ a $f_H(\vec{x})$ lze spojitě rozšířit na uzávěr $\overline{H}$. Označme

$$\big[f \big]_{\operatorname{bd}(G)} := \lim_{\vec{y} \to \vec{x}, \vec{y} \in H} f(\vec{y}) - \lim_{\vec{y} \to \vec{x}, \vec{y} \in G} f(\vec{y}) \tag{5.18}$$

délku skoku funkce $f(\vec{x})$ na hranici $\operatorname{bd}(G)$. Nechť f reprezentuje zobecněnou funkci generovanou funkcí $f(\vec{x})$. Symbolem $\frac{\partial f^\sharp}{\partial x_i}$ označme zobecněnou funkci generovanou klasickou parciální derivací $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ funkce $f(\vec{x})$ na množině $\mathbf{E}^r \setminus \operatorname{bd}(G) = H \cup G$. Nechť

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r).$$

Pak platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f^\sharp}{\partial x_i} + \big[f \big]_{\operatorname{bd}(G)} \big\langle \vec{n} | \vec{\epsilon}_i \big\rangle \, \delta_{\operatorname{bd}(G)}.$$

Důkaz:

- jelikož lze $f_G(\vec{x})$ spojitě rozšířit na $\overline{G}$ a podobně $f_H(\vec{x})$ na $\overline{H}$, existují ve vztahu (5.18) obě limity
- funkce $\frac{\partial f^\sharp}{\partial x_i}$ (resp. její generátor) je definována skoro všude v $\mathbf{E}^r$, a představuje tudíž korektně zavedenou zobecněnou funkci
- označme $\overrightarrow{F} = f \vec{\epsilon}_i$, kde $\vec{\epsilon}_i$ je $i-$tý vektor standardní báze v $\mathbf{E}^r$
- zřejmě tedy $\operatorname{div}(\overrightarrow{F}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ a $\big\langle \vec{n} | \overrightarrow{F} \big\rangle = f \big\langle \vec{n} | \vec{\epsilon}_i \big\rangle$
- z Gaussovy-Ostrogradského věty pak vyplývá, že
$$\int_G \operatorname{div}(\overrightarrow{F}) \, \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\operatorname{bd}(G)} \big\langle \vec{n} | \overrightarrow{F} \big\rangle \, \mathrm{d}\mu_s(\vec{x})$$
- odtud dále
$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\operatorname{bd}(G)} f \big\langle \vec{n} | \vec{\epsilon}_i \big\rangle \, \mathrm{d}\mu_s(\vec{x})$$
- pak pro každou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ platí

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi(\vec{x}) \right) = - \left(f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = - \int_{G \cup H} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}\vec{x} =$$
$$= \int_G \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi(\vec{x}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \big(f(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) \big) \right) \mathrm{d}\vec{x} + \int_H \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi(\vec{x}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \big(f(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) \big) \right) \mathrm{d}\vec{x} =$$
$$= \int_{\mathbf{E}^r} \frac{\partial f^\sharp}{\partial x_i} \varphi(\vec{x}) \, \mathrm{d}\vec{x} - \int_{\operatorname{bd}(G)} \lim_{\vec{y} \to \vec{x}, \vec{y} \in G} f(\vec{y}) \varphi(\vec{y}) \big\langle \vec{n} | \vec{\epsilon}_i \big\rangle \, \mathrm{d}\mu_s(\vec{y}) + \int_{\operatorname{bd}(H)} \lim_{\vec{y} \to \vec{x}, \vec{y} \in H} f(\vec{y}) \varphi(\vec{y}) \big\langle -\vec{n} | \vec{\epsilon}_i \big\rangle \, \mathrm{d}\mu_s(\vec{y}) =$$
$$= \left(\frac{\partial f^\sharp}{\partial x_i}, \varphi(\vec{x}) \right) + \int_{\operatorname{bd}(G)} \big[f \big]_{\operatorname{bd}(G)} \varphi(\vec{y}) \big\langle \vec{n} | \vec{\epsilon}_i \big\rangle \, \mathrm{d}\mu_s(\vec{y}) = \left(\frac{\partial f^\sharp}{\partial x_i} + \big[f \big]_{\operatorname{bd}(G)} \big\langle \vec{n} | \vec{\epsilon}_i \big\rangle \, \delta_{\operatorname{bd}(G)}, \varphi(\vec{x}) \right)$$

- tím je tvrzení dokázáno
- připomeňme pouze, že podle předpokladů se rovnají hranice $\mathrm{bd}(G)$ a $\mathrm{bd}(H)$ až na orientaci

5.3.24 Poznámka

Na závěr tohoto oddílu se krátce zamyslíme nad jedním z častých nešvarů objevujících se v různých aplikacích teorie zobecněných funkcí. Velmi často je totiž čtenářům podsouvána představa, že Diracova $\delta-$funkce je definována klasická jako funkce, pro níž zároveň platí trojice následující tvrzení:

- $\delta(x) = 0$ pro $x < 0$,
- $\delta(x) = 0$ pro $x > 0$,
- $\int_{\mathbf{R}} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1.$

Navzdory tomu, jak absurdní toto tvrzení je (zejména s ohledem na větu o Lebesgueově integrálu z ekvivalentních funkcí), mnohá více či méně odborná pojednání s tímto zavedením pracují. Pravdou ale zůstává, ze výše uvedená představa o Diracově $\delta-$funkci je naprosto mylná a může z ní být odvozeno v podstatě jakkoli absurdní tvrzení. Zde například prokážeme, že integrál z funkce $f(x) = x^2\delta(x)$ přes množinu $\mathbf{R}$ je jednotkový. Z předpokladů o vlastnostech Diracovy funkce totiž plyne, že

$$\int_{\mathbf{R}} x^2\delta(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x^2 \text{ a } \delta(x) \text{ se liší} \\ \text{pouze na } \mu-\text{nulové množině} \end{array} \right| = \int_{\mathbf{R}} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

což je v přímém rozporu s korektním výpočtem

$$\big(x\,\delta(x), \varphi(x)\big) = \big(\delta(x), x\,\varphi(x)\big) = 0\,\varphi(0) = 0.$$

5.4 Zobecněné funkce s pozitivním nosičem

Z množiny všech zobecněných funkcí $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ nyní vybereme specifikou třídu funkcí, pro něž budou některé operace (např. konvoluce) splňovat jisté sympatické vlastnosti, a budou tudíž snáze proveditelné.

5.4.1 Značení

Nechť $G \subset \mathbf{E}^r$ je libovolná otevřená množina. Symbolem $\mathscr{D}(G)$ budeme rozumět třídu všech $r-$rozměrných testovacích funkcí, jejichž nosič je podmnožinou množiny G. Je-li $G = \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \times \ldots \times \mathbf{R}^+$, budeme užívat též znaku $\mathscr{D}_+(\mathbf{E}^r)$ nebo $\mathscr{D}_+$, je-li jasné, v jakém prostoru se úloha řeší.

5.4.2 Definice

Nechť $G \subset \mathbf{E}^r$ je otevřená množina a $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ zobecněná funkce. Řekneme, že funkce f *je rovna nule na* G, pokud pro všechny testovací funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(G)$ platí rovnost $\big(f, \varphi(\vec{x})\big) = 0$.

5.4.3 Definice

Nechť $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ je zobecněná funkce. Symbolem $\mathcal{N}_f$ označíme sjednocení všech otevřených množin $G \subset \mathbf{E}^r$, na kterých je f rovna nule. Množinu $\mathcal{N}_f$ nazýváme *nulovou množinou zobecněné funkce*. Její doplněk do prostoru $\mathbf{E}^r$ označíme symbolem $\mathrm{supp}(f)$ a nazveme *nosičem zobecněné funkce* f. Platí tedy rovnost $\mathrm{supp}(f) = \mathbf{E}^r \setminus \mathcal{N}_f$. Řekneme, že f *je finitní,* pokud je $\mathrm{supp}(f)$ omezenou množinou.

5.4.4 Věta

Nechť $\delta_{\vec{\mu}} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ je centrovaná Diracova funkce. Pak platí $\mathrm{supp}(\delta_{\vec{\mu}}) = \big\{\vec{\mu}\big\}$.

Důkaz:

- pro každou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}\big(\mathbf{E}^r \setminus \{\vec{\mu}\}\big)$ platí $\big(\delta_{\vec{\mu}}, \varphi(\vec{x})\big) = \varphi(\vec{\mu}) = 0$
- nepochybně ale existuje jistá funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$, pro níž $\big(\delta_{\vec{\mu}}, \varphi(\vec{x})\big) = \varphi(\vec{\mu}) \neq 0$

- proto je $\mathbf{E}^r \setminus \{\vec{\mu}\}$ největší otevřenou množinou, na níž je $\delta_{\vec{\mu}}$ rovna nule
- čili $\mathcal{N}_f = \mathbf{E}^r \setminus \{\vec{\mu}\}$, odkud lze snadno nahlédnout, že $\operatorname{supp}(\delta_{\vec{\mu}}) = \big\{\vec{\mu}\big\}$.

5.4.5 Věta

Nechť $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ je Diracova funkce. Pak platí $\operatorname{supp}(\delta) = \big\{\vec{0}\big\}$.

5.4.6 Definice

Nechť $G \subset \mathbf{E}^r$ je libovolná otevřená množina. Třídu všech lineárních a spojitých funkcionálů s definičním oborem $\mathscr{D}(G)$ označíme symbolem $\mathscr{D}'(G)$. Je-li $G = \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \times \ldots \times \mathbf{R}^+$, značíme také $\mathscr{D}'(G) = \mathscr{D}'_+(\mathbf{E}^r)$. Prvky třídy $\mathscr{D}'_+(\mathbf{E}^r)$ nazýváme *zobecněnými funkcemi s pozitivním nosičem.*

5.4.7 Lemma

Nechť $G \subset \mathbf{E}^r$ je libovolná otevřená množina. Třídy $\mathscr{D}'(G)$, a specielně tedy také $\mathscr{D}'_+(\mathbf{E}^r)$, tvoří podprostory vektorového prostoru $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$, tj. $\mathscr{D}'(G) \subset\subset \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a $\mathscr{D}'_+(\mathbf{E}^r) \subset\subset \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$.

5.5 Konvergence ve třídě zobecněných funkcí

Také ve třídě zobecněných funkcí $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ bude nezbytné zavést pojem konvergence. Konvergenci přitom zavedeme jak ve smyslu konvergence posloupnosti $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ zobecněných funkcí, tak ve smyslu konvergence systému parametrických zobecněných funkcí f_λ závislých na parametru λ. Oba zavedené typy konvergence bude přitom možno přirozeně rozšířit na posloupnosti funkcí nebo parametrických funkcí z $\mathscr{D}'(G)$.

5.5.1 Definice

Řekneme, že posloupnost zobecněných funkcí $(f_k)_{k=1}^{\infty}$, kde $f_k \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ *konverguje* ve třídě distribucí $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ k zobecněné funkci $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a označíme symbolem $\lim_{k\to\infty} f_k = f$, pokud platí

$$\lim_{k\to\infty} \big(f_k, \varphi(\vec{x})\big) = \big(f, \varphi(\vec{x})\big)$$

pro každou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$.

5.5.2 Příklad

Uvažme systém funkcí $f_k(x) = k\,\Theta\big(1 - k|x|\big) \cdot \big(1 - k|x|\big)$ pro $k \in \mathbf{N}$ a zkoumejme distribuční limitu $\lim_{k\to\infty} f_k$. Z definice dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} \big(f_k, \varphi(x)\big) = \lim_{k\to\infty} \int_{-1/k}^{1/k} k\big(1 - k|x|\big)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{-1}^{1} \big(1 - |y|\big)\,\varphi\left(\frac{y}{k}\right)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \varphi(0) \int_{-1}^{1} \big(1 - |y|\big)\,\mathrm{d}y = \varphi(0) = \big(\delta, \varphi(x)\big).$$

Odtud $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \delta$.

Obrázek 5.6
Grafy funkcí $f_k(x) = k\,\Theta(1 - k|x|) \cdot (1 - k|x|)$.

5.5.3 Definice

Nechť zobecněná funkce $f_\mu \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ závisí na parametru $\mu \in \mathbf{R}$. Pak řekneme, že zobecněná funkce f_μ konverguje (pro μ jdoucí k μ_0) k zobecněné funkci $g \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a označíme symbolem $\lim_{\mu\to\mu_0} f_\mu = g$, pokud pro všechny testovací funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}$ platí rovnost

$$\lim_{\mu\to\mu_0} \big(f_\mu, \varphi(\vec{x})\big) = \big(g, \varphi(\vec{x})\big).$$

5.5.4 Příklad

Uvažme hustotu pravděpodobnosti normální rozdělení

$$\wp_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{5.19}$$

a zkoumejme v $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ její limitu pro σ jdoucí k nule zprava, tedy

$$\lim_{\sigma\to 0_+} \left(\wp_{\mu,\sigma}, \varphi(x)\right) = \lim_{\sigma\to 0_+} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} y = x-\mu \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{\sigma\to 0_+} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \varphi(y+\mu)\,\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} y = u\,\sigma \\ \mathrm{d}y = \sigma\,\mathrm{d}u \end{array} \right| = \lim_{\sigma\to 0_+} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \varphi(u\,\sigma+\mu)\,\mathrm{d}u.$$

Teprve na tomto místě je možno zaměnit limitu a integrál, neboť existuje integrabilní majoranta k integrandu nezávislá na parametru σ. Díky vlastnostem testovací funkce $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ je zřejmé, že $\varphi(x)$ je omezená, tudíž jistě existuje $\mathtt{K} > 0$ takové, že pro všechna $x \in \mathbf{R}$ platí $|\varphi(x)| < \mathtt{K}$. Onou hledanou majorantou k výše uvedenému integrandu nezávislou na parametru σ je funkce

$$\frac{\mathtt{K}}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}},$$

která je zjevně lebesgueovsky integrabilní. Pak tedy

$$\lim_{\sigma\to 0_+} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \varphi(u\,\sigma+\mu)\,\mathrm{d}u = \frac{\varphi(\mu)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{\varphi(\mu)}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = \varphi(\mu) = \big(\delta(x-\mu), \varphi(x)\big),$$

což jasně demonstruje, že

$$\lim_{\sigma\to 0_+} \wp_{\mu,\sigma}(x) \stackrel{\mathscr{D}'}{=} \delta(x-\mu).$$

Hustota pravděpodobnosti normální rozdělení, je-li chápána jako zobecněná funkce, konverguje se zmenšující se směrodatnou odchylkou σ k centrované $\delta-$funkci. Takto lze demonstrovat singulární chování zobecněné funkce $\delta(x-\mu)$, jak je vyobrazeno na následujícím obrázku.

Obrázek 5.7

Konvergence hustoty pravděpodobnosti normální rozdělení k jednorozměrné centrované $\delta-$funkci.

5.5.5 Věta

Podprostor všech regulárních distribucí $\mathscr{D}'_{\mathrm{reg}}(\mathbf{E}^r)$ není úplný.

Důkaz:

- podle příkladu 5.5.4 existuje posloupnost regulárních distribucí, která má limitu vně třídy $\mathscr{D}'_{\mathrm{reg}}(\mathbf{E}^r)$
- tedy limitou regulárních distribucí může za jistých okolností být i distribuce singulární

5.5.6 Věta

Nechť posloupnost zobecněných funkcí $(f_k)_{k=1}^{\infty}$, kde $f_k \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$, konverguje ve třídě distribucí $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ k zobecněné funkci $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$. Nechť $\alpha \in \mathbf{N}_0^r$. Pak $\lim_{k\to\infty} \mathcal{D}^\alpha f_k = \mathcal{D}^\alpha f$.

Důkaz:

- pro všechny testovací funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ platí série rovností

$$\Big(\lim_{k\to\infty} \mathcal{D}^\alpha f_k, \varphi(\vec{x})\Big) \stackrel{❶}{=} \lim_{k\to\infty} \big(\mathcal{D}^\alpha f_k, \varphi(\vec{x})\big) \stackrel{❷}{=} \lim_{k\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \big(f_k, \mathcal{D}^\alpha \varphi(\vec{x})\big) \stackrel{❸}{=} (-1)^{|\alpha|} \big(f, \mathcal{D}^\alpha \varphi(\vec{x})\big) \stackrel{❹}{=} \big(\mathcal{D}^\alpha f, \varphi(\vec{x})\big),$$

  kde bylo postupně využito ❶ definice limity v $\mathscr{D}'$, ❷ definice derivace v $\mathscr{D}'$, ❸ předpokladu dokazovaného tvrzení, tj. definice 5.5.1, a ❹ znovu definice derivace v $\mathscr{D}'$
- to kompletuje důkaz

5.5.7 Příklad

V prostoru zobecněných funkcí vypočtěme limitu $\lim_{n\to\infty}\cos(nx)$. Užijeme s výhodou tvrzení předešlé věty. Jelikož

$$\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}x}\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)=\cos(nx),$$

postačí prokázat, že v $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ platí rovnost

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=0. \tag{5.20}$$

Snadno

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(nx)}{n},\varphi(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(nx)}{n},\varphi(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}}\frac{\sin(nx)}{n}\varphi(x)\,\mathtt{d}x=\left|\begin{array}{c}y=nx\\ \mathtt{d}y=n\mathtt{d}x\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}}\frac{\sin(y)}{n^2}\varphi\left(\frac{y}{n}\right)\,\mathtt{d}x=\int_{\mathbf{R}}0\,\mathtt{d}x=0.$$

Tedy $\lim_{n\to\infty}\cos(nx)=0$ v $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$, a to i přesto, že klasická limita $\lim_{n\to\infty}\cos(nx)$ pro skoro všechna $x\in\mathbf{R}$ neexistuje.

5.5.8 Věta

Nechť zobecněná funkce $f_\mu\in\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ konverguje (pro μ jdoucí k μ_0) k zobecněné funkci $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$. Nechť $\alpha\in\mathbf{N}_0^r$. Pak $\lim_{\mu\to\mu_0}\mathcal{D}^\alpha f_\mu=\mathcal{D}^\alpha f$.

Důkaz:

- pro všechny testovací funkce $\varphi(\vec{x})\in\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ platí série rovností

  $$\big(\lim_{\mu\to\mu_0}\mathcal{D}^\alpha f_\mu,\varphi(\vec{x})\big)\overset{❶}{=}\lim_{\mu\to\mu_0}\big(\mathcal{D}^\alpha f_\mu,\varphi(\vec{x})\big)\overset{❷}{=}\lim_{\mu\to\mu_0}(-1)^{|\alpha|}\big(f_\mu,\mathcal{D}^\alpha\varphi(\vec{x})\big)\overset{❸}{=}(-1)^{|\alpha|}\big(f,\mathcal{D}^\alpha\varphi(\vec{x})\big)\overset{❹}{=}\big(\mathcal{D}^\alpha f,\varphi(\vec{x})\big),$$

  kde bylo postupně využito ❶ definice limity v $\mathscr{D}'$, ❷ definice derivace v $\mathscr{D}'$, ❸ předpokladu dokazovaného tvrzení, tj. definice 5.5.3, a ❹ znovu definice derivace v $\mathscr{D}'$
- to kompletuje důkaz

5.5.9 Příklad

Dvojrozměrnou představu o singularitě Diracovy $\delta-$funkce získáme z následujíciího výpočtu. Ve třídě zobecněných funkcí $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^2)$ se pokusme nalézt limitu

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^2\,\mathsf{e}^{-\lambda^2(x^2+y^2)}.$$

Vyjdeme z výchozího funkcionálu

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\lambda^2\,\mathsf{e}^{-\lambda^2(x^2+y^2)},\varphi(x,y)\right)=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}\lambda^2\,\mathsf{e}^{-\lambda^2(x^2+y^2)}\,\varphi(x,y)\,\mathtt{d}x\mathtt{d}y=$$

$$=\left|\begin{array}{c}u=\lambda x,\quad v=\lambda y\\ \mathtt{d}u\mathtt{d}v=|\mathtt{D}|\,\mathtt{d}x\mathtt{d}y=\lambda^2\mathtt{d}x\mathtt{d}y\end{array}\right|=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}\mathsf{e}^{-(u^2+v^2)}\,\varphi\left(\frac{u}{\lambda},\frac{v}{\lambda}\right)\,\mathtt{d}u\mathtt{d}v.$$

Zde je možno zaměnit limitu a integrál, neboť opět existuje integrabilní majoranta k integrandu, a sice

$$\mathsf{e}^{-(u^2+v^2)}\max_{(u,v)\in\mathbf{R}^2}\left|\varphi\left(\frac{u}{\lambda},\frac{v}{\lambda}\right)\right|=\mathtt{K}\cdot\mathsf{e}^{-(u^2+v^2)},$$

která je nezávislá na parametru λ. Pak tedy

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}\mathsf{e}^{-(u^2+v^2)}\,\varphi\left(\frac{u}{\lambda},\frac{v}{\lambda}\right)\,\mathtt{d}u\mathtt{d}v=\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}\mathsf{e}^{-(u^2+v^2)}\,\varphi(0,0)\,\mathtt{d}u\mathtt{d}v=$$

$$=\varphi(0,0)\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}\mathsf{e}^{-(u^2+v^2)}\,\mathtt{d}u\mathtt{d}v=\varphi(0,0)\left(\int_{\mathbf{R}}\mathsf{e}^{-u^2}\,\mathtt{d}u\right)^2=\pi\varphi(0,0)=$$

$$= \pi\big(\delta(x,y), \varphi(x,y)\big) = \big(\pi\delta(x,y), \varphi(x,y)\big).$$

Uzavíráme, že

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2}{\pi}\, \mathsf{e}^{-\lambda^2(x^2+y^2)} = \delta(x,y).$$

Tato rovnost skýtá možnost vytvoření náhledu na singularitu dvojrozměrné $\delta-$funkce (viz obrázek níže).

Obrázek 5.8
Konvergence gaussovských funkcí ke dvojrozměrné $\delta-$funkci.

5.5.10 Příklad

Na závěr této sekce prozkoumáme další ze zajímavých dvojrozměrných limit. Uvažme funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2(x^2+y^2)}\, \sin\left(\frac{x^2}{\varepsilon^2} + \frac{y^2}{\varepsilon^2}\right)^{1/2} & (x,y) \neq \vec{0} \\ 0 & (x,y) = \vec{0}. \end{cases}$$

Ačkoliv tato funkce není na $\mathbf{E}^2$ omezená, má (jak se lze snadno přesvědčit - viz také obrázek níže) konečný integrál

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\, \mathtt{d}x\mathtt{d}y = 1.$$

Navíc však pro $\varepsilon \to 0_+$ konverguje tato funkce ke dvojrozměrné $\delta-$funkci, neboť

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \left(\frac{1}{\pi^2(x^2+y^2)}\, \sin\left(\frac{x^2}{\varepsilon^2} + \frac{y^2}{\varepsilon^2}\right)^{1/2}, \varphi(x,y) \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\pi^2(x^2+y^2)}\, \sin\left(\frac{x^2}{\varepsilon^2} + \frac{y^2}{\varepsilon^2}\right)^{1/2} \varphi(x,y)\, \mathtt{d}x\mathtt{d}y = \left| \begin{array}{c} x = \varepsilon\,\xi \\ y = \varepsilon\,\eta \\ \mathtt{d}x\mathtt{d}y = \varepsilon^2 \mathtt{d}\xi\mathtt{d}\eta \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\pi^2(\xi^2+\eta^2)}\, \sin\left(\xi^2 + \eta^2\right)^{1/2} \varphi(\varepsilon\,\xi, \varepsilon\,\eta)\, \mathtt{d}\xi\mathtt{d}\eta = \left| \begin{array}{c} \xi = \varrho\, \cos(\psi) \\ \eta = \varrho\, \sin(\psi) \\ \mathtt{d}\xi\mathtt{d}\eta = \varrho\, \mathtt{d}\varrho\mathtt{d}\psi \end{array} \right| =$$

$$= \varphi(0,0) \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi^2 \varrho}\, \sin(\varrho)\, \mathtt{d}\varrho\mathtt{d}\varphi = \varphi(0,0) \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\varrho)}{\varrho}\, \mathtt{d}\varrho = \varphi(0,0) \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} =$$

$$= \varphi(0,0) = (\delta(x,y), \varphi(x,y))\,.$$

Z prezentovaného výpočtu tedy vychází rovnost

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{1}{\pi^2(x^2+y^2)}\, \sin\left(\frac{x^2}{\varepsilon^2} + \frac{y^2}{\varepsilon^2}\right)^{1/2} = \delta(x,y).$$

Obrázek 5.9
Graf funkce $f(x,y)$ pro $\varepsilon = 0.2$.

5.5.11 Věta

Parametrická třída Cimrmanových buřinek $\omega_\varepsilon(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ konverguje ve třídě $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ pro poloměr ε jdoucí k nule zprava k Diracově $\delta-$funkci.

Důkaz:

- chceme-li prokázat, že $\lim_{\varepsilon\to 0_+} \omega_\varepsilon(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$, postačí ukázat, že je pro libovolnou testovací funkci $\varphi(\vec{x})$ naplněna rovnost
$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{\mathbf{E}^r} \omega_\varepsilon(\vec{x})\,\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \varphi(\vec{0})$$
- jelikož je Cimrmanova buřinka $\omega_\varepsilon(\vec{x})$ spojitou funkcí na $\mathbf{R}$, existuje pro všechna $\eta > 0$ číslo $\delta > 0$ tak, že pro $\|x\| < \delta$ platí: $|\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{0})| < \eta$
- odtud pro všechna $\varepsilon < \eta$ platí
$$\left|\int_{\mathbf{E}^r} \omega_\varepsilon(\vec{x})\,\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} - \varphi(\vec{0})\right| = \left|\int_{\mathbf{E}^r} \omega_\varepsilon(\vec{x})\,\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} - \varphi(\vec{0})\int_{\mathbf{E}^r} \omega_\varepsilon(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}\right| =$$
$$= \int_{\mathbf{E}^r} \omega_\varepsilon(\vec{x})\left|\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{0})\right|\mathrm{d}\vec{x} < \eta\int_{\mathbf{E}^r} \omega_\varepsilon(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \eta \tag{5.21}$$
- tím je dokázáno, že
$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} \omega_\varepsilon(\vec{x}) = \delta(\vec{x}) \tag{5.22}$$

5.6 Tenzorový součin ve třídě zobecněných funkcí

Nyní budeme ve třídě zobecněných funkcí definovat důležitou operaci zvanou tenzorový součin. K jejímu zavední je ale nezbytné vyslovit následující tvrzení.

5.6.1 Věta

Nechť $\varphi(\vec{x},\vec{y}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^{r+s})$ a $f(\vec{x}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$. Potom funkce definovaná předpisem
$$\psi(\vec{y}) := \big(f(\vec{x}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big) \tag{5.23}$$
je testovací funkcí v $\mathbf{E}^s$ a navíc pro každý multiindex $\alpha \in \mathbf{N}_0^s$ platí rovnost
$$\mathcal{D}^\alpha_{\vec{y}}\psi(\vec{y}) = \Big(f(\vec{x}), \mathcal{D}^\alpha_{\vec{y}}\varphi(\vec{x},\vec{y})\Big).$$

Důkaz:

- pro každé pevně zvolené $\vec{y} \in \mathbf{E}^s$ je funkce $\big(f(\vec{x}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)$ definována na celém $\mathbf{E}^s$
- dokažme tedy její spojitost
- vezměme pevně zvolené $\vec{y} \in \mathbf{E}^s$ a posloupnost $\vec{y}_k$, která konverguje k $\vec{y}$
- pak $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(\vec{x},\vec{y}) = \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)$ všude v $\mathbf{E}^s$
- protože jsou nosiče všech funkcí $\varphi_k(\vec{x},\vec{y})$ stejně omezené v $\mathbf{E}^s$, konverguje pro každý multiindex α posloupnost $\mathcal{D}^\alpha_{\vec{x}}\varphi_k(\vec{x},\vec{y})$ na $\mathbf{E}^s$ superstejnoměrně k funkci $\mathcal{D}^\alpha_{\vec{x}}\varphi(\vec{x},\vec{y})$, tj.
$$\mathcal{D}^\alpha_{\vec{x}}\varphi_k(\vec{x},\vec{y}) \rightrightarrows \mathcal{D}^\alpha_{\vec{x}}\varphi(\vec{x},\vec{y})$$
- ze spojitosti funcionálu $f(\vec{x})$ pak vyplývá, že posloupnost $\big(f(\vec{x}), \varphi_k(\vec{x},\vec{y})\big)$ konverguje k funkci
$$\big(f(\vec{x}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big) =: \psi(\vec{y})$$
- najděme nyní parciální derivaci funkce $\psi(\vec{y})$ podle proměnné y_i $(i \in \widehat{s})$
- nechť $\vec{h} = (0,0,\ldots,0,h,0,\ldots,0) \in \mathbf{R}^s$ je libovolný vektor mající nenulovou pouze $i-$tou složku

- uvažme posloupnost funkcí
$$\eta_h^{(i)}(\vec{x}) = \frac{\varphi(\vec{x}, \vec{y} + \vec{h}) - \varphi(\vec{x}, \vec{y})}{h}$$

- protože jsou nosiče všech funkcí $\eta_h^{(i)}(\vec{x})$ omezeny v $\mathbf{E}^r$ nezávisle na h a pro každý multiindex α konverguje funkce $\mathcal{D}^\alpha \eta_h^{(i)}(\vec{x})$ stejnoměrně k funkci
$$\mathcal{D}^\alpha \left(\frac{\partial \varphi(\vec{x}, \vec{y})}{\partial y_i} \right),$$
konverguje funkce $\eta_h^{(i)}(\vec{x})$ pro $h \to 0$ k funkci $\frac{\partial \varphi(\vec{x}, \vec{y})}{\partial y_i}$

- ze spojitosti funkcionálu $f(\vec{x})$ pak plyne, že
$$\frac{\partial \psi(\vec{y})}{\partial y_i} = \left(f(\vec{x}), \frac{\partial \varphi(\vec{x}, \vec{y})}{\partial y_i} \right)$$

- opakovanou aplikací předešlých úvah lze prokázat, že také
$$\mathcal{D}_{\vec{y}}^\alpha \psi(\vec{y}) = \Big(f(\vec{x}), \mathcal{D}_{\vec{y}}^\alpha \varphi(\vec{x}, \vec{y}) \Big)$$
pro libovolný multiindex α

- protože má testovací funkce $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ omezený nosič, existuje takové $\mathtt{R} > 0$, že pro každé $\|\vec{y}\| > \mathtt{R}$ je $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = 0$

- z toho ale plyne, že pro každé $\|\vec{y}\| > \mathtt{R}$ je $\psi(\vec{y}) := \big(f(\vec{x}), \varphi(\vec{x}, \vec{y}) \big) = 0$

- odtud: $\psi(\vec{y}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^s)$

- zbývá dokázat, že zobrazení které testovací funkci $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ přiřazuje testovací funkci $\psi(\vec{y})$ podle předpisu (5.23) je spojité

- nechť $\varphi_k(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^{r+s})$ je posloupnost, která v $\mathscr{D}(\mathbf{E}^{r+s})$ superstejnoměrně konverguje k nulové funkci

- protože jsou nosiče funkcí $\varphi_k(\vec{x}, \vec{y})$ stejně omezené, jsou stejně omezené také nosiče funkcí $\psi_k(\vec{y})$

- pro kompletaci důkazu je nyní ještě třeba dokázat, že pro každý multiindex α konverguje posloupnost $\mathcal{D}_{\vec{y}}^\alpha \psi_k(\vec{y})$ stejnoměrně k nulové funkci

- předpokládejme pro spor, že toto neplatí

- existuje proto $\varepsilon > 0$, multiindex β a posloupnost bodů $\vec{y}_k$ taková, že $\left| \mathcal{D}^\beta \psi_k(\vec{y}_k) \right| \geqslant \varepsilon$

- protože jsou nosiče všech funkcí $\psi_k(\vec{y})$ stejně omezené, existuje podposloupnost bodů $\vec{y}_{k_i}$, která konverguje v $\mathbf{E}^s$, tj. $\lim_{i \to \infty} \vec{y}_{k_i} = \vec{y}_0$

- podle předpokladů ale
$$\lim_{i \to \infty} \mathcal{D}_{\vec{y}}^\beta \varphi_{k_i}(\vec{x}, \vec{y}_{k_i}) = 0$$

- ze spojitosti funkcionálu $f(\vec{x})$ pak plyne, že platí
$$\lim_{i \to \infty} \mathcal{D}_{\vec{y}}^\beta \psi_{k_i}(\vec{y}_{k_i}) = \lim_{i \to \infty} \Big(f(\vec{x}), \mathcal{D}_{\vec{y}}^\beta \varphi_{k_i}(\vec{x}, \vec{y}_{k_i}) \Big) = 0,$$
což je spor s předpokladem, že $\left| \mathcal{D}^\beta \psi_k(\vec{y}_k) \right| \geqslant \varepsilon$

5.6.2 Příklad

Uvažme testovací funkci $\omega_\varepsilon(x, y)$, tj. dvojrozměrnou Cimrmanovu buřinku z definice 5.2, a aplikujme na ni $\delta-$funkci $\delta(\vec{x})$. Pak
$$\psi(\vec{y}) = \big(\delta(\vec{x}), \omega_\varepsilon(\vec{x}, \vec{y}) \big) = \omega_\varepsilon(0, y) = \omega_\varepsilon(y).$$
Jedná se tedy opět o testovací funkci, konkrétně o jednorozměrnou Cimrmanovu buřinku.

5.6.3 Definice

Nechť jsou dány zobecněné funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a $g(\vec{y}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^s)$. Pak definujeme *tenzorový součin distribucí* $f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^{r+s})$ vztahem

$$\big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big) = \Big(f(\vec{x}), \big(g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big).$$

5.6.4 Příklad

V tomto příkladě se pokusíme demonstrovat, co představuje tenzorový součin pro regulární distribuce. Vezměme tedy dvě regulární zobecněné funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a $g(\vec{y}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^s)$ a užijme definici 5.6.3. Pak tedy

$$\Big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\Big) = \Big(f(\vec{x}), \big(g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big) = \left(f(\vec{x}), \int_{\mathbf{E}^s} g(\vec{y})\,\varphi(\vec{x},\vec{y})\,\mathtt{d}\vec{y}\right) =$$

$$= \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x}) \int_{\mathbf{E}^s} g(\vec{y})\,\varphi(\vec{x},\vec{y})\,\mathtt{d}\vec{y}\mathtt{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r}\int_{\mathbf{E}^s} f(\vec{x})\,g(\vec{y})\,\varphi(\vec{x},\vec{y})\,\mathtt{d}\vec{y}\mathtt{d}\vec{x}.$$

Tenzorový součin pro regulární distribuce tedy představuje obyčejné bilineární násobení $f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}) = f(\vec{x})\,g(\vec{y})$.

5.6.5 Věta

Tenzorový součin je bilineární zobrazení $\otimes : \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r) \times \mathscr{D}'(\mathbf{E}^s) \mapsto \mathscr{D}'(\mathbf{E}^{r+s})$.

Důkaz:

- snadno

$$\big(f(\vec{x}) + c\,h(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big) = \Big(f(\vec{x}) + c\,h(\vec{x}), \big(g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big) = \Big(f(\vec{x}), \big(g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big) +$$
$$+ c\Big(h(\vec{x}), \big(g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big) = \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big) + c\big(h(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)$$

- analogicky

$$\big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}) + c\,h(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big) = \Big(f(\vec{x}), \big(g(\vec{y}) + c\,h(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big) = \Big(f(\vec{x}), \big(g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big) + c\big(h(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big) =$$
$$\Big(f(\vec{x}), \big(g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big) + c\Big(f(\vec{x}), \big(h(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big) = \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big) + c\big(f(\vec{x}) \otimes h(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)$$

5.6.6 Věta

Funkce tvaru

$$\omega(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\vec{x})\psi_k(\vec{y})$$

vytvořené pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechny funkce $\varphi_k(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ a $\psi_k(\vec{y}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^s)$ tvoří podprostor v prostoru $\mathscr{D}(\mathbf{E}^{r+s})$, který je navíc hustý v $\mathscr{D}(\mathbf{E}^{r+s})$.

Důkaz:

- viz [19], str. 61, tvrzení 5.1.3

5.6.7 Věta

Tenzorový součin zobecněných funkcí je komutativní zobrazení.

Důkaz:

- uvažujme distribuce $f(\vec{x}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a $g(\vec{y}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^s)$
- vzhledem k platnosti věty 5.6.6 postačí prokázat komutativitu pro testovací funkce tvaru $\omega(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\vec{x})\psi_k(\vec{y})$

- díky linearitě dokonce postačí tvrzení dokázat pro testovací funkce tvaru $\omega(\vec{x},\vec{y}) = \varphi(\vec{x})\psi(\vec{y})$, kde $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ a $\psi(\vec{y}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^s)$
- odtud

$$\Big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \omega(\vec{x},\vec{y})\Big) = \Big(f(\vec{x}), \big(g(\vec{y}), \varphi(\vec{x})\psi(\vec{y})\big)\Big) = \Big(f(\vec{x}), \varphi(\vec{x})\big(g(\vec{y}), \psi(\vec{y})\big)\Big) =$$
$$= \Big(f(\vec{x}), \varphi(\vec{x})\Big)\Big(g(\vec{y}), \psi(\vec{y})\Big) = \Big(g(\vec{y}), \psi(\vec{y})\big(f(\vec{x}), \varphi(\vec{x})\big)\Big) = \Big(g(\vec{y}), \big(f(\vec{x}), \varphi(\vec{x})\psi(\vec{y})\big)\Big) =$$
$$= \Big(g(\vec{y}) \otimes f(\vec{x}), \omega(\vec{x},\vec{y})\Big)$$

5.6.8 Lemma

Tenzorový součin zobecněných funkcí je asociativní zobrazení.

5.6.9 Věta

Tenzorový součin zobecněných funkcí je spojitý v obou argumentech.

Důkaz:

- vzhledem ke komutativitě tenzorového součinu postačí tvrzení dokázat pouze pro první argument
- nechť tedy $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost zobecněných funkcí, která v $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ konverguje k distribuci f
- pro každou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ tedy platí $\lim_{k\to\infty}\big(f_k, \varphi(\vec{x})\big) = \big(f, \varphi(\vec{x})\big)$
- protože podle věty 5.6.1 je pro každou zobecněnou funkci $g(\vec{y}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^s)$ a každou testovací funkci $\varphi(\vec{x},\vec{y}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^{r+s})$ funkce $\psi(\vec{x}) := \big(g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)$ také testovací (v $\mathbf{E}^r$), platí odsud

$$\lim_{k\to\infty}\Big(f_k(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\Big) = \lim_{k\to\infty}\Big(f_k(\vec{x}), \big(g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big) = \Big(f(\vec{x}), \big(g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big) = \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)$$

- proto je tenzorový součin zobecněných funkcí spojitý, čili

$$\lim_{k\to\infty} f_k(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}) = f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}),$$

  kde $\lim_{k\to\infty} f_k = f$
- analogicky také

$$\lim_{k\to\infty} f(\vec{x}) \otimes g_k(\vec{y}) = f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}),$$

  kde $\lim_{k\to\infty} g_k = g$ v $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$

5.6.10 Věta

Pro všechny multiindexy $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_0^n$ a každé $f(\vec{x}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a $g(\vec{y}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^s)$ platí

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{x}}\big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y})\big) = \mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{x}} f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}).$$
$$\mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{y}}\big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y})\big) = f(\vec{x}) \otimes \mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{y}} g(\vec{y}).$$

Důkaz:

- vzhledem ke komutativitě tenzorového součinu postačí tvrzení dokázat pouze pro jeden z argumentů
- nechť $\varphi(\vec{x},\vec{y}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^{r+s})$ je libovolná testovací funkce, pak

$$\Big(\mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{y}}\big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y})\big), \varphi(\vec{x},\vec{y})\Big) \overset{❶}{=} (-1)^{|\alpha|}\Big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{y}}\varphi(\vec{x},\vec{y})\Big) \overset{❷}{=} (-1)^{|\alpha|}\Big(f(\vec{x}), \big(g(\vec{y}), \mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{y}}\varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big) \overset{❸}{=}$$
$$\overset{❸}{=} (-1)^{2|\alpha|}\Big(f(\vec{x}), \big(\mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{y}} g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big) \overset{❹}{=} \Big(f(\vec{x}) \otimes \mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{y}} g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\Big)$$

  kde bylo užito definice derivace distribucí ❶, definice tenzorového součinu ❷, opět derivace distribucí ❸ a znovu definice tenzorového součinu ❹

5.6.11 Věta

Pro každé dvě funkce $a(\vec{x}) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$, $b(\vec{y}) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^s)$ a každé $f(\vec{x}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a $g(\vec{y}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^s)$ platí

$$a(\vec{x})\big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y})\big) = \big(a(\vec{x})f(\vec{x})\big) \otimes g(\vec{y}),$$

$$b(\vec{y})\big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y})\big) = \big(f(\vec{x})\big) \otimes b(\vec{y})g(\vec{y}).$$

Důkaz:

- opět postačí (vzhledem ke komutativitě tenzorového součinu) dokázat tvrzení pouze pro jeden z argumentů
- nechť tedy $\varphi(\vec{x},\vec{y}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^{r+s})$ je libovolná testovací funkce, pak

$$\Big(b(\vec{y})\big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y})\big), \varphi(\vec{x},\vec{y})\Big) \overset{❶}{=} \Big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), b(\vec{y})\varphi(\vec{x},\vec{y})\Big) \overset{❷}{=} \Big(f(\vec{x}), \big(g(\vec{y}), b(\vec{y})\varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big) \overset{❸}{=}$$
$$\overset{❸}{=} \Big(f(\vec{x}), \big(b(\vec{y})g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big) \overset{❹}{=} \Big(f(\vec{x}) \otimes b(\vec{y})g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\Big)$$

  kde bylo užito definice násobení distribuce regulární distribucí s hladkým generátorem ❶, definice tenzorového součinu ❷, opět násobení distribucí ❸ a znovu definice tenzorového součinu ❹

5.6.12 Lemma

Pro každé $\vec{\mu} \in \mathbf{E}^r$, $\vec{\nu} \in \mathbf{E}^s$ a každé $f(\vec{x}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a $g(\vec{y}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^s)$ platí

$$f(\vec{x}+\vec{\mu}) \otimes g(\vec{y}) = \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y})\big)(\vec{x}+\vec{\mu},\vec{y}),$$

$$f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}+\vec{\nu}) = \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y})\big)(\vec{x},\vec{y}+\vec{\nu}).$$

5.6.13 Definice

Řekneme, že zobecněná funkce $f(\vec{x},\vec{y}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^{r+s})$ *nezávisí na proměnné* $\vec{y}$, existuje-li zobecněná funkce $g(\vec{x}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ tak, že $f(\vec{x},\vec{y}) = g(\vec{x}) \otimes 1$.

5.6.14 Poznámka

Jestliže zobecněná funkce $f(\vec{x},\vec{y})$ nezávisí na proměnné $\vec{y}$, pak pro každou testovací funkci $\varphi(\vec{x},\vec{y}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^{r+s})$ platí

$$\big(f(\vec{x},\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big) = \left(g(\vec{x}), \int_{\mathbf{E}^s} \varphi(\vec{x},\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y}\right) = \int_{\mathbf{E}^s} \big(g(\vec{x}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\,\mathrm{d}\vec{y}.$$

5.6.15 Příklad

Zkoumejme nyní tenzorový součin $\delta(\vec{x}) \otimes \delta(\vec{y})$ v prostoru $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^{r+s})$. Podle definice pak pro tento tenzorový součin dostáváme, že pro libovolnou testovací funkci $\varphi(\vec{x},\vec{y}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^{r+s})$ platí

$$\big(\delta(\vec{x}) \otimes \delta(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big) = \Big(\delta(\vec{x}), \big(\delta(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big) = \big(\delta(\vec{x}), \varphi(\vec{x},\vec{0})\big) = \varphi(\vec{0},\vec{0}) = \big(\delta(\vec{x},\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big),$$

odkud zjišťujeme, že $\delta(\vec{x}) \otimes \delta(\vec{y}) = \delta(\vec{x},\vec{y})$, potažmo

$$\delta(\vec{x}) = \delta(x_1) \otimes \delta(x_2) \otimes \ldots \otimes \delta(x_r).$$

5.7 Konvoluce ve třídě zobecněných funkcí

V dalším textu se pokusíme rozšířit operaci konvoluce z třídy klasických funkcí do třídy $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$. Jak uvidíme později, hraje zobecněná konvoluce zásadní roli při řešení normálních tvarů parciálních diferenciálních rovnic.

5.7.1 Poznámka

Z klasického definičního vztahu (2.5.4) bychom pro regulární distribuce mohli snadno odvodit rovnost

$$(f \star g, \varphi(\vec{x})) = \int_{\mathbf{E}^r} \left(\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{t})\, g(\vec{x}-\vec{t})\, \mathrm{d}\vec{t} \right) \varphi(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^{2n}} f(\vec{t})\, g(\vec{x}-\vec{t})\, \varphi(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{t}\mathrm{d}\vec{x} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \vec{s} = \vec{x} - \vec{t} \\ \mathrm{d}\vec{s} = |\det\left(\frac{\mathcal{D}\vec{s}}{\mathcal{D}\vec{t}}\right)|\, \mathrm{d}\vec{t} \end{array} \right| = \int_{\mathbf{E}^{2n}} f(\vec{t})\, g(\vec{s})\, \varphi(\vec{s}+\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{s}\mathrm{d}\vec{x} = \Big(f(\vec{x}), \big(g(\vec{s}), \varphi(\vec{s}+\vec{x}) \big) \Big) = \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{s}), \varphi(\vec{s}+\vec{x}) \big).$$

Pokud bychom ovšem zamýšleli tento vztah prohlásit za definici zobecněné konvoluce, narazili bychom na zcela zásadní problém, že totiž není obecně zaručena omezenost nosiče funkce $\varphi(\vec{s}+\vec{x})$. Vzniklý problém odstraníme tak, že funkci $\varphi(\vec{s}+\vec{x})$ nahradíme posloupností funkcí $\varphi_k(\vec{s}+\vec{x})$ s kompaktním nosičem, jejíž limitou je právě funkce $\varphi(\vec{s}+\vec{x})$. K tomu vyslovíme následující pomocnou definici.

5.7.2 Definice

Řekneme, že posloupnost funkcí $\eta_k(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$, kde $\eta_k(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$, *konverguje k jedničce* v $\mathbf{E}^r$, jestliže

- pro každou kompaktní množinu $M \subset \mathbf{E}^r$ existuje $k_0 \in \mathbf{N}$ takové, že platí implikace

$$k > k_0 \,\wedge\, \vec{x} \in M \quad \Longrightarrow \quad \eta_k(\vec{x}) = 1$$

- pro každý multiindex α existuje číslo $\mathtt{C}_\alpha \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí $\sup_{\vec{x} \in \mathbf{E}^r} \left| \mathcal{D}^\alpha \eta_k(\vec{x}) \right| < \mathtt{C}_\alpha$.

5.7.3 Příklad

Nechť funkce $\eta(x)$ je vypočtena podle poznámky 5.1.19. Tedy

$$\eta(x) = \int_{\mathbf{R}} \Theta(x+1+2\varepsilon)\Theta(1+2\varepsilon-x)\omega_\varepsilon(x-y)\, \mathrm{d}y$$

Pak posloupnost funkcí

$$\eta_k(x) = \eta\left(\frac{x}{k}\right)$$

konverguje v $\mathbf{R}$ k jedničce.

Obrázek 5.10
Konvergence k jedničce.

5.7.4 Definice

Nechť jsou dány zobecněné funkce $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a posloupnost funkcí $\eta_k(\vec{x},\vec{y}) : \mathbf{E}^{2r} \mapsto \mathbf{R}$, která konverguje v množině $\mathbf{E}^{2r}$ k jedničce. Nechť limita

$$\lim_{k\to\infty} \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{s}), \eta_k(\vec{x},\vec{s})\, \varphi(\vec{s}+\vec{x}) \big)$$

existuje pro každou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ a nechť její hodnota nezávisí na volbě posloupnosti $\eta_k(\vec{x},\vec{y})$. Pak tuto limitu označíme symbolem $\big(f \star g, \varphi(\vec{x})\big)$ a nazveme *konvolucí zobecněných funkcí* $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$.

5.7.5 Poznámka

Důvod pro výše uvedené zavedení konvoluce pro zobecněné funkce není na první pohled zřejmý. Z motivace k zavedení konvoluce je patrné, že vzniká problém s neomezeností nosiče funkce $\psi(\vec{x},\vec{y}) = \varphi(\vec{x}+\vec{y})$. Ale tento problém bychom uměli vyřešit i bez použití limity či posloupnosti konvergující k jedné. Víme totiž, že součinem dvou testovacích funkcí je opět testovací funkce, a tedy i pro libovolnou $\eta(\vec{x},\vec{y}) \in \mathscr{D}$ platí

$$\eta(\vec{x},\vec{y})\varphi(\vec{x}+\vec{y}) \in \mathscr{D},$$

čímž by byl problém neomezenosti nosiče jistě vyřešen. Další problém však zůstává, a sice, jestli takto definovaný objekt, který budeme nazývat konvolucí dvou zobecněných funkcí (viz definice 5.7.4), skutečně definuje novou zobecněnou funkci. Jinými slovy je třeba ukázat, že jde o lineární spojitý funkcionál.

Zdá se tedy, že oprav k napravení neomezenosti nosiče testovací funkce $\varphi(\vec{x}+\vec{y})$ je mnoho. Ve skutečnosti je výše uvedená definice jediná možná. Ukážeme si, proč tomu tak je.

Začneme od konce. Ukážeme, že pro libovolnou testovací funkci $\eta(\vec{x},\vec{y})$ je funkcionál h definovaný jako jeden člen číselné posloupnosti v definici konvoluce, tj.

$$\big(h(\vec{x}),\varphi(\vec{x})\big)=\big(f(\vec{x})\otimes g(\vec{y}),\eta(\vec{x},\vec{y})\varphi(\vec{x}+\vec{y})\big),$$

spojitý. Skutečně, nechť posloupnost $\big(\varphi(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ konverguje superstejnoměrně k nulové funkci v $\mathscr{D}$. Označíme-li si

$$\psi_k(\vec{x},\vec{y})=\eta(\vec{x},\vec{y})\varphi_k(\vec{x}+\vec{y}),$$

tak snadno si uvědomíme, že $\operatorname{supp}(\psi_k)\subset\operatorname{supp}(\eta)$, a tedy funkce $\psi_k(\vec{x})$ má omezený nosič v $\mathbf{E}^{2r}$. Dále použitím Leibnizova pravidla získáme vztahy mezi derivacemi, odkud plyne, že

$$\mathcal{D}^{\alpha}\psi_k(\vec{x},\vec{y})=\mathcal{D}^{\alpha}\big(\eta(\vec{x},\vec{y})\varphi(\vec{x}+\vec{y})\big)\rightrightarrows o(\vec{x}).$$

To však značí, že pokud $\varphi_k(\vec{x})$ konverguje k nulové funkci $o(\vec{x})$ v $\mathscr{D}$, tak i $\psi_k(\vec{x},\vec{y})$ konverguje k $o(\vec{x})$ v $\mathscr{D}$. Odsud už plyne spojitost funkcionálu h, protože platí $\big(h(\vec{x}),\varphi_k(\vec{x})\big)=\big(f(\vec{x})\otimes g(\vec{y}),\eta(\vec{x},\vec{y})\varphi_k(\vec{x}+\vec{y})\big)=\big(f(\vec{x})\otimes g(\vec{y}),\psi_k(\vec{x},\vec{y})\big)\to 0$ ze spojitosti tenzorového součinu. Odsud ale také plyne spojitost právě definovaného lineárního funkcionálu (tyto dvě vlastnosti si čtenář doplní snadno sám) $f\star g$. V definici totiž vystupuje limita z právě zmíněných funkcionálů typu $h(\vec{x})$, protože $\eta_k(\vec{x})\in\mathscr{D}$ pro každé k z definice posloupnosti konvergující k jedné. Konvoluce $f\star g$ je definována jako limita ze spojitých lineárních funkcionálů h_k, kde $\big(h_k(\vec{x}),\varphi(\vec{x})\big)=\big(f(\vec{x})\otimes g(\vec{y}),\eta_k(\vec{x},\vec{y})\varphi(\vec{x}+\vec{y})\big)$ a z úplnosti prostoru $\mathscr{D}'$ plyne, že i konvoluce je spojitý funkcionál. Konvoluce zobecněných funkcí je tedy správně definovaný pojem, tzn. že pokud existuje, pak definuje novou zobecněnou funkci.

Je však také patrné, že i zavedení konvoluce takto

$$\big((f\star g)(\vec{x}),\varphi(\vec{x})\big)=\big(f(\vec{x})\otimes g(\vec{y}),\eta(\vec{x},\vec{y})\varphi(\vec{x}+\vec{y})\big),\tag{5.24}$$

kde $\eta(\vec{x},\vec{y})$ je libovolná testovací fce, by byla správně definovaná, jelikož se též jedná o spojitý funkcionál (je to přesně onen výše zmíněný funkcionál h). Proč tedy pro konvoluci volíme poměrně složitou definici 5.7.4? Definice konvoluce (5.24) bez limity má totiž v definici na pravé straně rovnosti použitou jistou funkci $\eta(\vec{x},\vec{y})\in\mathscr{D}$, která se však na levé straně definice vůbec nevyskytuje. Měli bychom tedy definici konvoluce závislou na této funkci $\eta(\vec{x},\vec{y})$, ať by to byla třeba vyhlazená charakteristická funkce libovolně velké kompaktní množiny. Jistě bychom totiž našli nějakou funkci z $\mathscr{D}$, která by nesplňovala $\varphi(\vec{x},\vec{y})=\varphi(\vec{x},\vec{y})\eta(\vec{x},\vec{y})$. Tedy měli bychom nejednoznačně definovaný pojem konvoluce.

Ještě by zde byla možnost definovat konvoluci pomocí jedné konkrétní vybrané testovací funkce $\eta(\vec{x},\vec{y})\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^{2n})$. V tom případě by již nebyl problém s nejednoznačností definice ani se závislostí na konkrétní volbě $\eta(\vec{x},\vec{y})\in\mathscr{D}$. Zde však stačí pouze rozvinout myšlenku z posledního odstavce a zjistíme, že by se nejednalo ani v tomto případě o rozumnou definici. Totiž pak by poslední objekt v definici konvoluce

$$\big((f\star g)(\vec{x}),\varphi(\vec{x})\big)=\big(f(\vec{x})\otimes g(\vec{y}),\eta(\vec{x},\vec{y})\varphi(\vec{x}+\vec{y})\big)$$

nebyl pro všechny $\varphi(\vec{x})\in\mathscr{D}$ dobře definovaný. Kdybychom zvolili $\varphi(\vec{x})\in\mathscr{D}$ takovou, že by její nosič nebyl podmnožinou pevně zvolené funkce $\eta(\vec{x},0)$, tak by přestalo platit spoustu obecných vztahů mezi zobecněnými funkcemi (nutně by tam vystupovala nějaká zavislost na zvolené funkci $\eta(\vec{x},\vec{y})$). Například

$$\big(\delta\star f,\varphi\big)=\big(f(\vec{x})\otimes\delta(\vec{y}),\eta(\vec{x},\vec{y})\varphi(\vec{x}+\vec{y})\big)=\big(f(\vec{x}),\eta(\vec{x},0)\varphi(\vec{x})\big)\neq\big(f(\vec{x}),\varphi(\vec{x})\big).$$

Z tohoto příkladu je i patrné, že je nutné funkce s neomezeným nosičem $\varphi(\vec{x}+\vec{y})$ opravovat jen funkcemi, které mají v podstatě všude svou funkční hodnotu rovnou jedné. Jinak bychom došli ke stejným problémům jako ve výše zmíněném příkladě. Aby ale šlo o opravu, musí se jednat o testovací funkce z $\mathscr{D}(\mathbf{E}^{2r})$. Jednotková funkce však v $\mathscr{D}$ neleží. Proto si musíme vypomoci posloupností, která konverguje k jednotkové funkci a je z $\mathscr{D}$, a poté zavést operaci konvoluce pomocí limity z funkcionálních hodnot, o které víme, že bude definovat spojitý funkcionál z $\mathscr{D}'$. Tedy přesně tak, jak je to uvedeno v prezentované definici konvoluce 5.7.4.

5.7.6 Věta

Konvoluce je bilineární zobrazení.

Důkaz:

- jedná se o přímý důsledek bilinearity tenzorového součinu

5.7.7 Věta

Konvoluce zobecněných funkcí je komutativní zobrazení.

Důkaz:

- jedná se o přímý důsledek komutativity tenzorového součinu
- snadno totiž

$$\big(f \star g, \varphi(\vec{x})\big) = \lim_{k\to\infty} \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{s}), \eta_k(\vec{x},\vec{s})\, \varphi(\vec{s}+\vec{x})\big) = \lim_{k\to\infty} \big(g(\vec{s}) \otimes f(\vec{x}), \eta_k(\vec{x},\vec{s})\, \varphi(\vec{s}+\vec{x})\big) = \big(g \star f, \varphi(\vec{x})\big)$$

5.7.8 Věta

Nechť f, g jsou regulární zobecněné funkce generované funkcemi $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathbb{L}_1(\mathbf{E}^r)$. Pak $f \star g \in \mathscr{D}'_{\mathrm{reg}}$ a jejím generátorem je funkce $f(\vec{x}) \star g(\vec{x})$.

