

Dispense di Elettromagnetismo

Vallenzasca Davdide

22 dicembre 2020

Indice

I	Elettrostatica	9
1	Elettrostatica nel vuoto	11
1.1	Legge di Coulomb	11
1.2	Il campo elettrico	11
1.3	Il teorema di Gauss e la prima equazione di Maxwell	12
1.4	La terza equazione di Maxwell ed il potenziale elettrico	14
1.5	Energia del campo elettrico	15
1.6	Dipoli	17
1.7	Sviluppo in serie di multipoli	20
1.8	Conduttori	20
1.9	Condensatori	24
1.10	Il problema generale dell'elettrostatica nel vuoto	29
2	Elettrostatica nei dielettrici	33
2.1	Costante dielettrica	33
2.2	Polarizzazione	33
2.3	Equazioni di Maxwell nei dielettrici	38
2.4	Problema generale dell'elettrostatica nei dielettrici	39
2.5	Energia elettrostatica nei dielettrici	41
II	Corrente	43
3	Considerazioni generali	45
3.1	Concetti introduttivi	45
3.2	Densità di corrente	46
4	Corrente stazionaria	49
4.1	Proprietà generali	49
4.2	Leggi di Kirchhoff	49
4.3	Resistenza e leggi di Ohm	50
4.4	Cariche su conduttori percorsi da corrente	52
4.5	Effetto Joule	53
4.6	Forza elettromotrice	53
4.7	Circuiti lineari in corrente continua	56
4.8	Complementi: forza fra le maglie di un condensatore e metodo dei lavori virtuali	58

III	Magnetostatica	61
5	Magnetostatica nel vuoto	63
5.1	Campo di induzione magnetica - prima legge di Laplace	63
5.2	Seconda equazione di Maxwell	64
5.3	Il potenziale vettore e la quarta equazione di Maxwell	65
5.4	Il potenziale scalare	70
5.5	Forza di Lorentz - seconda legge di Laplace	71
5.6	Interazioni fra circuiti e campi magnetici	72
5.7	Effetto Hall	74
6	Magnetostatica nei dielettrici	77
6.1	Aspetti atomici del magnetismo	77
6.2	Vettore polarizzazione	78
6.3	Equazioni di Maxwell	79
6.4	Materiali dia-, para-, ferromagnetici	81
6.5	Precessione di Larmor	84
IV	Elettrodinamica	85
7	Campi variabili	87
7.1	Legge di Faraday-Neumann	87
7.2	Il flusso tagliato	88
7.3	Equazioni di Maxwell - caso non stazionario	90
7.3.1	Terza equazione di Maxwell	90
7.3.2	Prima e seconda equazione di Maxwell	91
7.3.3	Quarta equazione di Maxwell	92
7.4	L'autoinduzione	94
7.5	L'induzione mutua	96
7.6	L'energia magnetica	97
8	Il campo elettromagnetico	103
8.1	Equazioni di Maxwell e campo elettromagnetico	103
8.2	Energia e vettore di Poynting	105
8.3	Potenziali elettrodinamici	107
9	Le onde elettromagnetiche	111
9.1	Equazioni delle onde	111
9.2	Onde piane	112
9.3	Onde sferiche	116
9.4	Sorgenti delle onde	116
9.4.1	Dipolo oscillante	117
9.4.2	Carica puntiforme in moto accelerato	119
9.5	Onde elettromagnetiche nei dielettrici	119
9.6	Onde elettromagnetiche nei conduttori	122
9.7	Onde stazionarie	124
9.8	Momenti di un'onda elettromagnetica	125
9.9	Leggi di riflessione e rifrazione	127
9.10	Spettro della radiazione elettromagnetica	128
9.11	Effetto Doppler	128

A	Onde	131
A.1	Definizioni	131
A.2	Equazioni delle onde	132
B	Operazioni	133
B.1	Operazioni vettoriali	133
B.2	Operatori vettoriali	133
B.3	Relazioni integrali	134
B.4	Proprietà operazioni sul raggio vettore	134
C	Unità di misura e costanti	135
C.1	Capitolo 1	135
C.1.1	Unità di misura	135
C.1.2	Costanti	135
C.2	Capitolo 2	135
C.2.1	Unità di misura	135
C.2.2	Costanti	136
C.3	Capitolo 3	136
C.3.1	Unità di misura	136
C.3.2	Costanti	136
C.4	Capitolo 4	136
C.4.1	Unità di misura	136
C.4.2	Costanti	136
C.5	Capitolo 5	136
C.5.1	Unità di misura	136
C.5.2	Costanti	136
C.6	Capitolo 6	137
C.6.1	Unità di misura	137
C.6.2	Costanti	137
C.7	Capitolo 7	137
C.7.1	Unità di misura	137
C.7.2	Costanti	137
C.8	Capitolo 8	137
C.8.1	Unità di misura	137
C.8.2	Costanti	137
C.9	Capitolo 9	137
C.9.1	Unità di misura	137
C.9.2	Costanti	137

Equazioni di Maxwell

Equazioni di Maxwell nel vuoto

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Equazioni di Maxwell in mezzi omogenei ed isotropi

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$$

Parte I

Elettrostatica

Capitolo 1

Elettrostatica nel vuoto

Osservazione sperimentale 1.0.1 (Conservazione della carica). *Si osserva sperimentalmente che la somma algebrica delle cariche elettriche si conserva nel tempo.*

1.1 Legge di Coulomb

Osservazione sperimentale 1.1.1 (Legge di Coulomb). *Prese due cariche q_1 e q_2 nel vuoto poste a distanza r , la forza \mathbf{f}_{21} che q_2 subisce ad opera di q_1 è*

$$\mathbf{f}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{21} \quad (1.1)$$

Detta \mathbf{r}_1 la posizione di q_1 e \mathbf{r}_2 la posizione di q_2 si ha $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Osservazione sperimentale 1.1.2 (Principio di sovrapposizione). *Sperimentalmente la forza di Coulomb subita dalla carica q è pari alla somma vettoriale delle forze esercitate dalle n cariche Q_i $i = 1 \dots n$.*

Ovviamente vale il terzo principio di Newton per cui $\mathbf{f}_{21} = -\mathbf{f}_{12}$.

1.2 Il campo elettrico

Prese due cariche q e Q la quantità \mathbf{f}/q è indipendente da q .

Definizione 1.2.1. Si definisce campo elettrico \mathbf{E} generato dalla carica Q il rapporto \mathbf{f}/q . Q viene detta sorgente del campo; q viene detta carica di prova.

Esplicitamente si ha

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.2)$$

Il modulo di \mathbf{E} viene detto *intensità* del campo elettrico. È importante osservare che se le sorgenti sono disposte su un corpo esteso, la presenza di una carica di prova può modificarne la distribuzione. Convenzionalmente allora si suole definire il campo elettrico come

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}}{q}$$

Questa definizione è solo formale: essendo la carica elettrica quantizzata infatti, non si può parlare di passaggio al limite in senso matematico.

Osservazione 1.2.2. Date n sorgenti, il principio di sovrapposizione per la forza di Coulomb si estende banalmente al campo elettrico:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

Quando si ha a che fare con un elevato numero di cariche puntiformi risulta utile introdurre il concetto di *distribuzione continua di carica* descritta da una *densità di carica*:

Definizione 1.2.3. Si definisce *densità di carica* una funzione $\omega(x_1, x_2 \dots x_n)$ tale che $dq = \omega d\mu$ con $d\mu = dx_1 dx_2 \dots dx_n$

Si ha allora

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\omega(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mu' \quad (1.3)$$

Nella pratica si parla di densità spaziale ρ , densità superficiale σ , densità lineare λ (rispettivamente $n = 3, n = 2, n = 1$).

1.3 Il teorema di Gauss e la prima equazione di Maxwell

Teorema 1.3.1. Data una qualunque superficie chiusa S nel vuoto, il flusso del campo elettrostatico $\Phi_S(\mathbf{E})$ dipende esclusivamente dalle cariche interne alla superficie secondo la legge

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{Q_{TOT}^{int}}{\epsilon_0}$$

Dimostrazione. Si consideri il caso in cui all'interno della superficie S sia presente solo una carica puntiforme Q . Il flusso elementare è allora dato da

$$d\Phi_S(\mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

Il prodotto scalare rappresenta la proiezione di $\hat{\mathbf{n}}$ su $\hat{\mathbf{r}}$, ovvero la proiezione di $d\mathbf{S}$ sull'elemento di superficie di una sfera di raggio r e centro in Q , ma allora il rapporto fra questa proiezione ed r^2 è per definizione l'angolo solido sotteso alla superficie infinitesima $d\Omega$. In conclusione si ha

$$d\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

Il flusso totale è allora

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \int d\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Per il principio di sovrapposizione e la linearità dell'integrale si arriva facilmente alla tesi.

Si consideri ora il caso in cui sia presente una carica puntiforme Q_e esterna alla superficie. Si considerino i coni che danno origine agli angoli solidi $d\Omega$ in ogni direzione dello spazio: di questi si è interessati solo a quelli che intercettano S . Il flusso di campo elettrico attraverso le due superfici originate dall'intersezione fra i coni e S vale in modulo $Q_e d\Omega/4\pi\epsilon_0$ per entrambe le superfici, con segno però opposto a causa del fatto che la proiezione avviene in un caso con un angolo inferiore a $\pi/2$ e nell'altro caso con un angolo superiore a $\pi/2$. Il contributo complessivo è quindi nullo. \square

Corollario 1.3.2. *Nel caso in cui si abbia una distribuzione continua di carica, invece che un insieme di cariche puntiformi, vale ancora la tesi del teorema di Gauss e il flusso è dato da*

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \omega \, d\mu$$

Come è evidente dalla dimostrazione, il teorema permette di calcolare il flusso indipendentemente dalla forma della superficie o dalla posizione occupata dalle singole cariche interne. Si rivela dunque uno strumento estremamente utile per calcolare, noto il campo elettrico, le cariche presenti in una porzione di spazio o viceversa, nota la distribuzione di carica, di ricavare il campo elettrico. Si presenta tuttavia come una diretta conseguenza della legge di Coulomb¹ e non aggiunge quindi informazioni rispetto a quelle già note. Il teorema di Gauss fornisce inoltre alcune indicazioni utili alla rappresentazione del campo elettrico.

Definizione 1.3.3 (Linea di forza del campo). Si definisce *linea di forza del campo* una linea che è in ogni suo punto tangente alla direzione del campo.

Definizione 1.3.4 (Tubo di flusso). Presa una linea chiusa, in ogni suo punto passa una linea di forza del campo. La superficie tubolare definita da queste linee di forza è detta tubo di flusso.

Nel caso del campo elettrico \mathbf{E} si consideri una porzione di tubo di flusso compresa fra due superfici S_1 ed S_2 : assieme alla superficie laterale queste due superfici definiscono una superficie chiusa S . Per il teorema di Gauss, se non sono presenti cariche interne ad S , il flusso totale $\Phi_S^{tot}(\mathbf{E}) = 0$. Inoltre, per definizione di linea di forza il flusso attraverso la superficie laterale del tubo è nullo. Si ha quindi, tenendo conto della diversa orientazione di S_1 ed S_2 rispetto a S , $\Phi_{S_1}(\mathbf{E}) = \Phi_{S_2}(\mathbf{E})$. Siccome quanto detto è indipendente dalla porzione di tubo scelta si ha che il flusso del campo elettrico è una caratteristica del tubo di flusso. Da questo segue che la sezione del tubo di flusso si riduce nelle zone in cui il campo elettrico è maggiore, ovvero le linee di forza si addensano, e viceversa.

Risulta conveniente esprimere in forma locale il teorema di Gauss.

Corollario 1.3.5 (Prima equazione di Maxwell). *Nell'ipotesi che sia possibile applicare il teorema della divergenza al campo elettrico*

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (1.4)$$

Dimostrazione. Applicando il teorema della divergenza alla legge di Gauss si ricava che

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{E} \, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\tau} \rho \, d\tau$$

Siccome il teorema di Gauss vale qualunque sia la superficie di integrazione, la formula appena ottenuta deve valere qualunque sia il volume di integrazione, il che implica l'uguaglianza delle integrande, cioè la tesi. \square

La limitazione di questa equazione rispetto a quella fornita dal teorema di Gauss è situata nel fatto che viene richiesta la validità del teorema della divergenza, ovvero

¹Si osservi infatti come il punto chiave della dimostrazione, ovvero l'identificazione dell'angolo solido, dipenda direttamente dal fatto che la legge di Coulomb vada come $1/r^2$.

che il campo elettrico sia derivabile in ogni punto del dominio considerato. Il vantaggio risiede però nel fatto che il teorema di Gauss lega la distribuzione di carica interna alla superficie col campo sulla superficie (e quindi nel caso non stazionario, una variazione della distribuzione di carica non si traduce in una simultanea variazione del campo) mentre l'equazione di Maxwell lega grandezze calcolate nella stessa posizione e può dunque essere immediatamente generalizzata al caso non stazionario.

1.4 La terza equazione di Maxwell ed il potenziale elettrico

Si vuole studiare la forma differenziale ottenuta moltiplicando scalarmente la 1.2 con l'elemento di linea $d\mathbf{l}$

Osservazione 1.4.1. *La forma differenziale $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ è esatta.*

Dimostrazione. Per l'identità (B.14)

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{l}$$

Ma $\nabla f \cdot d\mathbf{l} = df$: $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ è il differenziale di una funzione ed è quindi una forma differenziale esatta. \square

Corollario 1.4.2 (Terza equazione di Maxwell).

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.5)$$

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata ricordando che una formula differenziale esatta è anche chiusa. \square

Risulta spontaneo a questo punto dare la seguente definizione:

Definizione 1.4.3. Si definisce *potenziale elettrico* generato dalla carica puntiforme Q la funzione scalare $V(\mathbf{r})$ tale che $-dV = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, o in altre parole

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V(A) - V(B) \quad (1.6)$$

Integrando l'espressione del campo elettrico generato da carica puntiforme si ottiene un'espressione esplicita per il potenziale:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\mathbf{r}|} + C$$

La costante C è arbitraria. Solitamente si richiede che il potenziale all'infinito sia nullo, da cui segue $C = 0$. I risultati ottenuti generalizzando il campo elettrico generato da carica puntiforme al campo elettrico generato da distribuzioni di carica continue o discrete possono essere estesi al potenziale. Emerge l'utilità del potenziale: note le distribuzioni di carica è molto più semplice, piuttosto che calcolare direttamente il campo elettrico (che è una funzione vettoriale), calcolare il potenziale e poi ricavare il campo facendone il gradiente.

Quando si lavora con distribuzioni di carica, si considera l'elemento di volume $d\tau'$ il cui vettore posizione è \mathbf{r}' . Si ha allora la forma differenziale del potenziale

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho d\tau'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + dC$$

Si impone ora che il potenziale sia nullo in una posizione \mathbf{r}_0 , ovvero

$$0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho d\tau'}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} + dC$$

$$dC = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho d\tau'}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|}$$

Per cui si ottiene

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho d\tau' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} \right) \quad (1.7)$$

1.5 Energia del campo elettrico

Un sistema di cariche che interagiscono reciprocamente possiede una certa *energia elettrostatica di interazione* dovuta al lavoro necessario per portare le cariche nella configurazione desiderata partendo da una condizione di assenza di interazione fra le cariche.

Teorema 1.5.1 (Energia elettrostatica per un sistema discreto di cariche puntiformi). *L'energia elettrostatica di interazione per un sistema discreto di N cariche puntiformi vale*

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (1.8)$$

Dimostrazione. Immaginiamo che inizialmente tutte le cariche siano all'infinito, in modo che non sentano l'interazione reciproca. Il posizionamento nello spazio della prima carica viene effettuato compiendo lavoro nullo, perchè inizialmente non è presente nessun campo elettrico. Ora è presente nello spazio il campo \mathbf{E}_1 prodotto dalla prima carica q_1 . Per portare quindi la seconda carica q_2 dall'infinito fino ad una distanza r_{12} dalla prima carica, è necessario compiere in lavoro

$$L_2 = \int_{-\infty}^{r_{12}} -q_2 \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{r_{12}} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}}$$

Dove il segno meno deriva dal fatto che il lavoro è quello associato alla forza esterna che sposta la carica opponendosi alla forza di coulomb. Il lavoro necessario per spostare la terza carica q_3 ad una distanza r_{13} da q_1 e ad una distanza r_{23} da q_2 , per il principio di sovrapposizione è uguale al lavoro necessario a spostare q_3 nel campo generato dalla prima carica e nel campo generato dalla seconda. Si ha quindi

$$L_3 = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{23}}$$

L'energia posseduta dal sistema di tre cariche è quindi

$$U = L_1 + L_2 + L_3 = 0 + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}} + \left(\frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{23}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^3 \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

dove il termine $1/2$ è necessario in quanto la sommatoria comprende sia l'interazione di q_i con q_j che l'interazione di q_j con q_i . Proseguendo col ragionamento, si ottiene la formula per N cariche. \square

Una comoda riscrittura della formula appena dimostrata si ottiene considerando

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j \neq i}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

E osservando che la seconda sommatoria corrisponde al potenziale V_i sentito dalla carica i -esima dovuto a tutte le altre $N - 1$ cariche e quindi si ottiene

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i \quad (1.9)$$

L'utilità di questa riscrittura è dovuta al fatto che consente di generalizzare quanto visto al caso di una distribuzione continua di carica contenuta in un insieme A

$$U = \frac{1}{2} \int_A \omega V d\mu \quad (1.10)$$

Le equazioni trovate esprimono l'energia potenziale elettrica in termini di posizione reciproca delle cariche, mettendo in evidenza quindi l'interazione fra queste mediante forza di Coulomb. Un altro approccio consiste invece nell'enfatizzare il ruolo del campo elettrico interpretando l'energia potenziale elettrica come quell'energia "immagazzinata" dal campo elettrico - che è un modo altisonante per dire: l'energia necessaria a generare il campo. Per farlo, si sfrutta la prima equazione di Maxwell.

Teorema 1.5.2. *Data una distribuzione di carica ρ l'energia elettrostatica vale*

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_S V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 d\tau \quad (1.11)$$

Dimostrazione. Tenuto conto della prima equazione di Maxwell (1.4) e della (1.10) si ha che

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho V d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} V d\tau$$

Applicando la (B.7) ricordando che il gradiente del potenziale è il campo elettrico cambiato di segno, si ottiene

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \nabla \cdot (V \mathbf{E}) d\tau + \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 d\tau$$

Per il teorema della divergenza infine si ha

$$\int_V \nabla \cdot (V \mathbf{E}) d\tau = \int_S V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

ottenendo la tesi. \square

Corollario 1.5.3. *Se si prende in considerazione tutto lo spazio, allora l'energia vale*

$$U = \int u d\tau \quad \text{con } u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

Dimostrazione. Si considerino i risultati del teorema precedente: fissata la distribuzione di carica in una regione finita di spazio, all'allargarsi del volume di integrazione l'integrale di volume aumenta e di paripasso l'integrale di superficie diventa trascurabile. Si ha quindi la tesi. \square

La u che compare nel risultato del corollario prende il nome di *densità di energia del campo elettrostatico*.

Il risultato a cui si giunge sembra in apparenza contraddittorio: u è chiaramente positiva e di conseguenza lo è il suo integrale, mentre non è difficile immaginare un caso in cui (1.8) sia negativa -basta prendere un sistema costituito da due cariche di segno opposto. La differenza risiede nel fatto che la (1.10) e tutte le equazioni che ne conseguono contengono un termine di auto-energia, ovvero l'energia necessaria alla costruzione della distribuzione di carica. Si consideri infatti il sistema già citato costituito da due cariche puntiformi elementari. L'energia fornita da (1.8) è

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Si vuole ora calcolare l'energia passando per la densità di energia.

$$u = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} \left[\frac{q_1^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{q_2^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + 2q_1 q_2 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \right]$$

Si integri quanto ottenuto. In particolare, ci si focalizzi sul terzo termine e si introduca il cambiamento di variabile $\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, $d\tau = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3 d\boldsymbol{\rho}$. Chiamando $\hat{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ si ottiene

$$\frac{q_1 q_2}{16\pi^2\epsilon_0} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} d\tau = \frac{q_1 q_2}{16\pi^2\epsilon_0} \int \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \frac{\boldsymbol{\rho} \cdot (\boldsymbol{\rho} + \hat{\mathbf{r}})}{\rho^3 |\boldsymbol{\rho} + \hat{\mathbf{r}}|^3} d\boldsymbol{\rho}$$

Usando la (B.14) e di seguito la (B.7) l'integrale assume la forma

$$\frac{q_1 q_2}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \left[- \int \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3 |\boldsymbol{\rho} + \hat{\mathbf{r}}|^3} d\boldsymbol{\rho} - \int \frac{1}{|\boldsymbol{\rho} + \hat{\mathbf{r}}|^3} \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} d\boldsymbol{\rho} \right]$$

Per il teorema della divergenza, il primo è un integrale sulla frontiera del volume. Siccome il volume di integrazione è tutto lo spazio, l'integrale sulla superficie va a 0. Per quanto concerne il secondo integrale, usando nuovamente la (B.14)

$$\int \frac{1}{|\boldsymbol{\rho} + \hat{\mathbf{r}}|^3} \nabla^2 \frac{1}{\rho} d\boldsymbol{\rho} = \int \frac{1}{|\boldsymbol{\rho} + \hat{\mathbf{r}}|^3} 4\pi\delta(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho} = \frac{4\pi}{|\hat{\mathbf{r}}|^3} = 4\pi$$

dove è stato fatto uso anche della (B.15). In conclusione, mettendo tutto insieme si ottiene che questo terzo termine rappresenta l'energia di interazione mentre gli altri due termini rappresentano l'auto-energia. Per quanto visto, siccome l'energia di interazione può essere sia positiva che negativa e l'energia totale è positiva, l'auto-energia deve essere necessariamente positiva.

1.6 Dipoli

Definizione 1.6.1 (dipolo elettrico). Si definisce dipolo elettrico un sistema costituito da due cariche q uguali ed opposte poste ad una distanza δ fissa. Il vettore che collega le due cariche è chiamato $\boldsymbol{\delta}$, ha intensità $|\boldsymbol{\delta}| = \delta$ ed è orientato dalla carica negativa alla positiva.

Il dipolo è caratterizzato dal *momento di dipolo*

$$\mathbf{p} = q\delta \quad (1.12)$$

Nel caso di distribuzioni di carica, la definizione può essere estesa

$$\mathbf{p} = \int_V \rho \mathbf{r}' d\tau \quad (1.13)$$

Teorema 1.6.2. *A distanze molto maggiori delle dimensioni lineari del dipolo ($r \gg \delta$) il potenziale generato dal dipolo vale*

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (1.14)$$

Dimostrazione. Definiti:

r^+ la distanza della carica positiva dall'osservatore;

r^- la distanza della carica negativa dall'osservatore

Si ha che

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^+} - \frac{1}{r^-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^- - r^+}{r^+ r^-}$$

Nell'ipotesi in cui $\delta \ll r$ valgono le seguenti approssimazioni:

$$r^+ r^- \cong r^2$$

$$r^+ - r^- \cong \delta \cos \alpha$$

con α l'angolo che il raggio vettore \mathbf{r} forma con \mathbf{p} . Segue che il potenziale può essere scritto come

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q\delta \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p r \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

□

Si osservi come il potenziale del dipolo decresca come $1/r^2$

Corollario 1.6.3. *Il campo elettrico generato dal dipolo giace esclusivamente nel piano pr ed è dotato di una componente radiale*

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}$$

e di una componente angolare

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

Dimostrazione. Noto il potenziale è possibile ricavare il campo elettrico semplicemente facendone il gradiente. In questo caso la soluzione più immediata consiste nell'applicare il gradiente in coordinate polari. Si sceglie l'asse z coincidente con la direzione di \mathbf{p} e l'angolo θ coincidente con l'angolo α definito sopra. In questo modo il potenziale può essere scritto come

$$V(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

Applicando il gradiente in coordinate polari, si ottiene la tesi.

□

Le linee di forza partono dalla carica positiva e si chiudono sulla carica negativa.

Ci si pone ora come obiettivo quello di descrivere la dinamica di un dipolo immerso in un campo elettrico. Le forze in gioco sono conservative, quindi possono essere dedotte da una funzione potenziale U . Il problema di descrivere la dinamica del dipolo si traduce nel problema di determinare il potenziale delle forze.

Lemma 1.6.4. *Si consideri un dipolo con momento \mathbf{p} immerso in un campo \mathbf{E} uniforme, l'energia potenziale del dipolo vale*

$$U = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{p} \quad (1.15)$$

Dimostrazione. Chiamando U_+ l'energia potenziale dovuta alla carica positiva del dipolo e U_- l'energia potenziale dovuta alla carica negativa si ottiene

$$U = U_+ + U_- = qV(\mathbf{r} + \delta) - qV(\mathbf{r})$$

Ponendo ora $V(\mathbf{r} + \delta) = V(\mathbf{r}) + dV$ si ottiene

$$U = qV(\mathbf{r}) + qdV - qV(\mathbf{r}) = qdV$$

Il differenziale del potenziale può essere scritto, in quanto forma differenziale, come $\nabla V \cdot d\mathbf{l}$ e da ciò segue, osservando che $d\mathbf{l} = \delta$

$$U = q\nabla V \cdot \delta = \nabla V \cdot q\delta$$

ottenendo la tesi. □

Teorema 1.6.5. *Per un dipolo si ha che*

$$\mathbf{F} = -(\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} \quad (1.16)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (1.17)$$

Dimostrazione. Dalla dinamica si ha che il lavoro elementare vale

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\theta}$$

dove $d\boldsymbol{\theta} = \hat{\mathbf{n}} d\theta$, con $\hat{\mathbf{n}}$ il versore dell'asse di rotazione. D'altra parte è vero che

$$-dL = dU = \frac{\partial U}{\partial l} dl + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta$$

Per confronto si ha quindi che

$$\begin{cases} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial U}{\partial l} dl \\ \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\theta} = -\frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta \end{cases}$$

Per il lemma $U = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{p} = -Ep \cos \theta$, dove la dipendenza dalla posizione la si ha solo in E mentre la dipendenza dall'angolo la si ha solo nel coseno. Si ha quindi che, ricordando che \mathbf{p} non dipende dalla posizione

$$\begin{cases} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial U}{\partial l} dl = dU|_{\theta=\text{cost}} = \nabla U \cdot d\mathbf{l} = \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{p}) \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ \mathbf{M} d\theta = -\frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta = -Ep \sin \theta d\theta = -(\mathbf{E} \times \mathbf{p}) d\theta = (\mathbf{p} \times \mathbf{E}) d\theta \end{cases}$$

Per confronto si ottiene la tesi. □

1.7 Sviluppo in serie di multipoli

Si consideri una distribuzione di carica in una regione limitata di spazio complessivamente neutra, ovvero tale che

$$q = \int \rho \, d\tau = 0$$

Considerata una superficie chiusa che racchiude la distribuzione di carica, per il teorema di Gauss il flusso del campo elettrico uscente è nullo. In particolare, se la distribuzione ha simmetria sferica, il campo elettrico esterno alla distribuzione di carica è ovunque nullo. Se la simmetria non è sferica invece non è detto che il campo su una superficie chiusa S che racchiude la distribuzione sia nullo, come in effetti dimostra l'esempio del dipolo. Risulta conveniente caratterizzare la distribuzione di carica con alcune proprietà globali che consentano di calcolare le caratteristiche del campo generato. Per farlo si parte dal potenziale definito in 1.7. Essendo la distribuzione concentrata in una regione limitata di spazio si può scegliere il potenziale nullo all'infinito ($r_0 \rightarrow +\infty$). Il termine al denominatore in coordinate cartesiane è $f(x', y', z') = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}}$. Si vuole sviluppare la funzione al primo ordine

$$f(x', y', z') = f(0) + \frac{\partial f}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial z'}$$

e tenuto conto della definizione di f si ha che

$$\begin{aligned} f(0) &= [(x)^2 + (y)^2 + (z)^2]^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial f}{\partial x'} &= (x-x')[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-\frac{3}{2}} \Big|_{x',y',z'=0} = \frac{x}{r^3} \\ \frac{\partial f}{\partial y'} &= (y-y')[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-\frac{3}{2}} \Big|_{x',y',z'=0} = \frac{y}{r^3} \\ \frac{\partial f}{\partial z'} &= (z-z')[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-\frac{3}{2}} \Big|_{x',y',z'=0} = \frac{z}{r^3} \end{aligned}$$

Sostituendo quindi si ottiene

$$f(x', y', z') = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}(xx' + yy' + zz') = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3}$$

Da cui, ricordando che il potenziale all'infinito è nullo e la definizione 1.13, si ottiene

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V f \rho \, d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (1.18)$$

Si parla di *primo e secondo termine di dipolo*. Il secondo termine di dipolo decresce più rapidamente del primo, rappresentando una correzione spesso trascurabile. Quando però il sistema è elettricamente neutro, il secondo termine diventa quello dominante.

1.8 Conduttori

Definizione 1.8.1 (Conduttore). Si definisce conduttore un oggetto indeformabile all'interno del quale vi sono elettroni liberi di muoversi

Un'ipotesi fondamentale dell'elettrostatica è l'invarianza temporale delle grandezze in gioco. In particolare questo vale per le distribuzioni di carica: è necessario supporre allora che le cariche libere nei conduttori non si muovano, ovvero che *all'interno dei conduttori il campo elettrico sia nullo*. Quando un conduttore viene immerso in un campo elettrico le cariche libere si muovono alla ricerca di una configurazione di equilibrio, che viene raggiunta quando la loro disposizione è tale da annullare il campo elettrico che si è formato internamente al conduttore.

Teorema 1.8.2. *Passando da un mezzo materiale ad un altro, la componente tangenziale del campo elettrico non può subire discontinuità.*

Dimostrazione. La dimostrazione segue dal fatto che il campo elettrico è conservativo. Si ha infatti che l'integrale di linea lungo un qualsiasi percorso chiuso deve essere nullo. Chiamando \mathbf{E}_1 il campo elettrico in un materiale e \mathbf{E}_2 il campo elettrico nell'altro, con a priori $\mathbf{E}_1 \neq \mathbf{E}_2$, si consideri un percorso rettangolare prossimo alla superficie di separazione dei due materiali. Si chiamino $d\mathbf{l}$ i segmenti paralleli alla superficie -uno in un mezzo ed uno nell'altro- e $d\mathbf{n}$ i segmenti ortogonali alla superficie. Al tendere di $d\mathbf{n}$ a 0, il contributo alla circuitazione dato dai tratti ortogonali è nullo. Si ha quindi che

$$\mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} - \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = E_1^t dl - E_2^t dl = 0$$

Dove con E^t si indica la componente del campo elettrico tangente alla superficie. Segue immediatamente la tesi. \square

Corollario 1.8.3. *In prossimità di un conduttore il campo elettrico è ortogonale alla superficie del conduttore.*

Dimostrazione. Nel lemma, si consideri uno dei due mezzi come un conduttore, sia questo il secondo dei due mezzi. Si ha quindi $\mathbf{E}_2 = 0$ e in particolare $E_2^t = 0$. Segue allora che la componente tangenziale del campo esterno al conduttore è nulla. \square

Dalle proprietà appena discusse del campo elettrico, seguono immediatamente quelle del potenziale

Corollario 1.8.4. *Il volume interno e la superficie dei conduttori sono equipotenziali.*

Dimostrazione. Ricordando che $\mathbf{E} = -\nabla V$ il fatto che il volume sia equipotenziale segue immediatamente dal fatto che il campo elettrico interno è nullo. La seconda parte dell'asserto si ottiene considerando che il gradiente è ortogonale alle superfici equipotenziali e che il campo elettrico è ortogonale alla superficie del conduttore. \square

Si vuole trovare ora una relazione fra il potenziale interno e quello esterno al conduttore. Si introduce la definizione:

Definizione 1.8.5 (lavoro di estrazione). Si definisce lavoro di estrazione L_e il lavoro necessario per portare una carica di prova q dall'interno all'esterno del conduttore, in prossimità della superficie.

$$\Delta V = V_i - V_e = -\frac{L_e}{q} \quad (1.19)$$

Osservazione sperimentale 1.8.6. Si osserva che $V_i - V_e$ è una quantità positiva dipendente esclusivamente dal materiale che costituisce il conduttore. Viene detta *funione lavoro*.

Si ha infine questo importante corollario:

Corollario 1.8.7. Le cariche presenti su un conduttore si dispongono tutte sulla superficie del conduttore.

