Obsah

Kapitola 1

Posloupnosti a řady funkcí více proměnných

1.1 Co zpracovat:

1. je ale $\mathscr{C}(\langle a,b\rangle)$ úplný? (není) - zmínit, okomentovat a vložit asi jako poznámku za poznámku 2.2.12, možná na vhodném místě zmínit definici úplnosti (možná už to někde je, teď si nejsem jistej)

1.1.1 Definice

Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbf{E}^r$. Potom každé zobrazení množiny $\mathbf{N}$ do množiny všech funkcí definovaných na M nazýváme *posloupností funkcí* na M. Je-li číslu $n \in \mathbf{N}$ tímto způsobem přiřazena funkce $f_n(\vec{x})$, zapisujeme funkční posloupnost

$$f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots \qquad \text{nebo} \qquad \big(f_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}. \tag{1.1}$$

Přirozené číslo n přitom nazýváme *indexem* a funkci $f_n(\vec{x})$ $n-$tým členem posloupnosti (1.1).

1.1.2 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (1.1) definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Řekneme, že posloupnost funkcí (1.1) *konverguje v bodě* $\vec{c} \in M$, jestliže konverguje číselná posloupnost $\big(f_n(\vec{c})\big)_{n=1}^{\infty}$, tj. existuje-li $\gamma \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna $n \geqslant n_0$ platí nerovnost $\big|f_n(\vec{c}) - \gamma\big| < \varepsilon$. Řekneme, že posloupnost funkcí (1.1) *konverguje (bodově) na množině* $N \subset M$, jestliže konverguje v každém bodě množiny N.

1.1.3 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (1.1) definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Nechť pro každé $\vec{c} \in N$, kde $N \subset M$, posloupnost $\big(f_n(\vec{c})\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje. Označme $f(\vec{c})$ hodnotu limity posloupnosti $\big(f_n(\vec{c})\big)_{n=1}^{\infty}$. Tímto způsobem je na množině N definována funkce $\vec{x} \mapsto f(\vec{x})$, kterou nazýváme *limitou posloupnosti funkcí* (1.1) (nebo zkráceně *limitní funkcí*) a značíme

$$f(\vec{x}) = \lim_{n\to\infty} f_n(\vec{x}).$$

Oborem konvergence $\mathcal{O}$ posloupnosti (1.1) nazýváme množinu všech bodů $\vec{c} \in M$, ve kterých tato posloupnost konverguje.

1.1.4 Definice

Nechť (1.1) je posloupnost funkcí definovaných na množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Řekneme, že tato posloupnost *stejnoměrně konverguje na* M k funkci $f(\vec{x})$, jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geqslant n_0$ a pro všechna $\vec{x} \in M$ platí nerovnost $\big|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\big| < \varepsilon$.

1.1.5 Poznámka

Bodovou konvergenci značíme obyčejně symbolem $f_n(\vec{x}) \to f(\vec{x})$, stejnoměrnou pak $f_n(\vec{x}) \rightrightarrows f(\vec{x})$. Rozdíl mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí je dobře patrný z kvantifikátorového zápisu definic obou pojmů:

- bodová konvergence

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\forall\vec{x} \in M)\,(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \qquad n \in \mathbf{N} \wedge n \geqslant n_0 \Rightarrow \big|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\big| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

- stejnoměrná konvergence

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \qquad n \in \mathbf{N} \wedge n \geqslant n_0 \wedge \vec{x} \in M \Rightarrow \left|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Stejnoměrná konvergence tedy požaduje existenci "univerzálního"n_0, které plní svoji roli pro všechna $\vec{x} \in M$.

1.1.6 Věta – *Bolzanova-Cauchyova podmínka*

Posloupnost funkcí (1.1) je stejnoměrně konvergentní na $M \subset \mathbf{E}^r$ právě tehdy, když splňuje tzv. *Bolzanovu-Cauchyovu podmínku* tvaru

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \qquad m, n \geqslant n_0 \wedge \vec{x} \in M \Rightarrow \left|f_n(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\right| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Důkaz:

- První implikace:
  - nechť $\big(f_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje na M k jisté funkci $f(x)$
  - pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro libovolná $m, n \in \mathbf{N}$ taková, že $m, n \geqslant n_0$, a pro všechna $\vec{x} \in M$ platí
  $$\left|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad |f_m(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$$
  - a tedy
  $$\left|f_n(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\right| \leqslant \left|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right| + \left|f_m(\vec{x}) - f(\vec{x})\right| < \varepsilon$$
- Druhá implikace:
  - nechť posloupnost funkcí splňuje vztah (1.4)
  - podle Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro číselné posloupnosti posloupnost (1.1) konverguje bodově k jisté funkci na množině M (označme ji $f(\vec{x})$)
  - chceme dokázat $f_n(\vec{x}) \rightrightarrows f(\vec{x})$ na M
  - zvolme $\varepsilon > 0$ a k číslu $\frac{\varepsilon}{2}$ vyberme podle (1.4) n_0 tak, aby pro všechna $m, n \geqslant n_0$ platilo
  $$\left|f_n(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$
  - pro libovolné pevně zvolené $n \geqslant n_0$ a pro m rostoucí nade všechny meze pak odsud dostaneme nerovnost $\left|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$ platnou pro každé $\vec{x} \in M$
- tím je důkaz zkompletován

1.1.7 Věta – *supremální kritérium*

Nechť $f(\vec{x})$ a $f_n(\vec{x})$ pro všechna n jsou funkce definované na množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Označme

$$\sigma_n := \sup_{\vec{x} \in M} \left|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right|$$

pro každé n. Pak posloupnost funkcí $\big(f_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množině M stejnoměrně k funkci $f(\vec{x})$ právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

Důkaz:

- pro všechna $\vec{x} \in M$ a všechna $n \in \mathbf{N}$ zřejmě platí nerovnost $\left|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right| \leqslant \sigma_n$
- První implikace:
  - předpokládejme, že $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$
  - z definice limity číselné posloupnosti $\big(\sigma_n\big)_{n=1}^{\infty}$ plyne, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že $|\sigma_n| = \sigma_n < \varepsilon$ pro všechna $n \geqslant n_0$
  - to značí (jak vyplývá z definice suprema), že pro všechna $n \geqslant n_0$ a všechna $\vec{x} \in M$ platí také $\left|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right| < \varepsilon$, a tedy $f_n(\vec{x}) \rightrightarrows f(\vec{x})$ na M

- Druhá implikace:
  - předpokládejme, že $f_n(\vec{x}) \rightrightarrows f(\vec{x})$ na M
  - zvolme libovolné $\varepsilon > 0$, k němuž jistě existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geqslant n_0$ a všechna $\vec{x} \in M$ platí nerovnost $\left|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right| < \varepsilon/2$
  - odtud a z vlastností suprema plyne, že pro $n \geqslant n_0$ platí $\sigma_n \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$, a tedy $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$

1.1.8 Definice

Nechť je dána posloupnost funkcí (1.1) definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Potom nekonečný součet

$$f_1(\vec{x}) + f_2(\vec{x}) + \ldots + f_n(\vec{x}) + \ldots$$

nazýváme *řadou funkcí* na M a značíme symbolem

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}). \tag{1.5}$$

1.1.9 Definice

Nechť je dána funkční řada (1.5) definovaná na množině M. Funkci $s_n(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} f_k(\vec{x})$ pro $n \in \mathbf{N}$ a $\vec{x} \in M$ budeme nazývat $n-$*tým částečným součtem* řady (1.5) a posloupnost $\big(s_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ pak *posloupností částečných součtů* dané řady.

1.1.10 Definice

Nechť je dána funkční řada (1.5) definovaná na množině M. Nechť $\big(s_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ je příslušná posloupnost částečných součtů. Řekneme, že řada (1.5) *konverguje v bodě* $\vec{c} \in M$, jestliže konverguje číselná posloupnost $\big(s_n(\vec{c})\big)_{n=1}^{\infty}$. Řekneme, že řada (1.5) *konverguje (bodově)* na množině $N \subset M$, jestliže konverguje v každém bodě množiny N. Vlastní limitu

$$s(\vec{x}) := \lim_{n\to\infty} s_n(\vec{x})$$

posloupnosti částečných součtů pak nazýváme *součtem řady* (1.5) a zapisujeme

$$s(\vec{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}). \tag{1.6}$$

Definiční obor $\mathrm{Dom}(s)$, tj. množinu všech $\vec{c} \in M$, pro něž posloupnost $\big(s_n(\vec{c})\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje, budeme dále nazývat *oborem konvergence řady* (1.5) a značit symbolem $\mathcal{O}$.

1.1.11 Definice

Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ konverguje na množině $M \subset \mathbf{E}^r$ *stejnoměrně* ke svému součtu $s(\vec{x})$ a označíme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}) \overset{M}{\equiv} s(\vec{x})$, jestliže posloupnost jejích částečných součtů konverguje na M stejnoměrně k funkci $s(\vec{x})$.

1.1.12 Věta – *Bolzanova-Cauchyova podmínka*

Řada funkcí (1.5) konverguje na množině $M \subset \mathbf{E}^r$ stejnoměrně právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbf{N}$ takový, že pro jakékoli dva indexy $m, n \in \mathbf{N}$ takové, že $m \geqslant n \geqslant n_0$ a pro jakékoliv $\vec{x} \in M$ je splněna nerovnost

$$\left|f_n(\vec{x}) + f_{n+1}(\vec{x}) + \ldots + f_m(\vec{x})\right| < \varepsilon.$$

Důkaz:

- tvrzení této věty bezprostředně plyne z věty 1.1.6
- označíme-li totiž $\big(s_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ příslušnou posloupnost částečných součtů, získáváme rovnosti

$$s_{n-1}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k(\vec{x}), \qquad s_m(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{m} f_k(\vec{x})$$

- podle věty 1.1.6 (v nepatrné obměně) konverguje posloupnost $\big(s_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ na M stejnoměrně právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbf{N}$ takový, že pro jakékoli dva indexy $m, n \in \mathbf{N}$ takové, že $m \geqslant n \geqslant n_0$ a pro jakékoliv $\vec{x} \in M$ je splněna nerovnost $\big|s_m(\vec{x}) - s_{n-1}(\vec{x})\big| < \varepsilon$
- z této nerovnosti ovšem vyplývá, že

$$\left|\sum_{k=1}^{m} f_k(\vec{x}) - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(\vec{x})\right| = \big|f_n(\vec{x}) + f_{n+1}(\vec{x}) + \ldots + f_m(\vec{x})\big| < \varepsilon$$

1.1.13 Definice

Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ konverguje na množině $M \subset \mathbf{E}^r$ *regulárně*, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty}\big|f_n(\vec{x})\big|$ konverguje na M stejnoměrně.

1.1.14 Věta – *nutná podmínka stejnoměrné konvergence*

Jestliže řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ konverguje na množině $M \subset \mathbf{E}^r$ stejnoměrně, potom posloupnost funkcí $\big(f_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na této množině stejnoměrně k nulové funkci.

Důkaz:

- z předpokladů věty plyne, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall m, n \in \mathbf{N})\big(m \geqslant n \geqslant n_0\big)(\forall \vec{x} \in M): \quad \big|f_n(\vec{x}) + f_{n+1}(\vec{x}) + \ldots + f_m(\vec{x})\big| < \varepsilon$$

- jelikož toto tvrzení platí pro jakákoli $m, n \in \mathbf{N}$ taková, že $m \geqslant n \geqslant n_0$, platí také při speciální volbě $m = n$
- pak ale

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})\big(n \geqslant n_0\big)(\forall \vec{x} \in M): \quad \big|f_n(\vec{x})\big| = \big|f_n(\vec{x}) - o(\vec{x})\big| < \varepsilon$$

- tento výrok je ale ekvivalentní tvrzení, že posloupnost funkcí $\big(f_n(\vec{x})\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množině M stejnoměrně k nulové funkci

1.1.15 Definice

Nechť jsou dány funkční řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ definované na množině M. Nechť existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geqslant n_0$ a všechna $\vec{x} \in M$ platí $\big|f_n(\vec{x})\big| \leqslant g_n(\vec{x})$. Pak řadu $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ nazýváme řadou *majorantní* k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$.

1.1.16 Věta – *srovnávací kritérium*

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ je na množině $M \subset \mathbf{E}^r$ majorantní k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ a nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ je stejnoměrně konvergentní na M. Pak jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\vec{x})|$ stejnoměrně konvergentní na M, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ konverguje na M regulárně.

Důkaz:

- užijeme Bolzanovu-Cauchyovu podmínku 1.1.12
- z předpokladu víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\vec{x})$ stejnoměrně konverguje na M, tedy pro jakékoli $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená $m \geqslant n \geqslant n_0$ a pro všechna $\vec{x} \in M$ platí

$$0 \leqslant g_n(\vec{x}) + g_{n+1}(\vec{x}) + \ldots + g_m(\vec{x}) < \varepsilon$$

- dále víme, že existuje m_0 tak, že pro všechna $x \in M$ a všechny indexy $n \geqslant m_0$ platí $|f_n(\vec{x})| \leqslant g_n(\vec{x})$
- pro zvolené ε a všechna $n \geqslant \max\{n_0, m_0\}$ pak platí

$$|f_n(\vec{x}) + f_{n+1}(\vec{x}) + \ldots + f_m(\vec{x})| \leqslant |f_n(\vec{x})| + |f_{n+1}(\vec{x})| + \ldots + |f_m(\vec{x})| \leqslant g_n(\vec{x}) + g_{n+1}(\vec{x}) + \ldots + g_m(\vec{x}) < \varepsilon$$

- to dokazuje obě tvrzení věty

1.1.17 Důsledek

Konverguje-li řada na množině M regulárně, konverguje na M také stejnoměrně.

1.1.18 Věta – *Weierstrassovo kritérium*

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní číselná řada, $f_n(\vec{x})$ jsou funkce a pro všechna $\vec{x} \in M \subset \mathbf{E}^r$ a všechna $n \in \mathbf{N} \setminus \widehat{n_0}$ je $|f_n(\vec{x})| \leqslant a_n$. Pak řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\vec{x})|$ stejnoměrně konvergují na M, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ konverguje na M regulárně.

Důkaz:

- v předchozí větě položíme $g_n(\vec{x}) := a_n$ pro všechna $\vec{x} \in M$ a uvědomíme si, že pojmy bodové a stejnoměrné konvergence u řady konstantních funkcí splývají

Kapitola 2

Funkcionální Hilbertovy prostory

2.1 Výchozí pojmy

2.1.1 Značení

$\mathscr{C}^n(M)$ je třída všech funkcí, které mají na množině M spojité derivace až do řádu n, přičemž $\mathscr{C}(M) = \mathscr{C}^0(M)$. Nachází-li se index nula dole $\mathscr{C}_0^n(M)$, pak M je kompakt. Symbol $\mathscr{C}_0^n$ značí všechny funkce třídy $\mathscr{C}^n(\mathbf{E}^r)$, které mají libovolný, ale kompatní nosič. $\mathscr{L}(G)$ je třída Lebesgueovsky integrovatelných funkcí na množině G. Třída funkcí majících Lebesgueův integrál na G se značí $\mathscr{L}^\star(G)$. Třídu Lebesgueovsky lokálně integrabilních funkcí značíme $\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(G)$ a definujeme ji v následujícím textu.

2.1.2 Úmluva

Symbol G bude nadále reprezentovat $r-$dimenzionální *oblast*, tj. otevřenou a souvislou podmnožinu množiny $\mathbf{E}^r$. Dále symbol J bude označovat *kompakt*, tj. uzavřenou a omezenou podmnožinu množiny $\mathbf{E}^r$. Funkcí budeme rozumět zobrazení $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{C}$.

2.1.3 Úmluva

V celém následujícím textu budeme předpokládat, že je zadána klasická a úplná Lebesgueova míra $\lambda(X) : \mathscr{M}_\lambda \mapsto \mathbf{R}^\star$ generovaná ve všech dimenzích klasickou vytvořující $\varphi(x) = x$. Tudíž soustava $\mathscr{M}_\lambda$ všech $\lambda-$měřitelných podmnožin množiny $\mathbf{E}^r$ je $\sigma-$algebrou a $\lambda(X)$ je na ní $\sigma-$aditivní mírou. Systém $\{\mathbf{E}^r, \mathscr{M}_\lambda, \lambda(X)\}$ je tedy pro nás nyní výchozím prostorem s úplnou mírou.