Důkaz:

- funkce $f(\vec{x}), g(\vec{x})$ jsou zjevně lokálně integrovatelné
- pak ale

$$\big(f \star g, \varphi(\vec{x})\big) = \lim_{k\to\infty} \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \eta_k(\vec{x},\vec{y})\, \varphi(\vec{x}+\vec{y})\big) = \lim_{k\to\infty} \left(f(\vec{x}), \int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{y})\, \eta_k(\vec{x},\vec{y})\, \varphi(\vec{x}+\vec{y})\, \mathrm{d}y\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{E}^r} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\, g(\vec{y})\, \eta_k(\vec{x},\vec{y})\, \varphi(\vec{x}+\vec{y})\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{E}^r} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\, g(\vec{y})\, \varphi(\vec{x}+\vec{y})\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \vec{z} = \vec{x}+\vec{y} \\ \mathrm{d}\vec{z} = \mathrm{d}\vec{y} \end{array} \right| = \int_{\mathbf{E}^r} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\, g(\vec{z}-\vec{x})\, \varphi(\vec{z})\, \mathrm{d}\vec{z}\mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} (f \star g)(\vec{z})\, \varphi(\vec{z})\, \mathrm{d}\vec{z}$$

- to završuje důkaz

5.7.9 Příklad

Nechť $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$. Vypočtěme konvoluci $f \star \delta$. Nechť $\eta_k(\vec{x},\vec{y}) : \mathbf{E}^{2r} \mapsto \mathbf{R}$ je posloupnost funkcí, která konverguje v množině $\mathbf{E}^{2r}$ k jedničce. Vyberme libovolnou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$. Pak

$$\big(f \star \delta, \varphi(\vec{x})\big) = \lim_{k\to\infty} \big(f(\vec{x}) \otimes \delta(\vec{s}), \eta_k(\vec{x},\vec{s})\, \varphi(\vec{s}+\vec{x})\big) = \lim_{k\to\infty} \big(f, (\delta(\vec{s}), \eta_k(\vec{x},\vec{s})\, \varphi(\vec{s}+\vec{x})\big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \big(f, \eta_k(\vec{x},\vec{0})\, \varphi(\vec{x})\big) = \big(f, \varphi(\vec{x})\big).$$

Zde bylo užito faktu, že pro dostatečně velká k platí rovnost $\eta_k(\vec{x},\vec{0})\, \varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x})$. Uzavíráme tedy, že

$$f \star \delta = \delta \star f = f. \tag{5.25}$$

5.7.10 Věta

Nechť jsou dány zobecněné funkce $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$, pro něž existuje konvoluce $f \star g$. Pak pro libovolné $i \in \hat{r}$ platí

$$\frac{\partial (f \star g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \star g. \tag{5.26}$$

Důkaz:

- zvolme libovolnou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$
- nechť $\eta_k(\vec{x},\vec{y}) : \mathbf{E}^{2r} \mapsto \mathbf{R}$ je posloupnost funkcí, která konverguje v množině $\mathbf{E}^{2r}$ k jedničce
- snadno lze nahlédnout, že pak také posloupnost $\eta_k(\vec{x}) + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j}$ konverguje k jedničce

- vyjdeme-li z příslušné definice, obdržíme

$$\left(\frac{\partial(f\star g)}{\partial x_i},\varphi(\vec{x})\right)=-\left(f\star g,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=-\lim_{k\to\infty}\left(f(\vec{x})\otimes g(\vec{s}),\eta_k(\vec{x},\vec{s})\,\frac{\partial\varphi(\vec{s}+\vec{x})}{\partial x_j}\right)=$$

$$-\lim_{k\to\infty}\left(f(\vec{x})\otimes g(\vec{s}),\frac{\partial\big(\eta_k(\vec{x},\vec{s})\,\varphi(\vec{s}+\vec{x})\big)}{\partial x_j}-\frac{\partial\eta_k(\vec{x},\vec{s})}{\partial x_j}\,\varphi(\vec{s}+\vec{x})\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\big(f(\vec{x})\otimes g(\vec{s})\big),\eta_k(\vec{x},\vec{s})\,\varphi(\vec{s}+\vec{x})\right)+$$

$$+\lim_{k\to\infty}\left(f(\vec{x})\otimes g(\vec{s}),\left(\eta_k(\vec{x},\vec{s})+\frac{\partial\eta_k(\vec{x},\vec{s})}{\partial x_j}\right)\varphi(\vec{s}+\vec{x})\right)-\lim_{k\to\infty}\Big(f(\vec{x})\otimes g(\vec{s}),\eta_k(\vec{x},\vec{s})\,\varphi(\vec{s}+\vec{x})\Big)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\otimes g(\vec{s}),\eta_k(\vec{x},\vec{s})\varphi(\vec{s}+\vec{x})\right)+\big(f\star g,\varphi(\vec{x})\big)-\big(f\star g,\varphi(\vec{x})\big)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\star g\,,\,\varphi(\vec{x})\right).$$

5.7.11 Důsledek

Pro každý multiindex $\alpha\in\mathbf{Z}_0^n$ a každé dvě zobecněné funkce $f(\vec{x})\in\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a $g(\vec{y})\in\mathscr{D}'(\mathbf{E}^s)$, pro něž existuje konvoluce $f\star g$, platí

$$\mathcal{D}^\alpha\big(f\star g\big)=\mathcal{D}^\alpha f\star g=f\star\mathcal{D}^\alpha g.$$

5.7.12 Věta

Nechť jsou dány zobecněné funkce $f,g\in\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$, pro něž existuje konvoluce $f\star g$. Pak pro každé $\vec{\mu}\in\mathbf{E}^r$ existují konvoluce $f(\vec{x}+\vec{\mu})\star g$, $f\star g(\vec{x}+\vec{\mu})$ a platí

$$f(\vec{x}+\vec{\mu})\star g=(f\star g)(\vec{x}+\vec{\mu})=f\star g(\vec{x}+\vec{\mu}).$$

<u>*Důkaz:*</u>

- nechť $\eta_k(\vec{x},\vec{y}):\ \mathbf{E}^{2r}\mapsto\mathbf{R}$ je posloupnost, která konverguje na množině $\mathbf{E}^{2r}$ k jedničce
- není zřejmě obtížné nahlédnout, že také posloupnost $\eta_k(\vec{x}-\vec{\mu},\vec{y})$ konverguje na $\mathbf{E}^{2r}$ k jedničce
- z definice konvoluce platí pro libovolnou takovou posloupnost

$$\Big(\big(f\star g\big)(\vec{x}+\vec{\mu}),\varphi(\vec{x})\Big)=\big(f\star g,\varphi(\vec{x}-\vec{\mu})\big)=\lim_{k\to\infty}\big(f(\vec{x})\otimes g(\vec{y}),\eta_k(\vec{x}-\vec{\mu},\vec{y})\,\varphi(\vec{x}+\vec{y}-\vec{\mu})\big)=$$
$$=\lim_{k\to\infty}\big(f(\vec{x}+\vec{\mu})\otimes g(\vec{y}),\eta_k(\vec{x},\vec{y})\,\varphi(\vec{x}+\vec{y})\big)=\big(f(\vec{x}+\vec{\mu})\star g(\vec{x}),\varphi(\vec{x})\big)$$

5.7.13 Poznámka

Konvoluce zobecněných funkcí není obecně komutativní, jak lze nahlédnout z následujícího protipříkladu. Snadno se lze přesvědčit, že

$$\big(\Theta\star\delta'\big)\star 1=\big(\Theta'\star\delta\big)\star 1=\big(\delta\star\delta\big)\star 1=\delta\star 1=1,$$

$$\Theta\star\big(\delta'\star 1\big)=\Theta\star\big(\delta\star 1'\big)=\Theta\star\big(\delta\star 0\big)=\Theta\star 0=0.$$

Asociativnost konvoluce bude ale zaručena v prostoru $\mathscr{D}_+(\mathbf{E}^r)$ distribucí s pozitivním nosičem (viz 5.4.6). Tuto otázku budeme diskutovat v nadcházejících větách.

5.7.14 Věta

Nechť $f, g \in \mathscr{D}'$ a g je finitní. Pak existuje konvoluce $f \star g$ a pro každou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}$ platí

$$\big(f \star g, \varphi(\vec{x})\big) = \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \eta(\vec{y})\varphi(\vec{x}+\vec{y})\big),$$

kde $\eta(\vec{y})$ je libovolná testovací funkce, která je na okolí nosiče $\operatorname{supp}(g)$ rovna jedné.

Důkaz:

- nechť je tedy nosič $\operatorname{supp}(g)$ omezený, tj. $\operatorname{supp}(g) \subset B_{\mathtt{R}}$
- nechť $\eta(\vec{y})$ je libovolná testovací funkce, která je na okolí nosiče $\operatorname{supp}(g)$ rovna jedné, tj. $\operatorname{supp}(\eta) \subset B_{\mathtt{R}}$
- nechť $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$
- pak jistě existuje $\mathtt{A} > 0$ tak, že $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B_{\mathtt{A}}$
- nechť $\eta_k(\vec{x}, \vec{y})$ libovolná posloupnost funkcí, která v $\mathscr{D}(\mathbf{E}^{2r})$ konverguje k jedničče
- pak je funkce $\eta(\vec{y})\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ třídy $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^{2r})$
- a protože její nosič leží uvnitř omezené množiny

  $$\big\{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbf{E}^{2r} : \|\vec{x}+\vec{y}\| \leqslant \mathtt{A} \wedge \|\vec{y}\| < \mathtt{R}\big\} \subset S_{\mathtt{A+R}} \times S_{\mathtt{R}},$$

  platí pro dostatečně velká k rovnost $\eta(\vec{y})\eta_k(\vec{x}, \vec{y})\varphi(\vec{x}+\vec{y}) = \eta(\vec{y})\varphi(\vec{x}+\vec{y})$
- vzhledem k výše uvedenému, platí rovnost $g(\vec{y}) = \eta(\vec{y})\, g(\vec{y})$
- potom ale

$$\big(f \star g, \varphi(\vec{x})\big) = \lim_{k\to\infty} \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \eta_k(\vec{x}, \vec{y})\, \varphi(\vec{x}+\vec{y})\big) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \eta(\vec{y})\eta_k(\vec{x}, \vec{y})\, \varphi(\vec{x}+\vec{y})\big) = \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \eta(\vec{y})\varphi(\vec{x}+\vec{y})\big)$$

5.7.15 Věta

Nechť $f, g \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$. Pak existuje konvoluce $f \star g \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$ a pro každou testovací funkci $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ platí

$$\big(f \star g, \varphi(x)\big) = \big(f(x) \otimes g(y), \eta_1(x)\eta_2(y)\varphi(x+y)\big), \tag{5.27}$$

kde $\eta_1(x)$, resp. $\eta_2(y)$ jsou libovolné funkce třídy $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$, které jsou na okolí intervalu $\langle 0, \infty)$ rovny jedné a existuje pro ně $\mathtt{K} < 0$ tak, že platí implikace

$$x < \mathtt{K} \wedge y < \mathtt{K} \quad \Longrightarrow \quad \eta_1(x) = \eta_2(y) = 0. \tag{5.28}$$

Důkaz:

- nechť $\varphi(x)$ je libovolná testovací funkce, pro jejíž nosič platí inkluze $\operatorname{supp}(\varphi) \subset (-\mathtt{R}, \mathtt{R})$
- nechť $\eta_k(x, y)$ je libovolná posloupnost, která v $\mathbf{R}^2$ konverguje k jedničce
- nechť $\eta_1(x)$, resp. $\eta_2(y)$ jsou libovolné funkce třídy $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$, pro které existuje $\mathtt{K} < 0$ tak, že platí implikace (5.28)
- nechť dále existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in (-\delta, \infty)$ a všechna $y \in (-\delta, \infty)$ je $\eta_1(x) = \eta_2(y) = 1$
- bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\mathtt{R} > \delta$
- je zřejmé, že funkce $\eta_1(x)\eta_2(y)\varphi(x+y)$ je hladká a její nosič leží uvnitř uzavřené množiny

  $$T = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geqslant -\delta \wedge y \geqslant -\delta \wedge |x+y| < \mathtt{R}\big\}$$

- proto tedy funkce $\eta_1(x)\eta_2(y)\varphi(x+y)$ patří do $\mathscr{D}(\mathbf{R}^2)$
- pro dostatečně velká $k \in \mathbf{N}$ navíc platí rovnost $\eta_k(x, y)\eta_1(x)\eta_2(y)\varphi(x+y) = \eta_1(x)\eta_2(y)\varphi(x+y)$

- protože $\eta_1(x) = 1$ pro každé $x \in \operatorname{supp}(f)$ a zcela analogicky $\eta_2(y) = 1$ pro každé $y \in \operatorname{supp}(g)$, platí rovnosti $f(x) = \eta_1(x)f(x)$ a $g(y) = \eta_2(y)g(y)$
- z definice pak přímo vyplývá, že

$$\big(f \star g, \varphi(x)\big) = \lim_{k\to\infty}\big(f(x)\otimes g(y), \eta_k(x,y)\,\varphi(x+y)\big) = \lim_{k\to\infty}\big(f(x)\eta_1(x)\otimes g(y)\eta_2(y), \eta_k(x,y)\,\varphi(x+y)\big) =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\big(f(x)\otimes g(y), \eta_1(x)\eta_2(y)\eta_k(x,y)\,\varphi(x+y)\big) = \big(f(x)\otimes g(y), \eta_1(x)\eta_2(y)\varphi(x+y)\big)$$

- zbývá dokázat, že konvoluce $f \star g$ (jejíž existenci jsme právě prokázali) patří do třídy $\mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$
- chceme tudíž ukázat, že $\operatorname{supp}(f \star g) \subset \langle 0, \infty)$
- vezměme tedy libovolnou testovací funkci $\varphi(x)$, pro jejíž nosič platí inkluze $\operatorname{supp}(\varphi) \subset (-\infty, 0)$
- jistě tedy existuje $\delta > 0$ tak, že $\operatorname{supp}(\varphi) \subset (-\infty, -\delta)$
- vezměme dále pomocné funkce $\eta_1(x)$, $\eta_2(y)$ tak, že všechna $x < -\frac{\delta}{2}$, resp. $y < -\frac{\delta}{2}$ platí $\eta_1(x) = \eta_2(y) = 0$
- proto je $\eta_1(x)\eta_2(y)\varphi(x+y) = 0$ všude na $\mathbf{R}$, a tedy $\big(f \star g, \varphi(x)\big) = 0$ pro všechny testovací funkce mající zmiňovanou vlastnost
- celý důkaz lze tedy uzavřít sdělením, že $f \star g \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$

5.7.16 Věta – o spojitosti konvoluce

Konvoluce zobecněných funkcí je spojitá v obou argumentech, tj. pro libovolnou zobecněnou funkci $g \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$ a libovolnou posloupnost zobecněných funkcí $f_i \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$, která v $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ konverguje k funkci $f \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$, platí rovnosti

$$\lim_{i\to\infty}(f_i \star g) \overset{\mathscr{D}'}{=} f \star g, \qquad \lim_{i\to\infty}(g \star f_i) \overset{\mathscr{D}'}{=} g \star f_i.$$

Důkaz:

- jedná se o důsledek věty 5.7.15, spojitosti tenzorového součinu (viz věta 5.6.9) a faktu, že funkce $\eta_1(x)$, $\eta_2(y)$ lze volit nezávisle na f_i
- nechť tedy $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost zobecněných funkcí, která v $\mathscr{D}'_+(\mathbf{E}^r)$ konverguje k distribuci f
- nechť $\eta_1(x)$, resp. $\eta_2(y)$ jsou libovolné funkce třídy $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$, pro které existuje $\mathtt{K} < 0$ tak, že platí implikace (5.28)
- pro každou testovací funkci $\psi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ platí

$$\lim_{i\to\infty}\lim_{k\to\infty}\big(f_i(x)\otimes g(y), \eta_1(x)\eta_2(y)\,\varphi(y+x)\big) = \lim_{k\to\infty}\Big(\lim_{i\to\infty}\big(f_i(x)\otimes g(y)\big), \eta_1(x)\eta_2(y)\,\varphi(y+x)\Big) =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\big(\lim_{i\to\infty} f_i(x)\otimes g(y), \eta_1(x)\eta_2(y)\,\varphi(y+x)\big) = \lim_{k\to\infty}\big(f(x)\otimes g(y), \eta_1(x)\eta_2(y)\,\varphi(y+x)\big)$$

- proto $\lim_{i\to\infty}\big(f_i(x) \star g(x)\big) = f(x) \star g(x)$
- zbylá část, tedy fakt, že $\lim_{i\to\infty}\big(f(x) \star g_i(x)\big) = f(x) \star g(x)$, tvrzení plyne z komutativity konvoluce

5.7.17 Důsledek

Nechť $\mathtt{K} \in \mathbf{R}$ je pevně zvoleno a $G = (\mathtt{K}, \infty)$. Pak pro libovolnou zobecněnou funkci $g \in \mathscr{D}'(G)$ a libovolnou posloupnost zobecněných funkcí $f_i \in \mathscr{D}'(G)$, která v $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ konverguje k funkci $f \in \mathscr{D}'(G)$, platí rovnosti

$$\lim_{i\to\infty}(f_i \star g) \overset{\mathscr{D}'}{=} f \star g, \qquad \lim_{i\to\infty}(g \star f_i) \overset{\mathscr{D}'}{=} g \star f_i.$$

5.7.18 Lemma

Nechť $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$. Nechť pro $k \in \hat{r}$ existují distribuce $f_k, g_k \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$ tak, že $f = \otimes_{k=1}^r f_k$ a $g = \otimes_{k=1}^r g_k$. Pak konvoluce $f \star g$ existuje a náleží do třídy $\mathscr{D}'_+(\mathbf{E}^r)$. Navíc platí

$$f \star g = \big(f_1 \star g_1\big)\otimes\big(f_2 \star g_2\big)\otimes\ldots\otimes\big(f_r \star g_r\big).$$

5.7.19 Věta – o asociativitě konvoluce

Konvoluce v prostoru $\mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$ je asociativní, tj. pro každé $f, g, h \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$ platí rovnost

$$\big(f \star g\big) \star h = f \star \big(g \star h\big).$$

Důkaz:

- nechť je zvolena funkce $\eta(x)$ třídy $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$, která je na okolí intervalu $\langle 0, \infty)$ rovna jedné a existuje pro ni $\mathtt{K} < 0$ tak, že pro $x < \mathtt{K}$ je $\eta(x) = 0$
- podle věty 5.7.15 tedy

$$\big(f \star (g \star h), \varphi(x)\big) = \big(f(x) \otimes (g \star h)(y), \eta(x)\eta(y)\,\varphi(x+y)\big) = \Big((g \star h)(y), \big(f(x), \eta(x)\eta(y)\,\varphi(x+y)\big)\Big) =$$
$$= \Big(g(y) \otimes h(z), \eta(y)\eta(z)\big(f(x), \eta(x)\eta(y+z)\,\varphi(x+y+z)\big)\Big) =$$
$$= \Big(\big(g(y) \otimes h(z)\big) \otimes f(x), \eta(x)\eta(y)\eta(z)\eta(y+z)\varphi(x+y+z)\Big)$$

- protože $\operatorname{supp}(g) \subset \langle 0, \infty)$ a také $\operatorname{supp}(h) \subset \langle 0, \infty)$, platí rovnost

$$\big(g(y) \otimes h(z)\big)\eta(y)\eta(z)\eta(y+z) = \big(g(y) \otimes h(z)\big)\eta(y)\eta(z)$$

- proto (při použití komutativity tenzorového součinu)

$$\big(f \star (g \star h), \varphi(x)\big) = \Big(f(x) \otimes \big(g(y) \otimes h(z)\big), \eta(x)\eta(y)\eta(z)\varphi(x+y+z)\Big)$$

- odsud již lehce vyvozujeme, že asociativita konvoluce na $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ je bezprostředním důsledkem asociativity tenzorového součinu

5.7.20 Věta

Nechť jsou dány regulární zobecněné funkce $f, g \in \mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$. Pak je konvoluce $f \star g$ rovněž regulární zobecněnou funkcí z $\mathscr{D}'_+(\mathbf{R})$ a navíc platí

$$(f \star g)(x) = \Theta(x) \int_0^x f(x-s)g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Důkaz:

- nechť $\varphi(x)$ je libovolná testovací funkce
- podle vzorce (5.27) a na základě rovností $\eta_1 f = f$, $\eta_2 g = g$ dostáváme

$$\big(f \star g, \varphi(x)\big) = \big(f(x) \otimes g(y), \eta_1(x)\eta_2(y)\varphi(x+y)\big) = \Big(f(x), \eta_1(x)\big(g(y), \eta_2(y)\varphi(x+y)\big)\Big) =$$
$$= \int_{\mathbf{R}} f(x)\eta_1(x)\left(\int_{\mathbf{R}} g(y)\eta_2(y)\varphi(x+y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x)g(y)\varphi(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- použijeme-li substituci $s = y$, $t = x + y$, jejíž jacobián je jednotkový, dostáváme odsud, že

$$\big(f \star g, \varphi(x)\big) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(t-s)g(s)\varphi(t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} \left(\Theta(t)\int_0^t f(t-s)g(s)\varphi(t)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$$

- a jelikož toto platí pro všechny testovací funkce, je dokazovaná rovnost platná

5.8 Regularizace zobecněných funkcí

V této sekci dokážeme poměrně důležitou skutečnost, že třída regulárních distribucí s generátory z $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ je ve třídě všech distribucí $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ hustá.

5.8.1 Definice

Nechť je dána Cimrmanova buřinka $\omega_\varepsilon(\vec{x}) : \mathscr{D}(\mathbf{E}^r) \mapsto \mathbf{R}$ o poloměru $\varepsilon > 0$ a libovolná zobecněná funkce $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$. Pak nekonečně diferencovatelnou funkci

$$f_\varepsilon(\vec{x}) := f \star \omega_\varepsilon = \big(f(\vec{y}), \omega_\varepsilon(\vec{x} - \vec{y})\big)$$

nazýváme *regularizací zobecněné funkce* $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$.

5.8.2 Věta

Každá zobecněná funkce $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ může být chápána jako limita své vlastní regularizace, tj. pro každou zobecněnou funkci $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ platí, že

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} f_\varepsilon(\vec{x}) \stackrel{\mathscr{D}'}{=} f,$$

kde $f_\varepsilon(\vec{x})$ je regularizace zobecněné funkce f.

Důkaz:

- ve větě 5.5.11 bylo dokázáno, že $\lim_{\varepsilon \to 0_+} \omega_\varepsilon(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$
- užijeme-li spojitost konvoluce (viz věta 5.7.16), dostáváme

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} f_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \big(f \star \omega_\varepsilon\big) = f \star \lim_{\varepsilon \to 0_+} \omega_\varepsilon = f \star \delta = f$$

5.8.3 Věta

Každá zobecněná funkce $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ může být chápána jako limita posloupnosti testovacích funkcí $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$. Tedy $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ je hustá v $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$, přesněji třída regulárních distribucí, jejichž generátory jsou z množiny $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$, je hustá ve třídě všech distribucí $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$.

Důkaz:

- nechť f_ε je regularizace zobecněné funkce f
- ta je sice hladká, ale nemusí být nutně ze třídy $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$
- nechť $\eta_\varepsilon(\vec{x})$ je posloupnost testovacích funkcí konvergující pro poloměr ε jdoucí k nule zprava k jedničče (viz definice 5.7.2)
- nechť je navíc $\eta_\varepsilon(\vec{x})$ zvolena tak, aby pro všechna $\vec{x} \in B_{\mathtt{R}}$, kde $\mathtt{R} = \varepsilon^{-1}$, platilo, že $\eta_\varepsilon(\vec{x}) = 1$
- jelikož při použití věty 5.8.2 platí rovnosti

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \big(\eta_\varepsilon\, f_\varepsilon, \varphi(\vec{x})\big) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \big(f_\varepsilon, \eta_\varepsilon(\vec{x})\, \varphi(\vec{x})\big) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \big(f_\varepsilon, \varphi(\vec{x})\big) = \big(f, \varphi(\vec{x})\big),$$

  je tím prokázáno, že ke každé zobecněné funkci $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ existuje posloupnost

$$\big(\tau_n\big)_{n=1}^{\infty} := \big(\eta_{1/n}\, f_{1/n}\big)_{n=1}^{\infty}$$

  testovacích funkcí (přesněji regulárních distribucí, jejichž generátory jsou z množiny $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$) tak, že $\lim_{n\to\infty} \tau_n = f$ v $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$

5.9 Třída temperovaných testovacích funkcí

Pro účely integrálních transformací je třeba zavést novou třídu testovacích funkcí, a to takovou, na níž nebudou kladeny tak razantní požadavky jako na samotnou třídu $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$. Namísto omezeného nosiče budeme u testovacích funkcí pomalého růstu požadovat pouze, aby tyto klesaly (i se svými derivacemi) u nekonečna rychleji než jakákoli mocnina $\|\vec{x}\|^{-1}$.

5.9.1 Definice

Prostorem testovacích funkcí pomalého růstu nebo *prostorem temperovaných testovacích funkcí* $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ rozumíme třídu funkcí $\varphi(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{C}$, které jsou třídy $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$ a pro každé dva multiindexy $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^r$ platí

$$\sup_{\vec{x} \in \mathbf{E}^r} \left| \vec{x}^\beta \mathcal{D}^\alpha \varphi(\vec{x}) \right| < \infty.$$

Prvky třídy $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ nazýváme *testovacími funkcemi pomalého růstu* nebo *temperovanými testovacími funkcemi.*

5.9.2 Poznámka

Třída $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ je také velice často nazývá *Schwartzovým prostorem.* Z definice 5.9.1 mimo jiné vyplývá, že všechny funkce z prostoru $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ splňují pro každé $m, n \in \mathbf{N}_0$ rovnost

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^m \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} = 0.$$

Podobně pro všechny funkce z prostoru $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$, každé $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^r$ a každé $k \in \hat{r}$ platí rovnost

$$\lim_{x_k \to \pm\infty} x^\beta \mathcal{D}^\alpha f = 0.$$

5.9.3 Věta

Nechť jsou dány funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{C}$ a $g(x) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{C}$ a číslo $c \in \mathbf{C}$. Nechť $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$. Pak platí $f(\vec{x}) + c\, g(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$.

Důkaz:

- dokážeme například, že $f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$
- z předpokladů víme, že $f(\vec{x})$ i $g(\vec{x})$ jsou hladké, a tedy i součet $f(\vec{x}) + g(\vec{x})$ je hladký
- dále víme, že pro všechny multiindexy α a β platí

$$\sup_{\vec{x} \in \mathbf{E}^r} \left| \vec{x}^\beta\, \mathcal{D}^\alpha(f) \right| < \infty, \qquad \sup_{\vec{x} \in \mathbf{E}^r} \left| \vec{x}^\beta\, \mathcal{D}^\alpha(g) \right| < \infty$$

- tedy

$$\left| \vec{x}^\beta\, \mathcal{D}^\alpha(f+g) \right| \leqslant \left| \vec{x}^\beta\, \mathcal{D}^\alpha(f) \right| + \left| \vec{x}^\beta\, \mathcal{D}^\alpha(g) \right| < \infty$$

- tedy skutečně $f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$
- podobně lze důkaz vést také pro reálný násobek $c\, f(\vec{x})$

5.9.4 Příklad

Často užívanou funkcí, jež patří do Schwarzova prostoru $\mathscr{S}(\mathbf{E})$, je funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$, kde $a > 0$. Snadno nahlédneme, že pro každé $n \in \mathbf{N}_0$ je funkce $g(x) = x^n \mathrm{e}^{-ax^2}$ omezená. Derivujeme-li totiž tuto funkci podle x, lze nulováním derivace

$$\left(x^n \mathrm{e}^{-ax^2} \right)' = \left(n - 2ax^2 \right) x^{n-1} \mathrm{e}^{-ax^2} = 0$$

detekovat tři stacionární body, a sice

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{n}{2a}}, \qquad x_3 = 0.$$

Jak bez problému nahlédneme, že jsou první dva body lokálními extrémy. Bod $x_1 = \sqrt{\frac{n}{2a}}$ je bodem ostého lokálního maxima a a bod $x_2 = -\sqrt{\frac{n}{2a}}$ je střídavě bodem ostého lokálního maxima (pro n sudé) a bodem ostého lokálního minima (pro n liché). Bod $x_3 = 0$ je pro sudé n lokálním minimem s funkční hodnotou $f(0) = 0$ a pro liché n je inflexním bodem. Graf funkce $g(x)$ je sumarizován na přiloženém obrázku.

Obrázek 5.11
Graf funkce $g(x) = x^n \mathsf{e}^{-ax^2}$.

Odtud tedy vyplývá, že funkce $f(x) = \mathsf{e}^{-ax^2}$ je omezena jedničkou a funkce $g(x) = x^n \mathsf{e}^{-ax^2}$ jsou omezeny svým supremem, tedy hodnotou

$$g(x_1) = \left(\frac{n}{2a\mathsf{e}}\right)^{n/2}.$$

Nyní přistupme k derivaci $f^{(\alpha)}(x)$ pro libovolné $\alpha \in \mathbf{N}$. Jelikož libovolná derivace funkce $f(x)$ je konečnou lineární kombinací funkcí tvaru $x \mapsto x^n \mathsf{e}^{-ax^2}$, tedy

$$f^{(\alpha)}(x) = \sum_{n=0}^{\alpha+1} \mathsf{C}_n \, x^n \mathsf{e}^{-ax^2},$$

platí zcela jistě, že

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \left| f^{(\alpha)}(x) \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\alpha+1} \left(\frac{n}{2a\mathsf{e}}\right)^{n/2}$$

a tedy každá derivace funkce $f(x) = \mathsf{e}^{-ax^2}$ je rovněž omezená. Uzavíráme, že $f(x) = \mathsf{e}^{-ax^2} \in \mathscr{S}(\mathbf{E})$.

5.9.5 Důsledek

Schwartzův prostor $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ je vektorovým prostorem.

5.9.6 Lemma

Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{C}$, pro níž platí $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$. Nechť $\vec{\mu} \in \mathbf{E}^r$. Pak také funkce $f(\vec{x} - \vec{\mu})$ patří množiny $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$.

5.9.7 Věta

Nechť jsou dány funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{C}$ a $g(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{C}$. Nechť $g(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a $f(\vec{x})$ je hladká na $\mathbf{E}^r$. Nechť dále na množině $\mathbf{E}^r$ platí nerovnost $|f(\vec{x})| \leqslant g(\vec{x})$. Pak $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$.

Důkaz:

- jedná se o triviální důsledek definice funkcí pomalého růstu

5.9.8 Věta

Nechť jsou dány funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a dva multiindexy $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^r$. Pak také funkce $\vec{x}^\beta f(\vec{x})$ a $\mathcal{D}^\alpha\big(f(\vec{x})\big)$ patří do Schwartzova prostoru $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$.

Důkaz:

- opět jedná se pouze o banální důsledek definice prostoru $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$

5.9.9 Definice

Řekneme, že posloupnost temperovaných testovacích funkcí $\big(\varphi_k(\vec{x})\big)_{k=1}^\infty$ ze třídy $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ *konverguje superstejnoměrně* k temperované testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a označíme symbolem

$$\varphi_k(\vec{x}) \overset{\mathscr{S}}{\rightrightarrows} \varphi(\vec{x})$$

právě tehdy, když pro každé dva multiindexy $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^r$ konverguje posloupnost $\big(\vec{x}^\beta \mathcal{D}^\alpha \varphi_k(\vec{x})\big)_{k=1}^\infty$ k funkci $x^\beta \mathcal{D}^\alpha \varphi(\vec{x})$ stejnoměrně v $\mathbf{E}^r$.

5.9.10 Věta

Prostor testovacích funkcí $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a je v něm hustý.

Důkaz:

- zjevně každá testovací funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ je třídy $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$ a má omezený nosič
- proto pro každé dva multiindexy $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^r$ platí $\sup_{\vec{x}\in\mathbf{E}^r} \left|\vec{x}^\beta \mathcal{D}^\alpha \varphi(\vec{x})\right| < \infty$
- odtud $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r) \subset\subset \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$
- chceme-li dokázat, že $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ je hustý v $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$, zvolme libovolnou funkci $\eta(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ takovou, že pro všechna $\|\vec{x}\| < 1$ je $\eta(\vec{x}) = 1$
- pak zřejmě pro každé $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ je každá z funkcí $\varphi_k(\vec{x}) := \varphi(\vec{x})\eta\left(\frac{x}{k}\right)$ z prostoru $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ a navíc
$$\varphi_k(\vec{x}) \overset{\mathscr{S}}{\rightrightarrows} \varphi(\vec{x})$$
- každá z funkcí $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ je tudíž vyjádřitelná jako limita posloupnosti $\big(\varphi_k(\vec{x})\big)_{k=1}^\infty$ funkcí z $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$

5.9.11 Lemma

Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^r$ je libovolná matice a $\vec{\mu} \in \mathbf{E}^r$ libovolný vektor. Pak zobrazení
$$\varphi(\vec{x}) \mapsto \varphi\big(\mathbb{A}\vec{x} + \vec{\mu}\big)$$
je spojitým zobrazením z $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ do $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$.

5.9.12 Definice

Symbolem Υ_m označíme množinu všech funkcí $a(\vec{x})$, které jsou třídy $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$, a pro každý multiindex $\alpha \in \mathbf{N}_0^r$ existují čísla $\mathtt{C}_\alpha, m_\alpha$ tak, že
$$\left|\mathcal{D}^\alpha a(\vec{x})\right| \leqslant \mathtt{C}_\alpha \big(1 + \|\vec{x}\|\big)^{m_\alpha}$$
všude v $\mathbf{E}^r$.

5.9.13 Lemma

Nechť $a(\vec{x}) \in \Upsilon_m$ je libovolná pevně zvolená funkce třídy Υ_m. Pak zobrazení
$$\varphi(\vec{x}) \mapsto a(\vec{x})\varphi(\vec{x})$$
je spojitým zobrazením z $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ do $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$.

5.10 Třída temperovaných zobecněných funkcí

Podobně jako jsme nad třídou $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ testovacích funkcí vystavěli třídu funkcí zobecněných, také pro temperované testovací funkce, tj. funkce třídy $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$, budeme definovat speciáln i třídu spojitých a lineárních funkcionálů. Označíme ji $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ a její vlastnosti budeme konfrontovat s vlastnostmi prvků třídy $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$.

5.10.1 Definice

Třídu všech lineárních spojitých funkcionálů s definičním oborem $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ označíme symbolem $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ a nazveme *prostorem temperovaných zobecněných funkcí* nebo *prostorem temperovaných distribucí.* Prvky třídy $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ budeme nazývat *temperovanými zobecněnými funkcemi* nebo *temperovanými distribucemi.*

5.10.2 Definice

Řekneme, že temperované zobecněné funkce $\widetilde{f}$ a $\widetilde{g}$ se *rovnají* a označíme symbolem $\widetilde{f} = \widetilde{g}$, jestliže pro všechny temperované testovací funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ platí rovnost $\big(\widetilde{f}, \varphi(\vec{x})\big) = \big(\widetilde{g}, \varphi(\vec{x})\big)$.

5.10.3 Definice

Temperovanou zobecněnou funkci $\widetilde{f}$ nazveme *nulovou distribucí* a označíme symbolem $\widetilde{0}$, pokud pro všechny temperované testovací funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ platí rovnost $\big(\widetilde{f}, \varphi(\vec{x})\big) = 0$.

5.10.4 Definice

Nechť jsou dány temperované zobecněné funkce $f, g \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ a číslo $c \in \mathbf{C}$. Pak definujeme *součet temperovaných distribucí* vztahem

$$\big(f + g, \varphi(\vec{x})\big) = \big(f, \varphi(\vec{x})\big) + \big(g, \varphi(\vec{x})\big)$$

a *číselný násobek temperované distribuce* definičním předpisem

$$\big(cf, \varphi(\vec{x})\big) = c\big(f, \varphi(\vec{x})\big).$$

5.10.5 Definice

Temperovanou zobecněnou funkci $f \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ nazveme *komplexně sdruženou* se zobecněnou funkcí g a označíme $f = g^\star$, platí-li pro všechny funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ rovnost $\big(f, \varphi(\vec{x})\big) = \big(g, \varphi(\vec{x})\big)^\star$. *Reálnou*, resp. *imaginární* částí zobecněné funkce f rozumíme zobecněné funkce definované funkcionálním zápisem

$$\big(\mathrm{Re}(f), \varphi(\vec{x})\big) := \frac{\big(f, \varphi(\vec{x})\big) + \big(f, \varphi(\vec{x})\big)^\star}{2}, \quad \big(\mathrm{Im}(f), \varphi(\vec{x})\big) := \frac{\big(f, \varphi(\vec{x})\big) - \big(f, \varphi(\vec{x})\big)^\star}{2\mathtt{i}}.$$

5.10.6 Definice

Temperovanou zobecněnou funkci $f \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ nazveme *reálnou*, jestliže pro všechny temperované funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ platí vztah $\big(\mathrm{Im}(f), \varphi(\vec{x})\big) = 0$.

5.10.7 Definice

Nechť $\mathbb{A}$ je regulární čtvercová matice řádu r a $\vec{b} \in \mathbf{E}^r$ libovolný vektor. Pak pro každou temperovanou zobecněnou funkci $f \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ definujeme *afinní transformaci souřadnic* tvaru

$$\Big(f(\mathbb{A}\vec{x} + \vec{b}), \varphi(\vec{x})\Big) = \frac{1}{|\det(\mathbb{A})|}\Big(f(\vec{x}), \varphi(\mathbb{A}^{-1}\vec{x} - \mathbb{A}^{-1}\vec{b})\Big). \tag{5.29}$$

5.10.8 Definice

Nechť je dána funkce $a(\vec{x}) \in \Upsilon_m$ a temperovaná zobecněná funkce $f \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$. Nechť $a \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ je regulární zobecněná funkce generovaná funkcí $a(\vec{x})$. Pak definujeme *součin temperovaných distribucí* vztahem

$$\big(af, \varphi(\vec{x})\big) = \big(f, a(\vec{x})\varphi(\vec{x})\big). \tag{5.30}$$

5.10.9 Definice

Nechť je dána temperovaná zobecněná funkce $f \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ a multiindex $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Pak definujeme *derivaci $\mathcal{D}^\alpha f \in \mathscr{D}'$ temperované distribuce f* vztahem

$$\big(\mathcal{D}^\alpha f, \varphi(\vec{x})\big) = (-1)^{|\alpha|}\big(f, \mathcal{D}^\alpha \varphi(\vec{x})\big).$$

5.10.10 Věta - o parciální derivaci součinu distribucí

Nechť je dána funkce $a(\vec{x}) \in \Upsilon_m$ a temperovaná zobecněná funkce $f \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$. Nechť $a \in \mathscr{D}'_{\mathrm{reg}}$ je generována funkcí $a(\vec{x})$. Pak pro libovolné $i \in \hat{r}$ platí

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(af) = \frac{\partial a}{\partial x_i} f + a\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- jedná se o analogii d ukazu věty 5.3.16

5.10.11 Důsledek – Leibnizovo pravidlo pro temperované distribuce

Nechť je dána funkce $a(\vec{x}) \in \Upsilon_m$ a temperovaná zobecněná funkce $f \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$. Nechť $a \in \mathscr{D}'_{\mathrm{reg}}$ je generována funkcí $a(\vec{x})$. Pak pro libovolný multiindex $\alpha \in \mathbf{N}_0^r$ platí

$$\mathcal{D}^\alpha\big(af\big) = \sum_{\beta=0}^{\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!}\mathcal{D}^\beta f\ \mathcal{D}^{\alpha-\beta} a.$$

5.10.12 Definice

Zobecněnou funkci $g \in \mathscr{S}'(\mathbf{R})$ nazveme *primitivní* ke zobecněné funkci $f \in \mathscr{S}'(\mathbf{R})$, pokud $g' = f$.

5.10.13 Lemma

Prostor $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ temperovaných zobecněných funkcí je vektorovým prostorem nad tělesem $\mathbf{R}$.

5.10.14 Věta

Vektorový prostor $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$.

Důkaz:

- z tvrzení 5.9.10 vyplývá, že $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r) \subset \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$
- dokazované tvrzení je pak snadným důsledkem faktu, že čárkované prostory vznikly jako třídy lineárních spojitých funkcionálů nad $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$, resp. $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$.

5.10.15 Věta

Nechť $f(\vec{x}) \in \mathbb{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$. Nechť existuje $m \geqslant 0$ takové, že

$$\int_{\mathbf{E}^r} \big|f(\vec{x})\big|\,\big(1+\|x\|\big)^{-m}\,\mathrm{d}\vec{x} < \infty.$$

Pak lineární spojitý funkcionál, jež je definovaný pro každou temperovanou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ předpisem

$$\big(f, \varphi(\vec{x})\big) := \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x},$$

patří do třídy $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$.

Důkaz:

- pro každou funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a každé dva multiindexy $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^r$ je funkce $\big|\big(1+\|x\|\big)^\beta \mathcal{D}^\alpha\varphi(\vec{x})\big|$ omezená jistým číslem $\mathtt{K} \geqslant 0$
- proto

$$\left|\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}\right| = \left|\int_{\mathbf{E}^r} \frac{f(\vec{x})}{\big(1+\|x\|\big)^m}\,\Big|\big(1+\|x\|\big)^m\varphi(\vec{x})\Big|\,\mathrm{d}\vec{x}\right| \leqslant \mathtt{K}\left|\int_{\mathbf{E}^r} \frac{f(\vec{x})}{\big(1+\|x\|\big)^m}\,\mathrm{d}\vec{x}\right| < \infty$$

5.10.16 Definice

Temperovanou zobecněnou funkci $\widetilde{f} \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ nazveme *regulární* a označíme symbolem $f \in \mathscr{S}'_{\mathrm{reg}}(\mathbf{E}^r)$, jestliže existuje lebesgueovsky lokálně integrovatelná funkce $f(\vec{x}) \in \mathbb{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$ z věty 5.10.15 taková, že pro všechny temperované testovací funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ platí rovnost

$$\big(\widetilde{f}, \varphi(\vec{x})\big) := \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}.$$

Funkci $f(\vec{x})$ přitom nazýváme *generátorem* regulární temperované distribuce. Temperovanou zobecněnou funkci $\widetilde{f}$ nazveme *singulární*, není-li regulární.

5.10.17 Lemma

Třída regulárních distribucí $\mathscr{S}'_{\mathrm{reg}}(\mathbf{E}^r)$ je podprostorem v prostoru $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$, tj. $\mathscr{S}'_{\mathrm{reg}}(\mathbf{E}^r) \subset\subset \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$.

5.10.18 Definice

Řekneme, že posloupnost temperovaných zobecněných funkcí $(f_k)_{k=1}^{\infty}$, kde $f_k \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ *konverguje* ve třídě distribucí $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ k zobecněné funkci $f \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ a označíme symbolem $\lim_{k\to\infty} f_k = f$, pokud platí

$$\lim_{k\to\infty} \big(f_k, \varphi(\vec{x})\big) = \big(f, \varphi(\vec{x})\big)$$

pro každou temperovanou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$.

5.10.19 Definice

Nechť temperovaná zobecněná funkce $f_\mu \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ závisí na parametru $\mu \in \mathbf{R}$. Pak řekneme, že zobecněná funkce f_μ konverguje (pro μ jdoucí k μ_0) k zobecněné funkci $g \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ a označíme symbolem $\lim_{\mu\to\mu_0} f_\mu = g$, pokud pro všechny temperované testovací funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ platí rovnost

$$\lim_{\mu\to\mu_0} \big(f_\mu, \varphi(\vec{x})\big) = \big(g, \varphi(\vec{x})\big).$$

5.10.20 Definice

Nechť jsou dány zobecněné temperované funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ a $g(\vec{y}) \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^s)$. Pak definujeme *tenzorový součin temperovaných distribucí* $f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}) \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^{r+s})$ vztahem

$$\big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big) = \Big(f(\vec{x}), \big(g(\vec{y}), \varphi(\vec{x},\vec{y})\big)\Big).$$

5.10.21 Lemma

Tenzorový součin temperovaných distribucí je bilineárním, komutativním a asociativním zobrazením z kartézského součinu $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r) \times \mathscr{S}'(\mathbf{E}^s)$ do $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^{r+s})$. Dále je také spojitým zobrazením a pro libovolné multiindexy $\alpha \in \mathbf{N}_0^r$, $\beta \in \mathbf{N}_0^s$ platí rovnosti

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{x}}\big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y})\big) = \big(\mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{x}} f(\vec{x})\big) \otimes g(\vec{y}),$$

$$\mathcal{D}^{\beta}_{\vec{y}}\big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y})\big) = f(\vec{x}) \otimes \big(\mathcal{D}^{\beta}_{\vec{y}} g(\vec{y})\big).$$

5.10.22 Definice

Nechť jsou dány temperované zobecněné funkce $f, g \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ a posloupnost funkcí $\eta_k(\vec{x},\vec{y}) : \mathbf{E}^{2r} \mapsto \mathbf{R}$, která konverguje v množině $\mathbf{E}^{2r}$ k jedničce. Nechť limita

$$\lim_{k\to\infty} \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \eta_k(\vec{x},\vec{y})\, \varphi(\vec{x}+\vec{y})\big)$$

existuje pro každou temperovanou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a nechť její hodnota nezávisí na volbě posloupnosti $\eta_k(\vec{x},\vec{y})$. Pak tuto limitu označíme symbolem $\big(f \star g, \varphi(\vec{x})\big)$ a nazveme *konvolucí temperovaných zobecněných funkcí* $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$.

5.10.23 Věta

Nechť $f \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ a $g \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ je zobecněná funkce s omezeným nosičem. Pak existuje konvoluce $f \star g$ a navíc platí, že $f \star g \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$. Dále pro každou temperovanou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ platí rovnost

$$\big(f \star g, \varphi(\vec{x})\big) = \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \eta(\vec{y})\, \varphi(\vec{x}+\vec{y})\big), \tag{5.31}$$

kde $\eta(\vec{y})$ je libovolná funkce z $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$, která je rovna jedné na okolí nosiče $\mathrm{supp}(g)$.

Důkaz:

- protože $f \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r) \subset \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$, platí rovnost podle tvrzení 5.7.14, že

$$\big(f \star g, \varphi(\vec{x})\big) = \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \eta(\vec{y})\varphi(\vec{x}+\vec{y})\big),$$

  kde $\eta(\vec{y})$ je libovolná testovací funkce, která je na okolí nosiče $\operatorname{supp}(g)$ rovna jedné

- proto stačí dokázat, že pravá strana rovnosti (5.31) definuje lineární a spojitý funkcionál na $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$
- nechť tedy $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ je zvolena libovolně
- protože má funkce $\eta(\vec{x})$ omezený nosič, je funkce $\eta(\vec{y})\,\varphi(\vec{x}+\vec{y})$ ze Schwartzova prostoru $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$
- pravá strana rovnosti (5.31) je zcela jasně lineárním funcionálem
- dokážeme spojitost
- nechť $\big(\varphi_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost ze Schwartzova prostoru $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$, jež superstejnoměrně konverguje k nulové funkci, tj. podle definice 5.9.9

$$\varphi_k(\vec{x}) \overset{\mathscr{S}}{\rightrightarrows} o(\vec{x})$$

- to ale znamená, že také

$$\eta(\vec{y})\,\varphi_k(\vec{x}+\vec{y}) \overset{\mathscr{S}}{\rightrightarrows} o(\vec{x})$$

- protože ale $f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}) \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^{2r})$, plyne z toho, že posloupnost čísel $\big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \eta(\vec{y})\,\varphi_k(\vec{x}+\vec{y})\big)$ konverguje k nule, což dokončuje důkaz spojitosti
- proto $f \star g \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$

Kapitola 6

Integrální transformace

Jednou z důležitých partií matematiky je teorie tzv. *integrálních transformací.* Tato teorie umožňuje např. převádět diferenciální rovnice nebo jejich soustavy na rovnice algebraické nebo jejich soustavy, určité integrály řešit jednoduššími a elegantnějšími postupy a celou řadu matematických či fyzikálních problémů převést na jednoduché algebraické úlohy. Integrální transformace budou také velice užitečnými při řešení parciálních diferenciálních rovnic, jak uvidíme v následujících kapitolách.

6.1 Laplaceova transformace pro klasické funkce

Prvním (a také jedním z nejznámějších) zástupců integrálních transformací je transformace Laplaceova. Obecně může být zavedena v $r-$dimenzionálním prostoru $\mathbf{E}^r$, pro naše účely ovšem postačí, bude-li definována pro funkci jedné proměnné.

6.1.1 Poznámka

Laplaceovou transformací budeme rozumět integrální operaci, která vhodné funkci $f(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ přiřazuje funkci

$$F(p) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt} \, \mathrm{d}t,$$

popř. vícerozměrné funkci $f(\vec{t}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ přiřazuje funkci

$$F(\vec{p}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{t}) \cdot \mathrm{e}^{-\vec{p}\vec{t}} \, \mathrm{d}t.$$

Symbol $\vec{p}\vec{t}$ přitom chápeme jako standardní skalární součin. Před samotnou definicí Laplaceovy transformace je ale nejprve nutno vymezit třídu funkcí, pro něž bude Laplaceův obraz $F(\vec{p})$ existovat. To bude námětem dalšího textu.

6.1.2 Poznámka

Předmětem pro Laplaceovu transformaci nejčastěji bývají funkce tvaru $\Theta(t)f(t)$, kde $\Theta(t)$ je jednorozměrná Heavisideova funkce. Pak se definiční vztah (6.1) redukuje na tvar

$$F(p) := \int_0^\infty f(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt} \, \mathrm{d}t.$$

6.1.3 Definice

O funkci $f(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ říkáme, že je *po částech spojitá* v $\mathbf{R}$, jestliže má v každém intervalu $\langle a, b\rangle \subset \mathbf{R}$ konečný počet nespojitostí prvního druhu, t.j. v bodech nespojitosti existují obě jednostranné limity a jsou konečné.

6.1.4 Poznámka

Pro každou po částech spojitou funkci $f(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ a každé $c > 0$ tedy existují integrály

$$\int_0^c f(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt} \, \mathrm{d}t, \quad \int_0^c \left| f(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt} \right| \mathrm{d}t.$$

Integrál $\int_0^\infty f(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ pak definujeme předpisem

$$\int_0^\infty f(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t := \lim_{c\to\infty} \int_0^c f(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

6.1.5 Definice

Funkci $f(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ nazveme funkcí *exponenciálního růstu,* existují-li $\mathtt{K} > 0,\ t_0 \geqslant 0$ a $\alpha \in \mathbf{R}_0^+$ taková, že pro skoro všechna $t > t_0$ platí nerovnost

$$|f(t)| \leqslant \mathtt{K}\,\mathrm{e}^{\alpha t}.$$

Infimum množiny všech takových α pak nazýváme *indexem růstu* funkce $f(t)$ a značíme $\mathrm{ind}(f)$.

6.1.6 Věta

Pro index růstu $\mathrm{ind}(f)$ funkce $f(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ platí vztah

$$\mathrm{ind}(f) = \max\left\{0, \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln|f(t)|}{t}\right\}.$$

Důkaz:

- ze vztahu $|f(t)| \leqslant \mathtt{K}\mathrm{e}^{\alpha t}$ dostáváme sadu nerovností

$$\ln|f(t)| \leqslant \ln(\mathtt{K}) + \alpha t$$

$$\frac{\ln|f(t)|}{t} - \frac{\ln(\mathtt{K})}{t} \leqslant \alpha.$$

- tato nerovnost má být splněna pro $t > t_0$, proto přejdeme k limitě

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln|f(t)|}{t} \leqslant \alpha$$

- jelikož hledáme infimum množiny všech takových α, jež splňují uvedenou nerovnost, platí buď

$$\mathrm{ind}(f) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln|f(t)|}{t}$$

  nebo $\mathrm{ind}(f) = 0$

6.1.7 Poznámka

Funkce $f(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ je exponenciálního růstu, má-li reálný index růstu, tj. pokud $\mathrm{ind}(f) \in \mathbf{R}$.

6.1.8 Definice

O funkci $f(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ řekneme, že patří do *třídy* $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ a zapíšeme $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$, jestliže je

- rovna nule pro všechna $t < 0$,
- exponeciálního růstu,
- po částech spojitá na $\langle 0, +\infty)$.

Třídu $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ nazýváme *Laplaceovým prostorem* a její prvky nazýváme *(Laplaceovy) vzory standardního typu.*

6.1.9 Věta

Nechť je dána funkce $f(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, jež patří do třídy $\mathscr{P}(\mathbf{R})$. Pak $\mathfrak{L}\big[f(t)\big]$ existuje.

Důkaz:

- jelikož $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$, pak platí $\operatorname{ind}(f) \in \mathbf{R}_0^+$
- nechť α je libovolné reálné číslo větší než $\operatorname{ind}(f)$
- pak existuje $\mathtt{K} > 0$ takové, že $|f(t)| < \mathtt{K}\,\mathsf{e}^{\alpha t}$
- jelikož integrál
$$\int_0^\infty \mathtt{K}\,\mathsf{e}^{\alpha t}\mathsf{e}^{-pt}\,\mathsf{d}t$$
pro $p > \alpha$ existuje, je $\mathtt{K}\mathsf{e}^{\alpha t}\mathsf{e}^{-pt}$ integrabilní majorantou k funkci $f(t)\,\mathsf{e}^{-pt}$
- tedy
$$\int_0^\infty f(t)\,\mathsf{e}^{-pt}\,\mathsf{d}t$$
také existuje a je konečný (ze srovnávacího kritéria pro integrály)

6.1.10 Poznámka

Do třídy $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ patří triviálně funkce $f(t) = \Theta(t)\,\mathsf{e}^{at}$, $f(t) = c\,\Theta(t)$ a $f(t) = \Theta(t)\,t^q$, kde $a, c \in \mathbf{R}$ a $q \in \mathbf{Z}^+$.

6.1.11 Věta

Nechť jsou dány funkce $f(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ a $g(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ a číslo $c \in \mathbf{C}$. Nechť $f(t), g(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$. Pak platí $f(t) + c\,g(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a $f(t) \cdot g(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$.

Důkaz:

- dokážeme například, že $f(t) \cdot g(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$
- z předpokladů víme, že existují $\mathtt{K}, \widetilde{\mathtt{K}} > 0$ a $t_0, \widetilde{t_0} \in \mathbf{R}^+$ tak, že pro $t > t_0$ platí $|f(t)| \leqslant \mathtt{K}\mathsf{e}^{\alpha t}$ a pro $t > \widetilde{t_0}$ platí $|g(t)| \leqslant \widetilde{\mathtt{K}}\mathsf{e}^{\widetilde{\alpha} t}$
- položme $\mathtt{M} := \mathtt{K}\widetilde{\mathtt{K}}$
- pak $|f(t) \cdot g(t)| \leqslant \mathtt{M}\mathsf{e}^{(\alpha+\widetilde{\alpha})t}$, a funkce $|f(t) \cdot g(t)|$ je tedy exponenciálního růstu
- jsou-li $f(t)$, $g(t)$ po částech spojité na $\langle 0, +\infty)$, je i funkce $f(t) \cdot g(t)$ po částech spojitá na $\langle 0, +\infty)$
- jsou-li $f(t)$, $g(t)$ rovny nule pro $t < 0$, platí totéž i pro funkci $f(t) \cdot g(t)$
- tedy $f(t) \cdot g(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$
- podobně pro součet a reálný násobek

6.1.12 Důsledek

Laplaceův prostor $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ je vektorovým prostorem.

6.1.13 Věta

Nechť je dána funkce $f(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, pro níž platí $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$. Nechť $\tau \geqslant 0$. Pak také funkce $|f(t)|$, $f(t - \tau)$ a $\int_0^t f(u)\,\mathsf{d}u$ patří do množiny $\mathscr{P}(\mathbf{R})$.

Důkaz:

- dokážeme například, že $\int_0^t f(u)\,\mathsf{d}u \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$
- z předpokladů víme, že existuje $\mathtt{K} > 0$ a $t_0 \in \mathbf{R}^+$ takové, že pro $t > t_0$ platí $|f(t)| \leqslant \mathtt{K}\mathsf{e}^{\alpha t}$

- pak
$$\left|\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_0^t |f(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant t \sup_{u\in\mathbf{R}} |f(u)| \leqslant \mathtt{K}t\,\mathrm{e}^{\alpha t}$$
- jelikož ale pro $t > 0$ platí nerovnost $t < \mathrm{e}^t$, pak tedy
$$\left|\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \mathtt{K}\,\mathrm{e}^{(\alpha+1)t}$$
- jelikož pro $t < 0$ je integrand nulový, je také celý integrál pro $t < 0$ nulový
- z částečné spojitosti integrandu lze dále dokázat částečnou spojitost celého integrálu
- nechť tedy funkce $f(u)$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$
- pak ale (např. podle věty 1.1.41 ze skript [12]) nabývá funkce $f(u)$ na $\langle a, b\rangle$ svého maxima (označme ho $\mathtt{M}$)
- označme dále $F_a(t) = \int_a^t f(u)\,\mathrm{d}u$
- pro každé $t \in \langle a, b\rangle$ a $\delta > 0$ položme $\tau = t + \delta$
- pak platí:
$$|F_a(\tau) - F_a(t)| = \left|\int_a^{t+\delta} f(u)\,\mathrm{d}u - \int_a^t f(u)\,\mathrm{d}u\right| = \left|\int_t^{t+\delta} f(u)\,\mathrm{d}u\right| < \mathtt{M}\cdot\delta$$
- vezměme libovolné $\varepsilon > 0$
- jestliže položíme $\delta = \varepsilon\,\mathtt{M}^{-1}$, pak z výše uvedeného vyplývá
$$|F_a(\tau) - F_a(t)| = \left|\int_a^{t+\delta} f(u)\,\mathrm{d}u - \int_a^t f(u)\,\mathrm{d}u\right| < \varepsilon$$
a funkce $F_a(t) = \int_a^t f(u)\,\mathrm{d}u$ je tudíž spojitá na $\langle a, b\rangle$
- nyní již snadno nahlédneme, že funkce $F(t) = \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$ je po částech spojitá na $\mathbf{R}$
- podobně dokážeme, že $|f(t)|$, $f(t-\tau) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$

6.1.14 Lemma

Nechť jsou dány funkce $f(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ a $g(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$. Nechť $g(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a $f(t)$ je po částech spojitá. Nechť dále $|f(t)| \leqslant g(t)$ skoro všude v $\mathbf{R}$. Pak $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$.

6.1.15 Věta – o definičním oboru Laplaceova obrazu

Nechť je dána funkce $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ s indexem růstu $\mathrm{ind}(f)$. Pak Laplaceův integrál $\int_\mathbf{R} f(t)\cdot\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ konverguje absolutně pro všechna $p > \mathrm{ind}(f)$.

Důkaz:

- nechť $\alpha > \mathrm{ind}(f)$
- z vlastností třídy $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ jistě existují vhodná $\mathtt{K}$ a t_0, tak, že $\forall t \in (t_0, +\infty) : \big|f(t)\big| \leqslant \mathtt{K}\mathrm{e}^{\alpha t}$
- triviálně pak platí, že
$$\left|\int_\mathbf{R} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_\mathbf{R} \left|f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_\mathbf{R} \mathtt{K}\mathrm{e}^{(\alpha-p)t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathtt{K}}{p-\alpha}$$
- tento integrál konverguje pro $p > \alpha$ a platí
$$\left|\int_\mathbf{R} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\right| \in \mathbf{R}$$
- definičním oborem Laplaceova obrazu je tedy množina $\big\{p \in \mathbf{R} : p > \mathrm{ind}(f)\big\}$

6.1.16 Definice

Laplaceovou transformací rozumíme integrální operaci, která funkci $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ s indexem růstu $\operatorname{ind}(f)$ přiřazuje funkci

$$F(p) = \mathfrak{L}\big[f(t)\big] := \Theta\big(p - \inf(f)\big) \int_{\mathbf{R}} f(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t. \tag{6.1}$$

Funkci $F(p)$, pokud existuje, nazýváme *Laplaceovým obrazem* funkce $f(t)$. Funkci $f(t)$ nazýváme *vzorem pro Laplaceovu transformaci*. Výše uvedený vztah mezi vzorem a obrazem se nazývá *Laplaceovou korespondencí.*

6.1.17 Poznámka

Ve většině dostupné literatury se však namísto správné korespondence $\mathfrak{L}\big[\Theta(t)\big] = \Theta(p)\frac{1}{p}$ uvádí poněkud formálnější zápis $\mathfrak{L}\big[1\big] = \frac{1}{p}$.

6.1.18 Definice

O funkci $f(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ řekneme, že patří do *třídy* $\mathscr{P}_+(\mathbf{R})$ a zapíšeme $f(t) \in \mathscr{P}_+(\mathbf{R})$, jestliže je

- rovna nule pro všechna $t < 0$,
- exponeciálního růstu,
- absolutně integrovatelná na každém uzavřeném intervalu $\langle 0, c\rangle$, kde $c > 0$.

Třídu $\mathscr{P}_+(\mathbf{R})$ nazýváme *rozšířeným Laplaceovým prostorem* a její prvky nazýváme *(Laplaceovy) vzory rozšířeného typu.*

6.1.19 Poznámka

Zjevně platí inkluze $\mathscr{P}(\mathbf{R}) \subset \mathscr{P}_+(\mathbf{R})$. Např. funkce $f(t) = \Theta(t)\, t^{-\frac{1}{2}}$ je zástupcem funkcí, jež patří do $\mathscr{P}_+(\mathbf{R})$, ale nepatří do $\mathscr{P}(\mathbf{R})$. To je patrno z toho, že

$$\int_{\mathbf{R}} \Theta(t)\, t^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

A to i přesto, že se nejedná o po částech spojitou funkci.

6.2 Vlastnosti Laplaceovy transformace

Poté, co jsme korektně zavedli jednodimenzionální Laplaceovu transformaci, vyslovíme a dokážeme její základní vlastnosti, jejichž znalost poté zužitkujeme při efektivním řešení různých matematických a fyzikálních úloh.

