1 První přednáška

1. Heavisideova funkce a centrovaná Heavisideova funkce
2. Prostor s úplnou mírou $\{\mathbf{E}^r, \lambda(X), \mathscr{M}_\lambda\}$
3. G bude vždy značit oblast a J bude znamenat kompakt
4. funkce: $f(\vec{x}) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$
5. Připomenout symboly $\mathscr{C}(M) = \mathscr{C}^0(M)$, $\mathscr{C}^n(M)$
6. definice symbolů $\mathscr{C}_0$: (třída všech spojitých funkcí s kompaktním nosičem)
7. definice symbolů $\mathscr{C}_0^n$: (třída všech funkcí, které mají kompaktní nosič a spojité derivace až do řádu n včetně)
8. $\mathscr{L}(G)$, $\mathscr{L}^\star(G)$, $\mathscr{L}_{\text{loc}}(G)$
9. připomenout, že:
$$f(x) \in \mathscr{L}(E, \mu) \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| \in \mathscr{L}(E, \mu) \wedge f(x) \in \Lambda_\mu(E).$$
10. **VĚTA:** o ekvivalentní definici třídy $\mathscr{L}_{\text{loc}}(G)$
11. snaha o prehilbertovský prostor $\mathscr{C}(\langle a, b\rangle)$
12. snaha o prehilbertovský prostor $\mathscr{L}(G)$ a protipříklad $\frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathscr{L}(0, 1)$, ale $\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x} \in \mathscr{L}(0, 1)$
13. $\mathscr{L}_p(G)$
14. snaha o prehilbertovský prostor $\mathscr{L}_1(G)$ a protipříklad $\frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathscr{L}_1(0, 1)$, ale $\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x} \in \mathscr{L}_1(0, 1)$
15. **VĚTA:** $f, g \in \mathscr{L}_2(G) \quad \Rightarrow \quad fg^\star \in \mathscr{L}_1(G)$
16. ale ani $\mathscr{L}_2(G)$ není prehilbertovský
17. Co jsou faktorové funkce
18. značení $\mathbb{L}_2(G)$ a $\mathbb{L}_2^{(w)}(G)$: váha musí být spojitá a kladná na G

2 Druhá přednáška

1. **VĚTA:** $f \in \mathscr{L}_2(G) \quad \wedge \quad H \subset G \quad \wedge \quad \mu(H) < \infty \quad \Rightarrow \quad f \in \mathscr{L}_1(H)$
2. **DŮSLEDEK:** $\mu(H) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}_2(H) \subset \mathscr{L}_1(H)$
3. snaha o Hilbertův prostor $\mathscr{C}(\langle a,b\rangle)$ se standardním skalárním součinem (není úplný)
4. snaha o Hilbertův prostor $\mathbb{L}_2(G)$
5. **VĚTA:** $\mathbb{L}_2(G)$ a $\mathbb{L}_2^{(w)}(G)$ jsou Hilbertovy prostory
6. Skalární součiny na funkcionálních vektorových prostorech jednorozměrných funkcí
   - Legendre $\Theta(x-a)\Theta(b-x)$, $G=(a,b)$
   - Laguerre $\Theta(x)\mathrm{e}^{-x}$, $G=(0,+\infty)$
   - Hermite e^{-x^2}, $G=\mathbf{R}$
7. Typy konvergence na funkcionálních vektorových prostorech (bodová, stejnoměrná, podle normy)
8. **VĚTA:** o vztahu stejnoměrné konvergence a konvergence podle normy na $\mathscr{C}(\langle a,b\rangle)$ pro $\langle f|g\rangle_w$. [Nezmiňoval jsem. Dokázáno v MAB3.]
9. **VĚTA:** o vztahu stejnoměrné konvergence a konvergence podle normy na $\mathscr{L}_2^{(w)}(G)$, kde $\mu(G) < \infty$. Váha musí být omezená na G.
10. **VĚTA:** o spojitosti skalárního součinu
11. Konvergence řad podle normy
12. **VĚTA:** o součtu podle normy
13. Uzavření tématu o konstrukci funkcionálních Hilbertových prostorů.
14. Domácí úkol: Je $\|f\|_\infty := \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f|$ normou na $\mathscr{C}(\langle a,b\rangle)$? A je $\mathscr{C}(\langle a,b\rangle)$ s touto normou úplný?
15. Operace konvoluce na prostoru klasických funkcí – definice na $\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{E}^r)$
16. **VĚTA:** o existenci konvoluce v $\mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$
17. Bilinearita konvoluce v $\mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ (ve cvičení)
18. Komutativita konvoluce v $\mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$
19. o konvoluci funkcí tvaru $\Theta(x)F(x)$, kde $F(x) \in \mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$
20. definice pojmů hustota a hustota pravděpodobnosti