2.1.4 Definice

Nech? $r \in \mathbf{N}$ a $\vec{\mu} \in \mathbf{R}^r$. *Heavisideovou* `[hevisajdovou]` funkcí budeme rozumět funkci $\Theta(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \{0, 1\}$ definovanou předpisem

$$\Theta(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & \dots \quad x_1 > 0 \wedge x_2 > 0 \wedge \dots \wedge x_r > 0 \\ 0 & \dots \quad x_1 \leqslant 0 \vee x_2 \leqslant 0 \vee \dots \vee x_r \leqslant 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Centrovanou Heavisideovou funkcí budeme rozumět funkci $\Theta_{\vec{\mu}}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \{0, 1\}$ definovanou předpisem

$$\Theta_{\vec{\mu}}(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & \dots \quad x_1 > \mu_1 \wedge x_2 > \mu_2 \wedge \dots \wedge x_r > \mu_r \\ 0 & \dots \quad x_1 \leqslant \mu_1 \vee x_2 \leqslant \mu_2 \vee \dots \vee x_r \leqslant \mu_r. \end{cases} \tag{2.2}$$

2.1.5 Poznámka

Funkce $f(\vec{x})$ je, podle věty 5.3.45 a důsledku 5.3.46 v [5], na G Lebesgueovsky integrabilní právě tehdy, když je λ-měřitelná a její absolutní hodnota je Lebesgueovsky integrabilní.

$$f(\vec{x}) \in \mathscr{L}(G, \mu) \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| \in \mathscr{L}(G, \mu) \wedge f(x) \in \Lambda_\mu(G).$$

Budeme-li tedy mluvit o měřitelných funkcích, tak platí, že

$$f(x) \in \mathscr{L}(G, \mu) \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| \in \mathscr{L}(G, \mu)$$

2.1.6 Definice

Nech?je dána funkce $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{R}$. Řekneme, že funkce $f(\vec{x})$ je *lokálně integrabilní* na G a označíme symbolem $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_{\text{loc}}\big(G, \mu(X)\big)$ nebo zkráceně $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_{\text{loc}}(G)$, jestliže pro každý bod $\vec{c} \in G$ existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}\big(\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})\big)$, tj.

$$\int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})} f(\vec{x})\,\mathtt{d}\mu(\vec{x}) \in \mathbf{R}.$$

2.1.7 Věta

Nech?G je oblast v $\mathbf{E}^r$. Funkce $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{R}$ je lokálně integrabilní na G právě tehdy, když pro každou kompaktní množinu $J \subset G$ platí, že

$$\int_J f(\vec{x})\,\mathtt{d}\mu(\vec{x}) \in \mathbf{R}.$$

Důkaz:

- dokážeme nejprve, že pokud pro každou kompaktní množinu $J \subset G$ platí, že integrál $\int_J f(\vec{x})\,\mathtt{d}\mu(\vec{x})$ konverguje, pak je $f(\vec{x})$ je lokálně integrabilní na G
- zvolme tedy libovolně bod $\vec{c} \in G$
- jelikož G je otevřená, jistě existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $K = \overline{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})}$, $K \subset G$, K je kompakt a $\vec{c} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})$
- integrál $\int_K f(\vec{x})\,\mathtt{d}\mu(\vec{x})$ ale existuje z předpokladu
- $\operatorname{bd}(K)$ je $\mu-$nulová množina, nebo?se jedná o pláš?r-rozměrné koule, a z teorie Lebesgueova integrálu tudíž platí, že $\int_K f(\vec{x})\,\mathtt{d}\mu(\vec{x}) = \int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})} f(\vec{x})\,\mathtt{d}\mu(\vec{x})$, a navíc jsme $\vec{c}$ volili libovolně.
- pro důkaz obrácené implikace předpokládejme, že $f(\vec{x})$ je lokálně integrabilní na G
- zvolme K jako libovolnou kompaktní množinu, která je podmnožinou oblasti G
- podle teorie míry jistě $K \in \mathscr{M}_\mu$, neboť $\mathbf{E}^r \in \mathscr{S}_r \subset \mathscr{M}_\mu$, a $\mathscr{M}_\mu$ je σ-algebra zde je nedefinovany prikaz \setminusK, co ma znamenat?
- Borelova věta ale říká, že z každého otevřeného pokrytí kompaktní množiny lze vybrat pokrytí konečné, tj. existuje soustava oblastí $\{G_k : k \in \widehat{n}\}$ tak, že $\cup_{k=1}^n G_k \supset K$ a $G_k = \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_k)$ pro jisté body $\vec{x}_k \in K$
- všechny integrály $\int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_k)} f(\vec{x})\,\mathtt{d}\mu(\vec{x})$ ale existují z předpokladu této implikace
- dále také existují (jak víme z teorie Lebesgueova integrálu všechny integrály) $\int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_k)\cap\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_\ell)} f(\vec{x})\,\mathtt{d}\mu(\vec{x})$ pro $k, \ell \in \widehat{n}$
- existují rovněž integrály $\int_{\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}_k)\cap K} f(\vec{x})\,\mathtt{d}\mu(\vec{x})$, což společně garantuje existenci integrálu $\int_K f(\vec{x})\,\mathtt{d}\mu(\vec{x})$
- tímto je důkaz dokončen

2.2 Prehilbertovské prostory funkcí

V této sekci se pokusíme rozhodnout jestli z vybraných vektorových prostorů funkcí lze vytvořit prehilbertovské prostory funkcí, tj. vektorové prostory se skalárním součinem. Připomeňme si definici skalárního součinu.

2.2.1 Definice

Nech?$\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$. Zobrazení $\langle .|. \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathbf{C}$ nazveme *skalárním součinem*, jestliže splňuje tzv. *axiomy skalárního součinu*:

- *levá linearita:* pro všechna $f(\vec{x}), g(\vec{x}), h(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ a každé $\alpha \in \mathbf{C}$ platí $\langle \alpha f + g|h\rangle = \alpha\langle f|h\rangle + \langle g|h\rangle$
- *hermiticita:* pro všechna $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ platí $\langle f|g\rangle = \langle g|f\rangle^\star$
- *pozitivní definitnost:* pro všechna $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ platí $\langle f|f\rangle \geqslant 0$ a navíc $\langle f|f\rangle = 0$ právě tehdy, když $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$.

Dvojici $\big\{\mathcal{V}, \langle .|. \rangle\big\}$ nazýváme *prehilbertovským prostorem.*

2.2.2 Definice

Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor funkcí nad tělesem $\mathbf{C}$. Zobrazení $\|\,.\,\| : \mathcal{V} \mapsto \mathbf{R}$ nazveme *normou*, jestliže splňuje tzv. *axiomy normy*:

- *nulovost:* $\|f\| = 0$ právě tehdy, když $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$
- *trojúhelníková nerovnost:* pro všechna $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ platí: $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$
- *homogenita:* pro všechna $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ a každé $\lambda \in \mathbf{C}$ platí: $\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|$.

Dvojici $\big\{\mathcal{V}, \|.\|\big\}$ nazýváme *normovaným prostorem.*

2.2.3 Příklad

Ukážeme, že pro libovolnou funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ z normovaného prostoru $\mathcal{V}$ s normou $\|\,.\,\|$ platí nerovnost $\|f\| \geqslant 0$. Nejprve snadno prokážeme, že norma opačného vektoru je stejná jako norma vektoru původního. Položme $\lambda = -1$. Pak z axiomu homogenity plyne $\|-f\| = |-1|\,\|f\| = \|f\|$. Dále pak v trojúhelníkové nerovnosti položme $g(\vec{x}) := -f(\vec{x})$. Pak

$$0 = \|o(\vec{x})\| = \big\|f(\vec{x}) + \big(-f(\vec{x})\big)\big\| \leqslant \big\|\vec{f}(\vec{x})\big\| + \big\|-f(\vec{x})\big\| = 2\big\|\vec{f}(\vec{x})\big\|,$$

odkud je již patrno, že $\|f\| \geqslant 0$.

2.2.4 Věta

Nechť $\langle .|. \rangle$ je skalární součin definovaný na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$. Pak zobrazení $\mathtt{n}(f)$ definované předpisem

$$\mathtt{n}(f) := \sqrt{\langle f|f \rangle} \tag{2.3}$$

je normou na $\mathcal{V}$.

Důkaz:

- ověříme axiomy normy
- axiom nulovosti:
  - je-li $f(\vec{x}) = 0$, pak $\mathtt{n}^2(0) := \langle o, o \rangle = 0$
  - je-li $\mathtt{n}(f) = 0$, pak tedy $\langle f, f \rangle = 0$, ale podle axiomu pozitivní definitnosti skalárního součinu toto může nastat pouze tehdy, je-li $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$
  - tím je ekvivalence požadovaná v axiomu nulovosti normy prokázána
- axiom trojúhelníkové nerovnosti:
  - provedeme následující sérii úprav

    $$\mathtt{n}^2\big(f + g\big) = \langle f + g|f + g \rangle = \langle f|f \rangle + \langle f|g \rangle + \langle g|f \rangle + \langle g|g \rangle =$$

    $$= 2\,\mathrm{Re}\big(\langle f|g \rangle\big) + \langle f|f \rangle + \langle g|g \rangle \leqslant 2\big|\langle f|g \rangle\big| + \mathtt{n}^2(f) + \mathtt{n}^2(g)$$
  - užijeme-li nyní Schwarzovy-Cauchyovy-Bunjakovského nerovnosti (viz [2]), dostáváme

    $$\mathtt{n}^2\big(f + g\big) \leqslant 2\,\mathtt{n}(f)\mathtt{n}(g) + \mathtt{n}^2(f) + \mathtt{n}^2(g) = \big(\mathtt{n}(f) + \mathtt{n}(g)\big)^2$$
  - tím je dokázáno, že $\mathtt{n}\big(f + g\big) \leqslant \mathtt{n}(f) + \mathtt{n}(g)$
- axiom homogenity:
  - nechť tedy $\lambda \in \mathbf{C}$ je zvoleno libovolně
  - pak snadno $\mathtt{n}\big(\lambda f\big) := \sqrt{\langle \lambda f|\lambda f \rangle} = \sqrt{\lambda\lambda^\star}\sqrt{\langle f|f \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2}\,\mathtt{n}(f) = |\lambda|\,\mathtt{n}(f)$
- tím je prokázáno, že zobrazení $\mathtt{n}(f)$ je normou na $\mathcal{V}$

2.2.5 Definice

Nechť $\langle .|. \rangle$ je skalární součin definovaný na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$. Pak zobrazení $\mathbb{n}(f)$ definované vztahem (2.3) nazýváme *normou generovanou skalárním součinem.*

2.2.6 Věta

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{C}$ a skalární součin $\langle .|. \rangle$. Nechť $\|.\|$ je norma generovaná tímto skalárním součinem. Nechť je dána posloupnost funkcí $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ z prostoru $\mathcal{V}$, pro níž existuje funkce $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ tak, že platí následující implikace:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \quad n > n_0 \quad \Longrightarrow \quad \left\| f_n(\vec{x}) - f(\vec{x}) \right\| < \varepsilon.$$

Nechť je funkce $g(\vec{x}) \in \mathcal{V}$ zvolena libovolně. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n|g \rangle = \langle f|g \rangle, \quad \lim_{n\to\infty} \langle g|f_n \rangle = \langle g|f \rangle.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- snadno nahlédneme, že pro $g(\vec{x}) = o(\vec{x})$ platí citovaná rovnost triviálně
- uvažujme tedy nyní pouze ty funkce, které nejsou nulové, tedy ty, pro něž $\|g(\vec{x})\| \neq 0$
- chceme dokázat, že číselná posloupnost $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $\gamma_n := \langle f_n|g \rangle$ konverguje k číslu $\gamma := \langle f|g \rangle$
- je tedy třeba prokázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $m_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechny indexy $m > m_0$ platí nerovnost $|\gamma_m - \gamma| < \varepsilon$
- z předpokladu

  $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}): \quad n > n_0 \quad \Longrightarrow \quad \left\| f_n(\vec{x}) - f(\vec{x}) \right\| < \frac{\varepsilon}{\|g\|},$$

  z axiomů skalárního součinu a z Schwarzovy-Cauchyovy-Bunjakovského nerovnosti ale vyplývá, že

  $$|\gamma_m - \gamma| = \left| \langle f_m|g \rangle - \langle f|g \rangle \right| = \left| \langle f_m - f|g \rangle \right| \leqslant \|f_m - f\| \cdot \|g\| < \frac{\varepsilon}{\|g\|}\|g\| = \varepsilon$$

- postačí tedy volit $m_0 := n_0$
- tvrzení $\lim_{n\to\infty} \langle g|f_n \rangle = \langle g|f \rangle$ lze dokázat zcela analogicky

2.2.7 Lemma

Nechť $a \in \mathbf{R}$ a $b \in (a, \infty)$. Nechť $\mathscr{C}(\langle a, b \rangle)$ je vektorový prostor všech funkcí $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ spojitých na intervalu $\langle a, b \rangle$ zavedený nad tělesem $\mathbf{C}$. Nechť je dána funkce $w(x) \in \mathscr{C}(\langle a, b \rangle)$ kladná na $\langle a, b \rangle$. Pak formule

$$\left\langle f(x)|g(x) \right\rangle_w := \int_a^b f(x) g^\star(x) w(x) \, \mathtt{d}x \tag{2.4}$$

splňuje axiomy skalárního součinu na $\mathscr{C}(\langle a, b \rangle)$.

2.2.8 Lemma

Nechť $a \in \mathbf{R}$ (nebo $a = -\infty$) a $b \in (a, \infty)$ (nebo $b = +\infty$). Nechť $\mathscr{V}$ je vektorový prostor všech omezených a spojitých funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$. Nech?$w(x)$ je kladná funkce na (a, b), pro kterou platí $w(x) \in \mathscr{L}(\langle a, b \rangle)$. Pak (2.4) splňuje axiomy skalárního součinu na $\mathscr{V}$.

2.2.9 Definice

Spojitou a kladnou funkci $w(x)$ z předešlých lemmat nazýváme *vahou skalárního součinu* a vybrané reprezentanty nazýváme následovně:

- *standardní (Legendreova) váha:* pro libovolnou volbu $a, b \in \mathbf{R}$ a $w(x) = \Theta(a)\Theta(b - x)$,
- *Laguerreova váha:* pro volbu $a = 0$, $b = \infty$ a $w(x) = \Theta(x)\mathtt{e}^{-x}$,
- *Hermiteova váha:* pro volbu $a = -\infty$, $b = \infty$ a $w(x) = \mathtt{e}^{-x^2}$,
- *Čebyševova váha:* pro volbu $a = -1$, $b = 1$ a $w(x) = \frac{\Theta(1-|x|)}{\sqrt{1-x^2}}$.

2.2.10 Definice

Nechť $p \geqslant 1$ je pevně zvolený parametr. Pak třídu všech měřitelných funkcí $f(\vec{x}) : G \mapsto \mathbf{C}$, pro něž

$$\int_G \left|f(\vec{x})\right|^p \mathrm{d}\lambda(\vec{x}) \in \mathbf{R},$$

označujeme symbolem $\mathscr{L}_p(G)$. Neboli

$$\mathscr{L}_p(G) = \left\{ f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{C} : \int_G \left|f(\vec{x})\right|^p \mathrm{d}\mu(\vec{x}) \in \mathbf{R} \right\}$$

2.2.11 Věta

Nechí $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_2(G)$. Potom $f(\vec{x})g^\star(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(G)$.

Důkaz:

- stačí si uvědomit, že $|f(\vec{x})g^\star(\vec{x})| \leqslant \frac{1}{2}|f(\vec{x})|^2 + \frac{1}{2}|g(\vec{x})|^2$
- jelikož oba členy součtu patří do $\mathscr{L}(G)$, tak ze srovnávacího kritéria plyne, že také $|f(\vec{x})g^\star(\vec{x})| \in \mathscr{L}(G)$
- je vhodné si zopakovat poznámku 2.1.5 a uvědomit si, že pro měřitelné funkce platí $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}(G) \Leftrightarrow |f(\vec{x})| \in \mathscr{L}(G)$

2.2.12 Poznámka

Vztahy $\int_G f(x)g^\star(x)w(x)\,\mathrm{d}x$, resp. $\int_G f(\vec{x})g^\star(\vec{x})w(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}$ však na některých vektorových prostorech skalární součin nedefinují. Jedním z takových prostorů je např. prostor $\mathscr{L}_1(0,1)$. Funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ do prostoru $\mathscr{L}_1(0,1)$ patří, nebo?

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2,$$

ale integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

nekonverguje. Podobně také prostory $\mathscr{L}(G)$ nebo $\mathscr{L}_1(G)$ pro $G = (0,\infty)$ negenerují spolu s operací $\int_0^\infty f(x)g^\star(x)\,\mathrm{d}x$ prehilbertovský prostor.

$\mathscr{L}_2(G)$ také není prehilbertovský, protože není splněn axiom pozitivní definitnosti skalárního součinu, tedy neplatí, že

$$\big\langle f(x)|f(x)\big\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0$$

Může totiž existovat $f(x) \neq 0$ taková, že bude $\int_a^b f(x)f^\star(x)\mathrm{d}x = 0$. Například tak, že má nenulovou hodnotu na množině míry nula.