6.2.1 Věta – o linearitě

Nechť $f(t)$, $g(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a $c \in \mathbf{C}$. Pak $f(t) + c \cdot g(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a platí

$$\mathfrak{L}\left[f(t) + c \cdot g(t)\right] = \mathfrak{L}\left[f(t)\right] + c\, \mathfrak{L}\left[g(t)\right].$$

Důkaz:

- jedná se o triviální důsledekleneariry a homogenity Lebesgueova integrálu

6.2.2 Věta – o změně měřítka ve vzoru

Nechť $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$. Nechť dále $c > 0$. Pak $f\,(c\,t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a platí rovnost

$$\mathfrak{L}\left[f(c\,t)\right] = \frac{1}{c}\, F\left(\frac{p}{c}\right).$$

Důkaz:

- ukázat, že $f\,(ct) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$, je velice jednoduché
- pro příslušný Laplaceův obraz dále platí

$$\mathfrak{L}\left[f(ct)\right] = \int_{\mathbf{R}} f(ct)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t = \left|\begin{array}{c} s = c\,t \\ \mathrm{d}s = c\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \frac{1}{c} \int_{\mathbf{R}} f(s)\, \mathrm{e}^{-\frac{ps}{c}}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{c}\, F\left(\frac{p}{c}\right)$$

6.2.3 Věta – o obrazu derivace

Nechť $f(t),\ \dot{f}(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$. Pak platí rovnost

$$\mathfrak{L}\left[\dot{f}(t)\right] = p\,\mathfrak{L}\left[f(t)\right] - f(0_+). \tag{6.2}$$

Důkaz:

- snadno nahlédneme, že platí následující série rovností

$$\mathfrak{L}\left[\dot{f}(t)\right] = \int_{\mathbf{R}} \dot{f}(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{cc} u = \mathrm{e}^{-pt} & \dot{v} = \dot{f}(t) \\ \dot{u} = -p\,\mathrm{e}^{-pt} & v = f(t) \end{array} \right| =$$

$$= \left[f(t)\mathrm{e}^{-pt}\right]_0^{\infty} + p\int_{\mathbf{R}} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = p\,\mathfrak{L}\left[f(t)\right] - f(0_+)$$

6.2.4 Věta – o derivaci obrazu

Nechť $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$ a $n \in \mathbf{N}$. Pak také $t^n f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a platí rovnost

$$\mathfrak{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n F}{\mathrm{d}p^n}. \tag{6.3}$$

Důkaz:

- umocněním nerovnosti $t < \mathrm{e}^t$ platné pro kladná t získáme pro $n \in \mathbf{N}$ nerovnost $t^n < \mathrm{e}^{nt}$
- jelikož $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$, existují $\mathtt{K} > 0$ a $t_0 \leqslant 0$ taková, že

$$\forall t \in (t_0, +\infty): \quad |f(t)| \leqslant \mathtt{K}\mathrm{e}^{\alpha t}$$

- pak tedy také platí

$$\left|t^n f(t)\right| \leqslant \mathtt{K}\mathrm{e}^{(\alpha+n)t}$$

- odtud $t^n f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$
- navíc podle věty o derivaci integrálu s parametrem je funkce $F(p) = \int_{\mathbf{R}} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ nekonečněkrát diferencovatelná
- dále pokračujeme matematickou indukcí
- jelikož pro $n = 0$ platí rovnost (6.3) triviálně, můžeme předpokládat, že vztah

$$\int_{\mathbf{R}} t^n f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n F}{\mathrm{d}p^n} \tag{6.4}$$

  platí pro jisté $n \in \mathbf{N}_0$
- dokážeme, že uvedený vztah platí také pro $n + 1$
- zderivujeme-li vztah (6.4) podle p, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\int_{\mathbf{R}} t^n f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^{n+1} F}{\mathrm{d}p^{n+1}}$$

- jelikož jsme již dokázali, že $t^n f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$, existuje k funkci $t^n f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}$ zcela jistě integrabilní majoranta nezávislá na p
- proto je v posledně uvedeném vztahu možno zaměnit znak derivace a integrálu
- tudíž platí

$$-\int_{\mathbf{R}} t^{n+1} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^{n+1} F}{\mathrm{d}p^{n+1}}$$

- tento vztah završuje prováděnou matematickou indukci

6.2.5 Věta – o integrálu vzoru

Nechť $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$. Pak také $\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a platí rovnost

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \frac{F(p)}{p}.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- to, že $\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$, bylo dokázáno ve větě 6.1.13
- z definice Laplaceovy transformace a po aplikaci metody per partes snadno vypočteme

$$p\,\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) p\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{ll} u = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau & \dot{v} = p\,\mathrm{e}^{-pt} \\ \dot{u} = f(t) & v = -\mathrm{e}^{-pt} \end{array} \right| =$$

$$= -\left[\mathrm{e}^{-pt}\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]_0^\infty + \int_{\mathbf{R}} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \mathfrak{L}\left[f(t)\right] = F(p).$$

- tím je důkaz završen

6.2.6 Věta – o integrálu obrazu

Nechť $\frac{f(t)}{t} \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$. Pak také $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a označíme-li $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$, pak navíc

$$\mathfrak{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^\infty F(q)\,\text{”}.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- nechť tedy $\frac{f(t)}{t} \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$
- pak tedy existují $\mathtt{K} > 0$, $t_0 > 0$ a $\alpha > 0$ takové, že pro všechna $t > t_0$ platí nerovnost

$$\left|\frac{f(t)}{t}\right| < \mathtt{K}\mathrm{e}^{\alpha t}$$

- odtud

$$|f(t)| < \mathtt{K}t\mathrm{e}^{\alpha t} < \mathtt{K}\,\mathrm{e}^{(\alpha+1)t},$$

  a funkce $f(t)$ tedy také do $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ patří

- potom lze ale snadno z Fubiniovy věty prokázat, že

$$\int_p^\infty F(q)\,\text{”} = \int_p^\infty \int_{\mathbf{R}} f(t)\,\mathrm{e}^{-qt}\,\mathrm{d}t\,\text{”} = \int_{\mathbf{R}}\int_p^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-qt}\,\text{”}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} f(t)\left[-\frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-qt}\right]_p^\infty \mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \mathfrak{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$$

6.2.7 Věta – o substituci v obrazu

Nechť $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$, $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$ a $a \in \mathbf{C}$. Potom

$$\mathfrak{L}\left[\mathrm{e}^{at}f(t)\right] = F(p-a).$$

<u>*Důkaz:*</u>

- není pravděpodobně obtížné prokázat pro $p > a$ následující rovnosti

$$\mathfrak{L}\left[\mathrm{e}^{at}f(t)\right] = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{at}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} f(t)\mathrm{e}^{-(p-a)t}\,\mathrm{d}t = F(p-a)$$

6.2.8 Věta – o limitě obrazu

Nechť $f(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$, $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$ a integrál $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ konverguje. Potom platí

$$\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{p\to 0_+} F(p).$$

Důkaz:

- důkaz je založen na záměně limity a integrálu
- tato záměna je možná zejména kvůli tomu, že existuje majoranta k integrandu $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ nezávislá na p
- je jí dle předpokladů dokazované věty funkce $|f(t)|$, která je podle věty 6.1.13 konvergentní na $\mathbf{R}$
- proto tedy

$$\lim_{p\to 0_+} F(p) = \lim_{p\to 0_+} \int_{\mathbf{R}} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \lim_{p\to 0_+} \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)\big(\lim_{p\to 0} \mathrm{e}^{-pt}\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$$

6.2.9 Věta – o obrazu konvoluce

Nechť $f(t),\, g(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$. Označme $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$ a $G(p) = \mathfrak{L}[g(t)]$. Potom platí

$$\mathfrak{L}\big[(f \star g)(t)\big] = F(p)\cdot G(p).$$

Důkaz:

- nejprve dokážeme, že pro libovolné $f(t),\, g(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ konvoluce $(f \star g)(t)$ existuje
- jelikož jsou obě funkce $f(t),\, g(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ nulové na $(-\infty, 0)$, není na překážku, že nemusejí obecně na $\mathbf{R}$ být integrabilní
- protože platí rovnosti $f(t) = \Theta(t)f(t)$ a $g(t) = \Theta(t)g(t)$, lze při výpočtu konvoluce užít faktu, že

$$(f \star g)(t) = \int_{\mathbf{R}} \Theta(s)\Theta(t-s)f(s)g(t-s)\,\mathrm{d}s = \Theta(t)\int_0^t f(s)g(t-s)\,\mathrm{d}s,$$

  což značí, že konvoluční integrál je fakticky konečný
- dále vzhledem k tomu, že integrand $f(s)g(t-s)$ je na intervalu $\langle 0, t\rangle$ po částech spojitý, integrál $\int_0^t f(s)g(t-s)\,\mathrm{d}s$ vždy existuje
- funkce $h(t) = \Theta(t)\int_0^t f(s)g(t-s)\,\mathrm{d}s$ je navíc po částech spojitá a na intervalu $(-\infty, 0)$ zjevně nulová
- z definice Laplaceova prostoru $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ víme, že existují α, β a $\mathtt{K}, \mathtt{M} > 0$ takové, že od určitého $t_0 \in \mathbf{R}$ platí nerovnosti $|f(t)| \leqslant \mathtt{K}\mathrm{e}^{\alpha t}$, resp. $|g(t)| \leqslant \mathtt{M}\mathrm{e}^{\beta t}$
- dále

$$\big|h(t)\big| = \big|(f \star g)(t)\big| = \left|\int_0^t f(s)g(t-s)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant t\,\mathtt{KM}\,\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{\beta t} \leqslant \mathtt{KM}\,\mathrm{e}^{(\alpha+\beta+1)t}$$

- tím je prokázáno, že $(f \star g)(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$
- dále

$$\mathfrak{L}\big[(f \star g)(t)\big] = \int_{\mathbf{R}} \left[\int_{\mathbf{R}} f(s)\,g(t-s)\,\mathrm{d}s\right] \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} f(s)\,g(t-s)\,\mathrm{e}^{-pt}\;\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} f(s)\,g(t-s)\,\mathrm{e}^{-pt}\;\mathrm{d}t\mathrm{d}s =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} f(s)\left[\int_{\mathbf{R}} g(t-s)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s = \left|\begin{array}{c} t-s=u \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{array}\right| = \int_{\mathbf{R}} f(s)\left[\int_{\mathbf{R}} g(u)\,\mathrm{e}^{-p(u+s)}\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}s =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} f(s)\,\mathrm{e}^{-ps}\left[\int_{\mathbf{R}} g(u)\,\mathrm{e}^{-pu}\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}s = \int_{\mathbf{R}} f(s)\,\mathrm{e}^{-ps}\mathrm{d}s\cdot\int_{\mathbf{R}} g(u)\,\mathrm{e}^{-pu}\,\mathrm{d}u = \mathfrak{L}\left[f(t)\right]\cdot\mathfrak{L}\left[g(t)\right]$$

- upozorňujeme čtenáře, aby v prezentovaném výpočtu dobře promyslel, jakých tvrzení bylo užito a čím byla zaručena možnost jejich užití

6.2.10 Věta

Nechť $f(t)$, $g(t) \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$. Označme $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$ a $G(p) = \mathfrak{L}[g(t)]$. Potom platí

$$\int_0^\infty f(t)\, G(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty F(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Důkaz:

- užijeme-li Fubiniovu větu a definici Laplaceovy transformace, získáme snadno sérii rovností

$$\int_0^\infty f(t)\, G(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} f(t)\, G(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} f(t) \int_{\mathbf{R}} g(s)\, \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{d}s\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} f(t)\, g(s)\, \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{d}t\mathrm{d}s = \int_{\mathbf{R}} g(s) \int_{\mathbf{R}} f(t)\, \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_0^\infty g(t)\, F(t)\, \mathrm{d}t.$$

6.2.11 Laplaceovo desatero

Základní vlastnosti Laplaceovy transformace shrneme nyní do tzv. *Laplaceova desatera* uvedeného v následující tabulce.

No.	Název	Vztah
1.	linearita	$\mathfrak{L}[f(t) + c \cdot g(t)] = \mathfrak{L}[f(t)] + c\,\mathfrak{L}[g(t)]$
2.	změna měřítka ve vzoru	$\mathfrak{L}[f(c\,t)] = \frac{1}{c} F\left(\frac{p}{c}\right)$
3.	obraz derivace	$\mathfrak{L}\left[\dot{f}(t)\right] = p\,\mathfrak{L}[f(t)] - f(0_+)$
4.	derivace obrazu	$\mathfrak{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n F}{\mathrm{d}p^n}$
5.	integrál vzoru	$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right] = \frac{F(p)}{p}$
6.	integrál obrazu	$\mathfrak{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^\infty F(q)$ "
7.	substituce v obraze	$\mathfrak{L}[\mathrm{e}^{at} f(t)] = F(p-a)$
8.	limita obrazu	$\int_0^\infty f(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \lim_{p \to 0_+} F(p)$
9.	obraz konvoluce	$\mathfrak{L}[f(t) \star g(t)] = F(p) \cdot G(p)$
10.	záměna vzoru a obrazu	$\int_0^\infty f(t)\, G(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty F(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$

6.2.12 Poznámka

Odvodit vztah pro inverzní Laplaceovu transformaci je poněkud netriviální. Zde proto uvedeme pouze jeho podobu. Nechť funkce $F(p)$ splňuje následující podmínky:

- pro jisté $c > 0$ je $F(p)$ holomorfní (tzn. komplexně diferencovatelná) na polorovině $\mathrm{Re}(p) > c$
- existují kladná čísla A, B taková, že pro všechna p, pro než $|p| \geqslant B$ a $\mathrm{Re}(p) > c$, platí nerovnost

$$|F(p)| \leqslant \frac{A}{|p|^2}.$$

Potom $F(p)$ je Laplaceovým obrazem funkce $f(t)$ definované předpisem

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}} \int_{\xi - \mathtt{i}\infty}^{\xi + \mathtt{i}\infty} F(p)\, \mathrm{e}^{pt}\, \mathrm{d}p, \tag{6.5}$$

kde $\xi > c$. Hodnota tohoto integrálu nezávisí na volbě ξ a takto definovaná funkce má následující vlastnosti:

- je spojitá na $\mathbf{R}$,
- je nulová pro $t \leqslant 0$,
- je exponenciálního růstu.

Hledání $\mathfrak{L}-$vzorů se ale ve většině případů obejde i bez aplikace vztahu (6.5). Často totiž vystačíme s tabulkou korespondencí a převáděním obrazů na parciální zlomky.

6.2.13 Příklad

Užitím vztahu (6.5) pro inverzní Laplaceovu transformaci nalezněme vzor k funkci $F(p) = \frac{1}{p}$. Podle předešlé definice tedy

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}} \int_{c-\mathtt{i}\infty}^{c+\mathtt{i}\infty} \frac{1}{p}\, \mathsf{e}^{pt}\, \mathtt{d}p = \left| \begin{array}{c} p = c + \mathtt{i}s \\ \\ \mathtt{d}p = \mathtt{i}\mathtt{d}s \end{array} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c+\mathtt{i}s}\, \mathsf{e}^{ct+\mathtt{i}st}\, \mathtt{d}s =$$

$$= \frac{\mathsf{e}^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c - \mathtt{i}s}{c^2+s^2} \big(\cos(st) + \mathtt{i}\sin(st)\big)\, \mathtt{d}s = \frac{\mathsf{e}^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{c^2+s^2} \cos(st)\, \mathtt{d}s + \frac{\mathsf{e}^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{c^2+s^2} \sin(st)\, \mathtt{d}s.$$

Užijeme nyní vztahů

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\, \mathtt{d}x = \frac{\pi}{2}\, \mathsf{e}^{-|a|}, \qquad \int_0^{\infty} \frac{x\sin(ax)}{b^2+x^2}\, \mathtt{d}x = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(b)\, \mathsf{e}^{-|ab|}.$$

Pak tedy

$$f(t) = \frac{c\,\mathsf{e}^{ct}}{\pi c} \frac{\pi}{2}\, \mathsf{e}^{-ct} + \frac{\mathsf{e}^{ct}}{2\pi} \frac{\pi\, \mathsf{e}^{-ct}}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Laplaceovým vzorem funkce $F(p) = \frac{1}{p}$ je tedy funkce $\Theta(t)$.

6.3 Laplaceova transformace pro temperované funkce

Laplaceova transformace musí být z důvodu jejího pozdějšího rozšiřování (do prostoru zobecněných funkcí) nyní zavedena také na prostoru temperovaných funkcí. Jak uvidíme, je tato definice v podstatě triviální, neboť každá temperovaná funkce patří do prostoru Laplaceova. Definice 6.1.16 tudíž zůstává i pro temperované funkce nezměněna.

6.3.1 Úmluva

Symbolem $\mathscr{S}_+(\mathbf{R})$ budeme označovat třídy funkcí $f(t)$, jež jsou jednak z $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ a jednak pro jejich nosič platí inkluze $\operatorname{supp}(f) \subset \mathbf{R}^+$. Jedná se například o funkci $\wp(t) = \Theta(t)\mathsf{e}^{-\frac{1}{t}-t^2}$, jež je vyobrazena na obrázku. Dále označíme symbolem $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^+)$ třídu všech lineárních a zároveň spojitých funkcionálů definovaných nad $\mathscr{S}_+(\mathbf{R})$. Zřejmě $\mathscr{S}_+(\mathbf{R}) \subset \mathscr{S}(\mathbf{R})$ a $\mathscr{S}'(\mathbf{R}) \subset \mathscr{S}'_+(\mathbf{R})$. Třídu $\mathscr{S}_+(\mathbf{R})$ nazýváme *Schwartzovým-Laplaceovým prostorem.*

Obrázek 6.1
Graf temperované funkce $\wp(t) = \Theta(t)\mathsf{e}^{-\frac{1}{t}-t^2}$ s nosičem ležícím v $\mathbf{R}^+$.

6.3.2 Věta

Schwartzův-Laplaceovův prostor je vektorovým prostorem. Zároveň je podprostorem Laplaceova prostoru i prostoru Schwartzova. Tedy $\mathscr{S}_+(\mathbf{R}) \subset\subset \mathscr{P}(\mathbf{R})$ a $\mathscr{S}_+(\mathbf{R}) \subset\subset \mathscr{S}(\mathbf{R})$.

<u>*Důkaz:*</u>

- uzavřenost Schwartzova-Laplaceova prostoru na sčítání a násobení reálnými (komplexními) čísly je zřejmá
- čili $\mathscr{S}_+(\mathbf{R})$ je skutečně vektorovým prostorem
- a protože každá funkce z $\mathscr{S}_+(\mathbf{R})$ zcela jistě splňuje vlastnosti kladené na funkce z $\mathscr{S}(\mathbf{R})$, je tím naplněna definice podprostoru vektorového prostoru $\mathscr{S}(\mathbf{R})$, tudíž $\mathscr{S}_+(\mathbf{R}) \subset\subset \mathscr{S}(\mathbf{R})$

- funkce $f(t) \in \mathscr{S}_+(\mathbf{R})$ je zcela jistě spojitá a nulová pro všechna záporná t
- vzhledem k tomu, že pro $f(t) \in \mathscr{S}_+(\mathbf{R})$, každé $n \in \mathbf{N}_0$ a všechny $m \in \mathbf{N}_0$ musí být z definice Schwartzova prostoru splněno, že
$$\sup_{t\in\mathbf{R}} \left| t^n \frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}t^m} \right| < \infty,$$
vidíme odsud, že při volbě $n = m = 0$ musí být $\sup_{t\in\mathbf{R}} |f(t)| < \infty$
- existuje tedy $\mathtt{K} \in \mathbf{R}$ tak, že
$$(\forall t \in \mathbf{R})(\forall \alpha \in \mathbf{R}_0^+) : \quad \big|f(t)\big| < \mathtt{K} \leqslant \mathtt{K}\, \mathrm{e}^{\alpha t}$$
- všechny funkce $f(t) \in \mathscr{S}_+(\mathbf{R})$ mají tudíž index růstu nulový, čímž je naplněna poslední vlastnost nutná pro zařazení funkce $f(t) \in \mathscr{S}_+(\mathbf{R})$ do Laplaceova prostoru $\mathscr{P}(\mathbf{R})$

6.3.3 Poznámka

Není obtížné se přesvědčit, že pro každou funkci $f(t) \in \mathscr{S}_+(\mathbf{R})$ platí, že $\operatorname{ind}(f) = 0$. Pro její Laplaceův obraz tudíž podle definice 6.1.16 platí
$$F(p) = \mathfrak{L}\big[f(t)\big] := \Theta(p) \int_{\mathbf{R}} f(t) \cdot \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t.$$
Přitom všechna pravidla z Laplaceova desatera 6.2.11 zůstávají v platnosti. Díky vlastnostem temperovaných funkcí z prostoru $\mathscr{S}_+(\mathbf{R})$ lze navíc třetí vlastnost upravit do tvaru $\mathfrak{L}[\dot{f}(t)] = p\, \mathfrak{L}[f(t)]$, neboť pro všechny funkce $f(t) \in \mathscr{S}_+(\mathbf{R})$ platí, že $f(0) = 0$.

6.4 Laplaceova transformace pro zobecněné funkce

Učiníme nyní pokus o rozšíření Laplaceovy transformace z prostoru klasických funkcí do prostoru funkcí zobecněných. Jak záhy zjistíme, není toto rozšíření nikterak triviální. S ohledem na fakt, že budeme zobecněnou Laplaceovu transformaci užívat pouze okrajově, ustoupíme proto od matematicky korektního zavedení a omezíme se pro tentokrát na formálnější pojetí.

6.4.1 Příklad

Pokusme se nyní zkonstruovat rozšíření Laplaceovy transformace z prostoru klasických funkcí do prostoru jednodimenzionálních zobecněných funkcí. K tomu použijeme následující motivační výpočet. Nechť f je vhodná regulární zobecněná funkce. Pak platí
$$\big(f(p), \mathfrak{L}[\varphi]\big) = \left(f(p), \int_{\mathbf{R}} \varphi(t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t\right) = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} f(p)\varphi(t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t\mathrm{d}p =$$
$$= \int_{\mathbf{R}} \varphi(t) \left(\int_{\mathbf{R}} f(p)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}p\right) \mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} \varphi(t)\, \mathfrak{L}[f](t)\, \mathrm{d}t = \big(\mathfrak{L}[f](t), \varphi(t)\big).$$
Tento vztah se jeví adeptem na definici Laplaceovy transformace v $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Závažným problémem vztahu
$$\big(f(p), \mathfrak{L}[\varphi]\big) = \big(\mathfrak{L}[f](p), \varphi(p)\big)$$
je ale skuteňost, že i když je funkce $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$, její $\mathfrak{L}$–obraz $\Phi(p) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t$ obecně v $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ ležet nemusí. Funkce $\Phi(p)$ je sice vždy třídy $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$, ale její nosič nemusí být omezený. Proto je nutno pro účely integrálních transformací užít teorii temperovaných zobecněných funkcí (viz oddíl 5.9), kde se omezenost nosiču testovacích funkcí nepožaduje.

6.4.2 Definice

Nechť $f(t) \in \mathscr{S}_+'(\mathbf{R})$ je temperovaná zobecněná funkce. Existuje-li na třídě $\mathscr{S}_+(\mathbf{R})$ testovacích temperovaných funkcí $\varphi(t)$ funkcionál $\big(f, \mathfrak{L}[\varphi(t)]\big)$, pak *Laplaceovým obrazem distribuce* $f(t)$ budeme rozumět distribuci $F(p)$, pro níž platí rovnost
$$\big(F(p), \varphi(p)\big) := \Big(f(t), \mathfrak{L}\big[\varphi(p)\big](t)\Big). \tag{6.6}$$

6.4.3 Poznámka

Nekorektnost definice 6.4.2 spočívá zejména ve faktu, že i když je $f(t) \in \mathscr{S}_+(\mathbf{R})$, nemusí být obecně splněno, že $\mathfrak{L}[f(t)] \in \mathscr{S}_+(\mathbf{R})$. To je velká nevýhoda Laplaceovy transformace oproti transformaci Fourierově. Ačkoliv např. funkce $\wp(t) = \Theta(t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}-t^2}$ spadá do $\mathscr{S}_+(\mathbf{R})$, poměrně snadno zjistíme, že

$$\lim_{p\to 0} \mathfrak{L}\big[\wp(t)\big] = \lim_{p\to 0} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}-t^2}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}-t^2}\,\mathrm{d}t \neq 0,$$

což implikuje skutečnost, že $\mathfrak{L}\big[\wp(t)\big] \notin \mathscr{S}_+(\mathbf{R})$. S ohledem na nekorektnost definice 6.4.2 je třeba brát následující odvození pouze jako ilustrativní. Pro korektní zavedení zobecněné Laplaceovy transformace lze nahlédnout do skript [19], str. 108–119, kde jsou všechna tvrzení precizně provedena.

6.4.4 Poznámka

Celá řada vlastností prezentovaných v předešlé sekci pro klasické funkce, má svůj ekvivalent také v distribucích. Ovšem některé vlastnosti (zejména ty, jež se týkali hodnot funkcí) nelze do prostoru $\mathscr{S}'_+(\mathbf{R})$ převést. Ukážeme nyní, jak se změní vztah (6.2) pro Laplaceův obraz derivace, bude-li zkoumán v $\mathscr{S}'_+(\mathbf{R})$. Pak tedy za použití vztahu (6.3) dostaneme

$$\Big(\mathfrak{L}\big[\dot{f}\big](p), \varphi(p)\Big) = \Big(\dot{f}(t), \mathfrak{L}\big[\varphi(p)\big](t)\Big) = -\left(f(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathfrak{L}\big[\varphi(p)\big]\right) =$$

$$= \big(f(t), \mathfrak{L}\big[p\,\varphi(p)\big]\big) = \big(\mathfrak{L}\big[f(t)\big](p), p\,\varphi(p)\big) = \big(p\,\mathfrak{L}\big[f(t)\big](p), \varphi(p)\big)\,.$$

Tím se vztah pro Laplaceův obraz derivace v $\mathscr{S}'_+(\mathbf{R})$ modifikuje na $\mathfrak{L}\big[\dot{f}(t)\big] = p\,\mathfrak{L}\big[f(t)\big]$. Povšimněte si odlišnosti od korespondence (6.2).

6.4.5 Příklad

Hledejme v rámci tohoto příkladu Laplaceův obraz singulární distribuce $\delta(t-c)$, kde $c \in \mathbf{R}$. Z definice vyplývá

$$\Big(\mathfrak{L}\big[\delta(t-c)\big], \varphi(p)\Big) = \Big(\delta(t-c), \mathfrak{L}\big[\varphi(p)\big]\Big) = \left(\delta(t-c), \int_{\mathbf{R}} \varphi(p)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}p\right) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(p)\,\mathrm{e}^{-pc}\,\mathrm{d}p = \big(\mathrm{e}^{-pc}, \varphi(p)\big)\,,$$

a tudíž $\mathfrak{L}[\delta(t-c)] = \mathrm{e}^{-cp}$, speciálně $\mathfrak{L}[\delta(t)] = 1$. Podobně lze také prokázat, že

$$\Big(\mathfrak{L}\big[\Theta_\mu\big], \varphi(p)\Big) = \Big(\Theta_\mu(t), \mathfrak{L}\big[\varphi(p)\big]\Big) = \int_\mu^\infty \mathfrak{L}\big[\varphi(p)\big](t)\,\mathrm{d}t = \int_\mu^\infty \int_{\mathbf{R}} \varphi(p)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}p\mathrm{d}t =$$
$$= \int_{\mathbf{R}} \varphi(p) \int_\mu^\infty \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}p = \int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{e}^{-p\mu}}{p}\varphi(p)\,\mathrm{d}p = \left(\frac{\mathrm{e}^{-p\mu}}{p}, \varphi(p)\right).$$

Proto $\mathfrak{L}\big[\Theta_\mu\big] = \frac{\mathrm{e}^{-p\mu}}{p}$, speciálně $\mathfrak{L}\big[\Theta(t)\big] = \frac{1}{p}$. Uvedený výpočet také potvrzuje fakt, že $\mathfrak{L}\big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Theta_\mu)\big] = p\mathfrak{L}\big[\Theta_\mu\big] = 1$.

6.5 Aplikace Laplaceovy transformace

Po poměrně rozsáhlém zavedení Laplaceovy transformace přistoupíme nyní k demonstraci jejích aplikací. Globálně vzato, je Laplaceova transformace hojně užívaná při řešení diferenciálních rovnic a jejich soustav, při výpočtech integrálů, při řešení integrodiferenciálních rovnic, konvolucí a podobně. V partii matematiky zvané rovnice matematické fyziky lze Laplaceovu transformaci s výhodou použít při řešení parciálních diferenciálních rovnic (např. rovnice vedení tepla, vlnové rovnice, Schrödingerovy rovnice), jak se přesvědčíme v následující kapitole. Laplaceova transformace se s oblibou využívá také v elektrotechnice (viz např. kniha [17]). Při výpočtech využívajících $\mathfrak{L}-$transformaci je nutné osvojit si základní Laplaceovo desatero (viz výše) a také základní laplaceovské korespondence. Ty shrneme v následujícím textu.

6.5.1 Tabulka Laplaceových korespondencí

V následující tabulce uvedeme základní korespondence Laplaceovy transformace. Jejich tvary by měl čtenář odvodit v rámci cvičení.

Laplaceův vzor	**Laplaceův obraz**
$\delta(t)$	1
$\delta(t-\tau)$	$\mathrm{e}^{-p\tau}$
$\Theta(t)$	$\frac{1}{p}$
$\Theta(t)\,t^n \quad (n \in \mathbf{N}_0)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\Theta(t)\,t^\alpha \quad (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
$\Theta(t)\,\mathrm{e}^{\mu t}$	$\frac{1}{p-\mu}$
$\Theta(t)\,\sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
$\Theta(t)\,\cos(\beta t)$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$
$\Theta(t)\,\mathrm{e}^{\mu t}\cos(\omega t)$	$\frac{p-\mu}{(p-\mu)^2+\omega^2}$
$\Theta(t)\,\mathrm{e}^{\mu t}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p-\mu)^2+\omega^2}$
$\Theta(t)\,\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\Theta(t)\,\cosh(\omega t)$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$

6.5.2 Příklad

Jelikož jedním ze základních vztahů pro $\mathfrak{L}-$transformaci, je vztah

$$\mathfrak{L}\left[\dot{f}(t)\right] = p\,\mathfrak{L}\left[f(t)\right] - f(0_+)$$

pro derivaci vzoru (viz tabulka 6.2.11), značí to de facto, že $\mathfrak{L}-$transformace převádí obyčejnou diferenciální rovnici na rovnici algebraickou, jejíž řešení lze pak snadno nalézt za pomocí učiva lineární algebry. Přistupme tedy k řešení rovnice

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = \mathrm{e}^t$$

za podmímek $y(0) = 0$ a $\dot{y}(0) = -2$. Označme $Y = \mathfrak{L}[y]$. Pak tedy

$$\mathfrak{L}[\dot{y}] = pY, \qquad \mathfrak{L}[\ddot{y}] = p^2Y + 2.$$

Po aplikaci Laplaceovy transformace na zadanou rovnici tedy obdržíme algebraickou rovnici

$$p^2Y + 2 + 2pY + Y = \frac{1}{p-1},$$

jejímž řešením je funkce

$$Y(p) = \frac{3-2p}{(p-1)(p+1)^2}.$$

Nyní zbývá nalézt k funkci $Y(p)$ příslušný vzor. K tomu účelu rozložíme $Y(p)$ na parciální zlomky

$$Y(p) = \frac{1}{4\,(-1+p)} - \frac{5}{2\,(1+p)^2} - \frac{1}{4\,(1+p)}$$

a každému zlomku již snadno nalezneme příslušný vzor. Celkem tedy

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(\sinh(t) - 5t\,\mathrm{e}^{-t}\right).$$

6.5.3 Příklad

Pro parametry $a > 0$ a $b \in \mathbf{R}$ vypočteme nyní Laplaceovou transformací určitý integrál

$$\int_0^\infty \frac{\mathsf{e}^{-at}\sin^2(bt)}{t}\,\mathsf{d}t.$$

Jelikož

$$\frac{\mathsf{e}^{-at}\sin^2(bt)}{t} = \mathsf{e}^{-at}\,\frac{1-\cos(2bt)}{2t}$$

a

$$\mathfrak{L}\big[\Theta(t)\big] = \frac{1}{p}, \qquad \mathfrak{L}\big[\Theta(t)\cos(2bt)\big] = \frac{p}{p^2+4b^2},$$

dostáváme z linearity snadno výchozí vztah

$$\mathfrak{L}\big[\Theta(t)\,(1-\cos(2bt))\big] = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4b^2}.$$

Užijeme-li v této fázi vztah č. 6 z Laplaceova desatera 6.2.11, získáme

$$\mathfrak{L}\left[\Theta(t)\frac{1-\cos(2bt)}{t}\right] = \int_p^\infty \left(\frac{1}{q} - \frac{q}{q^2+4b^2}\right) " = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p^2+4b^2}{p^2}\right)$$

a poté za použítí vztahu č. 7 z Laplaceova desatera dopočítáme Laplaceův obraz původního integrandu, tj.

$$\mathfrak{L}\left[\Theta(t)\frac{\mathsf{e}^{-at}\sin^2(bt)}{t}\right] = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{(p+a)^2+4b^2}{(p+a)^2}\right).$$

Ze vztahu $\int_0^\infty f(\tau)\,\mathsf{d}\tau = \lim_{p\to 0_+} F(p)$ pak snadno vyplývá, že

$$\int_0^\infty \frac{\mathsf{e}^{-at}\sin^2(bt)}{t}\,\mathsf{d}t = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{a^2+4b^2}{a^2}\right).$$

I na tomto příkladě je zřetelně patrno, jak užitečné je užití Laplaceovy transformace. Ještě markantnější bude výhoda tohoto postupu v následujícím příkladě.

6.5.4 Příklad

Vypočtěme určitý integrál

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,\mathsf{d}x.$$

Užijeme vztah

$$\int_0^\infty f(t)\,G(t)\,\mathsf{d}t = \int_0^\infty F(t)\,g(t)\,\mathsf{d}t$$

z Laplaceova desatera. Jelikož

$$\mathfrak{L}[\Theta(t)\,\cos(at)] = \frac{p}{p^2+a^2}$$

a

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+p^2}\right] = \Theta(t)\,\sin(t),$$

přejde zadaný integrál do tvaru

$$I = \int_0^\infty \frac{x\,\sin(x)}{a^2+x^2}\,\mathsf{d}x.$$

Zderivujeme-li dále zadaný integrál podle parametru a, (doporučujeme čtenáři, aby ověřil předpoklady příslušné věty) dostáváme

$$\frac{\mathsf{d}I}{\mathsf{d}a} = -\int_0^\infty \frac{x\,\sin(ax)}{1+x^2}\,\mathsf{d}x.$$

Dále pak

$$I = \frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{x\,\sin(x)}{1+(x/a)^2}\,\mathsf{d}x = \left|\begin{array}{c} x = ay \\ \\ \mathsf{d}x = a\,\mathsf{d}y \end{array}\right| = \int_0^\infty \frac{y\,\sin(ya)}{1+y^2}\,\mathsf{d}y = -\frac{\mathsf{d}I}{\mathsf{d}a}.$$

Tím jsme obdrželi diferenciální rovnici pro hodnotu neznámého integrálu. Snadno například separací vypočteme, že pro kladné a platí

$$I = \mathtt{C}\,\mathsf{e}^{-a},$$

kde konstantu $\mathtt{C}$ triviálně určíme z faktu, že $I(0) = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathsf{d}x = \frac{\pi}{2}$. Uzavíráme tedy, že

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,\mathsf{d}x = \frac{\pi}{2}\,\mathsf{e}^{-|a|}.$$

6.5.5 Příklad

Laplaceova transformace může být s výhodou aplikována také při výpočtech konvolucí. Pro reálné parametry $a, b \in \mathbf{R}$ vypočtěme konvoluci $\Theta(t)\,\mathsf{e}^{at} \star \Theta(t)\,\mathsf{e}^{bt}$. Jelikož

$$\mathfrak{L}\left[\Theta(t)\,\mathsf{e}^{at}\right] = \frac{1}{p-a}$$

lze při použití dokázaného vztahu č. 9 z Laplaceova desatera 6.2.11 snadno nahlédnou, že

$$\mathfrak{L}\left[\Theta(t)\,\mathsf{e}^{at} \star \Theta(t)\,\mathsf{e}^{bt}\right] = \mathfrak{L}\left[\Theta(t)\,\mathsf{e}^{at}\right] \cdot \mathfrak{L}\left[\Theta(t)\,\mathsf{e}^{bt}\right] = \frac{1}{(p-a)(p-b)}.$$

Je-li $a = b$, pak vzorem funkce $\frac{1}{(p-a)^2}$ je funkce $f(t) = \Theta(t)\,t\,\mathsf{e}^{at}$ a tudíž

$$\Theta(t)\,\mathsf{e}^{at} \star \Theta(t)\,\mathsf{e}^{at} = \Theta(t)\,t\,\mathsf{e}^{at}.$$

Pro $a \neq b$ je třeba zlomek $\frac{1}{(p-a)(p-b)}$ rozložit na parciální zlomky, konkrétně

$$\frac{1}{(p-a)(p-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p-b}\right).$$

Pak tedy

$$\Theta(t)\,\mathsf{e}^{at} \star \Theta(t)\,\mathsf{e}^{bt} = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p-b}\right)\right] = \frac{\mathsf{e}^{at} - \mathsf{e}^{bt}}{a-b}.$$

6.5.6 Příklad

Další z možných aplikací Laplaceovy transformace lze nalézt při řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic. Uvažme např. soustavu

$$\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 + \dot{y}_2 - y_1 = \mathsf{e}^t - 2$$

$$2\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 - 2\dot{y}_1 + y_2 = -t.$$

Budeme hledat taková řešení $y_1 = y_1(t)$ a $y_2 = y_2(t)$, pro která $y_1(0_+) = \dot{y}_1(0_+) = 0$, resp. $y_2(0_+) = \dot{y}_2(0_+) = 0$. Označme $Y_1 = \mathfrak{L}[y_1]$ a $Y_2 = \mathfrak{L}[y_2]$. Aplikujeme-li Laplaceovu transformaci na zadanou soustavu, obdržíme algebraickou soustavu

$$p^2 Y_1 - p^2 Y_2 + pY_2 - Y_1 = \frac{1}{p-1} - \frac{2}{p}$$

$$2p^2 Y_1 - p^2 Y_2 + 2pY_1 + Y_2 = -\frac{1}{p^2},$$

kterou upravíme do tvaru

$$(p+1)Y_1 - pY_2 = \frac{2-p}{p(p-1)^2}$$

$$2pY_1 + (1-p)Y_2 = -\frac{1}{p^2(p+1)}.$$

Odtud pak

$$Y_1 = -\frac{1+2\,p-p^2}{p^5-p}$$

$$Y_2 = -\frac{1-2\,p+5\,p^2-2\,p^3}{(p-1)^2\,p^2\,(1+p^2)},$$

což po poněkud zdlouhavějším rozkladu na parciální zlomky

$$Y_1 = \frac{-1}{2\,(p-1)} + \frac{1}{p} + \frac{1}{2\,(p+1)} + \frac{1-p}{1+p^2}$$

$$Y_2 = -\frac{1}{(p-1)^2} + \frac{2}{p-1} - \frac{1}{p^2} - \frac{2\,p}{1+p^2}$$

vede k výsledku

$$y_1(t) = \Theta(t)\big[\sin(t) - \cos(t) + 1 - \sinh(t)\big]$$

$$y_2(t) = \Theta(t)\,\big[\mathrm{e}^t\,(2-t) - t - 2\,\cos(t)\big].$$

6.5.7 Příklad

Laplaceovou transformací řešme v $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$ rovnici

$$\ddot{u} - 8\dot{u} + 16u = \delta(t).$$

Aplikujeme-li na zadanou rovnici $\mathfrak{L}-$transformaci, dostáváme pro $U = \mathfrak{L}(u)$ rovnost

$$p^2U - 8pU + 16U = 1,$$

odkud

$$U = \frac{1}{p^2 - 8p + 16} = \frac{1}{(p-4)^2}.$$

Zde již snadno nahlédneme, že

$$u(t) = \Theta(t)\,t\,\mathrm{e}^{4t}.$$

Připomínáme, že pro aplikaci Laplaceovy transformace v $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$ byl užit vztah $\mathfrak{L}\big[\dot{f}(t)\big] = p\,\mathfrak{L}\big[f(t)\big]$ platný pro distribuce.

6.5.8 Příklad

Řešme určitý integrál $\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x}\mathrm{d}x$. Efektivní způsob, jak zadaný integrál vypočítat je užít vztah č. 10 z Laplaceova desatera. Jelikož platí korespondence

$$\mathfrak{L}\big[\Theta(x)\sin(\alpha x)\big] = \Theta(p)\frac{\alpha}{\alpha^2+p^2}, \quad \mathfrak{L}\big[\Theta(x)\big] = \frac{\Theta(p)}{p},$$

platí podle uvedeného pravidla rovnosti

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{arctg}\big(\frac{x}{\alpha}\big)\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\alpha).$$

6.6 Fourierova transformace pro klasické funkce

Fourierovu transformaci zavedeme narozdíl od Laplaceovy transformace již jako vícerozměrnou.

6.6.1 Definice

Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) \,:\, \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{C}$, jež je vybrána ze Schwartzova prostoru $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$. *Fourierovou transformací* rozumíme integrální operaci, která funkci $f(\vec{x})$ přiřazuje funkci

$$F(\vec{\xi}) = \mathfrak{F}\big[f(\vec{x})\big] := \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\vec{\xi}}\,\mathrm{d}\vec{x}. \tag{6.7}$$

Přitom symbol $\vec{x}\vec{\xi}$ představuje standardní skalární součin $\sum_{k=1}^n x_k\xi_k$. Funkci $F(\vec{\xi})$, pokud existuje, nazýváme *Fourierovým obrazem* funkce $f(\vec{x})$. Funkci $f(x)$ nazýváme *vzorem pro Fourierovu transformaci*. Výše uvedený vztah mezi vzorem a obrazem se nazývá *Fourierovou korespondencí.*

6.6.2 Poznámka

Zde pouze připomínáme rovnosti

$$\mathrm{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\vec{\xi}} = \prod_{k=1}^{r} \big(\cos(x_k\xi_k) + \mathtt{i}\sin(x_k\xi_k)\big), \quad \left|\mathrm{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\vec{\xi}}\right| = 1.$$

6.6.3 Věta

Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{C}$, jež patří do třídy $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$. Pak $\mathfrak{F}[f(\vec{x})]$ existuje.

<u>*Důkaz:*</u>

- jelikož $f(\vec{x})$ patří do třídy $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$, platí, že existuje jisté $\mathtt{K} > 0$ takové, že pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{E}^r$ je

$$|x_1^2\, x_2^2\, \ldots\, x_r^2 \cdot f(\vec{x})| < \mathtt{K}.$$

- dále platí, že funkce $f(\vec{x})$ je třídy $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$, a tedy na každé uzavřené krychli $Q = \langle -\ell, \ell \rangle^r$ integrál

$$\int_Q f(\vec{x}) \cdot \mathrm{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\vec{\xi}}\, \mathrm{d}\vec{x}$$

  existuje a je konečný

- to vyplývá z věty, která tvrdí, že Lebesgueův integrál ze spojité funkce na kompaktní množině je vždy konečný
- zbývá tedy rozřešit konvergenci integrálu vně krychle Q
- jelikož je ale na $\mathbf{E}^r \setminus Q$ splněna nerovnost

$$\left|f(\vec{x}) \cdot \mathrm{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\vec{\xi}}\right| = \left|f(\vec{x})\right| < \frac{\mathtt{K}}{x_1^2\, x_2^2\, \ldots\, x_n^2},$$

  platí pak

$$\int_{\mathbf{E}^r \setminus Q} \left|f(\vec{x}) \cdot \mathrm{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\vec{\xi}}\right| \mathrm{d}\vec{x} \leqslant 2^r \int_\ell^\infty \int_\ell^\infty \cdots \int_\ell^\infty \frac{\mathtt{K}}{x_1^2\, x_2^2\, \ldots\, x_r^2}\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_r =$$

$$= 2^r \mathtt{K} \left(\int_\ell^\infty \frac{1}{x_1^2}\, \mathrm{d}x_1 \right)^r = 2^r \mathtt{K} \left(\left[-\frac{1}{x_1} \right]_\ell^\infty \right)^r = \frac{2^r}{\ell^r} \mathtt{K} \in \mathbf{R}$$

- uzavíráme tedy, že integrál

$$\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x}) \cdot \mathrm{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\vec{\xi}}\, \mathrm{d}\vec{x}$$

  existuje pro jakoukoli temperovanou funkci, a proto $\mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right]$ existuje

6.6.4 Poznámka

Funkce $f(x) = \Theta(x)\, \mathrm{e}^{ax}$, $f(x) = c\,\Theta(x)$ a $f(x) = \Theta(x)\, x^q$, kde $a, c \in \mathbf{R}$ a $q \in \mathbf{Z}^+$, které patřili do třídy $\mathscr{P}(\mathbf{R})$, a tedy k nim existoval Laplaceův vzor, bohužel do třídy $\mathscr{S}(\mathbf{E})$ nepatří a klasický Fourierův obraz k nim neexistuje. Podobně např. funkce $\sin(ax)$, $\cos(ax)$, 1 nejsou klasicky fourierovsky transformovatelné. Jak uvidíme, rozšíříme-li později Fourierovu transformaci do $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$, rozšíříme tím podstatně také třídu fourierovsky transformovatelných funkcí tak, že např. právě funkce $\sin(ax)$, $\cos(ax)$, 1 budou mít příslušný Fourierův obraz.

6.7 Vlastnosti Fourierovy transformace

Vzhledem k faktu, že našim záměrem je prezentovat zejména praktické aplikace Fourierovy transformace, je na tomto místě nezbytné zformulovat a dokázat co nejvíce univerzálních pravidel pro manipulaci s fourierovskými obrazy či vzory.

6.7.1 Věta

Nechť funkce $f(\vec{x})$ patří do Schwartzova prostoru, tj. $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$. Pak také příslušný Fourierův obraz do Schwartzova prostoru patří, čili $\mathfrak{F}[f(\vec{x})] \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$.

Důkaz:

- funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ je podle věty 6.6.3 integrabilní, a tedy integrál $\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x}) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\vec{\xi}}\,\mathrm{d}\vec{x}$ existuje pro každé $\vec{\xi} \in \mathbf{E}^r$
- protože $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ klesá do nekonečna rychleji než jakákoli mocnina $\|\vec{x}\|^{-1}$, lze při derivaci Fourierova obrazu užít větu o záměně derivace a integrálu
- tedy platí, že

$$\mathcal{D}^\alpha \mathfrak{F}\big[f(\vec{x})\big](\vec{\xi}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x}) \cdot (\mathrm{i}\vec{x})^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\vec{\xi}}\,\mathrm{d}\vec{x} = \mathfrak{F}\big[(\mathrm{i}\vec{x})^\alpha f(\vec{x})\big](\vec{\xi}) \tag{6.8}$$

- funkce $F(\vec{\xi}) := \mathfrak{F}\big[f(\vec{x})\big](\vec{\xi})$ je tedy nekonečně diferencovatelná na $\mathbf{E}^r$
- podle předpokladů ale pro libovolný multiindex $\alpha \in \mathbf{N}_0^r$ také funkce $\mathcal{D}^\alpha f(\vec{x})$ klesá do nekonečna rychleji než jakákoli mocnina $\|\vec{x}\|^{-1}$
- integrací per partes pak dostáváme

$$\mathfrak{F}\big[\mathcal{D}^\alpha f(\vec{x})\big](\vec{\xi}) = \int_{\mathbf{E}^r} \big(\mathcal{D}^\alpha f(\vec{x})\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\vec{\xi}}\,\mathrm{d}\vec{x} = (-\mathrm{i}\vec{\xi})^\alpha \mathfrak{F}\big[f(\vec{x})\big](\vec{\xi}) \tag{6.9}$$

- ze vztahů (6.8) a (6.9) pak pro každé dva multiindexy $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^r$ plyne

$$\vec{\xi}^\beta\, \mathcal{D}^\alpha \mathfrak{F}\big[f(\vec{x})\big](\vec{\xi}) = \mathrm{i}^{|\alpha|+|\beta|}\, \mathfrak{F}\Big[\mathcal{D}^\beta\big(\vec{x}^\alpha f(\vec{x})\big)\Big](\vec{\xi})$$

- proto platí

$$\Big|\vec{\xi}^\beta \mathcal{D}^\alpha \mathfrak{F}\big[f(\vec{x})\big](\vec{\xi})\Big| \leqslant \int_{\mathbf{E}^r} \big|\mathcal{D}^\beta\big(\vec{x}^\alpha f(\vec{x})\big)\big|\,\mathrm{d}\vec{x}$$

- a protože je dle předpokladů $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$, tedy i $\vec{x}^\alpha f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a $\mathcal{D}^\beta\big(\vec{x}^\alpha f(\vec{x})\big) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$, integrál na pravé straně konverguje, čili výraz $\Big|\vec{\xi}^\beta \mathcal{D}^\alpha \mathfrak{F}\big[f(\vec{x})\big](\vec{\xi})\Big|$ je omezen
- tudíž $\mathfrak{F}[f(\vec{x})] \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$

6.7.2 Věta – o linearitě

Nechť $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a $c \in \mathbf{C}$. Pak $f(\vec{x}) + c \cdot g(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a platí

$$\mathfrak{F}\left[f(\vec{x}) + c \cdot g(\vec{x})\right] = \mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right] + c\,\mathfrak{F}\left[g(\vec{x})\right].$$

Důkaz:

- i v tomto případě se stejně jako v případě Laplaceovy transformace jedná se o triviální důsledek linearity Lebesgueova integrálu
- navíc to, že $f(\vec{x}) + c \cdot g(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$, bylo již dokázáno ve větě 5.9.3

6.7.3 Věta – o změně měřítka ve vzoru

Nechť $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a $F(\vec{\xi}) = \mathfrak{F}[f(\vec{x})]$. Nechť dále $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Pak $f\left(c\,\vec{x}\right) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a platí rovnost

$$\mathfrak{F}\big[f(c\,\vec{x})\big] = \frac{1}{|c|^r}\, F\left(\frac{\vec{\xi}}{c}\right).$$

Důkaz:

- ukázat, že $f\left(c\,\vec{x}\right) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$, je velice jednoduché
- pro příslušný Fourierův obraz dále platí

$$\mathfrak{F}\left[f(c\,\vec{x})\right] = \int_{\mathbf{E}^r} f(c\vec{x})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\vec{\xi}}\,\mathrm{d}\vec{x} = \left| \begin{array}{c} \vec{y} = c\,\vec{x} \\ \\ \mathrm{d}\vec{y} = |c|^r \mathrm{d}\vec{x} \end{array} \right| = \frac{1}{|c|^r} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{y})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{y}\frac{\vec{\xi}}{c}}\,\mathrm{d}\vec{x} = \frac{1}{|c|^r}\, F\left(\frac{\vec{\xi}}{c}\right).$$

6.7.4 Věta – o obrazu derivace

Nechť $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$. Nechť $\alpha \in \mathbf{N}_0^r$ je libovolný multiindex. Pak platí rovnost

$$\mathfrak{F}\left[\mathcal{D}^\alpha f(\vec{x})\right] = (-\mathtt{i}\vec{\xi})^\alpha\, \mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right]. \tag{6.10}$$

<u>*Důkaz:*</u>

- dokazovanou rovnost nejprve prokážeme pro parciální derivaci podle vybrané proměnné x_k
- snadno nahlédneme, že platí následující série rovností

$$\mathfrak{F}\left[\frac{\partial f}{\partial x_k}\right] = \int_{\mathbf{E}^r} \frac{\partial f}{\partial x_k}\, \mathrm{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\vec{\xi}}\, \mathrm{d}\vec{x} = \left| \begin{array}{cc} u = \mathrm{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\vec{\xi}} & \frac{\partial v}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \\ \frac{\partial u}{\partial x_k} = (\mathtt{i}\xi_k)\, \mathrm{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\vec{\xi}} & v = f(\vec{x}) \end{array} \right| =$$

$$= -\mathtt{i}\,\xi_k \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\, \mathrm{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\vec{\xi}}\, \mathrm{d}x = -\mathtt{i}\,\xi_k\, \mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right]$$

- zde bylo užito metody per partes, Fubiniovy věty a rovností z poznámky 5.9.2
- dále lze analogickými postupy dokázat, že např.

$$\mathfrak{F}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell}\right] = (-\mathtt{i}\,\xi_k)(-\mathtt{i}\,\xi_\ell)\, \mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right]$$

- rekurentně jsme tedy dokázali, že pro jakýkoli multiindex platí rovnost $\mathfrak{F}\left[\mathcal{D}^\alpha f(\vec{x})\right] = (-\mathtt{i}\vec{\xi})^\alpha\, \mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right]$

6.7.5 Věta – o derivaci obrazu

Nechť $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$, $F(\vec{\xi}) = \mathfrak{F}[f(\vec{x})]$ a $\alpha \in \mathbf{N}_0^r$ je libovolný multiindex. Pak také $(\mathtt{i}\vec{x})^\alpha f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E})$ a platí rovnost

$$\mathcal{D}^\alpha \mathfrak{F}\big[f(\vec{x})\big] = \mathfrak{F}\big[(\mathtt{i}\vec{x})^\alpha f(\vec{x})\big]. \tag{6.11}$$

<u>*Důkaz:*</u>

- přesvědčit se o platnosti vztahu $(\mathtt{i}\vec{x})^\alpha f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E})$ je značně jednoduché
- rovnost (6.11) dokážeme induktivně
- stačí ukázat, že

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k}\, \mathfrak{F}\big[f(\vec{x})\big] = \mathfrak{F}\big[\mathtt{i}x_k f(\vec{x})\big]$$

- to je ale také snadné, a sice při použití věty o derivaci integrálu podle parametru
- derivujeme-li totiž definiční vztah

$$F(\vec{\xi}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x}) \cdot \mathrm{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\vec{\xi}}\, \mathrm{d}\vec{x}$$

  podle vybrané proměnné ξ_k, jsou na třídě $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ splněny předpoklady citované věty, a tudíž

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k}\, F(\vec{\xi}) = \int_{\mathbf{E}^r} \frac{\partial}{\partial \xi_k} f(\vec{x}) \cdot \mathrm{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\vec{\xi}}\, \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} \mathtt{i}x_k f(\vec{x}) \cdot \mathrm{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\vec{\xi}}\, \mathrm{d}\vec{x} = \mathfrak{F}\big[\mathtt{i}x_k f(\vec{x})\big]$$

- dále snadno např.

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_\ell}\, F(\vec{\xi}) = \mathfrak{F}\big[(\mathtt{i}x_k)(\mathtt{i}x_\ell) f(\vec{x})\big]$$

- zřejmá úvaha pak vede k důkazu celého tvrzení

6.7.6 Věta – o substituci v obrazu

Nechť $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$, $F(\vec{\xi}) = \mathfrak{F}[f(\vec{x})]$ a $\vec{\mu} \in \mathbf{C}$. Potom $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\mu}\vec{x}} f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a navíc

$$\mathfrak{F}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\mu}\vec{x}} f(\vec{x})\right] = F(\vec{\xi} + \vec{\mu}).$$

Důkaz:

- fakt, že $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\mu}\vec{x}} f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ je snadným důsledkem definice Schwartzova prostoru
- užijeme snadné úpravy

$$\mathfrak{F}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\mu}\vec{x}} f(\vec{x})\right] = \int_{\mathbf{E}^r} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\mu}\vec{x}} f(\vec{x})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\vec{\xi}}\, \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}(\vec{\xi}+\vec{\mu})}\, \mathrm{d}\vec{x} = F(\vec{\xi} + \vec{\mu})$$

6.7.7 Věta – o substituci ve vzoru

Nechť $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$, $F(\vec{\xi}) = \mathfrak{F}[f(\vec{x})]$ a $\vec{\mu} \in \mathbf{C}$. Potom $f(\vec{x} - \vec{\mu}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a navíc

$$\mathfrak{F}\left[f(\vec{x} - \vec{\mu})\right] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\mu}\vec{\xi}} F(\vec{\xi}). \tag{6.12}$$

Důkaz:

- důkaz, že $f(\vec{x} - \vec{\mu}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ byl již diskutován v rámci věty 5.9.6
- dále snadno

$$\mathfrak{F}\left[f(\vec{x} - \vec{\mu})\right] = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x} - \vec{\mu})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\vec{\xi}}\, \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{y})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{y}+\vec{\mu})\vec{\xi}}\, \mathrm{d}\vec{y} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\mu}\vec{\xi}} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{y})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{y}\vec{\xi}}\, \mathrm{d}\vec{y} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\mu}\vec{\xi}} F(\vec{\xi}).$$

6.7.8 Věta – o obrazu konvoluce

Nechť $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$. Označme $F(\vec{\xi}) = \mathfrak{F}[f(\vec{x})]$ a $G(\vec{\xi}) = \mathfrak{F}[g(\vec{x})]$. Potom platí

$$\mathfrak{F}\left[f(\vec{x}) \star g(\vec{x})\right] = F(\vec{\xi}) \cdot G(\vec{\xi}).$$

Důkaz:

- důkaz provedeme sérií následujících úprav
- využijeme při něm Fubiniovu větu a větu o substituci ve vícerozměrných integrálech

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}\left[f(\vec{x}) \star g(\vec{x})\right] &= \int_{\mathbf{E}^r} \left[\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})\, g(\vec{x} - \vec{s})\, \mathrm{d}\vec{s}\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\vec{\xi}}\, \mathrm{d}\vec{x} = \\
&= \int_{\mathbf{E}^r} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})\, g(\vec{x} - \vec{s})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\vec{\xi}}\, \mathrm{d}\vec{s}\mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})\, g(\vec{x} - \vec{s})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\vec{\xi}}\, \mathrm{d}\vec{x}\mathrm{d}\vec{s} = \\
&= \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \left[\int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{x} - \vec{s})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\vec{\xi}}\, \mathrm{d}\vec{x}\right] \mathrm{d}\vec{s} = \left| \begin{array}{c} \vec{x} - \vec{s} = \vec{u} \\ \mathrm{d}\vec{x} = \mathrm{d}\vec{u} \end{array} \right| = \\
&= \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \left[\int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{u})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{u}+\vec{s})\vec{\xi}}\, \mathrm{d}\vec{u}\right] \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\xi}\vec{s}} \left[\int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{u})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\xi}\vec{u}}\, \mathrm{d}\vec{u}\right] \mathrm{d}\vec{s} = \\
&= \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\xi}\vec{s}} \mathrm{d}\vec{s} \cdot \int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{u})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\xi}\vec{u}}\, \mathrm{d}\vec{u} = \mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right] \cdot \mathfrak{F}\left[g(\vec{x})\right]
\end{aligned}$$

- opět doporučujeme čtenáři, aby v prezentovaném výpočtu dobře promyslel, čím byla zaručena možnost užití citovaných vět

6.7.9 Věta

Nechť $f(x),\, g(x) \in \mathscr{S}(R)$. Označme $F(p) = \mathfrak{F}[f(x)]$ a $G(p) = \mathfrak{F}[g(x)]$. Potom platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, G(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Důkaz:

- užijeme-li Fubiniovu větu a definici Fourierovy transformace, získáme snadno sérii rovností

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\, G(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} f(x) \int_{\mathbf{R}} g(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} f(x)\, g(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}x \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbf{R}} g(\xi) \int_{\mathbf{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} g(x)\, F(x)\, \mathrm{d}x.$$

6.7.10 Věta – o Fourierově inverzi

Fourierova transformace $\mathfrak{F} : \mathscr{S}(\mathbf{E}^r) \mapsto \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ je vzájemně jednoznačné zobrazení. Inverzní Fourierova transformace je dána rovností

$$\mathfrak{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^r}\, \mathfrak{F}^{\star}. \tag{6.13}$$

Důkaz:

- máme dokázat, že zobrazení $\mathfrak{F}$ a $\mathfrak{F}^{\star}$ splňují na $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ rovnici $\mathfrak{F}\,\mathfrak{F}^{\star} = (2\pi)^r\, \mathrm{id}_{\mathscr{S}}$
- důkaz zahájíme jednorozměrným případem
- vezměme funkci $f(x) \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$ a označme $F(\xi) = \mathfrak{F}^{\star}[f(x)]$, tj.

$$F(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} f(-x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}x = \mathfrak{F}[f(-x)]$$

- ze vztahu (6.12) vychází rovnost

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\xi} F(\xi) = \mathfrak{F}[f(y-x)],$$

  kterou společně s rovností $\mathfrak{F}[1] = 2\pi\delta(x)$, jež bude odvozena v rámci příkladu 6.9.4, užijeme při následujícím odvození

$$\mathfrak{F}\,\mathfrak{F}^{\star}\big[f(x)\big](y) = \mathfrak{F}\,\big[F(\xi)\big](y) = \int_{\mathbf{R}} F(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}y\xi}\, \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbf{R}} \mathfrak{F}\big[f(y-x)\big](\xi)\, \mathrm{d}\xi =$$

$$= \big(1, \mathfrak{F}\big[f(y-x)\big](\xi)\big) = \big(\mathfrak{F}\big[1\big](x), f(y-x)\big) = \big(2\pi\delta(x), f(y-x)\big) = 2\pi\, f(y)$$

- tím je jednorozměrná varianta vztahu 6.13 dokázána
- při výše uvedeném důkazu byla také užita definice 6.8.1 Fourierovy transformace pro zobecněné funkce
- pro vícerozměrný případ užijeme znak $\mathfrak{F}_k$ pro částečnou Fourierovu transformaci působící pouze na proměnné x_k
- pak snadno

$$\mathfrak{F}\,\mathfrak{F}^{\star} = (\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 \circ \ldots \mathfrak{F}_n) \circ (\mathfrak{F}_1^{\star} \circ \mathfrak{F}_2^{\star} \circ \ldots \mathfrak{F}_n^{\star}) = (\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_1^{\star}) \circ (\mathfrak{F}_2 \circ \mathfrak{F}_2^{\star}) \circ \ldots \circ (\mathfrak{F}_n \circ \mathfrak{F}_n^{\star}) = (2\pi)^n\, \mathrm{id}_{\mathscr{S}}$$

6.7.11 Fourierovo desatero

Základní vlastnosti Fourierovy transformace shrneme nyní do tzv. *Fourierova desatera*, uvedeného v následující tabulce.