Dimostrazione. Si consideri una superficie chiusa arbitraria Σ interna al conduttore. Essendo il campo elettrico nullo, il flusso attraverso questa superficie è nullo. Per il teorema di Gauss la carica totale interna a Σ è nulla. Essendo la superficie arbitraria, si può fare il limite per Σ tendente ad un qualsiasi punto interno al conduttore. L'unica possibilità per una carica sul conduttore è quindi quella di disporsi sulla superficie esterna di quest'ultimo. \square

Segue quindi che la distribuzione delle cariche di un conduttore viene descritta da una distribuzione di superficie e non di volume.

Un importante risultato relativo ai conduttori è il *teorema di Coulomb*.

Teorema 1.8.8 (teorema di Coulomb). In un punto vicino ad un conduttore il campo elettrico vale

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

diretto secondo la normale uscente se $\sigma > 0$, entrante se $\sigma < 0$

Dimostrazione. Si consideri un conduttore C ed un cilindretto di base dS e altezza dh , in modo tale che questa sia un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla base. L'altezza del cilindro è ortogonale alla superficie di C . Si vuole applicare al cilindretto il teorema di Gauss. Il flusso uscente, per il corollario 1.8.3, si riduce al flusso attraverso la base superiore. La carica interna è $dQ = \sigma dS$. Si ha quindi:

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}$$

Per il corollario a cui si è già fatto riferimento $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{n}}$. D'altro canto $d\mathbf{S} = dS\hat{\mathbf{n}}$, da cui la tesi. \square

Un altro importante risultato emerge a partire dalla seguente considerazione intuitiva: le cariche libere si dispongono lungo la superficie del conduttore formando uno strato con uno spessore nell'ordine dell'[Angstrom]. Queste cariche esercitano una forza di mutua repulsione che si deve tradurre in una pressione elettrostatica. Vale infatti il seguente teorema:

Teorema 1.8.9. In un punto della superficie del conduttore la pressione elettrostatica è pari alla densità di energia del campo elettrostatico in vicinanza del punto.

Dimostrazione. Si consideri un campo elettrico attorno al quale sia presente un campo elettrostatico \mathbf{E} generato dalla distribuzione di cariche sul conduttore e dalle cariche nello spazio circostante. Si supponga di modificare per una quantità infinitesima e in maniera quasistatica (in modo da trascurare l'energia cinetica dovuta al movimento) la geometria del conduttore, facendolo espandere verso l'esterno di un tratto $\delta\mathbf{x}$ ogni elemento di superficie dS ortogonalmente a se stesso. Per farlo è necessario applicare una forza esterna $\delta\mathbf{F}^{(e)}$ che compirà un lavoro $\delta L^{(e)} = \delta\mathbf{F}^{(e)} \cdot \delta\mathbf{x}$.

Gli spostamenti sono chiamati *spostamenti virtuali*; i lavori *lavori virtuali*. In assenza di energia cinetica il lavoro corrisponde alla variazione di energia elettrostatica del sistema

$$\delta U = \delta L^{(e)} = \delta \mathbf{F}^{(e)} \cdot \delta \mathbf{x}$$

Considerando che essendo la trasformazione quasistatica la forza esterna deve essere uguale e opposta alla forza elettrostatica si ha, in modulo:

$$\delta \mathbf{F}^{(e)} = -\delta \mathbf{F} = \frac{\delta U}{\delta x}$$

L'elemento di volume $dS\delta x$ aveva prima dello spostamento energia $\delta U_i = u dS\delta x$ e dopo lo spostamento ha energia $\delta U_f = 0$, in quanto tutto l'elemento di volume si trova dentro al conduttore dove il campo elettrico è nullo. Si ha quindi $\delta U = \delta U_f - \delta U_i = -u dS\delta x$. Da questo segue che

$$\delta F = -\frac{\delta U}{\delta x} = u dS$$

Dividendo per l'elemento di superficie, dalla definizione di pressione, si ottiene la tesi. \square

Il metodo dei lavori virtuali può essere usato per calcolare qualunque sollecitazione meccanica agente sul conduttore. A titolo di esempio, si consideri un conduttore spostato rigidamente di un tratto $\delta \mathbf{x}$. La risultante delle forze elettrostatiche R_x compie un lavoro $R_x \delta x = -\delta U$ con U l'energia elettrostatica, da cui si ha che $R_x = -\delta U / \delta x$. Una trattazione più approfondita delle problematiche relative a questo metodo verrà svolta nel capitolo sulla corrente stazionaria.

Con quanto appena visto è possibile osservare due effetti non intuitivi caratteristici dei conduttori.

Schermo elettrostatico

Si consideri un conduttore cavo, carico con una carica q . La carica, per quanto visto, si dispone sulla superficie del conduttore. Sia per assurdo \mathbf{E} il campo interno alla cavità. Si consideri un percorso chiuso in parte interno alla cavità ed in parte interno al conduttore: lungo questo percorso l'integrale di linea del campo elettrico non sarebbe nullo, infatti la parte di percorso interna al conduttore darebbe contributo nullo, ma non si potrebbe dire lo stesso per la parte interna alla cavità. Si viola quindi la conservatività del campo elettrico. Questo ragionamento può essere ripetuto identicamente considerando anche una distribuzione di carica esterna al conduttore. Il conduttore cavo funziona quindi da schermo elettrostatico.

Potere delle punte

Si immaginino due sfere con diverso raggio in cui tutte le grandezze fisiche caratteristiche abbiano simmetria sferica (e quindi, sufficientemente lontane affinché la distribuzione di carica di una non perturbi la distribuzione di carica dell'altra). I due potenziali allora valgono:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2}$$

Se ora queste due sfere sono collegate da un filo in modo che costituiscano un unico conduttore, si deve avere $V_1 = V_2$, ovvero

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

La carica si distribuisce sulle due sfere in maniera proporzionale ai raggi. Considerando ora invece la distribuzione superficiale di carica

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Si ottiene

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q_1}{R_1^2} \frac{R_2^2}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Ovvero la distribuzione di carica è inversamente proporzionale ai raggi e quindi per il teorema di Coulomb il campo elettrico è più intenso in prossimità della sfera più piccola. Generalizzando si può affermare che *in vicinanza di un conduttore il campo elettrico è tanto più intenso tanto più è piccolo il raggio di curvatura.*

1.9 Condensatori

Dipendendo il potenziale linearmente dalla carica, il rapporto Q/V è costante ed è allora giustificata la seguente definizione

Definizione 1.9.1 (Capacità). Si definisce capacità C il rapporto

$$C = \frac{Q}{V}$$

Si considerino due conduttori S_1 ed S_2 sufficientemente vicini, affinché interagiscano per induzione. Fissata la configurazione geometrica, venga fornita a S_1 una carica Q_1 , mantenendo pari a zero la carica di S_2 . Moltiplicando per un fattore a la carica Q_1 si dimostra che anche i potenziali generati dai due conduttori, V'_1 e V'_2 , vengono moltiplicati per lo stesso fattore: è quindi presente una relazione di proporzionalità diretta esprimibile dal sistema

$$\begin{cases} V'_1 = p_{11} Q_1 \\ V'_2 = p_{21} Q_1 \end{cases}$$

Ripetendo lo stesso ragionamento, fornendo questa volta una carica Q_2 ad S_2 e mantenendo nulla la carica su S_1 si ottiene

$$\begin{cases} V''_1 = p_{12} Q_2 \\ V''_2 = p_{22} Q_2 \end{cases}$$

Per il principio di sovrapposizione, se ad ambedue i conduttori viene fornita una carica si ottiene il sistema

$$\begin{cases} V_1 = p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2 \\ V_2 = p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2 \end{cases} \quad (1.20)$$

I coefficienti p_{ij} si chiamano *coefficienti di potenziale* e dipendono solo dalla geometria del sistema. La situazione può essere generalizzata al caso con N conduttori ottenendo

$$V_i = \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_j$$

Fissate le cariche, i potenziali sono univocamente determinati. Da questo segue che la matrice rappresentativa del sistema deve essere non singolare, ovvero $\det\{p_{ij}\} \neq 0$. In virtù di questo fatto, il sistema può essere invertito ottenendo che

$$Q_i = \sum_{j=1}^N c_{ij} V_j$$

I coefficienti c_{ij} si chiamano *coefficienti di induzione*. Le matrici dei coefficienti sono ovviamente legate dalla relazione:

$$\{c_{ij}\} = \{p_{ij}\}^{-1}$$

Le matrici di induzione e di potenziale sono simmetriche.

Si immagini ora un sistema di due conduttori disposti in una configurazione tale che il fenomeno di induzione che un condensatore esercita sull'altro sia completo, ovvero fornita una carica Q al primo conduttore il secondo si carica per induzione con una carica $-Q$. Quando l'induzione è completa tutte le linee di campo uscenti da un conduttore terminano sull'altro conduttore.

Definizione 1.9.2 (Condensatore). Si definisce condensatore un sistema di due conduttori che goda della proprietà di cui sopra.

Esistono tre tipi di condensatori:

Condensatori sferici Un conduttore è contenuto nella cavità di un altro conduttore;

Condensatori cilindrici Un conduttore si sviluppa lungo una linea ed è avvolto da un secondo conduttore con struttura tubolare - l'induzione completa si realizza quando la lunghezza del condensatore è molto maggiore rispetto alle dimensioni trasversali;

Condensatori piani Due conduttori si affacciano l'un l'altro in modo tale che le dimensioni lineari della superficie siano molto maggiori rispetto alla distanza - l'induzione completa si realizza nel limite di superficie infinita.

I due conduttori che formano il condensatore sono detti *armature*. Un condensatore viene caricato quando si stabilisce una differenza di potenziale fra le armature e su di esse si distribuiscono cariche uguali in modulo e di segno opposto (la carica totale di un condensatore carico è quindi nulla).

Fornendo una carica Q_1 all'armatura interna di un condensatore e lasciando la seconda elettricamente isolata, su quest'ultima le cariche si ridistribuiscono per induzione completa in modo che la faccia interna sia dotata di carica $-Q_1$ e quella esterna $+Q_1$. Collegandola ora a terra, l'armatura esterna resta dotata di carica $-Q_1$. Con un ragionamento analogo ci si rende conto che lo stesso avviene nel caso in cui quella collegata a terra fosse l'armatura interna.

Teorema 1.9.3. *In un condensatore, il modulo della carica sulle maglie e la differenza di potenziale sono direttamente proporzionali.*

$$Q = C\Delta V \quad C = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}}$$

Dimostrazione. Si consideri il sistema 1.20 per il caso considerato, ricordando la proprietà di simmetria:

$$\begin{aligned} V_1 &= p_{11}Q - p_{12}Q = (p_{11} - p_{12})Q \\ V_2 &= p_{21}Q - p_{22}Q = (p_{21} - p_{22})Q \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro, la tesi. La seconda espressione per C si ottiene facilmente invertendo la matrice $\{p_{ij}\}$. \square

È immediato da quanto visto ricavare l'energia immagazzinata da un condensatore. Ulteriori considerazioni verranno svolte nel capitolo sulla corrente stazionaria, dopo aver introdotto il concetto di forza elettromotrice.

Teorema 1.9.4. *Per un condensatore con capacità C , caricato fino ad avere una differenza di potenziale ΔV fra le armature l'energia elettrostatica è*

$$U = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad (1.21)$$

Dimostrazione. La distribuzione di carica è una distribuzione superficiale. Si indichino con S_a ed S_b le superfici delle due armature. Usando l'espressione per l'energia elettrostatica 1.10, si ha tenendo a mente

$$U = \frac{1}{2} \int_{S_a \cup S_b} \sigma V dS = \frac{V_a}{2} \int_{S_a} \sigma dS + \frac{V_b}{2} \int_{S_b} \sigma dS = \frac{V_a Q + V_b (-Q)}{2} = \frac{1}{2}Q\Delta V$$

Dalla definizione di capacità si ottengono le altre forme dell'asserto. \square

Si vogliono ora ricavare delle formule specifiche per le capacità delle tre tipologie di condensatori.

Osservazione 1.9.5 (Capacità del condensatore piano). *Per un condensatore piano con maglie di superficie S poste a distanza d , con le dimensioni lineari di S molto maggiori di d vale la formula*

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad (1.22)$$

Dimostrazione. Quella presente sulla superficie delle maglie è una distribuzione di carica superficiale che nelle ipotesi può considerarsi infinita, per cui il campo elettrico generato è

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} = \frac{Q}{S\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

Da questo segue che la differenza di potenziale vale

$$\Delta V = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 \frac{Q}{S\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d}{S\epsilon_0} Q$$

dato che la somma della proiezione di tutti gli elementi di linea sulla normale equivale alla distanza d fra le superfici. Dalla definizione di capacità come rapporto fra differenza di potenziale e carica, la tesi. \square

Osservazione 1.9.6 (Capacità del condensatore sferico). *Per un condensatore sferico con maglie di raggio R_1 ed R_2 poste a distanza $d = R_2 - R_1$ vale la formula*

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{d} \quad (1.23)$$

Se vale la condizione $R_1 \cong R_2$ allora la formula si riduce a:

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

Dimostrazione. Nella zona tra i due conduttori il campo elettrico vale

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad R_1 < r < R_2$$

Da questo segue che la differenza di potenziale vale

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}$$

Scegliendo come percorso, ad esempio, il segmento giacente sul raggio delle sfere. Dalla definizione di capacità, si ha la prima parte dell'asserto. La seconda parte dell'asserto si ottiene considerando che la condizione $R_2 \cong R_1$ implica $R_1 R_2 \cong R^2$. Si ha quindi

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{d} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

□

Osservazione 1.9.7 (Capacità del condensatore cilindrico). *Per un condensatore cilindrico con lunghezza l molto maggiore dei raggi R_1 ed R_2 delle maglie ($R_1 < R_2$) vale la formula*

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{l}{\ln(R_2/R_1)} \quad (1.24)$$

Se vale la condizione $R_1 \cong R_2$ allora la formula si riduce a:

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

Dimostrazione. Il ragionamento è analogo a quello precedente, ricordando che nella zona tra i due conduttori il campo elettrico vale

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \quad R_1 < r < R_2$$

La seconda parte dell'asserto si ottiene nuovamente considerando che la condizione $R_2 \cong R_1$ implica $R_2 - R_1 = d \ll R_2, R_1$. Si ha quindi, sviluppando

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \frac{R_1 + d}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{d}{R_1} \right) \cong \frac{d}{R_1}$$

Da cui segue

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{l}{\ln(R_2/R_1)} = \epsilon_0 \frac{2\pi R_1 l}{d} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

□

Si vogliono ora studiare invece i sistemi di condensatori. Si danno le seguenti definizioni:

Definizione 1.9.8 (Condensatori in parallelo). Si dicono in parallelo due condensatori collegati in modo tale che la prima armatura del primo sia collegata alla prima armatura del secondo e che la seconda armatura del primo sia collegata alla seconda armatura del secondo.

Definizione 1.9.9 (Condensatori in serie). Si dicono in serie due condensatori collegati in modo tale che la seconda armatura del primo sia collegata alla prima armatura del secondo.

Si osserva che i condensatori collegati in parallelo costituiscono di fatto un sistema di due conduttori. I condensatori collegati in serie invece, costituiscono un sistema di tre conduttori

Teorema 1.9.10 (Capacità dei condensatori in parallelo). *Dati n condensatori collegati in parallelo la capacità del sistema è equivalente a quella di un unico condensatore con capacità*

$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$

Dimostrazione. Si consideri per semplicità un sistema di due condensatori - la generalizzazione è banale. Considerando separatamente i due condensatori si ha

$$\begin{cases} Q_1 = C_1 \Delta V_1 \\ Q_2 = C_2 \Delta V_2 \end{cases}$$

In virtù del collegamento in parallelo, le differenze di potenziale ai capi delle armature dei condensatori sono uguali. Sommando membro a membro

$$Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) \Delta V$$

Siccome $Q_1 + Q_2$ rappresenta la carica totale del sistema, dalla definizione di capacità si ha l'asserto. \square

Teorema 1.9.11 (Capacità dei condensatori in serie). *Dati n condensatori collegati in serie la capacità del sistema è equivalente a quella di un unico condensatore con capacità*

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Dimostrazione. Si consideri nuovamente un sistema di due condensatori. Considerando separatamente i due condensatori si ha

$$\begin{cases} \Delta V_1 = \frac{Q_1}{C_1} \\ \Delta V_2 = \frac{Q_2}{C_2} \end{cases}$$

In virtù del collegamento in serie, per l'induzione completa la carica sulla seconda armatura del primo condensatore sarà uguale in modulo e opposta alla carica sulla prima armatura. Un ragionamento analogo vale per il secondo condensatore, tenendo però conto anche del fatto che la carica sulla prima armatura del secondo

condensatore sarà uguale alla carica sulla seconda armatura del primo. A questo punto quindi, sottraendo membro a membro le equazioni del sistema si ottiene:

$$\Delta V_1 - \Delta V_2 = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) Q$$

Siccome $\Delta V_1 - \Delta V_2$ rappresenta la caduta di potenziale ai capi del sistema di condensatori, dalla definizione di capacità si ha l'asserto. \square

1.10 Il problema generale dell'elettrostatica nel vuoto

Il problema dell'elettrostatica consiste nel calcolare, note le cariche totali possedute da dei conduttori, il campo elettrico generato e la distribuzione delle cariche sui conduttori stessi. Con distribuzioni di carica note, la soluzione è concettualmente semplice: basta applicare la (1.3) per ottenere il campo elettrico e di seguito tutte le grandezze cercate. In presenza di conduttori la distribuzione di cariche libere è però influenzata dalla reciproca interazione. Per riuscire a risolvere il problema risultano allora di fondamentale importanza le due equazioni di Maxwell trovate.

Teorema 1.10.1. *Il potenziale soddisfa la seguente equazione*

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.25)$$

equivalente alla prima equazione di Maxwell (1.4) ed alla terza (1.5).

L'equazione presentata nel teorema si chiama *equazione di poisson*

Dimostrazione. Per definizione $\mathbf{E} = -\nabla V$. Dalla prima equazione di Maxwell si ha che:

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V$$

dimostrando in questo modo sia l'equazione di Poisson che l'equivalenza fra quest'ultima e la prima equazione di Maxwell. L'ultima parte della tesi si ottiene facilmente: essendo \mathbf{E} espresso come gradiente di V allora la terza equazione di Maxwell è verificata e viceversa, se la terza equazione di Maxwell è verificata allora il campo elettrico è conservativo e può quindi essere espresso in termini di gradiente di una funzione scalare. \square

Teorema 1.10.2 (Esistenza e unicità della soluzione all'equazione di Poisson). *Fissata la funzione ρ localizzata in una porzione finita di spazio, l'equazione di Poisson ammette una ed una sola soluzione che soddisfi le condizioni al contorno del dominio di definizione.*

Questo risultato è importante nel caso in cui siano presenti dei conduttori: in caso contrario infatti il potenziale e di conseguenza il campo elettrico sono forniti direttamente dalla 1.7. Segue direttamente l'importante corollario:

Corollario 1.10.3. *L'equazione di Poisson caratterizza completamente il potenziale.*

Si può allora dire che il problema generale dell'elettrostatica consista nel risolvere l'equazione di Poisson con determinate condizioni al contorno.

Si elencano ora le tre situazioni che si presentano più di frequente.

Problema di Dirichlet - Non sono presenti cariche localizzate; il campo è generato da un sistema di conduttori di geometria nota, di cui si conoscono i potenziali. L'equazione di Poisson si riduce in questo caso all'equazione di Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$

Il problema è definito dal punto di vista matematico, essendo note le condizioni al contorno ($V = 0$ all'infinito, $V = V_i$ sulla superficie dell' i -esimo conduttore). I passi risolutivi sono i seguenti:

1. si risolve l'equazione di Poisson ottenendo il potenziale nello spazio circostante i conduttori;
2. dal potenziale si può ricavare il campo;
3. il valore del campo in prossimità dei conduttori consente di calcolare la densità di carica superficiale;
4. integrando la densità di ogni conduttore sulla sua superficie si ottiene la carica disposta sui conduttori;
5. avendo le cariche ed essendo i potenziali noti è possibile ricavare i coefficienti di capacità.

Non sono presenti cariche localizzate; il campo è generato da un sistema di conduttori di geometria nota, di cui si conoscono le cariche. Questo problema è l'inverso del problema di Dirichlet I passi risolutivi sono i seguenti:

1. si scelgono in modo arbitrario i potenziali dei conduttori;
2. si risolve il problema di Dirichlet relativo;
3. ricavati i coefficienti di capacità, si ottengono i potenziali veri a partire dalle cariche note;
4. si risolve il problema di Dirichlet relativo ai potenziali trovati.

Sono presenti cariche localizzate con distribuzione ρ nota; è inoltre presente un sistema di conduttori di geometria nota, di cui si conoscono le cariche. Il potenziale dell' i -esimo conduttore, per il principio di sovrapposizione, è dato da

$$V_i = V_i(\rho) + \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_j$$

Di questa equazione sono noti i coefficienti di potenziale determinati dalla geometria del sistema, mentre non si conoscono i potenziali generati dalla distribuzione di carica. I passi risolutivi sono i seguenti:

1. si scelgono in modo arbitrario i potenziali dei conduttori;
2. si risolve il problema di Dirichlet relativo;
3. ricavate le cariche relative, si può invertire l'equazione per i potenziali dei conduttori in modo da ricavare i potenziali dovuti alla distribuzione di carica;
4. si risolve l'equazione per i potenziali dei conduttori usando le cariche note.

Si elencano ora tre casi notevoli in cui il problema generale dell'elettrostatica può essere risolto senza ricorrere all'equazione di Poisson.

Metodo delle cariche immagine

Si consideri un conduttore S collegato a terra, in modo che il suo potenziale sia 0, e che siano presenti N cariche puntiformi Q_i . Se la geometria del conduttore è semplice, si può immaginare di eliminare il conduttore posizionando dalla parte opposta delle Q_i rispetto al conduttore, M cariche Q'_i , dette cariche immagine, in modo tale che il potenziale complessivo su S sia comunque nullo. Nella porzione di spazio τ che contiene le Q_i la distribuzione di carica e le condizioni al contorno sono le stesse sia in presenza delle cariche immagine che della distribuzione di carica sul conduttore indotta dalle Q_i , perciò per il teorema di unicità la configurazione di potenziale in τ è la stessa in entrambi i casi.

Il grande vantaggio di questo metodo è che introducendo le cariche immagine il potenziale è calcolabile usando l'espressione per il potenziale generato da un numero discreto di cariche.

Equazione di Laplace unidimensionale

Se il sistema è costituito da piani omogeneamente carichi, infiniti e paralleli fra loro, il potenziale dipende esclusivamente dalla coordinata x ortogonale ai piani. L'equazione di Laplace si riduce allora a

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

Di conseguenza $V(x) = ax + b$, con le costanti determinate dalle condizioni al contorno.

Separazione di variabili

L'equazione di Laplace nel caso tridimensionale può essere risolta ipotizzando che il potenziale sia nella forma

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

Questo è possibile solo se la decomposizione è compatibile con le equazioni al contorno assegnate. Sostituendo nell'equazione di Laplace e dividendo per XYZ si ottiene:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

Affinchè la somma sia nulla per ogni valore di X , Y , Z è necessario che ciascuno dei termini della somma sia costante, ovvero

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = K_1^2$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = K_2^2$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -K_3^2$$

con $K_1^2 + K_2^2 - K_3^2 = 0$. La soluzione delle tre equazioni è

$$X = A_1 \cos(K_1 x + B_1)$$

$$Y = A_2 \cos(K_2 y + B_2)$$

$$Z = A_3 \cos\left((K_1 + K_2)^{\frac{1}{2}} z + B_3\right)$$

I valori delle costanti si trovano imponendo le condizioni al contorno.

Capitolo 2

Elettrostatica nei dielettrici

Si vogliono ora studiare gli effetti della presenza di cariche elettriche in uno spazio non più vuoto ma riempito con materiali dielettrici (o isolanti).

2.1 Costante dielettrica

Osservazione sperimentale 2.1.1. *Preso un condensatore a geometria piana e riempito lo spazio fra le armature con un materiale dielettrico omogeneo e isotropo, lasciando inalterata la geometria del condensatore, si osserva che a parità di carica la differenza di potenziale diminuisce.*

Dalla definizione di capacità, questo significa che la capacità è aumentata. Ma dalla (1.22) si osserva che ciò può essere dovuto esclusivamente ad una variazione della costante dielettrica¹.

Definizione 2.1.2 (Costante dielettrica relativa). Si definisce costante dielettrica relativa $\epsilon_r = C/C_0 > 1$, dove C è la capacità del condensatore immerso nel dielettrico e C_0 la capacità del condensatore nel vuoto.

Definizione 2.1.3 (Costante dielettrica assoluta). Si definisce costante dielettrica assoluta $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r > \epsilon_0$.

In questo modo si ha che

$$C = \epsilon_r C_0 = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d} = \epsilon \frac{S}{d}$$

Pragmaticamente quindi, l'effetto della presenza di un dielettrico in tutto lo spazio interessato da un potenziale generato da un sistema di cariche è quello di diminuire il potenziale secondo un fattore ϵ_r .

2.2 Polarizzazione

Evidentemente i dielettrici si comportano in modo molto diverso dai conduttori. Questa differenza di comportamento a livello macroscopico è riducibile a diffe-

¹Lo stesso discorso si può condurre per condensatori sferici e cilindrici, infatti per quanto ben più complicate, le espressioni della capacità dipendono anche in quel caso esclusivamente dalla costante dielettrica e dalla geometria del condensatore.

renze di comportamento microscopico. I conduttori tipicamente sono metalli, caratterizzati da una struttura cristallina in cui ogni atomo si trova al vertice di un poliedro. Questa struttura fa sì che gli elettroni più esterni di ciascun atomo siano liberi - ovvero l'energia di interazione di questi elettroni col nucleo sia inferiore all'energia di agitazione termica. L'applicazione di un campo elettrico induce su questi elettroni un movimento ordinato. Nei dielettrici gli elettroni sono invece fortemente legati al nucleo e vengono strappati dalla loro posizione solo in seguito a forze localizzate molto intense (come lo strofinio). Complessivamente quindi il dielettrico può considerarsi neutro. Nonostante questo però esso produce un campo elettrico quando possiede un momento di dipolo diverso da zero, che viene indotto da un campo elettrico esterno. Questo fenomeno è chiamato *polarizzazione elettrica* e può essere di due tipi: per deformazione e per orientamento. Nella descrizione del fenomeno di polarizzazione si fa riferimento al campo elettrico locale \mathbf{E}_l , ovvero il campo agente sui singoli atomi (o sulle singole molecole) dovuto sia alle cariche libere localizzate che generano il campo elettrico esterno che al campo generato dagli atomi (molecole) del dielettrico meno quello considerato.

Polarizzazione per deformazione L'atomo è schematizzabile come un sistema elettricamente neutro costituito da un nucleo puntiforme con carica $Q_+ = Ze$ e da una distribuzione di carica a simmetria sferica variabile con carica totale $Q_- = -Q_+$ dovuta alla nube elettronica. A causa della simmetria sferica il campo elettrico generato dall'atomo è nullo. Se però interviene un campo elettrico esterno il nucleo risente di una forza $\mathbf{f}_p = Ze\mathbf{E}_l$ e il baricentro della nube elettronica risente di una forza $\mathbf{f}_e = -Ze\mathbf{E}_l$. Ne consegue che il nucleo ed il baricentro della nube elettronica si allontanano di una distanza \mathbf{r} e si attraggono quindi con una forza \mathbf{f} . Si raggiunge una situazione di equilibrio quando $|\mathbf{f}| = |\mathbf{f}_p| (= |\mathbf{f}_e|)$: in questa situazione si hanno due cariche uguali e opposte ad una distanza \mathbf{r} , ovvero un dipolo. Immaginando un modello in cui gli elettroni sono legati elasticamente ai nuclei è naturale aspettarsi che, per campi elettrici esterni non troppo intensi², \mathbf{r} sia proporzionale all'intensità del campo elettrico. Ricordando la (1.12) il momento di dipolo dovuto alla deformazione può quindi essere scritto come

$$\mathbf{p} = \alpha_d \mathbf{E}_l$$

α_d viene detta polarizzabilità elettronica. Un fenomeno analogo lo si può osservare anche nelle molecole poliatomiche: oltre alla polarizzazione elettronica è presente quella che viene detta *polarizzazione atomica*.

Polarizzazione per orientamento Molte molecole non sono simmetriche e perciò possiedono un momento di dipolo. Poichè solitamente le molecole sono orientate casualmente, il momento di dipolo medio è nullo e perciò non si osservano effetti a livello macroscopico. Quando però viene applicato un campo elettrico esterno i momenti di dipolo tendono ad orientarsi parallelamente a questo, e quindi il valor medio risulta diverso da zero.

Lemma 2.2.1. *Dato un insieme di dipoli praticamente liberi, per i quali siano trascurabili le mutue interazioni, il momento di dipolo medio vale*

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \alpha_0 \mathbf{E}_l \quad \alpha_0 = \frac{p_0^2}{3KT} \quad (2.1)$$

²Questa condizione è largamente rispettata per tutti i campi elettrici realizzabili nella pratica

Dimostrazione. In presenza del campo elettrico locale ogni dipolo è sottoposto ad un momento meccanico $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_l$ che tende ad orientarlo come \mathbf{E}_l ; l'agitazione termica invece favorisce l'orientamento casuale. L'equilibrio statistico fra queste due tendenze è descritto dalla funzione di Boltzmann

$$P(U) = A e^{-\frac{U}{k_b T}}$$

dove A è una costante di normalizzazione, U è l'energia del dipolo, k_b è la costante di Boltzmann e T è la temperatura in gradi kelvin. Fissato il momento di dipolo ed il modulo del campo elettrico locale, si ha per la 1.15 $U = -p_0 E_l \cos \theta = U(\theta)$, con θ l'angolo fra i due vettori. Ambientando il problema in un sistema di riferimento con l'asse z rivolto nello stesso verso del campo \mathbf{E}_l , la probabilità che il dipolo sia orientato entro un angolo solido $d\Omega = d\theta d\phi$ è

$$dP = P(U(\theta)) \sin \theta d\theta d\phi = A e^{\frac{p E_l \cos \theta}{K T}} \sin \theta d\theta d\phi$$

Nell'ipotesi di essere lontani dallo zero assoluto, e che l'intensità del campo locale non sia troppo alta, l'esponenziale può essere sviluppato al primo ordine ottenendo:

$$dP = A \left(1 + \frac{p E_l \cos \theta}{K T} \right) \sin \theta d\theta d\phi$$

È conveniente ora cambiare variabile: $x = \cos \theta$, $dx = -\sin \theta d\theta$. Si ottiene quindi

$$dP = A \left(1 + \frac{p E_l}{K T} x \right) dx d\phi$$

La costante di normalizzazione si ottiene imponendo che la probabilità su tutto l'angolo solido³ sia 1 da cui segue, svolgendo l'integrale, $A = 1/(4\pi)$. Si osservi ora come \mathbf{p} abbia simmetria cilindrica attorno a \mathbf{E}_l e la componente del momento di dipolo ortogonale al campo elettrico sia dunque, in media, nulla: $\langle \mathbf{p} \rangle$ è orientato come \mathbf{E}_l . In modulo il valor medio del momento di dipolo vale allora

$$|\langle \mathbf{p} \rangle| = |\langle \mathbf{p}_{//} \rangle| = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi p \cos \theta dP = \int_{-1}^1 -\frac{1}{2} \left(p x + \frac{p^2 E_l}{K T} x^2 \right) dx = \frac{p^2}{3 k_b T} E_l$$

ovvero la tesi. □

α_0 viene detta polarizzabilità molecolare. Il risultato ottenuto ha evidenti analogie con quello dedotto nel caso della polarizzazione per deformazione, con la sola differenza che in questo caso non è direttamente il momento di dipolo ma il suo valor medio ad essere proporzionale al campo elettrico.

Sulla base di queste considerazioni ci si aspetta che un dielettrico immerso in un campo elettrico possieda un momento di dipolo medio $\langle \mathbf{p} \rangle$ non nullo, orientato come il campo elettrico esterno.

L'effetto macroscopico dei fenomeni appena elencati può essere descritto introducendo il vettore polarizzazione elettrica.

³ ϕ va da 0 a 2π , x da 1 a -1 .