2.2.13 Definice

Dirichletovou funkcí budeme rozumět funkci

$$\mathfrak{D}(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & \ldots \quad \vec{x} \in \mathbf{Q}^r \\ 0 & \ldots \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^r \setminus \mathbf{Q}^r. \end{cases} \tag{2.5}$$

2.2.14 Poznámka

Zavedeme-li na prostoru $\mathscr{L}_2(G)$ zobrazení $\langle f|g\rangle : \mathscr{L}_2(G) \times \mathscr{L}_2(G) \mapsto \mathbf{C}$ předpisem

$$\big\langle f|g\big\rangle = \int_G f(\vec{x})\,g^\star(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}),$$

pak toto zobrazení není skalárním součinem, neboť není splněn axiom pozitivní definitnosti z definice skalárního součinu. Rovnost $\langle f|f\rangle = 0$ by podle něho měla být splněna tehdy a jen tehdy, pokud $f(\vec{x}) = o(\vec{x})$, tedy pokud $f(\vec{x})$ je ryze nulová funkce. Snadno ale nahlédneme, že pro Dirichletovu funkci platí rovnost $\mathfrak{D}^2(\vec{x}) = \mathfrak{D}(\vec{x})$, a tudíž (podle teorie Lebesgueova integrálu)

$$\big\langle \mathfrak{D}|\mathfrak{D}\big\rangle = \int_G \mathfrak{D}(\vec{x})\,\mathfrak{D}^\star(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) = \int_G \mathfrak{D}(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) = 0.$$

Abychom se tedy konečně dostali k nějakému prehilbertovu, a následně Hilbertovu, prostoru budeme potřebovat zobecnění a úvahy, které probereme v následující sekci.

2.3 Faktorové prostory funkcí, Hilbertovy prostory

Od termínu funkce nyní přejděme k faktorové funkci, resp. faktorovému prostoru funkcí. Třídu všech funkcí, jež jsou měřitelné a zároveň jsou mezi sebou vzájemně μ-ekvivalentní, tj. liší se pouze na množině míry nula, nazveme *faktorová skupina funkcí*. Třídu všech funkcí, které jsou měřitelné a zároveň ekvivalentní s nulovou funkcí ($f(\vec{x}) = 0(\vec{x})$) označíme symbolem $\mathcal{F}_0$. Do třídy $\mathcal{F}_0$ tedy patří i Dirichletova funkce $\mathfrak{D}(\vec{x})$. Libovolného zástupce z vybrané faktorové skupiny funkci nazveme *faktorovou funkcí*. Pro jednoduchost budeme nadále používat termín funkce, ale mějme pořád na paměti, že jde jen o jednoho vybraného zástupce celé skupiny funkcí.

2.3.1 Definice

Faktorovou funkcí $\hat{f}(\vec{x})$ nazveme množinu všech funkcí, jež jsou vzájemně $\mu-$ekvivalentní s vybranou měřitelnou funkcí $f(\vec{x}) \in \Lambda(G)$, tj.

$$\hat{f}(\vec{x}) := \big\{ g(\vec{x}) \in \Lambda(G) :\ g \sim f \big\}.$$

Množinu všech faktorových funkcí nazveme *faktorovým prostorem* nad G a označíme $\mathcal{F}(G)$.

2.3.2 Poznámka

Tedy funkce $f(\vec{x})$ a $g(\vec{x})$ z předešlé definice se liší pouze na množině nulové míry. Dále si uvědomme, že integrál všech prvků faktorové funkce na dané oblasti G má stejnou hodnotu. Má tedy smysl definovat

$$\int_G \hat{f}(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) := \int_G f(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}),$$

kde $f(\vec{x})$ je libovolný zástupce faktorové funkce $\hat{f}(\vec{x})$.

2.3.3 Definice

Nechť $p \geqslant 1$. Symbolem $\mathbb{L}_p(G)$ označíme množinu všech (faktorových) funkcí $f(\vec{x}) :\ G \mapsto \mathbf{C}$, pro něž $|f(\vec{x})|^p \in \mathscr{L}(G)$, tedy

$$\int_G |f(\vec{x})|^p\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) < +\infty.$$

2.3.4 Věta

Zobrazení $\langle f|g\rangle : \mathbb{L}_2(G) \times \mathbb{L}_2(G) \mapsto \mathbf{C}$ zavedené na $\mathbb{L}_2(G)$ předpisem

$$\big\langle f|g \big\rangle = \int_G f(\vec{x})\, g^\star(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) \tag{2.6}$$

reprezentuje skalární součin. Prostor $\mathbb{L}_2(G)$ je tudíž prehilbertovským prostorem.

<u>*Důkaz:*</u>

- axiom levé linearity je splněn triviálně, podobně jako hermiticita
- pro libovolnou funkci $f(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$ pak platí, že

  $$\big\langle f|f \big\rangle = \int_G f(\vec{x})\, f^\star(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) = \int_G |f(\vec{x})|^2\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) \geqslant 0$$

  a navíc rovnost

  $$\big\langle f|f \big\rangle = \int_G f(\vec{x})\, f^\star(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) = \int_G |f(\vec{x})|^2\,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) = 0$$

  nastává pouze pro nulovou faktorou funkci
- tím je naplněn axiom pozitivní definitnosti
- zbývá dokázat, že pro libovolné dvě funkce $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$ je výraz $\big\langle f|g \big\rangle = \int_G f(\vec{x})\, g^\star(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})$ dobře definován

- jelikož je na G splněna nerovnost

$$2\left|f(\vec{x})g^\star(\vec{x})\right| \leqslant \left|f(\vec{x})\right|^2 + \left|g^\star(\vec{x})\right|^2 = \left|f(\vec{x})\right|^2 + \left|g(\vec{x})\right|^2$$

a oba integrály $\int_G \left|f(\vec{x})\right|^2 \,\mathrm{d}\lambda(\vec{x})$ a $\int_G \left|g(\vec{x})\right|^2 \,\mathrm{d}\lambda(\vec{x})$ existují z definice prostoru $\mathbb{L}_2(G)$ a z věty o absolutní hodnotě Lebesgueova integrálu, existuje podle srovnávacího kritéria také integrál $\int_G f(\vec{x})g^\star(\vec{x})\,\mathrm{d}\mu(\vec{x})$

2.3.5 Poznámka

Je-li vztah (2.6) skalárním součinem na $\mathbb{L}_2(G)$, pak je zobrazení

$$\left\|f(\vec{x})\right\| = \sqrt{\int_G \left|f(\vec{x})\right|^2 \,\mathrm{d}\lambda(\vec{x})}$$

normou na $\mathbb{L}_2(G)$. Zobrazení

$$\varrho(f,g) := \sqrt{\int_G \left|f(\vec{x}) - g(\vec{x})\right|^2 \,\mathrm{d}\lambda(\vec{x})}$$

je metrikou na $\mathbb{L}_2(G)$.

2.3.6 Definice

Řekneme, že posloupnost funkcí $\left(f_n(\vec{x})\right)_{n=1}^{\infty}$ z prostoru $\mathbb{L}_2(G)$ *konverguje podle normy* k funkci $f(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geqslant n_0$ platí

$$\left\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right\| < \varepsilon,$$

to jest

$$\sqrt{\int_G \left|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right|^2 \,\mathrm{d}\mu(\vec{x})} < \varepsilon.$$

Konvergenci podle normy zapisujeme symbolem $f_n(\vec{x}) \twoheadrightarrow f(\vec{x})$.

2.3.7 Příklad

Rozhodněme podle definice, zda posloupnost funkcí $\left(\mathrm{e}^{-nx^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ z prostoru $\mathbb{L}_2(\mathbf{R})$ konverguje podle normy k nulové funkci. Nechť $\varepsilon > 0$ je zvoleno libovolně. Limitní faktorovou funkcí pro zkoumanou posloupnost je nulová funkce. Zkoumejme tedy nerovnost

$$\left\|\mathrm{e}^{-nx^2}\right\| = \sqrt{\int_G \mathrm{e}^{-2nx^2} \,\mathrm{d}\mu(\vec{x})} = \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{1/4} < \varepsilon.$$

Za hledané $n_0 \in \mathbf{N}$ z definice konvergence podle normy tedy stačí volit

$$n_0 := \left\lfloor \frac{\pi}{2\varepsilon^4} \right\rfloor + 1.$$

Povšimněme si ale paradoxu, že posloupnost $\left(\mathrm{e}^{-nx^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje (uvažujeme-li konvergenci klasickou) k nulové funkci ani stejnoměrně ani bodově. Vztah mezi klasickou konvergencí a konvergencí podle normy lze shrnout v následující větě.

2.3.8 Věta

Nechť je dána posloupnost funkcí $\left(f_n(\vec{x})\right)_{n=1}^{\infty}$ z prostoru $\mathbb{L}_2(G)$ taková, že $f_n(\vec{x}) \overset{G}{\rightrightarrows} f(\vec{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$. Nechť dále $0 < \mu(G) < \infty$. Pak $f_n(\vec{x}) \twoheadrightarrow f(\vec{x})$.

__Důkaz:__

- z předpokladů plyne, že pro všechna $\widetilde{\varepsilon} > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geqslant n_0$ a pro všechna $\vec{x} \in G$ platí nerovnost

$$\left|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right| < \widetilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\mu(G)}}$$

- jelikož zjevně

$$\left\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right\|^2 = \left\langle f_n - f \middle| f_n - f\right\rangle = \int_G \left|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right|^2 \mathrm{d}\mu(\vec{x}) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4\mu(G)}\mu(G) = \frac{\varepsilon^2}{4},$$

  zjišťujeme, že pro indexy $n \geqslant n_0$ platí nerovnost $\left\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

- to dokazuje skutečnost, že posloupnost funkcí $\left(f_n(\vec{x})\right)_{n=1}^{\infty}$ konverguje podle normy k funkci $f(\vec{x})$

2.3.9 Věta

Nechť $f_n(\vec{x}) \rightharpoondown f(\vec{x})$. Pak existuje podposloupnost $\left(f_{k_n}(\vec{x})\right)_{n=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\left(f_n(\vec{x})\right)_{n=1}^{\infty}$ taková, že platí $f_{k_n}(\vec{x}) \to f(\vec{x})$ skoro všude v M.

<u>*Důkaz:*</u>

- viz odkázat se na zdroj, str. 42, příklad 2.2.2

2.3.10 Definice

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{V}$ se skalárním součinem $\langle .|. \rangle$. Nechť $\|.\|$ je norma generovaná zadaným skalárním součinem a $\varrho(x,y)$ metrika generovaná výše uvedenou normou. Nechť navíc $\{\mathcal{V}, \varrho\}$ je úplným metrickým prostorem. Pak takový prostor $\mathcal{H} := \left\{\mathcal{V}, \langle .|. \rangle, \|.\|, \varrho\right\}$ nazýváme *Hilbertovým* prostorem.

2.3.11 Poznámka

Metrický prostor $\{M, \varrho\}$ s libovolnou metrikou $\varrho(f,g)$ nazveme *úplným,* jestliže každá cauchyovská posloupnost je v něm konvergentní.

2.3.12 Věta – *o spojitosti skalárního součinu*

Nechť je dán Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem $\mathbf{C}$. Nechť je dána posloupnost funkcí $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ z prostoru $\mathcal{H}$, která konverguje podle normy k funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$, a funkce $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n|g\rangle = \langle f|g\rangle, \quad \lim_{n\to\infty} \langle g|f_n\rangle = \langle g|f\rangle.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- jedná se o bezprostřední důsledek věty 2.2.6

2.3.13 Definice

Řekneme, řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x})$ z Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ *konverguje podle normy* ke svému součtu $s(\vec{x}) \in \mathcal{H}$, pokud posloupnost $\left(s_n(\vec{x})\right)_{n=1}^{\infty}$ jejích částečných součtů

$$s_n(\vec{x}) := \sum_{k=1}^{n} f_k(\vec{x})$$

konverguje podle normy k funkci $s(\vec{x})$, tj. $\operatorname{limnorm}_{n\to\infty} s_n(\vec{x}) = s(\vec{x})$. Konvergenci podle normy zapisujeme symbolem $\underline{\sum}_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}) = s(\vec{x})$.

2.3.14 Věta

Faktorový prostor $\mathbb{L}_2(G)$ společně se skalárním součinem zavedeným vztahem (2.6) je úplný, tj. jedná se o Hilbertův prostor.

<u>*Důkaz:*</u>

Jelikož již bylo prokázáno, že $\mathbb{L}_2(G)$ je vektorový prostor nad $\mathbf{C}$, zbývá dokázat úplnost. Vyberme tedy z libovolné cauchyovské posloupnosti $\big(f_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ podposloupnost $\big(f_{k_\ell}(\vec{x})\big)_{\ell=1}^{\infty}$, jež konverguje skoro všude na G. To je díky cauchyovskosti možné. Cílem důkazu je de facto prokázat, že $\big(f_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ je konvergentní v $\mathbb{L}_2(G)$. První člen podposloupnosti $\big(f_{k_\ell}(\vec{x})\big)_{\ell=1}^{\infty}$ vyberme tak, aby pro všechna $m > k_1$ platilo

$$\|f_{k_1}(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \frac{1}{2}.$$

To je opět díky cauchyovskosti možné. Druhý člen podposloupnosti vyberme tak, aby pro všechna $m > k_2$ platilo

$$\|f_{k_2}(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \frac{1}{2^2}.$$

Analogicky vyberme $\ell-$tý člen podposloupnosti tak, aby pro všechna $m > k_\ell$ platilo

$$\|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \frac{1}{2^\ell}.$$

Označíme-li nyní

$$g_k(\vec{x}) = \sum_{s=1}^{k} \big|f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\big|,$$

$$g(\vec{x}) = \sum_{s=1}^{\infty} \big|f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\big|,$$

bude

$$\|g_k(\vec{x})\| \leqslant \sum_{s=1}^{k} \big\|f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\big\| < \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{2^s} < 1.$$

Je proto $\int_M |g_n(\vec{x})|^2 \,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) < 1$ a podle Leviho věty také

$$\int_M |g(\vec{x})|^2 \,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) = \lim_{k\to\infty} \int_M |g_k(\vec{x})|^2 \,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) \leqslant 1$$

a $g(\vec{x})$ je konečná skoro všude na M. Navíc řada $\sum_{s=1}^{k} \big|f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\big|$ má pro skoro všechna $\vec{x} \in M$ konečný součet a tudíž i řada $\sum_{s=1}^{k} \big(f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\big)$ je konvergentní, a tedy také posloupnost

$$f_k(\vec{x}) = \sum_{s=1}^{k-1} \big(f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\big) + f_{k_1}(\vec{x}).$$

Označme $f(\vec{x})$ její limitu. Ta je samozřejmě měřitelná jako limita posloupnosti měřitelných funkcí.

Ve druhé části důkazu ukážeme, že posloupnost $\big(f_{k_\ell}(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$ konverguje právě k této funkci $f(\vec{x})$ v $\mathbb{L}_2(G)$. Předně z cauchyovskosti posloupnosti $\big(f_{k_\ell}(\vec{x})\big)_{\ell=1}^{\infty}$ plyne cauchyovskost podposloupnosti $\big(f_{k_\ell}(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$, a tedy pro $\epsilon = 1$ existuje $k_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro $\ell > k_0$ a $m > k_0$ je

$$\int_M \big|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f_{k_m}(\vec{x})\big|^2 \,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) < 1.$$

Podle Fatouovy věty (viz věta 2.1.7, str. 26 v (někde - DOPLNIT) je

$$\int_M \big|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f(\vec{x})\big|^2 \,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) < 1,$$

odkud plyne, že funkce $f(\vec{x})$ rozepsaná jako $\big(f(\vec{x}) - f_{k_\ell}(\vec{x})\big) + f_{k_\ell}(\vec{x})$ patří do $\mathbb{L}_2(G)$. Provedeme-li stejnou úvahu s libovolně malým ϵ, získáme

$$\int_M \big|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f(\vec{x})\big|^2 \,\mathrm{d}\mu(\vec{x}) < \epsilon^2,$$

což neznamená nic jiného, než že

$$\lim_{\ell\to\infty} f_{k_\ell}(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

V poslední části důkazu ukážeme, že k funkci $f(\vec{x})$ konverguje celá posloupnost $\big(f_k(\vec{x})\big)_{k=1}^{\infty}$. To ovšem plyne ihned z nerovností

$$\big\|f(\vec{x}) - f_k(\vec{x})\big\| \leqslant \big\|f(\vec{x}) - f_{k_\ell}(\vec{x})\big\| + \big\|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f_k(\vec{x})\big\|,$$

neboť první člen napravo můžeme udělat libovolně malým (pro velká k_ℓ) díky dokázané konvergenci zmiňované podposloupnosti a druhý díky cauchyovskosti posloupnosti $\big(f_k(x)\big)_{k=1}^{\infty}$.

2.3.15 Důsledek

Nechť $w(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G)$ je kladná funkce. Faktorový prostor

$$\mathbb{L}_2^{(w)}(G) = \left\{ f(\vec{x}) \in F(G) : \int_G |f(\vec{x})|^2 w(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) < +\infty \right\},$$

společně se skalárním součinem zavedeným vztahem $\int_G f(\vec{x}) g^\star(\vec{x}) w(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x}$ je Hilbertovým prostorem.