No.	Název	Vztah
1.	linearita	$\mathfrak{F}\left[f(\vec{x})+c\cdot g(\vec{x})\right]=\mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right]+c\,\mathfrak{F}\left[g(\vec{x})\right]$
2.	změna měřítka ve vzoru	$\mathfrak{F}\left[f(c\,\vec{x})\right]=\frac{1}{\lvert c\rvert^n}\,F\left(\frac{\vec{\xi}}{c}\right)$
3.	obraz derivace	$\mathfrak{F}\left[\mathcal{D}^\alpha\big(f(\vec{x})\big)\right]=(-\mathrm{i}\vec{\xi})^\alpha\,\mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right]$
4.	derivace obrazu	$\mathcal{D}^\alpha\mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right]=\mathfrak{F}\left[(\mathrm{i}\vec{x})^\alpha f(\vec{x})\right]$
5.	substituce ve vzoru	$\mathfrak{F}\left[f(\vec{x}-\vec{\mu})\right]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\mu}\vec{\xi}}\,F(\vec{\xi})$
6.	substituce v obraze	$\mathfrak{F}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\mu}\vec{x}}f(\vec{x})\right]=F(\vec{\xi}+\vec{\mu}).$
7.	obraz konvoluce	$\mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\,\star\,g(\vec{x})\right]=\mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right]\cdot\mathfrak{F}\left[g(\vec{x})\right]$
8.	záměna vzoru a obrazu	$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,G(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,g(x)\,\mathrm{d}t$
9.	Fourierova inverze	$\mathfrak{F}\mathfrak{F}[f(x)]=(2\pi)^r f(-x)$
10.	bijektivnost	$\mathrm{Dom}(\mathfrak{F})=\mathrm{Ran}(\mathfrak{F})=\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$

6.8 Fourierova transformace pro zobecněné funkce

Fourierova transformace má podobně jako Laplaceova transformace své rozšíření z prostoru klasických funkcí do prostoru $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ zobecněných funkcí. Budeme tedy nyní zavádět $\mathfrak{F}-$transformaci pro temperované distribuce. Narozdíl od Laplaceovy transformace není již pro transformaci Fourierovu nutné prokazovat implikaci

$$f(\vec{x})\in\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)\quad\Longrightarrow\quad\mathfrak{F}[f(\vec{x})]\in\mathscr{S}(\mathbf{E}^r).$$

Ta byla totiž prokázána již ve větě 6.7.1.

6.8.1 Definice

Nechť $f(\vec{x})\in\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ je temperovaná zobecněná funkce. Existuje-li na třídě $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ testovacích funkcí $\varphi(\vec{x})$ funkcionál $\big(f,\mathfrak{F}[\varphi(\vec{x})]\big)$, pak *Fourierovým obrazem distribuce* $f(\vec{x})$ budeme rozumět distribuci $F(\vec{\xi})$, pro níž platí rovnost

$$\big(F(\vec{\xi}),\varphi(\vec{\xi})\big):=\Big(f(\vec{x}),\mathfrak{F}\big[\varphi(\vec{\xi})\big](\vec{x})\Big).\tag{6.14}$$

6.8.2 Příklad

Hledejme v rámci tohoto příkladu Fourierův obraz singulární distribuce $\delta(x-c)$, kde $c\in\mathbf{R}$. Z definice vyplývá

$$\big(\mathfrak{F}[\delta(x-c)],\varphi(\xi)\big)=\left(\delta(x-c),\int_{\mathbf{R}}\varphi(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi\right)=\int_{\mathbf{R}}\varphi(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi c}\,\mathrm{d}\xi=\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi c},\varphi(\xi)\big)$$

a tudíž $\mathfrak{F}[\delta(x-c)]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}c\xi}$, speciálně $\mathfrak{F}[\delta(x)]=1$.

6.8.3 Příklad

Nechť $\delta(\vec{x}-\vec{c})$, kde $\vec{c}\in\mathbf{E}^r$, je víceroměrná singulární distribuce. Pokusme se analogicky k předešlému příkladu nalézt její Fourierův obraz. V tomto případě proběhne výpočet následovně:

$$\Big(\mathfrak{F}[\delta(\vec{x}-\vec{c})],\varphi(\vec{\xi})\Big)=\left(\delta(\vec{x}-\vec{c}),\int_{\mathbf{E}^r}\varphi(\vec{\xi})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\vec{\xi}}\,\mathrm{d}\vec{\xi}\right)=\int_{\mathbf{E}^r}\varphi(\vec{\xi})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\xi}\vec{c}}\,\mathrm{d}\vec{\xi}=\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\xi}\vec{c}},\varphi(\vec{\xi})\Big)\,.$$

Pak tedy $\mathfrak{F}[\delta(\vec{x}-\vec{c})]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{c}\vec{\xi}}$.

6.8.4 Příklad

Podle výše uvedené definice nalezněte Fourierův obraz konečné části $\mathcal{P}\frac{1}{x}$. Ze vztahu (6.14) plyne, že

$$\left(\mathfrak{F}[\mathcal{P}\frac{1}{x}],\varphi(\xi)\right)=\left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\mathfrak{F}[\varphi(\xi)](x)\right)=\left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\int_{\mathbf{R}}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi\right)=\mathrm{Vp}\int_{\mathbf{R}}\frac{\int_{\mathbf{R}}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi}{x}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\int_0^\infty\frac{\int_{\mathbf{R}}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi-\int_{\mathbf{R}}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi}{x}\,\mathrm{d}x=2\mathrm{i}\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}}\frac{\varphi(\xi)}{x}\sin(\xi x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi=$$
$$=2\mathrm{i}\int_{\mathbf{R}}\varphi(\xi)\left(\int_0^\infty\frac{\sin(\xi x)}{x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi=\mathrm{i}\pi\int_{\mathbf{R}}\operatorname{sgn}(\xi)\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\big(\mathrm{i}\pi\operatorname{sgn}(\xi),\varphi(\xi)\big).\quad(6.15)$$

Podotýkáme, že v odvození bylo užito výsledku příkladu 6.5.8 a tvrzení věty 5.2.29.

6.8.5 Poznámka

Celá řada vlastností dokázaných v předešlém oddíle pro klasické vícerozměrné funkce, má svůj ekvivalent také v distribucích.

6.8.6 Příklad

Dokážeme nyní, že je-li $f(\vec{x})\in\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ regulární zobecněnou funkcí, pak Fourierův vzor funkce $f(\vec{x})$ v prostoru $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ je tentýž jako Fourierův vzor klasické funkce $f(\vec{x})$. Vyjdeme-li z definičního funkcionálu a užijeme-li Fubiniovu větu, dostaneme postupně

$$\left(f(\vec{\xi}),\mathfrak{F}[\varphi(\vec{x})]\right)=\left(f(\vec{\xi}),\int_{\mathbf{E}^r}\varphi(\vec{x})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\vec{\xi}}\,\mathrm{d}\vec{x}\right)=\int_{\mathbf{E}^r}\int_{\mathbf{E}^r}f(\vec{\xi})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\vec{\xi}}\,\mathrm{d}\vec{x}\,\mathrm{d}\vec{\xi}=$$
$$=\int_{\mathbf{E}^r}\varphi(\vec{x})\left(\int_{\mathbf{E}^r}f(\vec{\xi})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{x}\vec{\xi}}\,\mathrm{d}\vec{\xi}\right)\mathrm{d}\vec{x}=\int_{\mathbf{E}^r}\varphi(\vec{x})\,\mathfrak{F}[f](\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}=\left(\mathfrak{F}[f](\vec{\xi}),\varphi(\vec{\xi})\right).$$

6.8.7 Věta – o spojitosti zobecněné Fourierovy transformace

Zobrazení $\mathfrak{F}:\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)\mapsto\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ definované předpisem (6.14) je spojité na $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$.

<u>*Důkaz:*</u>

- uvažme posloupnost $\big(f_k(\vec{x})\big)_{k=1}^\infty$ takovou, že $\lim_{k\to\infty}f_k(\vec{x})=0$ ve třídě $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$
- potom ale číselné poslopnosti
$$\big(\mathfrak{F}[f_k(\vec{x})](\vec{\xi}),\varphi(\vec{\xi})\big)=\big(f_k(\vec{x}),\mathfrak{F}[\varphi(\vec{\xi})](\vec{x})\big)$$
konvergují zjevně k nule
- tedy $\lim_{k\to\infty}\mathfrak{F}[f_k](\vec{x})=0$
- to završuje důkaz

6.8.8 Důsledek

Nechť $(f_k)_{k=1}^\infty$ je posloupnost funkcí z prostoru $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ a $\lim_{k\to\infty}f_k\overset{\mathscr{S}'}{=}f$. Pak platí rovnost

$$\lim_{k\to\infty}\mathfrak{F}[f_k]\overset{\mathscr{S}'}{=}\mathfrak{F}[f].$$

6.8.9 Důsledek

Nechť f_λ je systém funkcí z prostoru $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ závislých na parametru $\lambda\in\mathbf{R}$ a $\lim_{\lambda\to\mu}f_\lambda\overset{\mathscr{S}'}{=}f$. Pak platí rovnost

$$\lim_{\lambda\to\mu}\mathfrak{F}[f_\lambda]\overset{\mathscr{S}'}{=}\mathfrak{F}[f].$$

6.8.10 Příklad

Zásadním vztahem pro Fourierovu transformaci je vztah pro Fourierovu inverzi. Ten byl pro klasické temperované distribuce odvozen ve větě 6.7.10 a má tvar

$$\mathfrak{F}\mathfrak{F}\big[\varphi(\vec{x})\big] = (2\pi)^r\varphi(-\vec{x}).$$

Pokusme se nyní dokázat jeho analogii také v $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$. Zvolme pevně zobecněnou funkci z $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$. Pro ni a pro libovolnou $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ platí

$$\Big(\mathfrak{F}\mathfrak{F}\big[f(\vec{x})\big](\vec{x})\,,\,\varphi(\vec{x})\Big) = \Big(f(\vec{x})\,,\,\mathfrak{F}\mathfrak{F}\big[\varphi(\vec{x})\big]\Big) = \big(f(\vec{x})\,,\,(2\pi)^r\varphi(-\vec{x})\big) =$$

$$= \big((2\pi)^r f(\vec{x})\,,\,\varphi(-\vec{x})\big) = \big((2\pi)^r f(-\vec{x})\,,\,\varphi(\vec{x})\big).$$

Proto tedy $\mathfrak{F}\mathfrak{F}\big[f(\vec{x})\big] = (2\pi)^r f(-\vec{x})$ pro všechny $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$.

6.8.11 Věta - o Fourierově inverzi

Zobrazení $\mathfrak{F}^{-1} : \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r) \mapsto \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ definované předpisem

$$\mathfrak{F}^{-1}\big[f(\vec{x})\big] = \frac{1}{(2\pi)^r}\mathfrak{F}\big[f(-\vec{x})\big]$$

je inverzní k Fourierově transformaci, tj. pro každé $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ platí $\mathfrak{F}\big[\mathfrak{F}^{-1}[f(\vec{x})]\big] = \mathfrak{F}^{-1}\big[\mathfrak{F}[f(\vec{x})]\big] = f(\vec{x})$.

Důkaz:

- pro každou temperovanou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ platí podle definice 6.8.1 a věty 6.7.10

$$\Big(\mathfrak{F}^{-1}\big[\mathfrak{F}[f(\vec{x})]\big], \varphi(\vec{x})\Big) = \frac{1}{(2\pi)^r}\Big(\mathfrak{F}\big[\mathfrak{F}[f(-\vec{x})]\big], \varphi(\vec{x})\Big) = \frac{1}{(2\pi)^r}\Big(\mathfrak{F}[f(-\vec{x})], \mathfrak{F}[\varphi(\vec{x})]\Big) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^r}\Big(\mathfrak{F}[f(\vec{x})], \mathfrak{F}[\varphi(-\vec{x})]\Big) = \Big(\mathfrak{F}[f(\vec{x})], \mathfrak{F}^{-1}[\varphi(\vec{x})]\Big) = \Big(f(\vec{x}), \mathfrak{F}\big[\mathfrak{F}^{-1}[\varphi(\vec{x})]\big]\Big) = \big(f(\vec{x}), \varphi(\vec{x})\big)$$

- podobně také

$$\Big(\mathfrak{F}\big[\mathfrak{F}^{-1}[f(\vec{x})]\big], \varphi(\vec{x})\Big) = \Big(\mathfrak{F}^{-1}[f(\vec{x})], \mathfrak{F}[\varphi(\vec{x})]\Big) = \frac{1}{(2\pi)^r}\Big(\mathfrak{F}[f(-\vec{x})], \mathfrak{F}[\varphi(\vec{x})]\Big) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^r}\Big(\mathfrak{F}[f(\vec{x})], \mathfrak{F}[\varphi(-\vec{x})]\Big) = \Big(\mathfrak{F}[f(\vec{x})], \mathfrak{F}^{-1}[\varphi(\vec{x})]\Big) = \Big(f(\vec{x}), \mathfrak{F}\big[\mathfrak{F}^{-1}[\varphi(\vec{x})]\big]\Big) = \big(f(\vec{x}), \varphi(\vec{x})\big)$$

6.8.12 Věta

Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ a libovolný multiindex α. Pak platí

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{\xi}}\big(\,\mathfrak{F}[f(\vec{x})]\,\big)(\vec{\xi}) = \mathfrak{F}\big[(\mathtt{i}\vec{x})^{\alpha}\, f(\vec{x})\big](\vec{\xi}).$$

Důkaz:

- vezmeme libovolnou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$
- užijeme-li klasický vztah (6.10), dostáváme

$$\Big(\mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{\xi}}\big(\,\mathfrak{F}[f(\vec{x})](\vec{\xi})\,\big), \varphi(\vec{\xi})\Big) = (-1)^{|\alpha|}\Big(\mathfrak{F}[f(\vec{x})](\vec{\xi}), \mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{\xi}}\big(\varphi(\vec{\xi})\big)\Big) =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\Big(f(\vec{x})\,, \mathfrak{F}\big[\mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{\xi}}\big(\varphi(\vec{\xi})\big)\big](\vec{x})\Big) = (-1)^{|\alpha|}\Big(f(\vec{x})\,, (-\mathtt{i}\vec{x})^{\alpha}\,\mathfrak{F}\big[\varphi(\vec{\xi})\big](\vec{x})\Big) =$$

$$= \Big((\mathtt{i}\vec{x})^{\alpha} f(\vec{x})\,,\,\mathfrak{F}\big[\varphi(\vec{\xi})\big](\vec{x})\Big) = \Big(\mathfrak{F}\big[(\mathtt{i}\vec{x})^{\alpha}\, f(\vec{x})\big](\vec{\xi})\,,\,\varphi(\vec{\xi})\Big).$$

6.8.13 Věta

Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ a libovolný multiindex α. Pak platí

$$\mathfrak{F}\big[\mathcal{D}^\alpha f(\vec{x})\big](\vec{\xi}) = (-\mathtt{i}\vec{\xi})^\alpha\, \mathfrak{F}\big[f(\vec{x})\big](\vec{\xi}).$$

Důkaz:

- vezmeme opět libovolnou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$
- a užijeme klasický vztah (6.11)
- pak dostáváme

$$\Big(\mathfrak{F}\big[\mathcal{D}^\alpha f(\vec{x})\big](\vec{\xi}), \varphi(\vec{\xi})\Big) = \Big(\mathcal{D}^\alpha f(\vec{x}), \mathfrak{F}\big[\varphi(\vec{\xi})\big](\vec{x})\Big) = (-1)^{|\alpha|}\Big(f(\vec{x}), \mathcal{D}^\alpha\big(\mathfrak{F}\big[\varphi(\vec{\xi})\big](\vec{x})\big)\Big) =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}\Big(f(\vec{x}), \mathfrak{F}\big[(\mathtt{i}\vec{\xi})^\alpha\, \varphi(\vec{\xi})\big](\vec{x})\Big) = (-1)^{|\alpha|}\Big(\mathfrak{F}\big[f(\vec{x})\big](\vec{\xi}), (\mathtt{i}\vec{\xi})^\alpha\, \varphi(\vec{\xi})\Big) =$$
$$= \Big((-\mathtt{i}\vec{\xi})^\alpha\, \mathfrak{F}\big[f(\vec{x})\big](\vec{\xi})\,,\, \varphi(\vec{\xi})\Big)$$

6.8.14 Poznámka

Čtenář se může samostatně přesvědčit o rozšířené platnosti dalších vztahů z Fourierova desatera. Jejich platnost se přenáší podobně jako v předešlých větách z $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ na $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$. Jedná se o vztahy

$$\mathfrak{F}\left[f(c\,\vec{x})\right] = \frac{1}{|c|^n}\,\mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right]\left(\frac{\vec{\xi}}{c}\right), \quad \mathfrak{F}\left[f(\vec{x}-\vec{\mu})\right] = \mathrm{e}^{\mathtt{i}\vec{\mu}\vec{\xi}}\,\mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right], \quad \mathfrak{F}\left[\mathrm{e}^{\mathtt{i}\vec{\mu}\vec{x}} f(\vec{x})\right] = \mathfrak{F}\left[f(\vec{x})\right](\vec{\xi}+\vec{\mu}).$$

6.8.15 Věta

Nechť má temperovaná zobecněná funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ omezený nosič. Pak $\mathfrak{F}\big[f(\vec{x})\big] \in \Upsilon_m$ a pro její obraz platí

$$\mathfrak{F}\big[f(\vec{x})\big] = \big(f(\vec{x}), \eta(\vec{x})\mathrm{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\cdot\vec{\xi}}\big), \tag{6.16}$$

kde $\eta(\vec{x})$ je libovolná testovací funkce z prostoru $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$, která je rovna jedné na jistém okolí nosiče $\operatorname{supp}(f)$.

Důkaz:

- tvrzení je dokázáno na straně 44 ve skriptech [2] (věta 3.3.11)

6.8.16 Věta

Nechť jsou dány temperované zobecněné funkce $f, g \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ a g nechť je zobecněnou funkcí s omezeným nosičem. Pak platí

$$\mathfrak{F}\big[(f \star g)\big] = \mathfrak{F}\left[f\right] \cdot \mathfrak{F}\left[g\right]. \tag{6.17}$$

Důkaz:

- podle věty 6.8.15 je $\mathfrak{F}\big[g(\vec{x})\big] \in \Upsilon_m$, a součin na pravé straně rovnosti (6.17) je tudíž v $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ dobře definován
- navíc podle tvrzení věty 5.10.23 platí, že

$$\big(f \star g, \varphi(\vec{x})\big) = \big(f(\vec{x}) \otimes g(\vec{y}), \eta(\vec{y})\,\varphi(\vec{x}+\vec{y})\big) = \Big(f(\vec{x})\big(g(\vec{y}), \eta(\vec{y})\,\varphi(\vec{x}+\vec{y})\big)\Big),$$

  kde $\eta(\vec{y})$ je libovolná testovací funkce z prostoru $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$, která je rovna jedné na jistém okolí nosiče $\operatorname{supp}(g)$
- odtud tedy

$$\big(\mathfrak{F}[f \star g], \varphi(\vec{x})\big) = \big(f \star g, \mathfrak{F}[\varphi(\vec{x})]\big) = \Big(f(\vec{x})\big(g(\vec{y}), \eta(\vec{y}) \int_{\mathbf{E}^r} \mathrm{e}^{\mathtt{i}(\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{\xi}} \varphi(\vec{\xi})\,\mathrm{d}\vec{\xi}\Big)$$

- užijeme-li rovnosti (6.16) a faktu, že $\mathfrak{F}\big[g(\vec{x})\big] \in \Upsilon_m$, dostáváme

$$\big(\mathfrak{F}[f \star g], \varphi(\vec{x})\big) = \Big(f(\vec{x}), \int_{\mathbf{E}^r} \big(g(\vec{y}), \eta(\vec{y})\mathrm{e}^{\mathtt{i}\vec{y}\cdot\vec{\xi}}\big)\mathrm{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\cdot\vec{\xi}}\varphi(\vec{\xi})\,\mathrm{d}\vec{\xi}\Big) = \Big(f(\vec{x}), \int_{\mathbf{E}^r} \mathfrak{F}\big[g(\vec{x})\big](\vec{\xi})\mathrm{e}^{\mathtt{i}\vec{x}\cdot\vec{\xi}}\varphi(\vec{\xi})\,\mathrm{d}\vec{\xi}\Big) =$$
$$= \Big(f(\vec{x}), \mathfrak{F}\big[\mathfrak{F}[g(\vec{x})]\varphi(\xi)\big]\Big) = \big(\mathfrak{F}[f(\vec{x})], \mathfrak{F}[g(\vec{x})]\varphi(\xi)\big) = \big(\mathfrak{F}[f(\vec{x})] \cdot \mathfrak{F}[g(\vec{x})], \varphi(\vec{\xi})\big)$$

- to kompletuje důkaz

6.9 Aplikace Fourierovy transformace

Podobně jako Laplaceova transformace, také Fourierova transformace je účinným nástrojem při řešení rozličných matematických a fyzikálních úloh. Pro její výhodné užití je ale nejprve nutno sestavit tabulku základních fourierovských korespondencí, analogickou k tabulce 6.5.1 sestavené pro výchozí laplaceovské obrazy. V první části tohoto celku tedy vypočteme Fourierovy obrazy pro základní sadu jedno- či vícerozměrných funkcí.

6.9.1 Příklad

Hledejme Fourierův obraz funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$ pro nezáporné a. Snadno

$$\mathfrak{F}\big[\mathrm{e}^{-ax^2}\big] = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\cos(x\xi)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\sin(x\xi)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\cos(x\xi)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

Analogicky vypočteme Fourierův obraz funkce $f(\vec{x}) = \mathrm{e}^{-a\,\|\vec{x}\|^2}$ v prostoru $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$. Zde

$$\mathfrak{F}\big[\mathrm{e}^{-a\,\|\vec{x}\|^2}\big] = \int_{\mathbf{E}^r} \mathrm{e}^{-a(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_r^2)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x_1\xi_1+x_2\xi_2+\ldots+x_r\xi_r)}\,\mathrm{d}\vec{x} =$$

$$= \int_{\mathbf{E}^r}\left(\prod_{k=1}^{r} \mathrm{e}^{-a\,x_k^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_k\xi_k}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_r = \prod_{k=1}^{r}\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-a\,x_k^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_k\xi_k}\,\mathrm{d}x_k =$$

$$= \prod_{k=1}^{r}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi_k^2}{4a}} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{r/2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\|\vec{\xi}\|^2}{4a}}.$$

6.9.2 Příklad

Dalším z řady významných obrazů je Fourierův obraz funkce $f(x) = \Theta(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$, kde pro parametr a platí nerovnost $a > 0$. V tomto případě platí

$$\mathfrak{F}\big[\Theta(x)\,\mathrm{e}^{-ax}\big] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\,\cos(x\xi)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\,\sin(x\xi)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{a}{a^2+\xi^2} + \mathrm{i}\,\frac{\xi}{a^2+\xi^2} = \frac{a+\mathrm{i}\xi}{a^2+\xi^2} = \frac{1}{a-\mathrm{i}\xi}.$$

6.9.3 Příklad

Pokusme se nalézt Fourierův obraz funkce $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}$. Je zřejmé, že $f(x) \notin \mathscr{S}(\mathbf{R})$ ani $f(x) \notin \mathbb{L}_1(\mathbf{R})$, a má tudíž smysl požadovaný obraz hledat pouze v $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$. Uvažme libovolnou funkci $\varphi(x)$, jejíž nosič $\mathrm{supp}(\varphi)$ leží uvnitř intervalu $(-\mathtt{R},\mathtt{R})$. Pak za použití vztahu (1.82) z příkladu 1.9.35 platí sada rovností

$$\big(\mathfrak{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}],\varphi(\xi)\big) = \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2},\mathfrak{F}[\varphi(\xi)]\big) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\mathfrak{F}[\varphi(\xi)](x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty,M\to\infty}\int_{-M}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\int_{-\mathtt{R}}^{\mathtt{R}}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{N\to\infty,M\to\infty}\int_{-\mathtt{R}}^{\mathtt{R}}\varphi(\xi)\int_{-M}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2+\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi = \int_{-\mathtt{R}}^{\mathtt{R}}\varphi(\xi)\lim_{N\to\infty,M\to\infty}\int_{-M}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2+\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi =$$

$$= \int_{-\mathtt{R}}^{\mathtt{R}}\varphi(\xi)\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2+\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{4}\pi}\int_{\mathbf{R}}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{4}\xi^2}\,\mathrm{d}\xi.$$

Odtud

$$\mathfrak{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}] = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{4}(\xi^2-\pi)},$$

protože ačkoliv předešlé odvození je platné pouze v $\mathscr{D}(\mathbf{R})$, s ohledem na fakt, že $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ je hustá v $\mathscr{S}(\mathbf{R})$, platí posledně uvedený vztah v $\mathscr{S}(\mathbf{R})$. Pro $a \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ pak také

$$\mathfrak{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^2x^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{4}(\frac{\xi^2}{a^2}-\pi)}. \tag{6.18}$$

6.9.4 Příklad

V rámci tohoto příkladu budeme hledat Fourierův obraz $r-$dimenzionální funkce $f(\vec{x})=1$. Podotýkáme, že v důkazu nelze užít vztahu pro Fourierovu inverzi. Ten byl totiž odvozen právě pomocí vztahu $\mathfrak{F}[1]=(2\pi)^r\delta(\vec{\xi})$, který právě dokazujeme. Poměrně snadno se můžeme přesvědčit, že platí rovnosti

$$\mathfrak{F}\big[1'\big]=0 \quad\wedge\quad \mathfrak{F}\big[1'\big]=-\mathtt{i}\xi\mathfrak{F}\big[1\big].$$

Odsud získáváme rovnici $\mathtt{i}\xi\mathfrak{F}\big[1\big]=0$, jejímž řešením v prostoru $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$ je podle výsledku příkladu 6.9.17 systém funkcí $\mathtt{C}\,\delta(\xi)$. Odtud tedy $\mathfrak{F}\big[1\big]=\mathtt{C}\,\delta(\xi)$ pro jisté $\mathtt{C}\in\mathbf{C}$. Zbývá tedy konstantu $\mathtt{C}$ kalibrovat. Pravděpodobně nejjednodušším způsobem, jak konstantu $\mathtt{C}$ naleznout, je počítat hodnotu funcionálu $\big(\mathfrak{F}[1],\varphi(\xi)\big)$ pro přijatelnou pevně zvolenou temperovanou testovací funkci. Pro tyto účely se zdá být nejvhodnějším kandidátem funkce $\varphi(\xi)=\mathsf{e}^{-\xi^2}$. Pro ni totiž platí

$$\Big(\mathfrak{F}[1],\mathsf{e}^{-\xi^2}\Big)=\Big(1,\mathfrak{F}[\mathsf{e}^{-\xi^2}]\Big)=\Big(1,\sqrt{\pi}\mathsf{e}^{-\frac{x^2}{4}}\Big)=\sqrt{\pi}\int_{\mathbf{R}}\mathsf{e}^{-\frac{x^2}{4}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}\sqrt{4\pi}=2\pi.$$

A protože $\big(\mathtt{C}\,\delta(\xi),\mathsf{e}^{-\xi^2}\big)=\mathtt{C}$, uzavíráme řešení této úlohy finální rovnicí $\mathfrak{F}\big[1\big]=2\pi\delta(\xi)$. Pravděpodobně již není obtížné se nyní přesvědčit, že také platí $r-$dimenzionální alternativa $\mathfrak{F}\big[1\big]=(2\pi)^r\delta(\vec{\xi})$.

6.9.5 Příklad

Nechť $\mathtt{R}>0$. Nalezněme Fourierův obraz funkce $\Theta(\mathtt{R}-|x|)\in\mathscr{S}'(\mathbf{E})$. Snadno

$$\mathfrak{F}\big[\Theta(\mathtt{R}-|x|)\big]=\int_{\mathbf{R}}\Theta(\mathtt{R}-|x|)\,\mathsf{e}^{\mathtt{i}x\xi}\,\mathrm{d}x=\int_{-\mathtt{R}}^{\mathtt{R}}\mathsf{e}^{\mathtt{i}x\xi}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\mathtt{R}}\cos(x\xi)\,\mathrm{d}x=2\left[\frac{\sin(x\xi)}{\xi}\right]_0^{\mathtt{R}}=2\,\frac{\sin(\mathtt{R}\xi)}{\xi}.$$

6.9.6 Příklad

Nechť $\mathtt{R}>0$. Nalezněme Fourierův obraz funkce

$$\frac{\Theta(\mathtt{R}-\|\vec{x}\|)}{\sqrt{\mathtt{R}^2-\|\vec{x}\|^2}}\in\mathscr{S}'(\mathbf{E}^2).$$

Využijeme-li výsledku příkladu 1.9.34, získáme opět vcelku snadno

$$\mathfrak{F}\left[\frac{\Theta(\mathtt{R}-\|\vec{x}\|)}{\sqrt{\mathtt{R}^2-\|\vec{x}\|^2}}\right]=\int_{\mathbf{E}^2}\Theta(\mathtt{R}-\|\vec{x}\|)\,\frac{\mathsf{e}^{\mathtt{i}\vec{\xi}\vec{x}}}{\sqrt{\mathtt{R}^2-\|\vec{x}\|^2}}\,\mathrm{d}\vec{x}=\iint_{\|\vec{x}\|<\mathtt{R}}\frac{\mathsf{e}^{\mathtt{i}\vec{\xi}\vec{x}}}{\sqrt{\mathtt{R}^2-\|\vec{x}\|^2}}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

a v důsledku tedy

$$\mathfrak{F}\left[\frac{\Theta(\mathtt{R}-\|\vec{x}\|)}{\sqrt{\mathtt{R}^2-\|\vec{x}\|^2}}\right]=2\pi\frac{\sin\Big(\mathtt{R}\|\vec{\xi}\|\Big)}{\|\vec{\xi}\|}.$$

6.9.7 Příklad

Nechť $\mathtt{R}>0$ a $S_{\mathtt{R}}=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{E}^3\,:\,\|\vec{x}|=\mathtt{R}\}$ je plášť koule se středem v bodě $\vec{0}$ a poloměrem $\mathtt{R}$. Nalezněme Fourierův obraz prosté vrstvy $\delta_{S_{\mathtt{R}}}$ na nadploše S s jednotkovou hustotou (viz také definice 5.2.34). Využijeme tvrzení, že obraz $\mathfrak{F}\big[\delta_{S_{\mathtt{R}}}\big]$ závisí pouze na velikosti normy $\|\vec{\xi}\|$. Přesněji řešeno: mají-li dva vektory $\vec{\xi}$ a $\vec{\eta}$ tytéž normy, tj. $\|\vec{\xi}\|=\|\vec{\eta}\|$, potom

$$\mathfrak{F}\big[\delta_{S_{\mathtt{R}}}\big](\vec{\xi})=\mathfrak{F}\big[\delta_{S_{\mathtt{R}}}\big](\vec{\eta}).$$

To nejprve dokážeme. Uvažme vektor $\vec{\eta}\in\mathbf{E}^3$, jež vznikl ortogonální transformací vektoru $\vec{\xi}\in\mathbf{E}^3$, tj. existuje ortogonální matice $\mathbb{A}$ taková, že $\vec{\eta}=\vec{\xi}\mathbb{A}$. Potom platí

$$\mathfrak{F}\big[\delta_{S_{\mathtt{R}}}\big](\vec{\eta})=\mathfrak{F}\big[\delta_{S_{\mathtt{R}}}\big](\vec{\xi}\mathbb{A})=\int_{S_{\mathtt{R}}}\mathsf{e}^{\mathtt{i}\,\vec{x}\vec{\xi}\mathbb{A}}\,\mathrm{d}\mu_s(\vec{x})=\left|\begin{array}{c}\vec{x}=\vec{y}\,\mathbb{A}\\[2ex] |\det(\mathbb{A})|=1\\[2ex] \mathrm{d}\mu_s(\vec{x})=\mathrm{d}\mu_s(\vec{y})\end{array}\right|=$$

$$= \int_{S_R} e^{i\,\vec{y}\mathbb{A}\vec{\xi}\mathbb{A}}\, d\mu_s(\vec{y}) = \left| \begin{array}{c} |\det(\mathbb{A})| = 1 \\ \vec{y}\mathbb{A}\vec{\xi}\mathbb{A} = \vec{y}\vec{\xi} \end{array} \right| = \int_{S_R} e^{i\,\vec{y}\vec{\xi}}\, d\mu_s(\vec{y}) = \mathfrak{F}\big[\delta_{S_R}\big](\vec{\xi}),$$

kde bylo postupně užito invariance míry vůči ortogonální transformaci (tj. při ortogonální transformaci se Lebesgueova míra "objektu" nemění) a invariance skalárního součinu, jež plyne přímo z axiomů skalárního součinu. Opět se jedná pouze o invarianci vůči ortogonální transformaci. Důsledkem právě dokázaného je fakt, že zaměníme-li obecný vektor $\vec{\xi} \in \mathbf{E}^3$ za vektor $(0, 0, \|\vec{\xi}\|)$, obdržíme hledaný obraz $\mathfrak{F}\big[\delta_{S_R}\big]$ zřetelně jednodušším způsobem. Parametrizujme tedy pro tyto účely plochu S_R parametrizací vzešlou ze sférických souřadnic, a sice

$$\vec{\wp}(\vartheta, \varphi) = (x_1, x_2, x_3) = (R\cos(\vartheta)\cos(\varphi), R\cos(\vartheta)\sin(\varphi), R\sin(\vartheta))\,.$$

Podotýkáme, že $\vartheta \in (-\pi/2, \pi/2)$ a $\varphi \in (0, 2\pi)$. Tedy

$$\frac{\mathcal{D}\vec{\wp}}{\mathcal{D}\vartheta} = (-r\sin(\vartheta)\cos(\varphi), -r\sin(\vartheta)\sin(\varphi), r\cos(\vartheta))$$
$$\frac{\mathcal{D}\vec{\wp}}{\mathcal{D}\varphi} = (-r\cos(\vartheta)\sin(\varphi), r\cos(\vartheta)\cos(\varphi), 0)\,.$$

Odtud snadno vypočteme skalární součiny

$$\frac{\mathcal{D}\vec{\wp}}{\mathcal{D}\vartheta}\,\frac{\mathcal{D}\vec{\wp}}{\mathcal{D}\vartheta} = R^2\sin^2(\vartheta)\cos^2(\varphi) + R^2\sin^2(\vartheta)\sin^2(\varphi) + R^2\cos^2(\vartheta) = R^2$$
$$\frac{\mathcal{D}\vec{\wp}}{\mathcal{D}\varphi}\,\frac{\mathcal{D}\vec{\wp}}{\mathcal{D}\varphi} = R^2\cos^2(\vartheta)\sin^2(\varphi) + R^2\cos^2(\vartheta)\cos^2(\varphi) = R^2\cos^2(\vartheta)$$
$$\frac{\mathcal{D}\vec{\wp}}{\mathcal{D}\vartheta}\,\frac{\mathcal{D}\vec{\wp}}{\mathcal{D}\varphi} = R^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\sin(\varphi)\cos(\varphi) - R^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\sin(\varphi)\cos(\varphi) = 0,$$

nutné k vyčíslení tzv. Grammova determinantu $\Delta_g = R^4\cos^2(\vartheta)$. Z definice Fourierovy transformace, definice 5.2.34 a definice plošného integrálu prvního druhu pak tedy platí

$$\mathfrak{F}\big[\delta_{S_R}(\vec{x})\big](\vec{\eta}) = \int_{S_R} e^{i\vec{\xi}\vec{x}} = R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} e^{iR\|\vec{\xi}\|\sin(\vartheta)}\,\cos(\vartheta)\,d\vartheta d\varphi =$$
$$= 2\pi R^2 \left[\frac{e^{iR\|\vec{\xi}\|\sin(\vartheta)}}{iR\|\vec{\xi}\|}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi R\,\frac{\sin(R\|\vec{\xi}\|)}{\|\vec{\xi}\|}.$$

Uzavíráme tedy, že

$$\mathfrak{F}\big[\delta_{S_R}(\vec{x})\big](\vec{\eta}) = 4\pi R\,\frac{\sin(R\|\vec{\xi}\|)}{\|\vec{\xi}\|}.$$

6.9.8 Příklad

V příkladě 6.8.2 bylo ukázáno, že $\mathfrak{F}[\delta(x-c)] = e^{ic\xi}$. Aplikujeme-li na tuto rovnost $\mathfrak{F}-$operátor, dostaneme postupně

$$\mathfrak{F}\,\mathfrak{F}\big[\delta(x-c)\big] = \mathfrak{F}\big[e^{ic\xi}\big], \quad 2\pi\,\delta(-x-c) = \mathfrak{F}[e^{ic\xi}].$$

Zaměníme-li nyní x za ξ a užijeme-li "sudosti" $\delta-$funkce, obdržíme finální vztah $\mathfrak{F}[e^{icx}] = 2\pi\delta(\xi + c)$. Protože ale např.

$$\cos(cx) = \frac{e^{icx} + e^{-icx}}{2},$$

je Fourierovým obrazem vzoru $\cos(cx)$ funkce

$$\mathfrak{F}[\cos(cx)] = \mathfrak{F}\left[\frac{e^{icx} + e^{-icx}}{2}\right] = \pi\big(\delta(\xi + c) + \delta(\xi - c)\big).$$

Analogicky

$$\mathfrak{F}[\sin(cx)] = \mathfrak{F}\left[\frac{e^{icx} - e^{-icx}}{2i}\right] = i\pi\big(\delta(\xi - c) - \delta(\xi + c)\big).$$

Upozorňujeme čtenáře, že v klasickém pojetí ani funkce $\cos(cx)$ ani $\sin(cx)$ Fourierovy obrazy nemají, neboť nejsou rychle ubývající (nemají ani limity v nekonečnu). Příslušné obrazy tudíž existují pouze v $\mathscr{S}'(\mathbf{E})$ a navíc jsou singulární.

6.9.9 Příklad

Vztah pro Fourierův obraz funkce $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ lze získat i jiným způsobem. V této úloze ukážeme jak.

$$\big(\mathfrak{F}\,\mathfrak{F}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big],\,\varphi(x)\big) = \big(2\pi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x},\,\varphi(x)\big) = \int_{\mathbf{R}} 2\pi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\Big|_{\xi=-1} =$$

$$= 2\pi\,\mathfrak{F}\big[\varphi(\vec{x})\big]_{\xi=-1} = 2\pi\Big(\delta(\xi+1),\,\mathfrak{F}\big[\varphi(\vec{x})\big]\Big) = \Big(2\pi\,\delta(\xi+1),\,\mathfrak{F}\big[\varphi(\vec{x})\big]\Big).$$

Protože ale také

$$\Big(\mathfrak{F}\,\mathfrak{F}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big],\,\varphi(x)\Big) = \Big(\mathfrak{F}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big],\,\mathfrak{F}\big[\varphi(\vec{x})\big]\Big),$$

vychází odtud, že

$$\mathfrak{F}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big] = 2\pi\,\delta(\xi+1).$$

6.9.10 Příklad

Při hledání Fourierova obrazu Heavisideovy funkce, užijeme jednak Sochockého vzorce

$$\frac{1}{x \pm \mathrm{i}0} = \mp \mathrm{i}\pi\delta(x) \,+\, \mathcal{P}\frac{1}{x},$$

ale také korespondence

$$\mathfrak{F}\big[\Theta(x)\,\mathrm{e}^{-ax}\big] = \frac{1}{a - \mathrm{i}\xi} = \frac{\mathrm{i}}{\xi + \mathrm{i}a}$$

vypočtené v příkladě 6.9.2. Aplikujeme-li na poslední rovnost limitní přechod $\lim_{a\to 0_+}$, dostáváme

$$\mathfrak{F}\big[\Theta(x)\big] = \pi\delta(\xi) \,+\, \mathrm{i}\mathcal{P}\frac{1}{\xi}.$$

Podobně

$$\mathfrak{F}\big[\Theta(-x)\big] = \pi\delta(\xi) \,-\, \mathrm{i}\mathcal{P}\frac{1}{\xi}.$$

Jelikož $\operatorname{sgn}(x) = \Theta(x) - \Theta(-x)$, získáváme navíc vztah

$$\mathfrak{F}\big[\operatorname{sgn}(x)\big] = 2\mathrm{i}\mathcal{P}\frac{1}{\xi}.$$

6.9.11 Příklad

Nechť

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Vypočtěme konvoluci $f(x) \star g(x)$. Ačkoliv byl výsledek této konvoluce vypočten již v rámci příkladu 2.5.10, nyní provedeme výpočet aplikací teorie integrálních transformací. Jelikož

$$\mathfrak{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathfrak{F}\left[\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\mu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sqrt{2\pi}\sigma\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2\sigma^2}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\mu} = \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2\sigma^2}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\mu},$$

dostáváme odtud

$$\mathfrak{F}\big[f(x) \star g(x)\big] = \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2\sigma_1^2}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\mu_1}\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2\sigma_2^2}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\mu_2} = \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2(\sigma_1+\sigma_2)^2}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(\mu_1+\mu_2)}.$$

Pak tedy

$$f(x) \star g(x) = \mathfrak{F}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2(\sigma_1+\sigma_2)^2}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(\mu_1+\mu_2)}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}.$$

6.9.12 Tabulka Fourierových korespondencí

V následující tabulce uvedeme základní korespondence Fourierovy transformace. Jejich tvary by měl čtenář odvodit v rámci cvičení. Složitější důkazy lze nalézt mimo jiné ve skriptech [20] nebo přímo v knize [23].

Fourierův vzor	**Fourierův obraz**	**obor**
$\mathrm{e}^{-a\|x\|^2}$	$\left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2}\mathrm{e}^{-\frac{\|\vec{\xi}\|^2}{4a}}$	$\mathbf{E}^r$
$\Theta(x)\,\mathrm{e}^{ax},\ \ (a\neq 0)$	$\frac{-1}{a+\mathrm{i}\xi}$	$\mathbf{R}$
$\delta(\vec{x}-\vec{\mu})$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\xi}\vec{\mu}}$	$\mathbf{E}^r$
$\Theta(x)$	$\pi\delta(\xi)\,+\,\mathrm{i}\mathcal{P}\frac{1}{\xi}$	$\mathbf{R}$
$\Theta(-x)$	$\pi\delta(\xi)\,-\,\mathrm{i}\mathcal{P}\frac{1}{\xi}$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{sgn}(x)$	$2\mathrm{i}\mathcal{P}\frac{1}{\xi}$	$\mathbf{R}$
1	$(2\pi)^r\,\delta(\vec{\xi})$	$\mathbf{E}^r$
$\mathcal{P}\frac{1}{x}$	$\mathrm{i}\pi\operatorname{sgn}(\xi)$	$\mathbf{R}$
$\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$	$-\pi\,\|\xi\|$	$\mathbf{R}$
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}$	$\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{4}(\xi^2-\pi)}$	$\mathbf{R}$
$\Theta(\mathtt{R}-\|x\|)$	$2\,\frac{\sin(\mathtt{R}\xi)}{\xi}$	$\mathbf{R}$
$\frac{\Theta(\mathtt{R}-\|\vec{x}\|)}{\sqrt{\mathtt{R}^2-\|\vec{x}\|^2}}$	$2\pi\,\frac{\sin\left(\mathtt{R}\|\vec{\xi}\|\right)}{\|\vec{\xi}\|}$	$\mathbf{E}^2$
$\delta_{S_{\mathtt{R}}}(\vec{x})$	$4\pi\mathtt{R}\,\frac{\sin\left(\mathtt{R}\|\vec{\xi}\|\right)}{\|\vec{\xi}\|}$	$\mathbf{E}^3$
$\vec{x}^{\alpha}$	$(\mathrm{i})^{\|\alpha\|}(2\pi)^r\delta^{(\alpha)}(\vec{\xi})$	$\mathbf{E}^r$
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}cx}$	$2\pi\delta(\xi+c)$	$\mathbf{R}$
$\cos(cx)$	$\pi\big(\delta(\xi-c)+\delta(\xi+c)\big)$	$\mathbf{R}$
$\sin(cx)$	$\mathrm{i}\pi\big(\delta(\xi+c)-\delta(\xi-c)\big)$	$\mathbf{R}$

6.9.13 Poznámka

Přímých aplikací Fourierovy transformace je velice mnoho. Vzhledem k tomu, že v následujících kapitolách teorii $\mathfrak{F}-$transformace hojně zužitkujeme, na tomto místě budeme demonstrovat užití této integrální transformace jen na několika příkladech.

6.9.14 Příklad

Vypočtěme jednorozměrnou konvoluci

$$\Theta(x)\,\mathrm{e}^{-ax}\star\Theta(x)\,\mathrm{e}^{-bx},$$

kde $a,b>0$ jsou pevně zvolené parametry. Jelikož

$$\mathfrak{F}\big[\Theta(x)\,\mathrm{e}^{-ax}\big]=\frac{1}{a-\mathrm{i}\xi},$$

a Fourierovým obrazem konvoluce je součin příslušných Fourierových obrazů, platí

$$\mathfrak{F}\big[\Theta(x)\,\mathrm{e}^{-ax}\star\Theta(x)\,\mathrm{e}^{-bx}\big]=\frac{1}{a-\mathrm{i}\xi}\frac{1}{b-\mathrm{i}\xi}=\frac{1}{(a-b)\,(-a+\mathrm{i}\xi)}+\frac{1}{(-a+b)\,(-b+\mathrm{i}\xi)}.$$

Při použití tabulky inverzních korespondencí dostáváme pro případ $a \neq b$ rovnost

$$\Theta(x)\,\mathrm{e}^{-ax} \star \Theta(x)\,\mathrm{e}^{-bx} = \Theta(x)\,\frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{a-b}.$$

Pro $a = b$ dále platí

$$\Theta(x)\,\mathrm{e}^{-ax} \star \Theta(x)\,\mathrm{e}^{-ax} = \mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{1}{(a-\mathrm{i}\xi)^2}\right] = \Theta(x)\,x\,\mathrm{e}^{-ax},$$

kde jsme využili vlastnosti

$$\mathfrak{F}\big[x\,f(x)\big] = -\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{F}\big[f(x)\big]}{\mathrm{d}\xi}.$$

6.9.15 Příklad

Zkoumejme Fourierův obraz funkce $f(x) = \Theta(x)\,\mathrm{e}^{ax}$, kde je pro tentokrát parametr a vybrán libovolně z množiny $\mathbf{R}\backslash\{0\}$. Tehdy již funkce $f(x)$ obecně nemusí patřit do Schwartzova prostoru $\mathscr{S}(\mathbf{E})$, a tudíž klasický $\mathfrak{F}-$obraz nemusí existovat. Pokusme se tedy hledat obraz zobecněný. Zde nabádáme čtenáře, aby rozvážil fourierovské obrazy skutečně existují i pro funkce mimo Schwartzova prostoru $\mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$. Uvažme, že

$$\mathfrak{F}\big[(\Theta(x)\,\mathrm{e}^{ax})'\big] = \mathfrak{F}\big[\delta(x)\,\mathrm{e}^{ax} + \Theta(x)\,a\,\mathrm{e}^{ax}\big] = \mathfrak{F}\big[\delta(x) + \Theta(x)\,a\,\mathrm{e}^{ax}\big] = 1 + a\,\mathfrak{F}\big[\Theta(x)\,\mathrm{e}^{ax}\big].$$

Jinou úpravou ale

$$\mathfrak{F}\big[(\Theta(x)\,\mathrm{e}^{ax})'\big] = -\mathrm{i}\xi\,\mathfrak{F}\big[\Theta(x)\,\mathrm{e}^{ax}\big].$$

Srovnáním obou rovností pak

$$\mathfrak{F}\big[\Theta(x)\,\mathrm{e}^{ax}\big] = \frac{-1}{a+\mathrm{i}\xi}, \qquad\qquad (a \neq 0),$$

což pro $a < 0$ koresponduje s rovností odvozenou v příkladě 6.9.2.

6.9.16 Příklad

Fourierovou transformací řešme obyčejnou diferenciální rovnici

$$y''' + 3y' + 2y = \delta(x).$$

Označme $Y(\xi) = \mathfrak{F}\big[y(x)\big]$ Fourierův obraz hledaného řešení. Pak $\mathfrak{F}\big[y'(x)\big] = -\mathrm{i}\xi Y$ a $\mathfrak{F}\big[y'''(x)\big] = \mathrm{i}\xi^3 Y$. Pak se celá rovnice transformuje do tvaru

$$\mathrm{i}\xi^3 Y - 3\mathrm{i}\xi Y + 2Y = 1,$$

neboť Fourierovým obrazem $\delta-$funkce je jednička. Odtud po rozkladu na parciální zlomky dostáváme

$$Y = \frac{1}{\mathrm{i}\xi^3 - 3\mathrm{i}\xi + 2} = -\frac{\mathrm{i}}{9(-\mathrm{i}+\xi)} + \frac{\mathrm{i}}{9(2\,\mathrm{i}+\xi)} + \frac{-1}{3\,(-\mathrm{i}+\xi)^2}.$$

Hledaným řešením je tedy funkce

$$y(x) = \mathfrak{F}^{-1}\big[Y(\xi)\big] = \Theta(x)\left(-\frac{1}{9}\,\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{9}\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{x}{3}\,\mathrm{e}^{x}\right).$$

Zajímavou vlastností řešení je skutečnost, že $y(0_+) = y'(0_+) = 0$ a $y''(0_+) = 1$. Jak uvidíme později, bude tato vlastnost fourierovských řešení do jisté míry univerzální.

6.9.17 Příklad

V prostoru $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$ řešme algebraickou rovnici $x^n f(x) = 0$. Tj. hledejme všechna její řešení $f(x) \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Označme $F(\xi) = \mathfrak{F}[f(x)](\xi) \in \mathscr{S}'$ její fourierovský obraz. Na zadanou rovnici budeme nyní aplikovat Fourierovu transformaci. Dostáváme

$$\mathfrak{F}[x^n f(x)](\xi) = (-\mathrm{i})^n\,\frac{\mathrm{d}^n F}{\mathrm{d}\xi^n}(\xi) = \mathfrak{F}[0] = 0,$$

kde jsme užili vlastnosti Fourierovy transformace pro derivaci obrazu. Řešíme tedy rovnici

$$F^{(n)}(\xi) = \frac{\mathrm{d}^n F}{\mathrm{d}\xi^n} = 0$$

ve třídě $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$. Jedná se o triviální diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, jejímž charakteristickým polynomem je $\ell(\lambda) = \lambda^n$. Kořenem polynomu $\ell(\lambda)$ je pouze nula, a to $n-$násobně. Z teorie diferenciálních rovnic odtud vyplývá, že

$$F(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathtt{C}_k \xi^k, \tag{6.19}$$

kde $\mathtt{C}_k$ jsou konstanty. Přitom systém řešení (6.19) popisuje řešení zkoumané rovnice kompletně. Zbývá nalézt vzory k těmto polynomům při Fourierově transformaci. Protože však platí

$$\mathfrak{F}\big[\delta^{(n)}(x)\big](\xi) = (-\mathtt{i}\xi)^n \mathfrak{F}\big[\delta(x)\big](\xi) = (-\mathtt{i}\xi)^n,$$

potom

$$\mathfrak{F}^{-1}\big[\xi^k\big](x) = \mathtt{i}^k \delta^{(k)}(x),$$

což vede nakonec ke známému výsledku

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}\big[F(\xi)\big](x) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathtt{i}^k \mathtt{C}_k \delta^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathtt{K}_k \delta^{(k)}(x).$$

6.9.18 Příklad

Pokusme v rámci tohoto příkladu porovnat následující limity

$$\lim_{a\to\infty} \sqrt{\frac{a}{\pi}}\,\mathsf{e}^{-ax^2}, \quad \lim_{a\to\infty} \mathfrak{F}\left[\sqrt{\frac{a}{\pi}}\,\mathsf{e}^{-ax^2}\right].$$

Nejprve z definice konvergence v $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$ snadno zjistíme, že

$$\lim_{a\to\infty} \left(\sqrt{\frac{a}{\pi}}\,\mathsf{e}^{-ax^2}, \varphi(x)\right) = \lim_{a\to\infty} \int_{\mathbf{R}} \sqrt{\frac{a}{\pi}}\,\mathsf{e}^{-ax^2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} y = \sqrt{a}x \\ \\ \mathrm{d}y = \sqrt{a}\,\mathrm{d}x \end{array} \right| =$$

$$= \varphi(0) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} \mathsf{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \varphi(0) = \big(\delta, \varphi(x)\big).$$

Tedy

$$\lim_{a\to\infty} \sqrt{\frac{a}{\pi}}\,\mathsf{e}^{-ax^2} \overset{\mathscr{S}'}{=} \delta(x).$$

Zcela analogicky

$$\lim_{a\to\infty} \mathfrak{F}\left[\sqrt{\frac{a}{\pi}}\,\mathsf{e}^{-ax^2}\right] \overset{\mathscr{S}'}{=} 1,$$

neboť

$$\lim_{a\to\infty} \left(\mathfrak{F}\left[\sqrt{\frac{a}{\pi}}\,\mathsf{e}^{-ax^2}\right], \varphi(\xi)\right) = \lim_{a\to\infty} \left(\mathsf{e}^{-\frac{\xi^2}{4a}}, \varphi(\xi)\right) = \lim_{a\to\infty} \int_{\mathbf{R}} \mathsf{e}^{-\frac{\xi^2}{4a}} \varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \lim_{a\to\infty} \int_{\mathbf{R}} \varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \big(1, \varphi(x)\big).$$

Zjištěná skutečnost plně koresponduje se známou vlastností, že $\mathfrak{F}[f]$ je spojité zobrazení (viz věta 6.8.7 a dva její důsledky). Z faktu, že $\lim_{a\to\infty} f_a = g$ tudíž ihned vyplývá, že $\lim_{a\to\infty} \mathfrak{F}[f_a] = \mathfrak{F}[g]$. Zde konkrétně

$$\lim_{a\to\infty} \mathfrak{F}\left[\sqrt{\frac{a}{\pi}}\,\mathsf{e}^{-ax^2}\right] = \mathfrak{F}\left[\lim_{a\to\infty} \sqrt{\frac{a}{\pi}}\,\mathsf{e}^{-ax^2}\right] = \mathfrak{F}\big[\delta(x)\big] = 1.$$

6.9.19 Příklad

Pokusme se nyní dokázat, že konverguje-li posloupnost funkcí $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ z prostoru $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ k funkci $f \in \mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$, tj. platí-li, že $\lim_{k\to\infty} f_k \overset{\mathscr{S}'}{=} f$, pak pro libovolný multiindex $\alpha \in \mathbf{N}_0^r$ platí rovnost

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{D}_\xi^\alpha \mathfrak{F}[f_k] \overset{\mathscr{S}'}{=} \mathcal{D}_\xi^\alpha \mathfrak{F}[f].$$

Pro $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ přitom přitom toto tvrzení splývá s tvrzením 6.8.8, což za malou chvíli zužitkujeme v našem důkazu. Zvolme tedy libovolnou temperovanou testovací funkci $\varphi(\vec{\xi}) \in \mathscr{S}(\mathbf{E}^r)$ a vypočtěme:

$$\lim_{k\to\infty} \big(\mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{\xi}}\mathfrak{F}[f_k], \varphi(\vec{\xi})\big) \overset{❶}{=} \lim_{k\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \big(\mathfrak{F}[f_k], \mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{\xi}}\varphi(\vec{\xi})\big) \overset{❷}{=} (-1)^{|\alpha|} \big(\mathfrak{F}[f], \mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{\xi}}\varphi(\vec{\xi})\big) \overset{❸}{=}$$
$$\overset{❸}{=} (-1)^{2|\alpha|} \big(\mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{\xi}}\mathfrak{F}[f], \varphi(\vec{\xi})\big) \overset{❹}{=} \big(\mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{\xi}}\mathfrak{F}[f], \varphi(\vec{\xi})\big).$$

Přitom jsme během tohoto výpočtu použili definice derivace ❶, tvrzení důsledku 6.8.8 ❷, znovu definice derivace v prostoru zobecněných temperovaných dostribucí ❸ a nakonec banální algebraickou úpravu ❹. Zcela analogicky lze také prokázat, že pro systém funkcí f_λ z prostoru $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ závislých na parametru $\lambda \in \mathbf{R}$ a jeho limitu $\lim_{\lambda\to\mu} f_\lambda \overset{\mathscr{S}'}{=} f$ platí rovnost

$$\lim_{\lambda\to\mu} \mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{\xi}}\mathfrak{F}[f_\lambda] \overset{\mathscr{S}'}{=} \mathcal{D}^{\alpha}_{\vec{\xi}}\mathfrak{F}[f].$$

Kapitola 7

Řešení diferenciálních rovnic

V této kapitole konečně přistoupíme (po poměrně obsáhlé teoretické přípravě z přechozích kapitol) k samotnému řešení diferenciálních rovnic, zejména parciálních. Vzhledem k tomu, že jsme v dosavadním textu provedli normalizace parciálních diferenciálních rovnic, můžeme se nyní věnovat řešení pouze normalizovaných tvarů parciálních diferenciálních rovnic, což nám významně ulehčí práci.

7.1 Obecná řešení diferenciálních rovnic

Na úvod kapitoly zavedeme zobecněný pojem řešení parciální diferenciální rovnice. Toto zobecnění vztáhneme na třídy distribucí $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$, popř $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$, a takto nově definovaný pojem propojíme s klasickou představou o řešení parciálních diferenciálních rovnic.

7.1.1 Definice

Nechť je dán lineární diferenciální operátor (4.17) řádu m na G a funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G)$, kde $G \subset \mathbf{E}^r$ je oblast. Pak rovnici

$$\widehat{L}(u) = f(\vec{x}) \tag{7.1}$$

nazýváme *klasickou parciální diferenciální rovnicí řádu* m. Funkci $f(\vec{x})$ nazýváme *pravou stranou parciální diferenciální rovnice* (7.1) a koeficienty $a_\alpha(\vec{x})$ operátoru $\widehat{L}$ někdy též nazýváme *koeficienty parciální diferenciální rovnice* (7.1).

7.1.2 Definice

Řešením parciální diferenciální rovnice (7.1) na oblasti G rozumíme každou funkci $u(\vec{x}) \in \mathscr{C}^m(G)$, pro níž $\widehat{L}(u) = f(\vec{x})$.

7.1.3 Poznámka

Zde pouze připomínáme, že množina všech řešení rovnice $\widehat{L}(u) = 0$ tvoří vektorový prostor a množina všech řešení rovnice $\widehat{L}(u) = f(\vec{x})$, kde $f(\vec{x})$ je nenulovou spojitou funkcí na G, tvoří lineární varietu. Navíc všechna řešení rovnice $\widehat{L}(u) = f(\vec{x})$ jsou tvaru $u(\vec{x}) = z(\vec{x}) + z_p(\vec{x})$, kde $z(\vec{x})$ jsou všechna řešení rovnice $\widehat{L}(z) = 0$ a $z_p(\vec{x})$ je jedno řešení rovnice $\widehat{L}(z_p) = f(\vec{x})$.

7.1.4 Definice

Nechť je dán lineární diferenciální operátor (4.17) řádu m na oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$ a zobecněná funkce $f \in \mathscr{D}'(G)$. Pak rovnici

$$\widehat{L}(u) = f \tag{7.2}$$

nazýváme *zobecněnou diferenciální rovnicí řádu* m. Distribuci f nazýváme *pravou stranou diferenciální rovnice* (7.2) a koeficienty a_α, jejimiž generátory jsou lokálně integrabilní koeficienty $a_\alpha(\vec{x})$ operátoru $\widehat{L}$, nazýváme *zobecněnými koeficienty diferenciální rovnice* (7.2).

7.1.5 Definice

Zobecněným řešením diferenciální rovnice (7.2) na oblasti G rozumíme každou zobecněnou funkci $u \in \mathscr{D}'(G)$, pro níž platí implikace

$$\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(G) \quad \Longrightarrow \quad \big(\widehat{L}(u), \varphi(\vec{x})\big) = \big(f, \varphi(\vec{x})\big).$$

7.1.6 Věta

Nechť $u(\vec{x})$ je klasické řešení diferenciální rovnice (7.1), kde $f(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G)$. Nechť f je regulární zobecněná funkce, jejímž generátorem je funkce $f(\vec{x})$. Pak distribuce u, jejímž generátorem je funkce $u(\vec{x})$, je řešením zobecněné rovnice (7.2).

Důkaz:

- nechť platí rovnost $\widehat{L}(u) = f(\vec{x})$ chápaná klasicky
- nechť u je zobecněná funkce definovaná nad $\mathscr{D}(G)$ předpisem $\big(u, \varphi(\vec{x})\big) = \int_{\mathbf{E}^r} u(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}$
- pak platí
$$\big(\widehat{L}(u), \varphi(\vec{x})\big) = \int_{\mathbf{E}^r} \widehat{L}\big(u(\vec{x})\big)\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \big(f, \varphi(\vec{x})\big)$$
- podle definice 7.1.5 je tedy u řešením zobecněné rovnice (7.2)

7.1.7 Věta

Nechť f je regulární zobecněná funkce, jejímž generátorem je funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G)$. Nechť u je zobecněné řešení diferenciální rovnice (7.2) takové, že jejím generátorem je funkce $u(\vec{x}) \in \mathscr{C}^m(G)$. Pak $u(\vec{x})$ je klasickým řešením rovnice (7.1).