Definizione 2.2.2 (Vettore polarizzazione elettrica). Si definisce il vettore polarizzazione elettrica \mathbf{P} come il momento di dipolo elettrico per unità di volume posseduto dal dielettrico

$$\mathbf{P} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\tau} = \frac{dN \langle \mathbf{p} \rangle}{d\tau}$$

Con dN il numero di molecole contenute nell'elemento di volume $d\tau$. Dalla definizione si ottiene che l'elemento di volume possiede un momento di dipolo $d\mathbf{p} = \mathbf{P} d\tau$. Sebbene quindi le cariche in un dielettrico non siano libere di muoversi, il fatto che un dielettrico sia polarizzato può essere schematizzato con la presenza sulla sua superficie di cariche aggiuntive con una distribuzione σ_p e nel suo volume di cariche aggiuntive con distribuzione ρ_p .

Teorema 2.2.3. *In un dielettrico polarizzato si ha che*

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (2.2)$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (2.3)$$

Dimostrazione. Si vuole calcolare il campo elettrico generato da un dielettrico che occupi un volume τ e dotato di polarizzazione $\mathbf{P}(x', y', z')$. Dalla (1.14) si ha che l'elemento di volume $d\tau$ in posizione \mathbf{r}' porta al potenziale $V(x, y, z) = V(\mathbf{r})$ il contributo infinitesimo

$$dV(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau$$

Di conseguenza il potenziale su tutto lo spazio vale

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau'$$

Si può scrivere per la (B.14)

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \mathbf{P} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'$$

e, ricordando la (B.7)

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\tau' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'$$

Grazie al teorema della divergenza il primo integrale può essere riscritto, indicando con S la superficie che racchiude il volume

$$\int_{\tau} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\tau' = \int_S \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS$$

Siccome la soluzione al problema dell'elettrostatica deve essere unica e il potenziale deve anche essere uguale a

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'$$

Per confronto fra le integrande si ottiene la tesi. \square

Come è intuitivo, se il vettore polarizzazione è uniforme (da leggersi "è indipendente dalla posizione") il volume del dielettrico è complessivamente neutro e le cariche di polarizzazione si manifestano solo in superficie.

Si vuole ora trovare una relazione fra il vettore polarizzazione e il campo elettrico macroscopico che agisce internamente al dielettrico. Per farlo, è necessario prima puntualizzare alcuni aspetti del campo elettrico locale. Il campo agente sulla singola molecola è generato sia dalle cariche libere che dalle molecole circostanti quella considerata: quest'ultimo contributo dipende fortemente sia dalla posizione che dal tempo. Si tratta però di posizioni e tempi molto piccoli rispetto al sistema macroscopico e perciò si sceglie di considerare regioni di spazio piccole rispetto al sistema macroscopico ma comunque grandi rispetto a lunghezze e tempi atomici: in questo modo la media dei campi elettrici su queste porzioni di spazio dipende in maniera regolare dalla posizione. Questa media viene indicata con \mathbf{E}_l e ci si riferirà sempre a quest'ultima quando si parlerà di campo elettrico locale.

Per quanto visto, ci si aspetta che il vettore polarizzazione sia proporzionale al campo elettrico locale, ovvero che abbia una forma

$$\mathbf{P} = n\alpha\mathbf{E}_l \quad n = \frac{dN}{d\tau}, \alpha = \alpha_0 + \alpha_d$$

In generale la dipendenza del vettore polarizzazione dal campo elettrico può essere espressa nella forma

$$\begin{cases} P_x = \alpha_{11}E_x + \alpha_{12}E_y + \alpha_{13}E_z \\ P_y = \alpha_{21}E_x + \alpha_{22}E_y + \alpha_{23}E_z \\ P_z = \alpha_{31}E_x + \alpha_{32}E_y + \alpha_{33}E_z \end{cases}$$

la matrice dei coefficienti α , non necessariamente costanti, si chiama *matrice di polarizzazione*. Si dice *perfetto* un dielettrico con matrice di polarizzazione costante. Questa struttura del vettore polarizzazione diventa particolarmente utile nel momento in cui si trattano *solidi cristallini anisotropi*. In alcuni casi questi dielettrici, che prendono quando ciò si verifica il nome di *ferroelettrici*, possono presentare una polarizzazione elettrica permanente che segue una *curva di isteresi* in funzione di \mathbf{E} . In questi materiali si parla di *piezoelettricità*, ovvero la polarizzazione dipende dalle sollecitazioni meccaniche a cui il cristallo è sottoposto.

Si introduce ora

Definizione 2.2.4 (Suscettibilità elettrica). Si definisce suscettibilità elettrica

$$\chi = \frac{P}{\epsilon_0 E}$$

Osservazione 2.2.5. Per sostanze a bassa densità

$$\chi = \frac{n}{\epsilon_0} \alpha = \frac{n}{\epsilon_0} \left(\alpha_d + \frac{p^2}{3KT} \right)$$

Dimostrazione. L'ipotesi di bassa densità implica che le interazioni reciproche fra le molecole siano trascurabili, per cui $\mathbf{E}_l \simeq \mathbf{E}$. Da questo segue

$$\epsilon_0 \chi \mathbf{E} = \mathbf{P} = n \left(\alpha_d + \frac{p^2}{3KT} \right) \mathbf{E}_l \simeq n \left(\alpha_d + \frac{p^2}{3KT} \right) \mathbf{E}$$

Si ha quindi la tesi. □

Per i liquidi densi invece l'interazione fra molecole non è trascurabile. Si dà il seguente lemma di cui viene omessa la dimostrazione.

Lemma 2.2.6 (relazione di Lorentz). *Nell'ipotesi in cui il campo generato dalle molecole sia puramente dipolare, la distribuzione dei dipoli sia uniforme, il momento dei dipoli sia parallelo al campo esterno e che i momenti di dipolo siano tutti uguali fra loro si ha:*

$$\mathbf{E}_l = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

Teorema 2.2.7 (relazione di Clausius-Mossotti). *Per un dielettrico perfetto, nelle ipotesi del lemma*

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{n} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}$$

Dimostrazione. Il vettore polarizzazione vale

$$\mathbf{P} = n\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \right)$$

da cui

$$\mathbf{P} = \left(\frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3\epsilon_0}} \right) \mathbf{E}$$

Per confronto con la definizione di suscettibilità elettrica si ha

$$\chi = \frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3\epsilon_0}} \frac{1}{\epsilon_0} = \frac{3n\alpha}{3\epsilon_0 - n\alpha}$$

Si introduce per i dielettrici perfetti l'uguaglianza simbolica $\chi = \epsilon_r - 1$, che più avanti nel capitolo troverà una giustificazione⁴.

$$\epsilon_r - 1 = \frac{3n\alpha}{3\epsilon_0 - n\alpha}$$

Risolvendo l'equazione per α si trova la tesi. □

2.3 Equazioni di Maxwell nei dielettrici

Definizione 2.3.1 (Spostamento elettrico). Si definisce vettore di spostamento elettrico

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

Osservazione 2.3.2. *In dielettrici perfetti e isotropi, il vettore di spostamento elettrico ed il campo elettrico sono legati dalla relazione*

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Nel caso di dielettrici perfetti isotropi dalla definizione si suscitibilità elettrica, coerentemente con l'uguaglianza simbolica introdotta prima $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = (\epsilon_0 + \epsilon_0 \chi) \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$. □

⁴Si vedano le considerazioni in calce al teorema 2.4.1

Teorema 2.3.3. *In presenza di dielettrici la prima e la terza equazione di Maxwell assumono la seguente forma:*

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.6)$$

Dimostrazione. In presenza di dielettrico la struttura del campo elettrico non cambia, per cui la sua circuitazione deve continuare ed essere nulla. Per quanto riguarda la prima equazione di Maxwell, introducendo la densità delle cariche di polarizzazione ρ_p , questa diventa

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0}$$

Siccome la densità di carica di polarizzazione non è nota a priori, dalla (2.3), tenuto conto che ϵ_0 è costante, si ottiene

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \rho$$

Dalla definizione di vettore di spostamento elettrico, la tesi. \square

2.4 Problema generale dell'elettrostatica nei dielettrici

Per semplicità verranno considerati solo dielettrici perfetti e isotropi. Dalla prima delle equazioni di Maxwell in presenza di dielettrici si evince che

$$\Phi_S \mathbf{D} = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_i$$

ovvero l'equivalente del teorema di Gauss, dove Q_i sono le cariche interne ad S escluse quelle di polarizzazione che, di fatto, non compaiono dell'equazione di Maxwell. In maniera analoga il teorema di Coulomb può essere riformulato come

$$\mathbf{D} = \sigma \hat{\mathbf{n}}$$

Fatte queste premesse, si giunge al seguente importante risultato

Teorema 2.4.1. *Nel caso in cui il dielettrico riempia interamente lo spazio, il problema dell'elettrostatica nei dielettrici è analogo a quello nel vuoto con*

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon_r}$$

$$V = \frac{V_0}{\epsilon_r}$$

Dimostrazione. Nell'ipotesi in cui il dielettrico riempia tutto lo spazio si ha che la (2.4). Moltiplicando allora la terza delle equazioni di Maxwell nei dielettrici per ϵ si ottiene:

$$\nabla \times \mathbf{D} = 0$$

Analogamente, dividendo la prima per ε si ottiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Da cui si deduce che il vettore spostamento elettrico è anch'esso conservativo e che, nel caso dei dielettrici, il campo elettrico viene scalato semplicemente di un fattore ε_r . \square

Questo risultato giustifica finalmente l'uguaglianza simbolica $\chi = \varepsilon_r - 1$: a partire da questa si è dimostrato infatti che il potenziale in un dielettrico è scalato di un fattore ε_r rispetto al caso nel vuoto e in particolare questo è vero per un condensatore, come era stato dedotto in conclusione al paragrafo 2.1.

Si immagini ora che il dielettrico non occupi tutto lo spazio: il caso più generale è quello in cui tanti dielettrici diversi occupino diverse porzioni di spazio. Localmente, ovvero su ciascun dielettrico, i risultati ottenuti col precedente teorema continuano a valere. Sulle superfici di separazione i campi subiscono una discontinuità e quindi le derivate non sono più definite: non valgono quindi più le equazioni di Maxwell. Fortunatamente, continua a valere il loro corrispettivo integrale. Ne consegue che all'interno di ciascun dielettrico continua a valere l'equazione di Poisson ma per risolvere il problema dell'elettrostatica è necessario determinare preliminarmente le condizioni di raccordo del campo elettrico sulle superfici di separazione dei vari dielettrici.

Teorema 2.4.2. *Attraversando l'interfaccia fra due dielettrici diversi le componenti tangenti di \mathbf{E} e \mathbf{D} sono legate dalla relazione*

$$D_{n1} = D_{n2} \quad (2.7)$$

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (2.8)$$

Dimostrazione. Si consideri una superficie di separazione fra due dielettrici Σ priva di cariche localizzate e un cilindretto con basi parallele a Σ e altezza dh . Il flusso attraverso le superfici laterali può essere trascurato nel limite $dh \rightarrow 0$. In assenza di cariche localizzate il teorema di Gauss assume la forma

$$0 = \Phi(\mathbf{D}) = dS \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{D}_1 + dS \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{D}_2$$

Tenendo conto che le basi del cilindro sono parallele, per cui $\hat{\mathbf{n}}_1 = -\hat{\mathbf{n}}_2$, e indicando con D_{ni} [$i = 1, 2$] le proiezioni di \mathbf{D} sulle normali, si ha:

$$dS(D_{n1} - D_{n2}) = 0$$

ovvero

$$D_{n1} = D_{n2}$$

Dalla (2.4) si ottiene la tesi. \square

Del seguente teorema si omette la dimostrazione in quanto analoga a quella del lemma 1.8.2.

Teorema 2.4.3. *Attraversando l'interfaccia fra due dielettrici diversi le componenti tangenti di \mathbf{E} e \mathbf{D} sono legate dalla relazione*

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (2.9)$$

$$\frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (2.10)$$

Queste relazioni forniscono anche un metodo per la misurazione del campo all'interno dei materiali: è infatti sufficiente praticare nel dielettrico un sottile taglio parallelo (ortogonale) alle linee di campo del campo elettrico (vettore spostamento elettrico) ed effettuare la misura all'interno della cavità -il campo misurato sarà uguale al campo macroscopico presente all'interno del materiale.

Teorema 2.4.4 (legge di rifrazione delle linee di forza del campo elettrico). *Chiamato θ_i l'angolo che E_{ti} forma con la superficie di separazione (con $i = 1, 2$) si ha*

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è banale e si ottiene facendo il rapporto fra la (2.9) e la (2.7) \square

Una legge analoga vale per \mathbf{D} , considerando che è parallelo ad \mathbf{E} .

2.5 Energia elettrostatica nei dielettrici

L'energia elettrostatica nei dielettrici si ottiene in modo analogo a come si è ottenuta la (1.10) considerando però che la disposizione nello spazio delle cariche libere a partire dall'infinito induce una ridistribuzione delle cariche di polarizzazione che modifica il potenziale. Bisognerebbe calcolare il lavoro necessario sia a costruire la distribuzione di cariche libere che il lavoro necessario a costruire la configurazione delle cariche di polarizzazione, ma siccome il potenziale contiene sia l'informazione relativa all'interazione fra le cariche libere che l'informazione relativa all'interazione fra cariche libere e di polarizzazione la (1.10) continua a definire l'energia elettrostatica con l'unica differenza che ρ soddisfa la prima equazione di Maxwell in presenza di dielettrici. Con passaggi analoghi a quelli già visti nel caso del vuoto si può esprimere

$$U = \int u \, d\tau$$

con

$$u = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2}$$

Nel caso in cui il dielettrico sia isotropo si ha

$$u = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}$$

Parte II

Corrente

Capitolo 3

Considerazioni generali

3.1 Concetti introduttivi

I concetti esposti saranno formulati per concretezza nei conduttori metallici, ma potranno essere estesi senza sforzo a qualsiasi altro tipo di conduttore.

Un conduttore metallico può essere visto come una struttura reticolare tridimensionale di atomi con un gran numero di elettroni liberi. Per avere una stima di questo numero si consideri del rame, con densità $\rho = 8,9 \text{ g/cm}^3$ e $A = 63,5$ da cui si ricava immediatamente un valore di $8 \cdot 10^{22}$ elettroni liberi per centimetro cubo. Le dimensioni degli elettroni sono molto più piccole delle sensibilità sperimentali oggi raggiunte. Si possono vedere quindi gli elettroni liberi come un gas contenuto in un recipiente chiuso (il reticolo atomico). Questi elettroni si muovono disordinatamente e urtano con gli ioni del reticolo portandosi in equilibrio termico con questi ultimi. Applicando una differenza di potenziale si genera un campo elettrico. L'effetto di questo campo è che un elettrone che dopo l'urto ha velocità \mathbf{v}_T viene accelerato fino ad una velocità \mathbf{v}'_T . Si ha

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{\mathbf{f}}{m} \Delta t = \frac{-e\mathbf{E}}{m} \Delta t$$

dove l'intervallo di tempo è quello che intercorre fra due urti consecutivi. Complessivamente l'elettrone tra i due urti acquista una velocità di deriva data dal valor medio di $\Delta \mathbf{v}$

$$\mathbf{v}_d = \frac{\Delta \mathbf{v}}{2} = \left(\frac{-e\Delta t}{2m} \right) \mathbf{E}$$

In linea di principio l'intervallo di tempo è dipendente dal campo elettrico. In realtà si ha $v_d \ll v_T$ (frazioni di millimetri al secondo contro centinaia di chilometri al secondo), per cui $v_T \simeq v'_T$, ovvero la velocità termica non dipende sensibilmente dal campo elettrico. Chiamando ora l il libero cammino medio si ha $\Delta t \simeq l/v_T$ che non dipende quindi dal campo elettrico. Ne segue che la velocità di deriva è costante e proporzionale al campo¹.

Come si è visto nei conduttori sono gli elettroni di conduzione le cariche che si muovono, ma per ragioni storiche il fenomeno viene descritto dal punto di vista delle cariche positive fittizie che si muovono in direzione opposta.

¹In realtà la conduzione è un fenomeno sostanzialmente quantistico. Analizzandolo però in ottica classica si può comunque avere un'idea qualitativa dei fenomeni che lo governano.

Definizione 3.1.1 (Corrente elettrica). Considerato un conduttore nel quale si abbia un movimento ordinato di cariche, si definisce corrente elettrica

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Nel sistema internazionale l'unità di misura è l'ampère.

3.2 Densità di corrente

Definizione 3.2.1 (densità di corrente). Si definisce densità di corrente, detto n il numero di portatori di carica q per unità di volume, il vettore

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v}_d$$

Si ha che

$$[J] = \frac{1}{m^3} C \frac{m}{s} = \frac{C}{s} \frac{1}{m^2} = \frac{A}{m^2}$$

È importante osservare come la densità di corrente risulti sempre parallela al campo elettrico, infatti le velocità di deriva costituiscono un campo vettoriale parallelo o antiparallelo ad \mathbf{E} a seconda che la carica sia positiva o negativa e di conseguenza il prodotto $q\mathbf{v}_d$ è sempre parallelo ad \mathbf{E} . In via del tutto generale fra il campo elettrico e la densità di corrente sussiste una relazione del tipo $\mathbf{J} = \mathbf{F}(\mathbf{E})$. Nel caso particolare dei conduttori detti *lineari* questa relazione diventa

$$\mathbf{J} = \|\sigma\| \mathbf{E} \quad (3.1)$$

dove $\|\sigma\|$ è una matrice detta *tensore di conducibilità* i cui elementi dipendono in linea generale non dall'intensità del campo elettrico ma dalla sua direzione. I materiali per cui vale esplicitamente questa relazione sono detti *anisotropi*. Si dicono invece *isotropi* i materiali per cui questa relazione non dipende dalla direzione del campo elettrico.

L'introduzione del vettore polarizzazione è giustificata dal seguente risultato

Teorema 3.2.2. Data una sezione S del conduttore attraversata da corrente si ha che

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \Phi_S(\mathbf{J})$$

Dimostrazione. Dato un conduttore di sezione S al cui interno sia presente un campo elettrico, le velocità di deriva delle cariche libere \mathbf{v}_d costituiscono un campo vettoriale. Si consideri un tubo di flusso elementare di questo campo con sezione $d\mathbf{S}$. Allora nel tempo dt si ha che la carica che attraversa il tubo di flusso è

$$dq = nq\mathbf{v}_d \cdot d\mathbf{S} dt = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} dt$$

Dalla definizione si ha che la corrente elettrica in questa porzione infinitesima di conduttore vale

$$dI = \frac{dq}{dt} = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Integrando entrambi i membri dell'equazione si ha la tesi. □

Corollario 3.2.3 (Equazione di continuità della corrente).

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.2)$$

Che dal punto di vista fisico significa che se in un conduttore si ha una variazione di carica nel tempo, questa deve essere dovuta alla carica che fluisce attraverso la superficie che racchiude il volume.

Dimostrazione. Si consideri una superficie chiusa S in un conduttore in cui all'istante t sia racchiusa la carica $Q(t)$. Se dopo un certo tempo la superficie racchiude una carica $Q(t) - dQ$ per la conservazione della carica, questa deve essere fluita fuori dalla superficie. Quindi, per il teorema appena dimostrato e per il teorema della divergenza

$$-\frac{dQ}{dt} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} d\tau$$

D'altra parte $Q(t) = \int_V \rho(x, y, z, t) d\tau$. È possibile passare con la derivata sotto al segno di integrale, ottenendo

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

Uguagliando le espressioni ottenute e ricordando che il ragionamento fatto vale indipendentemente dalla scelta del volume V , si ha l'uguaglianza degli integrandi, ovvero la tesi. \square

Capitolo 4

Corrente stazionaria

4.1 Proprietà generali

Definizione 4.1.1 (Corrente stazionaria). Si dice che un conduttore è in regime di corrente stazionaria quando la corrente è costante nel tempo.

Il passaggio di corrente elettrica implica uno spostamento delle cariche ad opera del campo elettrico che compie quindi un lavoro.

Teorema 4.1.2. *La potenza sviluppata da un campo elettrico che induce una corrente stazionaria I in un tratto di conduttore compreso fra due punti A e B è*

$$W = I(V_A - V_B) \quad (4.1)$$

Dimostrazione. (?????) Si supponga un volume di conduttore cilindrico con basi poste nei punti A e B soggetto ad un potenziale costante nel tempo. Nell'intervallo di tempo dt le cariche si spostano di un tratto dl in modo tale che le cariche che inizialmente occupavano lo spazio AB ora occupano lo spazio $A'B'$ ottenuto traslando AB di dl . Dalla definizione di corrente si ha che questo equivale a spostare la carica $dq = I dt$ dal punto a potenziale V_A al punto a potenziale V_B . Nel fare questo il campo compie un lavoro

$$dL = dq(V_A - V_B) = I dt(V_A - V_B)$$

Da cui si ha immediatamente la tesi. \square

Teorema 4.1.3. *Nel caso stazionario, data una qualunque superficie chiusa S , il campo \mathbf{J} è solenoidale su tale superficie.*

Dimostrazione. La dimostrazione segue immediatamente dall'equazione (3.2) osservando che per definizione di stazionarietà ρ non può variare nel tempo. \square

4.2 Leggi di Kirchhoff

Definizione 4.2.1 (Nodo). Si chiama nodo una zona in cui confluiscono vari conduttori sottili percorsi da corrente.

Definizione 4.2.2 (Ramo). Si chiama ramo una connessione diretta fra due nodi

Definizione 4.2.3 (Maglia). Si chiama maglia un insieme di rami che formano una linea chiusa.

Teorema 4.2.4 (Prima legge di Kirchhoff). *In condizioni stazionarie, la somma algebrica delle correnti uscenti da un nodo è nulla.*

Dimostrazione. Si consideri un tratto di tubo di flusso compreso fra due sezioni S_1 ed S_2 . Sia S_3 la porzione laterale di tale tratto. Siccome la densità di corrente è solenoidale, per il teorema della divergenza il flusso attraverso $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ è nullo. Per definizione di tubo di flusso, \mathbf{v}_d e di conseguenza \mathbf{J} sono tangenti alle generatrici di S_3 , per cui il flusso attraverso questa superficie è nullo. In conclusione si ha

$$0 = \Phi_{S_1}(\mathbf{J}) + \Phi_{S_2}(\mathbf{J}) = I_1 + I_2 = 0$$

Il ragionamento può essere generalizzato al caso in cui più fili conduttori convergano ad uno stesso nodo ottenendo la tesi. \square

Teorema 4.2.5 (Seconda legge di Kirchhoff). *In condizioni stazionarie, la somma algebrica delle differenze di potenziale agli estremi dei rami di una maglia è nulla.*

Dimostrazione. La dimostrazione è banale e deriva dal fatto che dV è una forma differenziale esatta: la somma delle differenze di potenziale su tutti i rami della maglia è l'integrale di dV su un percorso chiuso, che quindi è nullo. \square

4.3 Resistenza e leggi di Ohm

Osservazione sperimentale 4.3.1 (Prima legge di Ohm). *Per determinati materiali e per un ampio intervallo di valori di ΔV ¹ sussiste una relazione di proporzionalità diretta fra la differenza di potenziale e la corrente che fluisce fra due punti A e B di un conduttore*

$$V_A - V_B = \Delta V = RI \quad (4.2)$$

La costante di proporzionalità si chiama *resistenza*. L'unità di misura della resistenza è l'*ohm* $\Omega = V/A$. Un materiale che rispetta la legge di ohm è detto *ohmico*. Tutti i conduttori ohmici sono omogenei ed isotropi. È evidente come la caratteristica, ovvero la curva $I(\Delta V)$ di un conduttore ohmico sia una retta con pendenza $1/R = G$, detta *conduttanza*. La resistenza dipende sia dalle condizioni fisiche in cui è posto un materiale che dalla sua geometria.

Si riportano i due seguenti risultati che permettono di trattare resistenze in serie e in parallelo, di cui viene omessa la dimostrazione perchè analoga a quella riportata per i condensatori.

Teorema 4.3.2 (Resistenze in serie). *Dati n conduttori collegati in serie la resistenza del sistema è equivalente a quella di un unico conduttore con resistenza*

$$R = \sum_{i=1}^n R_i$$

Teorema 4.3.3 (Resistenze in parallelo). *Dati n conduttori collegati in parallelo la resistenza del sistema è equivalente a quella di un unico conduttore con resistenza*

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

¹Ovvero, finchè la differenza di potenziale non è tale da generare scariche che danneggiano il materiale

Osservazione sperimentale 4.3.4 (Seconda legge di Ohm). *Per un tratto di conduttore di lunghezza l , omogeneo e a sezione S costante vale la relazione*

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S} \quad (4.3)$$

Dove ρ è detto *resistività elettrica* σ è detto *conducibilità elettrica* e non vanno confusi con le densità di carica.

Con quanto appena introdotto si può dimostrare il seguente risultato.

Teorema 4.3.5 (Legge di Ohm locale). *In un conduttore lineare ed isotropo sussiste la seguente relazione*

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (4.4)$$

Dimostrazione. Si consideri all'interno di un conduttore un cilindretto di lunghezza dl e superficie dS , dove le quantità possono essere studiate in forma scalare per via dell'ipotesi di isotropia. Per la prima e la seconda legge di Ohm si ha che

$$dV = E dl = R dI = \frac{1}{\sigma} \frac{dl}{dS} J dS$$

Da cui si ricava che

$$E dl = \frac{1}{\sigma} dl J$$

da cui si ottiene la tesi in forma scalare. La forma vettoriale è ottenibile banalmente. \square

Quanto ottenuto è di fatto un caso particolare della relazione (3.1), che mostra come i conduttori ohmici siano isotropi. La legge di Ohm locale è più generale della legge di Ohm che invece è riferita a porzioni estese di conduttore e può essere sfruttata per calcolare la resistenza di conduttori ohmici con geometrie complesse. Inoltre, può essere usata per studiare dielettrici non perfetti, grazie al seguente risultato.

Corollario 4.3.6. *Dato un condensatore, le cui maglie siano conduttori ohmici, riempito con un dielettrico non perfettamente isolante di resistività ρ e costante dielettrica ϵ , capacità e resistenza del condensatore sono legate dalla relazione*

$$CR = \rho \epsilon$$

Dimostrazione. Si considerino due conduttori ohmici, 1 e 2, rispettivamente a potenziale V_1 e V_2 . La configurazione del campo elettrico è univocamente determinata grazie al teorema di unicità. Sia S una superficie chiusa che intercetti tutte le linee di forza del campo elettrico. Si vuole calcolare il flusso del campo nel caso in cui: lo spazio fra le maglie del condensatore sia interamente riempito con un conduttore omogeneo; lo spazio sia riempito con un dielettrico omogeneo. Nel primo caso, per la legge di Ohm locale $\Phi_S(\mathbf{E}) = \rho \Phi_S(\mathbf{J}) = \rho I = \rho \Delta V / R$, dove si è tenuto conto della definizione di I e della prima legge di Ohm. Nel secondo caso invece per il teorema di Gauss e la definizione di capacità $\Phi_S(\mathbf{E}) = Q / \epsilon = C \Delta V / \epsilon$. Uguagliando le due equazioni si ottiene la relazione fra la capacità del condensatore riempito col dielettrico e la resistenza che si presenta fra le due armature qualora il condensatore fosse riempito con un conduttore. Dato che un dielettrico non perfettamente isolante può essere visto come un conduttore, segue la tesi. \square

La resistenza di un conduttore dipende dalla geometria del materiale ma anche dalle condizioni fisiche e in particolare dalla temperatura. Questa dipendenza intorno alla temperatura ambiente può essere espressa sviluppando al primo ordine l'andamento di ρ :

$$\rho(t) = \rho_0(1 + \alpha t)$$

con t la temperatura in gradi celsius e α un coefficiente detto *coefficiente di temperatura*, che assume valori positivi per i metalli e negativi per gli elettroliti e alcuni materiali non metallici come il carbonio.

4.4 Cariche su conduttori percorsi da corrente

Con gli strumenti fin qui presentati è possibile studiare la configurazione delle cariche in un conduttore percorso da corrente stazionaria.

La differenza principale fra un conduttore nel caso statico ed un conduttore percorso da corrente è la migrazione sistematica delle cariche microscopiche con una velocità media diversa da 0. Di conseguenza all'interno del conduttore si ha un campo elettrico non nullo e dunque un potenziale non uniforme: la superficie del conduttore non è equipotenziale e dunque il campo elettrico non è ortogonale alla superficie.

Teorema 4.4.1. *Nel caso stazionario, in un conduttore ohmico omogeneo le cariche si dispongono solo sulla superficie, ovvero la densità di carica volumica ρ_c è 0.*

Dimostrazione. Inserendo l'equazione (3.1) nella prima equazione di Maxwell² si ottiene $\rho_c = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon \rho \nabla \cdot \mathbf{J}$, dove è stato possibile portare la resistività fuori dalla divergenza proprio per l'ipotesi di conduttore ohmico omogeneo (in questo caso infatti ρ si riduce ad una costante). $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ per l'equazione di continuità nel caso stazionario, dimostrando la tesi. \square

L'ipotesi che il conduttore sia omogeneo è fondamentale, infatti qualora il conduttore presenti ad esempio una giunzione fra materiali diversi, su quest'ultima si possono avere degli addensamenti di carica. Inoltre, il fatto che la densità di carica di volume sia nulla non implica che la corrente si localizzi sulla superficie: all'interno del conduttore si ha una corrente dovuta al moto di deriva dei portatori e nonostante questo il bilancio netto fra cariche positive e negative è nullo.

La densità di carica superficiale σ_c è legata al campo elettrico interno al conduttore in maniera complessa. Per vederlo si consideri un conduttore ohmico omogeneo filiforme, non necessariamente rettilineo nè di sezione costante. Si consideri anche un cilindretto a cavallo fra interno ed esterno del conduttore, con le basi ortogonali alla superficie del conduttore e altezza infinitesima. Siccome $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ il flusso di \mathbf{J} attraverso il cilindretto deve essere nullo. Mandando a 0 l'altezza del cilindro, questo implica che la componente normale J_n della densità di corrente si conserva, passando dall'interno all'esterno del conduttore. È naturale ipotizzare che esternamente al conduttore non ci sia corrente e da questo segue che anche internamente al conduttore $J_n = 0$, ovvero $\mathbf{J} = J \hat{\mathbf{t}}$. Siccome il conduttore è ohmico, per la prima legge di Ohm la corrente è la stessa lungo tutto il filo e quindi anche \mathbf{J} non varia: $I = \Phi_S(\mathbf{J}) = JS$ da cui segue $J = I/S$. È possibile a questo punto per la (3.1) calcolare il

²l'uso di ε al posto di ε_0 è giustificato dal fatto che, sebbene nei metalli la polarizzazione sia 0, nei conduttori non metallici questo può non essere vero

campo elettrico interno al conduttore $\mathbf{E} = \rho I / S \hat{\mathbf{t}}$. In assenza del conduttore il campo sarebbe determinato esclusivamente dalla differenza di potenziale; introducendo il conduttore invece, il campo diventa tangente al filo e ne segue quindi il percorso. Questa differenza di comportamento non può che essere dovuta alla densità di carica superficiale, che somma il suo effetto a quello degli elettrodi che generano la ddp. Il calcolo effettivo di σ_c è complesso. Qualitativamente, se la forma del circuito è regolare, si ha un addensamento di cariche positive vicino all'elettrodo positivo e di cariche negative vicino all'elettrodo negativo.

4.5 Effetto Joule

Dalla (4.1) emerge che la presenza di un campo elettrico che metta in moto le cariche libere di un conduttore implica la produzione di energia. Nel caso stazionario, questa energia non può essere né energia cinetica né energia potenziale. L'unica possibilità è quindi che si trasformi in energia termica, ovvero moto di agitazione disordinato. Questa potenza viene dissipata nell'ambiente sotto forma di calore o luce e il fenomeno prende il nome di *effetto Joule*.

Teorema 4.5.1 (legge di Joule). *In un conduttore ohmico si ha che*

$$W = RI^2 \quad (4.5)$$

Dimostrazione. Dalla (4.1) e dalla seconda legge di Ohm si ha immediatamente la tesi

$$W = I \Delta V = I(RI)$$

□

Teorema 4.5.2 (Legge di Joule locale). *Si ha che la potenza trasferita dal campo elettrico alla corrente nell'unità di volume è*

$$w = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad w = \frac{dL}{d\tau dt} \quad (4.6)$$

Dimostrazione. Nella porzione di volume elementare del conduttore $d\tau$ sono presenti $n d\tau$ portatori con carica q . Indicando con $d\mathbf{l} = \mathbf{v}_d dt$ lo spostamento medio dei portatori di carica sottoposti al campo nel tempo dt , si ha che il lavoro infinitesimo è

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = n d\tau q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E} \cdot (nq \mathbf{v}_d) dt d\tau$$

da cui la tesi.