2.3.16 Věta

$f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_2(G) \wedge H \subset G \wedge \mu(H) < +\infty \quad \Rightarrow \quad f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(H)$

Důkaz:

- chceme $\int_H |f(\vec{x})|\, \mathrm{d}\vec{x} \in \mathbf{R}$
- $\int_H |f(\vec{x})|\, \mathrm{d}\vec{x} = \int_G |f(\vec{x})| \chi_H(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x} \leqslant \overbrace{\frac{1}{2} \int_G |f(\vec{x})|^2\, \mathrm{d}\vec{x}}^{\in \mathbf{R}} + \overbrace{\frac{1}{2} \int_G \chi_H(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x}}^{\frac{1}{2}\lambda(H)}$

2.3.17 Důsledek

Pro $H \in \mathscr{M}_\lambda$, pro které $\mu(H) < \infty$, platí $\mathscr{L}_2(H) \overset{\neq}{\subset} \mathscr{L}_1(H)$ Znak pro nerovnou inkluzi

2.3.18 Poznámka

Víme, že $\mathscr{C}(\langle a, b \rangle)$ je prehilbertovským prostorem a že skalární součin je definován integrálem $\int_a^b f(x) g^\star(x) w(x) \mathrm{d}x = \langle f | g \rangle_w$. Zkoumejme, je-li také prostorem Hilbertovským.

Doplnit obrazek

Tato posloupnost, ačkoli je Cauchyovská, (viz obrázek) nemá limitu v $\mathscr{C}(\langle a, b \rangle)$, což je spor s definicí limity. Tím pádem je $\mathscr{C}(\langle a, b \rangle)$ neúplným, tedy nehilbertovským prostorem.

2.3.19 Příklad

Posloupnost $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbf{Q}$. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^\infty$ je Cauchyovská, ale $\lim_{n\to\infty} a_n \overset{\mathbf{Q}}{=}$ neexistuje.

2.3.20 Věta

Faktorový prostor $\mathbb{L}_2(G)$ společně se skalárním součinem zavedeným vztahem (2.6) je úplný, tj. jedná se o Hilbertův prostor.

Důkaz:

Jelikož již bylo prokázáno, že $\mathbb{L}_2(G)$ je vektorový prostor nad $\mathbf{C}$, zbývá dokázat úplnost. Vyberme tedy z libovolné cauchyovské posloupnosti $\left(f_k(\vec{x})\right)_{k=1}^\infty$ podposloupnost $\left(f_{k_\ell}(\vec{x})\right)_{\ell=1}^\infty$, jež konverguje skoro všude na G. To je díky cauchyovskosti možné. Cílem důkazu je de facto prokázat, že $\left(f_k(\vec{x})\right)_{k=1}^\infty$ je konvergentní v $\mathbb{L}_2(G)$. První člen podposloupnosti $\left(f_{k_\ell}(\vec{x})\right)_{\ell=1}^\infty$ vyberme tak, aby pro všechna $m > k_1$ platilo

$$\|f_{k_1}(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \frac{1}{2}.$$

To je opět díky cauchyovskosti možné. Druhý člen podposloupnosti vyberme tak, aby pro všechna $m > k_2$ platilo

$$\|f_{k_2}(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \frac{1}{2^2}.$$

Analogicky vyberme $\ell-$tý člen podposloupnosti tak, aby pro všechna $m > k_\ell$ platilo

$$\|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\| < \frac{1}{2^\ell}.$$

Označíme-li nyní

$$g_k(\vec{x}) = \sum_{s=1}^{k} \bigl|f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\bigr|,$$

$$g(\vec{x}) = \sum_{s=1}^{\infty} \bigl|f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\bigr|,$$

bude

$$\|g_k(\vec{x})\| \leqslant \sum_{s=1}^{k} \bigl\|f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\bigr\| < \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{2^s} < 1.$$

Je proto $\int_M |g_n(\vec{x})|^2 \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) < 1$ a podle Leviho věty také

$$\int_M |g(\vec{x})|^2 \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) = \lim_{k\to\infty} \int_M |g_k(\vec{x})|^2 \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) \leqslant 1$$

a $g(\vec{x})$ je konečná skoro všude na M. Navíc řada $\sum_{s=1}^{k} \bigl|f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\bigr|$ má pro skoro všechna $\vec{x} \in M$ konečný součet a tudíž i řada $\sum_{s=1}^{k} \bigl(f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\bigr)$ je konvergentní, a tedy také posloupnost

$$f_k(\vec{x}) = \sum_{s=1}^{k-1} \bigl(f_{k_s+1}(\vec{x}) - f_{k_s}(\vec{x})\bigr) + f_{k_1}(\vec{x}).$$

Označme $f(\vec{x})$ její limitu. Ta je samozřejmě měřitelná jako limita posloupnosti měřitelných funkcí.

Ve druhé části důkazu ukážeme, že posloupnost $\bigl(f_{k_\ell}(\vec{x})\bigr)_{k=1}^{\infty}$ konverguje právě k této funkci $f(\vec{x})$ v $\mathbb{L}_2(G)$. Předně z cauchyovskosti posloupnosti $\bigl(f_{k_\ell}(\vec{x})\bigr)_{\ell=1}^{\infty}$ plyne cauchyovskost podposloupnosti $\bigl(f_{k_\ell}(\vec{x})\bigr)_{k=1}^{\infty}$, a tedy pro $\epsilon = 1$ existuje $k_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro $\ell > k_0$ a $m > k_0$ je

$$\int_M \bigl|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f_{k_m}(\vec{x})\bigr|^2 \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) < 1.$$

Podle Fatouovy věty (viz věta 2.1.7, str. 26 v [4]) je

$$\int_M \bigl|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f(\vec{x})\bigr|^2 \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) < 1,$$

odkud plyne, že funkce $f(\vec{x})$ rozepsaná jako $\bigl(f(\vec{x}) - f_{k_\ell}(\vec{x})\bigr) + f_{k_\ell}(\vec{x})$ patří do $\mathbb{L}_2(G)$. Provedeme-li stejnou úvahu s libovolně malým ϵ, získáme

$$\int_M \bigl|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f(\vec{x})\bigr|^2 \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) < \epsilon^2,$$

což neznamená nic jiného, než že

$$\lim_{\ell\to\infty} f_{k_\ell}(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

V poslední části důkazu ukážeme, že k funkci $f(\vec{x})$ konverguje celá posloupnost $\bigl(f_k(\vec{x})\bigr)_{k=1}^{\infty}$. To ovšem plyne ihned z nerovností

$$\bigl\|f(\vec{x}) - f_k(\vec{x})\bigr\| \leqslant \bigl\|f(\vec{x}) - f_{k_\ell}(\vec{x})\bigr\| + \bigl\|f_{k_\ell}(\vec{x}) - f_k(\vec{x})\bigr\|,$$

neboť první člen napravo můžeme udělat libovolně malým (pro velká k_ℓ) díky dokázané konvergenci zmiňované podposloupnosti a druhý díky cauchyovskosti posloupnosti $\bigl(f_k(x)\bigr)_{k=1}^{\infty}$.

2.3.21 Důsledek

Nechť $w(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G)$ je nenulová a nezáporná funkce. Faktorový prostor

$$\mathbb{L}_w(G) = \bigl\{f(\vec{x}) \in \digamma(G) : \int_G |f(\vec{x})|^2 w(\vec{x}) \, \mathrm{d}\mu(\vec{x}) < +\infty\bigr\},$$

kde $0 < w(\vec{x}) \in \mathscr{C}(G)$, společně se skalárním součinem zavedeným vztahem $\int_G f(\vec{x}) g^\star(\vec{x}) w(\vec{x}) \, \mathrm{d}\vec{x}$ je Hilbertovým prostorem.

2.3.22 Příklad

Skalární součiny na funkcionálních vektorových prostorech jednorozměrných funkcí

- Legendre $\Theta(x-a)\Theta(b-x)$, $G=(a,b)$
- Laguerre $\Theta(x)\mathrm{e}^{-x}$, $G=(0,+\infty)$
- Hermite e^{-x^2}, $G=\mathbf{R}$

dualita s 2.2.9

2.3.23 Definice

Řekneme, že funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ je analytická na G, jestliže pro každé $\vec{c}\in G$ existuje okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})$ tak, že pro všechna $\vec{x}\in\mathcal{U}_\varepsilon(\vec{c})$ platí rovnost

$$f(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^n f_{\vec{c}}(\vec{x})}{n!},$$

kde symbol $\mathrm{d}^n f_{\vec{c}}(\vec{x})$ představuje $n-$tý totální diferenciál v bodě funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{c}$. Třídu všech analytických funkcí na oblasti G označujeme symbolem $\mathscr{A}_G$. Tady mi to nesedi s poznamkami, overit.

2.3.24 Značení

Nadále budeme značit funkcionální Hilbertův prostor symbolem $\mathcal{H}$, přičemž předpokládáme prostor faktorových funkcí $\mathbb{L}_2$ nebo $\mathbb{L}_2^{(w)}$.

2.3.25 Poznámka

Rozlišujeme 3 typy konvergence:

- bodová: $f_n(\vec{x}) \overset{G}{\to} f(\vec{x})$
- stejnoměrná: $f_n(\vec{x}) \overset{G}{\rightrightarrows} f(\vec{x}) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbf{N})(n>n_0 \wedge \vec{x}\in G \Rightarrow |f_n(\vec{x})-f(\vec{x})|<\varepsilon)$
- podle normy: $f_n(\vec{x}) \rightharpoonup f(\vec{x}) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbf{N})(n>n_0 \wedge \|f_n(\vec{x})-f(\vec{x})\|<\varepsilon)$

Poznamenejme, že ve výrazu $\|f_n(\vec{x})-f(\vec{x})\|$ je skryt Lebesgueův integrál, který konverguje i tam, kde na množině nulové míry nekonverguje.

2.3.26 Věta

Nechť $f_n(\vec{x}) \overset{\langle a,b\rangle}{\rightrightarrows} f(\vec{x})$ a $\langle f|g\rangle_w$. je skalární součin dle definice 2.6 pro $\mathscr{C}(\langle a,b\rangle)$. Pak $f_n(\vec{x}) \rightharpoonup (\vec{x})$.

Bez důkazu.

2.3.27 Věta

$f_n(\vec{x}) \overset{G}{\rightrightarrows} f(\vec{x}) \wedge \mu(G)<+\infty \Rightarrow f_n(\vec{x}) \overset{\mathscr{L}_2^{(w)}(G)}{\rightharpoonup} f(\vec{x})$. Je-li váha omezená na G.

Důkaz:

- $\|f_n(\vec{x})-f(\vec{x})\|^2 = \langle f_n(\vec{x})-f(\vec{x})|f_n(\vec{x})-f(\vec{x})\rangle = \int_G |f_n(\vec{x})-f(\vec{x})|^2\,\mathrm{d}\vec{x} \leqslant \mu(G)\sup|f_n(\vec{x})-f(\vec{x})|^2 \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$
- $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbf{N})\left((n\geqslant n_0 \wedge \vec{x}\in G) \Rightarrow |f_n(\vec{x})-f(\vec{x})| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\mu(G)}}\right)$

2.3.28 Věta – *o spojitosti skalárního součinu*

Nechť je dán Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem $\mathbf{C}$. Nechť je dána posloupnost funkcí $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ z prostoru $\mathcal{H}$, která konverguje podle normy k funkci $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$, a funkce $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n|g\rangle = \langle f|g\rangle, \quad \lim_{n\to\infty} \langle g|f_n\rangle = \langle g|f\rangle.$$

Důkaz:

- $|\langle f_n(\vec{x})|g(\vec{x})\rangle - \langle f(\vec{x})|g(\vec{x})\rangle| = |\langle f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})|g(\vec{x})\rangle| \leqslant \|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\| \cdot \|g(\vec{x})\| < \varepsilon$
- $\|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})\| < \dfrac{\varepsilon}{\|g(\vec{x})\|}$
- Toto platí ve všech připadech kromě $\|g(\vec{x})\| = 0$, což je však triviální

2.3.29 Definice

Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\vec{x})$ je funkcionální řada, a $s_n(\vec{x})$ její ň-tý cástečný součet. Pak označíme:

- součet podle normy $\underline{\sum}_{n=1}^{+\infty} f_n(\vec{x})$
- limitu podle normy $\operatorname{limnorm}_{n\to\infty} s_n(\vec{x}) = s(\vec{x}) \in \mathcal{H}$
- tedy $\underline{\sum}_{n=1}^{+\infty} f_n(\vec{x}) = s(\vec{x}) \in \mathcal{H}$

2.3.30 Věta

$f_n(\vec{x}), s(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ a $\underline{\sum}_{n=1}^{+\infty} f_n(\vec{x}) = s(\vec{x})$. Pak platí

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \langle f_n(\vec{x})|g(\vec{x})\rangle = \langle s(\vec{x})|g(\vec{x})\rangle \equiv \left\langle \underline{\sum_{n=1}^{+\infty}} f_n(\vec{x})|g(\vec{x})\right\rangle.$$

Důkaz:
dodelam (prejit na posloupnost castecnych souctu)

2.3.31 Poznámka

Domácí úkol: Je $\|f\|_\infty := \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f|$ normou na $\mathscr{C}(\langle a,b\rangle)$? A je $\mathscr{C}(\langle a,b\rangle)$ s touto normou úplný?

2.3.32 Poznámka

Operace konvoluce na prostoru klasických funkcí – definice na $\mathscr{L}_{\text{loc}}(\mathbf{E}^r)$

2.3.33 Věta

o existenci konvoluce v $\mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$

2.3.34 Poznámka

Bilinearita konvoluce v $\mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ (ve cvičení)

2.3.35 Poznámka

Komutativita konvoluce v $\mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$

2.3.36 Poznámka

o konvoluci funkcí tvaru $\Theta(x)F(x)$, kde $F(x) \in \mathscr{L}_{\text{loc}}(\mathbf{R})$

2.3.37 Poznámka

definice pojmů hustota a hustota pravděpodobnosti

2.3.38 Věta

$f(\vec{x}), g(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ jsou hustoty, pak $\big(f * g\big)(\vec{x})$ je rovněž hustotou a vždy existuje.

Důkaz:

- $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_{\mathbf{1}}(\mathbf{E}^r) \Rightarrow \big(f * g\big)(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$
- nezápornost:
$$\big(f * g\big)(\vec{x}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})g(\vec{x} - \vec{s})\,\mathrm{d}\vec{s} \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbf{E}^r,$$
neboť z definice hustot je integrál větší nebo roven 0 a existuje
-
$$\int_{\mathbf{E}^r} \big(f * g\big)(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r}\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})g(\vec{x} - \vec{s})\,\mathrm{d}\vec{s}\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{x} - \vec{s})\,\mathrm{d}\vec{x}\,\mathrm{d}\vec{s} =$$
$$= \left| \begin{array}{l} \vec{y} = \vec{x} - \vec{s} \\ \mathrm{d}\vec{y} = \mathrm{d}\vec{x} \end{array} \right| = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y}\,\mathrm{d}\vec{s} = 1 \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})\,\mathrm{d}\vec{s} = 1$$

2.3.39 Poznámka

Střední hodnota z r, $f(r)$ je $\langle r\rangle = \int_{\mathbf{R}} r f(r)\,\mathrm{d}r$.

2.3.40 Věta

Nechť $f(x), g(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ jsou hustoty. Nechť $\int_{\mathbf{R}} x f(x)\,\mathrm{d}x = \mu_1$ a $\int_{\mathbf{R}} x g(x)\,\mathrm{d}x = \mu_2$. Pak $\int_{\mathbf{R}} \big(f * g\big)(x)\,\mathrm{d}x = \mu_1 + \mu_2$.

Důkaz:

- teoretické požadavky již byly dokázány v předchozí větě
-
$$\int_{\mathbf{R}} x\big(f * g\big)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} x \int_{\mathbf{R}} f(s)g(x - s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} f(s) \int_{\mathbf{R}} xg(x - s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s =$$
$$= \left| \begin{array}{l} y = x - s \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int_{\mathbf{R}} f(s) \int_{\mathbf{R}} (y + s)g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbf{R}}^{2} f(s)yg(y)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbf{R}}^{2} f(s)sg(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s =$$
$$= \Big|\text{Věta o separabilitě}\Big| = \int_{\mathbf{R}} f(s)\,\mathrm{d}s \int_{\mathbf{R}} yg(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbf{R}} sf(s)\,\mathrm{d}s \int_{\mathbf{R}} g(y)\,\mathrm{d}y = \mu_1 + \mu_2$$

2.3.41 Věta – *o posunutí v konvoluci*

$f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r), \vec{\mu} \in \mathbf{E}^r$. Pak platí: $(f \star g)(\vec{x} - \vec{\mu}) = f(\vec{x}) \star g(\vec{x} - \vec{\mu}) = f(\vec{x} - \vec{\mu}) \star g(\vec{x})$

2.3.42 Poznámka

Zde používaáme afinní transformaci, tudíž za každé $\vec{x}$ dosadíme $\vec{x} - \vec{\mu}$. Souvislost s předchozí větou je taková, že lze posunout střední hodnotu v případě, že za f, g zvolíme hustoty.

2.3.43 Věta – *o derivaci konvoluce*

$f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r), g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r) \cap \mathscr{C}_0^1$. Pak platí $\dfrac{\partial}{\partial x_k}(f \star g) = f(\vec{x}) \star \dfrac{g}{x_k}(\vec{x})$.