Důkaz:

- z předpokladu věty vyplývá, že u je regulární distribuce a $u(\vec{x}) \in \mathscr{C}^m(G)$ je její generátor
- díky tomu jsou zobecněné derivace distribuce u a klasické derivace generátoru $u(\vec{x})$ totožné
- víme, že pro všechny testovací funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(G)$ platí rovnost $\big(\widehat{L}(u), \varphi(\vec{x})\big) = \big(f, \varphi(\vec{x})\big)$
- odtud
$$\int_{\mathbf{E}^r} \widehat{L}\big(u(\vec{x})\big)\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}$$
- to implikuje rovnost
$$\int_{\mathbf{E}^r} \Big(\widehat{L}\big(u(\vec{x})\big) - f(\vec{x})\Big)\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = 0,$$
což podle věty 5.2.12 vede k tvrzení, že $\widehat{L}\big(u(\vec{x})\big) - f(\vec{x}) = 0$ s.v.
- jelikož je ale funkce $\widehat{L}\big(u(\vec{x})\big) - f(\vec{x})$ spojitá, platí jistě, že $\widehat{L}\big(u(\vec{x})\big) = f(\vec{x})$
- to finalizuje důkaz

7.2 Fyzikální motivace k formulaci úloh matematické fyziky

Před tím, než budou v následující sekci formulovány konkrétní úlohy na řešení diferenciálních rovnic, je vhodné se seznámit s příslušnou fyzikální motivací těchto úloh.

7.2.1 Poznámka

Jednou z nejtypičtějších fyzikálních úloh, které vedou na řešení diferenciální rovnice, je úloha na kmitání. Těleso hmotnosti m je zavěšeno na pružině s tuhostí k. Kmitání je dále tlumeno odporem prostředí, který je úměrný aktuální rychlosti tělesa, popř. je pohyb navíc vybuzován externí silou $F(t)$ závislou na čase. Podle druhého Newtonova zákona má rovnice tohoto problému tvar

$$m\ddot{x} = -kx - \ell\dot{x} + F(t).$$

Konkrétní fyzikální úloha pak bývá zadána společně s počátečními podmínkami standardního tvaru $x(0) = \alpha$ a $\dot{x}(0) = v$. Jedná se o stanovení výchozí výchylky a rychlosti. Matematicky se jedná o speciální případ obyčejné diferenciální rovnice

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^{(k)} = q(t)$$

s konstantními koeficienty a pravou stranou $q(t)$. Společně se sadou počátečních podmínek tvaru $x^{(k)}(t_0) = \alpha_k \in \mathbf{R}$ pro $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ pak tato rovnice definuje tzv. Cauchyovu úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici. Existence a jednoznačnost jejího řešení je garantována teorií obyčejných diferenciálních rovnic (viz skripta [11]).

7.2.2 Poznámka

Procesy šíření tepla nebo difúze částic v daném prostředí bývají popsány *difúzní rovnicí* tvaru

$$\varrho(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\big(p(\vec{x})\operatorname{grad}(u)\big) - q(\vec{x})\,u + g(\vec{x}, t).$$

Chápememe-li $u(\vec{x}, t)$ jako teplotu prostředí v bodě $\vec{x} \in \mathbf{E}^3$ v čase t, $\varrho(\vec{x})$ jako hustotu prostředí, $c(\vec{x})$ jako měrnou tepelnou kapacitu a $k(\vec{x})$ jako koeficient tepelné vodivosti, přejde uvedená rovnice na tvar

$$c(\vec{x})\,\varrho(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\big(k(\vec{x})\operatorname{grad}(u)\big) + g(\vec{x}, t),$$

kde $g(\vec{x}, t)$ je intenzita zdrojů tepla v bodě $\vec{x}$ v čase t. Pokud uvažujeme homogenní prostředí, jsou funkce $\varrho(\vec{x})$, $c(\vec{x})$ a $k(\vec{x})$ konstantní. Označíme-li

$$a^2 = \frac{k}{c\varrho}, \qquad f(\vec{x}, t) = \frac{g(\vec{x}, t)}{c\varrho},$$

přechází difúzní rovnice do tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(\vec{x}, t),$$

jenž nazýváme rovnicí vedení tepla. Ta bývá v praktických aplikacích často zadána společně s počáteční podmínkou $u(\vec{x}, 0) = \alpha(\vec{x})$, jež stanovuje výchozí teplotu prostředí ve všech bodech prostoru $\vec{x} \in \mathbf{E}^3$.

7.2.3 Poznámka

Mnohé úlohy z mechaniky (kmitání strun, membrán či třídimenzionálních objemů) nebo elektřiny a magnetismu (elektromagnetické kmity) bývají popsány vlnovou rovnici

$$\varrho(\vec{x})\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}\big(p(\vec{x})\operatorname{grad}(u)\big) - q(\vec{x})\,u + g(\vec{x}, t),$$

kde $u(\vec{x}, t)$ závisí na prostorových souřadnicích $\vec{x}$ a čase t. Koeficienty $\varrho(\vec{x})$, $p(\vec{x})$ a $q(\vec{x})$ jsou určeny vlastnostmi prostředí. Volný člen $g(\vec{x}, t)$ reprezentuje intenzitu vnějšího buzení. Ze základů vektorové analýzy vychází navíc rovnost

$$\operatorname{div}\big(p(\vec{x})\operatorname{grad}(u)\big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p(\vec{x})\,\frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

V homogenním prostředí jsou parametry úlohy vesměs konstantní. Položíme-li za těchto předpokladů

$$q(\vec{x}) = 0, \qquad a^2 = \frac{p}{\varrho}, \qquad f(\vec{x}, t) = \frac{g(\vec{x}, t)}{\varrho},$$

přechází difúzní rovnice do tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(\vec{x}, t),$$

jenž nazýváme vlnovou rovnicí. Tato úloha bývá nejčastěji, jak plyne z logiky problému, zadána společně s počátečními podmínkami $u(\vec{x},0) = \alpha(\vec{x})$, $\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},0) = \beta(\vec{x})$, jež stanovují výchozí polohu a rychlost membrány ve všech bodech prostoru $\vec{x} \in \mathbf{E}^3$. Pro $q(\vec{x}) = \mathtt{K}$ a

$$b = \frac{\mathtt{K}}{\varrho}, \qquad a^2 = \frac{p}{\varrho}, \qquad f(\vec{x},t) = \frac{g(\vec{x},t)}{\varrho},$$

obdržíme další z frekventovaných úloh matematické fyziky, a sice Cauchyovu úlohu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u + b\,u(\vec{x},t) = f(\vec{x},t), \quad u(\vec{x},0) = \alpha(\vec{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},0) = \beta(\vec{x}). \tag{7.3}$$

Operátor

$$\Box_a := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

bývá zvykem nazývat vlnovým (d'Alembertovým) operátorem.

7.2.4 Poznámka

Nechť se kvantová částice o hmotnosti m_0 pohybuje ve vnějším silovém poli popsaném potenciálem $V(\vec{x})$. Označme $\psi(\vec{x},t)$ vlnovou funkci této částice. Pak podle kvantové teorie představuje výraz $|\psi(\vec{x},t)|^2$ hustotu pravděpodobnosti pro výskyt částice v okolí bodu $\vec{x}$ v čase t. Tehdy (opět podle kvantové teorie) vyhovuje taková vlnová funkce tzv. *Schrödingerově rovnici* tvaru

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\psi + V(\vec{x})\varphi(\vec{x}) = \mathtt{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

kde $\hbar = 1,0546\cdot 10^{-34}$ je redukovaná Planckova konstanta. Má-li energie E částice konstantní hodnotu, nazývá se tento její stav stacionárním. V tomto případě má vlnová funkce tvar

$$\psi(\vec{x},t) = \mathsf{e}^{-\frac{\mathtt{i}}{\hbar}Et}\varphi(\vec{x}),$$

kde prostorová část $\varphi(\vec{x})$ vlnové funkce $\psi(\vec{x},t)$ vyhovuje stacionární Schrödingerově rovnici tvaru

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\varphi + V(\vec{x})\varphi(\vec{x}) = E\varphi.$$

7.2.5 Poznámka

Ve vybraném prostředí uvažujme proměnné elektromagnetické pole. Označme

$$\overrightarrow{E}(\vec{x},t) = \big(E_1(\vec{x},t), E_2(\vec{x},t), E_3(\vec{x},t)\big)$$

intenzitu elektrického pole a

$$\overrightarrow{H}(\vec{x},t) = \big(H_1(\vec{x},t), H_2(\vec{x},t), H_3(\vec{x},t)\big)$$

intenzitu magnetického pole. Dále označme $\varrho(\vec{x})$ hustotu nábojů, ε dielektrickou konstantu prostředí, μ koeficient magnetické permeability a

$$\vec{\jmath}(\vec{x},t) = \big(\jmath_1(\vec{x},t), \jmath_2(\vec{x},t), \jmath_3(\vec{x},t)\big)$$

hustotu elektrického proudu. Nechť $c = 299\,792\,458\,m.s^{-1}$ je rychlost světla ve vakuu. Pak systém rovnic

$$\operatorname{div}(\varepsilon\overrightarrow{E}) = 4\pi\varrho$$

$$\operatorname{div}(\mu\overrightarrow{H}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\overrightarrow{E}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial(\mu\overrightarrow{H})}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}(\overrightarrow{H}) = \frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon\overrightarrow{E})}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{\jmath}$$

popisujících změny elektromagnetického pole nazýváme *Maxwellovými rovnicemi*. Shrňme nyní nejčastější případy Maxwellových rovnic.

- Nechť $\varrho = 0$, ε a μ jsou konstantní a platí Ohmův zákon tvaru $\vec{\jmath} = \lambda \overrightarrow{E}$, kde λ je konstanta. Pak vhodnou úpravou Maxwellových rovnic obdržíme tzv. *telegrafní rovnici* tvaru

$$\Box_a u + \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

- Je-li $\vec{\jmath} = \vec{0}$ a ε a μ jsou konstantní a označíme-li $(\varphi_0, \overrightarrow{\varphi})$ čtyřrozměrný elektromagnetický potenciál, kde $\overrightarrow{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, transformuje se systém Maxwellových rovnic do tvaru

$$\overrightarrow{E} = \operatorname{grad}(\varphi_0) - \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial t}, \qquad \overrightarrow{H} = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}(\overrightarrow{\varphi}).$$

Komponenty elektromagnetického potenciálu vyhovují rovnicím

$$\Box_a \varphi_0 = -\frac{4\pi c^2}{\varepsilon^2\mu}\varrho, \qquad \Box_a \overrightarrow{\varphi} = \vec{0}$$

a Lorenzově podmínce

$$\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - \operatorname{div}(\overrightarrow{\varphi}) = 0.$$

- Jedná-li se o stacionární proces, přecházejí Maxwellovy rovnice na *rovnice elektrostatiky:*

$$\operatorname{div}(\varepsilon \overrightarrow{E}) = 4\pi\varrho$$

$$\operatorname{div}(\mu \overrightarrow{H}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\overrightarrow{E}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\overrightarrow{H}) = \frac{4\pi}{c}\vec{\jmath}.$$

7.2.6 Poznámka

Burgesova parciální diferenciální rovnice

$$\frac{\partial \varrho(x,t)}{\partial t} + \varrho(x,t)\frac{\partial \varrho(x,t)}{\partial x} = \mathtt{D}\frac{\partial^2 \varrho(x,t)}{\partial x^2}$$

pro hustotu dopravního proudu $\varrho(x,t)$ v závislosti na poloze x a čase t lze tzv. *Cole-Hopfovou transformací*

$$\varrho(x,t) = -\frac{2\mathtt{D}}{\varphi(x,t)}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

převést do tvaru

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mathtt{D}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \mathtt{C}\,\varphi(x,t) = 0.$$

Tuto rovnost zobecníme na standardní úlohu matematické fyziky, a sice na tzv. *dopravní rovnici*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u + b\, u(\vec{x},t) = f(\vec{x},t), \quad u(\vec{x},0) = \alpha(\vec{x}). \tag{7.4}$$

7.3 Úlohy matematické fyziky

V tomto oddíle budeme formulovat základní úlohy matematické fyziky pro rovnici kmitání, vlnovou rovnici, rovnici vedení tepla, dopravní rovnici, Schrödingerovu rovnici a rovnici Laplaceovu. Jak bylo již diskutováno ve čtvrté kapitole, dělíme diferenciální rovnice na obyčejné a parciální, kteréžto dále členíme na rovnice parabolické, hyperbolické a eliptické. Pro každou z citovaných rovnic zformulujeme v rámci této sekce systém počátečních či okrajových podmínek tak, jak je možné se s nimi setkat při řešení různých fyzikálních úloh. Podotýkáme, že úlohou matematické fyziky budeme rozumět diferenciální rovnici (popřípadě jejich soustavu) zadanou společně se sadou podmínek, jež v dalším textu označíme symbolicky Υ. Podle tvaru podmínek Υ budeme úlohy klasifikovat.

7.3.1 Úmluva

Ve většině následujících úvah bude symbol $\vec{x}$ reprezentovat prostorové proměnné, zatímco písmeno t je vyhrazeno pro proměnnou časovou.

7.3.2 Definice

Nechť $m \in \mathbf{N}$ a $f(\vec{x},t) \in \mathscr{C}(G \times \mathbf{R}_0^+)$, kde $G \in \mathbf{E}^r$ je oblast. Nechť $\widehat{L}_{\vec{x},t}$ je diferenciální operátor řádu m s definičním oborem $\mathrm{Dom}(\widehat{L}_{\vec{x},t}) = \mathscr{C}^m(G \times \mathbf{R}_0^+)$. *Úlohou matematické fyziky* budeme rozumět diferenciální rovnici

$$\widehat{L}_{\vec{x},t}\big(u(\vec{x},t)\big) = f(\vec{x},t) \tag{7.5}$$

pro neznámou funkci $u(\vec{x},t) \in \mathscr{C}^m(G \times \mathbf{R}_0^+)$ zadanou společně se sadou podmínek Υ, jež jsou na řešení $u(\vec{x},t)$ kladeny.

7.3.3 Definice

Řekneme, že úloha matematické fyziky (7.5) je *definována korektně*, existuje-li takové její řešení $u(\vec{x},t)$, jež je jednoznačné ve třídě funkcí $\mathscr{C}^m(G \times \mathbf{R}_0^+)$ a spojitě závislé na datech úlohy, tj. na sadě podmínek Υ, na pravé straně $f(\vec{x},t)$ rovnice (7.5) a na jejích koeficientech.

7.3.4 Definice

Nechť je dána korektně zadaná úloha matematické fyziky (7.5). Řekneme, že podmínky Υ jsou *počátečními podmínkami* úlohy (7.5), pokud jsou podmínkami typu

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(0_+) = \omega_k(\vec{x}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

kde $\omega_k(\vec{x}) \in \mathscr{C}^m(G)$. Řekneme, že podmínky Υ jsou *okrajovými podmínkami* úlohy (7.5), pokud jsou podmínkami pro chování funkce $u(\vec{x},t)$ či jejich derivací na hranici $\mathrm{bd}(G)$ oblasti G.

7.3.5 Poznámka

Nejjednodušším zástupcem diferenciálních rovnic v kanonickém tvaru je obyčejná diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Jí budeme věnovat první část této sekce. Příkladem fyzikálních úloh, z nichž vzejde obyčejná diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, jsou úlohy na kmitání popř. úlohy vzešlé z řešení elektrických obvodů. V tomto případě se vesměs jedná o rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty a pravou stranou. Matematicky budeme tuto úlohu formulovat jako tzv. Cauchyovu úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici.

7.3.6 Definice

Nechť $f(t) \in \mathscr{C}(t \geqslant 0)$. Klasickou *Cauchyovou úlohou pro obyčejnou diferenciální rovnici* rozumíme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} u}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + a_0 u = f(t) \tag{7.6}$$

definovanou společně s n počátečními podmínkami

$$\frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}t^k}(0) = \omega_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \tag{7.7}$$

kde $\omega_k \in \mathbf{R}$.

7.3.7 Poznámka

Klasickou rovnici (7.6) převedeme nyní na *zobecněnou* Cauchyovu úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici. Označme $u(t)$ klasické řešení rovnice (7.6). Zobecněné řešení zadané úlohy označme $w(t)$. Podle úvah plynoucích z dalšího textu (viz formulace základní věty 7.6.1 a následné diskuse) bude vztah mezi klasickým a zobecněným řešením zprostředkován rovnicí

$$w(t) = \Theta(t)\, u(t).$$

Díky tomuto vztahu a také díky vlastnostem derivování v $\mathscr{D}'(R)$ dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}\,u(t) + \Theta(t)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \delta(t)\,u(t) + \Theta(t)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \omega_0\delta(t) + \Theta(t)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

Pro druhou a třetí derivaci vychází podobně

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2} = \omega_0\dot{\delta}(t) + \omega_1\delta(t) + \Theta(t)\,\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}.$$

$$\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}t^3} = \omega_0\ddot{\delta}(t) + \omega_1\dot{\delta}(t) + \omega_2\delta(t) + \Theta(t)\,\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}t^3}.$$

Obecně tedy

$$\frac{\mathrm{d}^mw}{\mathrm{d}t^m} = \sum_{j=0}^{m-1}\omega_j\,\frac{\mathrm{d}^{m-1-j}\delta}{\mathrm{d}t^{m-1-j}} + \Theta(t)\,\frac{\mathrm{d}^mu}{\mathrm{d}t^m}.$$

Budeme-li tedy uvažovat, že levá strana zobecněné alternativy rovnice (7.6) bude mít tvar

$$\frac{\mathrm{d}^nw}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}w}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + a_0w \equiv \frac{\mathrm{d}^nw}{\mathrm{d}t^n} + \sum_{\ell=0}^{n-1}a_\ell\frac{\mathrm{d}^\ell w}{\mathrm{d}t^\ell}$$

a označíme-li pro zjednodušení zápisu $a_n = 1$, získáváme

$$\sum_{\ell=0}^{n}a_\ell\frac{\mathrm{d}^\ell w}{\mathrm{d}t^\ell} = \sum_{\ell=0}^{n}a_\ell\left(\sum_{j=0}^{\ell-1}\omega_j\,\frac{\mathrm{d}^{\ell-1-j}}{\mathrm{d}t^{\ell-1-j}}\big(\delta(t)\big) + \Theta(t)\,\frac{\mathrm{d}^\ell u}{\mathrm{d}t^\ell}\right) =$$

$$= \Theta(t)\sum_{\ell=0}^{n}a_\ell\frac{\mathrm{d}^\ell u}{\mathrm{d}t^\ell} + \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{j=0}^{\ell-1}a_\ell\omega_j\,\frac{\mathrm{d}^{\ell-1-j}}{\mathrm{d}t^{\ell-1-j}}\big(\delta(t)\big) = \Theta(t)\,f(t) + \sum_{r=0}^{n-1}\lambda_r\frac{\mathrm{d}^r\delta}{\mathrm{d}t^r},$$

kde číselné koeficienty λ_r jsou vypočteny z následujících rovnic

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= a_1\omega_0 + a_2\omega_1 + \ldots + a_{n-1}\omega_{n-2} + a_n\omega_{n-1}\\
\lambda_1 &= a_2\omega_0 + a_3\omega_1 + \ldots + a_{n-1}\omega_{n-3} + a_n\omega_{n-2}\\
&\vdots\\
\lambda_{n-2} &= a_{n-1}\omega_0 + a_n\omega_1\\
\lambda_{n-1} &= \omega_0.
\end{aligned}\tag{7.8}$$

Rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^nw}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}w}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + a_0w = \Theta(t)\,f(t) + \sum_{r=0}^{n-1}\lambda_r\frac{\mathrm{d}^r\delta}{\mathrm{d}t^r}\tag{7.9}$$

tudíž představuje zobecněnou alternativu klasické rovnice (7.6). Povšimněte si, že zatímco klasická rovnice (7.6) musela být doprovázena sadou n počátečních podmínek, zobecněná rovnice (7.9) již ve svém zápise tyto podmínky zahrnuje.

Na závěr této poznámky dodáváme, že při derivování výše uvedeného vztahu $w(t) = \Theta(t)\,u(t)$ bylo (ne zcela korektně) užito Leibnizovy formule pro derivování součinu. Bohužel ale, pokud $u(t) \notin \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$, není obecně součin $\Theta(t)\,u(t)$ dobře definován, a nelze tudíž užít Leibnizovy formule. Při derivování je pak nutno užít věty 5.3.21. Funkce $w(t) = \Theta(t)\,u(t)$ totiž naplňuje její předpoklady. Na množině $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ je diferencovatelná a v bodě $t = 0$ má skok délky

$$\lceil w\rceil_0 = \lim_{t\to 0_+} w(t) - \lim_{t\to 0_-} w(t) = \omega_0.$$

Proto skutečně

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \Theta(t)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0\,\delta(t).$$

Při výpočtu vyšších derivací by se postupovalo analogicky.

7.3.8 Definice

Nechť $a > 0$ a $f(\vec{x}, t) \in \mathscr{C}(t \geqslant 0)$. Klasickou *Cauchyovou úlohou pro rovnici vedení tepla* v $\mathbf{E}^{r+1} = \mathbf{E}^r \times \mathbf{R}$ rozumíme rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(\vec{x}, t) \tag{7.10}$$

definovanou společně s počáteční podmínkou

$$u(\vec{x}, 0) = \omega(\vec{x}), \tag{7.11}$$

kde $\omega(x) \in \mathscr{C}(\mathbf{E}^r)$. Operátor

$$\oslash_a := \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

nazýváme *operátorem vedení tepla* v $\mathbf{E}^{r+1}$.

7.3.9 Poznámka

Podotýkáme, že rovnice (7.10) je korektně definovaná a reprezentuje parabolickou parciální diferenciální rovnici v diagonálním tvaru.

7.3.10 Příklad

Pokusme se opět klasickou rovnici (7.10) převést na rovnici zobecněnou. Převodním vztahem je opět vztah $w(\vec{x}, t) = \Theta(t)\, u(\vec{x}, t)$. Za použití elementárních vztahů odvozených v $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ (přesněji: za použití věty 5.3.21) snadno spočteme, že

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = \Theta(t)\, \frac{\partial u}{\partial x_k}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} = \Theta(t)\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \delta(t)\, u(\vec{x}, t) + \Theta(t)\, \frac{\partial u}{\partial t} = \delta(t) \otimes \omega(\vec{x}) + \Theta(t)\, \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Pak tedy

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} = \delta(t) \otimes \omega(\vec{x}) + \Theta(t)\, \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Theta(t) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \Theta(t)\, f(\vec{x}, t) + \delta(t) \otimes \omega(\vec{x}),$$

a rovnice vedení tepla se tedy transformuje do zobecněného tvaru

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \Delta w = \Theta(t)\, f(\vec{x}, t) + \delta(t) \otimes \omega(\vec{x}),$$

ve kterém je již počáteční podmínka (7.11) zahrnuta.

7.3.11 Definice

Nechť $a > 0,\ b \in \mathbf{R}$ a $f(\vec{x}, t) \in \mathscr{C}(t \geqslant 0)$. Klasickou *Cauchyovou úlohou pro dopravní rovnici* v $\mathbf{E}^{r+1} = \mathbf{E}^r \times \mathbf{R}$ rozumíme rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + b\, u(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t) \tag{7.12}$$

definovanou společně s počáteční podmínkou

$$u(\vec{x}, 0) = \omega(\vec{x}), \tag{7.13}$$

kde $\omega(x) \in \mathscr{C}(\mathbf{E}^r)$. Operátor

$$\widehat{B}_{a,b} := \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta + b = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + b$$

nazýváme *dopravním operátorem* v $\mathbf{E}^{r+1}$.

7.3.12 Příklad

Dopravní rovnice (7.12) se substitucí $w(\vec{x}, t) = \Theta(t)\, u(\vec{x}, t)$ transformuje do zobecněného tvaru

$$\widehat{B}_{a,b}(w) = \frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \Delta w + b\, w(\vec{x}, t) = \Theta(t)\, f(\vec{x}, t) + \delta(t) \otimes \omega(\vec{x}).$$

7.3.13 Definice

Nechť $a > 0$ a $f(\vec{x}, t) \in \mathscr{C}(t \geqslant 0)$. Klasickou *Cauchyovou úlohou pro vlnovou rovnici* v $\mathbf{R}^{n+1}$ rozumíme rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(\vec{x}, t) \tag{7.14}$$

definovanou společně s počátečními podmínkami

$$u(\vec{x}, 0) = \omega_0(\vec{x}), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, 0) = \omega_1(\vec{x}), \tag{7.15}$$

kde $\omega_0(x) \in \mathscr{C}^1(\mathbf{E}^r)$ a $\omega_1(\vec{x}) \in \mathscr{C}(\mathbf{E}^r)$. Funkci $f(\vec{x}, t) : \mathbf{E}^{r+1} \mapsto \mathbf{R}$ nazýváme *pravou stranou (zdrojem)* Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici. Operátor

$$\Box_a := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

nazýváme *vlnovým operátorem* nebo *d'Alembertovým operátorem* v $\mathbf{R}^{r+1}$.

7.3.14 Poznámka

V tomto případě je rovnice (7.14) hyperbolickou parciální diferenciální rovnicí v diagonálním tvaru.

7.3.15 Příklad

Klasickou rovnici (7.14) budeme opět převádět na rovnici zobecněnou. Převodním vztahem je znovu vztah $w(\vec{x}, t) = \Theta(t)\, u(\vec{x}, t)$. Snadno spočteme, že

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = \Theta(t)\, \frac{\partial u}{\partial x_k}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} = \Theta(t)\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \delta(t)\, u(\vec{x}, t) + \Theta(t)\, \frac{\partial u}{\partial t} = \delta(t) \otimes \omega_0(\vec{x}) + \Theta(t)\, \frac{\partial u}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dot{\delta}(t) \otimes \omega_0(\vec{x}) + \delta(t) \otimes \omega_1(\vec{x}) + \Theta(t)\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Pak tedy

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} &= \dot{\delta}(t) \otimes \omega_0(\vec{x}) + \delta(t) \otimes \omega_1(\vec{x}) + \Theta(t)\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Theta(t) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \\ &= \Theta(t)\, f(\vec{x}, t) + \dot{\delta}(t) \otimes \omega_0(\vec{x}) + \delta(t) \otimes \omega_1(\vec{x}),\end{aligned}$$

a vlnová rovnice se tudíž transformuje do zobecněného tvaru

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \Delta w = \Theta(t)\, f(\vec{x}, t) + \dot{\delta}(t) \otimes \omega_0(\vec{x}) + \delta(t) \otimes \omega_1(\vec{x}),$$

ve kterém jsou již zahrnuty počáteční podmínky. Znovu dodáváme, že při derivování vztahu $w(\vec{x}, t) = \Theta(t)\, u(\vec{x}, t)$ musí být korektně užito věty 5.3.23, ne tedy pouze Leibnizova pravidla.

7.3.16 Definice

Nechť $a > 0$ a $f(\vec{x}, t) \in \mathscr{C}(t \geqslant 0)$. Klasickou *Cauchyovou úlohou pro Schrödingerovu rovnici* v $\mathbf{E}^{r+1}$ rozumíme rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathtt{i}\beta^2 \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(\vec{x}, t) \tag{7.16}$$

definovanou společně s počáteční podmínkou (zvanou *lokalizovaný stav*)

$$u(\vec{x}, 0) = \omega(\vec{x}), \tag{7.17}$$

kde $\omega(x) \in \mathscr{C}(\mathbf{E}^r)$. Operátor

$$\widehat{S}_\beta := \frac{\partial}{\partial t} - \mathtt{i}\beta^2 \Delta = \frac{\partial}{\partial t} - \mathtt{i}\beta^2 \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

nazýváme *Schrödingerovým operátorem* v $\mathbf{E}^{r+1}$.

7.3.17 Příklad

Klasická Schrödingerova rovnice se transformačním vztahem $w(\vec{x},t) = \Theta(t)\, u(\vec{x},t)$ transformuje (podobně jako rovnice vedení tepla) do zobecněného tvaru

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \mathtt{i}\beta^2 \Delta w = \Theta(t)\, f(\vec{x},t) + \delta(t) \otimes \omega(\vec{x}).$$

7.4 Metoda sestupu

Nyní se seznámíme s tzv. spádovou metodou (nebo-li metodou sestupu), kterou s výhodou zužitkujeme při hledání tzv. fundamentálních řešení operátorů.

7.4.1 Poznámka

V prostoru $\mathbf{R}^{r+1}$ proměnných $(\vec{x},t) = (x_1, x_2, \ldots, x_r, t)$ uvažme lineární diferenciální rovnici

$$\widehat{S}\big(u(\vec{x},t)\big) = f(\vec{x}) \otimes \delta(t) \tag{7.18}$$

s konstantními koeficienty, kde $f(\vec{x}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a $\widehat{S} = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell} \widehat{L}_\ell + \widehat{L}_0$. Nechť navíc $\widehat{L}_\ell$ a $\widehat{L}_0$ jsou operátory, které působí pouze na prostorové proměnné $\vec{x}$. Nechť pro každou posloupnost $\eta_k(t) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$, která v $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ konverguje k jedničce, a pro každou funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ existuje limita

$$\lim_{k\to\infty} \big(u(\vec{x},t), \varphi(\vec{x})\eta_k(t)\big) = \big(u(\vec{x},t), \varphi(\vec{x}) \cdot 1(t)\big) = \big(u_0(\vec{x}), \varphi(\vec{x})\big). \tag{7.19}$$

Nechť tato limita nezávisí na volbě posloupnosti $\eta_k(t) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$. Protože pro každé $k \in \mathbf{N}$ je lineární funkcionál $\big(u_k(\vec{x}), \varphi(\vec{x})\big) = \big(u(\vec{x},t), \varphi(\vec{x})\eta_k(t)\big)$ také spojitý, plyne z úplnosti prostoru $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$, že $u_0(\vec{x}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$.

7.4.2 Příklad

Nechť $u(\vec{x},t)$ je funkce, pro níž je $\int_{\mathbf{R}} u(\vec{x},t)\, \mathrm{d}t \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$. Pak platí, že

$$\lim_{k\to\infty} \big(u(\vec{x},t), \varphi(\vec{x})\eta_k(t)\big) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}^{r+1}} u(\vec{x},t)\varphi(\vec{x})\eta_k(t)\, \mathrm{d}\vec{x}\mathrm{d}t.$$

Protože existuje kompaktní množina $B \supset \operatorname{supp}(\varphi)$ a $\varphi(\vec{x})$ je na ní spojitá, lze v uvedeném integrálu použít Lebesgueovu a Fubiniovu větu. Z nich plyne, že

$$\lim_{k\to\infty} \big(u(\vec{x},t), \varphi(\vec{x})\eta_k(t)\big) = \int_{\mathbf{R}^{r+1}} u(\vec{x},t)\varphi(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x}\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}^r} \varphi(\vec{x}) \left(\int_{\mathbf{R}} u(\vec{x},t)\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}\vec{x},$$

a tedy $u_0(\vec{x}) = \int_{\mathbf{R}} u(\vec{x},t)\, \mathrm{d}t$.

7.4.3 Příklad

Nechť $u(\vec{x},t) = f(\vec{x}) \otimes \delta(t)$, kde $f(\vec{x}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$. Pak je pro každou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ splněna rovnost

$$\begin{aligned}\big(u_0(\vec{x}), \varphi(\vec{x})\big) = \lim_{k\to\infty} \big(u(\vec{x},t), \varphi(\vec{x})\eta_k(t)\big) = \lim_{k\to\infty} \big(f(\vec{x}) \otimes \delta(t), \varphi(\vec{x})\eta_k(t)\big) = \\ = \lim_{k\to\infty} \big(f(\vec{x}), \varphi(\vec{x})\eta_k(0)\big) = \big(f(\vec{x}), \varphi(\vec{x})\big),\end{aligned}$$

a tedy $u_0(\vec{x}) = f(\vec{x})$.

7.4.4 Věta – o metodě sestupu

Jestliže řešení $u(\vec{x},t) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^{r+1})$ rovnice (7.18) připouští prodloužení (7.19), je zobecněná funkce $u_0(\vec{x}) \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ řešením rovnice

$$\widehat{L}_0(u_0) = f(\vec{x}). \tag{7.20}$$

Důkaz:

- je-li $\eta_k(t) \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ posloupnost, která v $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ konverguje k jedničce, pak také posloupnost $\eta_k(t) + \eta_k^{(\ell)}(t)$ pro $\ell \in \mathbf{N}$ konverguje v $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ k jedničce

- proto je pro každou testovací funkci $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ splněna rovnost

$$\lim_{k\to\infty}\big(u(\vec{x},t),\varphi(\vec{x})\eta_k^{(\ell)}(t)\big) = \lim_{k\to\infty}\Big(u(\vec{x},t),\varphi(\vec{x})\big(\eta_k(t)+\eta_k^{(\ell)}(t)\big)\Big) - \lim_{k\to\infty}\big(u(\vec{x},t),\varphi(\vec{x})\eta_k(t)\big) = \\ = \big(u_0(\vec{x}),\varphi(\vec{x})\big) - \big(u_0(\vec{x}),\varphi(\vec{x})\big) = 0$$

- proto také platí

$$\big(\widehat{L}_0(u_0),\varphi(\vec{x})\big) = \lim_{k\to\infty}\big(u(\vec{x},t),\widehat{L}_0\varphi(\vec{x})\eta_k(t)\big) = \lim_{k\to\infty}\big(u(\vec{x},t),\widehat{L}_0\varphi(\vec{x})\eta_k(t)\big) + \\ + \lim_{k\to\infty}\sum_{\ell=1}^{m}\big(u(\vec{x},t),\widehat{L}_\ell\varphi(\vec{x})\eta_k^{(\ell)}(t)\big) = \lim_{k\to\infty}\big(u(\vec{x},t),\widehat{S}\varphi(\vec{x})\eta_k(t)\big) = \lim_{k\to\infty}\big(\widehat{S}u(\vec{x},t),\varphi(\vec{x})\eta_k(t)\big) = \\ = \lim_{k\to\infty}\big(f(\vec{x})\otimes\delta(t),\varphi(\vec{x})\eta_k(t)\big) = \lim_{k\to\infty}\big(f(\vec{x}),\varphi(\vec{x})\eta_k(0)\big) = \big(f(\vec{x}),\varphi(\vec{x})\big)$$

- tedy $\widehat{L}_0(u_0) = f(\vec{x})$ v $\mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$

7.4.5 Poznámka

Tato metoda nalezení řešení $u_0(\vec{x})$ rovnice (7.20) s r proměnnými pomocí řešení $u(\vec{x},t)$ rovnice (7.18) s $r+1$ proměnnými se nazývá *metoda sestupu*, nebo *spádová metoda*. Lze ji použít zejména k nalezení fundamentálního řešení (viz oddíl 7.5). Jestliže totiž vezmeme $f(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$ a fundamentální řešení $\mathscr{E}(\vec{x},t)$ operátoru $\widehat{S}$ připouští prodloužení $\mathscr{E}_0(\vec{x})$ ve smyslu (7.19), je tato zobecněná funkce fundamentálním řešením operátoru $\widehat{L}_0$. Speciálně pokud je funkce $\int_{\mathbf{R}}\mathscr{E}(\vec{x},t)\,\mathtt{d}t \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$, je

$$\mathscr{E}_0(\vec{x}) = \int_{\mathbf{R}}\mathscr{E}(\vec{x},t)\,\mathtt{d}t.$$

Toto fundamentální řešení navíc splňuje rovnici $\mathscr{E}_0(\vec{x})\otimes 1(t) = \mathscr{E}(\vec{x},t)\star\big(\delta(\vec{x})\otimes 1(t)\big)$.

7.5 Fundamentální řešení operátorů

V nadcházející sekci budeme definovat tzv. fundamentální řešení operátorů, která budou hlavním stavebním kamenem při konstrukci úplných řešení parciálních diferenciálních rovnic.

7.5.1 Definice

Nechť je dán lineární diferenciální operátor (4.17) na G a nechť $a_\alpha(\vec{x})$ jsou jeho koeficienty. Řekneme, že $\widehat{L}$ je diferenciální operátor s konstantními koeficienty, pokud pro všechny multiindexy $\alpha \in \mathbf{N}_0^m$ platí rovnosti $a_\alpha(\vec{x}) \in \mathbf{R}$ na G.

7.5.2 Definice

Nechť $\widehat{L}$ je lineární diferenciální opeátor s konstantními koeficienty s definičním oborem $\mathrm{Dom}(\widehat{L}) = \mathscr{D}'(G)$. Zobecněnou funkci $\mathscr{E} \in \mathscr{D}'(G)$ nazveme *fundamentálním řešením operátoru* $\widehat{L}$ na G, vyhovuje-li rovnici

$$\widehat{L}\mathscr{E} = \delta. \tag{7.21}$$

7.5.3 Věta – o Fourierově obrazu fundamentálního řešení

Nechť $\widehat{L}$ je lineární diferenciální opeátor s konstantními koeficienty a $\mathscr{E} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ jeho fundamentální řešení. Pak platí

$$\mathscr{E}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^r}\,\mathfrak{F}\left[\frac{1}{\sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(\mathtt{i}\vec{\xi})^\alpha}\right].$$

<u>*Důkaz:*</u>

- aplikujeme-li na rovnici $\widehat{L}\mathscr{E} = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha\mathcal{D}^\alpha\mathscr{E}(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$ Fourierovu transformaci, dostáváme rovnost

$$\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(-\mathtt{i}\vec{\xi})^\alpha E(\xi) = 1,$$

  kde $E(\xi) = \mathfrak{F}(\mathscr{E}(\vec{x}))$

- pak tedy (po aplikaci věty o Fourierově inverzi) zjišťujeme, že skutečně

$$E(\xi) = \mathfrak{F}^{(-1)}\big[E(\xi)\big] = \mathfrak{F}^{(-1)}\left[\frac{1}{\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(-\mathtt{i}\vec{\xi})^\alpha}\right] = \frac{1}{(2\pi)^r}\,\mathfrak{F}\left[\frac{1}{\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(\mathtt{i}\vec{\xi})^\alpha}\right]$$

7.5.4 Příklad

Nechť $a > 0$ je parametr. Hledejme fundamentální řešení operátoru

$$\widehat{L} = \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t} + a.$$

Řešíme tedy rovnici

$$\widehat{L}\mathscr{E}(t) = \frac{\mathtt{d}\mathscr{E}}{\mathtt{d}t} + a\mathscr{E} = \delta(t).$$

Označíme-li $E(p) = \mathfrak{L}[\mathscr{E}(t)]$ Laplaceův obraz hledaného fundamentálního řešení, přechází rovnice pro $\mathscr{E}(x)$ na rovnici

$$pE + aE = 1,$$

odkud

$$\mathscr{E}(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+a}\right] = \Theta(t)\,\mathtt{e}^{-at}.$$

Analogicky bychom namísto Laplaceovy transformace mohli užít transformaci Fourierovu. Pro $E(\xi) = \mathfrak{F}[\mathscr{E}(t)]$ bychom po aplikaci $\mathfrak{F}-$transformace získali rovnici

$$-\mathtt{i}\xi E + aE = 1,$$

odkud pak snadno

$$\mathscr{E}(t) = \mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{1}{a-\mathtt{i}\xi}\right] = \Theta(t)\,\mathtt{e}^{-at}.$$

7.5.5 Příklad

Nechť $a > 0$ je parametr. Hledejme tentokrát fundamentální řešení operátoru

$$\widehat{L} = \frac{\mathtt{d}^2}{\mathtt{d}t^2} + a^2.$$

V tomto případě tedy řešíme tedy rovnici

$$\widehat{L}\mathscr{E}(t) = \frac{d^2\mathscr{E}}{\mathtt{d}t^2} + a^2\mathscr{E} = \delta(t).$$

Označíme-li opět $E(p) = \mathfrak{L}[\mathscr{E}(t)]$ Laplaceův obraz hledaného fundamentálního řešení, získáváme transformovanou rovnici

$$p^2E + a^2E = 1,$$

odkud

$$\mathscr{E}(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+a^2}\right] = \frac{1}{a}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{a}{p^2+a^2}\right] = \frac{\Theta(t)}{a}\,\sin(at).$$

7.5.6 Příklad

Jak je patrno, při hledání fundamentálních řešení lineárních diferenciálních operátorů s obyčejnými derivacemi je nanejvýše užitečné použití Laplaceovy transformace. Pokusme se tedy nyní nalézt obecnou metodu pro úlohu na fundamentální řešení operátoru

$$\widehat{L} = \frac{\mathtt{d}^n}{\mathtt{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathtt{d}^{n-1}}{\mathtt{d}t^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t} + a_0,$$

kde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$. Rovnice $\widehat{L}\mathscr{E}(t) = \delta(t)$ je zcela zjevně rovnicí v $\mathscr{D}'(\mathbf{E})$, a tedy užitá Laplaceova transformace je transformací v distribucích. Proto se rovnice $\widehat{L}\mathscr{E}(t) = \delta(t)$ po aplikaci $\mathfrak{L}-$operátoru transformuje do tvaru

$$p^nE + a_{n-1}p^{n-1}E + \ldots + a_1pE + a_0E = 1, \tag{7.22}$$

kde opět $E(p) = \mathfrak{L}[\mathscr{E}(t)]$ je Laplaceův obraz hledaného fundamentálního řešení. Budeme-li ovšem na rovnici (7.22) nahlížet jako na rovnici vzešlou z klasické úlohy, není obtížné nahlédnout, že rovnice

$$(p^n E - 1) + a_{n-1}p^{n-1}E + \ldots + a_1 pE + a_0 E = 0$$

je Laplaceovým obrazem diferenciální rovnice

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{u} + a_0 u = 0$$

zadané společně s podmínkami

$$u^{(k)}(0) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-2$$
$$u^{(n-1)}(0) = 1.$$

Tento poznatek umožňuje vyslovit následující větu.

7.5.7 Věta

Nechť $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$. Fundamentálním řešením operátoru

$$\widehat{L} = \frac{\mathsf{d}^n}{\mathsf{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathsf{d}^{n-1}}{\mathsf{d}t^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} + a_0$$

je funkce $\Theta(t)\, u(t)$, kde funkce $u(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ vyhovuje diferenciální rovnici

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{u} + a_0 u = 0$$

a podmínkám

$$u^{(k)}(0) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-2$$
$$u^{(n-1)}(0) = 1.$$

Důkaz:

- plyne z příkladu 7.5.6

7.5.8 Příklad

Potom, co jsme obecně rozřešili úlohu na fundamentální řešení operátoru s obyčejnými derivacemi, přistupme nyní k hledání fundamentálního řešení operátoru vedení tepla

$$\oslash_a := \frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta \equiv \frac{\partial}{\partial t} - a^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

v prostoru $\mathbf{E}^{1+1}$. Jelikož řešíme úlohu v prostoru $\mathbf{E}^{1+1}$, redukuje se naše hledání na řešení rovnice

$$\oslash_a \mathscr{E}(x,t) = \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial x^2} = \delta(x,t).$$

Nechť $E(\xi, t) = \mathfrak{F}_x[\mathscr{E}(x,t)]$, kde symbol $\mathfrak{F}_x$ představuje Fourierovu transformaci v prostorové proměnné x, kdy je na časovou proměnnou nahlíženo jako na parametr. Aplikujeme-li $\mathfrak{F}_x$–transformaci na výše uvedenou rovnici, získáváme poměrně snadno

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \xi^2 a^2 E = \delta(t), \tag{7.23}$$

neboť

$$\mathfrak{F}_x[\delta(x,t)] = \mathfrak{F}_x[\delta(x)\otimes\delta(t)] = \mathfrak{F}_x[\delta(x)\otimes\delta(t)] = 1(\xi)\otimes\delta(t) = \delta(t).$$

Rovnice (7.23) představuje de facto rovnici pro fundamentální řešení operátoru

$$\widehat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \xi^2 a^2.$$

Tato úloha byla již řešena v rámci příkladu 7.5.4. Proto tedy

$$E(\xi, t) = \Theta(t)\, \mathsf{e}^{-a^2\xi^2 t}.$$

Užitím Fourierovy inverze pak snadno odvodíme, že hledaným fundamentálním řešením je funkce

$$\mathscr{E}(x,t) = \mathfrak{F}_x^{-1}[\Theta(t)\, \mathsf{e}^{-a\xi t}] = \frac{\Theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}\, \mathsf{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

7.5.9 Příklad

Hledejme fundamentální řešení operátoru vedení tepla

$$\oslash_a := \frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta \equiv \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

v prostoru $\mathbf{E}^{2+1}$. Řešme tedy rovnici

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial y^2}\right) = \delta(x,y,t) = \delta(x)\otimes\delta(y)\otimes\delta(t) = \delta(x,y)\otimes\delta(t). \tag{7.24}$$

Nechť $E(\xi,\eta,t) = \mathfrak{F}_{x,y}[\mathscr{E}(x,y,t)]$, kde symbol $\mathfrak{F}_{x,y}$ představuje Fourierovu transformaci v prostorových proměnných x, y. Jelikož

$$\mathfrak{F}_{x,y}\left[\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial x^2}\right] = (-\mathtt{i}\xi)^2 E(\xi,\eta,t), \qquad \mathfrak{F}_{x,y}\left[\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial y^2}\right] = (-\mathtt{i}\eta)^2 E(\xi,\eta,t),$$

přejde rovnice (7.24) po aplikaci $\mathfrak{F}_{x,y}-$operátoru do tvaru

$$\frac{\partial E}{\partial t} + (\xi^2+\eta^2)\, a^2 E = \delta(t). \tag{7.25}$$

Rovnice (7.25) představuje de facto rovnici pro fundamentální řešení operátoru

$$\widehat{L} = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} + (\xi^2+\eta^2)\, a^2.$$

Tato úloha byla již řešena v rámci příkladu 7.5.4. Proto tedy

$$E(\xi,\eta,t) = \Theta(t)\, \mathsf{e}^{-a^2(\xi^2+\eta^2)t}.$$

Ze vztahu

$$\mathfrak{F}_{x,y}\left[\mathsf{e}^{-\beta(x^2+y^2)}\right] = \frac{\pi}{\beta}\, \mathsf{e}^{-\frac{\eta^2+\xi^2}{4\beta}}$$

pak snadno odvodíme, že hledaným fundamentálním řešením je funkce

$$\mathscr{E}(x,y,t) = \mathfrak{F}^{-1}_{x,y}\left[\Theta(t)\, \mathsf{e}^{-a^2(\xi^2+\eta^2)t}\right] = \frac{\Theta(t)}{4a^2\pi t}\, \mathsf{e}^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2 t}}.$$

Nyní již snadno nahlédneme, že fundamentálním řešením operátoru vedení tepla v $\mathbf{E}^{r+1}$ je funkce

$$\mathscr{E}(\vec{x},t) = \frac{\Theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^r}\, \mathsf{e}^{-\frac{\|\vec{\xi}\|^2}{4a^2 t}}.$$

Obrázek 7.1
Fundamentální řešení operátoru vedení tepla v $\mathbf{E}^{2+1}$ ve fixovaném čase.

7.5.10 Příklad

Hledejme fundamentální řešení dopravního operátoru

$$\widehat{B}_{a,b} := \frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta + b$$

v prostoru $\mathbf{E}^{r+1}$. Řešíme tedy rovnici

$$\widehat{B}_{a,b}\big(\mathscr{E}(\vec{x},t)\big) = \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} - a^2\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial x_k^2} + b\,\mathscr{E}(\vec{x},t) = \delta(\vec{x},t) = \delta(\vec{x})\otimes\delta(t).$$

Nechť $E(\vec{\xi},t) = \mathfrak{F}_{\vec{x}}[\mathscr{E}(\vec{x},t)]$, kde symbol $\mathfrak{F}_{\vec{x}}$ představuje Fourierovu transformaci v prostorových proměnných $\vec{x}$. Aplikujeme-li $\mathfrak{F}_{\vec{x}}-$transformaci na výše uvedenou rovnici, získáváme vztah

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \|\vec{\xi}\|^2 a^2 E + b\,E = \delta(t). \tag{7.26}$$

Rovnice (7.26) představuje rovnici pro fundamentální řešení operátoru $\widehat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \|\vec{\xi}\|^2 a^2 + b$. Tato úloha byla již řešena v rámci příkladu 7.5.4. Proto

$$E(\vec{\xi}, t) = \Theta(t)\,\mathrm{e}^{-a^2\|\vec{\xi}\|^2 t}\,\mathrm{e}^{-bt}$$

a fundamentálním řešením dopravního operátoru je funkce

$$\mathscr{E}(\vec{x}, t) = \mathfrak{F}_x^{-1}\left[\Theta(t)\,\mathrm{e}^{-a\|\vec{\xi}\|t}\,\mathrm{e}^{-bt}\right] = \Theta(t)\left(\frac{1}{4a^2\pi t}\right)^{\frac{r}{2}}\,\mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{e}^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{4a^2 t}}.$$

7.5.11 Příklad

Budeme nyní hledat fundamentální řešení $\mathscr{E}(x,t)$ vlnového operátoru

$$\Box_a := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta \equiv \frac{\partial}{\partial t} - a^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

v prostoru $\mathbf{E}^{1+1}$. Na základní rovnici

$$\Box_a\mathscr{E}(x,t) = \frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial x^2} = \delta(x,t) = \delta(x)\otimes\delta(t)$$

aplikujme Fourierovu transformaci v prostorové proměnné. Označíme-li $E(\xi,t) = \mathfrak{F}_x[\mathscr{E}(x,t)]$, transformuje se zkoumaná rovnice na tvar

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \xi^2 a^2 E = \delta(t). \tag{7.27}$$

Tato rovnice koresponduje s rovnicí pro hledání fundamentálního řešení operátoru

$$\widehat{L} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \xi^2 a^2.$$

Z výsledku příkladu 7.5.5 pak tedy vyplývá:

$$E(\xi,t) = \frac{\Theta(t)}{a\xi}\,\sin(a\xi t).$$

Díky vztahu

$$\mathfrak{F}\big[\Theta(R-|x|)\big] = 2\,\frac{\sin(R\xi)}{\xi}$$

pak obdržíme hledaný výsledek tvaru

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{\Theta(t)}{2a}\,\Theta(at-|x|).$$

7.5.12 Příklad

Opět, podobně jako u operátoru vedení tepla, budeme hledat fundamentální řešení $\mathscr{E}(x,t)$ vlnového operátoru

$$\Box_a := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta \equiv \frac{\partial}{\partial t} - a^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

ve vícedimenzionálním prostoru $\mathbf{E}^{2+1}$. Na základní rovnici

$$\frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial y^2}\right) = \delta(x,y,t)$$

aplikujme Fourierovu transformaci v prostorových proměnných. Označme $E(\xi,\eta,t) = \mathfrak{F}_{x,y}[\mathscr{E}(x,y,t)]$. Pak dostáváme

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + (\xi^2+\eta^2)\,a^2 E = \delta(t).$$

Tato rovnice představuje rovnici pro fundamentální řešení operátoru

$$\widehat{L} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + (\xi^2+\eta^2)\,a^2.$$

Z výsledku příkladu 7.5.5 tentokrát vyplývá, že

$$E(\xi, t) = \frac{\Theta(t)}{a\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \sin(a\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\, t).$$

Využijeme-li výsledků příkladu 6.9.6, kde bylo dokázáno, že

$$\mathfrak{F}\left[\frac{\Theta(R - \|\vec{x}\|)}{\sqrt{R^2 - \|\vec{x}\|^2}}\right] = 2\pi \frac{\sin\left(R\|\vec{\xi}\|\right)}{\|\vec{\xi}\|},$$

lze tento příklad uzavřít tvrzením, že fundamentálním řešením d'Alembertova operátoru v prostoru $\mathbf{E}^{2+1}$ je funkce

$$\mathscr{E}(x, y, t) = \frac{\Theta\left(at - \sqrt{x^2 + y^2}\right)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2 - x^2 - y^2}} \equiv \frac{\Theta\left(at - \|\vec{x}\|\right)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2 - \|\vec{x}\|^2}}.$$

Obrázek 7.2
Fundamentální řešení vlnového operátoru v $\mathbf{E}^{2+1}$ ve fixovaném čase.

7.5.13 Příklad

Na závěr určíme fundamentální řešení $\mathscr{E}(x, t)$ vlnového operátoru ve čtyřrozměrném prostoru $\mathbf{E}^{3+1}$. Na základní rovnici

$$\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial z^2}\right) = \delta(x, y, z, t)$$

aplikujme Fourierovu transformaci v prostorových proměnných. Označme $E(\xi, \eta, \lambda, t) = \mathfrak{F}_{x,y,z}[\mathscr{E}(x, y, z, t)]$. Pak dostáváme

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + (\xi^2 + \eta^2 + \lambda^2)\, a^2 E = \delta(t).$$

Tato rovnice představuje rovnici pro fundamentální řešení operátoru

$$\widehat{L} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + (\xi^2 + \eta^2 + \lambda^2)\, a^2.$$

Z výsledku příkladu 7.5.5 tentokrát vyplývá, že

$$E(\xi, t) = \frac{\Theta(t)}{a\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \lambda^2}} \sin(a\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \lambda^2}\, t).$$

Využijeme-li výsledků příkladu 6.9.7, kde bylo dokázáno, že

$$\mathfrak{F}\left[\delta_{S_R}(\vec{x})\right] = 4\pi R\, \frac{\sin(R\|\vec{\xi}\|)}{\|\vec{\xi}\|},$$

lze tento příklad uzavřít tvrzením, že fundamentálním řešením d'Alembertova operátoru v prostoru $\mathbf{E}^{3+1}$ je funkce

$$\mathscr{E}(x, y, z, t) = \frac{\Theta(t)}{4\pi a^2 t}\, \delta_{S_{at}}(x, y, z),$$

kde $\delta_{S_{at}}(x, y, z)$ je (Diracova) prostá vrstva (zevedená v definici 5.2.34) na kouli

$$S_{at} = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 :\, x^2 + y^2 + z^2 = a^2t^2\right\}.$$

s jednotkovou hustotou.

7.5.14 Příklad

V následujících třech příkladech budeme hledat fundamentální řešení *Laplaceova operátoru*, který má v $n-$dimenzionálním prostoru tvar

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}. \tag{7.28}$$

Započneme triviálním případem $n = 1$. Pak tedy řešíme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathscr{E}}{\mathrm{d}x^2} = \delta(x).$$

Aplikujeme-li na danou rovnost $\mathfrak{L}-$operátor a označíme-li $E(p) = \mathfrak{L}[\mathscr{E}(x)]$, dostáváme $p^2 E = 1$. Odtud tedy

$$\mathscr{E}(x) = \Theta(x)\, x.$$

7.5.15 Příklad

Dvojrozměrná varianta předešlého příkladu vede na řešení rovnice
$$\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial y^2} = \delta(x, y).$$
Tentokrát použijeme k jejímu řešení transformace Fourierovy. Označme $E(\xi, \eta) = \mathfrak{F}[\mathscr{E}(x, y)]$. Pak tedy po aplikaci $\mathfrak{F}-$operátoru přechází výše uvedená rovnice do tvaru
$$-(\xi^2 + \eta^2)E = 1.$$
Odtud
$$E = -\frac{1}{\xi^2 + \eta^2}.$$
V knize [23] (viz strana 173 vztah (41)) je dokázáno, že
$$\mathfrak{F}\left[\frac{1}{x^2 + y^2}\right] = -2\pi \ln\left(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right) - 2\pi \mathtt{C}_0,$$
kde
$$\mathtt{C}_0 = \int_0^1 \frac{1 - \mathcal{J}_0(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^\infty \frac{\mathcal{J}_0(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
a $\mathcal{J}_0(x)$ je Besselova funkce. Odtud tedy po zanedbání integrační kontanty získáváme fundamentální řešení Laplaceova operátoru v $\mathbf{E}^2$, a sice
$$\mathscr{E}(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{-1}{\xi^2 + \eta^2}\right] = -\frac{1}{4\pi^2}\,\mathfrak{F}\left[\frac{1}{x^2 + y^2}\right] = \frac{1}{4\pi}\ln\left(x^2 + y^2\right).$$
Zkráceným zápisem:
$$\mathscr{E}(x, y) = \frac{\ln\|\vec{x}\|}{2\pi}.$$

Obrázek 7.3
Fundamentální řešení Laplaceova operátoru v $\mathbf{E}^2$.

7.5.16 Příklad

Vícerozměrná varianta předešlého příkladu vede na řešení rovnice
$$\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial z^2} = \delta(x, y, z).$$
Je-li dimenze prostoru větší nebo rovna třem, lze při určení příslušného fundamentálního řešení užít spádovou metodu (viz věta 7.4.4). Podle ní lze hledané fundamentální řešení $\mathscr{E}_r(\vec{x}, t)$ Laplaceova operátoru v $\mathbf{E}^r$ $(r \geqslant 3)$ nalézt integrací fundamentálního řešení
$$\mathscr{E}_\oslash(\vec{x}, t) = \frac{\Theta(t)}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}\,\mathsf{e}^{-\frac{\|\vec{\xi}\|^2}{4t}}$$
operátoru vedení tepla
$$\oslash := \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$
přes časovou proměnnou. Tedy
$$\mathscr{E}_r(\vec{x}, t) = -\int_{\mathbf{R}} \frac{\Theta(t)}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^r}\,\mathsf{e}^{-\frac{\|\vec{\xi}\|^2}{4t}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4\pi^{n/2}\|\vec{x}\|^{r-2}} \int_0^\infty y^{\frac{r}{2}-2}\mathsf{e}^{-y}\,\mathrm{d}y.$$
Tento integrál je konvergentní pouze pro $r \geqslant 3$, proto bylo nutno řešit případy $r = 1$ a $r = 2$ odděleně v předešlých dvou příkladech. Na základě vztahu (1.52) pak dostáváme
$$\mathscr{E}_r(\vec{x}, t) = -\frac{\Gamma\left(\frac{r}{2} - 1\right)}{4\pi^{r/2}\|\vec{x}\|^{r-2}} = \frac{1}{(r-2)\sigma_r\|\vec{x}\|^{r-2}},$$
kde
$$\sigma_r = \frac{2\pi^{r/2}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}$$
je $(r-1)$-dimenzionální lebesgueova míra $r-$dimenzionální jednotkové koule $\left\{\vec{x} \in \mathbf{E}^r : \|\vec{x}\|^2 = 1\right\}$.

7.5.17 Příklad

Přistupme nyní k hledání fundamentálního řešení Schrödingerova operátoru

$$\widehat{S}_\beta := \frac{\partial}{\partial t} - \mathtt{i}\beta^2\Delta \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \mathtt{i}\beta^2 \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

v prostoru $\mathbf{E}^{r+1}$. Přitom požadujeme, aby pro parametr β platilo $\beta \in \mathbf{R}^+$. Náš výpočet se redukuje na řešení rovnice

$$\widehat{S}_\beta\, \mathscr{E}(x,t) = \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} - \mathtt{i}\beta^2 \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial x_k^2} = \delta(\vec{x},t) = \delta(\vec{x}) \otimes \delta(t).$$

Nechť $E(\vec{\xi},t) = \mathfrak{F}_{\vec{x}}[\mathscr{E}(\vec{x},t)]$, kde symbol $\mathfrak{F}_{\vec{x}}$ představuje Fourierovu transformaci v prostorových proměnných $\vec{x}$. Aplikujeme-li $\mathfrak{F}_{\vec{x}}-$transformaci na výše uvedenou rovnici, získáváme vztah

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathtt{i}\beta^2 \|\vec{\xi}\|^2 E = \delta(t). \tag{7.29}$$

Na rovnici (7.29) aplikujeme tentokrát Fourierovu transformaci také v proměnné t. Označíme-li $\mathbb{E}(\vec{\xi},\tau) = \mathfrak{F}_t[E(\vec{\xi},t)]$ příslušný Fourierův obraz, platí pro něj, že

$$\mathbb{E}(\vec{\xi},\tau) = \frac{1}{\mathtt{i}\beta^2\|\vec{\xi}\|^2 - \mathtt{i}\tau},$$

odkud ihned vidíme (podle výsledku příkladu 6.9.15), že

$$E(\vec{\xi},t) = \Theta(t)\mathsf{e}^{-\mathtt{i}\beta^2\|\vec{\xi}\|^2 t}.$$

Protože z příkladu 6.9.3 plyne, že v $\mathscr{S}'(\mathbf{E}^r)$ platí fourierovská korespondence

$$\mathfrak{F}\big[\mathsf{e}^{\mathtt{i}a^2\|\vec{x}\|^2}\big] = \left(\frac{\pi}{a^2}\right)^{\frac{r}{2}} \mathsf{e}^{-\frac{\mathtt{i}\|\vec{\xi}\|^2}{4a^2}}\, \mathsf{e}^{\frac{\mathtt{i}\pi}{4}r},$$

vidíme, že fundamentálním řešením Schrödingerova operátoru je funkce

$$\mathscr{E}(\vec{x},t) = \Theta(t)\left(\frac{1}{4\pi\beta^2 t}\right)^{\frac{r}{2}} \mathsf{e}^{-\frac{\mathtt{i}\pi}{4}r}\, \mathsf{e}^{-\mathtt{i}\frac{\|\vec{x}\|^2}{4\beta^2 t}}.$$

Obrázek 7.4
Reálná část fundamentální řešení Schrödingerova operátoru v $\mathbf{E}^{1+1}$.