□

4.6 Forza elettromotrice

Per quanto visto nella sezione precedente, il passaggio di corrente in un conduttore implica un trasferimento di energia. È necessario allora, affinché la corrente sia stazionaria, che sia presente un generatore per fornire con continuità l'energia persa.

Osservazione 4.6.1. *Il campo totale \mathbf{E} presente in un circuito dotato di generatore non è conservativo.*

Dimostrazione. Per la prima legge di Kirchoff in tutto il circuito compreso di generatore il flusso di cariche è costante. Ogni punto della linea chiusa che costituisce il circuito può infatti essere assimilato ad un nodo raggiunto da due soli rami. Siccome nel circuito avvengono fenomeni come l'effetto Joule che riducono l'energia delle cariche in moto, è allora necessario che il lavoro che viene trasferito dall'esterno sui portatori di carica non sia nullo. Dividendo il lavoro per la carica totale:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$$

□

Siccome il campo elettrico che mette in moto le cariche è conservativo, è necessario che vi siano delle azioni i cui effetti siano assimilabili a quelli di un campo elettrico non conservativo. Si può pensare inizialmente che tali azioni siano localizzate all'interno del generatore. Si indicherà con \mathbf{E}_s il campo che mette in moto i portatori di carica, presente sia all'esterno che all'interno del generatore, e con \mathbf{E}_e il campo non conservativo interno al generatore -quest'ultimo viene chiamato *campo elettromotore*. Si può immaginare il generatore come una zona ben definita e localizzata del circuito che a livello pratico, è caratterizzato da due morsetti su cui si accumulano le cariche che generano il campo elettrico \mathbf{E}_s : l'anodo, caricato positivamente, ed il catodo, caricato negativamente. Compito del generatore è ripristinare continuamente gli accumuli di carica sui morsetti in modo da mantenere un flusso di cariche nel circuito costante nel tempo. In questo caso quindi il campo \mathbf{E}_e spinge le cariche negative verso il catodo e le cariche positive verso l'anodo. Si ha quindi che i versi di \mathbf{E}_s ed \mathbf{E}_e sono opposti.

Definizione 4.6.2 (Forza elettromotrice³ con generatore localizzato). Si definisce forza elettromotrice il lavoro che il campo \mathbf{E}_e compie per spostare la carica positiva unitaria dal catodo all'anodo.

$$fem = \int_B^A \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l}$$

Teorema 4.6.3. La forza elettromotrice coincide con la differenza di potenziale presente fra anodo e catodo a circuito aperto.

Dimostrazione. Si consideri un generatore collegato ad un circuito aperto. In tale situazione \mathbf{E}_e accumula cariche positive e negative su anodo e catodo, le quali generano il campo \mathbf{E}_s contrario al primo via via crescente finché non si raggiunge la situazione di equilibrio $\mathbf{E}_e = -\mathbf{E}_s$. Si ha quindi, indicando con A la posizione dell'anodo e con B la posizione del catodo:

$$fem = \int_B^A \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = \int_B^A -\mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l}$$

Siccome il campo \mathbf{E}_s è conservativo, l'ultimo termine corrisponde per definizione alla differenza di potenziale fra A e B □

Questo risultato permette agevolmente di generalizzare la definizione di forza elettromotrice al caso in cui il campo elettromotore non sia localizzato.

³È importante sottolineare come, nonostante il nome, la forza elettromotrice abbia le dimensioni di un potenziale

Definizione 4.6.4 (forza elettromotrice con generatore non localizzato). Indicato con \mathbf{E} il campo totale, somma di \mathbf{E}_e ed \mathbf{E}_s

$$fem = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Il fatto che questa definizione sia una generalizzazione della precedente è evidente. Infatti, il campo \mathbf{E}_s è conservativo e quindi il suo integrale su tutto il circuito è nullo; inoltre il campo \mathbf{E}_e è nullo su tutto il circuito ad eccezione della zona in cui è presente il generatore.

Ci si chiede ora come vari la differenza di potenziale ai capi del generatore nel momento in cui si chiude il circuito ed inizia a circolare corrente. Di fatto, questa cambia e le cause sono due:

1. La connessione elettrica interna al generatore ha resistenza non nulla e questo, per la prima legge di Ohm, implica una riduzione del potenziale;
2. Il campo elettromotore varia con la corrente circolante nel generatore.

Questi due effetti vengono studiati mediante la *curva caratteristica del generatore*, ovvero il grafico della differenza di potenziale interna al generatore in funzione della corrente circolante. Per $I = 0$ si ha ovviamente $\Delta V = fem$, segue poi un tratto approssimativamente lineare e infine la differenza di potenziale decresce più velocemente di un polinomio del primo ordine. Per le applicazioni pratiche ci si limita spesso al tratto lineare dove vale un'equazione del tipo

$$\Delta V = fem - rI \quad (4.7)$$

r ha le dimensioni di una resistenza. Si chiama *generatore ideale* un generatore la cui differenza di potenziale sia sempre uguale a fem , anche quando il circuito viene chiuso.

Osservazione 4.6.5. Nella zona lineare della curva caratteristica, il circuito è equivalente ad un circuito con un generatore ideale messo in serie ad una resistenza $R = r$

Dimostrazione. Si consideri un circuito dotato di generatore a cui sia collegata una resistenza R' . Per la prima legge di Ohm e per la (4.7) si ha

$$\Delta V = fem - Ir = R'I$$

da cui segue che

$$fem = (r + R')I$$

Ovvero, il circuito si comporta come un circuito in cui la differenza di potenziale del generatore sia pari alla fem , nel quale però oltre alla resistenza R' sia presente in serie anche una resistenza r . \square

Teorema 4.6.6. La potenza erogata dal generatore vale

$$W_g = Ifem = I\Delta V + W^{(d)} \quad (4.8)$$

dove $W^{(d)}$ è la potenza dissipata all'interno del generatore

Dimostrazione. Per la definizione di forza elettromotrice il lavoro elementare fatto dal generatore quando è attraversato da carica $dq = I dt$ è

$$dL_g = fem dq = fem I dt$$

e quindi la potenza vale

$$W_g = \frac{dL_g}{dt} = fem I$$

Inoltre per la conservazione dell'energia questa potenza deve essere pari alla potenza trasferita dal generatore alla corrente più la potenza dissipata dal generatore. Facendo riferimento alla (4.1) si ha la tesi. \square

Corollario 4.6.7. *La differenza di potenziale ai capi di un generatore reale vale*

$$\Delta V = fem - \frac{W^{(d)}}{I} \quad (4.9)$$

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata: basta dividere per I il risultato precedente. \square

L'importanza di questo corollario è mostrare di quanto effettivamente venga ridotta la differenza di potenziale ai capi del generatore una volta chiuso il circuito. A circuito aperto, con $I = 0$, si deve riottenere $\Delta V = fem$: questo implica che la potenza dissipata tende a 0 col tendere a 0 della corrente più velocemente di quanto non faccia la corrente stessa. Quanto visto finora ci permette di affermare che per qualificare completamente il comportamento di un generatore è sufficiente la conoscenza di fem ed r , entrambe determinabili facendo misure all'esterno del generatore: la fem come differenza di potenziale a circuito aperto; la r , una volta nota fem si ottiene misurando la corrente che passa nel circuito con una resistenza nota R' .

Nel caso di carichi sul circuito di natura non ohmica, la conversione dell'energia elettrica avviene in favore di forme di energia diverse dal calore. Qualsiasi sia la forma di energia, questa azione realizza sempre una sottrazione di energia alla corrente circolante, che è schematizzabile con dei campi elettrici in verso opposto a quello della corrente. Questi campi elettrici, solitamente localizzati nei carichi, vengono detti *campi controelettromotori* \mathbf{E}_{ce} .

Definizione 4.6.8 (Forza controelettromotrice). Si definisce forza controelettromotrice

$$f_c = \int_D^C \mathbf{E}_{ce} \cdot d\mathbf{l}$$

dove C e D sono i terminali del carico non ohmico.

Osservazione 4.6.9. *L'energia elettrica totale fornita al carico è uguale all'energia trasformata dalla forza controelettromotrice aumentata dell'energia dissipata sotto forma di calore dal carico stesso.*

4.7 Circuiti lineari in corrente continua

In questo paragrafo si vuole sviluppare qualche primo elemento di teoria dei circuiti lineari, ovvero costituiti da elementi che abbiano una caratteristica lineare. Il

discorso verrà sviluppato facendo riferimento al modello di *circuito a costanti concentrate*: il circuito viene considerato come costituito da elementi ideali concentrati in determinate zone e collegati da linee a potenziale costante -ovvero, fili a resistenza nulla. Gli elementi circuitali sono prevalentemente bipolari, quindi hanno solo due morsetti (uno d'entrata e uno d'uscita). Questi elementi circuitali sono caratterizzati completamente una volta nota la relazione che impongono fra potenziale e corrente ai loro capi.

Si vuole anzitutto generalizzare la prima legge di Ohm. Per farlo si osservi inizialmente come il campo elettrico totale \mathbf{E} è dato dalla somma fra il campo \mathbf{E}_s che si instaura fra i morsetti dei generatori, il campo elettromotore \mathbf{E}_e ed eventuali campi contro-elettromotori dovuti ad eventuali carichi non ohmici \mathbf{E}_{ce} .

Teorema 4.7.1 (legge di Ohm generalizzata). *Su un ramo del circuito vale la seguente relazione*

$$(V_A - V_B) + \sum f_i + \sum f_{ci} = R_{AB} I$$

con R_{AB} la resistenza totale del ramo.

Dimostrazione. La legge di Ohm locale correla il campo totale con la densità di corrente $\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$. Si ottiene quindi l'equazione

$$\mathbf{E}_s + \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_{ce} = \rho \mathbf{J}$$

Integrandola lungo un ramo del circuito che collega i punti A e B , le tre componenti del campo danno

$$\begin{aligned} \int_A^B \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} &= V_A - V_B \\ \int_A^B \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} &= \sum f_i \\ \int_A^B \mathbf{E}_{ce} \cdot d\mathbf{l} &= \sum f_{ci} \end{aligned}$$

dove le forze elettromotrici sul ramo sono prese positive se il generatore, agendo da solo, tenderebbe a spostare le cariche nel verso scelto come positivo; per le forze elettromotrici è vero il contrario. Si ottiene quindi

$$(V_A - V_B) + \sum f_i + \sum f_{ci} = \int_A^B \rho \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l}$$

Supponendo che le sezioni S del ramo fra A e B siano sufficientemente piccole affinché \mathbf{J} sia costante su ciascuna sezione si ha $I = \Phi_S(\mathbf{J}) = JS$. Ricordando che la corrente in ogni punto del ramo ha lo stesso valore, l'integrale a secondo membro diventa

$$\int_A^B \rho \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \rho \frac{I}{S} d\mathbf{l} = I \int_A^B \rho \frac{d\mathbf{l}}{S} = IR_{AB}$$

L'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che se ρ fosse costante su tutto il ramo si otterrebbe proprio la seconda legge di Ohm. \square

Il seguente corollario ha dimostrazione immediata

Corollario 4.7.2. *In assenza di carichi non ohmici la legge di Ohm assume la forma*

$$(V_A - V_B) + \sum f_i = I \sum R_i$$

L'andamento del potenziale lungo il ramo è quindi dato da una sequenza di tratti lineari in cui il passaggio da un capo all'altro della resistenza R_i ⁴, nel verso della corrente, porta ad una caduta di potenziale IR_i , mentre il passaggio da un capo all'altro di un generatore porta ad un salto di potenziale positivo o negativo a seconda del verso nel quale il generatore spinge la corrente.

4.8 Complementi: forza fra le maglie di un condensatore e metodo dei lavori virtuali

L'obiettivo di questo paragrafo è mettere in evidenza alcuni aspetti delicati riguardanti l'applicazione del metodo dei lavori virtuali e studiare come si comporta la forza fra le maglie di un condensatore. A tal proposito, si consideri un condensatore con capacità $C = \epsilon_0 S/x$, con x la distanza fra le armature, ed energia elettrostatica U_C . Usando il metodo dei lavori virtuali, ovvero immaginando di spostare le armature di una distanza infinitesima δx , si ricava che la forza tra le armature vale

$$R_x = \frac{\partial U_C}{\partial x}$$

Dalla 1.21 si hanno due possibili espressioni per U_C

$$U_C = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

Derivando la prima di queste a Q costante, ovvero considerando il condensatore isolato, si ottiene

$$R_x = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S}$$

che essendo negativa rappresenta una forza attrattiva.

Derivando la seconda espressione a $\Delta V = f_{em}$ costante, che equivale a considerare il condensatore collegato ad un generatore di forza elettromotrice costante, si ha

$$R_x = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S (\Delta V)^2}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{C^2 (\Delta V)^2}{\epsilon_0 S} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S}$$

che ha lo stesso modulo ma verso opposto a quella già determinata. Sperimentalmente inoltre si verifica che è la forza attrattiva ad essere quella fisicamente corretta. Per comprendere l'origine di questa incongruenza, bisogna affidarsi ad alcune considerazioni di carattere termodinamico. In questo caso prima di applicare il metodo dei lavori virtuali ci si trova in una situazione di equilibrio, ovvero di minimo per l'energia. Lo spostamento infinitesimo porta il sistema fuori dall'equilibrio e quindi ad un aumento dell'energia: ma questo è proibito dal secondo principio della termodinamica. Condizione necessaria per poter usare il metodo dei lavori virtuali è quindi considerare tutto il sistema suscettibile a variazioni di energia e includere fra queste ultime anche le variazioni di calore. Nel caso del condensatore isolato questa condizione è soddisfatta, mentre non è così quando si considera il condensatore legato ad un generatore. Si consideri infatti la forza esterna F_e che allontana le maglie

⁴Questa resistenza può anche essere la resistenza interna ad un generatore

del condensatore della quantità δx . Questa deve essere appena maggiore della forza elettrostatica R_x e di segno opposto. L'allontanamento delle armature comporta una diminuzione della capacità ($\delta C < 0$) e quindi dell'energia elettrostatica pari a

$$\delta U_C = \delta \left[\frac{1}{2} C(x) f e m^2 \right] = \frac{1}{2} \delta C(x) f e m^2 < 0$$

Siccome $\Delta V = E x$, se le armature si allontanano (x aumenta) E deve diminuire al fine di tenere costante la differenza di potenziale. Ma allora deve diminuire la carica sulle armature: in pratica una quantità δQ si sposta dall'armatura positiva a quella negativa passando per il generatore in verso opposto al campo elettromotore, compiendo un lavoro $\delta U_g = -f e m \delta Q$. In contemporanea alla diminuzione di energia nel condensatore si ha un aumento di energia nel generatore, entrambe dovute al lavoro delle forze esterne. Ma siccome $\delta Q = \Delta V \delta C = f e m \Delta C$ si ha

$$\delta U_g = -f e m^2 \delta C = -2 U_C > 0$$

In conclusione $\delta L_e = F_e \delta x \simeq -R_x \delta x = \delta U_C + \delta U_g = -\delta U_C$, ovvero

$$R_x = \frac{\partial U_C}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S (\Delta V)^2}{x^2} = -\frac{1}{2} \frac{C^2 (\Delta V)^2}{\varepsilon_0 S} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}$$

che è proprio l'espressione corretta.

Parte III

Magnetostatica

Capitolo 5

Magnetostatica nel vuoto

Osservazione sperimentale 5.0.1. Si consideri un sistema fatto in questo modo: uno o più circuiti sono fermi e percorsi da corrente stazionaria; un circuito di prova ha un piccolo tratto rettilineo $d\mathbf{l}$, connesso al resto del circuito mediante connessioni flessibili, elettricamente neutro e percorso da corrente I . Si osserva (e si misura mediante un dinamometro) che $d\mathbf{l}$ risente di una forza $d\mathbf{F}$ ad opera degli altri circuiti con le seguenti caratteristiche:

1. $dF \propto I dl$;
2. la direzione di $d\mathbf{F}$ è ortogonale a quella di $d\mathbf{l}$;
3. $d\mathbf{F}$ dipende dalla posizione e dall'orientamento di $d\mathbf{l}$. In particolare esiste sempre una direzione di $d\mathbf{l}$ tale per cui la forza è nulla e la direzione per cui la forza è massima risulta ortogonale a quest'ultima.

Queste osservazioni sperimentali costituiscono il punto di partenza per lo sviluppo del magnetismo.

5.1 Campo di induzione magnetica - prima legge di Laplace

Tutta una serie di esperimenti porta a concludere che esista un campo, detto campo di induzione magnetica:

Definizione 5.1.1 (Campo di induzione magnetica). Si definisce campo di induzione magnetica \mathbf{B} il responsabile delle forze sentite dal tratto di filo $d\mathbf{l}$. Questo campo è dipendente dalla posizione ed è generato da circuiti nei quali circola corrente stazionaria.

Osservazione sperimentale 5.1.2. Dato un circuito filiforme l' , detto $d\mathbf{l}'$ una porzione infinitesima di questo circuito in posizione \mathbf{r}' e posto l'osservatore in posizione \mathbf{r} , si ha che il campo \mathbf{B} generato da questo circuito vale

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (5.1)$$

con $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Il seguente corollario rappresenta un'estrapolazione teorica della situazione sperimentale appena descritta.

Corollario 5.1.3 (Legge di Biot Savart / prima legge di Laplace). *Il campo di induzione magnetica può essere calcolato come somma di contributi elementari prodotti dai singoli elementi $d\mathbf{l}'$ del circuito:*

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (5.2)$$

Corollario 5.1.4. *Facendo cadere l'ipotesi di circuito filiforme si ottiene*

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau \quad (5.3)$$

Dimostrazione. Ponendo $I = \int_{S'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}'$ nella (5.1) si ottiene:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[\int_S (\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}') \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau'$$

□

È importante osservare come la sorgente di questo campo siano le cariche in movimento.

5.2 Seconda equazione di Maxwell

In analogia con quanto fatto col campo elettrico si vuole ora studiare il flusso del campo di induzione magnetica attraverso una superficie chiusa.

Teorema 5.2.1 (Seconda equazione di Maxwell stazionaria nel vuoto). *Nel vuoto il campo \mathbf{B} generato da un circuito attraversato da corrente stazionaria è solenoidale, ovvero*

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.4)$$

Dimostrazione. Per la (B.14)

$$\mathbf{B}(x, y, z) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d\tau'$$

Per la formula (B.8), l'integranda può essere riscritta come

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} [\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')] - \nabla \times \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = -\nabla \times \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]$$

in quanto il vettore densità di corrente dipende solo dalle coordinate (x', y', z') mentre il gradiente opera sulle (x, y, z) . Per lo stesso motivo, si può affermare che

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \nabla \times \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]$$

Ma la divergenza di un rotore è nulla, perciò segue immediatamente la tesi. □

Corollario 5.2.2. *Nel vuoto, il flusso attraverso una superficie chiusa di \mathbf{B} , generato da un circuito attraversato da corrente stazionaria, è nullo.*

Dimostrazione. Integrando sul volume la divergenza di \mathbf{B} e applicando il teorema della divergenza, si ha la tesi. \square

La seconda equazione di Maxwell permette di ottenere alcune caratteristiche fondamentali del campo di induzione magnetica.

Corollario 5.2.3. *Date due superfici orientate S ed S' aventi lo stesso contorno e stessa orientazione si ha*

$$\Phi_S(\mathbf{B}) = \Phi_{S'}(\mathbf{B})$$

Ovvero, il flusso di \mathbf{B} dipende esclusivamente da contorno e orientamento.

Dimostrazione. Si consideri una superficie chiusa e la si divida in due superfici S ed S' : queste due avranno orientazione opposta e condivideranno il contorno. Per la linearità del flusso e per il corollario appena dimostrato si ha $0 = \Phi_{S \cup S'}(\mathbf{B}) = \Phi_S(\mathbf{B}) + \Phi_{S'}(\mathbf{B})$, ovvero $\Phi_S(\mathbf{B}) = -\Phi_{S'}(\mathbf{B})$. Cambiando orientazione ad una delle due superfici si cambia il segno del relativo flusso ottenendo la tesi. \square

Si parla quindi di *flusso concatenato ad un contorno*, senza far riferimento alla superficie.

Corollario 5.2.4. *Le linee di forza del campo di induzione magnetica sono chiuse.*

Dimostrazione. Per assurdo, si consideri una linea di forza di \mathbf{B} non chiusa: deve esistere un punto sorgente per tale linea. È possibile prendere allora una superficie chiusa piccola a piacere attorno a questo punto sorgente attraverso la quale il flusso del campo è diverso da 0. \square

Da questo segue immediatamente che i tubi di flusso per il campo \mathbf{B} non hanno nè inizio nè fine.

5.3 Il potenziale vettore e la quarta equazione di Maxwell

Ancora in analogia col campo elettrico, si vuole vedere se sia possibile descrivere il campo di induzione magnetica come l'applicazione di un'operatore differenziale ad una opportuna funzione. In generale non è detto che $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ e che quindi il campo di induzione magnetica sia esprimibile come gradiente di una funzione scalare. Si introduce quindi il seguente potenziale

Definizione 5.3.1. Si definisce potenziale vettore quella funzione vettoriale \mathbf{A} che soddisfi la seguente equazione

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (5.5)$$

Ricordando che la divergenza di un rotore è identicamente nulla, si ha che la divergenza del rotore di \mathbf{A} è nulla, ovvero condizione necessaria affinché sia valida la definizione è che la divergenza di \mathbf{B} sia nulla. Questo è garantito dalla seconda equazione di Maxwell.

Osservazione 5.3.2 (Trasformazione di gauge). *Il potenziale vettore è definito a meno del gradiente di una funzione scalare. Ovvero se \mathbf{A} è un potenziale vettore per il campo \mathbf{B} , anche $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$ lo è, con f una funzione scalare.*

Dimostrazione. La dimostrazione segue direttamente dal fatto che il rotore del gradiente è nullo. \square

Ovviamente, il potenziale vettore è definito anche a meno di una costante additiva.

È possibile fare la seguente osservazione

Osservazione 5.3.3. Dato un potenziale vettore \mathbf{A} è possibile definire a partire da questo un nuovo potenziale vettore \mathbf{A}' con divergenza nulla come indicato nella precedente osservazione. La condizione affinché ciò avvenga è che

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

Dimostrazione. La dimostrazione si ottiene imponendo che la divergenza di $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$ sia 0. \square

Il potenziale vettore gode di alcune proprietà generali.

Teorema 5.3.4. Dato un potenziale vettore \mathbf{A} , l'equazione definitoria locale (5.5) ha una corrispondente integrale

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

Dove S è una superficie aperta orientata e l è il suo contorno. Questa relazione mostra come la circuitazione di \mathbf{A} sia uguale al flusso concatenato di \mathbf{B} .

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata e si ottiene integrando sulla superficie S entrambi i membri della (5.5) e applicando il teorema di Stokes all'integrale del rotore di \mathbf{A} . \square

Il fatto che il potenziale vettore abbia divergenza nulla implica che le proprietà dedotte per \mathbf{B} valgano anche per \mathbf{A} .

Il seguente risultato fornisce un'espressione esplicita per il potenziale vettore, con divergenza nulla.

Teorema 5.3.5. La seguente espressione esplicita per il potenziale vettore ha divergenza nulla

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \quad (5.6)$$

Dimostrazione. Per quanto visto nella dimostrazione della seconda equazione di Maxwell \mathbf{B} può essere scritto come rotore di una funzione: dalla definizione di potenziale vettore segue quindi immediatamente la prima parte della tesi. Resta da dimostrare che, nella forma trovata, il potenziale vettore ha divergenza nulla. Per la (B.7)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau'$$

Il primo integrale è nullo perchè la divergenza opera su \mathbf{r} mentre \mathbf{J} è riferito \mathbf{r}' . Per quanto riguarda il secondo integrale invece, per le (B.14) si può sostituire ∇ con $-\nabla'$. Invertendo la (B.7) si ottiene

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \nabla' \cdot \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau'$$

Nel caso stazionario la divergenza di \mathbf{J} è nulla. Per il teorema della divergenza si ha però

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}} dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Nell'integrale di volume, τ' deve essere abbastanza grande da contenere tutti i circuiti sui quali la densità di corrente sia diversa da 0. Se tutte le linee di corrente sono al finito, e quindi la superficie contiene tutte le linee, l'integrale è nullo e di conseguenza la divergenza del potenziale vettore è nullo. \square

Se la densità di corrente è localizzata solo su conduttori filiformi costituenti un circuito si ha $\mathbf{J} d\tau' = I S d\mathbf{l}' = I d\mathbf{l}'$ e allora il potenziale vettore diviene

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (5.7)$$

Nel caso di una spira piana posta molto lontano dall'osservatore, il potenziale vettore assume una forma particolarmente semplice. È necessario introdurre preliminarmente la seguente definizione, che rivestirà un ruolo centrale nei prossimi paragrafi.

Definizione 5.3.6 (Momento magnetico). Si definisce il vettore momento magnetico come

$$\mathbf{m} = I \mathbf{S}$$

dove il versore che definisce il verso di \mathbf{S} è definito positivo quando vede girare la corrente in senso antiorario.

Corollario 5.3.7. *Il potenziale vettore generato da una spira piana percorsa da corrente stazionaria I posta molto lontano dall'osservatore, in modo tale che la distanza sia molto maggiore delle dimensioni lineari della spira, è*

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (5.8)$$

Dimostrazione. Il fatto che la distanza r fra spira ed osservatore sia molto maggiore delle dimensioni lineari della spira implica che nella (5.7) $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq r$. Allora, usando la (??)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{d\mathbf{l}'}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times d\mathbf{S} \simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times \mathbf{S}$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso del fatto che la spira è piccola. Esplicitando il gradiente

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{-\mathbf{r}}{r^3} \times \mathbf{S} = \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \mathbf{S} \times \mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

\square

In queste espressioni la costante arbitraria di integrazione è scelta in modo che il potenziale sia nullo all'infinito.

Teorema 5.3.8 (Quarta equazione di Maxwell stazionaria nel vuoto). *Nel vuoto vale che*

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (5.9)$$

Dimostrazione. Si può esprimere il rotore di \mathbf{B} come rotore del rotore di \mathbf{A} . Per la (B.6), ricordando che il potenziale vettore può essere scelto con divergenza nulla

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A}$$

Quindi

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\nabla^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \nabla^2 \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d\tau'$$

Per la (B.15) si ha la tesi. □

Questa equazione è valida solo nel caso stazionario, infatti applicando la divergenza ad entrambi i membri si ha $\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$: affinché la quarta equazione di Maxwell sia valida quindi è necessario che la divergenza di \mathbf{J} sia nulla, ovvero è necessario trovarsi nel caso stazionario.

Per esprimere la forma integrale della quarta equazione di Maxwell è necessario introdurre due definizioni.

Definizione 5.3.9 (Corrente concatenata ad un contorno). Data una linea chiusa l , si dicono correnti concatenate a l le correnti I_i che intersecano qualunque superficie che abbia l come contorno

Definizione 5.3.10 (Grado di concatenazione). Si definisce grado di concatenazione n_i il numero di volte che una linea chiusa l gira intorno ad una corrente concatenata I_i

Corollario 5.3.11 (Teorema della circuitazione di Ampère). *Prese delle correnti concatenate I_i con segno positivo quando vedono girare il contorno orientato l in senso antiorario*

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i n_i \quad (5.10)$$

Dimostrazione. Si consideri una curva chiusa semplice l ed una superficie S che abbia l come contorno, orientata in modo da vedere il verso di l antiorario. Si calcoli il flusso di ambo i membri della quarta equazione di Maxwell attraverso questa superficie. Il primo membro, per il teorema di Stokes

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

Per quanto riguarda il secondo membro invece è necessario osservare che il flusso di \mathbf{J} è non nullo solo in quelle porzioni di superficie, indicate con ΔS_i , attraversate dai conduttori che portano le correnti che generano \mathbf{J} . Si ha quindi

$$\mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \sum_i \left[\int_{\Delta S_i} \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{S} \right] = \mu_0 \sum_i I_i$$

Se la curva non fosse semplice bisognerebbe tenere conto delle concatenazioni multiple delle correnti mediante il grado di concatenazione. □

Grazie a quanto visto fin'ora è possibile dedurre tre equazioni analoghe a quella di Poisson per il potenziale vettore nel caso statico, una per ogni componente. A causa di questa analogia, i metodi risolutivi sono identici a quelli visti nel caso dell'equazione di Poisson elettrostatica.

Teorema 5.3.12 (Equazione generale del potenziale vettore statico). *Dato un potenziale vettore \mathbf{A} con divergenza nulla,*

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (5.11)$$

Dimostrazione. Per la quarta equazione di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Per la (B.6), nell'ipotesi di divergenza nulla, si ha $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A}$. Sostituendo, si ottiene la tesi. \square

Questa equazione è equivalente alla seconda ed alla quarta equazione di Maxwell in quanto, come già osservato, è necessario che la divergenza di \mathbf{B} sia zero affinché il campo possa essere scritto come rotore di un potenziale.

Esempio 1. Si consideri un solenoide infinito, rettilineo, a spire serrate e uniformemente avvolte, posto in modo tale che il suo asse coincida con l'asse x . Si indichi con I la corrente circolante nel solenoide e con n il numero di spire per unità di lunghezza. Il sistema ha simmetria cilindrica e questo comporta, tenendo conto del fatto che il solenoide essendo infinito non ha estremità, che \mathbf{B} internamente al solenoide sia indipendente dalla coordinata x e che le sue linee di forza siano parallele all'asse x . Questo non è in contraddizione col fatto che le linee di forza del campo devono essere chiuse: il solenoide infinito è un'astrazione di un sistema costituito da un solenoide molto lungo - che quindi ha estremità e di conseguenza linee di forza non perfettamente parallele all'asse x . Si consideri ora un percorso rettangolare interno al solenoide, con due lati AB e CD di lunghezza l paralleli all'asse x : per il teorema di Ampère la circuitazione di \mathbf{B} vale

$$\oint_{ABCD} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_{AB}l - B_{CD}l = \mu_0 \sum I^{conc} = 0$$

in quanto nessuna corrente è concatenata al percorso. Da questo segue che $B_{AB} = B_{CD}$, a prescindere dalla posizione e dall'orientamento del percorso: il campo di induzione magnetica all'interno del solenoide non dipende nemmeno dalla distanza rispetto all'asse ed è perciò uniforme.

Si consideri ora il percorso posizionato in modo tale da avere il lato AB interno al solenoide ed il lato CD esterno. La circuitazione in questo caso vale

$$\oint_{ABCD} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_{AB}l - B_{CD}l = \mu_0 \sum I^{conc} = \mu_0 n l I$$

Facendo una sezione del solenoide si ottengono due file parallele di conduttori: la corrente nei conduttori appartenenti ad una di queste file è entrante rispetto al piano che realizza la sezione, la corrente nei conduttori dell'altra fila è uscente. Ponendosi ad una distanza tale da poter trascurare il diametro del solenoide, i contributi che le correnti in queste due file di conduttori apportano a \mathbf{B} sono uguali in modulo ma opposte in segno¹. Ne segue che il campo magnetico esterno al solenoide è molto piccolo. Trascurandone il contributo si ha quindi che $B_{AB} = B \approx \mu_0 n I$.

¹Con un ragionamento analogo si comprende intuitivamente come mai all'interno del solenoide le linee di forza siano parallele all'asse x . Si ha infatti che i contributi al campo magnetico hanno in questo caso lo stesso segno.

5.4 Il potenziale scalare

Sorge spontaneo a questo punto chiedersi se e sotto quali condizioni sia possibile definire un potenziale scalare ϕ per il campo magnetico, in modo tale che $-\nabla\phi = \mathbf{B}$. Condizione necessaria e sufficiente affinché un campo vettoriale definito in un dominio D sia esprimibile come gradiente di una funzione scalare è che il campo sia irrotazionale e che il dominio sia semplicemente connesso. La quarta equazione di Maxwell mostra chiaramente che il $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ quando $\mathbf{J} = 0$. Quando la densità di corrente che genera il campo di induzione magnetica è localizzata al finito in un dominio D , è possibile prendere un insieme B che la contenga completamente: sul dominio semplicemente connesso $D' = D \setminus B$ il campo è ora irrotazionale e può quindi essere definito un potenziale scalare.

Teorema 5.4.1. *Sotto le opportune ipotesi di dominio, $\mathbf{B} = -\nabla\phi$ con*

$$\phi = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega$$

a meno di una costante additiva (Ω è l'angolo solido).