Důkaz:

- $\dfrac{\partial}{\partial x_k}(f \star g) = \dfrac{\partial}{\partial x_k} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})g(\vec{x} - \vec{s})\,\mathrm{d}\vec{s}$
- použijeme větu o derivaci integrálu s parametrem

- $\dfrac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}\alpha} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x}|\alpha)\,\mathtt{d}\vec{x} \to \dfrac{\mathtt{d}}{\mathtt{d}\alpha_k} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x}|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\,\mathtt{d}\vec{x}$
- ověřme předpoklady věty:
  - výraz v integrálu musí konvergovat, což je splněno
  - měřitelnost je splněna, jelikož výraz je z $\mathscr{L}_1$
  - diferencovatelnost, výraz nahradíme integrabilní majorantou: $\left| f(\vec{s}) \dfrac{\partial g}{\partial x_k}(\vec{x} - \vec{s}) \right| \leqslant K \left| f(\vec{s}) \right| \in \mathscr{L}(\mathbf{E})$, a využijeme vlastnost, že funkce na kompaktu nabývá maxima
- $\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \dfrac{\partial g}{\partial x_k}(\vec{x} - \vec{s})\,\mathtt{d}\vec{s} = \left(f \star \dfrac{\partial g}{\partial x_k} \right)(\vec{x})$

2.3.44 Poznámka

Povšimněme si, že se věta jeví na první pohled nevyvážená, je to z důvodu požadavku na diferencovatelnost pouze pro g. Zároveň si povšimněme absence dodatku "pokud levá (pravá) strana existuje". U konvoluce pozorujeme tzv. vyhlazovací efekt, kdy pokud je $g(x)$ hladká, pak existuje konvoluce i její derivace bez ohledu na to, jak nespojitá je funkce $f(x)$.

2.3.45 Příklad

Spočítejme konvoluci dvou Gaussovzch funkcí. Položme $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\dfrac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$ a $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\dfrac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$. Pak dopočítám později.

Kapitola 3

Teorie pravděpodobnosti

3.1 Axiomatická definice pravděpodobnosti

Způsobů, jak vybudovat teorii pravděpodobnosti je více. My se v tomto textu přidržíme axiomatické výstavby pojmu pravděpodobnost, kdy s výhodou využijeme obecné poznatky z teorie míry.

3.1.1 Definice

Nech?je dán základní pravděpodobností prostor Ω. Nechť $\mathscr{X} \subset 2^{\Omega}$ je množinová sigma-algebra a $\Omega \in \mathscr{X}$ její prezident. Pak každou sigma-aditivní míru $\mathrm{P}(X) : \mathscr{X} \mapsto \langle 0, 1\rangle$ nazýváme *pravděpodobnostní mírou (pravděpodobností)* na $\mathscr{X}$, pokud je tzv. *normalizovaná,* tj. platí-li, že

$$\mathrm{P}[\Omega] = 1.$$

3.1.2 Poznámka

Díky definici 3.1.1 splňuje každá pravděpodobnostní míra následující axiomy známé z obecné definice míry (viz definice 3.1.18, str. 167 v [3]):

1. *axiom nulové množiny:* $\emptyset \in \mathscr{X}$, kde symbol $\emptyset$ reprezentuje nemožný jev,
2. *axiom míry nulové množiny:* $\mathrm{P}[\emptyset] = 0$,
3. *axiom nezápornosti*: $\forall X \in \mathscr{X} : \mathrm{P}[X] \geqslant 0$,
4. *axiom monotónie*: $X_1 \subset X_2 \implies \mathrm{P}[X_1] \leqslant \mathrm{P}[X_2]$,
5. *axiom aditivity*: $\mathrm{P}[X_1 \uplus X_2] = \mathrm{P}[X_1] + \mathrm{P}[X_2]$,
6. *axiom normality*: $\mathrm{P}[\Omega] = 1$.
7. *axiom $\sigma-$aditivity*: $\mathrm{P}[\uplus_{\ell=1}^{\infty} X_\ell] = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathrm{P}[X_\ell]$.

Pro jistotu upozorňujeme, že symbol $\uplus$ reprezentuje disjunktní sjednocení.

3.1.3 Definice

Nechť je dán základní pravděpodobností prostor Ω, $\sigma-$algebra $\mathscr{X} \subset 2^{\Omega}$ $\mathrm{P}-$měřitelných množin a příslušná pravděpodobnostní míra $\mathrm{P}(X) : \mathscr{X} \mapsto \langle 0, 1\rangle$. Pak trojici $\{\Omega, \mathscr{X}, \mathrm{P}\}$ budeme nazývat *pravděpodobnostním prostorem.*

3.1.4 Definice

Nechť jsou dány jevy $A, B \subset \Omega$. Řekneme, že jevy A a B jsou *nezávislé,* jestliže platí

$$\mathrm{P}[A \cap B] = \mathrm{P}[A] \cdot \mathrm{P}[B].$$

3.1.5 Definice

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $\{\Omega, \mathscr{X}, \mathrm{P}\}$. Každé zobrazení $\mathcal{X} : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ takové, že pro každé $c \in \mathbf{R}$ platí

$$\mathcal{X}^{-1}\big((-\infty, c\rangle\big) = \big\{\omega \in \Omega : \mathcal{X}(\omega) \leqslant c\big\} \in \mathscr{X}, \tag{3.1}$$

nazveme *náhodnou veličinou.*

3.1.6 Poznámka

Vztah (3.1) vlastně požaduje, aby vzory všech intervalů $(-\infty, c\rangle$ byly $\mathrm{P}-$měřitelnými množinami. Z hlediska obecné teorie míry je definice náhodné veličiny de facto shodná s definicí měřitelné funkce (viz definice 4.1.5, str. 201 ve skriptech [3]).

3.1.7 Poznámka

Symbolem $\mathrm{P}[\mathcal{X} < x]$ budeme označovat pravděpodobnost, že náhodná veličina $\mathcal{X}$ nabude hodnoty menší než x. Podobně označuje symbol $\mathrm{P}[\mathcal{X} \in A]$ pravděpodobnost, že náhodná veličina $\mathcal{X}$ nabude hodnoty z množiny A. Alternativně to zapisujeme též znakem $\mathrm{P}[A]$, není-li nutné explicitně zmiňovat o jakou náhodnou veličinu se jedná. Analogicky dále zavádíme symboly $\mathrm{P}[\mathcal{X} \geqslant x]$, $\mathrm{P}[\mathcal{X} = 7]$, $\mathrm{P}[\mathbf{N}]$ a podobně.

3.1.8 Definice

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $\{\Omega, \mathscr{X}, \mathrm{P}\}$ a náhodná veličina $\mathcal{X} : \Omega \mapsto \mathbf{R}$. Reálnou funkci zavedenou předpisem

$$F_{\mathcal{X}}(x) := \mathrm{P}[\mathcal{X} \leqslant x]$$

nazýváme *distribuční funkcí* náhodné veličiny $\mathcal{X}$.

3.1.9 Poznámka

Je-li pravděpodobnost $\mathrm{P}(X) : \mathscr{X} \mapsto \langle 0, 1\rangle$ definována jako míra, pak distribuční funkce $F_{\mathcal{X}}(x)$ představuje de facto vytvořující funkci míry. Jako taková musí splňovat následující předpoklady:

- je neklesající na $\mathbf{R}$,
- $\mathrm{Ran}(F) \subset \langle 0, 1\rangle$,
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$,
- $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$,
- $F(x)$ je spojitá zprava na $\mathbf{R}$, tj. pro každé $c \in \mathbf{R}$ platí $\lim_{x\to c_+} F(x) = F(c)$,
- $F(x)$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.

3.2 Absolutně spojitá náhodná veličina

Nejprve se budeme zabývat speciálními případy jednorozměrných náhodných veličin. Vybereme přitom pouze ty, které mají přímou vazbu k teorii, jež je náplní těchto skript, tj. k teorii parciálních diferenciálních rovnic.

3.2.1 Definice

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $\{\Omega, \mathscr{X}, \mathrm{P}\}$ a náhodná veličina $\mathcal{X} : \Omega \mapsto \mathbf{R}$. Řekneme, že náhodná veličina $\mathcal{X}$ má *absolutně spojité rozdělení,* existuje-li nezáporná funkce $f_{\mathcal{X}}(t) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ taková, že pro distribuční funkci $F_{\mathcal{X}}(x)$ náhodné veličiny $\mathcal{X}$ platí

$$F_{\mathcal{X}}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\mathcal{X}}(t)\,\mathtt{d}t.$$

3.2.2 Definice

Nechť je dána náhodná veličina $\mathcal{X}$. Existuje-li pro ni funkce $f_{\mathcal{X}}(x)$ z předešlé definice, pak tuto funkci $f_{\mathcal{X}}(x)$ nazýváme *hustotou pravděpodobnosti* náhodné veličiny $\mathcal{X}$.

3.2.3 Úmluva

V dalším textu předpokládáme, že je pevně zvolen pravděpodobnostní prostor $\{\Omega, \mathscr{X}, \mathrm{P}\}$.

3.2.4 Věta

Nechť má náhodná veličina $\mathcal{X}$ absolutně spojité rozdělení. Nechť $F_{\mathcal{X}}(x)$ je její distribuční funkce a $f_{\mathcal{X}}(x)$ její hustota pravděpodobnosti. Potom ve všech bodech, kde existuje derivace funkce $F_{\mathcal{X}}(x)$, platí

$$f_{\mathcal{X}}(x) = \frac{\mathtt{d}F_{\mathcal{X}}}{\mathtt{d}x}(x). \tag{3.2}$$

Důkaz:

- plyne z vlastnosti integrálu a derivace

3.2.5 Poznámka

Pro hustotu pravděpodobnosti platí z výše uvedeného tzv. *normalizační podmínka* tvaru

$$\int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathtt{d}x = 1.$$

Formální součin $f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathtt{d}x$ pak (velmi populárně řečeno) představuje pravděpodobnost, že náhodně vybrané x padne do intervalu $(x, x + \mathtt{d}x)$.

3.2.6 Poznámka

Každá nezáporná funkce $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, pro níž

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mathtt{d}x = 1,$$

může být chápána jako hustota pravděpodobnosti určité jednorozměrné náhodné veličiny.

3.2.7 Věta

Nechť má náhodná veličina $\mathcal{X}$ absolutně spojité rozdělení s hustotou pravděpodobnosti $f_{\mathcal{X}}(x)$. Potom pro každou množinu $A = (a, b\rangle$, kde $a, b \in \mathbf{R}^\star$ a $a \leqslant b$, platí

$$\mathrm{P}\big[\mathcal{X} \in A\big] = \int_A f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathtt{d}x.$$

Důkaz:

- označme $F_{\mathcal{X}}(x)$ příslušnou distribuční funkci
- pak

$$\mathrm{P}\big[a < \mathcal{X} \leqslant b\big] = F_{\mathcal{X}}(b) - F_{\mathcal{X}}(a) = \int_{-\infty}^{b} f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathtt{d}x - \int_{-\infty}^{a} f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathtt{d}x = \int_a^b f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathtt{d}x$$

3.2.8 Poznámka

Předešlá věta zůstává v platnosti i pro obecné množiny A, tedy ne pouze pro intervaly.

3.2.9 Definice

Nechť je dána náhodná veličina $\mathcal{X}$, jež má absolutně spojité rozdělení, a příslušná hustota pravděpodobnosti $f_{\mathcal{X}}(x)$. Konverguje-li integrál

$$\int_{\mathbf{R}} x f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathtt{d}x,$$

pak jeho hodnotu nazýváme *střední hodnotou* náhodné veličiny $\mathcal{X}$ (*expected value of* $\mathcal{X}$) a značíme jedním ze symbolů $\mathtt{E}(\mathcal{X})$ nebo $\langle x\rangle$.

3.2.10 Definice

Nechť je dána náhodná veličina $\mathcal{X}$, příslušná hustota pravděpodobnosti $f_{\mathcal{X}}(x)$ a její střední hodnota $\langle x\rangle$. Konverguje-li integrál

$$\int_{\mathbf{R}} \big(x - \langle x\rangle\big)^2 f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x, \tag{3.3}$$

pak příslušnou hodnotu nazýváme *rozptylem* náhodné veličiny $\mathcal{X}$ (*variance of* $\mathcal{X}$) a značíme symbolem $\mathtt{VAR}(\mathcal{X})$.

3.2.11 Věta

Nechť je dána náhodná veličina $\mathcal{X}$ a její střední hodnota $\langle x\rangle$. Konverguje-li integrál $\int_{\mathbf{R}} x^2 f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x$, pak platí

$$\mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \int_{\mathbf{R}} x^2 f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x - \langle x\rangle^2 \geqslant 0,$$

tj. $\mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \mathtt{E}(\mathcal{X}^2) - \big(\mathtt{E}(\mathcal{X})\big)^2$.

<u>*Důkaz:*</u>

- snadno vypočteme

$$\big\langle (x-\langle x\rangle)^2\big\rangle = \int_{\mathbf{R}} \big(x-\langle x\rangle\big)^2 f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} x^2 f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_{\mathbf{R}} x\langle x\rangle f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}} \langle x\rangle^2 f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \langle x^2\rangle - 2\langle x\rangle \underbrace{\int_{\mathbf{R}} x f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x}_{=\langle x\rangle} + \langle x\rangle^2 \underbrace{\int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x}_{=1} = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \mathtt{E}(\mathcal{X}^2) - \mathtt{E}^2(\mathcal{X})$$

- to, že $\mathtt{VAR}(\mathcal{X}) \geqslant 0$, plyne bezprostředně z faktu, že integrand $(x-\langle x\rangle)^2$ v definičním vztahu (3.3) je nezápornou funkcí

3.2.12 Definice

Nechť je dána náhodná veličina $\mathcal{X}$ a její rozptyl $\mathtt{VAR}(\mathcal{X})$. *Směrodatnou odchylkou* (standard deviation) rozumíme hodnotu

$$\mathtt{SD}(\mathcal{X}) := \sqrt{\mathtt{VAR}(\mathcal{X})}.$$

3.2.13 Definice

Řekneme, že náhodná veličina $\mathcal{X}$ má *rovnoměrné rozdělení* (uniform distribution) s parametry $a, b \in \mathbf{R}$ $(a < b)$ a označíme $\mathcal{X} \backsim U_{(a,b)}$, pokud pro její hustotu pravděpodobnosti platí vztah

$$f_{\mathcal{X}}(x) = \frac{\Theta(x-a)\cdot\Theta(b-x)}{b-a}.$$

3.2.14 Věta

Nechť $\mathcal{X} \backsim U_{(a,b)}$. Pak

$$\langle x\rangle = \frac{a+b}{2}, \quad \mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- snadno nahlédneme, že hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení je správně normalizovaná, neboť

$$\int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = 1$$

- dále

$$\mathtt{E}(\mathcal{X}) = \int_{\mathbf{R}} x\, f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$$

- pro výpočet rozptylu užijeme nejprve pomocný výpočet

$$\mathtt{E}(\mathcal{X}^2) = \int_{\mathbf{R}} x^2\, f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

- podle věty 3.2.11 pak snadno

$$\mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \mathtt{E}(\mathcal{X}^2) - \mathtt{E}^2(\mathcal{X}) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

3.2.15 Definice

Řekneme, že náhodná veličina $\mathcal{X}$ má *Gaussovo (normální) rozdělení* (Gaussian normal distribution) s parametry $\mu, \sigma \in \mathbf{R}$ a označíme $\mathcal{X} \backsim N_{(\mu,\sigma)}$, pokud pro její hustotu pravděpodobnosti platí vztah

$$f_{\mathcal{X}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

3.2.16 Věta

Nech? $\mathcal{X} \backsim N_{(\mu,\sigma)}$. Pak

$$\langle x \rangle = \mu, \quad \mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \sigma^2.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- snadno nahlédneme, že hustota pravděpodobnosti Gaussova rozdělení je správně normalizovaná, neboť

$$\int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}\sigma} \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y \overset{(\mathbf{??})}{=} 1$$

- dále

$$\mathtt{E}(\mathcal{X}) = \int_{\mathbf{R}} x\, f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \frac{x-\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \mu,$$

  kde jsme s výhodou užili faktu, že první z integrálů je nulový díky liché symetrii integrandu a druhý z integrálů je normalizačním integrálem pouze přenásobeným konstantou μ

- pro výpočet rozptylu užijeme nejprve pomocný výpočet

$$\mathtt{E}(\mathcal{X}^2) = \int_{\mathbf{R}} x^2\, f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \frac{(x-\mu+\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}} \frac{2(x-\mu)\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}} \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x + \mu^2 =$$

$$= \left| \begin{array}{c} y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}\sigma} \end{array} \right| = \mu^2 + 2\sigma^2 \int_{\mathbf{R}} \frac{y^2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x = \mu^2 + 2\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \mu^2 + \sigma^2,$$

  kde bylo využito odvozeného vztahu (**??**)

- podle věty 3.2.11 pak snadno $\mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \mathtt{E}(\mathcal{X}^2) - \mathtt{E}^2(\mathcal{X}) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$