7.6 Řešení úloh matematické fyziky

V poslední části této kapitoly se budeme věnovat finálnímu nalezení obecných řešení pro výše uvedené Cauchyovy úlohy matematické fyziky. K tomu nám především poslouží pravděpodobně nejdůležitější věta celé teorie. Věnujme se proto její formulaci a příslušnému důkazu.

7.6.1 Věta - základní věta o řešení diferenciálních rovnic

Nechť je dána zobecněná funkce $f \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ a lineární diferenciální operátor $\widehat{L}$ řádu m s konstantními koeficienty $\vec{a}_\alpha \in \mathbf{R}$. Nechť $\mathscr{E} \in \mathscr{D}'(\mathbf{E}^r)$ je fundamentální řešení operátoru $\widehat{L}$. Pak zobecněná funkce

$$u = \mathscr{E} \star f$$

je řešením zobecněné diferenciální rovnice (7.2). Navíc je toto řešení jediným řešením ve třídě zobecněných funkcí, pro které existuje konvoluce s funkcí $\mathscr{E}$.

Důkaz:

- podle věty 5.7.11 platí

$$\widehat{L}\big(\mathscr{E} \star f\big) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \mathcal{D}^\alpha\big(\mathscr{E} \star f\big) = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \mathcal{D}^\alpha \mathscr{E}\right) \star f = \widehat{L}\big(\mathscr{E}\big) \star f = \delta \star f = f$$

- to vyplývá také z definice fundamentálního řešení
- dokázat, že se v dané třídě distrubicí jedná skutečně o řešení jediné, je ekvivalentní důkazu, že rovnice $\widehat{L}(u) = 0$ bez pravé strany má v dané třídě pouze jediné řešení, a to nulové
- předpokládejme tedy pro spor, že u je nenulové řešení rovnice $\widehat{L}(u) = 0$
- ze série rovností
$$u = u \star \delta = u \star \widehat{L}\big(\mathscr{E}\big) = \widehat{L}(u) \star \mathscr{E} = 0 \star \mathscr{E} = 0$$
ale přímo vyplývá kýžený spor

7.6.2 Poznámka

Předešlá věta vlastně umožňuje konstruovat obecné vzorce pro řešení parciálních diferenciálních rovnic v diagonálním tvaru. Tvrdí totiž, že příslušné řešení lze získat jako konvoluci zobecněné pravé strany a fundamentálního řešení příslušného operátoru. Proto můžeme v nadcházejících příkladech stanovit obecné vzorce pro řešení vybraných úloh.

7.6.3 Poznámka

Klasickou Cauchyovu úlohu
$$\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} u}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + a_0 u = f(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}t^k}(0) = d_k, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$
resp. její zobecněnou variantu
$$\frac{\mathrm{d}^n w}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} w}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + a_0 w = \Theta(t)\, f(t) + \sum_{r=0}^{n-1} \lambda_r \frac{\mathrm{d}^r \delta}{\mathrm{d}t^r},$$
kde koeficienty λ_r jsou vypočteny ze soustavy (7.8), řeší tedy funkce
$$u(t) = \mathscr{E}(t) \star \Theta(t)\, f(t) + \left(\sum_{r=0}^{n-1} \lambda_r \mathscr{E}(t) \star \frac{\mathrm{d}^r \delta}{\mathrm{d}t^r}\right) = \mathscr{E}(t) \star \Theta(t)\, f(t) + \sum_{r=0}^{n-1} \lambda_r \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}t^r}\big(\mathscr{E}(t) \star \delta(t)\big) =$$
$$= \mathscr{E}(t) \star \Theta(t)\, f(t) + \sum_{r=0}^{n-1} \lambda_r \frac{\mathrm{d}^r \mathscr{E}}{\mathrm{d}t^r},$$
kde
$$\mathscr{E}(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}\right]$$
je fundamentální řešení přidruženého lineárního operátoru s konstantními koeficienty.

7.6.4 Příklad

Řešme rovnici
$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \mathrm{e}^t$$
s podmínkami $y(0) = 2$ a $\dot{y}(0) = 1$. Převedeme-li tuto rovnici do $\mathscr{D}'(\mathbf{E})$, máme
$$\ddot{w} + 3\dot{w} + 2w = \Theta(t)\,\mathrm{e}^t + 2\dot{\delta}(t) + 7\delta(t).$$
Fundamentální řešení příslušného operátoru získáme jako Laplaceův vzor funkce
$$\frac{1}{p^2 + 3p + 2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}.$$
Tedy
$$\mathscr{E}(t) = \Theta(t)\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right).$$
Díky rovnosti
$$\Theta(t)\,\mathrm{e}^{at} \star \Theta(t)\,\mathrm{e}^{bt} = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p-b}\right)\right] = \frac{\mathrm{e}^{at} - \mathrm{e}^{bt}}{a-b}$$

odvozené v příkladě 6.5.5 pak snadno dokážeme, že

$$\mathscr{E}(t) \star \Theta(t)\,\mathrm{e}^t = \Theta(t)\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{t}\right).$$

Tato funkce tedy fakticky představuje řešení rovnice $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \mathrm{e}^t$ s podmínkami $y(0) = 0$ a $\dot{y}(0) = 0$. Dále

$$\mathscr{E}(t)\,\mathrm{e}^t \star 7\delta(t) = 7\Theta(t)\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right).$$

A analogicky

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(t) \star 2\dot{\delta}(t) &= 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\Theta(t)\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right)\right) = 2\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right) + 2\Theta(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right) = \\ &= 2\delta(t)\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right) + 2\Theta(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right) = 2\Theta(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right) = \Theta(t)\,\left(-2\mathrm{e}^{-t} + 4\mathrm{e}^{-2t}\right).\end{aligned}$$

Odtud získáme řešení celé úlohy, a sice

$$u(t) = \Theta(t)\left(\frac{9}{2}\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{8}{3}\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{t}\right).$$

7.6.5 Poznámka

Podotýkáme, že vlastnost

$$\mathscr{E}(t) \star \dot{\delta}(t) = \Theta(t)\,\dot{e}(t)$$

je pro fundamentálního řešení $\mathscr{E}(t) = \Theta(t)\,e(t)$ obyčejného diferenciálního operátoru univerzální, neboť

$$\begin{aligned}\Theta(t)\,e(t) \star \dot{\delta}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\Theta(t)\,e(t)\big) \star \delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\Theta(t)\,e(t)\big) = \\ &= \delta(t)\,e(t) + \Theta(t)\,\dot{e}(t) = \delta(t)\,e(0_+) + \Theta(t)\,\dot{e}(t) = \delta(t)\cdot 0 + \Theta(t)\,\dot{e}(t) = \Theta(t)\,\dot{e}(t).\end{aligned}$$

Tento vztah může být také zobecněn do univerzálnější rovnosti

$$\mathscr{E}(t) \star \frac{\mathrm{d}^n\delta}{\mathrm{d}t^n} = \Theta(t)\,\frac{\mathrm{d}^n e}{\mathrm{d}t^n}.$$

Podotýkáme, že ve výše uvedeném odvození je sice předpokládáno, že $e(t) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{E}^r)$ (aby byl součin $\Theta(t)\,e(t)$ v prostoru $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ korektně definován), ale při použití věty 5.3.23, platí uvedené vztahy také pro $e(t) \in \mathscr{C}^n(\mathbf{E}^r)$.

7.6.6 Příklad

V této úloze odvodíme obecné vzorce pro rovnici vedení tepla v $\mathbf{E}^{r+1}$ tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(\vec{x}, t)$$

definovanou společně s počáteční podmínkou $u(\vec{x}, 0) = \alpha(\vec{x})$. Zobecněná varianta má tvar

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} = \Theta(t)\,f(\vec{x}, t) + \delta(t) \otimes \alpha(\vec{x}).$$

Podle věty 7.6.1 získáme příslušné řešení jako konvoluci pravé strany s fundamentálním řešením

$$\mathscr{E}(\vec{x}, t) = \frac{\Theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^r}\,\mathrm{e}^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{4a^2 t}}.$$

Nejprve vypočteme hlavní část řešení, tzv. *hlavní tepelný potenciál:*

$$\mathscr{E}(\vec{x}, t) \star \Theta(t)\,f(\vec{x}, t) = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}^r} \Theta(\tau)\,f(\vec{\xi}, \tau)\frac{\Theta(t-\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^r}\,\mathrm{e}^{-\frac{\|\vec{x}-\vec{\xi}\|^2}{4a^2(t-\tau)}}\,\mathrm{d}\vec{\xi}\mathrm{d}\tau =$$

$$= \Theta(t) \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} \frac{f(\vec{\xi},\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^r} \,\mathrm{e}^{-\frac{\|\vec{x}-\vec{\xi}\|^2}{4a^2(t-\tau)}} \,\mathrm{d}\vec{\xi}\mathrm{d}\tau.$$

Dále dopočteme tzv. *plošný tepelný potenciál* podle vzorce

$$\mathscr{E}(\vec{x},t) \star \delta(t)\,\alpha(\vec{x}) = \mathscr{E}(\vec{x},t) \star \alpha(\vec{x}) = \Theta(t) \int_{\mathbf{R}^r} \frac{\alpha(\vec{\xi})}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^r} \,\mathrm{e}^{-\frac{\|\vec{x}-\vec{\xi}\|^2}{4a^2 t}} \,\mathrm{d}\vec{\xi}.$$

V předešlém výpočtu bylo užito rovnosti

$$f(\vec{x},t) \star \delta(t) \otimes u(\vec{x}) = f(\vec{x}, t{=}\text{konst}) \star u(\vec{x})$$

platné v $\mathscr{D}'$. Shrnujeme tedy, že klasickým řešením Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla je funkce

$$u(\vec{x},t) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(\vec{\xi},\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n} \,\mathrm{e}^{-\frac{\|\vec{x}-\vec{\xi}\|^2}{4a^2(t-\tau)}} \,\mathrm{d}\vec{\xi}\mathrm{d}\tau + \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\alpha(\vec{\xi})}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \,\mathrm{e}^{-\frac{\|\vec{x}-\vec{\xi}\|^2}{4a^2 t}} \,\mathrm{d}\vec{\xi}.$$

Tuto rovnost nazýváme *Poissonův vzorec.*

7.6.7 Příklad

Řešme rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{e}^{-t}\cos(x)$$

za počáteční podmínky $u(x,0) = \cos(x)$. Jedná se vlastně o hledání časové závislosti teploty $u(x,t)$, byla-li počáteční teplota v délce jednorozměrného média nastavena na výchozí goniometrický průběh. Přitom zdroj tepla má intenzitu $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}\cos(x)$. Z Poissonova vzorce snadno odvodíme hlavní potenciál

$$u_1(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\tau}\cos(\xi)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} \,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau = \left| \begin{array}{c} \lambda = x-\xi \\ \mathrm{d}\lambda = -\mathrm{d}\xi \end{array} \right| =$$

$$= \cos(x) \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\tau}}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cos(\lambda)\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4(t-\tau)}} \,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau =$$

$$= \cos(x) \int_0^t \frac{\mathrm{e}^{-\tau}}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sqrt{4\pi(t-\tau)}\,\mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau = \cos(x) \int_0^t \mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau = t\,\mathrm{e}^{-t}\cos(x).$$

Pro plošný potenciál pak také velmi snadno obdržíme

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbf{R}} \cos(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \,\mathrm{d}\xi = \left| \begin{array}{c} \lambda = x-\xi \\ \mathrm{d}\lambda = -\mathrm{d}\xi \end{array} \right| = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} = \mathrm{e}^{-t}\cos(x).$$

Řešením této úlohy je tedy funkce

$$u(x,t) = (1+t)\,\mathrm{e}^{-t}\cos(x).$$

Příslušnou změnu teploty vykreslujeme na následujících obrázcích.

Obrázek 7.5
Změna teploty v prostoru v konkrétním čase.

Obrázek 7.6
Změna teploty v prostoru a čase.

7.6.8 Příklad

Uvažme dostatečně dlouhý drát, jehož pravá polovina byla ohřáta na teplotu $100^\circ\mathtt{C}$ a levá na $0^\circ\mathtt{C}$. Naším cílem je sledovat změny teploty tohoto drátu v čase. Nechť ϱ je hustota drátu, c jeho měrná tepelná kapacita a k příslušný koeficient tepelné vodivosti. Pak podle poznámky 7.2.2 platí

$$a^2 = \frac{k}{c\varrho}$$

a výchozí rovnicí pro popis studovaného děje je bezzdrojová rovnice vedení tepla v $\mathbf{E}^{1+1}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

zadaná společně s počáteční podmínkou $u(x,0) = 100\,\Theta(x)$. Podle Poissonova vzorce lze hledané řešení vypočíst z rovnosti

$$u(x,t) = \int_{\mathbf{R}} \frac{100\,\Theta(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\,\mathrm{d}\xi.$$

Pak tedy

$$u(x,t) = \frac{100}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\,\mathrm{d}\xi = \left| \begin{array}{c} y = \xi - x \\ \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}\xi \end{array} \right| = \frac{100}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-x}^\infty \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4a^2 t}}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \left| \begin{array}{c} z = \frac{y}{2a\sqrt{t}} \\ \\ \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}y}{2a\sqrt{t}} \end{array} \right| = \frac{100}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^\infty 2a\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{100}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^0 \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z \right] = \frac{100}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right] =$$

$$= 50 + \frac{100}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = 50 + 50\,\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

kde bylo užito definice chybové funkce (viz 1.9.8). Uzavíráme tedy, že hledaným řešením této úlohy je funkce

$$u(x,t) = 50\left(1 + \mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right).$$

Obrázek 7.7
Změna teploty v prostoru a čase.

7.6.9 Příklad

V této úloze odvodíme obecné vzorce pro vlnovou rovnici v prostoru $\mathbf{E}^{r+1}$, jež je tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(\vec{x},t)$$

a je definována společně s počáteční podmínkami

$$u(\vec{x},0) = \alpha(\vec{x}), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},0) = \beta(\vec{x}).$$

Zobecněná varianta této úlohy má tvar

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \Delta w = \Theta(t)\,f(\vec{x},t) + \dot{\delta}(t) \otimes \alpha(\vec{x}) + \delta(t) \otimes \beta(\vec{x}).$$

Podle věty 7.6.1 získáme příslušné řešení jako konvoluci pravé strany zobecněné úlohy s fundamentálním řešením $\mathscr{E}(\vec{x},t)$ d'Alemberova vlnového operátoru. Jelikož jsou příslušná fundamentální řešení závislá na dimenzi prostoru, v němž úlohu řešíme, je třeba hledaná řešení určovat odděleně. Zahájíme pochopitelně prostorem $\mathbf{E}^{1+1}$. Tehdy je fundamentálním řešením funkce

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{\Theta(t)}{2a}\,\Theta(at-|x|).$$

Na úvod vypočteme hlavní část řešení, tzv. *retardovaný vlnový potenciál* s hustotou $f(\vec{x},t)$:

$$\mathscr{E}(\vec{x},t) \star \Theta(t)\, f(\vec{x},t) = \frac{\Theta(t)}{2a}\,\Theta(at-|x|) \star \Theta(t)\, f(\vec{x},t) = \frac{\Theta(t)}{2a}\int_0^t \int_{\mathbf{R}} f(\xi,\tau)\,\Theta\big(a(t-\tau)-|x-\xi|\big)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau =$$

$$= \left| \begin{array}{c} a(t-\tau)-|x-\xi|>0 \\ \\ |\xi-x|<a(t-\tau) \end{array} \right| = \frac{\Theta(t)}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.$$

Retardovaný vlnový potenciál jednoduché vrstvy vypočteme snadno konvolucí

$$\mathscr{E}(\vec{x},t) \star \delta(t)\otimes\beta(x) = \mathscr{E}(\vec{x},t) \star \beta(x)\Big|_{t=\text{konst}} = \frac{\Theta(t)}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \beta(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Označme nyní pro výpočet *retardovaného vlnového potenciálu dvojvrstvy* symbolem $A(x)$ primitivní funkci k funkci $\alpha(x)$. Ta vzhledem ke spojitosti funkce $\alpha(x)$ vždy existuje. Pak

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(\vec{x},t) \star \dot{\delta}(t)\otimes\alpha(x) &= \frac{\Theta(t)}{2a}\,\Theta(at-|x|) \star \dot{\delta}(t)\otimes\alpha(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\Theta(t)}{2a}\,\Theta(at-|x|) \star \alpha(x)\right) = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\Theta(t)}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\alpha(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\Theta(t)}{2a}\big[A(\xi)\big]_{x-at}^{x+at}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\Theta(t)}{2a}\big(A(x+at)-A(x-at)\big)\right) = \\
&= \frac{\delta(t)}{2a}\big(A(x+at)-A(x-at)\big) + \frac{\Theta(t)}{2a}\big(a\,\alpha(x+at)+a\,\alpha(x-at)\big) = \\
&= \frac{\delta(t)}{2a}\big(A(x)-A(x)\big) + \frac{\Theta(t)}{2}\big[\alpha(x+at)+\alpha(x-at)\big] = \frac{\Theta(t)}{2}\big[\alpha(x+at)+\alpha(x-at)\big].
\end{aligned}$$

Shrneme-li celé řešení, obdržíme tzv. *d'Alembertův vzorec* reprezentující klasické řešení vlnové rovnice v $\mathbf{E}^{1+1}$. Vzorec má tvar

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\beta(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}\big[\alpha(x-at)+\alpha(x+at)\big].$$

Pro řešení vlnové rovnice v $\mathbf{E}^{2+1}$, kdy je fundamentálním řešením funkce

$$\mathscr{E}(x,y,t) = \frac{\Theta\big(at-\sqrt{x^2+y^2}\big)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-x^2-y^2}} \equiv \frac{\Theta\big(at-\|\vec{x}\|\big)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-\|\vec{x}\|^2}},$$

získáme podobným způsobem tzv. *Poissonův vzorec*

$$u(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi a}\int_0^t \int_{\|\vec{x}-\vec{\xi}\|<a(t-\tau)} \frac{f(\vec{\xi},\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\|\vec{x}-\vec{\xi}\|^2}}\,\mathrm{d}\vec{\xi}\mathrm{d}\tau +$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int_{\|\vec{x}-\vec{\xi}\|<at} \frac{\beta(\vec{\xi})\,\mathrm{d}\vec{\xi}}{\sqrt{a^2t^2-\|\vec{x}-\vec{\xi}\|^2}} + \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\|\vec{x}-\vec{\xi}\|<at} \frac{\alpha(\vec{\xi})\,\mathrm{d}\vec{\xi}}{\sqrt{a^2t^2-\|\vec{x}-\vec{\xi}\|^2}}\right).$$

Analogicky platí, že pro řešení vlnové rovnice v $\mathbf{E}^{3+1}$, kdy je fundamentálním řešením funkce

$$\mathscr{E}(x,y,z,t) = \frac{\Theta(t)}{4\pi a^2 t}\,\delta_{S_{at}}(x,y,z),$$

platí tzv. *Kirchhoffův vzorec* tvaru

$$u(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_{\|\vec{x}-\vec{\xi}\|<at} \frac{f\big(\xi,t-\frac{\|\vec{x}-\vec{\xi}\|}{a}\big)}{\|\vec{x}-\vec{\xi}\|}\,\mathrm{d}\vec{\xi} +$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{\|\vec{x}-\vec{\xi}\|=at}\beta(\vec{\xi})\,\mathrm{d}\mu_S(\vec{\xi}) + \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int_{\|\vec{x}-\vec{\xi}\|=at}\alpha(\vec{\xi})\,\mathrm{d}\mu_S(\vec{\xi})\right).$$

7.6.10 Příklad

Řešme parciální diferenciální rovnici
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathsf{e}^x$$
s počátečními podmínkami $u(x,0) = \sin(x)$ a $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x + \cos(x)$. Jednotlivé retardované potenciály snadno vypočteme ze vztahů odvozených v úloze 7.6.9. Snadno pak
$$v_0(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \mathsf{e}^{\xi}\,\mathsf{d}\xi\mathsf{d}\tau = \mathsf{e}^x\big(\cosh(t) - 1\big).$$
$$v_1(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \big(\xi + \cos(\xi)\big)\,\mathsf{d}\xi = xt + \cos(x)\sin(t).$$
$$v_2(x,t) = \frac{1}{2}\big[\sin(x+t) + \sin(x-t)\big] = \sin(x)\cos(t).$$
Odtud
$$u(x,t) = \mathsf{e}^x\big(\cosh(t) - 1\big) + xt + \sin(x+t).$$

Obrázek 7.8
Změna intenzity vlny v závislosti na čase a poloze.

7.6.11 Příklad

V tomto příkladě nalezneme vzorce pro řešení Cauchyovy úlohy pro Schrödingerovu rovnici. Vzhledem ke tvaru fundamentálního řešení Schrödingerova operátoru
$$\mathscr{E}(\vec{x},t) = \Theta(t)\left(\frac{1}{4\pi\beta^2 t}\right)^{\frac{r}{2}} \mathsf{e}^{-\frac{\mathtt{i}\pi}{4}r}\,\mathsf{e}^{-\mathtt{i}\frac{\|\vec{x}\|^2}{4\beta^2 t}}$$
lze snadno nahlédnout, že příslušné klasické řešení je tvaru
$$u(\vec{x},t) = \mathsf{e}^{-\frac{\mathtt{i}\pi}{4}r}\int_0^t\int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(\vec{\xi},\tau)}{\Big(2\beta\sqrt{\pi(t-\tau)}\Big)^r}\,\mathsf{e}^{-\mathtt{i}\frac{\|\vec{x}-\vec{\xi}\|^2}{4\beta^2(t-\tau)}}\,\mathsf{d}\vec{\xi}\mathsf{d}\tau + \mathsf{e}^{-\frac{\mathtt{i}\pi}{4}r}\int_{\mathbf{R}^r}\frac{\alpha(\vec{\xi})}{\big(2\beta\sqrt{\pi t}\big)^r}\,\mathsf{e}^{-\mathtt{i}\frac{\|\vec{x}-\vec{\xi}\|^2}{4\beta^2 t}}\,\mathsf{d}\vec{\xi}.$$
Je-li Schrödingerova rovnice bezzdrojová, což je typický předpoklad kvantové teorie (viz poznámka 7.2.4), pak se řešení redukuje do tvaru
$$u(\vec{x},t) = \frac{\mathsf{e}^{-\frac{\mathtt{i}\pi}{4}r}}{\big(2\beta\sqrt{\pi t}\big)^r}\int_{\mathbf{R}^r}\alpha(\vec{\xi})\,\mathsf{e}^{-\mathtt{i}\frac{\|\vec{x}-\vec{\xi}\|^2}{4\beta^2 t}}\,\mathsf{d}\vec{\xi}.$$

7.6.12 Příklad

V analogii k příkladu 7.6.6 čtenář snadno nahlédne, že klasické řešení obecné dopravní rovnice je tvaru
$$u(\vec{x},t) = \mathsf{e}^{-b(t-\tau)}\int_0^t\int_{\mathbf{R}^r}\frac{f(\vec{\xi},\tau)}{\Big(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\Big)^r}\,\mathsf{e}^{b\tau}\,\mathsf{e}^{-\frac{\|\vec{x}-\vec{\xi}\|^2}{4a^2(t-\tau)}}\,\mathsf{d}\vec{\xi}\mathsf{d}\tau + \frac{\mathsf{e}^{-bt}}{\big(2a\sqrt{\pi t}\big)^r}\int_{\mathbf{R}^r}\alpha(\vec{\xi})\,\mathsf{e}^{-\frac{\|\vec{x}-\vec{\xi}\|^2}{4a^2 t}}\,\mathsf{d}\vec{\xi}.$$

7.6.13 Věta – o harmonickém řešení rovnice vedení tepla

Je-li v Cauchyově úloze pro rovnici vedení tepla zadána pravá strana $f(\vec{x},t)$, jež je pro každé $t \in \mathbf{R}_0^+$ harmonická, tj. vyhovuje rovnosti $\Delta_{\vec{x}} f(\vec{x},t) = 0$, a je-li funkce $\omega(\vec{x})$ popisující počáteční podmínku omezená a harmonická na $\mathbf{E}^r$, pak má úloha na vedení tepla řešení
$$u(\vec{x},t) = \omega(\vec{x}) + \int_0^t f(\vec{x},\tau)\,\mathsf{d}\tau.$$

Důkaz:

- je-li pravá strana zkoumané rovnice i její počáteční podmínka harmonická, pak lze očekávat, že také celé řešení rovnice bude harmonickou funkcí

- z věty 7.6.1 víme, že Cauchyova úloha má právě jedno řešení, a proto nalezneme-li na základě předpokladu harmonicity řešení libovolnou funkci, která rovnici řeší, je příslušná úloha vyřešena
- přistupme nyní ke konstrukci řešení
- rovnice vedení tepla se za daných podmínek redukuje do tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(\vec{x}, t)$$

- odtud

$$u(\vec{x}, t) = \int_0^t f(\vec{x}, \tau)\, \mathrm{d}\tau + \mathtt{C}(\vec{x})$$

- přitom hodnota funkcionální konstanty $\mathtt{C} = \mathtt{C}(\vec{x})$ může být dopočtena z podmínky $u(\vec{x}, 0) = \omega(\vec{x})$, odkud tedy $\mathtt{C}(\vec{x}) = \omega(\vec{x})$
- to dokazuje uvedenou rovnost

7.6.14 Věta – o harmonickém řešení dopravní rovnice

Je-li v Cauchyově úloze pro dopravní rovnici zadána pravá strana $f(\vec{x}, t)$, jež je pro každé $t \in \mathbf{R}_0^+$ harmonická, tj. vyhovuje rovnosti $\Delta_{\vec{x}} f(\vec{x}, t) = 0$, a je-li funkce $\omega(\vec{x})$ popisující počáteční podmínku omezená a harmonická na $\mathbf{E}^r$, pak má příslušná Cauchyova úloha řešení

$$u(\vec{x}, t) = \omega(\vec{x})\, \mathrm{e}^{-bt} + \mathrm{e}^{-bt} \int_0^t f(\vec{x}, \tau)\, \mathrm{e}^{b\tau}\, \mathrm{d}\tau.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- v analogii k důkazu předešlé věty předpokládáme, že řešení dopravní rovnice bude harmonickou funkcí
- harmonizovaná dopravní rovnice je za daných podmínek tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} + bu = f(\vec{x}, t)$$

- vynásobíme-li tuto rovnici integračním faktorem e^{bt}, přejde tato rovnice do tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u(\vec{x}, t)\, \mathrm{e}^{bt}\right) = f(\vec{x}, t)\, \mathrm{e}^{bt}$$

- odtud

$$u(\vec{x}, t) = \mathrm{e}^{-bt} \int_0^t f(\vec{x}, \tau) \mathrm{e}^{b\tau}\, \mathrm{d}\tau + \mathrm{e}^{-bt}\, \mathtt{C}(\vec{x})$$

- přitom hodnota funkcionální konstanty $\mathtt{C}(\vec{x})$ může být dopočtena z podmínky $u(\vec{x}, 0) = \omega(\vec{x})$
- odtud tedy $\mathtt{C}(\vec{x}) = \omega(\vec{x})$, což dokazuje uvedenou rovnost

7.6.15 Věta – o harmonickém řešení vlnové rovnice

Je-li v Cauchyově úloze pro vlnovou rovnici tepla zadána pravá strana tvaru $f(\vec{x}) \cdot g(t)$ tak, že prostorová funkce $f(\vec{x})$ je harmonická, a funkce $\omega_0(\vec{x})$, $\omega_1(\vec{x})$ popisující počáteční podmínky rovněž harmonické na $\mathbf{E}^r$, pak má úloha na vlnění řešení

$$u(\vec{x}, t) = t\, \omega_1(\vec{x}) + \omega_0(\vec{x}) + f(\vec{x}) \int_0^t (t - \tau)\, g(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- je-li pravá strana zkoumané rovnice i její počáteční podmínky harmonické, pak také celé řešení rovnice bude harmonickou funkcí
- vlnová rovnice se za předpokladu harmonicity redukuje do tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(\vec{x}) \cdot g(t)$$

- odtud
$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(\vec{x}) \int_0^t g(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \mathtt{C}(\vec{x}),$$
kde hodnota konstanty $\mathtt{C}(\vec{x})$ může být dopočtena z podmínky $\dot{u}(\vec{x},0) = \omega_1(\vec{x})$
- proto $\mathtt{C}(\vec{x}) = \omega_1(\vec{x})$
- dále
$$u(\vec{x},t) = f(\vec{x}) \int_0^t \int_0^\tau g(s)\, \mathrm{d}s \mathrm{d}\tau + t\omega_1(\vec{x}) + \widetilde{\mathtt{C}}(\vec{x}),$$
kde hodnota konstanty $\widetilde{\mathtt{C}}(\vec{x})$ může být opět dopočtena z druhé počáteční podmínky $u(\vec{x},0) = \omega_0(\vec{x})$
- z ní triviálně plyne, že
$$u(\vec{x},t) = f(\vec{x}) \int_0^t \int_0^\tau g(s)\, \mathrm{d}s \mathrm{d}\tau + t\omega_1(\vec{x}) + \omega_0(\vec{x})$$
- zbývá pouze dokázat rovnost
$$\int_0^t (t-\tau)\, g(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_0^t \int_0^\tau g(s)\, \mathrm{d}s \mathrm{d}\tau$$
- tento vztah ale snadno vyplyne z následujících úvah
$$\int_0^t (t-\tau)\, g(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \left| \begin{array}{ll} u(\tau) = t-\tau & \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = g(\tau) \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = -1 & v(\tau) = \int_0^\tau g(s)\, \mathrm{d}s \end{array} \right| =$$
$$= \left[(t-\tau) \cdot \int_0^\tau g(s)\, \mathrm{d}s \right]_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t \int_0^\tau g(s)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\tau = \int_0^t \int_0^\tau g(s)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\tau$$

7.6.16 Příklad

V posledním příkladě této kapitoly se pokusíme demonstrovat celý problém řešení Cauchyho úloh na vybrané úloze. Pro parciální diferenciální operátor
$$\widehat{L} = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b\frac{\partial}{\partial x}, \qquad (a > 0 \,\wedge\, b > 0)$$
tedy zformulujme příslušnou Cauchyovu úlohu, převeďme ji do prostoru zobecněných funkcí a nalezněme odpovídající fundamentální řešení. Poté sestavme příslušné vzorce pro její řešení a tyto zjednodušme. Standardní Cauchyova úloha pro operátor $\widehat{L}$ je tvaru
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - b\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(x,t)$$
za podmínky $u(x,0) = \omega(x)$, kde $f(x,t) \in \mathscr{C}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_0^+)$ a $\omega(x) \in \mathscr{C}(\mathbf{R})$. *Heavisideovou transformací* $w(t) = \Theta(t)\, u(t)$ přejde tato úloha do standardní zobecněné alternativy, jež je tvaru
$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - b\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = \Theta(t) f(x,t) + \omega(x) \otimes \delta(t).$$
Při hledání fundamentálního řešení $\mathscr{E}(x,t)$ výše zadaného operátoru řešíme rovnost
$$\frac{\partial \mathscr{E}(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x,t)}{\partial x^2} - b\frac{\partial \mathscr{E}(x,t)}{\partial x} = \delta(x) \otimes \delta(t),$$
na kterou aplikujeme prostorovou Fourierovu transformaci. Označíme-li $E(\xi,t) = \mathfrak{F}_x[\mathscr{E}(x,t)]$, přejde tato rovnice do tvaru
$$\frac{\partial E}{\partial t} + \xi^2 a^2 E + \mathtt{i} b\xi E = \delta(t),$$
který reprezentuje rovnici pro fundamentální řešení operátoru
$$\widehat{O} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\xi^2 a^2 + \mathtt{i} b\right).$$
Odtud
$$E(\xi,t) = \Theta(t)\, \mathrm{e}^{-(a^2\xi^2 + \mathtt{i} bt)t}.$$

Užijeme-li pravidla pro Fourierovu inverzi, vidíme, že hledaným fundamentálním řešením je funkce

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{\Theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x+bt)^2}{4a^2 t}}.$$

Vzorce pro řešení této úlohy jsou tudíž tvaru

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\left[x-\xi+b(t-\tau)\right]^2}{4a^2(t-\tau)}}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{\left[x-\xi+bt\right]^2}{4a^2 t}}\,\mathrm{d}\xi.$$

Kapitola 8

Okrajové úlohy pro eliptické parciální diferenciální rovnice

Zatímco v sedmé kapitole byla naše pozornost soustředěna především na úlohy s počátečními podmínkami, tedy na hyperbolické, resp. parabolické parciální diferenciální rovnice, zaměříme se nyní úlohy s okrajovými podmínkami. Tyto úlohy se v praktických (tj. fyzikálních či příbuzných) aplikacích týkají především eliptických parciálních diferenciálních rovnic.

8.1 Eliptický diferenciální operátor a jeho vlastnosti

V prvním oddíle nové kapitoly nejprve představíme eliptický diferenciální operátor a prozkoumáme jeho významné vlastnosti, které později zužitkujeme při řešení eliptických parciálních diferenciálních rovnic, resp. příslušných okrajových úloh.

8.1.1 Definice

Nechť $G \subset \mathbf{E}^r$ je omezená oblast a $S = \mathrm{bd}(G)$ její po částech hladká hranice. Nechť $p(\vec{x}), q(\vec{x}) : \overline{G} \mapsto \mathbf{R}$ jsou funkce vyhovující podmínkám $p(\vec{x}) \in \mathscr{C}^1(\overline{G})$, $q(\vec{x}) \in \mathscr{C}(\overline{G})$ a pro všechna $\vec{x} \in G$ splňující nerovnosti $p(\vec{x}) > 0$ a $q(\vec{x}) \geqslant 0$. Nechť dále funkce $\alpha(\vec{x}), \beta(\vec{x}) : S \mapsto \mathbf{R}$ vyhovují podmínkám $\alpha(\vec{x}) \in \mathscr{C}(S)$, $\beta(\vec{x}) \in \mathscr{C}(S)$ a pro všechna $\vec{x} \in S$ také $\alpha(\vec{x}) \geqslant 0$, $\beta(\vec{x}) \geqslant 0$ a $\alpha(\vec{x}) + \beta(\vec{x}) > 0$. *Eliptickým diferenciálním operátorem* pak rozumíme operátor

$$\widehat{L} := -\mathrm{div}\big(p(\vec{x}) \cdot \mathrm{grad}\big) + q(\vec{x}), \tag{8.1}$$

zadaný společně se symbolickou okrajovou podmínkou

$$\forall \vec{x} \in S : \qquad \alpha(\vec{x}) + \beta(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} = 0, \tag{8.2}$$

kde $\vec{n} = \vec{n}(\vec{x})$ je normála k hranici S v jejím bodě $\vec{x} \in S$. *Definičním oborem operátoru* $\widehat{L}$ rozumíme třídu $\mathrm{Dom}(\widehat{L})$ funkcí vyhovujících podmínkám

$$u(\vec{x}) \in \mathscr{C}^2(G), \quad u(\vec{x}) \in \mathscr{C}^1(\overline{G}), \quad \alpha(\vec{x}) u(\vec{x}) + \beta(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\vec{x} \in S} = 0, \quad \widehat{L}(u) \in \mathbb{L}_2(G).$$

8.1.2 Definice

Řešit *úlohu na vlastní hodnoty* eliptického parciálního diferenciálního operátoru $\widehat{L}$ znamená hledat vlastní hodnoty $\lambda \in \mathbf{C}$ a vlastní funkce $u(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{L})$ tohoto operátoru, t.j. řešit parciální diferenciální rovnici

$$-\mathrm{div}\big(p(\vec{x}) \cdot \mathrm{grad}(u(\vec{x}))\big) + q(\vec{x})\, u(\vec{x}) = \lambda\, u(\vec{x}) \tag{8.3}$$

za podmínky

$$\alpha(\vec{x}) u(\vec{x}) + \beta(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0.$$

8.1.3 Věta

Pro parciální diferenciální operátor (8.1) v $\mathbf{E}^r$ platí rovnost

$$\widehat{L} = -p(\vec{x})\Delta - \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial p}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + q(\vec{x}).$$

Důkaz:

- je snadným důsledkem základních definic vektorové analýzy

8.1.4 Definice

Nechť je dán otevřený interval $G = (0,\ell)$ a funkce $p(x), q(x) : \langle 0,\ell\rangle \mapsto \mathbf{R}$ vyhovující podmínkám $p(x) \in \mathscr{C}^1(\langle 0,\ell\rangle)$ a $q(x) \in \mathscr{C}(\langle 0,\ell\rangle)$. Nechť pro všechna $x \in (0,\ell)$ platí $p(x) > 0$ a $q(x) \geqslant 0$. Nechť jsou dále dána čísla h_1, h_2, $\mathtt{H}_1$ a $\mathtt{H}_2$ splňující sadu nerovností $h_1 \geqslant 0$, $h_2 \geqslant 0$, $\mathtt{H}_1 \geqslant 0$, $\mathtt{H}_2 \geqslant 0$, $h_1 + h_2 > 0$ a konečně $\mathtt{H}_1 + \mathtt{H}_2 > 0$. Pak diferenciální operátor

$$\widehat{L} = -\left(p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)' + q(x)$$

nazýváme *Sturmovým-Liouvilleovým diferenciálním operátorem.* Definičním oborem operátoru $\widehat{L}$ rozumíme třídu funkcí $u(x)$ vyhovujících současně podmínkám

$$u(x) \in \mathscr{C}^2\big((0,\ell)\big) \,\wedge\, u(x) \in \mathscr{C}^1\big(\langle 0,\ell\rangle\big) \,\wedge\, h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0 \,\wedge\, \mathtt{H}_1 u(\ell) + \mathtt{H}_2 u'(\ell) = 0 \,\wedge\, u(x) \in \mathbb{L}_2(0,\ell).$$

8.1.5 Definice

Hledání vlastních hodnot a vlastních funkcí Sturmova-Liouvilleova operátoru vyhovujících podmínkám

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \tag{8.4}$$
$$\mathtt{H}_1 u(\ell) + \mathtt{H}_2 u'(\ell) = 0, \tag{8.5}$$

pak nazýváme *Sturmovým-Liouvilleovým problémem.*

8.1.6 Poznámka

Nechť $\hbar$ je redukovaná Planckova konstanta a m hmotnost. Pak pro volbu $p(\vec{x}) = \frac{\hbar^2}{2m}$ a $q(\vec{x}) = V(\vec{x})$ přechází diferenciální operátor (8.1) na Hamiltonův operátor

$$\widehat{H} := -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})$$

pro kvantovou částici v potenciálním poli popsaném potenciální energií $V(\vec{x})$. Příslušná úloha na vlastní hodnoty se pak nazývá *bezčasovou Schrödingerovou rovnicí* a má tvar

$$\widehat{H}\varphi(\vec{x}) \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\vec{x}) + V(\vec{x})\varphi(\vec{x}) = E\varphi(\vec{x}).$$

Představuje de facto rovnici pro komplexní vlnové funkce $\varphi(\vec{x})$ popsaného kvantového systému, jejichž druhé mocniny

$$w(\vec{x}) = |\varphi(\vec{x})|^2$$

odpovídají hustotě pravděpodobnosti pro výskyt částice s energií E v prostorovém elementu

$$\vec{x} + \mathrm{d}\vec{x} = \big(x_1 + \mathrm{d}x_1, x_2 + \mathrm{d}x_2, \ldots, x_r + \mathrm{d}x_r\big).$$

Vlastní hodnoty E Hamiltoniánu pak reprezentují jediné možné hodnoty energie, jež mohou být v systému naměřeny.

8.1.7 Věta – o prvním Greenově vzorci

Nechť funkce $u(\vec{x}) : \overline{G} \mapsto \mathbf{R}$, $v(\vec{x}) : \overline{G} \mapsto \mathbf{R}$ vyhovují podmínkám $u(\vec{x}) \in \mathscr{C}^2(G) \cap \mathscr{C}^1(\overline{G})$, resp. $v(\vec{x}) \in \mathscr{C}^1(\overline{G})$. Nechť $\widehat{L}$ je eliptický diferenciální operátor z definice 8.1.1. Pak platí tzv. *první Greenův vzorec*

$$\int_G v(\vec{x})\widehat{L}\big(u(\vec{x})\big)\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_G p(\vec{x})\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\vec{x} - \int_S p(\vec{x})v(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}\mu_s(\vec{x}) + \int_G q(\vec{x})u(\vec{x})v(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}. \tag{8.6}$$

<u>*Důkaz:*</u>

- nechť H je oblast zvolená tak, že $H \subset \overline{G}$ a $T := \mathrm{bd}(H)$ je po částech spojitá nadplocha v prostoru $\mathbf{E}^r$
- zjevně $u(\vec{x}) \in \mathscr{C}^2(\overline{H})$
- potom tedy

$$\int_H v(\vec{x})\widehat{L}\big(u(\vec{x})\big)\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_H v(\vec{x})\Big(-\operatorname{div}\big(p(\vec{x})\cdot\operatorname{grad}(u)\big) + q(\vec{x})u(\vec{x})\Big)\,\mathrm{d}\vec{x} =$$

$$= -\int_H \operatorname{div}\big(v(\vec{x})p(\vec{x})\operatorname{grad}(u)\big)\,\mathrm{d}\vec{x} + \int_H p(\vec{x})\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\vec{x} + \int_H q(\vec{x})u(\vec{x})v(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}$$

- z Gaussovy-Ostrogradského věty (viz věta 2.2.24, str. 151 ve skriptech [12]) pak plyne, že

$$\int_H \operatorname{div}\big(v(\vec{x})p(\vec{x})\operatorname{grad}(u)\big)\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_T p(\vec{x})v(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}\mu_s(\vec{x})$$

- proto tedy platí vztah

$$\int_H v(\vec{x})\widehat{L}\big(u(\vec{x})\big)\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_H p(\vec{x})\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\vec{x} - \int_T p(\vec{x})v(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}\mu_s(\vec{x}) + \int_H q(\vec{x})u(\vec{x})v(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}$$

  pro každou oblast H s uvedenými vlastnostmi
- díky tomu, že jak $u(\vec{x})$, tak $v(\vec{x})$ patří do $\mathscr{C}^1(\overline{G})$, lze v posledně uvedeném vztahu přejít k limitě $H \to G$, čímž obdržíme vztah (8.6)
- na závěr pouze podotýkáme, že integrál $\int_G v(\vec{x})\widehat{L}\big(u(\vec{x})\big)\,\mathrm{d}\vec{x}$ musí být obecně chápán jako nevlastní

8.1.8 Věta – o druhém Greenově vzorci

Nechť funkce $u(\vec{x}) : \overline{G} \mapsto \mathbf{R}$, $v(\vec{x}) : \overline{G} \mapsto \mathbf{R}$ vyhovují podmínkám $u(\vec{x}) \in \mathscr{C}^2(G)\cap\mathscr{C}^1(\overline{G})$, resp. $v(\vec{x}) \in \mathscr{C}^2(G)\cap\mathscr{C}^1(\overline{G})$. Nechť $\widehat{L}$ je eliptický diferenciální operátor z definice 8.1.1. Pak platí tzv. *druhý Greenův vzorec*

$$\int_G \Big(v(\vec{x})\widehat{L}\big(u(\vec{x})\big) - u(\vec{x})\widehat{L}\big(v(\vec{x})\big)\Big)\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_S p(\vec{x})\left(u(\vec{x})\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)\,\mathrm{d}\mu_s(\vec{x}). \tag{8.7}$$

<u>*Důkaz:*</u>

- jestliže ve vztahu (8.6) zaměníme $u(\vec{x})$ a $v(\vec{x})$ a oba vztahy od sebe odečteme, dostáváme rovnost (8.7)

8.1.9 Poznámka

Speciálně při volbě $p(\vec{x}) = 1$, $q(\vec{x}) = 0$ mají Greenovy vzorce tvar

$$\int_G v(\vec{x})\Delta u\,\mathrm{d}\vec{x} = -\int_G \sum_{i=1}^{r}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\vec{x} + \int_S v(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}\mu_s(\vec{x}),$$

$$\int_G \big(v(\vec{x})\Delta u - u(\vec{x})\Delta v\big)\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_S \left(v(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u(\vec{x})\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\right)\,\mathrm{d}\mu_s(\vec{x}).$$

8.1.10 Věta

Eliptický diferenciální operátor je hermiteovský, tj. pro všechny funkce $f(\vec{x})$, $g(\vec{x})$ náležící do

$$\mathrm{Dom}(\widehat{L}) = \left\{ u(\vec{x}) : \overline{G} \mapsto \mathbf{R} : u(\vec{x}) \in \mathscr{C}^2(G) \ \wedge \ u(\vec{x}) \in \mathscr{C}^1(\overline{G}) \ \wedge \ \alpha(\vec{x})u(\vec{x}) + \beta(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\vec{x}\in S} = 0 \ \wedge \ \widehat{L}(u) \in \mathbb{L}_2(G) \right\}$$

platí rovnost $\big\langle \widehat{L}(f)|g \big\rangle = \big\langle f|\widehat{L}(g) \big\rangle$.

Důkaz:

- protože $f(\vec{x}), g^\star(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{L})$, lze pro ně použít druhý Greenův vzorec (8.7)
- uvědomíme-li si, že $\widehat{L}(g^\star) = \big(\widehat{L}(g)\big)^\star$, dostáváme odtud, že

$$\big\langle \widehat{L}(f)|g \big\rangle - \big\langle f|\widehat{L}(g) \big\rangle = \int_G \big(g^\star(\vec{x})\widehat{L}(f) - f(\vec{x})\widehat{L}(g^\star) \big) \,\mathrm{d}\vec{x} = \int_S p(\vec{x}) \left(f(\vec{x}) \frac{\partial g^\star}{\partial \vec{n}} - g^\star(\vec{x}) \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \right) \mathrm{d}\mu_s(\vec{x})$$

- protože $f(\vec{x}), g^\star(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{L})$, platí, že

$$\alpha(\vec{x})f(\vec{x}) + \beta(\vec{x}) \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\vec{x}\in S} = 0,$$

$$\alpha(\vec{x})g^\star(\vec{x}) + \beta(\vec{x}) \frac{\partial g^\star}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\vec{x}\in S} = 0$$

- jestliže budeme tyto vztahy chápat jako soustavu rovnic pro funkce $\alpha(\vec{x})$ a $\beta(\vec{x})$, zjistíme z podmínek $\alpha(\vec{x}), \beta(\vec{x}) : S \mapsto \mathbf{R}$, $\alpha(\vec{x}) \in \mathscr{C}(S)$, $\beta(\vec{x}) \in \mathscr{C}(S)$, $\alpha(\vec{x}) \geqslant 0$, $\beta(\vec{x}) \geqslant 0$ a $\alpha(\vec{x}) + \beta(\vec{x}) > 0$ že tato homogenní soustava má pro každé $\vec{x} \in S$ nenulové řešení
- to ale znamená, že determinant příslušné matice musí podle Frobeniovy věty být nulový, tj.

$$f(\vec{x}) \frac{\partial g^\star}{\partial \vec{n}} - g^\star(\vec{x}) \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = 0$$

- proto tedy $\big\langle \widehat{L}(f)|g \big\rangle - \big\langle f|\widehat{L}(g) \big\rangle = 0$ pro libovolné funkce $f(\vec{x})$, $g(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{L})$
- tím je hermiticita operátoru $\widehat{L}$ prokázána

8.1.11 Věta

Eliptický parciální diferenciální operátor je pozitivně semidefinitní, tj. pro všechny funkce $f(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{L})$ platí neostrá nerovnost $\big\langle \widehat{L}(f)|f \big\rangle \geqslant 0$.

Důkaz:

- jestliže v prvním Greenově vzorci (8.6) položíme $u(\vec{x}) := f(\vec{x})$ a $v(\vec{x}) := f^\star(\vec{x})$, dostaneme

$$\begin{aligned}\big\langle \widehat{L}(f)|f \big\rangle &= \int_G p(\vec{x}) \big\langle \mathrm{grad}(f)|\mathrm{grad}(f^\star) \big\rangle \,\mathrm{d}\vec{x} - \int_S p(\vec{x})f(\vec{x}) \frac{\partial f^\star}{\partial \vec{n}} \,\mathrm{d}\mu_s(\vec{x}) + \int_G q(\vec{x})f(\vec{x})f^\star(\vec{x}) \,\mathrm{d}\vec{x} = \\ &= \int_G p(\vec{x}) \big\|\mathrm{grad}(f)\big\|^2 \mathrm{d}\vec{x} - \int_S p(\vec{x})f(\vec{x}) \frac{\partial f^\star}{\partial \vec{n}} \,\mathrm{d}\mu_s(\vec{x}) + \int_G q(\vec{x}) \big|f(\vec{x})\big|^2 \,\mathrm{d}\vec{x}\end{aligned}$$

- z hraničních podmínek (8.2) dále vyplývá, že

$$\frac{\partial f^\star}{\partial \vec{n}} = -\frac{\alpha(\vec{x})}{\beta(\vec{x})} f^\star$$

  pro $\beta(\vec{x}) > 0$, popř. $f(\vec{x}) = 0$ pro $\beta(\vec{x}) = 0$
- pak ale

$$\big\langle \widehat{L}(f)|f \big\rangle = \int_G \Big(p(\vec{x}) \big\|\mathrm{grad}(f)\big\|^2 + q(\vec{x}) \big|f(\vec{x})\big|^2 \Big) \mathrm{d}\vec{x} + \int_S \frac{p(\vec{x})\alpha(\vec{x}) \big|f(\vec{x})\big|^2}{\beta(\vec{x})} \,\mathrm{d}\mu_s(\vec{x}) \tag{8.8}$$

- z definice 8.1.1 ale plyne, že všechny členy na pravé straně poslední rovnosti jsou nezáporné
- proto $\big\langle \widehat{L}(f)|f \big\rangle \geqslant 0$ pro všechny funkce $f(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{L})$

8.1.12 Věta

Vlastní funkce eliptického diferenciálního operátoru odpovídající různým vlastním číslům jsou ortogonální.

Důkaz:

- jedná se důsledek věty 1.7.20

8.1.13 Věta

Vlastní hodnoty eliptického diferenciálního operátoru jsou nezáporné.

Důkaz:

- jedná se důsledek vět 1.7.19 a 8.1.11

8.1.14 Věta

Číslo $\lambda = 0$ je vlastní hodnotou operátoru $\widehat{L}$ právě tehdy, když $q(\vec{x}) = \alpha(\vec{x}) = 0$ na G. Za těchto podmínek je $\lambda = 0$ prostá vlastní hodnota a příslušnou vlastní funkcí je $h(\vec{x}) = \mathtt{C}$, kde $\mathtt{C} \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Důkaz:

- nechť tedy $\lambda = 0$ je vlastní hodnotou operátoru $\widehat{L}$ a $h(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{L})$ příslušná vlastní funkce, která tedy není nulová
- tedy $h(\vec{x}) \neq o(\vec{x})$, ale $\widehat{L}(h) = 0$
- z rovnosti (8.8) plyne, že

$$\big\langle \widehat{L}(h) | h \big\rangle = \int_G \Big(p(\vec{x}) \big\| \mathrm{grad}(h) \big\|^2 + q(\vec{x}) \big| h(\vec{x}) \big|^2 \Big) \mathtt{d}\vec{x} + \int_S \frac{p(\vec{x})\alpha(\vec{x}) \big| h(\vec{x}) \big|^2}{\beta(\vec{x})} \, \mathtt{d}\mu_s(\vec{x}) = 0$$

- podle předpokladů v definici 8.1.1 je $p(\vec{x}) > 0$ a $q(\vec{x}) \geqslant 0$, odkud ihned plyne, že $\alpha(\vec{x}) = 0$, $\big\| \mathrm{grad}(h) \big\| = 0$ a také $q(\vec{x}) = 0$
- proto $h(\vec{x})$ je konstantní nenulovou funkcí
- nechť naopak $\alpha(\vec{x}) = 0$ a $q(\vec{x}) = 0$
- pak podle podmínek z definice 8.1.1 je $\beta(\vec{x}) > 0$ a úloha na vlastní hodnoty je tvaru

$$-\mathrm{div}\big(p(\vec{x}) \cdot \mathrm{grad}(u(\vec{x})) \big) = \lambda \, u(\vec{x}), \qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \bigg|_{\vec{x} \in S} = 0$$

- odsud je zřejmé, že pro $\lambda = 0$ má tato úloha řešení $h(\vec{x}) = \mathtt{C} \neq 0$

8.1.15 Důsledek

Nechť eliptický operátor $\widehat{L}$ splňuje jednu z podmínek $q(\vec{x}) \neq 0$ nebo $\alpha(\vec{x}) \neq 0$ na G. Pak je operátor $\widehat{L}$ pozitivně definitní.

8.1.16 Věta

Nechť je zadán eliptický operátor (8.1) a jeho definiční obor

$$\mathrm{Dom}(\widehat{L}) = \Big\{ u(\vec{x}) : \overline{G} \mapsto \mathbf{R} : u(\vec{x}) \in \mathscr{C}^2(G) \wedge u(\vec{x}) \in \mathscr{C}^1(\overline{G}) \wedge \alpha(\vec{x}) u(\vec{x}) + \beta(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \bigg|_{\vec{x} \in S} = 0 \wedge \widehat{L}(u) \in \mathbb{L}_2(G) \Big\}, \tag{8.9}$$

kde $\alpha(\vec{x}) > 0$ na S a $\beta \in \{0, 1\}$. Pak $\widehat{L}$ je operátorem s čistě bodovým spektrem.

Bez důkazu.

8.1.17 Poznámka

Vzhledem k platnosti věty 8.1.16 platí (podle definice 1.7.25), že množina vlastních hodnot eliptického operátoru $\widehat{L}$ je spočetná, geometrická násobnost každého vlastního čísla je konečná a každou funkci Hilbertova prostoru $\mathcal{H} = \mathrm{Dom}(\widehat{L})$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vlastních funkcí operátoru $\widehat{L}$. Navíc je pro tento operátor definováno podle definice 1.7.27 unfoldované spektrum. Proto také platí následující věta.

8.1.18 Věta

Nechť platí předpklady věty 8.1.16. Nechť $\sigma_{\mathrm{unf}} = \big(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\big)$ je unfoldované spektrum operátoru $\widehat{L}$ a

$$B = \big\{u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), u_3(\vec{x}), \ldots\big\}$$

je příslušný ortogonální systém vlastních funkcí. Pak pro každou funkci $f(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{L})$ platí rovnost

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f|u_k\rangle u_k(\vec{x}) \tag{8.10}$$

a uvedená řada konverguje na $\overline{G}$ regulárně.

Důkaz:

- jde o přímý důsledek vlastností operátoru $\widehat{L}$ a věty 1.7.28
- nechť tedy $\sigma_{\mathrm{unf}} = \big(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\big)$ je unfoldované spektrum operátoru $\widehat{L}$ a $B = \big\{u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), u_3(\vec{x}), \ldots\big\}$ příslušný systém vlastních funkcí
- potom pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí: $\widehat{L}(u_k) = \lambda_k u_k(\vec{x})$
- odtud $\big\langle \widehat{L}(u_k)|u_\ell\big\rangle = \lambda_k \big\langle u_k|u_\ell\big\rangle = \lambda_k \delta_{k\ell}$
- z věty 8.1.16 a z věty 1.7.28 pak plyne, že pro každou funkci $f(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{L})$ platí

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(\vec{x}),$$

  kde $a_k = \langle f|u_k\rangle$, přičemž uvedená řada konverguje regulárně

8.1.19 Věta

Systém $B = \big\{u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), u_3(\vec{x}), \ldots\big\}$ vlastních funkcí eliptického diferenciálního operátoru je hustý v $\mathbb{L}_2(G)$.

Důkaz:

- postačí si uvědomit, že každá testovací funkce $\varphi(\vec{x}) \in \mathscr{D}(G)$ leží v definičním oboru $\mathrm{Dom}(\widehat{L})$, což je kromě jiného důsledkem okrajové podmínky ve vztahu (8.9)
- platí tudíž inkluze $\mathscr{D}(G) \subset \mathrm{Dom}(\widehat{L})$
- jelikož je ale podle věty 5.1.14 třída $\mathscr{D}(\mathbf{E}^r)$ hustou množinou v $\mathbb{L}_2(\mathbf{E}^r)$, je i její nadmnožina B hustá v $\mathbb{L}_2(\mathbf{E}^r)$

8.1.20 Věta

Nechť platí předpoklady věty 8.1.16. Nechť $\sigma_{\mathrm{unf}} = \big(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\big)$ je unfoldované spektrum operátoru $\widehat{L}$ a

$$B = \big\{u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), u_3(\vec{x}), \ldots\big\}$$

je příslušný ortonormální systém vlastních funkcí. Pak pro každou funkci $f(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{L})$ platí rovnost

$$\big\langle \widehat{L}(f)|f\big\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \big|\langle f|u_k\rangle\big|^2. \tag{8.11}$$

Navíc pro každé $\ell \in \mathbf{N}$ platí

$$\big\langle \widehat{L}(u_\ell)|u_\ell\big\rangle = \lambda_\ell.$$

Důkaz:

- z věty 8.1.18 plyne, že pro každou funkci $f(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{L})$ platí $f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(\vec{x})$, kde $a_k = \langle f|u_k\rangle$, a tato řada konverguje regulárně
- navíc pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí: $\widehat{L}(u_k) = \lambda_k u_k(\vec{x})$
- odtud a ze spojitosti skalárního součinu ihned vyplyne, že

$$\big\langle \widehat{L}(f)|f\big\rangle = \left\langle \widehat{L}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(\vec{x})\Big)\middle| f\right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \big\langle \widehat{L}(u_k)|f\big\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k \big\langle u_k|f\big\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k a_k^\star = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |a_k|^2$$

- tím je dokázána první část tvrzení
- položíme-li v posledně uvedené rovnosti $f(\vec{x}) = u_\ell(\vec{x})$ a pro pevně zvolené $\ell \in \mathbf{N}$ také $a_k = \langle u_\ell|u_k\rangle$, dostáváme

$$\big\langle \widehat{L}(u_\ell)|u_\ell\big\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k \big\langle u_k|u_\ell\big\rangle = a_\ell \lambda_\ell \big\langle u_\ell|u_\ell\big\rangle = a_\ell \lambda_\ell a_\ell^\star = \lambda_\ell a_\ell |a_\ell|^2 = \lambda_\ell \; = \lambda_\ell \, \|u_\ell\|^2$$

- protože je systém vlastních funkcí normován, platí $\big\langle \widehat{L}(u_\ell)|u_\ell\big\rangle = \lambda_\ell$

8.1.21 Věta

Nechť platí předpklady věty 8.1.16. Nechť $\sigma_{\mathrm{unf}} = \big(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\big)$ je unfoldované spektrum operátoru $\widehat{L}$ a

$$B = \big\{u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), u_3(\vec{x}), \ldots\big\}$$

je příslušný ortonormální systém vlastních funkcí. Pak pro každé $\ell \in \mathbf{N}$ platí rovnost

$$\lambda_\ell = \inf\left\{ \frac{\big\langle \widehat{L}(f)|f\big\rangle}{\|f\|^2} \,:\, f(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{L}) \,\wedge\, \big\langle f|u_i\big\rangle = 0 \,\wedge\, i \in \widehat{\ell - 1} \right\}, \tag{8.12}$$

přičemž toto infimum nastává právě pro vlastní funkci $u_\ell(\vec{x})$, která je asociovaná s vlastní hodnotou λ_ℓ.

Důkaz:

- podle vztahu (8.11) platí pro každou funkci $f(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{L})$, pro kterou je $\big\langle f|u_i\big\rangle = 0$ pro $i < \ell$, rovnost

$$\big\langle \widehat{L}(f)|f\big\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \big|\langle f|u_i\rangle\big|^2 = \sum_{i=\ell}^{\infty} \lambda_i \big|\langle f|u_i\rangle\big|^2 \geqslant \lambda_\ell \sum_{i=\ell}^{\infty} \big|\langle f|u_i\rangle\big|^2,$$

  protože pro $i \geqslant \ell$ předpokládáme v definici unfoldovaného spektra, že $\lambda_i \leqslant \lambda_\ell$
- podle Parsevalovy rovnosti je ale $\sum_{i=1}^{\infty} \big|\langle f|u_i\rangle\big|^2 = \sum_{i=\ell}^{\infty} \big|\langle f|u_i\rangle\big|^2 = \|f\|^2$
- odtud

$$\lambda_\ell \leqslant \frac{\big\langle \widehat{L}(f)|f\big\rangle}{\|f\|^2}$$

- pro volbu $f(\vec{x}) = u_\ell(\vec{x})$ je ale navíc naplněna rovnost

$$\frac{\big\langle \widehat{L}(u_\ell)|u_\ell\big\rangle}{\|u_\ell\|^2} = \lambda_\ell$$

  a $\big\langle u_i|u_\ell\big\rangle = 0$ pro $i < \ell$, což kompletuje důkaz

8.1.22 Důsledek

Nechť platí předpoklady věty 8.1.16. Nechť $\sigma_{\mathrm{unf}} = \big(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\big)$ je unfoldované spektrum operátoru $\widehat{L}$ a

$$B = \big\{u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), u_3(\vec{x}), \ldots\big\}$$

je příslušný ortonormální systém vlastních funkcí. Pak platí

$$\lambda_1 = \inf\left\{ \frac{\big\langle \widehat{L}(f)|f\big\rangle}{\|f\|^2} \,:\, f(\vec{x}) \in \mathrm{Dom}(\widehat{L}) \right\}.$$

8.1.23 Poznámka

Všechny vlastnosti vyslovené pro obecný eliptický operátor $\widehat{L}$ zůstávají v platnosti také pro operátor Sturmův-Liouvilleův.