3 Třetí přednáška

1. **VĚTA:** o zachování vlastností hustoty pravděpodobnosti
2. **VĚTA:** f, g jsou hustoty pravděpodobnosti a $\int_{\mathbf{R}} x f(x)\,\mathrm{d}x = \mu_1$ a $\int_{\mathbf{R}} y g(y)\,\mathrm{d}y = \mu_2$, pak $\int_{\mathbf{R}} z(f \star g)(z)\,\mathrm{d}z = \mu_1 + \mu_2$
3. **VĚTA:** o posunutí v konvoluci v $\mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$
4. **VĚTA:** o derivaci v konvoluci: $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r)$ a $g(\vec{x}) \in \mathscr{L}_1(\mathbf{E}^r) \cap \mathscr{C}_0^1$
5. ortonormální množina: Řekneme, že množina S z Hilbertova prostoru $\mathscr{H}$ je ortonormální, pokud pro každou funkci $f(\vec{x}) \in S$ je $\|f(\vec{x})\| = 1$ a zároveň pro každé dvě funkce $f(\vec{x}), g(\vec{x}) \in S$ takové, že $f(\vec{x}) \neq g(\vec{x})$ platí rovnost $\langle f|g\rangle = 0$.
6. **LEMMA:** prvky každé ortonormální množiny jsou LN
7. zmínka o Grammově-Schmidtově proceduře vyrábějící ON množinu z množiny LN funkcí
8. **VĚTA:** o Besselově nerovnosti: Nechť $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x})\}$ je (konečná) ortonormální množina v Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Nechť $g(\vec{x}) \in \mathscr{H}$ je zvolen libovolně. Označme $a_k := \langle g|f_k\rangle$. Pak platí
$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqslant \|g(\vec{x})\|^2. \tag{1}$$
9. Definice maximální ortonormální množiny
10. **VĚTA:** Nechť $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}), \ldots\}$ je (spočetná) maximální ortonormální množina v Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Nechť je funkce $g(\vec{x}) \in \mathscr{H}$ zvolena libovolně. Nechť pro každé $k \in \mathbf{N}$ je $\langle g|f_k\rangle = 0$. Pak $g(\vec{x}) = o(\vec{x})$.
11. Přípravná věta k větě o Fourierově rozvoji

    Nechť $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}), \ldots\}$ je (spočetná) ortonormální množina v Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Nechť je funkce $g(\vec{x}) \in \mathscr{H}$ zvolena libovolně. Označme $a_k = \langle g|f_k\rangle$. Pak existuje limita
    $$\operatorname*{limnorm}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(\vec{x}) = \underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty}}} a_k f_k(\vec{x}) =: h(\vec{x}) \in \mathscr{H}.$$
    Navíc pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí $\langle g - h|f_k\rangle = 0$.

4 Čtvrtá přednáška

1. Definice báze v Hilbertově prostoru
2. Definice separability Hilbertova prostoru
3. **VĚTA:** o Fourierově rozvoji
4. **VĚTA:** o Parsevalově vzorci
5. **VĚTA:** o Parsevalově rovnosti