3.2.17 Definice

Řekneme, že náhodná veličina $\mathcal{X}$ má *exponenciální rozdělení* (exponential distribution) s parametry $\mu, \beta \in \mathbf{R}$ a označíme $\mathcal{X} \backsim Exp_{(\mu,\beta)}$, pokud pro její hustotu pravděpodobnosti platí vztah

$$f_{\mathcal{X}}(x) = \Theta(x-\mu)\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\beta}}.$$

3.2.18 Věta

Nech? $\mathcal{X} \backsim Exp_{(\mu,\beta)}$. Pak

$$\langle x \rangle = \mu + \beta, \quad \mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \beta^2.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- snadno nahlédneme, že hustota pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení je správně normalizovaná, neboť

$$\int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \Theta(x-\mu)\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\beta}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mu}^{\infty} \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\beta}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} y = \frac{x-\mu}{\beta} \\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{\beta} \end{array} \right| = \int_0^1 \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = 1$$

- dále

$$\mathtt{E}(\mathcal{X}) = \int_{\mathbf{R}} x\, f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \Theta(x-\mu)\frac{x}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\beta}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mu}^{\infty} \frac{x-\mu+\mu}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\beta}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} y = \frac{x-\mu}{\beta} \\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{\beta} \end{array} \right| =$$

$$= \beta \int_0^1 y\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y + \mu \int_0^1 \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \beta + \mu$$

- pro výpočet rozptylu užijeme nejprve pomocný výpočet

$$\mathtt{E}(\mathcal{X}^2) = \int_{\mathbf{R}} x^2\, f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \Theta(x-\mu)\frac{x^2}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\beta}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mu}^{\infty} \frac{x^2}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\beta}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} y = \frac{x-\mu}{\beta} \\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{\beta} \end{array} \right| =$$
$$= \int_0^{\infty} (\mu+\beta y)^2 \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \mu^2 \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y + 2\mu\beta \int_0^{\infty} y\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y + \beta^2 \int_0^{\infty} y^2\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y \overset{\textbf{(??)}}{=} \mu^2 + 2\mu\beta + 2\beta^2$$

- podle věty 3.2.11 pak snadno

$$\mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \mathtt{E}(\mathcal{X}^2) - \mathtt{E}^2(\mathcal{X}) = \mu^2 + 2\mu\beta + 2\beta^2 - (\beta+\mu)^2 = \beta^2$$

3.2.19 Definice

Řekneme, že náhodná veličina $\mathcal{X}$ má *Gamma rozdělení* (Gamma distribution) s parametry $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ $(\alpha > 1, \beta > 0)$ a označíme $\mathcal{X} \backsim Gamma_{(\alpha,\beta)}$, pokud pro její hustotu pravděpodobnosti platí vztah

$$f_{\mathcal{X}}(x) = \frac{\Theta(x)}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}}.$$

3.2.20 Věta

Nech? $\mathcal{X} \backsim Gamma_{(\alpha,\beta)}$. Pak

$$\langle x \rangle = \alpha\beta, \quad \mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \alpha\beta^2.$$

<u>*Důkaz:*</u>

- nejprve prověříme, zda je skutečně normalizační integrál $\int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x$ jednotkový
- protože ale

$$\int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \frac{\Theta(x)}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \beta y \\ \mathrm{d}x = \beta\mathrm{d}y \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y \overset{\textbf{(??)}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha) = 1,$$

je funkce $f_{\mathcal{X}}(x) = \frac{\Theta(x)}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}}$ skutečně hustotou pravděpodobnosti

- dále

$$\mathtt{E}(\mathcal{X}) = \int_{\mathbf{R}} x\, f_{\mathcal{X}}(x)\, \mathtt{d}x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty x^\alpha \mathtt{e}^{-\frac{x}{\beta}}\, \mathtt{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \beta y \\ \mathtt{d}x = \beta \mathtt{d}y \end{array} \right| =$$
$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^\alpha \mathtt{e}^{-y}\, \mathtt{d}y \stackrel{(??)}{=} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+1) \stackrel{(??)}{=} \alpha\beta$$

- střední hodnotou Gamma rozdělení je tedy součin obou parametrů rozdělení
- dále

$$\mathtt{E}(\mathcal{X}^2) = \int_{\mathbf{R}} x^2\, f_{\mathcal{X}}(x)\, \mathtt{d}x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha+1} \mathtt{e}^{-\frac{x}{\beta}}\, \mathtt{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \beta y \\ \mathtt{d}x = \beta \mathtt{d}y \end{array} \right| =$$
$$= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha+1} \mathtt{e}^{-y}\, \mathtt{d}y \stackrel{(??)}{=} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+2) \stackrel{(??)}{=} \beta^2(\alpha+1)\alpha$$

- odsud už lehce dovozujeme, že rozptylem zkoumaného rozdělení je hodnota

$$\mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \mathtt{E}(\mathcal{X}^2) - \mathtt{E}^2(\mathcal{X}) = \beta^2(\alpha+1)\alpha - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2,$$

  což bylo dokázat

3.3 Vícerozměrná náhodná veličina

Nyní rozšíříme pojmy náhodné veličiny, distribuční funkce a hustoty pravděpodobnosti na vícerozměrné případy.

3.3.1 Definice

Nechť $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jsou náhodné veličiny. *Sdruženou distribuční funkci* náhodných veličin $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ definujeme pro všechna $(x, y) \in \mathbf{E}^2$ předpisem

$$F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = \mathrm{P}\left(\left[\mathcal{X} \leqslant x\right]\left[\mathcal{Y} \leqslant y\right]\right). \tag{3.4}$$

3.3.2 Věta

Nechť $F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y)$ je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Potom pro všechna $x_1 \leqslant x_2$ a $y_1 \leqslant y_2$ platí nerovnost

$$F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x_1, y_1) \leqslant F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x_1, y_2).$$

Důkaz:

- důkaz plyne přímo z definičního vztahu (3.4), neboť

$$F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x_1, y_1) = \mathrm{P}\left(\left[\mathcal{X} \leqslant x_1\right]\left[\mathcal{Y} \leqslant y_1\right]\right) \leqslant \left| \begin{array}{c} x_1 \leqslant x_2 \\ y_1 \leqslant y_2 \end{array} \right| \leqslant \mathrm{P}\left(\left[\mathcal{X} \leqslant x_1\right]\left[\mathcal{Y} \leqslant y_2\right]\right) \leqslant F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x_1, y_2)$$

3.3.3 Věta

Nechť $F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y)$ je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Potom

$$\forall y \in \mathbf{R}: \quad \lim_{x \to -\infty} F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \to \infty} F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = F_{\mathcal{Y}}(y)$$

a také

$$\forall x \in \mathbf{R}: \quad \lim_{y \to -\infty} F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{y \to \infty} F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = F_{\mathcal{X}}(x).$$

Důkaz:

- důkaz plyne přímo z definičního vztahu (3.4) a z definice pravděpodobnostní míry, neboť např.

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{P}\left(\left[\mathcal{X} \leqslant x\right]\left[\mathcal{Y} \leqslant y\right]\right) = 0$$

- dále

$$\lim_{x \to \infty} F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = \lim_{x \to \infty} \mathrm{P}\left(\left[\mathcal{X} \leqslant x\right]\left[\mathcal{Y} \leqslant y\right]\right) = \mathrm{P}\left(\left[\mathcal{X} \in \mathbf{R}\right]\left[\mathcal{Y} \leqslant y\right]\right) = \mathrm{P}\left(\left[\mathcal{Y} \leqslant y\right]\right)$$

- výraz na pravé straně zjevně konverguje a jeho hodnota závisí na proměnné y
- definujme tedy $F_{\mathcal{Y}}(y) := \mathrm{P}\left(\left[\mathcal{Y} \leqslant y\right]\right)$
- tato funkce je tudíž jakousi dílčí distribuční funkcí

3.3.4 Definice

Nechť $F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y)$ je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Potom funkce $F_{\mathcal{X}}(x)$ a $F_{\mathcal{Y}}(y)$ z předešlé věty budeme nazývat *marginálními distribučními funkcemi* náhodného vektoru $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Veličiny $\mathcal{X}$, resp. $\mathcal{Y}$ nazýváme analogicky *marginálními náhodnými veličinami.*

3.3.5 Definice

Řekneme, že náhodné veličiny $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jsou *(statisticky) nezávislé,* jestliže jsou jevy

$$\big[a < \mathcal{X} \leqslant b\big], \quad \big[c < \mathcal{Y} \leqslant d\big]$$

nezávislé pro všechny $a, b, c, d \in \mathbf{R}^\star$, pro které $a \leqslant b$ a $c \leqslant d$.

3.3.6 Věta

Náhodné veličiny $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou nezávislé právě tehdy, když pro každou dvojici $(x, y) \in \mathbf{E}^2$ platí rovnost

$$F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = F_{\mathcal{X}}(x) \cdot F_{\mathcal{Y}}(y),$$

tj. sdružená distribuční funkce $F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y)$ je rovna součinu tzv. *marginálních distribučních funkcí* $F_{\mathcal{X}}(x)$ a $F_{\mathcal{Y}}(y)$.

Důkaz:

- předpokládejme nejprve, že $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou nezávislé náhodné veličiny, tj. pro všechny $a, b, c, d \in \mathbf{R}^\star$, pro něž $a \leqslant b$ a $c \leqslant d$, platí
$$\mathrm{P}\left(\big[a < \mathcal{X} \leqslant b\big], \big[c < \mathcal{Y} \leqslant d\big]\right) = \mathrm{P}\left(\big[a < \mathcal{X} \leqslant b\big]\right) \cdot \mathrm{P}\left(\big[c < \mathcal{Y} \leqslant d\big]\right)$$
- položíme-li v předešlém výraze $a = -\infty, b = x, c = -\infty, d = y$, pak pro libovolnou uspořádanou dvojici $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ platí sada rovností
$$F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = \mathrm{P}\left(\big[-\infty < \mathcal{X} \leqslant x\big]\big[-\infty < \mathcal{Y} \leqslant y\big]\right) = \mathrm{P}\left(\big[-\infty < \mathcal{X} \leqslant x\big]\right) \cdot \mathrm{P}\left(\big[-\infty < \mathcal{Y} \leqslant y\big]\right) = F_{\mathcal{X}}(x) \cdot F_{\mathcal{Y}}(y)$$
- obrácenou implikaci prokáže sada rovností

$$\mathrm{P}\left(\big[a < \mathcal{X} \leqslant b\big], \big[c < \mathcal{Y} \leqslant d\big]\right) = F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(b, d) - F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(b, yc) - F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(a, d) + F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(a, c) =$$

$$= F_{\mathcal{X}}(b)F_{\mathcal{Y}}(d) - F_{\mathcal{X}}(b)F_{\mathcal{Y}}(c) - F_{\mathcal{X}}(a)F_{\mathcal{Y}}(d) + F_{\mathcal{X}}(a)F_{\mathcal{Y}}(c) = \big(F_{\mathcal{X}}(b) - F_{\mathcal{X}}(a)\big)\big(F_{\mathcal{Y}}(d) - F_{\mathcal{Y}}(c)\big) =$$

$$= \mathrm{P}\left(\big[a < \mathcal{X} \leqslant b\big]\right) \cdot \mathrm{P}\left(\big[c < \mathcal{Y} \leqslant d\big]\right)$$

3.3.7 Definice

Řekneme, že náhodné veličiny $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ mají *sdružené absolutně spojité rozdělení,* jestliže existuje nezáporná funkce $f_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ taková, že

$$F_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n}(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n)\,\mathrm{d}\vec{t} \tag{3.5}$$

pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{E}^n$. Funkci $f_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n}(\vec{x})$ nazýváme *sdruženou hustotou pravděpodobnosti* náhodných veličin $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$.

3.3.8 Poznámka

Veličiny $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ z předešlé definice někdy nazýváme zjednodušeně jako *absolutně spojité.* Navíc každá nezáporná funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$, pro níž $\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = 1$, může být chápána jako hustota pravděpodobnosti určité vícerozměrné náhodné veličiny.

3.3.9 Věta

Nechť mají náhodné veličiny $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ sdružené absolutně spojité rozdělení. Potom $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ jsou nezávislé právě tehdy, když pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{E}^n$ platí

$$f_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n}(\vec{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{\mathcal{X}_i}(x_i).$$

Důkaz:

- důkaz budeme demonstrovat na případu $n = 2$
- chceme tedy dokázat, že $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou nezávislé právě tehdy, když $f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y) = f_{\mathcal{X}}(x) \cdot f_{\mathcal{Y}}(y)$
- pro důkaz první implikace vyjdeme z předpokladu, že $f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y) = f_{\mathcal{X}}(x) \cdot f_{\mathcal{Y}}(y)$
- pro distribuční funkci $F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y)$ pak podle vztahu (3.5) a dostáváme
$$F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(t,s)\,\mathtt{d}t\,\mathtt{d}s = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{\mathcal{X}}(t) f_{\mathcal{Y}}(s)\,\mathtt{d}t\,\mathtt{d}s$$
- z Fubiniovy věty pak
$$F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y) = \left(\int_{-\infty}^{x} f_{\mathcal{X}}(t)\,\mathtt{d}t\right)\left(\int_{-\infty}^{y} f_{\mathcal{Y}}(s)\,\mathtt{d}s\right) = F_{\mathcal{X}}(x) \cdot F_{\mathcal{Y}}(y)$$
- to ale podle věty 3.3.6 implikuje skutečnost, že $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou nezávislé
- pro druhou implikaci předpokládejme, že $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou nezávislé náhodné veličiny
- z tohoto předpokladu plyne, že
$$F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y) = F_{\mathcal{X}}(x) \cdot F_{\mathcal{Y}}(y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(t,s)\,\mathtt{d}t\,\mathtt{d}s$$
- z definice 3.3.7 odtud ihned vyplývá, že $f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y) = f_{\mathcal{X}}(x) \cdot f_{\mathcal{Y}}(y)$

3.3.10 Poznámka

Zcela analogicky vztahu (3.2) platí také pro vícerozměrné náhodné veličiny vztah

$$f_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n}(\vec{x}) = \frac{\partial^n F_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n}}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n},$$

pokud je pravá strana definována. Dále také

$$\mathrm{P}\big[a_1 < \mathcal{X} \leqslant b_1, a_2 < \mathcal{X} \leqslant b_2, \ldots, a_n < \mathcal{X} \leqslant b_n\big] = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n}(\vec{x})\,\mathtt{d}x_n \mathtt{d}x_{n-1} \ldots \mathtt{d}x_2 \mathtt{d}x_1.$$

3.3.11 Definice

Nechť je dána vícerozměrná náhodná veličina $\overrightarrow{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n)$ mající sdružené absolutně spojité rozdělení a příslušná vícerozměrná hustota pravděpodobnosti $f(\vec{x})$. Konverguje-li integrál druhého druhu

$$\int_{\mathbf{R}} \vec{x} f(\vec{x})\,\mathtt{d}\vec{x} = \left(\int_{\mathbf{R}} x_1 f(\vec{x})\,\mathtt{d}\vec{x}, \int_{\mathbf{R}} x_2 f(\vec{x})\,\mathtt{d}\vec{x}, \ldots, \int_{\mathbf{R}} x_n f(\vec{x})\,\mathtt{d}\vec{x}\right),$$

pak příslušný vektor nazýváme *střední hodnotou* vícerozměrné náhodné veličiny $\overrightarrow{\mathcal{X}}$ a značíme jedním ze symbolů $\mathtt{E}(\overrightarrow{\mathcal{X}})$ nebo $\langle\vec{x}\rangle$.

3.3.12 Lemma

Nechť $\mathscr{A}$ je třída všech absolutně spojitých náhodných veličin $\mathcal{X}$, pro něž existují střední hodnoty $\mathtt{E}(\mathcal{X})$. Pak pro každé $c \in \mathbf{R}$ a všechny $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathscr{A}$ platí, že

$$\mathtt{E}(c\mathcal{X}) = c\,\mathtt{E}(\mathcal{X}), \quad \mathtt{E}(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = \mathtt{E}(\mathcal{X}) + \mathtt{E}(\mathcal{Y}).$$

3.3.13 Definice

Nechť jsou dány náhodné veličiny $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$. Nechť existují střední hodnoty $\mathtt{E}(\mathcal{X})$ a $\mathtt{E}(\mathcal{Y})$. Pak *kovariancí náhodných veličin* rozumíme číslo

$$\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) := \mathtt{E}\Big[\big(\mathcal{X}-\mathtt{E}(\mathcal{X})\big)\big(\mathcal{Y}-\mathtt{E}(\mathcal{Y})\big)\Big], \tag{3.6}$$

pokud pravá strana existuje.

3.3.14 Věta

Nechť $\mathscr{A}$ je třída všech náhodných veličin $\mathcal{X}$, pro něž existují střední hodnoty $\mathtt{E}(\mathcal{X})$ a rozptyly $\mathtt{VAR}(\mathcal{X})$. Pak zobrazení definované předpisem (3.6) splňuje axiomy skalárního součinu, tj. kovariance náhodných veličin je skalárním součinem.