8.2 Úlohy na vlastní hodnoty a vlastní funkce eliptického operátoru

V této sekci předvedeme několik způsobů, jak nalézt vlastní čísla vybraných eliptických operátorů. Neomezíme se přitom pouze na operátory se standardními okrajovými podmínkami tvaru (8.2), ale ukážeme také některé metody na hledání vlastních hodnot operátorů bez konkrétních okrajových podmínek. Opět budeme s výhodou čerpat jednotlivá zadání v různých oblastech fyziky.

8.2.1 Příklad

V prvním příkladě budeme řešit jednu z nejfrekventovanějších úloh z elementární kvantové mechaniky. Půjde o úlohu na vlastní funkce a vlastní hodnoty operátoru $z-$tové složky hybnosti

$$\widehat{L}_z = -\mathtt{i}\hbar \frac{\partial}{\partial z}. \tag{8.13}$$

Budeme tedy řešit rovnici

$$-\mathtt{i}\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \lambda \Phi.$$

Snadno

$$\Phi(\varphi) = \mathtt{C}\, \mathtt{e}^{\frac{\mathtt{i}}{\hbar}\lambda\varphi}.$$

Aby byly tyto vlastní funkce určeny jednoznačně, je nutné, aby $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$. Proto

$$\mathtt{C}\, \mathtt{e}^{\frac{\mathtt{i}}{\hbar}\lambda\varphi} = \mathtt{C}\, \mathtt{e}^{\frac{\mathtt{i}}{\hbar}\lambda(\varphi+2\pi)}.$$

$$\mathtt{e}^{2\pi\frac{\mathtt{i}}{\hbar}\lambda} = 1.$$

Jelikož rovnice

$$\cos\bigl(2\pi \frac{\mathtt{i}}{\hbar}\lambda\bigr) + \mathtt{i}\sin\bigl(2\pi \frac{\mathtt{i}}{\hbar}\lambda\bigr) = 1$$

má řešení pouze, pokud $\lambda = m\hbar$, $m \in \mathbf{Z}$, jsou hodnoty

$$\lambda_m = m\hbar \qquad (m \in \mathbf{Z})$$

vlastními hodnotami operátoru (8.13). Normalizační rovnice

$$\int_0^{2\pi} \Phi(\varphi)\, \mathtt{d}\varphi = 1$$

pak vede na tvar příslušných vlastních funkcí, pro něž tedy

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathtt{e}^{\mathtt{i}m\varphi}.$$

Na závěr podotýkáme, že standardní okrajové podmínky 8.2 jsou v této úloze nahrazeny podmínkou jednoznačnosti $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$.

8.2.2 Příklad

Uvažme $G = (0, a)$ a volbu $p(x) = 1$, $q(x) = 0$ a $(h_1, h_2, \mathtt{H}_1, \mathtt{H}_2) = (0, 1, 0, 1)$ a řešme úlohu na vlastní hodnoty Sturmova-Liouvilleova diferenciálního operátoru. Řešíme tedy rovnici

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0,$$

zadanou spolu s podmínkami

$$u'(0) = 0, \qquad u'(a) = 0. \tag{8.14}$$

Výše uvedená rovnice s konstantními koeficienty má charakteristický polynom $\widetilde{\ell}(\chi) = \chi^2 + \lambda$, jehož kořeny jsou čísla $\pm\sqrt{-\lambda}$. Označme $\varkappa := \sqrt{-\lambda}$. Pro vhodnou hodnotu $\varkappa$ bude vlastní funkcí

$$u(x) = \mathtt{C}_1 \mathtt{e}^{\varkappa x} + \mathtt{C}_2 \mathtt{e}^{-\varkappa x}.$$

Má-li tato funkce vyhovět podmínkám (8.14), pak musí konstanty $\mathtt{C}_1$, $\mathtt{C}_2$ splňovat rovnice

$$\mathtt{C}_1 \varkappa - \mathtt{C}_2 \varkappa = 0$$

$$\mathtt{C}_1 \varkappa \mathtt{e}^{\varkappa a} - \mathtt{C}_2 \varkappa \mathtt{e}^{-\varkappa a} = 0.$$

Tato homogenní soustava může být řešitelná pouze tehdy, je-li její determinant nulový (jak plyne z Frobeniovy věty z lineární algebry), t.j. platí-li

$$\begin{vmatrix} \varkappa & -\varkappa \\ \varkappa \mathtt{e}^{\varkappa a} & -\varkappa \mathtt{e}^{-\varkappa a} \end{vmatrix} = \varkappa^2 (\mathtt{e}^{\varkappa a} - \mathtt{e}^{-\varkappa a}) = 0.$$

Pro reálná $\varkappa$ má tato rovnice jediné řešení, a sice $\varkappa = 0$. Hledejme nyní $\varkappa \in \mathbf{C}$, jež řeší rovnici

$$\mathtt{e}^{2\varkappa a} = 1.$$

Tuto rovnici řeší hodnoty

$$\varkappa = \mathtt{i}\frac{k\pi}{a} \qquad (k \in \mathbf{Z}),$$

neboť $\mathtt{e}^{2k\pi \mathtt{i}} = \cos(2k\pi) + \mathtt{i}\sin(2k\pi) = 1$. Tím jsme nalezli vlastní hodnoty této úlohy ve tvaru

$$\lambda_k = -\varkappa^2 = \frac{k^2\pi^2}{a^2},$$

kde $k \in \mathbf{Z}$. Pro všechny tyto vlastní hodnoty platí rovnost $\mathtt{C}_1 = \mathtt{C}_2$, a vlastními funkcemi úlohy jsou tudíž funkce

$$u_k(x) = \mathtt{C}_1 \left(\mathtt{e}^{\mathtt{i}\frac{k\pi x}{a}} + \mathtt{e}^{-\mathtt{i}\frac{k\pi x}{a}} \right) = A\cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right).$$

Tyto funkce mohou být ještě znormovány, aby

$$\int_0^a |u_k(x)|^2 = 1.$$

Pak

$$u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right).$$

Obrázek 8.1

Grafická vizualizace vlastních funkcí $u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right)$.

8.2.3 Příklad

Uvažme příklad Schrödingerovy rovnice

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\vec{x},t) + V(\vec{x},t)\varphi(\vec{x},t) = \mathtt{i}\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Nezávisí-li potenciální energie explicitně na čase, tj. je-li $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, pak lze předešlou rovnici řešit faktorizací hledaného řešení na tvar $\varphi(\vec{x},t) = \psi(\vec{x})u(t)$. Pak lze totiž výše uvedenou rovnici separovat do tvaru

$$\frac{1}{\psi(\vec{x})}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\vec{x}) + V(\vec{x})\varphi(\vec{x})\right] = \frac{1}{u(t)}\mathtt{i}\hbar\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Jelikož každá ze stran této rovnice závisí na jiné proměnné, lze takovou rovnost naplnit pouze tak, že se budou obě strany rovnat číselné konstantě. Označme ji v souladu se značením z kvantové mechaniky symbolem E. Odtud

$$\mathtt{i}\hbar\frac{\partial u}{\partial t} = Eu(t),$$

což vede k výsledku

$$u(t) = \mathsf{C}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

Druhá část rovnice pak bezprostředně vede k bezčasové Schrödingerově rovnici tvaru

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\vec{x}) + V(\vec{x})\varphi(\vec{x}) = E\varphi(\vec{x}),$$

která představuje úlohu na vlastní hodnoty Schrödingerova operátoru.

8.2.4 Příklad

Nyní budeme demonstrovat, jak řešit úlohu na vlastní hodnoty *Fourierovou metodou separace proměnných.* Nechť je operátor $\widehat{L}$ separabilní, t.j. lze jej zapsat ve tvaru

$$\widehat{L} = \widehat{L}_1 + \widehat{L}_2,$$

kde $\widehat{L}_1$ působí pouze na proměnnou $\vec{x} \in \mathbf{E}^s$ a $\widehat{L}_2$ působí pouze na proměnnou $\vec{y} \in \mathbf{E}^{r-s}$. Nechť má omezená oblast G tvar

$$G = G_1 \times G_2,$$

kde $G_1 \subset \mathbf{E}^s$ a $G_2 \subset \mathbf{E}^{r-s}$ jsou rovněž omezené oblasti. Potom lze hranici oblasti G zapsat ve tvaru

$$\mathrm{bd}(G) = \left(\mathrm{bd}(G_1) \times \overline{G}_2\right) \bigcup \left(\overline{G}_1 \times \mathrm{bd}(G_2)\right).$$

Pak lze řešení rovnice

$$\widehat{L}u(\vec{x},\vec{y}) = \lambda u(\vec{x},\vec{y}) \tag{8.15}$$

s okrajovými podmínkami

$$\alpha(\vec{x})u(\vec{x},\vec{y}) + \beta(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\mathrm{bd}(G_1)\times\overline{G}_2} = 0$$

$$\gamma(\vec{y})u(\vec{x},\vec{y}) + \varrho(\vec{y})\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\overline{G}_1\times\mathrm{bd}(G_2)} = 0$$

očekávat ve faktorizovaném tvaru

$$u(\vec{x},\vec{y}) = \varphi(\vec{x})\omega(\vec{y}).$$

Dosazením do (8.15) získáme rovnici

$$\omega(\vec{y})\widehat{L}_1\varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{x})\widehat{L}_2\omega(\vec{y}) = \lambda\varphi(\vec{x})\omega(\vec{y}).$$

Dělením obdržíme rovnost

$$\frac{\widehat{L}_1\varphi(\vec{x})}{\varphi(\vec{x})} = \lambda - \frac{\widehat{L}_2\omega(\vec{y})}{\omega(\vec{y})},$$

jejíž levá strana závisí pouze na $\vec{x}$ a pravá pouze na $\vec{y}$. Mají-li se obě strany rovnat, musí se obě rovnat konstantě. Označme ji μ. Tím jsme úlohu rozdělili na dvě jednodušší. Jedná se o úlohy

$$\widehat{L}_1\varphi(\vec{x}) = \mu\varphi(\vec{x}), \qquad \alpha(\vec{x})\varphi(\vec{x}) + \beta(\vec{x})\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\bigg|_{\mathrm{bd}(G_1)} = 0$$

$$\widehat{L}_2\omega(\vec{y}) = (\lambda-\mu)\omega(\vec{y}), \qquad \gamma(\vec{y})\omega(\vec{y}) + \varrho(\vec{y})\frac{\partial\omega}{\partial\vec{n}}\bigg|_{\mathrm{bd}(G_2)} = 0.$$

8.2.5 Příklad

Nalezněme vlastní funkce Laplaceova operátoru na oblasti $G = \langle 0,a\rangle \times \langle 0,b\rangle$ v $\mathbf{E}^2$ při okrajové podmínce

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\mathrm{bd}(G)} = 0.$$

Po separaci získáme dvě úlohy. První z nich má tvar $X'' = \mu X$ s okrajovými podmínkami $X'(0) = X'(a) = 0$. Řešením této úlohy jsou vlastní hodnoty

$$\mu_k = \frac{k^2\pi^2}{a^2}$$

a vlastní funkce

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right).$$

Druhou úlohou je $Y'' = (\lambda - \mu)Y$ s okrajovými podmínkami $Y'(0) = Y'(b) = 0$. Řešením této úlohy jsou vlastní hodnoty

$$\lambda - \mu = \frac{\ell^2\pi^2}{b^2}$$

a vlastní funkce

$$Y_\ell(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \cos\left(\frac{\ell\pi y}{b}\right).$$

Uzavíráme, že vlastními hodnotami zadaného operátoru jsou čísla

$$\lambda_{k,\ell} = \frac{k^2\pi^2}{a^2} + \frac{\ell^2\pi^2}{b^2}$$

a vlastními funkcemi

$$u_{k,\ell} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\ell\pi y}{b}\right), \qquad (k,\ell) \in \mathbf{N}^2.$$

8.2.6 Příklad

Pokusme se modifikovat metodu separace z příkladu 8.2.4 pro rovnici na vlastní hodnoty tvaru

$$f(\vec{x})g(\vec{y})\widehat{L}_x u(\vec{x},\vec{y}) + h(\vec{y})\widehat{L}_y u(\vec{x},\vec{y}) = \lambda u(\vec{x},\vec{y}).$$

Jelikož operátory $\widehat{L}_x$ a $\widehat{L}_y$ působí každý na jinou nezávisle proměnnou, lze příslušné vlastní funkce hledat ve faktorizovaném tvaru

$$u(\vec{x},\vec{y}) = \varphi(\vec{x})\omega(\vec{y}).$$

Pak tedy

$$f(\vec{x})g(\vec{y})\omega(\vec{y})\widehat{L}_x\varphi(\vec{x}) + h(\vec{y})\varphi(\vec{x})\widehat{L}_y\omega(\vec{y}) = \lambda\varphi(\vec{x})\omega(\vec{y}),$$

$$f(\vec{x})\frac{\widehat{L}_x\varphi(\vec{x})}{\varphi(\vec{x})} + \frac{h(\vec{y})}{g(\vec{y})}\frac{\widehat{L}_y\omega(\vec{y})}{\omega(\vec{y})} = \frac{\lambda}{g(\vec{y})}$$

$$f(\vec{x})\frac{\widehat{L}_x\varphi(\vec{x})}{\varphi(\vec{x})} = \frac{\lambda}{g(\vec{y})} - \frac{h(\vec{y})}{g(\vec{y})}\frac{\widehat{L}_y\omega(\vec{y})}{\omega(\vec{y})}.$$

Po této separaci je jasné, že naplnění poslední rovnice je možné pouze za předpokladu, že obě strany rovnice budou rovny konstantě. Označme ji μ. Na základě této úvahy se původní rovnice rozpadá na dvě rovnice

$$f(\vec{x})\widehat{L}_x\varphi(\vec{x}) = \mu\varphi(\vec{x}),$$

$$\big(h(\vec{y})\widehat{L}_y + \mu g(\vec{y})\big)\omega(\vec{y}) = \lambda\omega(\vec{y})$$

pro vlastní hodnoty operátoru $\widehat{K} := f(\vec{x})\widehat{L}_x$ (a jeho vlastní funkce $\varphi(\vec{x})$) a vlastní hodnoty operátoru $\widehat{M} := h(\vec{y})\widehat{L}_y + \mu g(\vec{y})$ a jeho vlastní funkce $\omega(\vec{y})$.

8.2.7 Příklad

V této úloze budeme hledat vlastní funkce operátoru kvadrátu momentu hybnosti

$$\widehat{L^2} = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].$$

Řešíme tedy rovnici

$$\widehat{L^2}(Y) = -\frac{\hbar^2}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right) - \frac{\hbar^2}{\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = \lambda Y.$$

Obrázek 8.2
Vybrané sférické harmonické funkce.

Označíme-li nyní

$$f(\vartheta) = -\frac{\hbar^2}{\sin(\vartheta)},$$

$$g(\vartheta) = -\frac{\hbar^2}{\sin^2(\vartheta)},$$

$$\widehat{L}_\vartheta = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right),$$

$$\widehat{L}_\varphi = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

přechází tato úloha na úlohu 8.2.6. Řešme tedy nejprve rovnici

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = \mu\Phi. \tag{8.16}$$

Jelikož operátor $\widehat{L}_\varphi$ komutuje dle příkladu 1.7.14 s operátorem $z-$tové složky hybnosti $\widehat{L}_z = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial z}$, mají oba operátory dle věty 1.7.29 stejné vlastní funkce. Podle výsledku příkladu 8.2.1 jsou jimi funkce

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},$$

kde $m \in \mathbf{Z}$. Dosadíme-li tyto funkce do rovnice (8.16), získáme hodnoty příslušných vlastních čísel, a sice

$$\mu = -m^2.$$

Ve druhé části budeme řešit rovnici

$$\sin(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial\Theta}{\partial\vartheta}\right) = \left(m^2 - \frac{\lambda}{\hbar^2}\sin^2(\vartheta)\right)\Theta. \tag{8.17}$$

Zaveďme nyní pro zjednodušení substituci $t = \cos(\vartheta)$. Pak tedy

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\vartheta} = -\sin(\vartheta) = -\sqrt{1-t^2}.$$

Rovnice (8.17) pak přechází do tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}\left((1-t^2)\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right) = \left(\frac{m^2}{1-t^2} - \frac{\lambda}{\hbar^2}\right)\Theta,$$

který koresponduje s obyčejnou diferenciální rovnici, tzv. *obecnou Legendreovou rovnicí*

$$\left((1-x^2)y'\right)' + \left(\vartheta - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0,$$

resp.

$$(1-x^2)y' - 2xy'' + \left(\vartheta - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0.$$

Tato rovnice má řešení pouze tehdy, když $\vartheta = \ell(\ell+1)$, kde $\ell \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{Z}$ a $0 \leqslant |m| \leqslant |\ell|$. Pro $m = 0$ jsou řešením Legendreovy polynomy diskutované v úloze 1.6.13. Obecnými řešeními jsou tzv. *přidružené Legendreovy polynomy*

$$P_{\ell m}(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{(2m)!!}\,\frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}}\left(x^2-1\right)^\ell.$$

Hledanými vlastními funkcemi operátoru $\widehat{L}_\vartheta$ jsou tudíž funkce

$$\Theta(\vartheta) = P_{\ell m}\big(\cos(\vartheta)\big).$$

Shrňme tedy výsledek celé úlohy. Hledanými vlastními funkcemi operátoru kvadrátu momentu hybnosti jsou tzv. *kulové funkce (sférické harmonické)*

$$Y_{\ell m} = \mathtt{C}_{\ell m}\, P_{\ell m}\big(\cos(\vartheta)\big)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} m\varphi},$$

kde pro normalizační konstanty platí

$$\mathtt{C}_{\ell m} = \sqrt{\frac{(2\ell+1)\,(\ell-m)!}{4\pi\,(\ell+m)!}}.$$

Třída

$$\Big\{ Y_{\ell m} :\, \ell \in \mathbf{N}_0 \,\wedge\, m \in \mathbf{Z} \,\wedge\, |m| \leqslant \ell \Big\}$$

sférických harmonických funkcí tvoří ortogonální bázi v prostoru funkcí kvadraticky integrovatelných na jednotkové kouli. Navíc množina

$$\sigma = \big\{ \ell(\ell+1)\hbar^2 :\, \ell \in \mathbf{N}_0 \big\}$$

tvoří čistě bodové spektrum operátoru $\widehat{L^2}$. Některé sférické harmonické funkce uvádíme zde

$$Y_{0,0}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

$$Y_{1,-1}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,\sin(\vartheta)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$$

$$Y_{1,0}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\,\cos(\vartheta)$$

$$Y_{1,-1}(\vartheta,\varphi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,\sin(\vartheta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

$$Y_{2,-2}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\,\sin^2(\vartheta)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}$$

$$Y_{2,-1}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\,\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$$

$$Y_{2,0}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\,\big(3\cos^2(\vartheta)-1\big)$$

$$Y_{2,1}(\vartheta,\varphi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\,\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

$$Y_{2,2}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\,\sin^2(\vartheta)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}$$

$$Y_{3,0}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{\pi}}\,\big(5\cos^3(\vartheta)-3\cos(\vartheta)\big)$$

a jejich tvary vyobrazujeme výše.

8.2.8 Příklad

Nalezněme reálná vlastní čísla a odpovídající vlastní funkce operátoru $\widehat{H} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2$, definovaného na definičním oboru

$$\mathscr{M}_{\widehat{H}} = \Big\{ u(x) \in \mathscr{L}_2(\mathbf{R}) :\, \widehat{H}u(x) \in \mathscr{L}_2(\mathbf{R}) \,\wedge\, u'(x) \in \mathscr{L}_2(\mathbf{R}) \,\wedge\, u''(x) \in \mathscr{L}_2(\mathbf{R}) \Big\}.$$

Obrázek 8.3
Vlnové funkce lineárního harmonického oscilátoru.

Z fyzikálního pohledu se jedná o hledání tzv. vlnových funkcí lineárního harmonického oscilátoru. Jejich kvadráty pak představují hustotu pravděpodobnosti pro výskyt oscilátoru v dané oblasti. Matematicky tedy řešíme rovnici

$$u''(x) + (\lambda - x^2)u(x) = 0.$$

Zavedeme substituci $u(x) = v(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. Odsud

$$v''(x) - 2xv'(x) + (\lambda - 1)v = 0. \tag{8.18}$$

Řešení této rovnice budeme hledat ve tvaru řady

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Pak

$$v'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}, \qquad v''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Po dosazení do rovnice dostáváme postupně

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+2)x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + (\lambda - 1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$(\lambda - 1)a_0 + 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\big[(n+1)(n+2)a_{n+2} + (\lambda - 1 - 2n)a_n\big]x^n = 0$$

Pro splnění této rovnosti musí platit jednak $(\lambda - 1)a_0 + 2a_2 = 0$ a hlavně

$$a_{n+2} = \frac{2n + 1 - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

To je rekurentní vztah pro koeficienty a_n. Jelikož hledáme normalizovatelnou vlastní funkci, musí tato být omezená, tedy musí existovat $\mathtt{K} > 0$, tak že

$$\left| v(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \right| < \mathtt{K}.$$

Odsud musí platit

$$|v(x)| < \mathtt{K}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}.$$

To de facto představuje nerovnost

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} < \mathtt{K}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!} \equiv \mathtt{K}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!!}.$$

Pro koeficienty uvedených řad proto musí platit

$$a_n < \frac{\mathtt{K}}{(2n)!!}, \quad a_{n+2} < \frac{\mathtt{K}}{(2n+2)!!}.$$

Po dělení obou nerovností by mělo platit

$$\frac{2n + 1 - \lambda}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{2n+2}.$$

Tato nerovnost je ale splněna pouze pro ta n, pro něž $3n < 2\lambda$. Čili pro obecné λ podmínka normalizovatelnosti vlastních funkcí splněna není. Výjimku tvoří případ, kdy λ je liché číslo. Pak od určitého indexu n jsou již všechny koeficienty a_n nulové a řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je konečná. Tedy jedinými vlastními čísly řešené úlohy jsou čísla

$$\lambda = 2\ell + 1, \qquad (\ell \in \mathbf{N}_0).$$

Srovnáme-li rovnice (8.18) a (1.39), vidíme, že pro $\lambda = 2\ell + 1$ tyto splývají a funkce $v_\ell(x)$ tudíž představují řešení Hermiteovy diferenciální rovnice. Proto $v_\ell(x) = \mathtt{H}_\ell(x)$ jsou Hermiteovy polynomy. Platí pro ně vztah

$$\mathtt{H}_\ell(x) = (-1)^\ell \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right).$$

Vlastními funkcemi zkoumaného operátoru jsou tedy funkce

$$u_\ell(x) = \mathtt{C}_\ell \mathtt{H}_\ell(x)\,\mathsf{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Po normalizaci pak

$$u_\ell(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^\ell \ell! \sqrt{\pi}}}\,\mathsf{e}^{\frac{x^2}{2}}\,\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\left(\mathsf{e}^{-x^2}\right).$$

Vlnové funkce lineárního harmonického oscilátoru jsou sumarizovány v následující tabulce a jejich průběhy vyobrazujeme na obrázku výše.

ℓ	$u_\ell(x)$
0	$\frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}\,\mathsf{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
1	$\frac{\sqrt{2}\,x}{\pi^{\frac{1}{4}}}\,\mathsf{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
2	$\frac{-1+2\,x^2}{\sqrt{2}\,\pi^{\frac{1}{4}}}\,\mathsf{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
3	$\frac{x\left(-3+2\,x^2\right)}{\sqrt{3}\,\pi^{\frac{1}{4}}}\,\mathsf{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
4	$\frac{3+4\,x^2\left(-3+x^2\right)}{2\,\sqrt{6}\,\pi^{\frac{1}{4}}}\,\mathsf{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
5	$\frac{x\left(15+4\,x^2\left(-5+x^2\right)\right)}{2\,\sqrt{15}\,\pi^{\frac{1}{4}}}\,\mathsf{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
6	$\frac{-15+90\,x^2-60\,x^4+8\,x^6}{12\,\sqrt{5}\,\pi^{\frac{1}{4}}}\,\mathsf{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
7	$\frac{x\left(-105+210\,x^2-84\,x^4+8\,x^6\right)}{6\,\sqrt{70}\,\pi^{\frac{1}{4}}}\,\mathsf{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
8	$\frac{105-840\,x^2+840\,x^4-224\,x^6+16\,x^8}{24\,\sqrt{70}\,\pi^{\frac{1}{4}}}\,\mathsf{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
9	$\frac{x\left(945+8\,x^2\left(-315+189\,x^2-36\,x^4+2\,x^6\right)\right)}{72\,\sqrt{35}\,\pi^{\frac{1}{4}}}\,\mathsf{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

8.2.9 Příklad

Pro účely následujícího příkladu převedeme nyní Laplaceův operátor $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ do polárních souřadnic ϱ a φ. Relace mezi kartézskými a polárními souřadnicem je přitom zprostředkována vztahy $x = \varrho\cos(\varphi)$ a $y = \varrho\sin(\varphi)$. Po zderivování těchto vztahů podle x obdržíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 &= \tfrac{\partial\varrho}{\partial x}\cos(\varphi) - \varrho\,\sin(\varphi)\tfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ 0 &= \tfrac{\partial\varrho}{\partial x}\sin(\varphi) + \varrho\,\cos(\varphi)\tfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \end{aligned}$$

jejichž řešením je dvojice

$$\left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \left(\cos(\varphi), -\frac{\sin(\varphi)}{\varrho}\right).$$

Zcela obdobně řeší soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{\partial\varrho}{\partial y}\cos(\varphi) - \varrho\,\sin(\varphi)\tfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ 1 &= \tfrac{\partial\varrho}{\partial y}\sin(\varphi) + \varrho\,\cos(\varphi)\tfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \end{aligned}$$

dvojice

$$\left(\frac{\partial\varrho}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \left(\sin(\varphi), \frac{\cos(\varphi)}{\varrho}\right).$$

Odtud pak zjevně

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varrho} - \frac{\sin(\varphi)}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{\cos(\varphi)}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Dalším derivováním první z dvojice těchto rovnic podle x obdržíme druhou parciální derivaci

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\cos^2(\varphi)\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2}-\frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{\varrho}\frac{\partial^2}{\partial\varrho\partial\varphi}+\frac{\sin^2(\varphi)}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\sin^2(\varphi)}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}+\frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Analogicky vypočteme

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\sin^2(\varphi)\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2}+\frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{\varrho}\frac{\partial^2}{\partial\varrho\partial\varphi}+\frac{\cos^2(\varphi)}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\cos^2(\varphi)}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}-\frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Dosadíme-li do předpisu pro Laplaceův operátor vypočtené derivace, získáme

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}.$$

8.2.10 Příklad

Pokusme se naleznout vlastní funkce záporně vzatého Laplaceova operátoru na otevřeném kruhu

$$B_{\mathtt{R}}=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: x^2+y^2<\mathtt{R}^2\right\}$$

o poloměru $\mathtt{R}>0$ se středem v bodě $\vec{0}$ zadaného společně s Dirichletovou okrajovou podmínkou tvaru $u(x,y)\big|_S=0$, kde $S=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: x^2+y^2=\mathtt{R}^2\right\}$. Vzhledem k tomu, že tvar oblasti $B_{\mathtt{R}}$ nedovoluje separaci, přejdeme nyní s výhodou do polárních souřadnic, v nichž má sice Laplaceův operátor zdánlivě komplikovanější podobu, a sice

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}=\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}\right)+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

ale kruhová oblast přechází na obdélník $O=\left\{(\varrho,\varphi)\in\mathbf{R}^2: 0<\varrho<\mathtt{R}\wedge 0\leqslant\varphi<2\pi\right\}$, který je již separabilní. Nyní již bude možno na úlohu

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial u}{\partial\varrho}\right)+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=-\lambda u(\varrho,\varphi) \tag{8.19}$$

$$u(\varrho,\varphi)\big|_{\varrho=\mathtt{R}}=0 \tag{8.20}$$

na vlastní hodnoty použít metodu separace. Hledané vlastní funkce budeme tedy předpokládat v separovaném tvaru $u(\varrho,\varphi)=R(\varrho)\Phi(\varphi)$. Dosazením této premisy do rovnice (8.19), vydělením obou stran funkcí $u(\varrho,\varphi)$ a vynásobením výrazem ϱ^2 dostaneme rovnost

$$\frac{\varrho}{R}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial R}{\partial\varrho}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=-\lambda\varrho^2,$$

odkud dále

$$\frac{\varrho}{R}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial R}{\partial\varrho}\right)+\lambda\varrho^2=\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}. \tag{8.21}$$

Levá strana přitom závisí pouze na radiální složce ϱ, zatímco pravá strana závisí pouze na azimutální složce φ. Aby tato rovnost mohla být splněna pro všechny dvojice $(\varrho,\varphi)\in O$, je třeba, aby se obě strany posledně uvedené rovnice rovnaly konstantě. Označme ji μ. Vztah (8.21) představuje de facto dvě obyčejné diferenciální rovnice. Rovnice pro azimutální složku je přitom tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=-\mu\Phi(\varphi). \tag{8.22}$$

Zde se jedná o rovnici s konstantními koeficienty, jejíž charakteristický polynom $\ell(\xi)=\xi^2+\mu$ má vesměs dva kořeny, a sice $\ell_1=\sqrt{-\mu}$, $\ell_2=-\sqrt{-\mu}$. Pokud by $\mu<0$ a označili bychom $\mu=-\nu^2$, pak by $\Phi(\varphi)=\mathtt{C}\cosh(\nu\varphi)+\mathtt{D}\sinh(\nu\varphi)$. Tato funkce ale není pro žádné $\nu>0$ periodická, a tedy varianta $\mu<0$ nepřipadá do úvahy. Pokud by $\mu=0$, pak by řešením rovnice (8.22) byla třída funkcí $\Phi(\varphi)=\mathtt{C}\varphi+\mathtt{D}$, přičemž pouze pro volbu $\mathtt{C}=0$ by se jednalo o periodickou funkci. Pro $\mu>0$ označme $\mu=\nu^2$ a uvažme, že řešením rovnice (8.22) je třída funkcí $\Phi(\varphi)=\mathtt{C}\cos(\nu\varphi)+\mathtt{D}\sin(\nu\varphi)$. Abychom u těchto funkcí získali periodu délky 2π, je třeba, aby $\nu=n\in\mathbf{N}$, tj. $\mu=n^2$. Nalezená periodická řešení můžeme pak zjednodušit do tvaru

$$\Phi(\varphi)=\mathtt{C}_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi},\quad (n\in\mathbf{Z}),$$

v němž je pro volbu $n=0$ zahrnuto také výše zmíněné konstantní řešení. Rovnice pro radiální složku ϱ je tvaru

$$\varrho^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\varrho^2}+\varrho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varrho}-\left(n^2-\lambda\varrho^2\right)R(\varrho)=0. \tag{8.23}$$

Z okrajové podmínky (8.20) dále plyne, že radiální složka musí vyhovovat podmínce $R(\mathtt{R}) = 0$. Je-li $\lambda = 0$, přejde rovnice (8.23) v Eulerovu rovnici

$$\varrho^2 \frac{\mathtt{d}^2 R}{\mathtt{d}\varrho^2} + \varrho \frac{\mathtt{d}R}{\mathtt{d}\varrho} - n^2 R = 0. \tag{8.24}$$

Pro nalezení jejího řešení zaveďme novou proměnnou t předpisem $\varrho = \mathrm{e}^t$. Odtud

$$\frac{\mathtt{d}R}{\mathtt{d}\varrho} = \frac{\mathtt{d}R}{\mathtt{d}t}\frac{\mathtt{d}t}{\mathtt{d}\varrho} = \frac{\mathtt{d}R}{\mathtt{d}t}\frac{1}{\varrho},$$

$$\frac{\mathtt{d}^2 R}{\mathtt{d}\varrho^2} = \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}\varrho}\left(\frac{\mathtt{d}R}{\mathtt{d}t}\frac{1}{\varrho}\right) = \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}\left(\frac{\mathtt{d}R}{\mathtt{d}t}\right)\frac{\mathtt{d}t}{\mathtt{d}\varrho}\frac{1}{\varrho} + \frac{\mathtt{d}R}{\mathtt{d}t}\frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}\varrho}\left(\frac{1}{\varrho}\right) = \frac{1}{\varrho^2}\frac{\mathtt{d}^2 R}{\mathtt{d}t^2} - \frac{1}{\varrho^2}\frac{\mathtt{d}R}{\mathtt{d}\varrho}.$$

Transformací $\varrho = \mathrm{e}^t$ se tudíž Eulerova diferenciální rovnice transformuje na tvar

$$\ddot{R} - n^2 R = 0.$$

Opět se jedná o rovnici s konstantními koeficienty, jejíž charakteristický polynom $\ell(\xi) = \xi^2 - n^2$ má dva kořeny $\ell_1 = n$ a $\ell_2 = -n$. Fundamentálním systémem této rovnice s konstantními koeficienty je proto množina $\{\mathrm{e}^{nt}, \mathrm{e}^{-nt}\}$. Všechna řešení rovnice (8.24) jsou proto funkce

$$R(\varrho) = \mathtt{C}\varrho^n + \frac{\mathtt{D}}{\varrho^n}, \quad (n \neq 0).$$

Snadno se přesvědčíme, že podmínku $R(\mathtt{R}) = 0$ lze naplnit pouze tehdy, jsou-li $\mathtt{C} = \mathtt{D} = 0$. Takové řešení je ale pro nás značně nezajímavé, neboť identicky nulová funkce nemůže být již z definice prohlášena za vlastní funkci. Pokud $n = 0$, má zkoumaná rovnice ještě jednodušší tvar, a sice

$$\varrho^2 \frac{\mathtt{d}^2 R}{\mathtt{d}\varrho^2} + \varrho \frac{\mathtt{d}R}{\mathtt{d}\varrho} = 0,$$

a jejím řešením je systém funkcí $R(\varrho) = \mathtt{C} + \mathtt{D}\ln(\varrho)$. Ani u těchto funkcí nelze žádnou volbou konstant docílit toho, aby byly vlastními funkcemi zkoumaného operátoru. Zbývá tedy uvážit ty případy, kdy $\lambda \neq 0$. Pak tvar rovnice (8.24) splývá s modifikovanou Besselovou diferenciální rovnicí (viz definice 1.9.28). Její všechna řešení jsou podle probrané teorie funkce tvaru

$$R(\varrho) = \mathtt{C}_n \mathcal{J}_n(\omega\varrho) + \mathtt{D}_n \mathcal{Y}_n(\omega\varrho), \tag{8.25}$$

kde $\omega = \sqrt{\lambda}$. Tyto funkce bychom mohli spíše vyjádřit jako lineární kombinaci modifikovaných Besselových funkcí, avšak tvar (8.25) bude pro nás výhodnější. Z okrajové podmínky $R(\mathtt{R}) = 0$ plyne vztah

$$\mathtt{C}_n \mathcal{J}_n(\omega\mathtt{R}) + \mathtt{D}_n \mathcal{Y}_n(\omega\mathtt{R}) = 0.$$

Z požadavku omezenosti dále plyne, že konstanty $\mathtt{D}_n$ musejí být nenulové, neboť Besselovy funkce druhého druhu $\mathcal{Y}_n$ v nule divergují (viz obrázek 1.6). Tím se dostáváme k podmínce na vlastní hodnoty λ, neboť rovnici

$$\mathtt{C}_n \mathcal{J}_n(\omega\mathtt{R}) = 0$$

lze při nenulovosti konstant $\mathtt{C}_n$ naplnit pouze tehdy, jsou-li čísla $\omega\mathtt{R}$ kořeny algebraické rovnice $\mathcal{J}_n(x) = 0$. Tyto kořeny podle teorie speciálních funkcí existují, jsou pro $\mathtt{R} > 0$ všechny kladné a jejich počet je $\aleph_0$. Označme je proto symbolicky jako $\vartheta_{n\ell}$, kde $\ell \in \mathbf{N}$. Tyto kořeny jsou pochopitelně závislé také na indexu n. Tedy vlastními čísly radiální složky Laplaceova operátoru (a tedy i vlastními hodnotami záporně vzatého Laplaceova operátoru na otevřeném kruhu $B_{\mathtt{R}}$) jsou čísla

$$\lambda_{n\ell} = \frac{\vartheta_{n\ell}^2}{\mathtt{R}^2}.$$

Celou úlohu tedy uzavíráme sdělením, že vlastními funkcemi záporně vzatého Laplaceova operátoru na otevřeném kruhu $B_{\mathtt{R}}$ jsou funkce

$$u_{n\ell}(\varrho, \varphi) = \mathtt{K}_{n\ell}\, \mathcal{J}_n\left(\vartheta_{n\ell}\frac{\varrho}{\mathtt{R}}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}, \quad (n \in \mathbf{Z},\ \ell \in \mathbf{N}).$$

Obrázek 8.4
Vybrané vlastní funkce $u_{n\ell}(\varrho, \varphi)$ záporně vzatého Laplaceova operátoru na otevřeném kruhu $B_{\mathtt{R}}$ při Dirichletově okrajové podmínce. Vyobrazena je jejich reálná část.

8.2.11 Příklad

V tomto příkladě se pokusme určit vlastní funkce záporně vzatého Laplaceova operátoru na otevřeném mezikruží

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < \mathtt{R}_1^2 < x^2 + y^2 < \mathtt{R}_2^2\}$$

se středem v bodě $\vec{0}$ zadaného společně s Dirichletovými okrajovými podmínkami tvaru $u(x, y)\big|_{S_1} = 0$ a $u(x, y)\big|_{S_2} = 0$ kde $S_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = \mathtt{R}_1^2\}$, resp. $S_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}_2^2 : x^2 + y^2 = \mathtt{R}^2\}$. Vzhledem k tomu, že tvar oblasti M opět (stejně jako v předešlém případě) nedovoluje separaci, přejdeme znovu do polárních souřadnic. V nich přechází kruhové mezikruží M v obdélník $O = \{(\varrho, \varphi) \in \mathbf{R}^2 : 0 < \mathtt{R}_1 < \varrho < \mathtt{R}_2 \wedge 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$, který je separabilní oblastí. Nyní již bude možno na úlohu

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial u}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -\lambda u(\varrho, \varphi) \tag{8.26}$$

$$u(\varrho, \varphi)\big|_{\varrho = \mathtt{R}_1} = 0, \quad u(\varrho, \varphi)\big|_{\varrho = \mathtt{R}_2} = 0 \tag{8.27}$$

na vlastní hodnoty použít metodu separace. Hledané vlastní funkce budeme znovu předpokládat v separovaném tvaru $u(\varrho, \varphi) = R(\varrho)\Phi(\varphi)$. Dosazením této premisy do rovnice (8.26), vydělením obou stran funkcí $u(\varrho, \varphi)$ a vynásobením výrazem ϱ^2 dostaneme rovnost

$$\frac{\varrho}{R}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial R}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -\lambda \varrho^2,$$

odkud dále

$$\frac{\varrho}{R}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial R}{\partial \varrho}\right) + \lambda \varrho^2 = \frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \tag{8.28}$$

Levá strana přitom závisí pouze na radiální složce ϱ, zatímco pravá strana závisí pouze na azimutální složce φ. Aby tato rovnost mohla být splněna pro všechny dvojice $(\varrho, \varphi) \in O$, je třeba, aby se obě strany posledně uvedené rovnice rovnaly konstantě. Označme ji μ. Vztah (8.28) představuje de facto dvě obyčejné diferenciální rovnice. Rovnice pro azimutální složku je přitom tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2 \Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} = -\mu \Phi(\varphi). \tag{8.29}$$

Zde se jedná o rovnici s konstantními koeficienty, jejíž charakteristický polynom $\ell(\xi) = \xi^2 + \mu$ má vesměs dva kořeny, a sice $\ell_1 = \sqrt{-\mu}$, $\ell_2 = -\sqrt{-\mu}$. Pokud by $\mu < 0$ a označili bychom $\mu = -\nu^2$, pak by $\Phi(\varphi) = \mathtt{C}\cosh(\nu\varphi) + \mathtt{D}\sinh(\nu\varphi)$. Tato funkce ale není pro žádné $\nu > 0$ periodická, a tedy varianta $\mu < 0$ nepřipadá do úvahy. Pokud by $\mu = 0$, pak by řešením rovnice (8.22) byla třída funkcí $\Phi(\varphi) = \mathtt{C}\varphi + \mathtt{D}$, přičemž pouze pro volbu $\mathtt{C} = 0$ by se jednalo o periodickou funkci. Pro $\mu > 0$ označme $\mu = \nu^2$ a uvažme, že řešením rovnice (8.22) je třída funkcí $\Phi(\varphi) = \mathtt{C}\cos(\nu\varphi) + \mathtt{D}\sin(\nu\varphi)$. Abychom u těchto funkcí získali periodu délky 2π, je třeba, aby $\nu = n \in \mathbf{N}$, tj. $\mu = n^2$. Nalezená periodická řešení můžeme pak zjednodušit do tvaru

$$\Phi(\varphi) = \mathtt{C}_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}, \quad (n \in \mathbf{Z}),$$

v němž je pro volbu $n = 0$ zahrnuto také výše zmíněné konstantní řešení. Rovnice pro radiální složku ϱ je tvaru

$$\varrho^2 \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\varrho^2} + \varrho \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varrho} - \left(n^2 - \lambda \varrho^2\right) R(\varrho) = 0. \tag{8.30}$$

Z okrajových podmínek (8.20) dále plyne, že radiální složka musí vyhovovat podmínkám $R(\mathtt{R}_1) = 0$ a $R(\mathtt{R}_2) = 0$ Je-li $\lambda = 0$, přejde rovnice (8.30) v Eulerovu rovnici

$$\varrho^2 \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\varrho^2} + \varrho \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varrho} - n^2 R = 0. \tag{8.31}$$

Pro nalezení jejího řešení zaveďme novou proměnnou t předpisem $\varrho = \mathrm{e}^t$. Odtud

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varrho} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varrho} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\varrho},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\varrho^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\varrho}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varrho}\frac{1}{\varrho} + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}\left(\frac{1}{\varrho}\right) = \frac{1}{\varrho^2}\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{\varrho^2}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varrho}.$$

Transformací $\varrho = \mathrm{e}^t$ se tudíž Eulerova diferenciální rovnice transformuje na tvar

$$\ddot{R} - n^2 R = 0.$$

Opět se jedná o rovnici s konstantními koeficienty, jejíž charakteristický polynom $\ell(\xi) = \xi^2 - n^2$ má dva kořeny $\ell_1 = n$ a $\ell_2 = -n$. Fundamentálním systémem této rovnice s konstantními koeficienty je proto množina $\{\mathrm{e}^{nt}, \mathrm{e}^{-nt}\}$. Všechna řešení rovnice (8.24) jsou proto funkce

$$R(\varrho) = \mathtt{C}\varrho^n + \frac{\mathtt{D}}{\varrho^n}, \quad (n \neq 0).$$

Snadno se přesvědčíme, že podmínky $R(\mathtt{R}_1) = R(\mathtt{R}_2) = 0$ lze naplnit pouze tehdy, jsou-li $\mathtt{C} = \mathtt{D} = 0$. Takové řešení je ale pro nás značně nezajímavé, neboť identicky nulová funkce nemůže být již z definice prohlášena za vlastní funkci. Pokud $n = 0$, má zkoumaná rovnice ještě jednodušší tvar, a sice

$$\varrho^2 \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\varrho^2} + \varrho \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varrho} = 0,$$

a jejím řešením je systém funkcí $R(\varrho) = \mathtt{C} + \mathtt{D}\ln(\varrho)$. Ani u těchto funkcí nelze žádnou volbou konstant docílit toho, aby byly vlastními funkcemi zkoumaného operátoru. Zbývá tedy uvážit ty případy, kdy $\lambda \neq 0$. Pak tvar rovnice (8.31) splývá s modifikovanou Besselovou diferenciální rovnicí (viz definice 1.9.28). Její všechna řešení jsou lineárními kombinacemi Besselových funkcí prvního a druhého druhu, tedy

$$R(\varrho) = \mathtt{C}_n \mathcal{J}_n(\omega\varrho) + \mathtt{D}_n \mathcal{Y}_n(\omega\varrho), \tag{8.32}$$

kde $\omega = \sqrt{\lambda}$. Z okrajových podmínek $R(\mathtt{R}_1) = R(\mathtt{R}_2) = 0$ plynou rovnosti

$$\mathtt{C}_n \mathcal{J}_n(\omega\mathtt{R}_1) + \mathtt{D}_n \mathcal{Y}_n(\omega\mathtt{R}_1) = 0, \tag{8.33}$$

$$\mathtt{C}_n \mathcal{J}_n(\omega\mathtt{R}_2) + \mathtt{D}_n \mathcal{Y}_n(\omega\mathtt{R}_2) = 0. \tag{8.34}$$

Našim cílem je řešit tuto soustavu (pro dvě neznámé $\mathtt{C}_n$ a $\mathtt{D}_n$ v závislosti na parametru ω, resp. λ. Jelikož se jedná o homogenní soustavu, je podle Frobeniovy věty nezbytné, aby její determinant byl nulový. Musí tedy platit

$$\mathcal{J}_n(\omega\mathtt{R}_1)\mathcal{Y}_n(\omega\mathtt{R}_2) = \mathcal{J}_n(\omega\mathtt{R}_2)\mathcal{Y}_n(\omega\mathtt{R}_1).$$

Tato transcendentní rovnice má pro $\mathtt{R}_1 > 0$ a $\mathtt{R}_2 > 0$ pouze reálné a prosté kořeny, jejichž počet je $\aleph_0$. Označme je zde pouze symbolicky jako $\sigma_{n\ell}$, kde $\ell \in \mathbf{N}$. Odsud vyplývá, že vlastními hodnotami záporně vzatého Laplaceova operátoru na otevřeném mezikruží M jsou čísla

$$\lambda_{n\ell} = \sigma_{n\ell}^2.$$

Při této volbě parametru λ pak rovnice (8.33) a (8.34) splývají, a proto

$$\frac{\mathtt{D}_n}{\mathtt{C}_n} = -\frac{\mathcal{J}_n(\sigma_{n\ell}\mathtt{R}_1)}{\mathcal{Y}_n(\sigma_{n\ell}\mathtt{R}_1)} = -\frac{\mathcal{J}_n(\sigma_{n\ell}\mathtt{R}_2)}{\mathcal{Y}_n(\sigma_{n\ell}\mathtt{R}_2)}.$$

Celou úlohu tedy uzavíráme sdělením, že vlastními funkcemi záporně vzatého Laplaceova operátoru na otevřeném mezikruží M jsou funkce

$$u_{n\ell}(\varrho,\varphi) = \mathtt{K}_{n\ell}\left(\mathcal{J}_n(\sigma_{n\ell}\varrho) - \frac{\mathcal{J}_n(\sigma_{n\ell}\mathtt{R}_1)}{\mathcal{Y}_n(\sigma_{n\ell}\mathtt{R}_1)}\mathcal{Y}_n(\sigma_{n\ell}\varrho)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}, \quad (n \in \mathbf{Z},\ \ell \in \mathbf{N}).$$

Obrázek 8.5
Vybrané vlastní funkce $u_{n\ell}(\varrho,\varphi)$ záporně vzatého Laplaceova operátoru na otevřeném mezikruží M při Dirichletově okrajové podmínce. Vyobrazena je jejich reálná část.

8.2.12 Příklad

Vzhledem k tomu, že budeme v další části této kapitoly hledat vlastní hodnoty záporně vzatého Laplaceova operátoru ve třídimenzionálním prostoru a zamýšlíme při řešení těchto úloh užívat Fourierovy separační metody, bude nutné Laplaceův operátor převést do některých vybraných nekartézských souřadnic. Tuto úlohu zahajíme převodem do cylindrických souřadnic. Cylindrické (válcové) souřadnice v $\mathbf{E}^3$ bývají zadávány na množině

$$M = \{(\varrho,\varphi,h) \in \mathbf{E}^3 : \varrho > 0 \wedge \varphi \in (0,2\pi)\}$$

rovnicemi

$$
\begin{aligned}
x &= \varrho\cos(\varphi),\\
y &= \varrho\sin(\varphi),\\
z &= h.
\end{aligned}
\tag{8.35}
$$

Takto definované zobrazení je regulární na otevřené množině M, neboť funkční vektor $\overrightarrow{f}(\varrho,\varphi,h) = (\varrho\cos(\varphi), \varrho\sin(\varphi), h)$ má spojité první derivace a pro jacobián platí nerovnost

$$
\det\left(\frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(\varrho,\varphi,h)}\right) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -\varrho\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \varrho\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \varrho > 0.
$$

Přistupme nyní k samotné tranformaci. Po zderivování definičních vztahů (8.35) podle x obdržíme soustavu tří rovnic

$$
\begin{aligned}
1 &= \tfrac{\partial\varrho}{\partial x}\cos(\varphi) - \varrho\,\sin(\varphi)\tfrac{\partial\varphi}{\partial x}\\
0 &= \tfrac{\partial\varrho}{\partial x}\sin(\varphi) + \varrho\,\cos(\varphi)\tfrac{\partial\varphi}{\partial x}\\
0 &= \tfrac{\partial h}{\partial x},
\end{aligned}
$$

jejichž řešením je uspořádaná trojice

$$
\left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial x}\right) = \left(\cos(\varphi), -\frac{\sin(\varphi)}{\varrho}, 0\right).
$$

Zcela obdobně řeší soustavu

$$
\begin{aligned}
0 &= \tfrac{\partial\varrho}{\partial y}\cos(\varphi) - \varrho\,\sin(\varphi)\tfrac{\partial\varphi}{\partial y}\\
1 &= \tfrac{\partial\varrho}{\partial y}\sin(\varphi) + \varrho\,\cos(\varphi)\tfrac{\partial\varphi}{\partial y}\\
0 &= \tfrac{\partial h}{\partial y},
\end{aligned}
$$

trojice

$$
\left(\frac{\partial\varrho}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial y}\right) = \left(\sin(\varphi), \frac{\cos(\varphi)}{\varrho}, 0\right)
$$

a soustavu

$$
\begin{aligned}
0 &= \tfrac{\partial\varrho}{\partial z}\cos(\varphi) - \varrho\,\sin(\varphi)\tfrac{\partial\varphi}{\partial z}\\
0 &= \tfrac{\partial\varrho}{\partial z}\sin(\varphi) + \varrho\,\cos(\varphi)\tfrac{\partial\varphi}{\partial z}\\
1 &= \tfrac{\partial h}{\partial z},
\end{aligned}
$$

trojice

$$
\left(\frac{\partial\varrho}{\partial z}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \frac{\partial h}{\partial z}\right) = (0, 0, 1).
$$

Odtud pak zjevně

$$
\frac{\partial}{\partial x} = \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varrho} - \frac{\sin(\varphi)}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{\cos(\varphi)}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial h}.
$$

Dalším derivováním první z dvojice těchto rovnic podle x obdržíme druhou parciální derivaci

$$
\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos^2(\varphi)\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} - \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{\varrho}\frac{\partial^2}{\partial\varrho\partial\varphi} + \frac{\sin^2(\varphi)}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\sin^2(\varphi)}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}.
$$

Analogicky vypočteme

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \sin^2(\varphi)\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{\varrho}\frac{\partial^2}{\partial\varrho\partial\varphi} + \frac{\cos^2(\varphi)}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\cos^2(\varphi)}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho} - \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial h^2}.$$

Dosadíme-li do předpisu pro Laplaceův operátor vypočtené derivace, získáme

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial h^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}.$$

8.2.13 Příklad

Cílem tohoto příkladu je transformovat Laplaceův operátor

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

do sférických souřadnic definovaných pro $\varrho > 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$ a $\vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\}$ vztahy

$$\begin{aligned} x &= \varrho\cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ y &= \varrho\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ z &= \varrho\sin(\vartheta), \end{aligned} \tag{8.36}$$

Pro jacobián tohoto zobrazení platí vztah

$$\det\left(\frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{\mathcal{D}(\varrho,\varphi,\vartheta)}\right) = \begin{vmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) & -\varrho\sin(\vartheta)\cos(\varphi) & -\varrho\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) & -\varrho\sin(\vartheta)\sin(\varphi) & \varrho\cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) & \varrho\cos(\vartheta) & 0 \end{vmatrix} = -\varrho^2\cos(\vartheta) \neq 0,$$

a diskutovaná transformace $(x, y, z) = \Phi(\varrho, \varphi, \vartheta)$ je tudíž regulární na celé množině M a navíc také prostá. Přistupme nyní k samotné transformaci. Derivování vztahů (8.36) podle x vede na soustavu

$$\begin{aligned} 1 &= \cos(\vartheta)\cos(\varphi)\tfrac{\partial\varrho}{\partial x} - \varrho\sin(\vartheta)\cos(\varphi)\tfrac{\partial\vartheta}{\partial x} - \varrho\cos(\vartheta)\sin(\varphi)\tfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ 0 &= \cos(\vartheta)\sin(\varphi)\tfrac{\partial\varrho}{\partial x} - \varrho\sin(\vartheta)\sin(\varphi)\tfrac{\partial\vartheta}{\partial x} + \varrho\cos(\vartheta)\cos(\varphi)\tfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ 0 &= \sin(\vartheta)\tfrac{\partial\varrho}{\partial x} + \varrho\cos(\vartheta)\tfrac{\partial\vartheta}{\partial x}, \end{aligned}$$

jejímž řešením je uspořádaná trojice

$$\left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}, \frac{\partial\vartheta}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \left(\cos(\vartheta)\cos(\varphi), -\frac{\sin(\vartheta)\cos(\varphi)}{\varrho}, -\frac{\sin(\varphi)}{\varrho\cos(\vartheta)}\right).$$

Již procvičeným postupem budeme ještě řešit soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= \cos(\vartheta)\cos(\varphi)\tfrac{\partial\varrho}{\partial y} - \varrho\sin(\vartheta)\cos(\varphi)\tfrac{\partial\vartheta}{\partial y} - \varrho\cos(\vartheta)\sin(\varphi)\tfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ 1 &= \cos(\vartheta)\sin(\varphi)\tfrac{\partial\varrho}{\partial y} - \varrho\sin(\vartheta)\sin(\varphi)\tfrac{\partial\vartheta}{\partial y} + \varrho\cos(\vartheta)\cos(\varphi)\tfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ 0 &= \sin(\vartheta)\tfrac{\partial\varrho}{\partial y} + \varrho\cos(\vartheta)\tfrac{\partial\vartheta}{\partial y} \end{aligned}$$

s výsledkem

$$\left(\frac{\partial\varrho}{\partial y}, \frac{\partial\vartheta}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \left(\cos(\vartheta)\sin(\varphi), -\frac{\sin(\vartheta)\sin(\varphi)}{\varrho}, \frac{\cos(\varphi)}{\varrho\cos(\vartheta)}\right)$$

a soustavu

$$\begin{aligned}
0 &= \cos(\vartheta)\cos(\varphi)\tfrac{\partial\varrho}{\partial z} - \varrho\sin(\vartheta)\cos(\varphi)\tfrac{\partial\vartheta}{\partial z} - \varrho\cos(\vartheta)\sin(\varphi)\tfrac{\partial\varphi}{\partial z}\\
0 &= \cos(\vartheta)\sin(\varphi)\tfrac{\partial\varrho}{\partial z} - \varrho\sin(\vartheta)\sin(\varphi)\tfrac{\partial\vartheta}{\partial z} + \varrho\cos(\vartheta)\cos(\varphi)\tfrac{\partial\varphi}{\partial z}\\
1 &= \sin(\vartheta)\tfrac{\partial\varrho}{\partial z} + \varrho\cos(\vartheta)\tfrac{\partial\vartheta}{\partial z},
\end{aligned}$$

jejímž řešením je uspořádaná trojice

$$\left(\frac{\partial\varrho}{\partial z}, \frac{\partial\vartheta}{\partial z}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \left(\sin(\vartheta), \frac{\cos(\vartheta)}{\varrho}, 0\right).$$

Na tomto místě rozvažme, jak by bylo možno předešlý výpočet zautomatizovat aplikací Cramerova pravidla. Tak např.