Dimostrazione. Dalla definizione di potenziale $-\mathrm{d}\phi = \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$. Esplicitando il campo

$$-\mathrm{d}\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\oint_l \frac{I \mathrm{d}\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

Uno spostamento $\mathrm{d}\mathbf{l}$ di un osservatore nel campo è equivalente ad uno spostamento $\mathrm{d}\mathbf{s} = -\mathrm{d}\mathbf{l}$ del circuito che genera il campo, da cui

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \mathrm{d}\mathbf{l}' \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

per la (B.1) l'integranda può essere riscritta

$$\mathrm{d}\mathbf{l}' \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \mathrm{d}\mathbf{l}' \times \mathrm{d}\mathbf{s} \cdot \frac{-(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \frac{-(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

dove $\mathrm{d}\mathbf{S}$ è l'elemento di superficie spazzato dall'elemento di circuito $\mathrm{d}\mathbf{l}'$ nello spostamento $\mathrm{d}\mathbf{s}$. Il prodotto scalare che compare in questa espressione rappresenta la proiezione dell'elemento di superficie sul raggio-vettore che va da \mathbf{r}' a \mathbf{r} , ovvero dalla posizione in cui si trova l'osservatore alla posizione dell'elemento di superficie. Ma allora l'integranda non è altro che l'angolo solido infinitesimo sotto al quale l'osservatore viene "visto" da $\mathrm{d}\mathbf{S}$. L'integrale, che è esteso a tutto il circuito rappresenta dunque l'angolo solido $\mathrm{d}\Omega$ sotto al quale l'osservatore viene visto dalla superficie $\mathrm{d}\Sigma$ spazzata da tutto il circuito nello spostamento $\mathrm{d}\mathbf{s}$. Per l'osservatore allora il circuito si sposta variando la propria posizione di un angolo solido $-\mathrm{d}\Omega$. In conclusione

$$\mathrm{d}\phi = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \mathrm{d}\Omega$$

da cui segue la tesi. □

Corollario 5.4.2. *Nell'ipotesi in cui l'osservatore sia molto lontano dalla spira, indicando con \mathbf{r} il raggio-vettore che va dal circuito all'osservatore, si ha*

$$\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

Dimostrazione. Nell'ipotesi in cui le dimensioni lineari della spira siano molto minori di r , si ha

$$\Omega = -\frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

Sostituendo nell'espressione del potenziale scalare si ha la tesi. \square

Si osservi la completa analogia che esiste fra questa espressione e l'espressione del potenziale prodotto da un dipolo elettrico: come si vedrà nel paragrafo dedicato all'interazione fra campi magnetici e circuiti questa analogia è molto più profonda. È un puro esercizio di calcolo mostrare che questa approssimazione per il potenziale scalare e l'approssimazione (5.8) per il potenziale vettore producono lo stesso campo.

5.5 Forza di Lorentz - seconda legge di Laplace

I risultati sperimentali esposti nell'introduzione al capitolo si spiegano ipotizzando che il campo di induzione magnetica determini una forza nella forma:

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (5.12)$$

Questa equazione è detta *seconda legge di Laplace* e consente di misurare \mathbf{B} (ne costituisce quindi la definizione operativa).

Si dimostra il seguente risultato

Teorema 5.5.1 (Forza di Lorentz). *Data una carica puntiforme q che si muove con velocità \mathbf{v} in un campo di induzione magnetica, questa carica risente di una forza*

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (5.13)$$

Dimostrazione. Si consideri un tratto di circuito di lunghezza dl , sezione dS e - quindi- volume $d\tau = dl dS$. Per il teorema 3.2.2, la seconda legge di Laplace può essere riscritta come

$$d\mathbf{F} = \mathbf{J} dS d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} d\tau \times \mathbf{B}$$

Inoltre per la definizione di \mathbf{J} si ha

$$\mathbf{J} d\tau = nq\mathbf{v}_d d\tau = dN q\mathbf{v}_d$$

dove $dN = n dS dl$ rappresenta il numero di portatori di carica nel tratto dl del circuito. Si ha quindi $d\mathbf{F} = dN q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$. Se si prende in esame una singola carica, la velocità di deriva coincide con la velocità della carica. Integrandolo per ottenere la forza totale e considerando che il numero totale di cariche è appunto 1 si ottiene la tesi. \square

La relazione di Lorentz è in realtà più generale rispetto alla seconda legge di Laplace: quest'ultima infatti vale solo qualora \mathbf{B} non vari significativamente nel tratto dl , mentre la legge di Lorentz è locale. Il prezzo da pagare è una maggiore difficoltà nella misurazione del campo di induzione magnetica in quanto nel primo caso viene usato come sonda un circuito percorso da corrente, nel secondo invece una carica in movimento.

Corollario 5.5.2. *La forza di Lorentz non compie alcun lavoro.*

Dimostrazione. Quando la carica è ferma, non risente della forza di Lorentz. Quando è in movimento, la forza di Lorentz è ortogonale alla velocità. \square

Questa forza quindi cambia la direzione della carica in movimento ma non ne modifica la velocità (in modulo).

Grazie a quanto visto ora si può determinare l'unità di misura del campo di induzione magnetica, chiamata *tesla*.

$$[B] = N \frac{1}{Cm/s} = \frac{m}{m} N \frac{1}{Cm/s} = \frac{Vs}{m^2} = T$$

Il prodotto Vs prende il nome di *weber* (Wb). Frequentemente, per il campo di induzione elettromagnetica si usa il *gauss* $1T = 10^4 G$.

5.6 Interazioni fra circuiti e campi magnetici

Lo studio delle interazioni fra circuiti e campi magnetici è diviso in due categorie di fenomeni: interazione fra un circuito percorso da corrente stazionaria con un campo magnetico esterno e intrazione fra un circuito percorso da corrente stazionaria con un altro circuito percorso da corrente stazionaria.

Interazione circuito-campo magnetico

L'ipotesi fondamentale per lo studio di questi fenomeni è che il circuito in esame sia dotato di un generatore di forza elettromotrice che mantenga costante nel tempo la corrente che attraversa il circuito.

Si vuole ora studiare il calcolo delle sollecitazioni meccaniche su una spira rigida percorsa da corrente I . Si consideri quindi una spira l percorsa da una corrente I e immersa in un campo magnetico \mathbf{B} . Si supponga che ogni tratto infinitesimo della spira $d\mathbf{l}$ compia uno spostamento infinitesimo $d\mathbf{s} = d\mathbf{s}(d\mathbf{l})$, tale da portare la spira nella configurazione l' . Per far compiere alla spira questo spostamento senza che la sua energia cinetica vari è necessario applicare dall'esterno una forza

$$d\mathbf{f} = -d\mathbf{F} = -I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Ovvero, è necessario compiere un lavoro, che risulta quindi in una variazione di energia potenziale

$$dU = dL = \oint d\mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = - \oint I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = - \oint I d\mathbf{s} \times d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B} = I \oint (d\mathbf{l} \times d\mathbf{s}) \cdot \mathbf{B}$$

dove è stata usata la proprietà (B.1). Il termine fra parentesi nell'ultimo membro della catena di uguaglianze rappresenta l'elemento di superficie $d\mathbf{S}$ della superficie laterale $d\Sigma$ di un solido le cui basi hanno spigoli l ed l' . L'integrale ottenuto è allora il flusso di \mathbf{B} attraverso questa superficie laterale.

$$dU = \Phi_{d\Sigma}(\mathbf{B})$$

Chiamando Σ la base con spigolo l e Σ' la base con spigolo l' , siccome per il corollario 5.2.2 il flusso di \mathbf{B} attraverso una superficie chiusa deve essere nullo si ha

$$\Phi_{d\Sigma} = \Phi_{\Sigma} - \Phi_{\Sigma'} = -d\Phi$$

Dove $\Phi_{d\Sigma}$ è il flusso entrante da Σ , mentre gli altri sono flussi uscenti dalle rispettive superfici. Si ha quindi che a meno di una costante additiva arbitraria

$$U = -I\Phi(\mathbf{B})$$

Dove il flusso è riferito alla superficie di una spira con contorno l considerata positiva quando vede la corrente ruotare in senso antiorario. Ponendosi abbastanza lontano dalla spira in modo da poter considerare piccola la sua superficie si può approssimare $\Phi(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$. In questo modo la relazione appena trovata diventa

$$U = -I\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

Ma questa è un'espressione esattamente analoga a quanto trovato nel paragrafo sul dipolo elettrico (1.15). Con passaggi identici si arriva allora a dimostrare

Teorema 5.6.1. *Per una spira in un campo di induzione magnetica si ha che*

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (5.14)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (5.15)$$

Si osservi quindi che esiste una completa analogia fra il dipolo in elettrostatica e la spira percorsa da corrente in magnetostatica: sia la forma delle sollecitazioni meccaniche che quella del potenziale (e di conseguenza del campo) prodotto sono formalmente identiche a patto di usare \mathbf{p} o \mathbf{m} a seconda del contesto. Questo risultato è detto *teorema di equivalenza di Ampère* e sancisce la completa analogia fra una spira da percorsa da corrente ed un "dipolo magnetico".

Il calcolo del momento torcente può essere svolto in maniera immediata, e molto istruttiva, nel caso di una spira rettangolare immersa in un campo magnetico costante.

Esempio 2. Si supponga che il campo di induzione magnetica esterno \mathbf{B} sia costante e che la spira sia rettangolare (con i lati 1 e 3 di lunghezza b ed i lati 2 e 4 di lunghezza a), orientata in modo che i lati 2 e 4 siano ortogonali a \mathbf{B} . I lati 1 e 3 sono soggetti ad una coppia di forze uguale ed opposta con braccio nullo; anche i lati 2 e 4 sono soggetti ad una coppia di forze uguale ed opposta, il braccio però vale $b \sin \theta$ con θ l'angolo fra \mathbf{B} e la normale alla superficie $\mathbf{S} = ab\hat{\mathbf{n}}$ della spira. Per la seconda legge di Laplace si ha $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_4 = Ia\mathbf{B}$ per cui il momento meccanico sulla spira vale in modulo

$$M = \frac{b}{2} F_2 \sin \theta + \frac{b}{2} F_4 \sin \theta = bIaB \sin \theta = ISB \sin \theta$$

dove θ è l'angolo fra la forza ed il raggio-vettore che congiunge il punto di applicazione della forza al centro di massa. La relazione vettoriale è quindi

$$\mathbf{M} = IS\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Interazione circuito-circuito

Dati due circuiti l_1 ed l_2 questi esercitano l'uno sull'altro delle azioni meccaniche in quanto sorgenti di campi magnetici. La forza che l_1 esercita sull'elemento di filo $d\mathbf{l}_2$ di l_2 è²

$$d\mathbf{F}_{12} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1 = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \oint_{l_1} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

²La distanza fra due punti presenti rispettivamente sul primo e sul secondo circuito è stata indicata con r_{12} anziché con Δr

dove \mathbf{r}_{12} è la distanza fra un punto di l_1 e l'elemento di filo dl_2 . Nel caso in cui i due circuiti siano rigidi si ha

$$\mathbf{F}_{12} = \oint_{l_2} I_2 d\mathbf{l}_2 \times \oint_{l_1} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_2 \times d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

Usando l'identità vettoriale $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c}$, si ottiene

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \left[\oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{(d\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r}_{12}) d\mathbf{l}_1}{r_{12}^3} - \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} \right]$$

Il primo di questi due integrali è nullo in quanto

$$\oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{(d\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r}_{12}) d\mathbf{l}_1}{r_{12}^3} = \oint_{l_1} d\mathbf{l}_1 \oint_{l_2} \frac{(d\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3} = \oint_{l_1} d\mathbf{l}_1 \oint_{l_2} d\mathbf{l}_2 \cdot \nabla \left(\frac{1}{r_{12}} \right)$$

Ma la circuitazione di un campo conservativo è nulla. Si ha allora

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad (5.16)$$

L'equazione qui sopra mostra che scambiando gli indici si ottiene un cambio di segno, in accordo col terzo principio della dinamica.

Considerando due fili rettilinei infinitamente lunghi e paralleli, posti a distanza \mathbf{r}_{12} , si trova che

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi r_{12}} I_1 I_2 \mathbf{r}_{12} \operatorname{sgn}(dl_1 \cdot dl_2)$$

ovvero la forza è attrattiva o repulsiva in base al fatto che il verso delle correnti sia concorde o discorde. Inoltre questa relazione fornisce una definizione operativa dell'ampère: si dice che due fili lunghi e sottili sono attraversati da una corrente di 1 A quando, posti ad un metro di distanza, risentono reciprocamente di una forza pari a $\mu_0/2\pi$ per metro di filo.

5.7 Effetto Hall

In un conduttore percorso da corrente elettrica e immerso in un campo di induzione magnetica esterno ortogonale alle linee di corrente, si genera tra bordi opposti una differenza di potenziale

$$\Delta V_H = v_d B a = R_H \frac{IB}{b} \quad R_H = \frac{1}{nq} \quad (5.17)$$

dove b rappresenta lo spessore del conduttore in direzione parallela a \mathbf{B} , a lo spessore in direzione ortogonale e n la densità di portatori di carica. Questo effetto è chiamato *Effetto Hall* e la costante R_H è detta *costante di Hall*, con un valore tipico $|R_H| \simeq 10^{-11} \text{ m}^3/\text{C}$.

Per spiegare il fenomeno, si consideri una sbarretta conduttrice a forma di parallelepipedo la cui sezione abbia base di lati a e b immersa in un campo magnetico \mathbf{B} parallelo al lato b . Sia questa sbarretta percorsa da corrente I distribuita uniformemente sulla sezione. I portatori di carica, sottoposti alla forza di Lorentz³, verranno

³Si osservi che il verso della forza di Lorentz non dipende dal segno della carica dei portatori in quanto questo dipende dal segno del prodotto qv_d che indipendente dalla carica.

deviati verso una delle facce della superficie laterale della sbarretta sulla quale si avrà quindi un accumulo di carica. Come conseguenza di questo accumulo, si deve avere sulla faccia opposta un accumulo della carica opposta. Il campo elettrostatico E_s generato da questi accumuli si oppone alla forza di Lorentz fino al punto di saturazione $qE_s = qv_d B$, raggiunto il quale il moto dei portatori torna ad essere quello tipico. Tra le due facce della sbarretta si genera un potenziale $\Delta V_H = E_s a = v_d B a$. Indicando con J la densità di corrente uniforme per ipotesi, si ha $I = J a b = n q v_d a b$. Sostituendo v_d nell'equazione del potenziale di Hall appena trovata si ha anche la seconda espressione del potenziale.

Tipicamente la costante di Hall è negativa e questo conferma che i portatori di carica siano tipicamente elettroni. Inoltre invertendo la formula si ricava che il numero di elettroni liberi per ogni atomo è di $1 - 2$

Capitolo 6

Magnetostatica nei dielettrici

Si vogliono ora studiare i fenomeni magnetici in uno spazio non più vuoto ma riempito con dei materiali.

6.1 Aspetti atomici del magnetismo

Si vuole preliminarmente studiare il comportamento di un atomo immerso in un campo di induzione magnetica esterno. Per questo studio ci si limiterà all'approssimazione del modello planetario di Rutherford, che consente di ottenere comunque informazioni interessanti.

L'idea di fondo è che un elettrone in orbita attorno al nucleo può essere visto come una spira percorsa da corrente. Vogliamo quindi ricavare il momento magnetico, ovvero ricavare la superficie della spira $S = \pi r^2$ e la corrente $I = q_e / T$, dove T è il periodo. Detto r il raggio dell'orbita e T il periodo di rivoluzione, si ha dalla legge di Coulomb e dal secondo postulato della dinamica di Newton

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m_e \omega^2 r = \frac{(2\pi)^2}{T^2} m_e r$$

da cui

$$T = \frac{4\pi}{e} \sqrt{\pi\epsilon_0 m_e r^3}$$

Il raggio dell'orbita può essere valutato a partire dal lavoro di prima ionizzazione, ovvero dal lavoro necessario per strappare l'elettrone dalla sua orbita e portarlo all'infinito. All'infinito infatti l'elettrone può essere considerato fermo e ha dunque energia nulla e dunque il lavoro di ionizzazione equivale all'energia posseduta dall'elettrone in orbita, cambiata di segno.

$$L = -\left(\frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}\right) = -\left(\frac{1}{2} m_e (\omega r)^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}\right) = -\left(\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}\right)$$

E quindi

$$L = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \implies r = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 L}$$

Inserendo i dati per l'atomo di idrogeno ($L = 13.5 eV$) si ottiene una corrente $I = 1 mA$ e un momento magnetico $m = 9.35 \cdot 10^{-24} Am^2$, in buon accordo coi dati sperimentali.

Il momento magnetico è proporzionale al momento angolare orbitale dell'elettrone rispetto al nucleo, in quanto entrambi i vettori giacciono sull'asse perpendicolare alla spira. Siccome la carica dell'elettrone è negativa, i due vettori sono antiparalleli. Il loro rapporto dipende solo da caratteristiche intrinseche dell'elettrone e vale

$$\frac{m}{L} = \frac{e^-}{2m_e} = g_0$$

Viene chiamato *fattore giromagnetico orbitale* g . Oltre al momento orbitale è necessario considerare anche il momento orbitale di spin $s = \hbar/2$, uguale per protone, neutrone ed elettrone, che dà luogo al fattore giromagnetico intrinseco

$$g = C \frac{e^-}{2m}$$

dove C è una costante che vale 2 per l'elettrone, 2.79 per il protone e 1.91 per il neutrone. Il momento magnetico totale si ottiene come somma vettoriale del momento magnetico orbitale e di quello di spin¹, ma siccome la massa di neutrone e protone è di tre ordini di grandezza più grande rispetto a quella dell'elettrone il loro contributo al momento magnetico dell'atomo può spesso essere trascurato.

Atomi con simmetria sferica mostrano avere momento di dipolo magnetico nullo. In generale però anche quando il momento di dipolo di ogni singolo atomo non è nullo, è nullo il momento complessivo perchè i momenti di dipolo dei singoli atomi sono disposti casualmente. Un campo magnetico esterno ha l'effetto di indurre un momento magnetico non nullo sul materiale, in maniera che però è diversa a seconda della tipologia del materiale come verrà discusso in un paragrafo dedicato.

6.2 Vettore polarizzazione

I fenomeni di polarizzazione magnetica possono essere descritti macroscopicamente introducendo il vettore polarizzazione magnetica.

Definizione 6.2.1 (Vettore polarizzazione magnetica). Si definisce il vettore polarizzazione magnetica \mathbf{M} come il momento di dipolo magnetico per unità di volume posseduto dal materiale

$$\mathbf{M} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{m}_i}{\tau} = \frac{dN(\mathbf{m})}{d\tau}$$

Con dN il numero di dipoli magnetici contenute nell'elemento di volume $d\tau$. Dalla definizione si ottiene che l'elemento di volume possiede un momento di dipolo $d\mathbf{m} = \mathbf{M}d\tau$. Dei ragionamenti qualitativi preliminari ad una dimostrazione rigorosa permettono di comprendere in che modo questo vettore sia legato alle correnti amperiane, cioè le correnti atomiche microscopiche. Si consideri a tal fine un cilindro di materiale polarizzato lungo l'asse del cilindro stesso (ovvero tale che \mathbf{M} giaccia sull'asse del cilindro). Dato che gli atomi sono sempre circondati da elettroni in movimento l'unica possibilità per avere $M = 0$ è che le spire microscopiche siano disposte casualmente e che quindi il momento magnetico medio sia 0. Quando $M \neq 0$ significa che le spire microscopiche sono prevalentemente orientate nella stessa direzione, ovvero giacciono sul piano ortogonale a \mathbf{M} . Se \mathbf{M} fosse indipendente dalla posizione, allora internamente al materiale il valor medio delle correnti

¹Bisogna in realtà tenere conto anche del principio di esclusione di Pauli e della quantizzazione del momento angolare

microscopiche sarebbe nullo: infatti, prendendo un piano ortogonale all'asse del cilindro, prendendo un punto P su questo piano, si avrebbe in media perfetta compensazione fra le correnti dei dipoli disposti simmetricamente a P . Non sarebbe nulla però la corrente sulla superficie laterale del cilindro, descritta da un vettore densità \mathbf{J}_{mS} che può essere definito come

$$dI_{mS} = \mathbf{J}_{mS} \cdot d\mathbf{h} \hat{\mathbf{n}}$$

dove Q_m è la carica microscopica media che flusce attraverso un segmento di lunghezza dh ($\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale al segmento). Se \mathbf{M} non fosse indipendente dalla posizione, allora alla corrente microscopica superficiale andrebbe sommato il contributo di una corrente microscopica interna al materiale descritta da una densità \mathbf{J}_{mV}

$$dI_{mV} = \mathbf{J}_{mV} \cdot d\mathbf{S}$$

Teorema 6.2.2. *Le relazioni fondamentali tra il vettore di polarizzazione e le densità di corrente di superficie e di volume in un materiale sono*

$$\mathbf{J}_{mS} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (6.1)$$

$$\mathbf{J}_{mV} = \nabla \times \mathbf{M} \quad (6.2)$$

con $\hat{\mathbf{n}}$ il versore normale alla superficie del materiale.

Dimostrazione. Si consideri un certo materiale di forma qualunque che occupi un volume τ delimitato da una superficie S . Sia $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{r}')$ il vettore di polarizzazione magnetica. Allora si ha, dalla definizione di \mathbf{M}

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{d\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau'$$

Ricordando la dimostrazione del teorema [REF] e usando l'equazione (B.8)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\nabla \times' \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \nabla' \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d\tau'$$

Grazie alla seconda identità di green

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\nabla \times' \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}' dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Ma per la 5.6 il potenziale vettore può anche essere scritto come

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_{mV}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_{mS}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'$$

Per confronto fra le integrande si ottiene la tesi. □

6.3 Equazioni di Maxwell

Definizione 6.3.1 (Campo Magnetico). Si definisce vettore campo magnetico

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$$

Teorema 6.3.2. *In presenza di materiali la seconda e la quarta equazione di Maxwell assumono la seguente forma:*

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (6.4)$$

Dimostrazione. L'osservazione di partenza è che la presenza dei materiali impone una semplice modifica sulle equazioni di Maxwell per il campo di induzione magnetica, ovvero nella quarta equazione di Maxwell oltre alla densità di corrente macroscopica va considerata anche la densità delle correnti atomiche presenti nel materiale. Formalmente

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}_m)$$

In generale, sulle superfici di separazione fra materiali, le equazioni di Maxwell non sono definite in quanto \mathbf{B} subisce una discontinuità. Ha senso limitarsi a considerare quindi solo l'interno di un materiale dove $\mathbf{J}_m = \mathbf{J}_m V$. Di conseguenza, per la 6.2

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}$$

Da cui segue che

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}}{\mu_0} \right) = \mathbf{J}$$

Ovvero dalla definizione di \mathbf{H} , la tesi. \square

All'interno delle due equazioni non compare lo stesso campo e quindi queste non ammettono soluzione univoca a meno di conoscere la relazione fra \mathbf{H} e \mathbf{B} - ovvero, dalla definizione di campo magnetico, fra \mathbf{B} ed \mathbf{M} . Questo aspetto sarà approfondito nel paragrafo sui tipi di materiali magnetici.

La forma integrale della quarta equazione di Maxwell fornisce una versione per il teorema della circuitazione di Ampère valida nei materiali.

Corollario 6.3.3 (Teorema della circuitazione di Ampère). *Prese delle correnti concatenate I_i con segno positivo quando vedono girare il contorno orientato l in senso antiorario*

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_i \quad (6.5)$$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del teorema di Ampère nel vuoto corollario 5.3.11 \square

Come accennato, le equazioni di Maxwell per il magnetismo nella materia valgono solo all'interno di un materiale. Per caratterizzare i fenomeni magnetici in tutto lo spazio è quindi necessario risolvere le equazioni all'interno di ogni materiale che riempie lo spazio e poi usare delle condizioni di raccordo sulla superficie che separa un materiale dall'altro.

Teorema 6.3.4. *Passando da un mezzo materiale all'altro, la componente normale di \mathbf{B} non subisce alcuna discontinuità, così come la componente tangenziale di \mathbf{H} . In formule*

$$\mathbf{B}_{n1} = \mathbf{B}_{n2}$$

$$\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2}$$

Dimostrazione. Per dimostrare la prima equazione si consideri un cilindretto C con le basi parallele alla superficie di separazione fra due materiali; Per la seconda si consideri invece un piccolo percorso rettangolare l con due lati paralleli e due normali alla superficie di separazione. Il flusso di \mathbf{B} uscente dalla superficie di C deve essere nullo, così come la circuitazione di \mathbf{H} su l -in quanto non sono presenti correnti macroscopiche concatenate al percorso, ma solo correnti microscopiche. Analogamente a quanto fatto per [REF] si ha la tesi. \square

Per misurare quindi B e H all'interno di un materiale è sufficiente misurare B e H in un taglio sulla superficie del materiale rispettivamente ortogonale o parallelo alle linee di forza del campo. Le equazioni di Maxwell ricavate in questo paragrafo non dipendono dalle correnti microscopiche. Data la facilità di misurazione del campo magnetico \mathbf{H} questa riscrittura è estremamente vantaggiosa.

6.4 Materiali dia-, para-, ferromagnetici

Si vuole ora cercare di capire quale sia la relazione fra \mathbf{B} e \mathbf{H} in un materiale. Nel vuoto evidentemente, essendo $\mathbf{M} = 0$ si ha

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}$$

È allora sensato, considerando la linearità della teoria finora sviluppata pensare di scrivere

$$\mathbf{B} = \|\mu\| \mathbf{H}$$

dove $\|\mu\|$ è un tensore.

Osservazione sperimentale 6.4.1. *Nei mezzi materiali isotropi e omogenei \mathbf{B} e \mathbf{H} risultano sperimentalmente paralleli fra loro.*

Questo significa in particolare che \mathbf{M} risulta essere parallelo o antiparallelo a \mathbf{B} e che quindi si può scrivere

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \quad (6.6)$$

dove μ e μ_r sono delle costanti dette rispettivamente *permeabilità magnetica* e *permeabilità magnetica relativa* del materiale in esame. Ovvero, nei materiali omogenei e isotropi il tensore si riduce ad una costante.

Teorema 6.4.2 (Legge di rifrazione delle linee di forza). *Preso la superficie di separazione fra due materiali (1 e 2) isotropi e omogenei con permeabilità magnetica μ_1 e μ_2 , detti \mathbf{H}_1 il campo nel materiale 1 e \mathbf{H}_2 il campo nel materiale 2 (analogamente per \mathbf{B}), detti θ_1 e θ_2 gli angoli che una linea di forza del campo forma con la normale alla superficie nei due materiali, si ha*

$$\frac{H_{t1}/H_{n1}}{H_{t2}/H_{n2}} = \frac{B_{t1}/B_{n1}}{B_{t2}/B_{n2}} = \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Dimostrazione. Riscrivendo la (6.6) per le componenti normali, ricordando i risultati del teorema 6.3.4, si ha

$$\begin{cases} H_{t1} = H_{t2} \\ \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_{n1} = B_{n2} \\ \mu_1 B_{t1} = \mu_2 B_{t2} \end{cases}$$

Facendo i rapporti membro a membro si ottiene la tesi. \square

Sono le caratteristiche di μ_r che permettono una classificazione dei materiali in: diamagneti, paramagneti e ferromagneti. Prima di addentrarsi nella descrizione di questi materiali è necessario introdurre la seguente quantità

Definizione 6.4.3 (Suscettività magnetica). Si definisce suscettività magnetica di un materiale

$$\chi_m = \mu_r - 1$$

Per comprendere l'utilità di questa definizione bisogna osservare che, dalla definizione di campo magnetico, per i materiali isotropi

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (6.7)$$

Ovvero la suscettibilità magnetica rappresenta il fattore di proporzionalità fra il campo magnetico e il vettore polarizzazione magnetica.

Diamagneti

Nelle sostanze diamagnetiche la permeabilità magnetica relativa è costante ed è prossima a 1 in maniera tale che $\chi_m < 0$: il momento magnetico indotto nel materiale è di verso opposto rispetto al campo che lo induce. Generalmente per queste sostanze si ha $\chi_m \in [-10^{-6}, -10^{-9}]$. Per questi materiali la suscettività magnetica è indipendente dalla temperatura. Inoltre, queste sostanze non presentano alcun tipo di saturazione: le relazioni (6.6) e (6.7) valgono a prescindere dai valori assunti dai campi in esame. Per quanto detto, riscrivendo la (6.6) come $\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H}$, è chiaro come la perturbazione causata dalla presenza di materiali diamagnetici sia di norma trascurabile.

Paramagneti

Anche nelle sostanze paramagnetiche la permeabilità magnetica relativa è costante e prossima a 1, ma in questo caso si ha $\chi_m > 0$, ovvero il momento magnetico indotto nel materiale ha lo stesso verso del campo che lo induce. Di norma per queste sostanze si ha $\chi_m \in [10^{-6}, 10^{-2}]$. La suscettività magnetica varia in funzione della temperatura secondo la legge di Curie

$$\chi_m = C \frac{\rho}{T} \quad (6.8)$$

dove ρ è la densità del materiale e C è una costante scritta in funzione delle grandezze atomiche. All'avvicinarsi della temperatura allo 0 assoluto i campi in questi materiali sono molto diversi a quelli che si hanno nel vuoto, ma in condizioni standard anche in questo caso la perturbazione è trascurabile.

Ferromagneti

Il comportamento dei ferromagneti è il più complesso: le relazioni fra campi e momenti di magnetizzazione non sono nè lineari nè univoche. Inoltre, le proprietà di questi materiali sono fortemente dipendenti dalle loro caratteristiche chimico-fisiche. Effettuando misure su un materiale isotropo si osserva che $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ e $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ assumono sempre lo stesso verso di \mathbf{H} , per cui ci si può limitare a considerarle come relazioni scalari. In particolare è istruttivo descrivere l'andamento di B in funzione di H .

Partendo da $(H, B) = (0, 0)$ all'aumentare di H aumenta B seguendo una curva I detta *curva di prima magnetizzazione*. Raggiunto un valore $H_m \simeq 10^5 \text{ As/m}$, da lì in poi B aumenta solo proporzionalmente ad H : dalla definizione di campo magnetico questo significa che M ha raggiunto il valore di saturazione, oltre al quale non aumenta più. Facendo diminuire H a partire dal valore H_m si ha che per un primo tratto B segue la curva I , ma una volta superato un valore H_s si ha che B scende mantenendosi sempre sopra alla curva I . In questo modo, per $H = 0$ si ha $B > 0$ e il valore di $M = B/\mu_0$ corrispondente si chiama *magnetizzazione residua*. Cambiando ora il segno di H e facendo crescere il suo valore assoluto, B decresce ed esiste quindi sicuramente un valore H_c detto *campo magnetico di coercizione* per cui $B = 0$. In corrispondenza di questo valore $M = H_c > 0$. Superato questo punto B diventa negativo e continua a decrescere fino al valore $-H_m$. La curva completa si assesta su una curva ciclica simmetrica rispetto all'origine detta *curva di isteresi*. Se si restringe l'intervallo all'interno del quale si fa variare H si ottengono dei cicli sempre più piccoli sempre simmetrici rispetto all'origine e prossimi alla curva di prima magnetizzazione. Eseguendo dei cicli in cui gradualmente si riduce l'ampiezza dell'intervallo B converge verso l'origine ed è possibile in questo modo smagnetizzare un materiale ferromagnetico. Si può dimostrare che per produrre una variazione dH del campo magnetico è necessario compiere un lavoro $dL = B dH$, così che il lavoro complessivo dissipato dal ciclo di isteresi è uguale all'area della superficie contenuta dalla curva.

È anche possibile relizzare dei cicli non simmetrici rispetto all'origine portando il sistema in una posizione (\bar{H}, \bar{B}) e spostandosi da questa di una piccola quantità ΔH . Se questa variazione è molto piccola il ciclo si riduce ad un segmento, in cui il lavoro dissipato è praticamente nullo: si parla di *ciclo elementare reversibile*.