Důkaz:

- nejprve podotýkáme, že prvky třídy $\mathscr{A}$ musejí být nyní chápány poněkud obecněji, neboť je třeba, aby do $\mathscr{A}$ patřily i náhodné veličiny, jež mají nulový rozptyl a nejsou tudíž absolutně spojité

- nejprve prokážeme, že zobrazení definované předpisem (3.6) splňuje axiom homogenity

- pro libovolné $c \in \mathbf{R}$ ale zcela jasně (při aplikaci lemmatu 3.3.12) platí

$$\mathtt{COV}(c\mathcal{X},\mathcal{Y}) := \mathtt{E}\Big[\big(c\mathcal{X}-\mathtt{E}(c\mathcal{X})\big)\big(\mathcal{Y}-\mathtt{E}(\mathcal{Y})\big)\Big] = c\,\mathtt{E}\Big[\big(\mathcal{X}-\mathtt{E}(\mathcal{X})\big)\big(\mathcal{Y}-\mathtt{E}(\mathcal{Y})\big)\Big] = c\,\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$$

- podobně také pro všechny $\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z} \in \mathscr{A}$ platí, že

$$\begin{aligned}\mathtt{COV}(\mathcal{X}+\mathcal{Z},\mathcal{Y}) &:= \mathtt{E}\Big[\big(\mathcal{X}+\mathcal{Z}-\mathtt{E}(\mathcal{X}+\mathcal{Z})\big)\big(\mathcal{Y}-\mathtt{E}(\mathcal{Y})\big)\Big] = \mathtt{E}\Big[\big(\mathcal{X}+\mathcal{Z}-\mathtt{E}(\mathcal{X})-\mathtt{E}(\mathcal{Z})\big)\big(\mathcal{Y}-\mathtt{E}(\mathcal{Y})\big)\Big] = \\ &= \mathtt{E}\Big[\big(\mathcal{X}-\mathtt{E}(\mathcal{X})\big)\big(\mathcal{Y}-\mathtt{E}(\mathcal{Y})\big)\Big] + \mathtt{E}\Big[\big(\mathcal{Z}-\mathtt{E}(\mathcal{Z})\big)\big(\mathcal{Y}-\mathtt{E}(\mathcal{Y})\big)\Big] = \mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) + \mathtt{COV}(\mathcal{Z},\mathcal{Y})\end{aligned}$$

- symetrie $\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \mathtt{COV}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ je splněna triviálně

- zbývá tedy prokázat axiom pozitivní definitnosti

- označme $f(x,y)$ sdruženou hustotu pravděpodobnosti pro náhodné veličiny $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ a pro všechny $\mathcal{X} \in \mathscr{A}$ zkoumejme kovarianci $\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{X})$

- jedná se tedy o výraz $\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) := \mathtt{E}\Big[\big(\mathcal{X}-\mathtt{E}(\mathcal{X})\big)^2\Big]$, který je na první pohled nezáporný, neboť

$$\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{X}) = \int_{\mathbf{E}^r} \big(x-\mathtt{E}(x)\big)^2 f(x,x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

  což je splněno kvůli nezápornosti integrandu

- poslední, co je třeba prověřit, je skutečnost, že rovnost $\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{X}) = 0$ nastává pouze tehdy, je-li $\mathcal{X}$ nulový prvek třídy $\mathscr{A}$

- přitom ale integrand $\big(x-\mathtt{E}(x)\big)^2 f(x,x)$ může být zjevně nulový pouze pokud náhodná veličina nabývá pouze konstantních hodnot $\gamma \in \mathbf{R}$, kdy $\mathtt{E}(x) = \gamma$

- nulovým prvkem třídy $\mathscr{A}$ je tedy skupina náhodných veličin, jež mají nulový rozptyl

- zde ovšem vyvstává otázka, jak bude vypadat hustota pravděpodobnosti pro takové veličiny

- zde musíme s předstihem konstatovat, že takovými hustotami pravděpodobnosti budou zobecněné funkce zavedené v dalších kapitolách, speciálně Diracova $\delta-$funkce, resp. centrovaná Diracova $\delta-$funkce

- za takových okolností je pak skutečně kovariance $\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ náhodných veličin skalárním součinem na $\mathscr{A}$

3.3.15 Věta

Nechť jsou dány absolutně spojité náhodné veličiny $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ a nechť existuje jejich kovariance $\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Pak platí

$$\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \mathtt{E}(\mathcal{X}\mathcal{Y}) - \mathtt{E}(\mathcal{X})\mathtt{E}(\mathcal{Y}).$$

<u>*Důkaz:*</u>

- z definice kovariance přímo vyplývá, že

$$\begin{aligned}\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) &= \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} \big(x-\mathtt{E}(x)\big)\big(y-\mathtt{E}(y)\big) f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \\ &- \mathtt{E}(y)\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} xf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \mathtt{E}(x)\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} yf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathtt{E}(x)\mathtt{E}(y)\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \mathtt{E}(xy) - \mathtt{E}(x)\mathtt{E}(y) - \mathtt{E}(x)\mathtt{E}(y) + \mathtt{E}(x)\mathtt{E}(y) = \mathtt{E}(\mathcal{X}\mathcal{Y}) - \mathtt{E}(\mathcal{X})\mathtt{E}(\mathcal{Y})\end{aligned}$$

3.3.16 Věta

Nechť jsou dány absolutně spojité nezávislé náhodné veličiny $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$. Nechť existuje jejich kovariance $\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Pak $\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = 0$.

<u>*Důkaz:*</u>

- označme $h(x,y)$ sdruženou hustotu pravděpodobnosti pro náhodné veličiny $\mathcal{X},\mathcal{Y}$
- jelikož $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jsou nezávislé náhodné veličiny, existují podle věty 3.3.9 funkce $f(x)$ a $g(y)$ tak, že $h(x,y) = f(x)\cdot g(y)$
- pak ale z Fubiniovy věty, resp. z věty o separabilitě plyne, že

$$\mathtt{E}(\mathcal{X}\mathcal{Y}) = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} xyf(x)g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}} xf(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbf{R}} y\,g(y)\,\mathrm{d}y = \mathtt{E}(\mathcal{X})\mathtt{E}(\mathcal{Y})$$

- z věty 3.3.15 pak ihned vyplývá, že

$$\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \mathtt{E}(\mathcal{X}\mathcal{Y}) - \mathtt{E}(\mathcal{X})\mathtt{E}(\mathcal{Y}) = \mathtt{E}(\mathcal{X})\mathtt{E}(\mathcal{Y}) - \mathtt{E}(\mathcal{X})\mathtt{E}(\mathcal{Y}) = 0$$

3.3.17 Definice

Nechť jsou dány absolutně spojité náhodné veličiny $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$. Nechť existují jejich kovariance $\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ a směrodatné odchylky $\mathtt{SD}(\mathcal{X})$, resp. $\mathtt{SD}(\mathcal{Y})$. Pak *koeficientem korelace náhodných veličin* rozumíme číslo

$$\varrho(\mathcal{X},\mathcal{Y}) := \frac{\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}{\mathtt{SD}(\mathcal{X})\mathtt{SD}(\mathcal{Y})}.$$

3.3.18 Poznámka

Kovariance náhodných veličin splňuje podle věty 3.3.14 axiomy skalárního součinu, a tedy $\sqrt{\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{X})} = \mathtt{VAR}(\mathcal{X})$ je normou náhodné veličiny $\mathcal{X}$. Odtud a z Schwarzovy-Cauchyovy-Bunjakovského nerovnosti (věta 6.2.3 ve skriptech [2]) tvaru

$$\big|\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y})\big| \leqslant \mathtt{SD}(\mathcal{X})\mathtt{SD}(\mathcal{Y})$$

ale ihned vyplývá, že koeficient korelace náhodných veličin reprezentuje de facto kosinus úhlu náhodných veličiny $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ (viz poznámka 6.2.8 ve skriptech [2]).

3.3.19 Věta

Nechť jsou dány absolutně spojité náhodné veličiny $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$. Nechť existuje jejich koeficient korelace $\varrho(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Pak platí

$$-1 \leqslant \varrho(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \leqslant 1,$$

přičemž rovnosti $\varrho(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = 1$, resp. $\varrho(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = -1$ nastávají právě tehdy, když existuje číslo $\mathtt{C} > 0$ tak, že

$$\mathcal{Y} - \mathtt{E}(\mathcal{Y}) = \mathtt{C}\big(\mathcal{Y} - \mathtt{E}(\mathcal{Y})\big), \quad \text{resp.} \quad \mathcal{Y} - \mathtt{E}(\mathcal{Y}) = -\mathtt{C}\big(\mathcal{Y} - \mathtt{E}(\mathcal{Y})\big).$$

<u>*Důkaz:*</u>

- plyne z poznámky 3.3.18

3.3.20 Definice

Nechť $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ je vektor náhodných veličin. Nechť pro všechna $k, \ell \in \widehat{n}$ existují kovariance $\sigma_{k\ell} = \mathtt{COV}(\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_\ell)$. Pak matici

$$\mathbb{S}_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n} := \begin{pmatrix} \sigma_{11}(\vec{x}) & \sigma_{12}(\vec{x}) & \ldots & \sigma_{1r}(\vec{x}) \\ \sigma_{21}(\vec{x}) & \sigma_{22}(\vec{x}) & \ldots & \sigma_{2r}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{r1}(\vec{x}) & \sigma_{r2}(\vec{x}) & \ldots & \sigma_{rr}(\vec{x}) \end{pmatrix} = \big(\sigma_{k\ell}\big)_{k,\ell=1}^{n}$$

nazveme *kovariancí náhodného vektoru* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ nebo *kovarianční maticí.*

3.3.21 Poznámka

Z definice 3.3.20 vyplývá, že kovarianční matice $\mathbb{S}_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n}$ je symetrická, na diagonále má rozptyly $\sigma_{\ell\ell} = \mathtt{COV}(\mathcal{X}_\ell, \mathcal{X}_\ell) = \mathtt{VAR}(\mathcal{X}_\ell)$ náhodných veličin $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ a pokud jsou tyto veličiny nezávislé, pak je $\mathbb{S}_{\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_n}$ diagonální maticí.

3.4 Konvoluce funkcí

Prezentovanou teorii pravděpodobnosti nyní zužitkujeme při specifickém zavedení pojmu konvoluce funkcí. Nejprve představíme tuto operaci pro hustoty pravděpodobnosti, a poté tuto definici rozšíříme na co nejširší třídu funkcí.

3.4.1 Věta

Nechť jsou dány nezávislé jednorozměrné náhodné veličiny $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ s absolutně spojitým rozdělením. Nechť $f_{\mathcal{X}}(x)$ a $f_{\mathcal{Y}}(y)$ jsou příslušné hustoty pravděpodobnosti. Pak hustotou pravděpodobnosti $f_{\mathcal{Z}}(z)$ náhodné veličiny $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ je funkce

$$f_{\mathcal{Z}}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathcal{X}}(x) f_{\mathcal{Y}}(r-x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.7}$$

<u>*Důkaz:*</u>

- označme $F_{\mathcal{Z}}(z)$ distribuční funkci náhodné veličiny $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$
- pro ni platí
$$F_{\mathcal{Z}}(z) = \mathrm{P}\big[\mathcal{Z} \leqslant z\big] = \mathrm{P}\big[\mathcal{X} + \mathcal{Y} \leqslant z\big] = \iint_{x+y\leqslant z} f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
- označme $M_z = \big\{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : \ x + y \leqslant z\big\}$
- množina M_z představuje polorovinu v $\mathbf{E}^2$
- užijeme-li dále předpokladu, že $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou nezávislé, tak platí rovnost
$$F_{\mathcal{Z}}(z) = \iint_{M_z} f_{\mathcal{X}}(x) f_{\mathcal{Y}}(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f_{\mathcal{X}}(x) f_{\mathcal{Y}}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} r = x + y \\ \mathrm{d}r = \mathrm{d}y \end{array} \right| =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z} f_{\mathcal{X}}(x) f_{\mathcal{Y}}(r-x)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathcal{X}}(x) f_{\mathcal{Y}}(r-x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}r = \int_{-\infty}^{z} f_{\mathcal{Z}}(r)\,\mathrm{d}r$$
- proto je hledanou hustotou pravděpodobnosti funkce $f_{\mathcal{Z}}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathcal{X}}(x) f_{\mathcal{Y}}(r-x)\,\mathrm{d}x$

3.4.2 Poznámka

Analogicky lze ukázat, že pro nezávislé vícerozměrné náhodné veličiny $\vec{\mathcal{X}}, \vec{\mathcal{Y}}$ a $\vec{\mathcal{Z}} = \vec{\mathcal{X}} + \vec{\mathcal{Y}}$ platí vztah

$$f_{\vec{\mathcal{Z}}}(\vec{r}) = \int_{\mathbf{E}^r} f_{\vec{\mathcal{X}}}(\vec{x}) f_{\vec{\mathcal{Y}}}(\vec{r} - \vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}. \tag{3.8}$$

3.4.3 Poznámka

Vztah (3.8) je jedním ze základních vztahů celé teorie o řešení parciálních diferenciálních rovnic. Jeho platnost nebudeme zužovat pouze na případ hustot pravděpodobnosti, ale zobecníme ho pro obecné vícerozměrné funkce.

3.4.4 Definice

Nech?jsou dány funkce $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$. Zobrazení $(f \star g)(\vec{x}) : \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r) \times \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r) \mapsto \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$ definované předpisem

$$(f \star g)(\vec{x}) := \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) g(\vec{x} - \vec{s})\, \mathrm{d}\vec{s}$$

nazveme *konvolucí* funkcí, pokud pravá strana existuje a patří do třídy $\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$.

3.4.5 Věta

Nech?jsou dány funkce $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$. Pak jejich konvoluce $(f \star g)(\vec{x})$ existuje pro skoro všechna $\vec{x} \in \mathbf{E}^r$ a navíc patří do třídy $\mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$. Dále

$$\int_{\mathbf{E}^r} (f \star g)(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x} \leqslant \|f\|_{\mathscr{L}_1} \cdot \|g\|_{\mathscr{L}_1}. \tag{3.9}$$

Důkaz:

- vyjdeme z předpokladů, že $\int_{\mathbf{E}^r} |f(\vec{x})|\, \mathrm{d}\vec{x} \in \mathbf{R}$ a $\int_{\mathbf{E}^r} |g(\vec{x})|\, \mathrm{d}\vec{x} \in \mathbf{R}$
- chceme ukázat, že také $\int_{\mathbf{E}^r} \big|(f \star g)(\vec{x})\big|\, \mathrm{d}\vec{x} \in \mathbf{R}$
- zkoumejme proto integrál

$$\int_{\mathbf{E}^r} \big|(f \star g)(\vec{x})\big|\, \mathrm{d}\vec{x} =$$

$$= \int_{\mathbf{E}^r} \left| \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) g(\vec{x} - \vec{s})\, \mathrm{d}\vec{s} \right| \mathrm{d}\vec{x} \leqslant \int_{\mathbf{E}^r} \int_{\mathbf{E}^r} \big|f(\vec{s}) g(\vec{x} - \vec{s})\big|\, \mathrm{d}\vec{s}\, \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathbf{E}^r} \left(\int_{\mathbf{E}^r} \big|g(\vec{x} - \vec{s})\big|\, \mathrm{d}\vec{x} \right) |f(\vec{s})|\, \mathrm{d}\vec{s} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \vec{y} = \vec{x} - \vec{s} \\ \mathrm{d}\vec{y} = \mathrm{d}\vec{s} \end{array} \right| = \int_{\mathbf{E}^r} \left(\int_{\mathbf{E}^r} \big|g(\vec{y})\big|\, \mathrm{d}\vec{y} \right) |f(\vec{s})|\, \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\mathbf{E}^r} \big|g(\vec{y})\big|\, \mathrm{d}\vec{y} \cdot \int_{\mathbf{E}^r} \big|f(\vec{x})\big|\, \mathrm{d}\vec{x} \in \mathbf{R}$$

- podle tvrzení Fubiniovy věty platí, že $f(\vec{x} - \vec{y}) g(\vec{y}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ pro skoro všechna $\vec{x} \in \mathbf{E}^r$, a tedy konvoluce $(f \star g)(\vec{x})$ je definována pro skoro všechna $\vec{x} \in \mathbf{E}^r$
- a protože $\|h\|_{\mathscr{L}_1} := \int_{\mathbf{E}^r} |h(\vec{x})|\, \mathrm{d}\vec{x}$, vychází z předchozích úvah také platnost vztahu (3.9)
- využíváme přitom věty 4.2.37, 4.3.5 a 4.3.7 ze skript [3]
- pro funkce nezáporné s.v. navíc platí ve vztahu (3.9) rovnost, tj. $\|f \star g\|_{\mathscr{L}_1} = \|f\|_{\mathscr{L}_1} \cdot \|g\|_{\mathscr{L}_1}$

3.4.6 Věta

Nech?jsou dány hustoty pravděpodobnosti $f(\vec{x}), g(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$. Pak jejich konvoluce $(f \star g)(\vec{x})$ existuje a navíc je také hustotou pravděpodobnosti.