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \frac{1}{-\varrho^2\cos(\vartheta)}\begin{vmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) & 1 & -\varrho\cos(\vartheta)\sin(\varphi)\\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) & 0 & \varrho\cos(\vartheta)\cos(\varphi)\\ \sin(\vartheta) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\sin(\vartheta)\cos(\varphi)}{\varrho}.$$

Podotýkáme, že člen $\frac{1}{-\varrho^2\cos(\vartheta)}$ představuje dělení determinantem soustavy, tedy jacobiánem sférických souřadnic. Užitím Cramerova pravidla by se předcházející výpočet redukoval na výpočet šesti jednoduchých determinantů vzniklých záměnou vybraného sloupku v jacobiánu příslušným jednotkovým sloupcovým vektorem. Po takovém výpočtu pak tedy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \cos(\vartheta)\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varrho} - \frac{\sin(\vartheta)\cos(\varphi)}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{\sin(\varphi)}{\varrho\cos(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\\
\frac{\partial}{\partial y} &= \cos(\vartheta)\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varrho} - \frac{\sin(\vartheta)\sin(\varphi)}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{\cos(\varphi)}{\varrho\cos(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\\
\frac{\partial}{\partial z} &= \sin(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{\cos(\vartheta)}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\vartheta}.
\end{aligned}$$

Pro získání druhých derivací je třeba právě uvedené vztahy znovu derivovat. Tak např. vypočteme, že

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos^2(\vartheta)\cos^2(\varphi)\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{\sin^2(\vartheta)\cos^2(\varphi)}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \frac{\sin^2(\varphi)}{\varrho^2\cos^2(\vartheta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} -\\
-\frac{\sin(2\vartheta)\cos^2(\varphi)}{\varrho}\frac{\partial^2}{\partial\varrho\partial\vartheta} - \frac{\sin(2\varphi)}{\varrho}\frac{\partial^2}{\partial\varrho\partial\varphi} + \frac{\sin(\vartheta)\sin(2\varphi)}{\varrho^2\cos(\vartheta)}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta\partial\varphi} + \frac{1}{\varrho}\left(\sin^2(\vartheta)\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right)\frac{\partial}{\partial\varrho} +\\
+\frac{1}{\varrho^2}\left(-\frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)}\sin^2(\varphi) + 2\sin(2\vartheta)\cos^2(\varphi)\right)\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\sin(2\varphi)}{\varrho^2\cos^2(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}.
\end{gathered}$$

Dále

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \cos^2(\vartheta)\sin^2(\varphi)\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{\sin^2(\vartheta)\sin^2(\varphi)}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \frac{\cos^2(\varphi)}{\varrho^2\cos^2(\vartheta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} +\\
+\frac{\sin(2\vartheta)\cos^2(\varphi)}{\varrho}\frac{\partial^2}{\partial\varrho\partial\vartheta} + \frac{\sin(2\varphi)}{\varrho}\frac{\partial^2}{\partial\varrho\partial\varphi} - \frac{\sin(\vartheta)\sin(2\varphi)}{\varrho^2\cos(\vartheta)}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta\partial\varphi} + \frac{1}{\varrho}\left(\sin^2(\vartheta)\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right)\frac{\partial}{\partial\varrho} +\\
+\frac{1}{\varrho^2}\left(-\frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)}\cos^2(\varphi) + 2\sin(2\vartheta)\sin^2(\varphi)\right)\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{\sin(2\varphi)}{\varrho^2\cos^2(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}
\end{gathered}$$

a konečně

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \sin^2(\vartheta)\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{\cos^2(\vartheta)}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \frac{\sin(2\vartheta)}{\varrho}\frac{\partial^2}{\partial\varrho\partial\vartheta} - \frac{\cos^2(\vartheta)}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho} - \frac{1}{\varrho^2}\sin(2\vartheta)\frac{\partial}{\partial\vartheta}.$$

Nyní již můžeme provést samotnou transformaci. Po dosazení vypočtených derivací získáme tvar

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{\varrho^2\cos^2(\vartheta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho} - \frac{\sin(\vartheta)}{\varrho^2\cos(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta},$$

který někdy bývá pro účely matematické fyziky upravován do tvaru

$$\Delta = \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^2\frac{\partial}{\partial\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2\cos(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\cos(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\varrho^2\cos^2(\vartheta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

8.2.14 Příklad

Nalezněme vlastní hodnoty a vlastní funkce operátoru

$$\widehat{L} = -\operatorname{div}\big(p(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad}\big) + q(\vec{x})$$

na kvádru $G = (0,a) \times (0,b) \times (0,c)$, je-li $p(\vec{x}) = 1$ a $q(\vec{x}) = 0$. Tato úloha je tedy úlohou na vlastní hodnoty záporně vzatého Laplaceova operátoru ve třídimenzionálním prostoru. My se zde budeme zaobírat řešením Dirichletovy okrajové úlohy, tj. budeme požadovat, aby všechny vlastní funkce na plášti kvádru G vymizely. Tento problém opět povede na fourierovskou separaci. Budeme tedy hledané vlastní funkce $u(x,y,z)$ předpokládat ve faktorizovaném tvaru $u(x,y,z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$. Rovnice

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \lambda u(u,x,y)$$

se tedy po dosazení

$$-\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \lambda$$

za $u(x,u,z)$ rozpadá dvě úlohy. Z rovnice

$$-\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \lambda =: \mu \tag{8.37}$$

detekujeme, že jednou ze zkoumaných rovnic je

$$-\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = (\lambda - \mu)Z(z).$$

Jde o rovnici s konstantními koeficienty, jejíž charakteristický polynom $\wp(\chi) = \chi^2 + (\lambda - \mu)$ má kořeny $\pm\sqrt{-\lambda+\mu}$. Označme $\varkappa := \sqrt{-\lambda+\mu}$. Pro vhodnou hodnotu $\varkappa$ budou tedy vlastními funkcemi funkce tvaru

$$Z(z) = \mathtt{C}_1 \mathtt{e}^{\varkappa z} + \mathtt{C}_2 \mathtt{e}^{-\varkappa z}.$$

Má-li systém těchto funkcí vyhovět podmínkám $Z(0) = Z(c) = 0$, pak musí konstanty $\mathtt{C}_1$, $\mathtt{C}_2$ splňovat rovnice

$$\mathtt{C}_1 + \mathtt{C}_2 = 0$$

$$\mathtt{C}_1 \mathtt{e}^{\varkappa c} - \mathtt{C}_2 \mathtt{e}^{-\varkappa c} = 0.$$

Tato homogenní soustava může být řešitelná pouze tehdy, je-li její determinant nulový (jak plyne z Frobeniovy věty z lineární algebry), t.j. platí-li

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mathtt{e}^{\varkappa c} & \mathtt{e}^{-\varkappa c} \end{vmatrix} = \mathtt{e}^{-\varkappa c} - \mathtt{e}^{\varkappa c} = 0.$$

Pro reálná $\varkappa$ má tato rovnice jediné řešení, a sice $\varkappa = 0$. Toto triviální řešení nás ale nezajímá, protože z teorie víme, že za daných podmínek nemůže být nula vlastním číslem této úlohy. Hledejme nyní $\varkappa \in \mathbf{C}$, jež řeší rovnici

$$\mathtt{e}^{2\varkappa c} = 1.$$

Tuto rovnici řeší hodnoty

$$\varkappa = \mathtt{i}\frac{k\pi}{c} \qquad (k \in \mathbf{Z}),$$

neboť $\mathtt{e}^{2k\pi\mathtt{i}} = \cos(2k\pi) + \mathtt{i}\sin(2k\pi) = 1$. Tím jsme nalezli vlastní hodnoty této úlohy ve tvaru

$$\lambda_k - \mu_k = -\varkappa^2 = \frac{k^2\pi^2}{c^2}, \tag{8.38}$$

kde $k \in \mathbf{N}$. Pro všechny tyto vlastní hodnoty platí rovnost $\mathtt{C}_1 = -\mathtt{C}_2$, a vlastními funkcemi úlohy jsou tudíž funkce

$$Z_k(z) = \mathtt{C}_1\left(\mathtt{e}^{\mathtt{i}\frac{k\pi z}{c}} - \mathtt{e}^{-\mathtt{i}\frac{k\pi z}{c}}\right) = \mathtt{A}_k \sin\left(\frac{k\pi z}{c}\right).$$

Ve druhé části budeme řešit úlohu

$$-\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \mu,$$

kterou znovu separujeme

$$-\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \mu =: \sigma.$$

Odtud

$$-\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = (\mu - \sigma)Y(y).$$

Opět jde o rovnici s konstantními koeficienty, jejíž charakteristický polynom $\wp(\chi) = \chi^2 + (\mu - \sigma)$ má kořeny $\pm\sqrt{-\mu+\sigma}$. Označme $\varkappa := \sqrt{-\mu+\sigma}$. Vlastní funkce budou při této notaci tudíž tvaru

$$Y(u) = \mathtt{D}_1\mathsf{e}^{\varkappa y} + \mathtt{D}_2\mathsf{e}^{-\varkappa y}.$$

Má-li systém těchto funkcí vyhovět dirichletovským okrajovým podmínkám $Y(0) = Y(b) = 0$, pak musí konstanty $\mathtt{D}_1$, $\mathtt{D}_2$ splňovat rovnice

$$\mathtt{D}_1 + \mathtt{D}_2 = 0$$

$$\mathtt{D}_1\mathsf{e}^{\varkappa b} - \mathtt{D}_2\mathsf{e}^{-\varkappa b} = 0.$$

Tato homogenní soustava může být řešitelná pouze tehdy, je-li

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mathsf{e}^{\varkappa b} & \mathsf{e}^{-\varkappa b} \end{vmatrix} = \mathsf{e}^{-\varkappa b} - \mathsf{e}^{\varkappa b} = 0.$$

Tuto rovnici řeší hodnoty

$$\varkappa = \mathtt{i}\frac{\ell\pi}{b} \qquad (\ell \in \mathbf{Z}).$$

Tím jsme nalezli vlastní hodnoty této úlohy ve tvaru

$$\mu_k - \sigma_k = -\varkappa^2 = \frac{\ell^2\pi^2}{b^2}, \tag{8.39}$$

kde $\ell \in \mathbf{N}$. Pro všechny tyto vlastní hodnoty platí rovnost $\mathtt{D}_1 = -\mathtt{D}_2$, a vlastními funkcemi této dílčí úlohy jsou tudíž funkce

$$Y_\ell(y) = \mathtt{D}_1\left(\mathsf{e}^{\mathtt{i}\frac{\ell\pi y}{b}} - \mathsf{e}^{-\mathtt{i}\frac{\ell\pi y}{b}}\right) = \mathtt{B}_\ell \sin\left(\frac{\ell\pi y}{b}\right).$$

Poslední z dílčích úloh, a sice

$$-\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \sigma X(x), \qquad X(0) = X(a) = 0$$

již řešíme zcela analogicky. Vlastními čísly jsou

$$\sigma_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2} \tag{8.40}$$

a vlastními funkcemi

$$X_n(x) = \mathtt{E}_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

Sloučíme-li vztahy (8.38), (8.39) a (8.40) můžeme celou úlohu uzavřít sdělením, že vlastními čísly záporně vzatého Laplaceova operátoru s Dirichletovou podmínkou na kvádru $G = (0,a)\times(0,b)\times(0,c)$ jsou čísla

$$\lambda_{k,\ell,n} = \frac{k^2\pi^2}{c^2} + \frac{\ell^2\pi^2}{b^2} + \frac{n^2\pi^2}{a^2} = \pi^2\left(\frac{k^2}{c^2} + \frac{\ell^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2}\right).$$

Příslušnými vlastními funkcemi jsou pak

$$u_{k,\ell,n}(x,y,z) = \mathtt{A}_{k,\ell,n}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\ell\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{k\pi z}{c}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{abc}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\ell\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{k\pi z}{c}\right),$$

$$\mathrm{Dom}\big(u_{k,\ell,n}\big) = \overline{G} = \langle 0,a\rangle \times \langle 0,b\rangle \times \langle 0,c\rangle.$$

8.2.15 Příklad

Nechť $\mathtt{R} > 0$ a $c > 0$ jsou zvoleny pevně. Nalezněme vlastní hodnoty a vlastní funkce operátoru

$$\widehat{L} = -\operatorname{div}\big(p(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad}\big) + q(\vec{x})$$

na válci

$$V = \big\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 < \mathtt{R}^2 \wedge 0 < z < c\big\},$$

je-li $p(\vec{x}) = 1$ a $q(\vec{x}) = 0$. Opět uvažujeme dirichletovskou okrajovou podmínku, což značí, že hledané vlastní funkce musejí na plášti válce V nabývat nulové hodnoty. Jelikož oblast V není separabilní, přejdeme do cylindrických souřadnic. V nich se válec V transformuje (skoro všude) na kvádr

$$O = \big\{(\varrho, \varphi, h) \in \mathbf{E}^3 : \varrho < \mathtt{R} \wedge 0 < \varphi < 2\pi \wedge 0 < h < c\big\}$$

a rovnice na vlastní hodnoty λ a vlastní funkce $u(x, y, z)$ (podle výsledku příkladu 8.2.12) na tvar

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho} = -\lambda u(\varrho, \varphi, h).$$

Vzhledem k tomu, že operátor této úlohy je separabilní, opět budeme předpokládat tvar vlastních funkcí v separované podobě $u(\varrho, \varphi, h) = R(\varrho)\Phi(\varphi)H(h)$. Odtud

$$-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\Phi}\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{H}\frac{\partial^2 H}{\partial h^2} - \frac{1}{R\varrho}\frac{\partial R}{\partial \varrho} = \lambda.$$

Protože se obě strany rovnice

$$-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\Phi}\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{R\varrho}\frac{\partial R}{\partial \varrho} = \frac{1}{H}\frac{\partial^2 H}{\partial h^2} + \lambda =: \mu$$

musejí rovnat konstantě (zde jsme ji označili μ), má první dílčí úloha následující podobu:

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial h^2} = (\lambda - \mu)H(h).$$

Jedná se zcela zjevně o rovnici s konstantními koeficienty, jejíž charakteristický polynom $\wp(\chi) = \chi^2 + (\lambda - \mu)$ má kořeny $\pm\sqrt{-\lambda + \mu}$. Označme $\varkappa := \sqrt{-\lambda + \mu}$. Pro vhodnou hodnotu $\varkappa$ budou tedy vlastními funkcemi funkce tvaru

$$Z(z) = \mathtt{C}_1 \mathrm{e}^{\varkappa z} + \mathtt{C}_2 \mathrm{e}^{-\varkappa z}.$$

Má-li systém těchto funkcí vyhovět podmínkám $H(0) = H(c) = 0$, pak musí konstanty $\mathtt{C}_1$, $\mathtt{C}_2$ splňovat rovnice

$$\mathtt{C}_1 + \mathtt{C}_2 = 0$$

$$\mathtt{C}_1 \mathrm{e}^{\varkappa c} - \mathtt{C}_2 \mathrm{e}^{-\varkappa c} = 0.$$

Tato homogenní soustava může být řešitelná pouze tehdy, je-li

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e}^{\varkappa c} & \mathrm{e}^{-\varkappa c} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-\varkappa c} - \mathrm{e}^{\varkappa c} = 0.$$

Pro reálná $\varkappa$ má tato rovnice jediné řešení, a sice $\varkappa = 0$. Toto triviální řešení nás ale nezajímá, protože z teorie víme, že za daných podmínek nemůže být nula vlastním číslem této úlohy. Hledejme nyní $\varkappa \in \mathbf{C}$, jež řeší rovnici

$$\mathrm{e}^{2\varkappa c} = 1.$$

Tuto rovnici řeší hodnoty

$$\varkappa = \mathtt{i}\frac{k\pi}{c} \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

Tím jsme nalezli vlastní hodnoty této partikulární úlohy ve tvaru

$$\lambda_k - \mu_k = -\varkappa^2 = \frac{k^2\pi^2}{c^2}, \tag{8.41}$$

kde $k \in \mathbf{N}$. Pro všechny tyto vlastní hodnoty platí rovnost $\mathtt{C}_1 = -\mathtt{C}_2$, a vlastními funkcemi úlohy jsou tudíž funkce

$$H_k(h) = \mathtt{A}_k \sin\left(\frac{k\pi h}{c}\right).$$

Dále

$$-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\Phi}\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{R\varrho}\frac{\partial R}{\partial \varrho} = -\frac{1}{R\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho\frac{\partial R}{\partial \varrho}\right) - \frac{1}{\Phi}\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \mu,$$

což dále odseparujeme. Protože

$$-\frac{\varrho}{R}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho\frac{\partial R}{\partial \varrho}\right) - \mu\varrho^2 = \frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} =: -\sigma.$$

Druhá partikulární úloha má tedy tuto podobu:

$$-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \sigma\,\Phi(\varphi).$$

Namísto okrajové podmínky je zde zapotřebí dodržet podmínku jednoznačnosti, tj. hledané azimutální složky $\Phi(\varphi)$ vlastní funkce $u(\varrho, \varphi, h)$ musejí vyhovovat rovnosti $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$. Není již pravděpodobně obtížné vyšetřit (v analogii k dřívějším výpočtům), že vlastními hodnotami jsou čísla $\sigma_\ell = \ell^2$ a vlastními funkcemi

$$\Phi(\varphi) = \mathtt{B}_\ell\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\varphi}, \quad (\ell \in \mathbf{Z}).$$

Poslední dílčí úlohou je tedy rovnice

$$-\frac{\varrho}{R}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho\frac{\partial R}{\partial \varrho}\right) = \mu\varrho^2 - \sigma.$$

Jedná se tedy o Besselovu rovnici

$$\varrho^2\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\varrho^2} + \varrho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varrho} + \left(\mu\varrho^2 - \sigma\right)R(\varrho) = 0$$

řešenou společně s podmínkami $R(\mathtt{R}) = 0$ a $R(0) \in \mathbf{R}$. Snadno se lze přesvědčit, že pro $\mu < 0$ nemá tato rovnice žádné relevantní řešení, zatímco pro $m > 0$ je možno hledané řešení vystopovat ve třídě funkcí

$$R(\varrho) = \mathtt{C}\mathcal{J}_\ell(\gamma\varrho) + \mathtt{D}\mathcal{Y}_\ell(\gamma\varrho),$$

kde $\gamma^2 = \mu$. Protože Besselova funkce $\mathcal{Y}_\ell(x)$ není omezená nule, je třeba, aby $\mathtt{D} = 0$. Z podmínky $R(\mathtt{R}) = 0$ pak vychází, že je nutné, aby

$$\mathtt{C}\mathcal{J}_\ell(\gamma\mathtt{R}) = 0.$$

Označíme-li kořeny rovnice $\mathcal{J}_\ell(x) = 0$ symbolicky jako $\omega_{\ell m}$, zjišťujeme, že pro parametr μ musí být naplněn vztah

$$\mu = \gamma^2 = \frac{\omega_{\ell m}^2}{\mathtt{R}^2}.$$

Odtud pak

$$R(\varrho) = \mathtt{C}\mathcal{J}_\ell\left(\frac{\omega_{\ell m}}{\mathtt{R}}\varrho\right).$$

Celý příklad tedy uzavíříme sumarizací, že vlastní hodnotami záporného Laplaceova operátoru definovaného s dirichletovskou okrajovou podmínku na válci V jsou čísla

$$\lambda_{k\ell m} = \frac{k^2\pi^2}{c^2} + \frac{\omega_{\ell m}^2}{\mathtt{R}^2}.$$

Vlastními funkcemi pak

$$u(\varrho, \varphi, h) = \mathtt{K}_{k\ell m}\,\mathcal{J}_\ell\left(\frac{\omega_{\ell m}}{\mathtt{R}}\varrho\right)\sin\left(\frac{k\pi h}{c}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\varphi}.$$

8.2.16 Příklad

Nechť je parametr $\mathtt{R} > 0$ zvolen pevně. Nalezněme vlastní hodnoty a vlastní funkce operátoru

$$\widehat{L} = -\mathrm{div}\big(p(\vec{x}) \cdot \mathrm{grad}\big) + q(\vec{x})$$

na kouli

$$B = \big\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < \mathtt{R}^2\big\},$$

je-li $p(\vec{x}) = 1$ a $q(\vec{x}) = 0$. Znovu uvažujeme dirichletovskou okrajovou podmínku, což značí, že hledané vlastní funkce musejí na množině $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = \mathtt{R}^2\big\}$ nabývat nulové hodnoty. Jelikož oblast V není separabilní, přejdeme do sférických souřadnic. V nich se koule B transformuje (skoro všude) na kvádr

$$O = \left\{(\varrho,\vartheta,\varphi) \in \mathbf{E}^3 : 0 < \varrho < \mathtt{R} \wedge -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2} \wedge 0 < \varphi < 2\pi\right\}$$

a rovnice na vlastní hodnoty λ a vlastní funkce $u(x,y,z)$ (podle výsledku příkladu 8.2.13) na tvar

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} - \frac{1}{\varrho^2\cos^2(\vartheta)}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{\sin(\vartheta)}{\varrho^2\cos(\vartheta)}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = \lambda u(\varrho,\vartheta,\varphi),$$

respektive

$$-\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho^2\frac{\partial u}{\partial \varrho}\right) - \frac{1}{\varrho^2\cos(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\cos(\vartheta)\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right) - \frac{1}{\varrho^2\cos^2(\vartheta)}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \lambda u(\varrho,\vartheta,\varphi).$$

Vzhledem k tomu, že operátor této úlohy je separabilní, opět budeme předpokládat tvar vlastních funkcí v separované podobě $u(\varrho,\vartheta,\varphi) = R(\varrho)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$. Odtud

$$-\frac{1}{R}\frac{\mathtt{d}^2 R}{\mathtt{d}\varrho^2} - \frac{1}{\Theta\varrho^2}\frac{\mathtt{d}^2\Theta}{\mathtt{d}\vartheta^2} - \frac{1}{\Phi}\frac{1}{\varrho^2\cos^2(\vartheta)}\frac{\mathtt{d}^2\Phi}{\mathtt{d}\varphi^2} - \frac{2}{\varrho R}\frac{\mathtt{d}R}{\mathtt{d}\varrho} - \frac{1}{\Theta}\frac{\sin(\vartheta)}{\varrho^2\cos(\vartheta)}\frac{\mathtt{d}\Theta}{\mathtt{d}\vartheta} = \lambda,$$

potažmo

$$-\frac{\varrho^2}{R}\frac{\mathtt{d}^2 R}{\mathtt{d}\varrho^2} - \frac{2\varrho}{R}\frac{\mathtt{d}R}{\mathtt{d}\varrho} - \lambda\varrho^2 = \frac{1}{\Theta}\frac{\mathtt{d}^2\Theta}{\mathtt{d}\vartheta^2} - \frac{1}{\Theta}\frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)}\frac{\mathtt{d}\Theta}{\mathtt{d}\vartheta} + \frac{1}{\Phi\cos^2(\vartheta)}\frac{\mathtt{d}^2\Phi}{\mathtt{d}\varphi^2} =: \mu.$$

Zajímavé je, že rovnici pro obě úhlové proměnné lze dále separovat, neboť

$$\frac{\cos^2(\vartheta)}{\Theta}\frac{\mathtt{d}^2\Theta}{\mathtt{d}\vartheta^2} - \frac{\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)}{\Theta}\frac{\mathtt{d}\Theta}{\mathtt{d}\vartheta} - \mu\cos^2(\vartheta) = -\frac{1}{\Phi}\frac{\mathtt{d}^2\Phi}{\mathtt{d}\varphi^2} := \nu.$$

Nejprve se tedy budeme zabývat rovnicí

$$\frac{\mathtt{d}^2\Phi}{\mathtt{d}\varphi^2} := \nu\,\Phi(\varphi).$$

pro azimutální složku. Vzhledem k požadavkům jednoznačnosti podobně jako v předešlých příkladech snadno detekujeme, že

$$\Phi(\varphi) = \mathtt{e}^{\mathtt{i}\ell\varphi}, \quad (\ell \in \mathbf{Z})$$

a odpovídající vlastní hodnoty jsou čísla $\nu = \ell^2$, kde $\ell \in \mathbf{N}$. Rovnice pro polární složku je tvaru

$$\frac{\cos^2(\vartheta)}{\Theta}\frac{\mathtt{d}^2\Theta}{\mathtt{d}\vartheta^2} - \frac{\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)}{\Theta}\frac{\mathtt{d}\Theta}{\mathtt{d}\vartheta} - \mu\cos^2(\vartheta) = \ell^2,$$

resp.

$$\cos(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\cos(\vartheta)\frac{\partial\Theta}{\partial\vartheta}\right) = \big(\ell^2 + \mu\sin^2(\vartheta)\big)\,\Theta(\vartheta). \tag{8.42}$$

Zaveďme nyní pro zjednodušení substituci $t = \sin(\vartheta)$. Pak tedy

$$\frac{\mathtt{d}t}{\mathtt{d}\vartheta} = \cos(\vartheta) = \sqrt{1-t^2}.$$

Rovnice (8.42) pak přechází do tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}\left((1-t^2)\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right) = \left(\frac{\ell^2}{1-t^2} + \mu\right)\Theta,$$

který koresponduje s Legendreovou diferenciální rovnicí

$$\big((1-x^2)y'\big)' + \left(\omega - \frac{\ell^2}{1-x^2}\right) y = 0,$$

resp.

$$(1-x^2)y' - 2xy'' + \left(\omega - \frac{\ell^2}{1-x^2}\right) y = 0.$$

Tato rovnice má řešení pouze tehdy, když $\omega = k(k+1)$, kde $k \in \mathbf{Z}$, $\ell \in \mathbf{Z}$ a $0 \leqslant |\ell| \leqslant |k|$. Pro $\ell = 0$ jsou řešením Legendreovy polynomy diskutované v úloze 1.6.13. Obecnými řešeními jsou přidružené Legendreovy polynomy

$$P_{k\ell}(x) = \frac{(1-x^2)^{\ell/2}}{(2\ell)!!} \frac{\mathtt{d}^{k+\ell}}{\mathtt{d}x^{k+\ell}} \big(x^2-1\big)^k.$$

Hledanými vlastními funkcemi polární složky vyšetřované vlastní funkce jsou tudíž funkce

$$\Theta(\vartheta) = P_{k\ell}\big(\sin(\vartheta)\big).$$

Koreposdující dílčí vlastní čísla jsou proto

$$\mu_{k\ell} = k(k+1), \qquad \big(0 \leqslant |\ell| \leqslant |k|\big).$$

Poslední, co zývá, je vyšetřit rovnici pro radiální část vlastních funkcí záporného Laplaceova operátoru. Ta je tvaru

$$-\frac{\varrho^2}{R}\frac{\mathtt{d}^2 R}{\mathtt{d}\varrho^2} - \frac{2\varrho}{R}\frac{\mathtt{d}R}{\mathtt{d}\varrho} - \lambda\varrho^2 = \mu$$

s tím, že hodnota přípustných čísel μ je již známa z předcházejících výpočtů. Po úpravě odsud dostáváme, že

$$\varrho^2 \frac{\mathtt{d}^2 R}{\mathtt{d}\varrho^2} + 2\varrho \frac{\mathtt{d}R}{\mathtt{d}\varrho} + \big(\lambda + k(k+1)\big) R(\varrho) = 0.$$

Substitucí $S(\varrho) = \sqrt{\varrho} R(\varrho)$ přejde tato rovnice na Besselovu diferenciální rovnici

$$\varrho^2 \frac{\mathtt{d}^2 S}{\mathtt{d}\varrho^2} + 2\varrho \frac{\mathtt{d}S}{\mathtt{d}\varrho} + \left(\lambda\varrho^2 + \left(k + \frac{1}{2}\right)^2\right) R(\varrho) = 0 \tag{8.43}$$

s okrajovými podmínkami $S(\mathtt{R}) = 0$ a $S(0) \in \mathbf{R}$. Pro $\lambda < 0$ má rovnice (8.43) řešení tvaru

$$S(\varrho) = \mathtt{C}\mathcal{I}_{k+1/2}\big(\sqrt{-\lambda}\varrho\big) + \mathtt{D}\mathcal{K}_{k+1/2}\big(\sqrt{-\lambda}\varrho\big),$$

kde $\mathcal{I}_\nu(x)$ a $\mathcal{K}_\nu(x)$ jsou modifikované Besselovy funkce prvního, resp. druhého druhu. Vzhledem k požadavku omezenosti musí být $\mathtt{D} = 0$, neboť modifikované Besselovy funkce druhého druhu mají v nule nekonečné limity. Z podmńky $S(\mathtt{R}) = 0$ dále plyne, že číslo $\sqrt{-\lambda}\mathtt{R}$ musí být kořenem algebraické rovnice

$$\mathcal{I}_{k+1/2}\big(\sqrt{\lambda}\mathtt{R}\big) = 0.$$

Tato rovnice však žádné kořeny nemá, neboť její definiční předpis (1.72) zavedený pomocí řady

$$\mathcal{I}_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

obsahuje pouze kladné členy. Varianta $\lambda < 0$ tedy nepřipadá do úvahy. Pro $\lambda = 0$ přejde rovnice (8.43) na Eulerovu diferenciální rovnici. Jejím řešením je sada funkcí

$$S(\varrho) = \mathtt{C}\varrho^{\ell+1/2} + \mathtt{D}\varrho^{-\ell-1/2}.$$

Vzhledem k požadavku omezenosti musí být opět $\mathtt{D} = 0$, ale ani tehdy nelze v rovnici $\mathtt{C}\mathtt{R}^{\ell+1/2}$ nalézt kořen. Proto nutně $\lambda > 0$. Tehdy jsou všemi řešeními rovnice (8.43) funkce

$$S(\varrho) = \mathtt{C}\mathcal{J}_{k+1/2}\big(\sqrt{\lambda}\varrho\big) + \mathtt{D}\mathcal{Y}_{k+1/2}\big(\sqrt{\lambda}\varrho\big),$$

kde $\mathcal{J}_\nu(x)$ a $\mathcal{Y}_\nu(x)$ jsou Besselovy funkce prvního, resp. druhého druhu. Vzhledem k požadavku omezenosti musí být znovu $\mathtt{D} = 0$, neboť Besselovy funkce $\mathcal{Y}_\nu(x)$ mají v nule nekonečné limity. Z podmínky $S(\mathtt{R}) = 0$ dále plyne, že číslo $\sqrt{\lambda}\,\mathtt{R}$ musí být kořenem algebraické rovnice

$$\mathcal{J}_{k+1/2}\big(\sqrt{\lambda}\,\mathtt{R}\big) = 0.$$

Tato rovnice již kořeny má. Označme je formálně jako ω_{km}. Odtud tedy

$$\lambda_{km} = \frac{\omega_{km}^2}{\mathtt{R}^2}, \qquad \big((k,m) \in \mathbf{N}^2\big).$$

Celou úlohu proto uzavíráme tvrzením, že vlastními hodnotami záporného Laplaceova operátoru definovaného s dirichletovskou okrajovou podmínku na kouli o poloměru $\mathtt{R}$ jsou čísla

$$\lambda_{k\ell m} = \frac{\omega_{km}^2}{\mathtt{R}^2},$$

kde $k \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$ a $\ell \in \{-k, -k+1, \ldots, 0, \ldots, k-1, k\}$. Vlastními funkcemi jsou pak

$$u(\varrho, \varphi, h) = \mathtt{K}_{k\ell m}\, \mathcal{J}_{k+1/2}\left(\frac{\omega_{km}}{\mathtt{R}}\varrho\right) P_{k\ell}\big(\sin(\vartheta)\big)\mathtt{e}^{\mathtt{i}\ell\varphi}.$$

Konstanty $\mathtt{K}_{k\ell m}$ zde pak garanrují normalizovatelnost těchto funkcí.

8.3 Okrajová úloha pro eliptickou rovnici

Po demonstraci hledání spekter eliptických diferenciálních operátorů můžeme nyní přistoupit k samotnému řešení eliptických parciálních diferenciálních rovnic.

8.3.1 Definice

Nechť je na omezené oblasti G zadán eliptický diferenciální operátor $\widehat{L}$ z definice 8.1.1. Pak *okrajovou úlohou na eliptickou diferenciální rovnici* rozumíme rovnici

$$\widehat{L}(u) = f(\vec{x})$$

zadanou společně s okrajovými podmínkami

$$\forall \vec{x} \in S: \qquad \alpha(\vec{x})u(\vec{x}) + \beta(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, \tag{8.44}$$

kde $f(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G) \cap \mathscr{L}_2(G)$ je funkce (tzv. *pravá strana*) definovaná na $\overline{G}$.

8.3.2 Definice

Podle typu okrajové podmínky (8.44) rozlišujeme dvě základní okrajové úlohy pro eliptickou rovnici, a sice tzv. *Dirichletovu úlohu*, je-li požadováno splnění podmínky $u(\vec{x})|_S = 0$, nebo *Neumannovu úlohu*, je-li požadováno splnění podmínky $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\big|_S = 0$.

8.3.3 Poznámka

Nejčastější okrajovou úlohou pro eliptickou diferenciální rovnici je *Sturmův-Liouvilleův problém*. Jemu bude věnována následující část textu. Řešíme tedy okrajovou úlohu

$$\widehat{L}(u) = -\big(p(x)u'\big)' + q(x)u = -p(x)u'' - p'(x)u' + q(x)u = f(x)$$

zadanou společně s podmínkami (8.4) a (8.5). Navíc budeme předpokládat, že $\lambda = 0$ není vlastní hodnotou Sturmova-Liouvilleova operátoru, tj. předpokládáme podle věty 8.1.14, že buď $q(x) \neq 0$ nebo $h_1 \neq 0$ nebo $\mathtt{H}_1 \neq 0$.

8.3.4 Věta

Nechť je zadán Sturmův-Liouvilleův operátor $\widehat{L}$ z definice 8.1.4, kde buď $q(x) \neq 0$ nebo $h_1 \neq 0$ nebo $\mathtt{H}_1 \neq 0$. Pak má Sturmův-Liouvilleův problém právě jediné řešení.

- za daných předpokladů není $\lambda = 0$ vlastní hodnotou operátoru $\widehat{L}$
- to vyplývá z věty 8.1.14
- homogenní rovnice $-\big(p(x)u'\big)' + q(x) = 0$ má tudíž jediné řešení, a to nulové
- proto bude mít i rovnice s pravou stranou jediné řešení
- doporučujeme čtenáři, aby korektně odůvodnil, proč tomu tak je

8.3.5 Věta

Nechť jsou naplněny předpoklady definice 8.1.4. Nechť navíc $q(x) \neq 0$ nebo $h_1 \neq 0$ nebo $\mathtt{H}_1 \neq 0$. Pak existují dvě nenulová řešení $v_1(x)$ a $v_2(x)$ diferenciální rovnice

$$-p(x)u'' - p'(x)u' + q(x)u = 0$$

taková, že platí

$$h_1 v_1(0) - h_2 v_1'(0) = 0 \quad \wedge \quad \mathtt{H}_1 v_2(\ell) + \mathtt{H}_2 v_2'(\ell) = 0.$$

Navíc pro jakákoliv taková řešení $v_1(x)$ a $v_2(x)$ platí, že jsou lineárně nezávislá na $(0, \ell)$.

Důkaz:

- to, že zmiňované funkce $v_1(x)$ a $v_2(x)$ skutečně existují je garantováno teorií obyčejných diferenciálních rovnic
- konkrétně jde o větu o jednoznačnosti (viz věta 4.4.16, str. 126 ve skriptech [11])
- předpokládejme pro spor, že existuje $\mathtt{C} \in \mathbf{R}$ tak, že $v_2(x) = \mathtt{C}\, v_1(x)$ na $G = (0, \ell)$
- pak ale funkce $v_1(x)$ splňuje obě podmínky (8.4) a (8.5)
- tedy $v_1(x) \in \mathrm{Dom}\big(\widehat{L}\big)$
- to ale značí, že $v_1(x)$ je vlastní funkcí operátoru $\widehat{L}$ příslušná vlastnímu číslu $\lambda = 0$
- to je ale spor s větou 8.1.14, resp. s poznámkou 8.3.3
- nula totiž nemůže být za daných podmínek vlastním číslem operátoru $\widehat{L}$

8.3.6 Věta

Nechť funkce $v_1(x)$ a $v_2(x)$ splňují předpoklady předešlé věty. Pak pro všechna $x \in \langle 0, \ell \rangle$ platí

$$p(x)W(x) = p(0)W(0) \neq 0,$$

kde $W(x) = W_{v_1,v_2}(x)$ je Wronského determinant funkcí $v_1(x)$ a $v_2(x)$.

Důkaz:

- nechť tedy $v_1(x)$ a $v_2(x)$ jsou řešení diferenciální rovnice $-p(x)u'' - p'(x)u' + q(x)u = 0$ taková, že platí $h_1 v_1(0) - h_2 v_1'(0) = 0$, resp. $\mathtt{H}_1 v_2(\ell) + \mathtt{H}_2 v_2'(\ell)$
- v předcházející větě bylo dokázáno, že $v_1(x)$, $v_2(x)$ jsou lineárně nezávislé
- jejich wronskián je tudíž na $\langle 0, \ell \rangle$ nenulový, tj.

$$W(x) = \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

- prokážeme, že součin $p(x)W(x)$ neměnní pro libovolné $x \in \langle 0, \ell\rangle$ hodnotu
- pro funkce $v_1(x)$ a $v_2(x)$ dle předešlého platí rovnosti

$$p'(x)v_1'(x) + p(x)v_1''(x) = q(x)v_1(x),$$

$$p'(x)v_2'(x) + p(x)v_2''(x) = q(x)v_2(x)$$

- odtud

$$\begin{aligned}(p(x)W(x))' &= (p(x)v_1(x)v_2'(x) - p(x)v_1'(x)v_2(x))' = \\ &= p'v_1v_2' + pv_1'v_2' + pv_1v_2'' - p'v_1'v_2 - pv_1''v_2 - pv_1'v_2 = v_1\left[p'v_2' + pv_2''\right] - v_2\left[p'v_1' + pv_1''\right] = \\ &= q(x)v_1(x)v_2(x) - q(x)v_1(x)v_2(x) = 0\end{aligned}$$

- tedy součin $p(x)W(x)$ je konstantní všude na $\langle 0, \ell\rangle$
- za uvedenou konstantu zvolíme hodnotu např. $p(0)W(0)$
- uzavíráme, že $\forall x \in \langle 0, \ell\rangle : \; p(x)W(x) = p(0)W(0)$
- vzhledem k tomu, že $p(x) > 0$ a wronskián lineárně nezávislých funkcí musí být nutně nenulový, lze navíc tvrdit, že $p(0)W(0) \neq 0$

8.3.7 Příklad

Nyní přistoupíme k řešení Sturmova-Liouvilleova problému. Rovnici

$$-\left(p(x)u'(x)\right)' + q(x)u(x) = f(x)$$

budeme řešit metodou variace konstant. Tím získáme podle věty 4.4.27 ve skriptech [11] řešení tvaru

$$u(x) = F_1(x)v_1(x) + F_2(x)v_2(x),$$

kde funkce $F_1(x)$ a $F_2(x)$ vyhovují soustavě

$$F_1'(x)v_1(x) + F_2'(x)v_2(x) = 0$$

$$F_1'(x)v_1'(x) + F_2'(x)v_2'(x) = -\frac{f(x)}{p(x)}$$

a funkce $v_1(x)$ a $v_2(x)$ jsou zvoleny podle vět 8.3.5 a 8.3.6. Z Cramerova pravidla plyne

$$F_1'(x) = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 0 & v_2(x) \\ -\frac{f(x)}{p(x)} & v_2'(x)\end{vmatrix} = \frac{f(x)v_2(x)}{p(0)W(0)},$$

$$F_2'(x) = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} v_1(x) & 0 \\ v_1'(x) & -\frac{f(x)}{p(x)}\end{vmatrix} = -\frac{f(x)v_1(x)}{p(0)W(0)}.$$

Aktuálně je třeba splnit podmínky (8.4) a (8.5). Podle nich

$$\begin{aligned}0 &= h_1\big[F_1(0)v_1(0) + F_2(0)v_2(0)\big] - h_2\big[F_1'(0)v_1(0) + F_1(0)v_1'(0) + F_2'(0)v_2(0) + F_2(0)v_2'(0)\big] = \\ &= F_1(0)\big[h_1v_1(0) - h_2v_1'(0)\big] + F_2(0)\big[h_1v_2(0) - h_2v_2'(0)\big] = F_2(0)\big[h_1v_2(0) - h_2v_2'(0)\big].\end{aligned}$$

Odsud plyne, že $F_2(0) = 0$. Podobně

$$\begin{aligned}0 &= H_1\big[F_1(\ell)v_1(\ell) + F_2(\ell)v_2(\ell)\big] + H_2\big[F_1'(\ell)v_1(\ell) + F_1(\ell)v_1'(\ell) + F_2'(\ell)v_2(\ell) + F_2(\ell)v_2'(\ell)\big] = \\ &= F_1(\ell)\big[H_1v_1(\ell) - H_2v_1'(\ell)\big] + F_2(\ell)\big[H_1v_2(\ell) - H_2v_2'(\ell)\big] = F_1(\ell)\big[H_1v_1(\ell) - H_2v_1'(\ell)\big].\end{aligned}$$

Pro splnění podmínky $F_1(\ell)\big[H_1 v_1(\ell) - H_2 v_1'(\ell)\big] = 0$ je nutné, aby $F_1(\ell) = 0$. Integrací funkcí $F_1'(x)$ a $F_2'(x)$ za podmínek $F_2(0) = F_1(\ell) = 0$ dostáváme

$$F_1(x) = -\frac{1}{p(0)W(0)} \int_x^\ell f(y) v_2(y)\,\mathrm{d}y$$

$$F_2(x) = -\frac{1}{p(0)W(0)} \int_0^x f(y) v_1(y)\,\mathrm{d}y.$$

Konečné řešení Sturmova-Liouvilleova problému má tedy tvar

$$u(x) = -\frac{1}{p(0)W(0)} \left[v_2(x) \int_0^x f(y) v_1(y)\,\mathrm{d}y + v_1(x) \int_x^\ell f(y) v_2(y)\,\mathrm{d}y \right].$$

Toto řešení může být zapsáno do sumarizovaného tvaru

$$u(x) = \int_0^\ell \mathcal{G}(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y,$$

kde

$$\mathcal{G}(x,y) = -\frac{1}{p(0)W(0)} \begin{cases} v_1(x) v_2(y) & 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \ell \\ v_2(x) v_1(x) & 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \ell. \end{cases}$$

8.3.8 Věta

Řešení Sturmova-Liouvilleova problému je tvaru

$$u(x) = \int_0^\ell \mathcal{G}(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y,$$

kde

$$\mathcal{G}(x,y) = -\frac{1}{p(0)W(0)} \begin{cases} v_1(x) v_2(y) & \ldots \quad 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \ell \\ v_2(x) v_1(y) & \ldots \quad 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \ell. \end{cases} \tag{8.45}$$

Důkaz:

- plyne z příkladu 8.3.7

8.3.9 Definice

Funkci $\mathcal{G}(x,y)$ z předešlé věty nazýváme *Greenovou funkcí* Sturmova-Liouvilleova operátoru $\widehat{L}$.

8.3.10 Důsledek

Jestliže $\lambda = 0$ není vlastní hodnotou Sturmova-Liouvilleova operátoru $\widehat{L}$, pak řešení Sturmova-Liouvilleova problému je dáno vztahem

$$u(x) = \int_0^\ell \mathcal{G}(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y,$$

kde $\mathcal{G}(x,y)$ je Greenova funkce (8.45) operátoru $\widehat{L}$.

8.3.11 Poznámka

Tvar řešení Sturmova-Liouvilleova problému zůstává v platnosti také pro případ, kdy $q(x) < 0$.

8.3.12 Věta

Pro Greenovu funkci (8.45) Sturmova-Liouvilleova problému platí následující vlastnosti:

- je reálná a spojitá v uzavřeném čtverci $M = \langle 0, \ell\rangle \times \langle 0, \ell\rangle$
- je třídy $\mathscr{C}^2(0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \ell)$
- je třídy $\mathscr{C}^2(0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \ell)$
- je symetrická na M, tj. $\mathcal{G}(x,y) = \mathcal{G}(y,x)$
- mimo diagonálu $x = y$ vyhovuje homogenní rovnici $\widehat{L}\mathcal{G}(x,y) = 0$
- na diagonále $x = y$ má její derivace $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}$ skok délky $-\frac{1}{p(y)}$, tj pro $y \in \langle 0, \ell\rangle$ je

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(y+\varepsilon, y) - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(y-\varepsilon, y)\right) = -\frac{1}{p(y)}$$

- na stranách čtverce M splňuje pro $y \in \langle 0, \ell\rangle$ okrajové podmínky (8.4) a (8.5) tvaru

$$h_1\,\mathcal{G}(0,y) - h_2\,\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(0,y) = 0, \quad \mathtt{H}_1\,\mathcal{G}(\ell,y) + \mathtt{H}_2\,\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(\ell,y) = 0.$$

Důkaz:

- z teorie obyčejných diferenciálních rovnic je známo, že za daných předpokladů má diferenciální rovnice $-(pu')' + qu = 0$ jednoparametrickou množinu řešení $v_1(x) = \mathtt{C}_1 u_1(x)$, které splňují podmínku v bodě $x = 0$, a jednoparametrickou množinu řešení $v_2(x) = \mathtt{C}_2 u_2(x)$, které splňují podmínku v bodě $x = \ell$
- přitom se v obou případech jedná o řešení třídy $\mathscr{C}^2\big(\langle 0, \ell\rangle\big)$
- protože jsou všechny funkce a konstanty reálné, lze vybrat řešení $u_1(x)$ a $u_2(x)$ tak, že jsou reálná
- protože podle předpokladu není nula vlastním číslem, jsou tato řešení lineárně nezávislá, a tedy jejich wronskián $W_{u_1,u_2}(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)$ je reálný
- jsou-li $v_1(x)$ a $v_2(x)$ dvě libovolná nenulová řešení, která splňují uvedené podmínky, je $v_1(x) = \mathtt{C}_1 u_1(x)$ a $v_2(x) = \mathtt{C}_2 u_2(x)$, kde $\mathtt{C}_1$ a $\mathtt{C}_2$ jsou libovolné nenulové konstanty
- protože pro wronskián těchto řešení je $W(x) = v_1(x)v_2'(x) - v_1'(x)v_2(x) = \mathtt{C}_1\mathtt{C}_2 W_{u_1,u_2}(x)$, je Greenova funkce korektně definována a její hodnota nezávisí na výběru funkcí $v_1(x)$ a $v_2(x)$, které splňují dané podmínky
- proto je Greenova funkce reálná a třídy $\mathscr{C}^2$ v obou uzavřených trojúhelnících $T_1 = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \ell\big\}$, a $T_2 = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \ell\big\}$
- symetrie Greenovy funkce plyne ihned z definičního vztahu (8.45)
- páté tvrzení plyne z toho, že mimo diagonálu $x = y$ jsou splněny rovnosti

$$\widehat{L}_x\mathcal{G}(x,y) = -\frac{v_2(y)}{p(0)W(0)}\widehat{L}_x(v_1) = 0 \quad \text{pro} \quad 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \ell,$$

$$\widehat{L}_x\mathcal{G}(x,y) = -\frac{v_1(y)}{p(0)W(0)}\widehat{L}_x(v_2) = 0 \quad \text{pro} \quad 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \ell$$

- na diagonále $x = y$ pak platí je

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(y+\varepsilon, y) = -\frac{v_2'(y)v_1(y)}{p(0)W(0)},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(y-\varepsilon, y) = -\frac{v_1'(y)v_2(y)}{p(0)W(0)}$$

- proto

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(y+\varepsilon, y) - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(y-\varepsilon, y)\right) = -\frac{v_2'(y)v_1(y) - v_1'(y)v_2(y)}{p(0)W(0)} = -\frac{W(y)}{p(0)W(0)} = -\frac{W(y)}{p(y)W(y)} = -\frac{1}{p(y)}$$

- z konstrukce Greenovy funkce dále plyne, že

$$h_1\,\mathcal{G}(0,y) - h_2\,\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial x}(0,y) = -\frac{v_2(0)}{p(0)W(0)}\big(h_1v_1(0) - h_2v_1'(0)\big) = 0,$$

$$\mathtt{H}_1\,\mathcal{G}(\ell,y)\mathtt{H}_2\,\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial x}(\ell,y) = -\frac{v_1(\ell)}{p(0)W(0)}\big(\mathtt{H}_1v_2(\ell) + \mathtt{H}_2v_2'(\ell)\big) = 0$$

8.3.13 Poznámka

Zbývá ještě zdůvodnit, proč jsme se při řešení Sturmova-Liouvilleova problému vyhnuli případům, kdy je vlastní hodnotou Sturmova-Liouvilleova operátoru nula. Kdyby totiž $\lambda = 0$ byla vlastním číslem, existovala by nenulová funkce $u(x)$ taková, že

$$\widehat{L}(u) = 0, \quad h_1u(0) - h_2u'(0) = 0, \quad \mathtt{H}_1u(\ell) + \mathtt{H}_2u'(\ell) = 0.$$

Z první podmínky plyne, že $v_1(x) = \mathtt{C}_1u(x)$ a z druhé pak $v_2(x) = \mathtt{C}_2u(x)$, kde $\mathtt{C}_1, \mathtt{C}_2$ jsou libovolné nenulové konstanty. Ale pak by funkce $v_1(x)$, $v_2(x)$ byly lineárně závislé a jejich wronskián by byl roven nule.

8.3.14 Věta

Nechť $\mathcal{G}(x,y)$ je Greenova funkce Sturmovy-Liouvilleovy úlohy 8.3.3 a $\varphi(x) : \langle 0,\ell\rangle \mapsto \mathbf{R}$ libovolná hladká funkce, pro jejíž nosič platí inkluze $\operatorname{supp}(\varphi) \subset (0,\ell)$. Pak

$$\int_0^\ell \mathcal{G}(x,y)\widehat{L}(\varphi)\,\mathrm{d}x = \varphi(y).$$

Důkaz:

- nejprve si uvědomíme, že

$$\int_0^\ell \mathcal{G}(x,y)\widehat{L}(\varphi)\,\mathrm{d}x = -\int_0^y \mathcal{G}(x,y)\big(p(x)\varphi'(x)\big)'\,\mathrm{d}x - \int_y^\ell \mathcal{G}(x,y)\big(p(x)\varphi'(x)\big)'\,\mathrm{d}x + \int_0^\ell \mathcal{G}(x,y)q(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

- z inkluze $\operatorname{supp}(\varphi) \subset (0,\ell)$ také ihned vyplývá, že $\varphi(0) = \varphi(\ell) = \varphi'(0) = \varphi'(\ell) = 0$
- odtud pak (po použití metody per partes)

$$\int_0^y \mathcal{G}(x,y)\big(p(x)\varphi'(x)\big)'\,\mathrm{d}x = \mathcal{G}(y,y)p(y)\varphi'(y) - \int_0^y \frac{\partial\mathcal{G}(x,y)}{\partial x}p(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \mathcal{G}(y,y)p(y)\varphi'(y) - \lim_{\varepsilon\to 0_+}\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial x}(y-\varepsilon,y)\right)p(y)\varphi(y) + \int_0^y \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial\mathcal{G}(x,y)}{\partial x}\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

- a podobně rovněž

$$\int_y^\ell \mathcal{G}(x,y)\big(p(x)\varphi'(x)\big)'\,\mathrm{d}x = \mathcal{G}(y,y)p(y)\varphi'(y) - \int_y^\ell \frac{\partial\mathcal{G}(x,y)}{\partial x}p(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \mathcal{G}(y,y)p(y)\varphi'(y) + \lim_{\varepsilon\to 0_+}\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial x}(y+\varepsilon,y)\right)p(y)\varphi(y) + \int_y^\ell \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial\mathcal{G}(x,y)}{\partial x}\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

- po dosazení pak (aplikací dvou tvrzení z věty 8.3.12) vidíme, že

$$\int_0^\ell \mathcal{G}(x,y)\widehat{L}(\varphi)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial x}(y-\varepsilon,y) - \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial x}(y+\varepsilon,y)\right)p(y)\varphi(y) + \int_0^\ell \varphi(x)\widehat{L}\big(\mathcal{G}(x,y)\big)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{p(y)}{p(y)}\varphi(y) + \int_0^\ell 0\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(y)$$

8.3.15 Věta

Jestliže $\lambda = 0$ není vlastní hodnotou Sturmova-Liouvilleova operátoru $\widehat{L}$ na oblasti $G = (\ell_1, \ell_2)$, pak řešení Sturmova-Liouvilleova problému na vlastní hodnoty a vlastní funkce vyhovující standardním okrajovým podmínkám

$$h_1 u(\ell_1) - h_2 u'(\ell_1) = 0, \tag{8.46}$$
$$\mathtt{H}_1 u(\ell_2) + \mathtt{H}_2 u'(\ell_2) = 0 \tag{8.47}$$

je dáno vztahem

$$u(x) = \int_{\ell_1}^{\ell_2} \mathcal{G}(x,y) f(y)\, \mathtt{d}y,$$

kde

$$\mathcal{G}(x,y) = -\frac{1}{p(\ell_1)W(\ell_1)} \begin{cases} v_1(x)v_2(y) & \ldots \quad \ell_1 \leqslant x \leqslant y \leqslant \ell_2 \\ v_2(x)v_1(y) & \ldots \quad \ell_1 \leqslant y \leqslant x \leqslant \ell_2. \end{cases}$$

Funkce $v_1(x)$, resp. $v_2(x)$ jsou přitom libovolnými nenulovými řešeními rovnice $\widehat{L}(v) = 0$ vyhovujícími podmínkám $h_1 v_1(\ell_1) - h_2 v_1'(\ell_1) = 0$, resp. $\mathtt{H}_1 v_2(\ell_2) + \mathtt{H}_2 v_2'(\ell_2) = 0$.

Důkaz:

- jedná se de facto o poměrně snadnou modifikaci postupu prováděného výše (v rámci příkladu 8.3.7)

8.3.16 Příklad

Řešme nyní Sturmovu-Liouvilleovu okrajovou úlohu

$$-\left(p(x)\frac{\mathtt{d}u}{\mathtt{d}x}\right)' + q(x)u(x) = \frac{1}{x},$$

kde $G = (1, e)$, $p(x) = x$ a $q(x) = -\frac{\pi^2}{x}$, zadanou společně s podmínkami

$$\pi u(1) - u'(1) = 0, \quad \pi u(\mathsf{e}) + \mathsf{e}\, u'(\mathsf{e}) = 0.$$

Nejprve bude podle obecně platného schématu nalezneme funkci $v_1(x)$ tak, že $\widehat{L}(v_1) = 0$, tj. $x^2 v_1'' + x v_1' + x\pi^2 = 0$. Tato diferenciální rovnice je Eulerovou diferenciální rovnicí. Proto ji řešíme substitucí $x = \mathsf{e}^t$, která rovnici převede na rovnici pro neznámou funkci $v_1(t)$. Protože

$$v_1'(x) = \frac{\mathtt{d}v_1}{\mathtt{d}x} = \frac{\mathtt{d}v_1}{\mathtt{d}t}\frac{\mathtt{d}t}{\mathtt{d}x} = \dot{v}_1 \frac{1}{x}$$

$$v_1''(x) = \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}x}\left(\dot{v}_1 \frac{1}{x}\right) = \frac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}t}(\dot{v}_1)\frac{\mathtt{d}t}{\mathtt{d}x}\frac{1}{x} + \dot{v}_1\left(\frac{1}{x}\right)' = \ddot{v}_1\frac{1}{x^2} - \dot{v}_1\frac{1}{x^2},$$

přejde zkoumaná rovnice substitucí $x = \mathsf{e}^t$ v rovnici $\ddot{v}_1 + v_1\pi^2 = 0$. Tehdy se jedná o rovnici s konstantními koeficienty, jejíž charakteristický polynom $\lambda^2 + \pi^2$ má kořeny $\lambda_1 = \mathtt{i}\pi$ a $\lambda_2 = -\mathtt{i}\pi$. Proto je reálným fundamentálním systémem takové rovnice množina $\{\cos(\pi t), \sin(\pi t)\}$. Všechna řešení rovnice $\ddot{v}_1 + v_1\pi^2 = 0$ jsou tudíž tvaru $v_1(t) = \mathtt{C}_1\cos(\pi t) + \mathtt{C}_2\sin(\pi t)$. Obecným řešením rovnice $x^2 v_1'' + x v' + x\pi^2 = 0$ je tedy systém funkcí $v_1(x) = \mathtt{C}_1\cos\big(\pi\ln(x)\big) + \mathtt{C}_2\sin\big(\pi\ln(x)\big)$, mezi nimiž leží i taková řešení, pro která je naplněna podmínka $v_1(1) - v_1'(1) = 0$. Tato podmínka je naplněna právětehdy, když $\mathtt{C}_1 = \pi\mathtt{C}_2$. Odtud vidíme, že např. funkce

$$v_1(x) = \pi\cos\big(\pi\ln(x)\big) + \sin\big(\pi\ln(x)\big)$$

je oním hledaným řešením. Ve druhé části úlohy budeme řešit rovnici $x^2 v_2'' + x v_2' + x\pi^2 = 0$ za podmínky $\pi v_2(\mathsf{e}) + \mathsf{e}\, v_2'(\mathsf{e}) = 0$. Jelikož je (stejně jako v úvodu) obecným řešením této rovnice systém funkcí $v_2(x) = \mathtt{C}_1\cos\big(\pi\ln(x)\big) + \mathtt{C}_2\sin\big(\pi\ln(x)\big)$, postačí v něm nyní naleznout takové funkce, pro které $\pi v_2(\mathsf{e}) + \mathsf{e}\, v_2'(\mathsf{e}) = 0$, tj. $\mathtt{C}_2 = -\mathtt{C}_1$. Odtud

$$v_2(x) = \cos\big(\pi\ln(x)\big) - \sin\big(\pi\ln(x)\big).$$

Wronskiánem funkcí $v_1(x)$ a $v_2(x)$ je funkce

$$W(x) = \frac{\pi}{x}\begin{vmatrix} \pi\cos\big(\pi\ln(x)\big) + \sin\big(\pi\ln(x)\big) & \cos\big(\pi\ln(x)\big) - \sin\big(\pi\ln(x)\big) \\ -\pi\sin\big(\pi\ln(x)\big) + \cos\big(\pi\ln(x)\big) & -\cos\big(\pi\ln(x)\big) - \cos\big(\pi\ln(x)\big) \end{vmatrix} = -2\frac{\pi}{x},$$

z čehož detekujeme, že $p(x)W(x) = p(0)W(0) = -2\pi$. Podle vztahu (8.45) (v lehké obměně) pak tedy

$$\mathcal{G}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\begin{cases} \Big[\pi\cos\big(\pi\ln(x)\big) + \sin\big(\pi\ln(x)\big)\Big]\Big[\cos\big(\pi\ln(y)\big) - \sin\big(\pi\ln(y)\big)\Big] & \dots\ 1 \leqslant x \leqslant y \leqslant \mathsf{e} \\ \Big[\cos\big(\pi\ln(x)\big) - \sin\big(\pi\ln(x)\big)\Big]\Big[\pi\cos\big(\pi\ln(y)\big) + \sin\big(\pi\ln(y)\big)\Big] & \dots\ 1 \leqslant y \leqslant x \leqslant \mathsf{e}. \end{cases}$$

Pro celkové řešení zadané Sturmovy-Liouvilleovy okrajové úlohy pak máme

$$u(x) = \int_1^{\mathsf{e}} \mathcal{G}(x,y)f(y)\,\mathtt{d}y = \frac{1}{2\pi}\Big[\cos\big(\pi\ln(x)\big) - \sin\big(\pi\ln(x)\big)\Big]\int_1^x \frac{\pi\cos\big(\pi\ln(y)\big) + \sin\big(\pi\ln(y)\big)}{y}\mathtt{d}y +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\Big[\pi\cos\big(\pi\ln(x)\big) + \sin\big(\pi\ln(x)\big)\Big]\int_x^{\mathsf{e}} \frac{\cos\big(\pi\ln(y)\big) - \sin\big(\pi\ln(y)\big)}{y}\mathtt{d}y = \left| \begin{array}{c} t = \ln(y) \\ \mathtt{d}t = \frac{1}{y}\mathtt{d}y \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\cos\big(\pi\ln(x)\big) - \sin\big(\pi\ln(x)\big)}{2\pi}\int_0^{\ln(x)}\big(\pi\cos(\pi t) + \sin(\pi t)\big)\mathtt{d}t + \frac{\pi\cos\big(\pi\ln(x)\big) + \sin\big(\pi\ln(x)\big)}{2\pi}\int_{\ln(x)}^1\big(\cos(\pi t) - \sin(\pi t)\big)\mathtt{d}t =$$

$$= \frac{\cos\big(\pi\ln(x)\big) - \sin\big(\pi\ln(x)\big)}{2\pi^2}\Big[\pi\sin(\pi t) - \cos(\pi t)\Big]_0^{\ln(x)} + \frac{\pi\cos\big(\pi\ln(x)\big) + \sin\big(\pi\ln(x)\big)}{2\pi^2}\Big[\sin(\pi t) + \cos(\pi t)\Big]_{\ln(x)}^1 =$$

$$= \frac{\cos\big(\pi\ln(x)\big) - \sin\big(\pi\ln(x)\big)}{2\pi^2}\Big[\pi\sin\big(\pi\ln(x)\big) - \cos\big(\pi\ln(x)\big) - 1\Big] +$$

$$+ \frac{\pi\cos\big(\pi\ln(x)\big) + \sin\big(\pi\ln(x)\big)}{2\pi^2}\Big[-1 - \sin\big(\pi\ln(x)\big) - \cos\big(\pi\ln(x)\big)\Big] = -\frac{1}{2\pi^2}(1+\pi)\Big(1 + \cos\big(\pi\ln(x)\big)\Big).$$

Hledaným řešením řešené Sturmovy-Liouvilleovy okrajové úlohy je tedy funkce

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi^2}(1+\pi)\Big(1 + \cos\big(\pi\ln(x)\big)\Big).$$

Literatura

[1] J. Blank, P. Exner, M. Havlíček: *Lineární operátory v kvantové fyzice,* Karolinum, Praha 1993

[2] Č. Burdík, O. Navrátil: *Rovnice matematické fyziky*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2008

[3] B.M. Budak, A.A. Samarskij, A.N. Tichonov: *Sbornik zadač po matematičeskoj fizike,* GITTL, Moskva 1956

[4] P. Čihák, *Matematická analýza pro fyziky V,* Matfyzpress, Praha 2003

[5] P. Doktor: *Příklady z matematické analýzy VI – parciální diferenciální rovnice,* SPN, Praha 1983

[6] M. Dont: *Úvod do parciálních diferenciálních rovnic,* Vydavatelství ČVUT, Praha 1997

[7] J. Fořt, J. Neustupa: *Parciální diferenciální rovnice,* Vydavatelství ČVUT, Praha 2000

[8] V. Jarník: *Integrální počet II,* Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1955

[9] F. Jirásek: *Funkce komplexní proměnné a Laplaceova transformace,* Ediční středisko ČVUT, Praha 1983

[10] T. Hobza: *Matematická statistika,* http://tjn.fjfi.cvut.cz/∼hobza/MAST/mast.pdf (2007)

[11] M. Krbálek: *Matematická analýza III (třetí přepracované vydání)*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2011

[12] M. Krbálek: *Matematická analýza IV (druhé přepracované vydání)*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2009

[13] M. Krbálek: *Úlohy matematické fyziky*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2008

[14] J. Kopáček, *Příklady z matematiky pro fyziky V,* Matfyzpress, Praha 2003

[15] J. Kopáček, *Matematická analýza pro fyziky IV,* Matfyzpress, Praha 2003

[16] J. Moravčík: *Matematika-vybrané části III (Špeciálne funkcie, rovnice matematické fyziky),* Alfa, Bratislava 1984

[17] Z. Pírko a J. Veit: *Laplaceova transformace (základy teorie a užití v elektrotechnice),* SNTL, Praha 1970

[18] L. Schwartz: *Mathematics for the physical sciences,* Rev. ed. Paris: Hermann, Addison-Wesley, 1966

[19] P. Šťovíček: *Metody matematické fyziky I - Teorie zobecněných funkcí,* Česká Technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2006

[20] M. Virius: *Cvičení z metod matematické fyziky I,* Ediční středisko ČVUT, Praha 1988

[21] M. Virius: *Cvičení z metod matematické fyziky II,* Ediční středisko ČVUT, Praha 1991

[22] M. Virius: *Aplikace statistické fyziky – Metoda Monte Carlo,* Vydavatelství ČVUT, Praha 1998

[23] V.S. Vladimirov: *Uravnenija matematičeskoj fiziky,* Nauka, Moskva 1988

[24] V.S. Vladimirov: *Sbornik zadač po uravnenijam matematičeskoj fiziky,* Nauka, Moskva 1974

[25] V.S. Vladimirov: *Equation of Mathematical Physics,* Marcel Dekker, New York 1971

[26] C. Zuily: *Problems in distributions and partial differential equations,* Hermannn, Paříž 1988

Rejstřík