Risulta quindi chiaro che fissato un valore di H non è possibile ricavare un valore di B senza conoscere il resto della curva. In particolare perde di senso il parametro μ e bisogna quindi cercare dei parametri alternativi adatti alla descrizione del fenomeno. Quando il ciclo è molto stretto una buona scelta è la *permeabilità magnetica differenziale assoluta*

$$\mu_d = \frac{dB}{dH}$$

Un utile risultato riguarda il fatto che, superata una certa temperatura T_c il materiale si comporta come un materiale paramagnetico con suscettività magnetica

$$\chi_m = C \frac{\rho}{T - T_c}$$

6.5 Precessione di Larmor

Per concludere si vuole tornare all'aspetto atomico della magnetizzazione per descrivere un fenomeno che prende il nome di *precessione di Larmor*. Si consideri un elettrone orbitante attorno ad un nucleo con momento angolare \mathbf{L} e momento magnetico $\mathbf{m}_0 = (-e/2m_e)\mathbf{L}$. Si supponga inoltre che sull'elettrone agisca un campo magnetico locale $\mathbf{B}_l = \mu_0\mathbf{H}_l$. Nell'ipotesi che il campo magnetico perturbi di poco il moto dell'elettrone allora, il momento angolare compie un moto di precessione attorno alla direzione del campo. Si ha infatti, indicando con \mathbf{M} il momento meccanico

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} = \mathbf{m}_0 \times \mathbf{B}_l = -\frac{e}{2m_e}\mathbf{L} \times \mathbf{B}_l$$

Chiaramente quindi la derivata di \mathbf{L} è ortogonale a \mathbf{L} e a \mathbf{B}_l . Da questo segue che nel tempo cambia la direzione di \mathbf{L} ma non il suo modulo e che inoltre la componente L_z di \mathbf{L} parallela a \mathbf{B} non cambia. Perciò si ha effettivamente un moto di precessione che disegna un cono il cui asse coincide con \mathbf{B} .

Resta da determinare la velocità di precessione, detta *velocità angolare di Larmor*. Dal corso di meccanica² si ha

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{L}$$

Per cui si ha

$$\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{L} = -\frac{e}{2m_e}\mathbf{L} \times \mathbf{B}_l$$

Ovvero per confronto

$$\boldsymbol{\omega}_L = \frac{e}{2m_e}\mathbf{B}_l$$

La velocità angolare ha lo stesso verso del campo di induzione magnetica, per cui la precessione avviene in senso antiorario.

Questo moto comporta una *corrente di Larmor*

$$I_L = \frac{e}{T_L} = \frac{e\omega_L}{2\pi} = \frac{e^2 B_L}{4\pi m_e}$$

a cui, indicando con S_z la proiezione della superficie dell'orbita sul piano xy , corrisponde un momento magnetico diretto in verso opposto rispetto a \mathbf{B}_L e in modulo

$$m_L = I_L S_z = \frac{e^2 B_L}{4\pi m_e} S_z$$

S_z è ottimamente approssimabile con $\pi(x^2 + y^2)$, dove x^2 e y^2 rappresentano il valore quadratico medio assunto dalle coordinate dell'elettrone mentre questo percorre l'orbita. Se l'atomo è isotropicamente distribuito nello spazio si ha $x^2 = y^2 = z^2 = r^2/3$ con r il raggio dell'orbita. Si può quindi riscrivere il momento magnetico di Larmor, tenendo conto di direzione e verso, come

$$\mathbf{m}_L = -\frac{e^2 r^2}{6m_e}\mathbf{B}_L$$

Se l'atomo ha Z elettroni con raggio orbitale r_i , allora

$$\mathbf{m}_L = -\frac{e^2 r^2}{6m_e} \sum_{i=1}^Z r_i^2 \mathbf{B}_L$$

²Da leggersi "non mi ricordo dell'esistenza di questa cosa, prendiamola per vera".

Parte IV

Elettrodinamica

Capitolo 7

Campi variabili

Osservazione sperimentale 7.0.1. Si consideri un circuito costituito da una linea chiusa di materiale conduttore, in serie al quale sia disposto un galvanometro. Nei seguenti casi, il galvanometro indica il passaggio di corrente elettrica nel circuito:

1. il circuito si trova in prossimità di un altro circuito percorso da corrente variabile nel tempo;
2. il circuito si trova in moto relativo rispetto ad un altro circuito percorso da corrente costante nel tempo;
3. il circuito si trova in moto relativo rispetto ad un magnete permanente;
4. il circuito viene deformato all'interno di un campo di induzione magnetica.

7.1 Legge di Faraday-Neumann

Per tenere conto delle osservazioni sperimentali, si introduce la seguente legge.

Osservazione sperimentale 7.1.1 (Legge di Faraday-Neumann). Dato un circuito immerso in un campo di induzione magnetica \mathbf{B} e detto $\Phi(\mathbf{B})$ il flusso con del campo concatenato al circuito, allora nel circuito si genera una forza elettromotrice indotta

$$f_i = - \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad (7.1)$$

La derivata totale non può essere portata all'interno dell'integrale che esprime il flusso in quanto la forma del circuito, e quindi il cammino di integrazione, dipende dal tempo.

Osservazione 7.1.2. La forza elettromotrice indotta implica la presenza di un campo elettromotore indotto \mathbf{E}_i

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E} + \mathbf{v}_T \times \mathbf{B} \quad (7.2)$$

Dove \mathbf{E} e \mathbf{B} sono i campi elettrico e di induzione magnetica in cui il circuito è immerso e \mathbf{v}_T è la velocità di trascinamento con cui si muove ciascun elemento infinitesimo di circuito.

Dimostrazione. Dalla definizione $f_i = \oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}$, che mostra la presenza del campo elettromotore indotto. Nel fenomeno dell'induzione i portatori di carica q che danno origine alla corrente nel circuito sono messi in moto da una forza

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v}_{tot} \times \mathbf{B}$$

Il campo elettromotore può quindi essere visto come rapporto fra questa forza e la carica dei portatori, ovvero

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E} + \mathbf{v}_{tot} \times \mathbf{B} = \mathbf{E} + (\mathbf{v}_T + \mathbf{v}_d) \times \mathbf{B}$$

dove \mathbf{v}_T è la velocità di trascinamento e \mathbf{v}_d la velocità di deriva delle cariche. Si ha quindi, considerando che la velocità di deriva è parallela punto per punto all'elemento $d\mathbf{l}$ di volta in volta considerato

$$f_i = \oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \oint_l (\mathbf{E} + \mathbf{v}_T \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Siccome la forza elettromotrice indotta è l'unica osservabile attraverso la quale sia possibile individuare il campo elettromotore indotto, allora si può tranquillamente identificare quest'ultimo con il secondo integrando. \square

La corrente che circola nel circuito a sua volta genera un campo magnetico indotto \mathbf{B}_i .

Corollario 7.1.3 (Legge di Lenz). *Il campo magnetico indotto \mathbf{B}_i è tale che il suo verso si opponga a quello del campo magnetico che genera la forza elettromotrice indotta.*

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata, per il fatto che nella legge di Faraday-Neumann compare il segno meno \square

7.2 Il flusso tagliato

L'obiettivo di questo paragrafo è duplice: dare un significato fisico più concreto alla legge di Faraday-Neumann attraverso tre esempi significativi e esporre il concetto di flusso tagliato, utile per i risultati espressi nei prossimi paragrafi.

Definizione 7.2.1 (Flusso tagliato). Il flusso attraverso la superficie spazzata da un circuito in movimento è chiamato flusso tagliato.

Circuito variabile, \mathbf{B} costante nel tempo

\mathbf{B} costante nel tempo significa che le caratteristiche delle sorgenti del campo non cambiano nel tempo e che queste sorgenti sono in quiete nel sistema di riferimento scelto per descrivere il fenomeno.

Teorema 7.2.2. *Dato un circuito di forma generica, il cui generico elemento $d\mathbf{l}$ sia in moto con velocità \mathbf{v}_T , immerso in un campo \mathbf{B} costante nel tempo, la variazione del flusso concatenato al circuito è pari in modulo e opposta in segno al flusso tagliato.*

Dimostrazione. Detta Σ la superficie orientata attraverso la quale viene calcolato il flusso concatenato all'istante t_0 (indicato con Φ_i), Σ' la superficie attraverso cui viene calcolato il flusso Φ_f all'istante $t + dt$ e $d\Sigma$ la superficie spazzata dal circuito nel

suo spostamento, si ha che l'unione di queste tre superfici è una superficie chiusa: il flusso totale -ovvero la somma dei flussi uscenti- deve essere nullo¹. Si scelga convenzionalmente come verso di percorrenza positivo quello per cui la normale alla superficie del circuito sia parallela alla velocità complessiva del circuito. Allora

$$-\Phi_i + \Phi_f + \Phi_{d\Sigma} = 0$$

dove il segno meno al primo termine è dovuto al fatto che con la convenzione scelta Φ_i è il flusso entrante nella superficie chiusa, mentre la somma è nulla quando riferita ai flussi uscenti. Si ha quindi che

$$d\Phi \equiv \Phi_f - \Phi_i = -\Phi_{d\Sigma}$$

ovvero la tesi. □

L'utilità di questo risultato risiede nel fatto che è possibile trovare un'espressione esplicita per il flusso tagliato come mostrato nel seguente teorema.

Teorema 7.2.3. *Dato un circuito di forma generica, il cui generico elemento $d\mathbf{l}$ sia in moto con velocità \mathbf{v}_T , immerso in un campo \mathbf{B} costante nel tempo, il flusso tagliato vale*

$$\Phi_{d\Sigma} = dt \oint_l (\mathbf{v}_T \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Dimostrazione. Si vuole calcolare $\Phi_{d\Sigma}$. Per farlo, siccome \mathbf{B} è noto per ipotesi, bisogna esprimere $d\mathbf{S}$ in termini di grandezze note. Questo si ottiene considerando che ogni elemento di circuito compie uno spostamento $d\mathbf{s} = \mathbf{v}_T dt$ e nel farlo spazza la superficie $d\mathbf{S} = d\mathbf{l} \times d\mathbf{s} = d\mathbf{l} \times \mathbf{v}_T dt$.

$$\Phi_{d\Sigma} = \int_{d\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{v}_T dt)$$

Usando l'identità (B.1) si ha la tesi. □

Corollario 7.2.4. *Nel caso di circuito in moto con velocità \mathbf{v}_T in un campo \mathbf{B} costante, il campo elettromotore indotto è*

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{v}_T \times \mathbf{B}$$

Dimostrazione. Per i due risultati appena dimostrati $d\Phi/dt = -\Phi_{d\Sigma}/dt = -\oint_l (\mathbf{v}_T dt \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$. Confrontando il primo e l'ultimo membro dell'uguaglianza con la legge di Faraday-Neumann si ha la tesi. □

L'interpretazione fisica del fenomeno dell'induzione elettromagnetica è quindi immediata nelle ipotesi del corollario: le cariche costrette a muoversi nel campo di induzione magnetica per via del moto del circuito, sono sottoposte alla forza di Lorentz. Nonostante la forza di Lorentz non compia lavoro la forza elettromotrice può essere diversa da 0: il lavoro dissipato dalla corrente nel circuito è compiuto dalla forza esterna che mantiene \mathbf{v}_T costante o è compiuto a spese dell'energia cinetica, per cui il circuito rallenta fino a fermarsi.

¹Questo è vero solo nell'ipotesi di campo costante nel tempo, in quanto le superfici Σ e Σ' sono appoggiate al circuito in tempi diversi

Circuito rigido, sorgenti di \mathbf{B} stazionarie in moto

Si consideri un circuito C in quiete nel sistema di riferimento inerziale $sr = Oxyz$. Supponendo che le sorgenti di \mathbf{B} siano in uno stato stazionario, ovvero con caratteristiche costanti nel tempo, una variazione del flusso può avvenire solo se queste cariche si muovono rispetto a sr con una velocità \mathbf{v} . Nell'ipotesi che ci sia una sola sorgente del campo il cui moto sia di pura traslazione con v costante, è possibile considerare un sistema di riferimento inerziale $sr' = O'x'y'z'$ rispetto al quale la sorgente è in quiete. sr si muove rispetto ad sr' con velocità $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$. sr' si trova allora nelle stesse condizioni discusse nel caso del circuito variabile e campo costante nel tempo: le cariche risentono della forza di Lorentz ($\mathbf{F}_l' = q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$) come nel caso precedente. In sr , dove il circuito è fermo, non si ha nessuna forza di Lorentz. A partire da considerazioni relativistiche però si può dedurre che il moto delle sorgenti di \mathbf{B} provochi l'insorgere di un campo \mathbf{E}_l che esercita sui portatori di carica del circuito una forza $\mathbf{F}_l = q\mathbf{E}_l$ equivalente alla forza di Lorentz \mathbf{F}_l' . Per $v \ll c$ si ha $\mathbf{B} \simeq \mathbf{B}'$, da cui $\mathbf{E}_l = \mathbf{v}' \times \mathbf{B}' = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

In virtù dell'additività di \mathbf{B} il ragionamento fatto è estendibile al caso di più sorgenti.

Circuito rigido, sorgenti di \mathbf{B} ferme non stazionarie

Il circuito C e le sorgenti del campo di induzione magnetica non sono in moto relativo fra loro. Le sorgenti di \mathbf{B} non stazionarie sono dei circuiti nei quali le correnti di alimentazione non sono costanti. L'effetto è che in ogni punto di C il campo \mathbf{B} sia variabile nel tempo, esattamente come visto del caso del circuito in moto relativo con le sorgenti del campo. È ragionevole perciò aspettarsi quindi che anche in questo caso si abbia come effetto un campo elettromotore, sebbene questo non sia causato dalla forza di Lorentz. In effetti questo campo è presente ed è una conseguenza della generalizzazione della terza equazione di Maxwell al caso non stazionario che verrà presentata nel prossimo paragrafo.

7.3 Equazioni di Maxwell - caso non stazionario

7.3.1 Terza equazione di Maxwell

Quanto visto evidenzia come in condizioni non stazionarie non sia garantita la conservatività del campo elettrico. Si consideri infatti il caso in cui le sorgenti di \mathbf{B} non siano stazionarie ma $\mathbf{v}_T = 0$: $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}$ e quindi $\oint \mathbf{E}_i = f_i = -dv\Phi t \neq 0$. Si rende perciò necessaria una generalizzazione della terza equazione di Maxwell alla quale si perviene nel tentativo di trovare una forma locale della legge di Faraday-Neumann.

Teorema 7.3.1.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7.3)$$

Dimostrazione. Sia il circuito in moto e non rigido. Esplicitando la derivata e sviluppando al primo ordine \mathbf{B} nella legge di Faraday-Newmann si ottiene

$$\begin{aligned}\oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{1}{dt} \left[\int_{S(t+dt)} \mathbf{B}(t+dt) \cdot d\mathbf{S} - \int_{S(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} \right] \\ &= -\frac{1}{dt} \left[\int_{S(t+dt)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} + \int_{S(t+dt)} \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} dt \cdot d\mathbf{S} - \int_{S(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} \right] \\ &= -\frac{1}{dt} \left[\int_{S(t+dt)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} - \int_{S(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} \right] - \int_{S(t+dt)} \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} - \int_{S(t+dt)} \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che il termine fra parentesi rappresenta la variazione di flusso relativa esclusivamente al moto del circuito ed è quindi possibile sfruttare i risultati ottenuti nel paragrafo sul flusso tagliato. Nel limite $dt \rightarrow 0$ si ha infine

$$\oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} - \int_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

Il secondo termine rappresenta la variazione di flusso dovuta esclusivamente alla variazione nel tempo del campo di induzione magnetica. Per la linearità dell'integrale

$$\oint_l (\mathbf{E}_i - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = - \int_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

Per la (7.2) l'integrando a primo membro è proprio \mathbf{E} . Per il teorema del rotore l'integrando a primo membro è uguale a $\int_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$. Siccome la procedura fin qui seguita vale qualunque sia il dominio di integrazione, l'uguaglianza ottenuta implica l'uguaglianza delle integrande, ovvero la tesi. \square

Il risultato ottenuto si estende anche al caso in cui non siano presenti circuiti: nel vuoto, nei dielettrici o nei conduttori, se il campo magnetico cambia nel tempo allora è presente un campo elettrico non conservativo.

7.3.2 Prima e seconda equazione di Maxwell

Vista la generalizzazione della terza equazione di Maxwell al caso non stazionario, ci si pone come obiettivo quello di generalizzare le altre equazioni.

Osservazione sperimentale 7.3.2. *Per quanto concerne la prima e la seconda equazione di Maxwell, si verifica sperimentalmente che la generalizzazione si ottiene banalmente introducendo la dipendenza dal tempo nella densità di carica elettrica.*

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho(x, y, z, t)}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

La prima di queste due equazioni può portare a conseguenze all'apparenza paradossali. Infatti è immediato verificare che il teorema di Gauss continua a valere anche in condizioni non stazionarie, ma il teorema di Gauss collega fra loro la carica presente all'interno di una superficie ed il flusso sulla superficie: due quantità poste in posizioni diverse sono collegate istantaneamente. La spiegazione del paradosso emerge considerando la legge di conservazione della carica: la variazione

della quantità di carica interna infatti può essere dovuta esclusivamente al passaggio di cariche attraverso la superficie, perciò la variazione di flusso è un fenomeno essenzialmente locale

La conseguenza della seconda è che anche nel caso non stazionario il flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa è ad ogni istante nullo.

7.3.3 Quarta equazione di Maxwell

I procedimenti usati nei paragrafi precedenti non possono essere usati per generalizzare anche la quarta equazione di Maxwell, infatti

Osservazione 7.3.3. *L'estensione al caso non stazionario della quarta equazione di Maxwell non può essere ottenuto rendendo dipendenti dal tempo le grandezze che in essa compaiono.*

Dimostrazione. Si applichi l'operatore divergenza alla quarta equazione di Maxwell

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{J}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J}$$

La divergenza del rotore è sempre nulla, quindi segue che $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Dall'equazione di continuità (3.2) si ottiene che questo è vero se e solo se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Ovvero se e solo se la variazione della densità di carica è nulla e questo succede se e solo se ci si trova nel caso stazionario. \square

La generalizzazione viene, di fatto, fatta un po' a culo.

Definizione 7.3.4 (Densità di corrente di spostamento). Si definisce densità di corrente di spostamento il vettore

$$\mathbf{J}_S = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Definizione 7.3.5 (Corrente di spostamento). Si definisce corrente di spostamento il flusso della densità di corrente di spostamento attraverso una superficie.

Si osservi come dimensionalmente questa sia effettivamente una densità di corrente, infatti dalla definizione di campo elettrico $[\epsilon_0 E] = [q/r^2] = C/m^2$ e quindi $[\epsilon_0 \partial E / \partial t] = A/m^2 = [J]$.

Definizione 7.3.6 (Densità di corrente totale generalizzata). Si definisce densità totale di corrente generalizzata \mathbf{J}_t

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

La seguente osservazione si rivela fondamentale e giustifica l'introduzione della corrente di spostamento.

Osservazione 7.3.7. *La densità di corrente totale generalizzata si riduce alla densità di corrente nel caso stazionario e ha sempre divergenza nulla.*

Dimostrazione. La dimostrazione della prima parte dell'asserto è banale e si ottiene semplicemente considerando che nel caso stazionario la variazione del campo elettrico è nulla. Per quanto riguarda la seconda parte invece, si consideri l'equazione di continuità (3.2) e usando le equazioni di Maxwell per introdurre i campi, ovvero sostituendo al posto della densità di carica l'espressione fornita dalla prima equazione di Maxwell, si ottiene

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0$$

Per il teorema di Schwartz è possibile scambiare la derivata parziale con la divergenza:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Quello fra parentesi è proprio la densità di corrente totale generalizzata. Si è ottenuta così la tesi. \square

Questi due risultati dicono che la densità di corrente totale generalizzata è un buon candidato per la generalizzazione della quarta equazione di Maxwell che può essere ottenuta pertanto sostituendo la densità di corrente usuale con la densità di corrente totale generalizzata:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (7.4)$$

La validità di questa legge è confermata dall'accordo degli esperimenti coi risultati della teoria che si sviluppa usando questa equazione. Il seguente esempio mostra come essa sia in grado di risolvere una situazione all'apparenza paradossale.

Esempio 3 (Scarica del condensatore). Si consideri un circuito RC aperto, con il condensatore inizialmente carico con carica Q_0 . All'istante $t = 0$ viene chiuso l'interruttore e il condensatore inizia a scaricarsi secondo la legge

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Il campo elettrico vale quindi

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q(t)}{S}$$

e la corrente

$$I(t) = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Considero a questo punto un circuito di Ampère c tra le maglie del condensatore e due superfici con questo circuito come contorno: S_1 interseca il filo del circuito collegato ad una maglia del condensatore; S_2 all'interno del volume delimitato dalle maglie del condensatore. Se valesse la "vecchia" quarta equazione di Maxwell, per il teorema di Ampère la circuitazione di \mathbf{B} su c varrebbe I considerando S_1 e 0 considerando S_2 . Questa aporia viene risolta proprio dall'equazione di Maxwell generalizzata appena introdotta. Nel caso in cui si consideri S_1 infatti il campo elettrico attraverso la superficie è nullo e quindi continua a valere il teorema di Ampère. Nel caso in cui si consideri S_2 invece $\mathbf{J} = 0$, ma $J_S = dE/dt = I(t)/S$ da cui si ottiene una corrente in modulo uguale a I .

La generalizzazione di questa equazione ai materiali è insidiosa ma porta all'intuibile risultato

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (7.5)$$

valido per qualsiasi tipo di materiale, compresi i ferromagneti.

Vengono espone ora due conseguenze di quanto detto in questo paragrafo.

Osservazione 7.3.8 (Prima legge di Kirchhoff generalizzata). *La legge di Kirchhoff dei nodi è estendibile al caso non stazionario a patto di considerare sia la corrente di conduzione che quella di spostamento.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella della legge di Kirchhoff nel caso stazionario considerando che siccome la densità di corrente totale generalizzata ha divergenza nulla, è nullo il suo flusso attraverso qualsiasi superficie chiusa. \square

Osservazione 7.3.9 (Teorema della circuitazione di Ampère generalizzato). *Il teorema della circuitazione di Ampère è estendibile al caso non stazionario a patto di considerare sia la corrente di conduzione che quella di spostamento.*

Dimostrazione. Anche in questo caso la dimostrazione è analoga al caso stazionario, pur di prendere la quarta equazione di Maxwell generalizzata. \square

Al fine del calcolo dei campi però, l'utilità pratica di questo teorema è limitata al caso quasi-stazionario, ovvero al caso in cui le dimensioni del sistema siano tali per cui il tempo impiegato dai segnali elettromagnetici per attraversarlo sia molto piccolo rispetto al tempo che caratterizza le variazioni di ρ e \mathbf{J} . In questo caso infatti la corrente di spostamento è con buona approssimazione trascurabile all'interno dei buoni conduttori fino a frequenze nell'ordine delle microonde.

7.4 L'autoinduzione

L'analisi proposta in questo e nel prossimo paragrafo è fatta per materiali omogenei ed isotropi in cui μ sia costante.

Si consideri un circuito in condizioni quasi-stazionarie, il che implica che la corrente abbia lo stesso valore lungo tutto il circuito, percorso da una corrente variabile nel tempo $I(t)$. Questa corrente genera nello spazio circostante un campo di induzione magnetica $\mathbf{B}(t)$ il cui flusso concatenato al circuito è in generale diverso da zero e variabile. Per la legge di Faraday-Neumann si genera nel circuito una forza elettromotrice detta *autoindotta*.

Osservazione 7.4.1.

$$\Phi(\mathbf{B}) = LI \quad (7.6)$$

Dimostrazione. per la (5.2) il campo di induzione magnetica è proporzionale alla corrente che percorre il circuito. Poichè il flusso elementare di \mathbf{B} attraverso ogni elemento di superficie $d\mathbf{S}$ è proporzionale a \mathbf{B} , anche il flusso concatenato deve essere proporzionale ad I . \square

Definizione 7.4.2 (Induttanza). La costante di proporzionalità che compare nell'osservazione precedente si chiama induttanza.

L'unità di misura per l'induttanza è detta *henry*

$$[L] = \frac{w}{A} = \frac{V \cdot s}{A} = \Omega \cdot s = H$$

Osservazione 7.4.3. L'induttanza per un solenoide nell'approssimazione di solenoide infinito vale

$$L = \mu n^2 l S = \mu N^2 \frac{S}{l}$$

Dimostrazione. Il campo di induzione magnetica per un solenoide vale in modulo

$$B = \mu n I$$

ed è diretto assialmente. Il flusso concatenato ad una singola spira è $= SB$ e quindi il flusso concatenato a tutto il circuito vale $\Phi(\mathbf{B}) = NS\mu n I$. Ma allora l'induttanza vale

$$L = \frac{\Phi(\mathbf{B})}{I} = \mu n^2 l S = \mu N^2 \frac{S}{l}$$

□

Nelle ipotesi², dalla legge di Faraday-Neumann si ha immediatamente l'espressione per la forza elettromotrice autoindotta: $f_a = -L dI/dt$. Se il circuito con resistenza R è sede di una corrente variabile nel tempo, l'equazione del circuito è

$$RI = f + f_a = f - L \frac{dI}{dt} \quad (7.7)$$

Quando la geometria del circuito è semplice il termine f_a risulta trascurabile, riducendosi quindi al caso stazionario. Quando questo termine aggiuntivo non è trascurabile (ad esempio, per la presenza nel circuito di un solenoide) si indica esplicitamente la presenza di un componente autoinduttivo.

Esempio 4. Dopo aver chiuso un circuito LR (circuito RL in fase di carica) la corrente nel tempo varia secondo la legge

$$I = I_m \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

con $I_m = f/R$ e $\tau = L/R$. Una volta chiuso il circuito quindi la corrente aumenta passando da 0 a I_m , ovvero il valore che verrebbe raggiunto istantaneamente in assenza di induttanza.

Per arrivare a questo risultato bisogna semplicemente risolvere l'equazione del circuito con f costante e condizione iniziale $I(0) = 0$. Con la notazione introdotta l'equazione può essere riscritta come

$$I = I_m - \tau \frac{dI}{dt}$$

Con la sostituzione $I \rightarrow I_m - I = u$ si ha $dI/dt = -du/dt$ e $u(0) = I_m$. Di conseguenza

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u}{\tau}$$

²Quasi-stazionarietà e materiale omogeneo e isotropo

Integrando ambo i membri da 0 a t

$$\ln(u) - \ln(u(0)) = -\frac{t}{\tau}$$

Mediante sostituzione inversa si ottiene l'equazione cercata. Se ora in (7.7) si isola f_a e si inserisce l'andamento appena trovato per la corrente, si ottiene che la differenza di potenziale ai capi dell'induttanza vale $f_a = -f e^{-\frac{t}{\tau}}$, ovvero f_a si oppone quindi ad f ma diminuisce col tempo fino ad azzerarsi.

Teorema 7.4.4 (Legge di Felici). *Sia data una spira con area S e costituita da N avvolgimenti, di resistenza R e immersa in un campo di induzione magnetica costante nel tempo. Detta Q la carica totale che attraversa il circuito*

$$Q = \frac{\Phi_i - \Phi_f}{R}$$

ovvero la carica totale che attraversa il circuito dipende solo dallo stato iniziale e dallo stato finale. In particolare, se la spira viene portata in una zona priva di campo magnetico

$$Q = \frac{NS[B]}{R}$$

con $[B]$ il valor medio del campo di induzione magnetica sulla superficie della spira.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima parte dell'asserto. In assenza di generatori, l'unica forza elettromotrice nel circuito è quella autoindotta la cui espressione è data dalla legge di Faraday-Neumann. Per la prima legge di Ohm la corrente nel circuito allora vale

$$I = \frac{1}{R} f_i = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_S(\mathbf{B})}{\partial t}$$

La carica totale che scorre nel circuito dall'istante iniziale al tempo t allora vale

$$Q = \int_0^t I dt = -\frac{1}{R} \int_0^t \frac{\partial \Phi_S(\mathbf{B})}{\partial t} dt = \frac{\Phi_i - \Phi_f}{R}$$

Per la seconda parte, si ha che la spira è inizialmente posta in quiete nel campo

$$\Phi_i(\mathbf{B}) = N \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = NS \left(\frac{1}{S} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right) = NS[B]$$

Se si porta la spira in una regione in cui il campo di induzione magnetica è nullo $\Phi_f(\mathbf{B}) = 0$ e quindi per quanto mostrato

$$Q = \frac{NS[B]}{R}$$

□

7.5 L'induzione mutua

Si considerino due circuiti C_1 e C_2 in condizioni quasi-stazionarie, immersi in un mezzo omogeneo e isotropo, e si supponga che C_1 sia percorso all'istante t da una corrente $I_1(t)$. Il circuito C_1 è quindi sorgente di un campo $\mathbf{B}_1(t)$ che per la (7.6) è proporzionale a $I_1(t)$. Allora anche il flusso di \mathbf{B}_1 concatenato a C_2 è proporzionale a I_1 , ovvero $\Phi_2(\mathbf{B}_1) = M_{12} I_1$.

Definizione 7.5.1 (Induttanza mutua). Si definisce induttanza mutua il coefficiente di proporzionalità nell'equazione precedente

Ovviamente, mediante un ragionamento analogo si può definire il coefficiente M_{21} . Il seguente teorema garantisce la non ambiguità della definizione.

Teorema 7.5.2.

$$M_{12} = M_{21}$$

Dimostrazione. Ricordando l'equazione definitoria del potenziale vettore (5.5) si può scrivere

$$\Phi_2(\mathbf{B}_1) = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = \int_{S_2} \nabla \times \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = \oint_{l_2} \mathbf{A}_1(\mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{l}_2$$

Sostituendo la (5.7)

$$\Phi_2(\mathbf{B}_1) = I_1 \frac{\mu}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

Confrontando ora quanto ottenuto con la definizione di induzione mutua si ha

$$M_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

L'espressione è indipendente dall'ordine degli indici, si ha quindi la tesi. \square

7.6 L'energia magnetica

Nel caso statico non si è affrontato il discorso relativo all'energia magnetica. Questo perchè la creazione di una configurazione stazionaria di correnti (e campi magnetici associati) richiede che esista un periodo iniziale di transizione in cui le correnti si vanno da 0 al loro valore finale. Per quanto visto in questo capitolo, in questa fase sul sistema vengono indotte delle forze elettromotrici. Siccome l'energia posseduta dal campo magnetico è l'energia che è stata necessaria alla sua produzione questo contributo non può essere tralasciato.

L'oggetto attraverso il quale si passa per studiare l'energia magnetica è l'induttanza. Si consideri quindi un circuito RL , descritto dall'equazione (7.7). Moltiplicando per la quantità $dQ = I dt$ si ottiene

$$f dQ = RI^2 dt + LI dI$$

Dalla definizione di forza elettromotrice emerge che il primo membro dell'equazione è l'energia erogata dal generatore nell'intervallo di tempo dt . Per la legge sull'effetto Joule (4.5) il primo termine del secondo membro rappresenta l'energia dissipata nella resistenza. Il secondo termine al secondo membro è quello invece che non ci sarebbe se non ci fosse induttanza: lo si può quindi interpretare come l'energia da fornire all'induttanza affinché la corrente circolante in essa si porti nel tempo dt dal valore I al valore $I + dI$. L'energia necessaria allora affinché la corrente circolante nell'induttanza si porti da 0 ad I è

$$U_L = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2 \quad (7.8)$$

Questa interpretazione è confermata dal seguente calcolo

Osservazione 7.6.1. L'energia U_L è proprio l'energia posseduta da un'induttanza L percorsa da corrente I

Dimostrazione. Si consideri un circuito percorso da una corrente $I_m = f/R$. All'istante iniziale, il generatore viene staccato dal circuito il quale, viene chiuso in corto circuito. L'equazione del circuito è diventata quindi

$$RI = -L \frac{dI}{dt}, \quad I(0) = I_m$$

la cui soluzione è

$$I = I_m e^{-t/\tau}$$

con $\tau = L/R$. La potenza dissipata per effetto Joule è RI^2 e quindi l'energia totale dissipata dalla resistenza è

$$U_R = \int_0^\infty RI^2 dt = \int_0^\infty \frac{f^2}{R} e^{-2t/\tau} dt = \frac{f^2}{2R^2} L = \frac{1}{2} LI_m^2$$

Per conservazione dell'energia, questa non può che essere l'energia posseduta dall'induttanza prima di chiudere il circuito. \square

U_L rappresenta l'energia potenziale immagazzinata nel dispositivo -ovvero il singolo circuito. Si consideri ora un solenoide percorso da corrente costante all'interno del quale sia parzialmente inserito un nucleo di ferro. Si verifica sperimentalmente che il nucleo viene risucchiato all'interno del solenoide. Questo fenomeno è in apparenza contraddittorio: a nucleo completamente inserito infatti l'induttanza è maggiore³ e quindi lo è anche l'energia del solenoide - ovvero, apparentemente il sistema si è spostato spontaneamente da una configurazione con energia minore ad una con energia maggiore. La spiegazione si basa su un discorso analogo a quello svolto nel paragrafo 4.8 sulla forza fra le maglie di un condensatore: l'ipotesi che la corrente sia costante richiede implicitamente che al circuito sia collegato un generatore in grado di soddisfare questa richiesta.