Důkaz:

- o hustotách $f(\vec{x}), g(\vec{x})$ víme, že patří do $\mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ a chceme ukázat, že do $\mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ paří také jejich konvoluce, a navíc, že tato konvoluce je také hustotou pravděpodobnosti
- Díky nerovnosti

  $$(f \star g)(\vec{x}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) g(\vec{x} - \vec{s})\, \mathrm{d}\vec{s} \geqslant 0$$

  víme, že je splněna nezápornost hustoty
- ověřme, že $\int_{\mathbf{E}^r} (f \star g)(\vec{x}) = 1$

  $$\int_{\mathbf{E}^r} \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) g(\vec{x} - \vec{s}) \mathrm{d}\vec{x} \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{x} - \vec{s}) \mathrm{d}\vec{x} \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \mathrm{d}\vec{s} \int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{y}) \mathrm{d}\vec{y} = 1$$

  přičemž jsme v první rovnosti použili Fubiniovu větu a ve druhé rovnosti substituci $\vec{y} = \vec{x} - \vec{s}$
- integrály $\int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \mathrm{d}\vec{s}$ a $\int_{\mathbf{E}^r} g(\vec{y}) \mathrm{d}\vec{y}$ jsou z definice hustoty rovny jedné a tedy $(f \star g)(\vec{x})$ je opravdu také hustotou pravděpodobnosti

3.4.7 Příklad

Nechť

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Vypočtěme konvoluci $f(x) \star g(x)$. Z definice konvoluce a ze vztahu (**??**) vyvozujeme sadu rovností

$$f(x) \star g(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(s-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-s-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\,\mathrm{d}s = \left| \begin{array}{c} y = s-\mu_1 \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}s \end{array}\right| = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma_1^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-y-\mu_1-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \left|\ \lambda := x-\mu_1-\mu_2\ \right| = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{\mathbf{R}} \mathrm{exp}\left[-\frac{\sigma_2 y^2 + \sigma_1(y-\lambda)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\right]\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{\mathbf{R}} \mathrm{exp}\left[-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(\left(y-\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\lambda\right)^2 + \lambda^2\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}\right)\right]\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\int_{\mathbf{R}} \mathrm{exp}\left[-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(y-\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\lambda\right)^2\right]\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}z^2}\,\mathrm{d}z =$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}.$$

Konvolucí dvou hustot pravděpodobnosti Gaussova rozdělení je tedy podle dosaženého výsledku opět hustota pravděpodobnosti Gaussova rozdělení. Mají-li vstupující hustoty střední hodnoty po řadě μ_1, μ_2 a rozptyly σ_1^2, σ_2^2, má výsledná konvoluce střední hodnotu $\mu_1+\mu_2$ a rozptyl $\sigma_1^2+\sigma_2^2$. Univerzalitu tohoto tvrzení prokážeme v následujících větách.

3.4.8 Věta

Nech?$\mathcal{X}$, resp. $\mathcal{Y}$ jsou nezávislé náhodné veličiny mající absolutně spojité rozdělení. Nechť jejich hustoty pravděpodobnosti jsou $f_{\mathcal{X}}(x) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{R})$, resp. $g_{\mathcal{Y}}(y) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{R})$ a navíc $\langle x\rangle = \mu_1$ a $\langle y\rangle = \mu_2$. Potom hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny $\mathcal{Z} = \mathcal{X}+\mathcal{Y}$ je funkce $(f_{\mathcal{X}} \star g_{\mathcal{Y}})(z)$ a platí $\langle z\rangle = \mu_1+\mu_2$.

Důkaz:

- označme $\mathcal{Z} = \mathcal{X}+\mathcal{Y}$ součet náhodných veličin
- pro příslušnou hustotu pravděpodobnosti veličiny $\mathcal{Z}$ byla ve větě 3.4.1 odvozena rovnost

$$f_{\mathcal{Z}}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathcal{X}}(x) f_{\mathcal{Y}}(r-x)\,\mathrm{d}x,$$

  která reprezentuje první z dokazovaných tvrzení

- zbývá proto dokázat, že střední hodnotou součtu náhodných veličin je součet středních hodnot těchto veličin
- použitím Fubiniovy věty, jednoduché substituce a definice střední hodnoty náhodné veličiny dostáváme

$$\langle z\rangle = \int_{\mathbf{R}} z\left(\int_{\mathbf{R}} f(x)g(z-x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}z = \int_{\mathbf{R}} f(x)\left(\int_{\mathbf{R}} z\cdot g(z-x)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\begin{array}{c} y = z-x \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}y\end{array}\right| = \int_{\mathbf{R}} f(x)\left(\int_{\mathbf{R}} (x+y)\cdot g(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} x\,f(x)g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} y\,f(x)g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \langle x\rangle\int_{\mathbf{R}} g(y)\,\mathrm{d}y + \langle y\rangle\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \langle x\rangle + \langle y\rangle$$

- tím je důkaz proveden

3.4.9 Věta

Nech?$\mathcal{X}$, resp. $\mathcal{Y}$ jsou nezávislé náhodné veličiny mající absolutně spojité rozdělení. Nechť jejich hustoty pravděpodobnosti jsou $f_{\mathcal{X}}(x) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{R})$, resp. $g_{\mathcal{Y}}(y) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{R})$ a navíc $\mathtt{VAR}(\mathcal{X}) = \sigma_x^2$ a $\mathtt{VAR}(\mathcal{Y}) = \sigma_y^2$. Potom pro rozptyl náhodné veličiny $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ platí rovnost

$$\mathtt{VAR}(\mathcal{Z}) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2.$$

Důkaz:

- hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ je funkce vypočetná jako konvoluce $f(x) \star g(x)$, tj.

$$h(z) = \int_{\mathbf{R}} f(x)g(z-x)\,\mathrm{d}x$$

- snadno se lze tudíž přesvědčit, že platí série následujících rovností

$$\begin{aligned}\langle z^2\rangle &= \int_{\mathbf{R}} z^2 \left(\int_{\mathbf{R}} f(x)g(z-x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}z = \int_{\mathbf{R}} f(x)\left(\int_{\mathbf{R}} z^2\cdot g(z-x)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x = \\ &= \left|\begin{array}{c} y = z-x \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}y\end{array}\right| = \int_{\mathbf{R}} f(x)\left(\int_{\mathbf{R}}(x+y)^2\cdot g(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} x^2 f(x)g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \\ &\quad + 2\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} xy\, f(x)g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} y^2 f(x)g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\ &= \langle x^2\rangle \int_{\mathbf{R}} g(y)\,\mathrm{d}y + 2\int_{\mathbf{R}^2} xyf(x)g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \langle y^2\rangle\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \langle x^2\rangle + 2\langle xy\rangle + \langle y^2\rangle\end{aligned}$$

- jelikož pro nezávislé náhodné veličiny platí, že jejich kovariance je nulová (viz věta 3.3.16), dostáváme rovnost

$$\mathtt{VAR}(\mathcal{Z}) = \langle z^2\rangle - \langle z\rangle^2 = \langle x^2\rangle + 2\langle xy\rangle + \langle y^2\rangle - \langle x\rangle^2 - 2\langle x\rangle\langle y\rangle - \langle y\rangle^2 =$$

$$= \mathtt{VAR}(\mathcal{X}) + \mathtt{VAR}(\mathcal{Y}) + 2\,\mathtt{COV}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \mathtt{VAR}(\mathcal{X}) + \mathtt{VAR}(\mathcal{Y})$$

- ta ale kompletuje důkaz

3.4.10 Věta – *o posunutí v konvoluci*

Nechť jsou dány libovolné funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ a $g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ a vektor $\vec{b} \in \mathbf{E}^r$. Pak platí

$$f(\vec{x}+\vec{b}) \star g(\vec{x}) = f(\vec{x}) \star g(\vec{x}+\vec{b}) = \big(f\star g\big)(\vec{x}+\vec{b}).$$

Důkaz:

- není pravděpodobně obtížné nahlédnout, že

$$\big(f\star g\big)(\vec{x}+\vec{b}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s})g(\vec{x}+\vec{b}-\vec{s})\,\mathrm{d}\vec{s} = f(\vec{x})\star g(\vec{x}+\vec{b})$$

- dále

$$f(\vec{x}+\vec{b})\star g(\vec{x}) = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}+\vec{b})g(\vec{x}-\vec{s})\,\mathrm{d}\vec{s} = \left|\begin{array}{c}\vec{s}+\vec{b} = \vec{r} \\ \mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}\vec{r}\end{array}\right| = \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{r})g(\vec{x}+\vec{b}-\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = f(\vec{x})\star g(\vec{x}+\vec{b})$$

- přitom existence všech dotčených integrálů je garantována větou 3.4.5

3.4.11 Věta – *o derivaci konvoluce*

Nechť jsou dány libovolné funkce $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ a $g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ a vektor $\vec{b} \in \mathbf{E}^r$. Nechť je $i \in \hat{r}$ zvoleno libovolně. Nechť dále $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ a $\frac{\partial g}{\partial x_i} \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$. Pak platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g(\vec{x}) = f(\vec{x}) \star \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\big(f \star g\big).$$

Důkaz:

- existence všech dotčených integrálů je opět garantována větou 3.4.5
- dále
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \star g(\vec{x}) = \int_{\mathbf{E}^r} \frac{\partial f}{\partial s_i}(\vec{s})g(\vec{x}-\vec{s})\,\mathtt{d}\vec{s} = \left| \begin{array}{cc} u = g(\vec{s}) & v' = \frac{\partial f}{\partial s_i}(\vec{s}) \\ u' = \frac{\partial g}{\partial(x_i - s_i)}\frac{\partial(x_i-s_i)}{\partial s_i} & v = f(\vec{s}) \end{array} \right| =$$
$$= \int_{\mathbf{E}^{r-1}} \Big[f(\vec{s})g(\vec{s})\Big]_{s_i \to -\infty}^{s_i \to \infty} \mathtt{d}s_1\mathtt{d}s_2 \ldots \mathtt{d}s_{i-1}\mathtt{d}s_{i+1} \ldots \mathtt{d}s_r - \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \frac{\partial g}{\partial(x_i - s_i)} \frac{\partial(x_i - s_i)}{\partial s_i}\,\mathtt{d}\vec{s} =$$
$$= \int_{\mathbf{E}^r} f(\vec{s}) \frac{\partial g(\vec{x}-\vec{s})}{\partial(x_i - s_i)}\,\mathtt{d}\vec{s} = f(\vec{x}) \star \frac{\partial g}{\partial x_i}$$
- bylo zde přitom využito tzv. *nutné podmínky konvergence Lebesgueova integrálu,* tedy implikace
$$f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{\|\vec{x}\| \to \infty} f(\vec{x}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in \hat{r}: \lim_{x_i \to \infty} f(\vec{x}) = 0.$$

3.5 Báze ve funkcionálních Hilbertových prostorech

3.5.1 Definice

Nechť je dán Hilbertův prostor $\mathcal{H}$. Nechť S je neprázdná množina funkcí z $\mathcal{H}$ neobsahující nulovou funkci (nulový vektor). Řekneme, že množina $S \subset \mathcal{H}$ je *ortogonální* v $\mathcal{H}$, jestliže pro každé $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in S$ takové, že $f(\vec{x}) \neq g(\vec{x})$, platí rovnost $\langle f|g \rangle = 0$. Množinu $S \subset \mathcal{H}$ nazveme *ortonormální,* je-li ortogonální a platí-li navíc, že pro každé $f(\vec{x}) \in S$ je $\|f(\vec{x})\| = 1$.

3.5.2 Definice

Nechť je dán Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ se skalárním součinem $\langle .|. \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto \mathbf{C}$. Nechť $\nu(f)$ je výroková formule na $\mathcal{H}$. Řekneme, že neprázdná množina S funkcí z $\mathcal{H}$ je *maximální množinou s vlastností* ν, jestliže pro všechny funkce $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ platí, že $\nu(f) = 1$, tj. výrok "funkce $f(\vec{x})$ má vlastnost ν"je pravdivý pro všechny funkce $f(\vec{x}) \in \mathcal{H}$, a je-li $T \subset \mathcal{H}$ množina, jejíž všechny prvky splňují touž vlastnost, pak $T \subset S$.

3.5.3 Věta

Nechť je množina $S \subset \mathcal{H}$ ortogonální v $\mathcal{H}$. Pak jsou všechny její prvky lineárně nezávislé.

Důkaz:

- postupujeme metodou sporu
- dokážeme tedy obměněnou verzi tohoto tvrzení, a sice, že jsou-li prvky množiny S lineárně závislé, pak S nemůže být ortogonální
- předpokládejme tedy, že pro nenulové funkce $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}) \in S$ existuje netriviální kombinace konstant $(\mathtt{C}_1, \mathtt{C}_2, \ldots, \mathtt{C}_n) \neq \vec{0}$ tak, že $\sum_{k=1}^{n} \mathtt{C}_k f_k(\vec{x}) = \vec{0}$
- řekněme, že např. $\mathtt{C}_\ell \neq 0$
- pak pro $\alpha_k := \mathtt{C}_k/\mathtt{C}_\ell$ platí:
$$f_\ell(\vec{x}) = -\sum_{k=1, k\neq\ell}^{n} \alpha_k f_k(\vec{x})$$

- aplikujeme-li na tuto rovnost skalární násobení funkcí $f_\ell(\vec{x})$ a užijeme-li (pro spor) předpokladu, že všechny dotčené funkce jsou po dvou ortogonální, dostáváme rovnost

$$\langle f_\ell | f_\ell \rangle = -\sum_{k=1, k\neq \ell}^{n} \alpha_k \langle f_k | f_\ell \rangle = 0$$

- z axiomu pozitivní definitnosti ale odtud vyplývá, že $f_\ell(x) = o(\vec{x})$, což je zřetelný spor

3.5.4 Věta – *Besselova nerovnost*

Nechť $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x})\}$ je ortonormální množina v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Nechť $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ je zvolen libovolně. Označme $a_k := \langle f_k | g \rangle$. Pak platí

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqslant \|g(\vec{x})\|^2. \tag{3.10}$$

Důkaz:

- zvolme funkci $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ libovolně
- pak platí série rovností , resp. nerovností

$$0 \leqslant \left\| g - \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \right\|^2 = \left\langle g - \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \,\middle|\, g - \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \right\rangle = \|g(\vec{x})\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^\star \langle g | f_k \rangle - \sum_{k=1}^{n} a_k \langle f_k | g \rangle +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_k^\star a_\ell \langle f_\ell | f_k \rangle = \|g(\vec{x})\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^\star a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k a_k^\star + \sum_{k=1}^{n} a_k^\star a_k = \|g\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$$

3.5.5 Věta

Nechť $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}), \ldots\}$ je (spočetná) ortonormální množina v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Nechť je funkce $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ zvolena libovolně. Označme $a_k = \langle g | f_k \rangle$. Pak existuje limita

$$\operatorname*{limnorm}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(\vec{x}) = \underline{\sum_{k=1}^{\infty}} a_k f_k(\vec{x}) =: h(\vec{x}) \in \mathcal{H}.$$

Navíc pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí $\langle g - h | f_k \rangle = 0$.

Důkaz:

- pro funkci $h_n(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(\vec{x})$ platí jednoduchá rovnost

$$\left\| h_{n+p}(\vec{x}) - h_n(\vec{x}) \right\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k f_k(\vec{x}) \right\|^2 \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2, \tag{3.11}$$

  kde bylo využito kolmosti a normality funkcí v systému S

- z Besselovy nerovnosti plyne, že pro jakékoli $n \in \mathbf{N}$ je $\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqslant \|g(\vec{x})\|^2$
- protože $\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$ je řadou s nezápornými členy a je omezená, jistě také konverguje
- proto ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro indexy $n > n_0$ a $p \in \mathbf{N}$ je $\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2 < \varepsilon^2$
- z nerovnosti (3.11) pak lehce vyvodíme, že posloupnost $(h_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská
- a protože $\mathcal{H}$ je prostorem Hilbertovým, je $(h_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ rovněž konvergentní (ve smyslu normy)
- existuje tudíž $h(\vec{x}) = \operatorname{limnorm}_{n\to\infty} h_n(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x}) \in \mathcal{H}$
- pro pevné $k \in \mathbf{N}$ a $n > k$ je zřejmě $\langle g - h_n | f_k \rangle = 0$
- užijeme-li v předešlém vztahu limitní přechod $n \to \infty$ a aplikujeme-li větu 2.3.28, plyne odsud, že $\langle g - h | f_k \rangle = 0$ pro všechny $k \in \mathbf{N}$

Literatura

[1] T. Hobza: *Matematická statistika,* http://tjn.fjfi.cvut.cz/∼hobza/MAST/mast.pdf (2007)

[2] M. Krbálek: *Matematická analýza III (třetí přepracované vydání)*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2011

[3] M. Krbálek: *Matematická analýza IV (druhé přepracované vydání)*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2009

[4] M. Krbálek: *Úlohy matematické fyziky*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2012

[5] M. Krbálek: *Teorie míry a Lebesgueova integrálu*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2014 (Je to spravne?)