Si vuole ora calcolare l'energia potenziale U_M immagazzinata in un insieme di più circuiti, soggetti quindi a mutua induzione.

Esempio 5. Si consideri una regione di spazio uniformemente riempita con un materiale con $B/H = \mu$ costante in cui sia presente un campo \mathbf{B} . Si consideri un circuito RL costituito da un solenoide con una lunghezza molto maggiore del suo diametro in fase di carica, descritto dall'equazione (7.7). Il campo interno al solenoide è uniforme e coincide col campo medio. Tenuto conto della (7.6) e della legge di Faraday 7.4.4 si ottiene quindi

$$L \frac{dI}{dt} = NS \frac{dB}{dt}$$

Sostituendo quindi nella (7.7) e moltiplicando per $I dt$, si ricava

$$f I dt = RI^2 dt + INS dB$$

Per le considerazioni fatte all'inizio del paragrafo, l'energia fornita all'induttanza è, indicando con $n = N/l$

$$dU_L = INS dB = S l n I dB = n V I dB$$

³Si ricordi che l'induttanza di un solenoide è $L = \mu_r \mu_0 N^2 S/l$ e che per il ferro $\mu_r > 0$.

dove $V = Sl$ è il volume del solenoide. Dividendo per V in modo da ricavare la densità di energia e tenendo presente la (7.8), si ottiene

$$du_L = \frac{dU_L}{V} = nI dB = H dB$$

Fin'ora, non si è fatto uso dell'ipotesi di μ costante, quindi i risultati ottenuti sono indipendenti dal fatto che il materiale sia paramagnetico, ferromagnetico o diamagnetico⁴. Considerando anche questa ipotesi

$$u_M = u_L(B) = \int_0^B du_L = \int_0^B H dB = \int_0^B \frac{1}{\mu} B dB = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \mu H^2$$

la densità di energia magnetica vale in conclusione

$$u_M = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (7.9)$$

Teorema 7.6.2. *L'energia magnetica per un numero N di circuiti è*

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N M_{ij} I_i I_j \quad (7.10)$$

con $M_{ii} = L_i$, o equivalentemente

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Phi_i \quad (7.11)$$

dove Φ_i è il flusso di tutti i campi di induzione magnetica presenti nel sistema attraverso il circuito i -esimo.

Dimostrazione. Si parte dal caso più semplice di due soli circuiti e si arriva ad una generalizzazione ad N circuiti. Il sistema di due circuiti è descritto da

$$\begin{cases} f_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M_{12} \frac{dI_2}{dt} + R_1 I_1 \\ f_2 = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M_{21} \frac{dI_1}{dt} + R_2 I_2 \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per $dQ_1 = I_1 dt$ e la seconda per $dQ_2 = I_2 dt$, ricordando che $M_{21} = M_{12}$, poi sommando membro a membro si ottiene

$$(f_1 I_1 dt + f_2 I_2 dt) = (I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2) dt + [L_1 I_1 dI_1 + L_2 I_2 dI_2 + M_{12} (I_1 dI_2 + I_2 dI_1)]$$

Per confronto, il membro fra parentesi quadre rappresenta il differenziale di energia magnetica, ovvero l'energia da fornire per incrementare di dI le correnti I_1 e I_2 .

$$dU_M = L_1 I_1 dI_1 + L_2 I_2 dI_2 + M_{12} (I_1 dI_2 + I_2 dI_1) = d \left(\frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2 \right)$$

Integrando da 0 ai valori finali I_1, I_2

$$U_M = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

⁴si noti invece l'ipotesi fortemente restrittiva di avere a che fare con un solenoide, ovvero con un campo uniforme su un volume di geometria semplice

dove i primi due termini rappresentano l'energia dei singoli circuiti, mentre il terzo rappresenta l'energia di mutua induzione. Per l'uguaglianza fra i coefficienti di mutua induzione è possibile scrivere $M_{12} I_1 I_2 = 1/2(M_{12} I_1 I_2 + M_{21} I_2 I_1)$. Chiamando quindi $L_1 = M_{11}$ ed $L_2 = M_{22}$ la formula ottenuta può essere scritta come

$$U_M = \frac{1}{2}(M_{11}I_1^2 + M_{12}I_1I_2 + M_{21}I_2I_1 + M_{22}I_2^2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 M_{ij}I_iI_j$$

Raccogliendo I_1 per i primi due termini del secondo membro e I_2 per gli altri due, si ha, dalle definizioni di induttanza e di coefficiente di mutua induttanza:

$$U_M = \frac{1}{2}I_1(M_{11}I_1 + M_{12}I_2) + \frac{1}{2}I_2(M_{21}I_1 + M_{22}I_2) = \frac{1}{2}(I_1\Phi_1 + I_2\Phi_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 I_i\Phi_i$$

Entrambe le espressioni trovate per U_M sono immediatamente generalizzabili al caso di N circuiti. \square

Teorema 7.6.3. *Le forze agenti su un circuito percorso da corrente I immerso in un campo magnetico esterno costante \mathbf{B}_{ext} sono date dal gradiente (non cambiato di segno) dell'energia potenziale, che può essere scritta nel caso di un singolo circuito come*

$$U = I\Phi(\mathbf{B}_{ext})$$

Dimostrazione. Il sistema può essere schematizzato come costituito da N circuiti, $N - 1$ dei quali sono le sorgenti di \mathbf{B}_{ext} . Sia il circuito k -esimo percorso da corrente I_k e abbia resistenza complessiva R_k . Si immagini di applicare una traslazione virtuale a questo circuito mediante una forza esterna $\mathbf{F}^{(k)}$ che imprime sul circuito una velocità $\mathbf{v}^{(k)}$ piccola, in modo tale che sia trascurabile l'energia cinetica associata a questo movimento. L'energia del circuito, ovvero l'energia magnetica⁵, varierà come conseguenza di tre contributi: $\mathbf{F}^{(k)} \cdot d\mathbf{x}$ lavoro compiuto dalla forza esterna; dL_G lavoro compiuto dai generatori nel circuito; dL_R lavoro dissipato (e quindi negativo) per effetto Joule. Per la conservazione dell'energia, rapportando tutto all'unità di tempo

$$\frac{dU_M}{dt} = \mathbf{F}^{(k)} \cdot d\mathbf{v} + \frac{dL_G}{dt} - \frac{dL_R}{dt}$$

Ricordando che

$$\begin{aligned} \frac{dL_G}{dt} &= \sum I_j f_j = \sum I_j (I_j R_j + \frac{d\Phi_j}{dt}) \\ \frac{dL_R}{dt} &= \sum I_j^2 R_j \\ \frac{dU_M}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum I_j \Phi_j \right) = \frac{1}{2} \sum I_j \frac{d\Phi_j}{dt} \end{aligned}$$

Si ha

$$\mathbf{F}^{(k)} \cdot d\mathbf{v} = -\frac{1}{2} \sum I_j \frac{d\Phi_j}{dt} = -\frac{dU_M}{dt}$$

Per garantire una traslazione virtuale a velocità trascurabile la forza esterna deve essere uguale in modulo e opposta alla forza $\mathbf{f}^{(k)}$ che il campo magnetico esercita sul

⁵L'energia magnetica è l'energia potenziale totale immagazzinata nel circuito in quanto non sono presenti condensatori.

circuito k -esimo. Ne segue che $\mathbf{f}^{(k)} \cdot d\mathbf{x} = dU_M$, ovvero la forza è data dal gradiente di U_M .

Svolgendo esplicitamente il gradiente dell'energia magnetica, se è costante la corrente ed il circuito è indeformabile (in modo che L sia costante), le derivate dell'energia magnetica totale coincidono con le sole derivate dell'energia di accoppiamento, ovvero dell'energia dovuta all'interazione del circuito k -esimo con gli altri $N - 1$ circuiti

$$U_{acc} = \sum_{j \neq k} I_k M_{kj} I_j = I_k \Phi_{acc}^{(k)}(\mathbf{B})$$

dove $\Phi_{acc}^{(k)}(\mathbf{B})$ è il flusso concatenato col k -esimo circuito, prodotto da tutti gli altri circuiti. Ma questo è proprio il flusso del campo esterno attraverso il circuito k -esimo, ovvero la tesi. \square

Quelle ottenute sono espressioni di tipo integrale. È interessante cercare di trovare delle relazioni locali: queste forme si riveleranno utili sia per generalizzare quanto visto fin'ora al caso non stazionario, sia per trovare la densità di energia nella forma il più generale possibile.

Teorema 7.6.4. *Dato sistema costituito da N circuiti e un volume τ che racchiuda tutti i circuiti, l'energia magnetica del sistema è:*

$$U_M = \frac{1}{2} \int_{\tau} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{A} d\tau \quad (7.12)$$

Dimostrazione. In un sistema di N circuiti si consideri nel dettaglio il circuito k -esimo. Questo sarà costituito da un conduttore di sezione non nulla σ_k chiuso su se stesso e percorso da una corrente $I_k = \int_{\sigma_k} \mathbf{J}_k \cdot d\sigma_k$. Si consideri la superficie S_k che abbia l_k come contorno. Per la (7.11)

$$\begin{aligned} U_M &= \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_k = \frac{1}{2} \sum_k \left[\int_{\sigma_k} \mathbf{J}_k \cdot d\sigma_k \int_{S_k} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_k \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \left[\int_{\sigma_k} \mathbf{J}_k \cdot d\sigma_k \int_{S_k} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}_k \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \left[\int_{\sigma_k} \mathbf{J}_k \cdot d\sigma_k \oint_{l_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_k \right] \end{aligned}$$

Siccome $d\mathbf{l}_k$, \mathbf{J}_k , $d\sigma_k$ sono paralleli, indicando con $\hat{\mathbf{l}}_k$ la direzioni di questi vettori, la relazione può essere riscritta come

$$\begin{aligned} U_M &= \frac{1}{2} \sum_k \left[\int_{\sigma_k} J_k d\sigma_k \oint_{l_k} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{l}}_k dl_k \right] = \frac{1}{2} \sum_k \int_{\sigma_k} \oint_{l_k} J_k \hat{\mathbf{l}}_k \cdot \mathbf{A} d\sigma_k dl_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \int_{\tau_k} \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{A} d\tau_k \end{aligned}$$

Siccome la densità di corrente è nulla al di fuori dei circuiti, si può eliminare la sommatoria trasformando l'integrale su τ_k in un integrale su un qualsiasi volume τ che racchiuda tutti i circuiti, ottenendo la tesi nel caso stazionario.

Sostituendo la densità di corrente con la densità di corrente generalizzata, si ottiene la tesi nel caso generale. \square

Teorema 7.6.5. *Data una densità di corrente \mathbf{J} l'energia magnetica vale*

$$U_M = \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{2} \int_\tau \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\tau \quad (7.13)$$

Dimostrazione. Per la quarta equazione di Maxwell nel caso non stazionario, l'integrando nella (7.12) può essere riscritto come

$$\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{A} = (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A}$$

Tenuto conto dell'identità (B.9)

$$(\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$$

E indicando con S la superficie che racchiude il volume τ , U_M può essere riscritta come

$$\begin{aligned} U_M &= \frac{1}{2} \int_\tau \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) d\tau + \frac{1}{2} \int_\tau \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{2} \int_\tau \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\tau \end{aligned}$$

□

L'equazione ottenuta è formalmente analoga alla (1.11): valgono tutte le considerazioni fatte in quel caso e in particolare

Corollario 7.6.6. *Se si prende in considerazione tutto lo spazio, allora l'energia vale*

$$U_M = \int u d\tau \quad \text{con } u = \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \quad (7.14)$$

Un'osservazione su quanto ottenuto. Sia l'integranda della (7.12) che la (7.14) godono della proprietà che il loro integrale esteso a tutto lo spazio sia pari all'energia magnetica. Di fatto però, le due funzioni non sono necessariamente uguali punto per punto. Sono allora considerazioni di carattere puramente fisico che portano ad interpretare la seconda come l'effettiva densità di energia.

Si conclude la sezione con un confronto fra l'energia magnetica e l'energia elettrostatica. La prima analogia è fra le formule per l'energia di un induttore (7.8) e quella per un condensatore (1.21). In entrambi i casi la struttura della formula è quella di un prodotto fra l'integrale della densità della sorgente del campo e la caratteristica del circuito. Inoltre, sia nel calcolo delle forze meccaniche dovute all'energia magnetica che di quelle dovute all'energia elettrostatica si prendono le derivate positive dell'energia, contrariamente a quanto si fa nel caso meccanico.

Capitolo 8

Il campo elettromagnetico

Si vuole studiare qui cosa succede facendo cadere l'ipotesi di quasi stazionarietà.

8.1 Equazioni di Maxwell e campo elettromagnetico

I campi \mathbf{E} e \mathbf{B} , così come i campi \mathbf{D} e \mathbf{H} , sono legati alle caratteristiche delle sorgenti dalle equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Alcune considerazioni sulle equazioni di Maxwell. Le sorgenti del campo elettrico (ρ) e del campo magnetico (\mathbf{J}) non sono fra loro indipendenti ma sono legate dall'equazione di continuità (3.2) e ciò riflette il fatto che fisicamente le stesse cariche elettriche, che danno luogo ad una densità di carica ρ , quando sono in movimento danno luogo ad una densità di corrente. Il fatto che le cariche siano ferme o in movimento dipende dal sistema di riferimento scelto per descrivere il fenomeno e quindi è relativo il fatto di avere a che fare con un campo elettrico o con un campo magnetico. Nelle quattro equazioni di Maxwell inoltre è evidente una certa asimmetria: al secondo membro della prima compare la densità di carica, mentre il secondo membro della seconda è sempre nullo; allo stesso modo nel secondo membro della terza non compare un addendo equivalente alla densità di corrente presente nella quarta. Questo riflette il fatto che non c'è evidenza sperimentale dell'esistenza del monopolio magnetico, l'equivalente magnetico della carica elettrica. Infine, le equazioni di Maxwell mostrano come la derivata temporale di \mathbf{E} sia una delle sorgenti di \mathbf{B} e viceversa. Questa circostanza giustifica una trattazione unificata dei due fenomeni mediante un unico campo detto *campo elettromagnetico*. Bisogna osservare che un campo elettromagnetico può essere presente in regioni di spazio prive di sorgenti e, più avanti, si dimostrerà che esso possiede quantità di moto, energia e momento angolare. Si tratta quindi di un'entità fisica e non di un mero artificio introdotto per trattare i due fenomeni in maniera unificata. Nella trattazione del campo elettromagnetico si faranno due fondamentali approssimazioni: si considereranno le distribuzioni di carica come continue, sebbene a livello microscopico la carica sia quantizzata e si considereranno i campi come funzioni continue (approssimazio-

ne classica) nonostante la meccanica quantistica prescriva che il campo elettromagnetico sia quantizzato in fotoni. Queste approssimazioni sono ragionevoli per la maggior parte dei fenomeni macroscopici.

Dalle considerazioni fatte emerge chiaramente l'importanza di studiare le proprietà delle equazioni di Maxwell. Queste sono otto equazioni scalari in dodici incognite ($\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$), per cui è necessario fornire delle relazioni aggiuntive affinché siano risolubili: queste sono le relazioni fenomenologiche che legano \mathbf{E} a \mathbf{D} e \mathbf{B} a \mathbf{H} . In questo modo le incognite si riducono a sei. Le otto equazioni non sono perciò indipendenti.

Osservazione 8.1.1. *La seconda equazione di Maxwell può essere dedotta dalla terza, analogamente la prima può essere dedotta dalla quarta*¹.

Dimostrazione. Applicando l'operatore divergenza alla terza equazione di Maxwell si ha

$$-\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0$$

dove si è usato il teorema di Schwarz ed il fatto che la divergenza del rotore è nulla. Questo implica che $\nabla \cdot \mathbf{B} = \text{cost}$. Prima che venissero realizzate le sorgenti di \mathbf{B} , il campo era nullo in tutto lo spazio e anche la sua divergenza doveva quindi essere nulla. Siccome tutte le equazioni usate sono indipendenti da ciò che accade alle sorgenti, la costante non può che essere 0. In maniera analoga, applicando la divergenza alla quarta equazione di Maxwell si ha

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial t} (-\rho + \nabla \cdot \mathbf{D})$$

Avendo sostituito $\nabla \cdot \mathbf{J}$ con l'espressione fornita dall'equazione di continuità (3.2). Ne segue che $-\rho + \nabla \cdot \mathbf{D} = \text{cost}$ dalla quale si arriva alla prima equazione di Maxwell per considerazioni analoghe a quelle fatte nel caso precedente. \square

Ne segue quindi che tutte le proprietà dei campi elettrici e magnetici sono contenute nella terza e nella quarta equazione di Maxwell, ovvero un sistema di sei equazioni in sei incognite. Specificata la configurazione spazio-temporale delle sorgenti ρ e \mathbf{J} (configurazione che dovrà rispettare l'equazione di continuità), assegnate le condizioni iniziali e le condizioni al contorno, le equazioni di Maxwell corredate dalle opportune relazioni fenomenologiche consentono in linea di principio di calcolare i campi, tramite i quali è immediatamente nota l'azione subita da una carica campione (grazie alla relazione $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$).

Un caso in cui è particolarmente semplice risolvere le equazioni di Maxwell è quello del campo elettromagnetico in cui un solo materiale isotropo e omogeneo riempia lo spazio. In questo caso è necessario aggiungere alle sorgenti macroscopiche dei campi anche le correnti e le cariche microscopiche che i campi inducono nel materiale, che non sono note a priori proprio perchè indotte dal campo. Nell'ipotesi però che il materiale sia omogeneo ed isotropo (e che non sia ferromagnetico, a meno che $B(H)$ sia una curva univoca e lineare), è sufficiente considerare le equazioni di Maxwell analoghe a quelle nel vuoto, con ε e μ al posto di ε_0 e μ_0 , ovvero introducendo $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ e $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$. I risultati ottenuti nel vuoto restano quindi validi. Nel caso in cui diverse porzioni dello spazio siano rimepate con materiali diversi, il

¹la dimostrazione viene presentata usando le equazioni nel vuoto. Nel caso dei materiali si procede in modo analogo.

problema viene trattato risolvendo le equazioni di Maxwell in ciascuna porzione di spazio e imponendo poi le condizioni di raccordo

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{t1} = E_{t2} \\ D_{n1} = D_{n2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_{t1} = H_{t2} \\ B_{n1} = B_{n2} \end{array} \right.$$

che ovviamente, possono essere semplificate come visto sopra nel caso in cui tutti i materiali siano isotropi e omogenei.

È possibile dalle equazioni di Maxwell ricavare informazioni sulle caratteristiche delle sorgenti microscopiche indotte dai campi, riscrivendo le equazioni usando i vettori polarizzazione elettrica \mathbf{P} e magnetica \mathbf{M} al posto di \mathbf{D} ed \mathbf{H} , per semplice inversione delle definizioni

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \end{aligned}$$

Si ottiene in questo modo

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho - \nabla \cdot \mathbf{P} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \end{aligned}$$

Queste 8 equazioni (ricoducibili a 6 fra loro indipendenti) non sono sufficienti a ricavare le 12 grandezze scalari \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{P} , \mathbf{M} a meno che i vettori di polarizzazione siano noti a priori, ovvero siano note a priori le condizioni che li legano ai relativi campi. Questo non avviene praticamente mai ma una volta risolte le equazioni con \mathbf{D} e \mathbf{H} è possibile determinare le caratteristiche delle sorgenti microscopiche per confronto. Infatti, rispetto alle equazioni di Maxwell nel vuoto, le equazioni appena ricavate differiscono per tre termini aggiuntivi:

$$\rho'_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad \mathbf{J}'_M = \nabla \times \mathbf{M} \quad \mathbf{J}'_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

che rappresentano rispettivamente la densità di carica di polarizzazione, la densità di corrente di magnetizzazione e la densità di corrente di polarizzazione elettrica, ovvero la densità di corrente dovuta al fatto che quando un dielettrico si polarizza necessariamente c'è un movimento ordinato di cariche all'interno del materiale. Quest'ultimo è un termine caratteristico del caso non stazionario a differenza dei primi due che invece erano presenti già nel caso stazionario.

Da qui in avanti si farà riferimento solo ed esclusivamente a mezzi isotropi e omogenei.

8.2 Energia e vettore di Poynting

I fenomeni elettromagnetici sono soggetti al principio di conservazione dell'energia. Questo significa che l'energia del campo magnetico più l'energia dei sistemi con cui il campo interagisce deve essere costante nel tempo. Si introduce la seguente definizione

Definizione 8.2.1 (vettore di Poynting). Si definisce vettore di Poynting

$$\mathbf{I} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu} \quad (8.1)$$

Si ha che $[I] = J/(m^2 s) = W/m^2$.

Teorema 8.2.2 (teorema di Poynting). *Detta S una superficie chiusa di forma costante che racchiude il campo elettromagnetico e detto τ il volume interno a questa superficie, si ha che la variazione di energia del campo magnetico vale*

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \int_S \mathbf{I} \cdot d\mathbf{S} + \int_\tau \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau \quad (8.2)$$

Dimostrazione. L'energia posseduta dal campo elettromagnetico contenuto in S è

$$U = \int_\tau \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\tau + \int_\tau \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\tau$$

Derivando rispetto al tempo, tenendo conto che $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ e $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{1}{2} \int_\tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (E^2 \epsilon) + (H^2 \mu) \right] d\tau = \frac{1}{2} \int_\tau \left[2 \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} \epsilon + 2 \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{H} \mu \right] d\tau \\ &= \int_\tau \left[\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} + \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{H} \right] d\tau \end{aligned}$$

Sostituendo le derivate sotto al segno di integrale con le espressioni fornite dalla terza e dalla quarta equazione di Maxwell

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int_\tau \left[(\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} - (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} \right] d\tau$$

Per l'identità (B.9)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \int_\tau \left[\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \right] d\tau$$

Separando ora i due integrali e usando il teorema della divergenza si ottiene quindi

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} + \int_\tau \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau = \int_S \mathbf{I} \cdot d\mathbf{S} + \int_\tau \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau$$

□

Si vuole ora dare un'interpretazione fisica a questo risultato. Il flusso del vettore di Poynting, se positivo, ovvero se \mathbf{I} è "uscente" dal volume, comporta una diminuzione di energia nel tempo. \mathbf{I} rappresenta lo spostamento di energia dentro o fuori dal volume preso in considerazione. Per afferrare il concetto, può essere utile scrivere il risultato del teorema in forma locale $-\frac{\partial}{\partial t} \int_\tau u d\tau = \int_\tau \nabla \cdot \mathbf{I} d\tau + \int_\tau \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau$ da cui segue che $\frac{\partial}{\partial t} u = \nabla \cdot \mathbf{I} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$. Se non fosse presente il termine $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ si avrebbe un'equazione di continuità per l'energia:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Questa equazione afferma che se si ha una variazione di energia si deve avere anche una "corrente di energia" che la porti da qualche parte. Emerge a questo punto il

significato del termine $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ che rappresenta una variazione dell'energia elettromagnetica per trasformazione da (o in) altre forme di energia: è in pratica l'energia ceduta o ricevuta dalla materia per azione del campo elettromagnetico sulle cariche che la costituiscono. Si considerino a tal proposito le cariche contenute in una porzione infinitesima $d\tau$ del volume τ . Il numero di cariche per unità di volume è $n = dN/d\tau$. La forza esercitata dal campo elettromagnetico su $d\tau$ è

$$d\mathbf{F} = dN q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}) = nq(\mathbf{E} + \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}) d\tau$$

La potenza trasferita dal campo magnetico alle cariche libere presenti nell'elemento di volume è dunque

$$dP = d\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_d = nq\mathbf{v}_d \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}) d\tau = nq\mathbf{v}_d \cdot \mathbf{E} d\tau = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau \quad (8.3)$$

Risulta subito evidente dai passaggi come la forza causata dal campo magnetico non compiendo alcun lavoro non contribuisca alla variazione di potenza.

Complessivamente allora la (8.2) dice che la variazione di energia è dovuta sia all'interazione del campo con la materia contenuta nel volume che al flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie che delimita il volume. Il vettore di Poynting è allora quel vettore il cui flusso rappresenta l'energia del campo elettromagnetico che sfugge attraverso S .

8.3 Potenziali elettrodinamici

Oltre che tramite le equazioni di Maxwell, tutte le caratteristiche del campo elettromagnetico possono essere ottenute fornendo i quattro potenziali generalizzati V, \mathbf{A} . Il fatto che per ricavare i potenziali, da cui è deducibile il campo elettromagnetico, servano quattro equazioni e che ne servano sei per dedurlo a partire dalle equazioni di Maxwell non è una contraddizione: le equazioni di Maxwell infatti contengono al loro interno anche le condizioni affinché il campo elettromagnetico ammetta potenziale - condizioni che sono date per valide nel momento in cui si assume l'esistenza di un potenziale.

Il potenziale vettore \mathbf{A} è definito da una relazione analoga a quella introdotta nel paragrafo 5.3 in quanto la seconda equazione di Maxwell, condizione necessaria per la validità della definizione, non varia fra caso stazionario e non stazionario. Per quanto riguarda invece il potenziale scalare V , è necessaria una generalizzazione: nel caso stazionario l'esistenza del potenziale elettrico è garantita dal fatto che il campo elettrico sia conservativo, ma nel caso non stazionario questo non è più vero. Introducendo l'equazione definitoria del potenziale vettore (5.5) nella terza equazione di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

Da cui

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Il vettore fra parentesi è irrotazionale e ammette quindi potenziale

Definizione 8.3.1 (potenziale scalare). Si definisce potenziale scalare una funzione che soddisfi la condizione

$$-\nabla V = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (8.4)$$

Si osservi come nel caso stazionario questa definizione si riduca a quella fornita nel paragrafo 1.4. Condizione necessaria all'introduzione dei potenziali è la validità della seconda e della terza equazione di Maxwell, ovvero di quelle omogenee², che risultano quindi identicamente soddisfatte una volta sostituiti al loro interno i campi con i potenziali:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla \times \nabla V = 0\end{aligned}$$

Per ricavare i potenziali è quindi necessario usare la prima e la quarta equazione di Maxwell. Sostituendo le equazioni definitorie dei potenziali all'interno di queste ultime si ottiene

$$\begin{aligned}\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) &= -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} \right) &= -\mu \mathbf{J}\end{aligned}$$

L'aver introdotto i potenziali non sembra aver semplificato di molto le equazioni da risolvere per trovare le caratteristiche del campo elettromagnetico, dato che queste quattro equazioni non sono disaccoppiate. Si osservi che se i termini fra parentesi fossero nulli, le equazioni risulterebbero disaccoppiate e assumerebbero una forma molto semplice. Siccome i potenziali non sono univocamente definiti risulta allora importante cercare la trasformazione più generale che lasci invariati i campi e vedere se tramite questa sia possibile semplificare le equazioni.

Teorema 8.3.2. *Dati due potenziali \mathbf{A} e V che soddisfano rispettivamente la (5.5) e la (8.4) si possono produrre dei potenziali \mathbf{A}' e V' tali che da entrambe le coppie di potenziali sia deducibile lo stesso campo elettromagnetico. Affinchè questo accada la trasformazione che lega le due coppie di potenziali deve essere del tipo*

$$\begin{cases} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \phi \\ V \rightarrow V' = V - \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{cases} \quad (8.5)$$

con ϕ una funzione scalare di classe C^2 .

Dimostrazione. La prima delle due equazioni ha dimostrazione immediata, già affrontata a suo tempo nel paragrafo 5.3. Per quanto riguarda la seconda invece

$$\mathbf{E}' = -\nabla V' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla V + \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \phi) = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}$$

□

La trasformazione (8.5) è detta *trasformazione di gauge* e la funzione ϕ è detta *funzione di gauge*. Un'opportuna trasformazione di gauge permette di trovare delle equazioni disaccoppiate per i potenziali.

Se i potenziali elettrodinamici soddisfano la condizione, detta condizione di Lorentz,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (8.6)$$

²In queste due equazioni infatti non compaiono i termini noti dovuti alle sorgenti.

il sistema di equazioni si riducono al sistema di quattro equazioni disaccoppiate

$$\begin{aligned}\nabla^2 V - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu \mathbf{J}\end{aligned}\quad (8.7)$$

Quando i potenziali soddisfano la condizione di Lorentz si dice che essi appartengono alla *gauge di Lorentz*.

Teorema 8.3.3. *Data una coppia di potenziali \mathbf{A} e V è sempre possibile trovare una funzione ϕ affinché i potenziali \mathbf{A}' e V' generati a partire da questi due tramite trasformazione di gauge appartengano alla gauge di Lorentz.*

Dimostrazione. Si vuole dimostrare che è possibile determinare ϕ attraverso un'equazione differenziale che ammette sempre soluzione. Bisogna avere

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{A}' + \varepsilon\mu \frac{\partial V'}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla^2 \phi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

Da cui segue

$$\nabla^2 \phi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

Per ipotesi il secondo membro è noto perchè sono noti i potenziali e quindi questa equazione ammette soluzione. \square

La dimensione del prodotto $\varepsilon\mu$ è quella dell'inverso di una velocità al quadrato ed è quindi possibile riscrivere le equazioni per i potenziali usando l'operatore dalembertiano

$$\begin{aligned}\square V &= -\frac{\rho}{\varepsilon} \\ \square \mathbf{A} &= -\mu \mathbf{J}\end{aligned}$$

In questo modo diventa lampante il fatto che le equazioni per i potenziali nel caso non stazionario sono analoghe a quelle del caso stazionario, con l'unica differenza di sostituire l'operatore laplaciano col dalembertiano: sono equazioni di onde con sorgente. Questa gauge risulta particolarmente adatta a descrivere problemi radiativi. In questa gauge una soluzione particolare e degna di nota, in quanto immediata generalizzazione della soluzione per il caso stazionario, è quella dei *potenziali ritardati*.

Teorema 8.3.4 (Potenziali ritardati). *Se le sorgenti sono localizzate in una porzione di spazio finita le (8.3) ammettono come soluzione*

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \Delta r/v)}{\Delta r} d\tau' \\ V(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\tau} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \Delta r/v)}{\Delta r} d\tau'\end{aligned}\quad (8.8)$$

avendo indicato $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$

Il nome *potenziali ritardati* assume senso nel momento in cui si osserva che la densità di corrente e la densità di carica, in ogni posizione \mathbf{r}' non vanno calcolate al tempo a cui si sta calcolando il potenziale ma ad un istante $t' = t - \Delta r/v$. Si può intuire come questo tempo sia quello impegnato dal segnale elettromagnetico per percorrere lo spazio tra la posizione \mathbf{r}' e la posizione \mathbf{r} in cui si sta calcolando il potenziale. La soluzione più generale possibile si ottiene sommando ai potenziali ritardati la soluzione generale delle equazioni omogenee corrispondenti alle (8.3). Nel prossimo capitolo si osserverà come queste soluzioni siano delle onde. A grande distanza dalle sorgenti localizzate, i potenziali ritardati vanno a zero molto più velocemente delle soluzioni omogenee: a grande distanza quindi permangono solo le onde elettromagnetiche.

Per descrivere i problemi di interazione radiazione materia la gauge più utile è la *gauge di Coulomb*. Se i potenziali elettrodinamici soddisfano la condizione

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (8.9)$$

allora le equazioni per i potenziali si riducono al sistema di quattro equazioni disaccoppiate

$$\begin{aligned} \nabla^2 V &= -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= \epsilon\mu \nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \mathbf{J} \end{aligned} \quad (8.10)$$

In questa gauge il potenziale scalare è quindi analogo al potenziale elettrico, con l'unica differenza che la densità di carica dipende dal tempo

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'$$

La gauge di Coulomb è utile in assenza di sorgenti: il potenziale scalare è in questo caso nullo e l'equazione per il potenziale vettore diventa $\square \mathbf{A} = 0$; i campi diventano

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Ecco quindi che risulta giustificato il percorso seguito in questo paragrafo: per determinare i potenziali è sufficiente risolvere quattro equazioni differenziali disaccoppiate. Una volta noti i potenziali è possibile risalire al campo elettromagnetico tramite semplici operazioni di derivazione. Introducendo i potenziali l'unico ostacolo al calcolo del campo si trova nella struttura complicata delle funzioni che entrano in gioco ma viene eliminato qualsiasi problema relativo alla struttura delle equazioni.

Capitolo 9

Le onde elettromagnetiche

9.1 Equazioni delle onde

Una delle soluzioni più importanti delle equazioni di Maxwell è quella delle onde elettromagnetiche.

Osservazione 9.1.1. *Dato un dielettrico neutro, illimitato, isotropo, omogeneo e perfetto, si hanno le equazioni*

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}\tag{9.1}$$

Dimostrazione. L'ipotesi di dielettrico illimitato, isotropo e omogeneo permette di usare le equazioni di Maxwell in forma analoga a quelle nel vuoto previa sostituzione di ε_0 e μ_0 con ε e μ . Per l'ipotesi di dielettrico perfetto si ha l'assenza di correnti macroscopiche e quindi $\mathbf{J} = 0$, mentre per l'ipotesi di neutralità $\rho = 0$. Perciò si ha

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Applicando l'operatore rotore alla terza equazione di Maxwell, per la (B.6) ricordando che per la prima equazione di Maxwell la divergenza del campo elettrico è nulla,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B})$$

Derivando rispetto al tempo la quarta equazione di Maxwell si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Per sostituzione si ha l'equazione nella tesi relativa al campo elettrico. Applicando il rotore alla quarta equazione di Maxwell e derivando temporalmente la terza, si ottiene in maniera del tutto analoga l'equazione relativa al campo magnetico. \square

L'aver applicato l'operatore rotore rende le equazioni ottenute non equivalenti alle equazioni di Maxwell. Se un campo \mathbf{E} soddisfa le equazioni di Maxwell infatti, le (9.1) sono soddisfatte anche da un campo $\mathbf{E} + \mathbf{E}'$, con \mathbf{E}' un qualunque campo irrotazionale. Le equazioni ottenute possono così avere per soluzioni anche campi a divergenza non nulla a differenza delle equazioni di Maxwell: la solenoidalità delle soluzioni deve essere imposta come condizione aggiuntiva. Per le proprietà delle onde, il coefficiente $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ rappresenta la velocità di propagazione dell'onda. In effetti dimensionalmente questo coefficiente è proprio una velocità. Nel vuoto si ha $v = c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ che risulta essere sperimentalmente uguale alla velocità della luce. Questo dimostra che la luce è un'onda elettromagnetica.

Alla luce di queste considerazioni si può dare un significato fisico concreto a quanto visto in conclusione al precedente capitolo sui potenziali elettrodinamici in quanto le equazioni qui ottenute hanno la stessa forma delle (8.3). I risultati ottenuti nella gauge di Coulomb, ovvero

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

danno informazioni sulle onde elettromagnetiche: il campo elettrico ed il campo magnetico sono ortogonali fra loro e ortogonali alla direzione di propagazione dell'onda; il rapporto fra i loro moduli vale $v = (\epsilon\mu)^{-\frac{1}{2}}$. [PERCHÈ?]

9.2 Onde piane

La forma più semplice della soluzione all'equazione delle onde è quella di onda piana, che corrisponde ad una configurazione piana delle condizioni al contorno, ovvero quella in cui \mathbf{E} e \mathbf{B} assumono lo stesso valore per tutti i punti di ogni piano ortogonale alla direzione di propagazione¹ che può essere presa, senza perdita di generalità, parallela all'asse x - o, in altri termini, ogni componente dei campi è indipendente da y e z . In questo caso ciascuna delle sei componenti del campo elettromagnetico soddisfa un'equazione di D'Alembert, ovvero un'equazione nella forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

La cui soluzione generale è quindi del tipo

$$\psi(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad (9.2)$$

Teorema 9.2.1. *I campi elettrico e magnetico di un'onda elettromagnetica piana che si propaga in un dielettrico illimitato, isotropo, omogeneo, perfetto e neutro sono legati dalla seguente relazione*

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v} \quad \frac{E}{B} = v$$

Il teorema si dimostra banalmente grazie ai tre lemmi di seguito esposti, i quali derivano dal fatto che per un dielettrico illimitato, omogeneo, isotropo, perfetto e neutro le equazioni di Maxwell in forma scalare sono

¹Fisicamente questa condizione non si verifica mai, tuttavia è un limite per molti casi di interesse pratico come ad esempio lo studio di una piccola porzione di spazio molto lontana dalla sorgente (approssimazione di sorgente puntiforme).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{array} \right.$$

Lemma 9.2.2. *In un dielettrico isotropo, illimitato, omogeneo e perfetto, le componenti dei campi parallele alla direzione di propagazione non contribuiscono alla propagazione del campo.*

Dimostrazione. Data l'equazione di D'Alembert, si vuole dimostrare che E_x , B_x sono costanti nel tempo e uniformi nello spazio. Questo può essere visto facilmente osservando che nell'ipotesi di onda piana (campi indipendenti da y e z) e di dielettrico neutro e perfetto le quattro equazioni di Maxwell danno, per la componente x dei campi:

$$\begin{aligned} I &\Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \\ II &\Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \\ III &\Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \\ IV &\Rightarrow \epsilon\mu \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

Dato che non contribuiscono, le componenti dei campi in direzione x possono essere considerate nulle. \square

Le onde elettromagnetiche sono fenomeni puramente trasversali.

Lemma 9.2.3. *In un'onda elettromagnetica piana campo elettrico e campo magnetico sono fra loro ortogonali.*

Dimostrazione. Dalle equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned} III &\Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ III &\Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \\ IV &\Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ IV &\Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{aligned}$$

Si osservi come se il campo elettromagnetico ha una componente E_z deve avere anche una componente B_y e viceversa. Per il principio di sovrapposizione si può ottenere una soluzione generale sommando due soluzioni linearmente indipendenti, una con \mathbf{E} diretto solo lungo y e una con \mathbf{E} diretto solo lungo z , opportunamente pesate. Si può allora portare avanti la discussione considerando il campo elettrico

diretto solo in direzione una direzione, ad esempio y , ed il campo magnetico diretto di conseguenza solo in direzione z .

$$E_z = 0 \implies \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0, \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0$$

Ovvero, all'onda elettromagnetica non dà alcun contributo la componente del campo magnetico diretta lungo la direzione y e può quindi essere considerata nulla. Ma allora dato che per quanto dimostrato precedentemente era nulla la componente x dei campi, si ha che $\mathbf{E} = E_y$ e quindi $\mathbf{B} = B_z$. Siccome non si ha perdita di generalità nell'aver scelto una direzione fissa per i campi, si ha l'ortogonalità. \square

Un'onda in cui i campi sono orientati in direzione fissa si dice avere polarizzazione lineare.

Lemma 9.2.4. *In un'onda elettromagnetica piana si ha*

$$\frac{E_y}{B_z} = \frac{E}{B} = \pm v$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione di questo teorema sfrutta l'equazione di Maxwell

$$III \implies \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\epsilon\mu \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Per il lemma precedente il campo elettrico è diretto solo in direzione y mentre il campo magnetico è diretto solo in direzione z . L'equazione delle onde diventa perciò, per i due campi

$$\mathbf{E}(x \mp vt) = E_y(x \mp vt) = E_y(\xi)$$

$$\mathbf{B}(x \mp vt) = B_z(x \mp vt) = B_z(\xi)$$

Si osservi quindi come

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{dE_y}{d\xi} \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{dB_z}{d\xi} \mp v$$

L'equazione di Maxwell può essere scritta come

$$\frac{dE_y}{d\xi} = \pm v \frac{dB_z}{d\xi}$$

Che integrata, ponendo ragionevolmente a 0 la costante arbitraria dà $E_y = \pm v B_z$. \square

Sostituendo $B = \mu H$ si ha che $E/H = \sqrt{\mu/\epsilon} = Z$. Z ha le dimensioni di una resistenza e viene chiamata *impedenza caratteristica* del materiale. $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 377\Omega$. Si osservi come la relazione che esprime il rapporto fra moduli del campo elettrico e del campo magnetico non costituisca una relazione di confronto fisicamente significativa in quanto lega fra loro grandezze di dimensioni diverse. Il seguente risultato, corollario del teorema appena dimostrato, fornisce un risultato relativo a questo confronto.

Corollario 9.2.5. *In un'onda elettromagnetica piana, per ogni tempo e per ogni punto, le densità di energia associate a campo elettrico e campo magnetico sono uguali.*

Dimostrazione. La dimostrazione è quasi immediata, grazie al teorema si ha infatti

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} \frac{E^2}{v^2 \mu} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = u_E$$

□

Il teorema porta come conseguenza il fatto che campo elettrico e magnetico siano in fase. Alla luce di questo risultato il vettore di Poynting può essere scritto come

$$\mathbf{I} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{B} = \frac{B^2}{\mu} \mathbf{v} = 2u_M \mathbf{v} = (u_M + u_M) \mathbf{v} = (u_E + u_M) \mathbf{v} = u \mathbf{v}$$

avendo indicato $u_E + u_M = u$: siccome u è un'energia su un volume, questa è l'energia contenuta in un cilindro di sezione unitaria perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda e con altezza pari alla velocità dell'onda, il che conferma l'interpretazione fisica del vettore di Poynting fornita nel capitolo precedente: il flusso del vettore di Poynting che come detto è l'energia del campo elettromagnetico che sfugge attraverso una superficie S , è di fatto l'energia che un'onda elettromagnetica trasporta nell'unità di tempo attraverso S .

Si definisce *intensità istantanea dell'onda* l'energia per unità di tempo e di superficie che fluisce attraverso una superficie ortogonale alla direzione di propagazione della perturbazione.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} d\tau = \frac{\partial u}{\partial t} dl dS = u v dS = I dS$$

Ovvero, il modulo del vettore di Poynting è l'intensità istantanea. Tipicamente, per la luce visibile si ha una frequenza di 10^{15} Hz, cui corrisponde una lunghezza d'onda di 10^3 [angstrom]: la maggioranza degli strumenti di misura (non ultimi i nostri occhi) non hanno una risposta per tempi così piccoli. Di conseguenza è spesso più utile parlare di intensità media $[I] \int_0^T I dt$.

Può essere utile descrivere l'onda in un sistema di riferimento sr in cui l'onda si propaga in una direzione $\hat{\mathbf{n}}$ qualunque, parallela a nessuno dei vettori coordinati. Sia quindi sr' un sistema di riferimento la cui origine coincide con l'origine di sr i cui assi sono però inclinati rispetto a quelli di sr affinché $\hat{\mathbf{n}}$ sia parallelo ad x' ($\hat{\mathbf{n}} \equiv \hat{\mathbf{i}}'$). La trasformazione fra i due sistemi di riferimento è data da una matrice di rotazione

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}}' \cdot \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{i}}' \cdot \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{i}}' \cdot \hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{j}}' \cdot \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}}' \cdot \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{j}}' \cdot \hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \mathbf{v} = R \mathbf{r}$$

In sr' l'onda piana ha forma $f(x' - vt)$. Esprimendo x' in sr si ha

$$f((\hat{\mathbf{i}}' \cdot \hat{\mathbf{i}})x + (\hat{\mathbf{i}}' \cdot \hat{\mathbf{j}})y + (\hat{\mathbf{i}}' \cdot \hat{\mathbf{k}})z \mp vt) = f(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} \mp vt)$$

Per quanto visto in appendice un'onda elettromagnetica monocromatica che propaga in una direzione generica è scritta nella forma

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \mathbf{E}_0 e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \mathbf{B}_0 e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{cases}$$

con $\omega = 2\pi\nu$ e $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{n}}\omega/v$.

9.3 Onde sferiche

Questo paragrafo è dedicato a descrivere la forma di un'onda elettromagnetica con simmetria sferica. Verrà usata $F(\mathbf{r}, t)$ per indicare in modo generico il campo elettrico o il campo magnetico.

Se l'onda è sferica $F(\mathbf{r}, t) = F(r, t)$ e quindi le 9.1 in coordinate polari si riducono a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rF) - \epsilon\mu \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

Moltiplicando e dividendo per r il secondo membro, siccome r non dipende esplicitamente dal tempo,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rF) - \epsilon\mu \frac{1}{r} \frac{\partial^2 rF}{\partial t^2} = 0$$

Chiamando $u = rF$ si ottiene

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (u) - \epsilon\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

ovvero, u soddisfa l'equazione di D'Alembert. In conclusione

$$F(r, t) = \frac{1}{r} [f_1(x - vt) + f_2(x + vt)] \quad (9.3)$$

Le onde sferiche hanno quindi un'ampiezza che si attenua come $1/r$. La singolarità in $r = 0$ non costituisce un problema in quanto in $r = 0$ si trova la sorgente, che non è descritta dalle equazioni di Maxwell per le onde. Si osservi come f_1 ed f_2 siano dimensionalmente dei potenziali. Nel limite di considerare una porzione di spazio molto piccola e lontana dalla sorgente, le onde sferiche possono essere approssimate con onde piane.

Per un'onda sferica monocromatica l'intensità istantanea vale

$$I(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0^2}{Zr^2} \cos^2(kr - \omega t)$$

per cui l'intensità è

$$\bar{I} = \frac{E_0^2}{2Z} \frac{1}{r^2}$$

L'intensità decresce come $1/r^2$ è questo è concorde col principio di conservazione dell'energia: siccome si sta considerando il caso di assenza di dissipazione, il flusso di energia attraverso una qualunque superficie sferica centrata nella sorgente (che cresce proporzionalmente ad r^2) deve essere lo stesso (ovvero deve essere indipendente da r) e questo può avvenire se e solo se l'intensità si attenua come r^{-2} .

9.4 Sorgenti delle onde

In questo paragrafo si vogliono studiare tre diverse sorgenti di onde elettromagnetiche.

9.4.1 Dipolo oscillante

Ci si ponga nel vuoto. Un dipolo oscillante è costituito da due cariche uguali e opposte poste a distanza variabile nel tempo. Equivalentemente però, si può considerare la distanza fissa e le cariche variabili. Il dipolo può essere quindi schematizzato con un segmento rettilineo di conduttore percorso da corrente alternata. Fisicamente questa situazione può essere realizzata prendendo un conduttore rettilineo con alle estremità due sfere costituenti le armature di un condensatore. Il circuito equivalente a tale dispositivo è costituito da un generatore di corrente alternata, una resistenza ed un condensatore tutti disposti in serie. Nell'ipotesi in cui $\lambda = c2\pi/\omega$ (ovvero la lunghezza d'onda della radiazione emessa) sia molto maggiore della lunghezza del conduttore, la corrente è indipendente dalla posizione sul conduttore. Si consideri inizialmente per semplicità che la corrente vari in modo armonico $I(\mathbf{r}, t) = I(t) = I_0 \cos \omega t$. La carica presente sulle armature del condensatore vale

$$q(t) = \int I dt = \frac{I_0}{\omega} \sin \omega t$$

Sia d la distanza fra le maglie del condensatore (ovvero la lunghezza del conduttore rettilineo), orientato ortogonalmente all'asse z con il centro nell'origine del sistema di coordinate. Le due sfere dotate di carica $+q$ e $-q$ costituiscono un dipolo con momento

$$\mathbf{p} = qd\hat{\mathbf{k}} = \frac{I_0 d}{\omega} \sin \omega t \hat{\mathbf{k}}$$

Ci si ponga nella gauge di Lorentz. Il potenziale vettore vale, per le equazioni dei potenziali ritardati (8.8)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'$$

Se S è la sezione del conduttore, $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{S} = I(t)\hat{\mathbf{k}}$ dove per le ipotesi fatte I non dipende da t . Inoltre siccome le coordinate con l'apice si riferiscono all'interno del conduttore $d\tau' = S dz'$. Nell'ipotesi di essere molto lontani dal conduttore $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq r$ si ha

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I(t - r/c)}{r} dz' \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu_0 I_0 d}{4\pi} \frac{\cos[\omega(t - r/c)]}{r} \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{r}$$

Dalla condizione di Lorentz si può ricavare il potenziale scalare. Tenendo conto che $\mathbf{A} = A\hat{\mathbf{k}}$ si ha

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{\ddot{p}(t - r/c)}{cr} + \frac{\dot{p}(t - r/c)}{r^2} \right) \frac{z}{r}$$

Da cui, facendo un integrale indefinito rispetto al tempo e ponendo a zero la costante arbitraria

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{\dot{p}(t - r/c)}{cr} + \frac{p(t - r/c)}{r^2} \right) \frac{z}{r}$$

Si possono ora ricavare i campi a partire dalle (8.4) e dalla (5.5). Il calcolo è semplice se effettuato in coordinate sferiche, basta tenere conto che $z/r = \cos \theta$ e che il

versore $\hat{\mathbf{k}}$ si scrive $\hat{\mathbf{k}} = (\cos \theta, -\sin \theta, 0)$. Si ottiene infine

$$\begin{aligned} B_r &= 0 \\ B_\theta &= 0 \\ B_\phi &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} \left(\frac{\ddot{p}(t-r/c)}{c} + \frac{\dot{p}(t-r/c)}{r} \right) \\ E_r &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\cos \theta}{r} \left(\frac{\ddot{p}(t-r/c)}{c} + \frac{\dot{p}(t-r/c)}{r} \right) \\ E_\theta &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r} \left(\frac{\ddot{p}(t-r/c)}{c^2} + \frac{\dot{p}(t-r/c)}{cr} \right) + \frac{p(t-r/c)}{r^2} \\ E_\phi &= 0 \end{aligned}$$

Chiaramente $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = 0$, a conferma che i campi sono ortogonali. Le linee di forza del campo magnetico sono circonferenze centrate sull'asse z , mentre il campo elettrico si trova nel piano zr . Tutti i termini che contribuiscono ai campi hanno una dipendenza spazio-temporale del tipo $t - r/c$ e sono divisi per potenze di r : i fronti d'onda sono dunque sfere che si propagano con velocità c sulle quali l'ampiezza dipende da θ e si attenua all'aumentare di r .

Il vettore di Poynting vale, lasciando sottintesa la dipendenza di p da $t - r/c$

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \frac{\hat{\mathbf{r}}}{16\pi^2\epsilon_0} \left[\left(\frac{\ddot{p}}{c^2 r} \right)^2 \sin^2 \theta - \left(2 \frac{\ddot{p}\dot{p}}{c^2 r} + \frac{\dot{p}p}{r^3} + \frac{\ddot{p}p + \dot{p}^2}{cr^2} \right) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right] + \\ &+ \frac{\hat{\theta}}{16\pi^2\epsilon_0} \left[\left(\frac{\ddot{p}\dot{p}}{c^2 r} + \frac{\dot{p}p}{r^3} + \frac{\ddot{p}p + \dot{p}^2}{cr^2} \right) \frac{2\sin \theta \cos \theta}{r^2} \right] \end{aligned}$$

Si considerino ora le espressioni per \mathbf{p} e le sue derivate. Chiamando $p_0 = I_0 d / \omega$, si ha: $p = p_0 \sin(\omega(t - r/c))$, $\dot{p} = \omega p_0 \cos(\omega(t - r/c))$, $\ddot{p} = -\omega^2 p_0 \sin(\omega(t - r/c))$. Chiaramente i termini $\ddot{p}\dot{p}$ e $\dot{p}p$ hanno media temporale nulla e inoltre, mediando su un periodo $\ddot{p}p = -\dot{p}^2$, per cui $\ddot{p}p + \dot{p}^2 = 0$. Mediando temporalmente il vettore di Poynting quindi si ottiene

$$\mathbf{I} = \frac{\sin^2 \theta}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{\ddot{p}}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \Rightarrow [\mathbf{I}] = \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (9.4)$$

ovvero restano solo i termini che decrescono come r^{-2} . Ne segue che il flusso attraverso una sfera centrata nella sorgente non dipende da r . Questo flusso fornisce la potenza media irradiata dal dipolo.

$$[P] = \int_S \mathbf{I} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{I} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{\omega^4 p_0^2}{2} \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} =$$

ovvero

$$[P] = \frac{\omega^4 p_0^2}{2} \frac{\mu_0}{6\pi c} = \frac{\mu_0}{6\pi c} [p] \quad (9.5)$$

Per il principio di sovrapposizione, la formula trovata per la potenza è applicabile ad un dipolo oscillante con legge qualunque sviluppando la legge oraria in serie di Fourier o ad un insieme di dipoli oscillanti. Per quanto riguarda i termini inversamente proporzionali a potenze di r maggiori di due, questi sono nulli quando si considera il flusso medio ma sono anche trascurabili quando si è lontani dal dipolo ($r \gg \lambda$). Nel caso in cui $r \ll \lambda$ questi costituiscono il *campo vicino*, un campo variabile nel tempo ma localizzato intorno alla sorgente, al quale non è associato alcun trasporto di energia.

9.4.2 Carica puntiforme in moto accelerato

Si consideri una carica q dotata di accelerazione a . È possibile usare gli stessi risultati ottenuti nel caso del dipolo oscillante a patto di sostituire \ddot{p}^2 con $(qa)^2$ nella (9.4). Con passaggi analoghi a quelli visti nel caso del dipolo, per velocità non relativistiche si ottiene la *formula di Larmor*

$$\bar{P} = \frac{\mu_0}{6\pi c} (qa)^2 \quad (9.6)$$

9.5 Onde elettromagnetiche nei dielettrici

Nei dielettrici $v = (\mu\epsilon)^{-\frac{1}{2}} = (\mu_0\epsilon_0)^{-\frac{1}{2}}(\mu_r\epsilon_r)^{-\frac{1}{2}} = c(\mu_r\epsilon_r)^{-\frac{1}{2}}$.

Definizione 9.5.1 (Indice di rifrazione). Si definisce indice di rifrazione n

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r\mu_r} \simeq \sqrt{\epsilon_r}$$

I discorsi fatti sulle onde piane si appoggiavano all'ipotesi che la velocità dell'onda fosse indipendente dalla frequenza. Se per μ l'approssimazione può essere buona, ϵ dipende dalla frequenza in maniera spesso marcata. Quando si trattano onde non monocromatiche, condizione necessaria affinché questa approssimazione sia buona è che lo spettro delle frequenze nello sviluppo di Fourier dell'onda occupi un'intervallo ristretto. In questo paragrafo verrà mostrato come questa condizione non sia sufficiente a causa del fenomeno della *dispersione anomala*: attorno a particolari frequenze, a piccole variazioni della frequenza corrispondono brusche variazioni dell'indice di rifrazione.

Si vuole quindi discutere la dipendenza di ϵ da ν . Il punto di partenza per il calcolo di ϵ_r in elettrostatica sono state le considerazioni sulla polarizzabilità α : quando sono sottoposti ad un campo elettrico, il nucleo e il baricentro della nube elettronica degli atomi che costituiscono il dielettrico si allontanano e iniziano a risentire di una forza attrattiva che può essere schematizzata con una forza elastica². Usando gli stessi simboli introdotti nel capitolo sui dielettrici all'equilibrio $-k\mathbf{r} + Ze\mathbf{E}_l = 0$, e quindi il momento di dipolo $\mathbf{p} = (Ze)\mathbf{r} = (Ze)^2/k\mathbf{E}_l$ da cui segue che la polarizzabilità α , ovvero il termine di proporzionalità fra \mathbf{p} ed \mathbf{E}_l è costante. Si noti come questo risultato dipenda direttamente dal fatto che la deformazione sulla nube elettronica sia di tipo statico. Se però il campo elettrico è oscillante ($\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_{0l}e^{j\omega t}$), \mathbf{r} soddisfa l'equazione dell'oscillatore armonico forzato

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\gamma\dot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = Ze\mathbf{E}_{0l}e^{j\omega t}$$

dove $m = Zm_e$ è la massa della nube elettronica e il termine $b\dot{\mathbf{r}} = m\gamma\dot{\mathbf{r}}$ tiene conto dell'interazione della nube elettronica con gli atomi circostanti e dell'energia dissipata per irraggiamento dalla carica oscillante: un campo elettrico oscillante comporta la presenza nel dielettrico di dipoli oscillanti che, come si è visto, emettono energia.

²Per piccole lunghezze d'onda la polarizzazione per orientamento delle molecole non risente delle oscillazioni del campo. Alla fine del paragrafo verrà discussa brevemente l'eventualità che anche le mmolecole possano oscillare.

Osservazione 9.5.2.

$$\mathbf{r}(t) = \frac{Ze\mathbf{E}_l(t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\gamma)} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Dimostrazione. La soluzione all'equazione dell'oscillatore armonico è $\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}_0 e^{j\omega t}$. Sostituendo nell'equazione differenziale si trova

$$\mathbf{R}_0 = \frac{Ze\mathbf{E}_{0l}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\gamma)}$$

Ma $\mathbf{E}_{0l} e^{j\omega t} = \mathbf{E}_l$, da cui la tesi. \square

Corollario 9.5.3. *Nell'ipotesi che a livello macroscopico il materiale sia schematizzabile come un insieme di oscillatori armonici tutti fra loro identici (stesso ω_0 e stesso γ)*

$$\alpha = \frac{(Ze)^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\gamma}$$

o analogamente, $\alpha = |\alpha| e^{j\delta}$ con

$$|\alpha| = \frac{(Ze)^2}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \quad \tan \delta = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Dimostrazione. $\alpha = p/E_l = (Ze)^2 r/E_l$. Per l'osservazione precedente, si ha la tesi. \square

L'ipotesi è molto forte: si sta richiedendo che il dielettrico sia costituito da atomi fra loro tutti uguali e indipendenti e che le nuvole elettroniche si comportino come sistemi rigidi. Si noti come sia il modulo di α che la sua fase dipendano dalla pulsazione ω del campo elettrico locale. Il fatto che la polarizzabilità sia complessa implica che \mathbf{r} e quindi \mathbf{p} hanno la stessa direzione e la stessa pulsazione del campo elettrico locale, ma diversa fase.

Osservazione 9.5.4. *Il momento di dipolo è sfasato di δ rispetto al campo elettrico locale.*

Dimostrazione. La dimostrazione si ottiene considerando che la quantità fisicamente significativa è la parte reale di \mathbf{p} . Si ha quindi $\text{Re}(\mathbf{p}) = \text{Re}(\alpha \mathbf{E}_l(t)) = \text{Re}(|\alpha| e^{j\delta} E_{0l} e^{j\omega t}) = |\alpha| E_{0l} \cos(\omega t + \delta)$ \square

Si vogliono ora studiare le conseguenze di quanto detto su ϵ_r e n . Indicando con N il numero di atomi per unità di volume, esprimendo ϵ_r in funzione della suscettività elettrica e ricordando la relazione di Clausius-Mossotti, si ha

$$\epsilon_r = \chi + 1 = \frac{N\alpha}{\epsilon_0 - N\alpha/3} + 1 = \frac{1 + \frac{2N\alpha}{3\epsilon_0}}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}}$$

Quindi, anche ϵ_r e di conseguenza $n = \sqrt{\epsilon_r}$ sono numeri complessi. Si può quindi porre $n = n_1 - j n_2$ ³. Il significato della parte reale e della parte immaginaria dell'indice di rifrazione appaiono evidenti qualora si consideri un'onda elettromagnetica

³Si è scelto di usare il segno meno perchè, come si mostrerà più avanti, la parte immaginaria di n è negativa e in questo modo $n_2 > 0$.

che si propaga nel dielettrico. Per semplicità, si fa riferimento alle onde piane

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{j\omega(t - \frac{x}{v})} = \mathbf{E}_0 e^{j\omega(t - x \frac{n_1 - jn_2}{c})} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{\omega n_2 x}{c}} e^{j\omega(t - n_1 \frac{x}{c})} = \mathbf{E}_0 e^{-\beta x} e^{j\omega(t - n_1 \frac{x}{c})}$$

Si ha quindi un'onda che si propaga con velocità $v = c/n_1$ e la cui ampiezza si attenua secondo la legge esponenziale $\mathbf{E}_0 e^{-\frac{\omega n_2 x}{c}}$. La quantità $\beta = \omega n_2/c$ è detta *coefficiente di assorbimento* del materiale; il suo inverso è detto *cammino di attenuazione*, ha le dimensioni di una lunghezza e rappresenta la distanza che l'onda deve percorrere all'interno del materiale prima che la sua ampiezza risulti ridotta di un fattore e^{-1} .

Per comprendere l'andamento di n_1 ed n_2 in funzione di ω si sviluppi $n = \sqrt{\epsilon_r}$ al primo ordine in ω (nell'ipotesi che $N|\alpha|/\epsilon_0 \ll 1$). Si ottiene $n = 1 + N\alpha/2\epsilon_0$ che quindi fornisce, sostituendo l'espressione esplicita di α

$$n_1 = \text{Re}(n) = 1 + \frac{N(Ze)^2}{2\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

$$n_2 = -\text{Im}(n) = \frac{N(Ze)^2}{2\epsilon_0 m} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

Per $\omega = 0$ si torna nel caso del campo elettrostatico, dove non c'è fenomeno di attenuazione. All'avvicinarsi di ω ad ω_0 , detta *frequenza di risonanza*, n_1 passa dall'essere maggiore di 1 all'essere minore di 1. Questo fatto, si vedrà, non è in contraddizione con il principio di velocità limite. La zona in cui $dn_1/d\omega$ è positiva è detta *zona di dispersione normale*, quella in cui è negativa è detta *zona di dispersione anomala*. n_2 ha l'andamento di una lorenziana, con picco centrato sulla zona di dispersione anomala. Al di fuori della zona immediatamente circostante al picco l'attenuazione è trascurabile e il dielettrico è trasparente alla radiazione. Nelle zone di trasparenza, n_1 è crescente.

Facendo cadere l'ipotesi che il materiale sia costituito da oscillatori armonici identici, la polarizzabilità assume la forma

$$\alpha = \sum_k \frac{q_k^2}{m_k(\omega_{0k}^2 - \omega^2 + j\gamma_k \omega)}$$

dove q_k ed m_k sono la carica e la massa efficaci di ciascun oscillatore. In corrispondenza di ogni ω_{0k} si verifica un fenomeno di risonanza che va sommato all'andamento non risonante degli altri oscillatori. L'andamento di n_1 è caratterizzato dall'alternarsi di zone di dispersione anomala, in corrispondenza delle risonanze, e zone di dispersione normale. È comune esprimere $n_1(\lambda)$: siccome $\lambda = 2\pi c\omega$, nelle zone di dispersione normale $n_1(\lambda)$ ha un andamento decrescente, mentre ha un andamento crescente in corrispondenza delle zone di dispersione anomala. In corrispondenza di ogni frequenza di risonanza n_2 ha un picco che corrisponde ad un aumento pronunciato del coefficiente di assorbimento β . Questo spiega le righe di assorbimento che si osservano in spettroscopia. Anche un modello più sofisticato prevede che n_1 possa essere minore di 1, specie per piccole lunghezze d'onda. Questo effetto è in effetti osservato sperimentalmente. Per λ elevati, nell'ordine dei micrometri, anche le molecole iniziano ad oscillare e comportano la comparsa di righe di assorbimento che possono diventare molto larghe, a costituire delle bande di assorbimento.

9.6 Onde elettromagnetiche nei conduttori

Si consideri un'onda elettromagnetica che incide su un conduttore. Gli elettroni liberi, sotto l'effetto del campo elettromagnetico variabile iniziano a muoversi con moto oscillatorio forzato, dissipando energia. Ci si aspetta quindi che un'onda elettromagnetica in un conduttore si attenui e scaldi il conduttore.

Si consideri un conduttore ohmico. Nel caso stazionario si ha $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ con σ la conducibilità elettrica. Siccome questa è una legge locale, ci si aspetta valga anche nel caso non stazionario come effettivamente conferma l'esperienza (la conducibilità può però essere una funzione della frequenza ed essere complessa). La presenza di cariche in moto nel conduttore non permette di prendere $\mathbf{J} = 0$ nella quarta equazione di Maxwell: questo è il motivo per cui le equazioni delle onde nel conduttore assumono una forma diversa rispetto a quelle nel vuoto.

Teorema 9.6.1. *In un conduttore ohmico, omogeneo e isotropo*

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{H} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{E} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}$$

Dimostrazione. Tenuto conto della relazione fra \mathbf{E} e \mathbf{J} la quarta equazione di Maxwell assume la forma

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Applicando l'operatore rotore ad ambo i membri

$$-\nabla^2 \mathbf{H} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) = \sigma(\nabla \times \mathbf{E}) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E})$$

Per l'ipotesi di omogeneità e isotropia $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu^4$ e quindi per la seconda equazione di Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{B}/\mu = 0$. Inoltre per la terza equazione di Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t = -\mu \partial \mathbf{H}/\partial t$. Sostituendo nella quarta equazione di Maxwell si ottiene

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

Applicando l'operatore rotore alla terza equazione di Maxwell e confrontandola con la quarta si ottiene un risultato analogo per il campo elettrico. \square

La soluzione a queste equazioni viene proposta nel caso di un'onda piana che si propaga lungo l'asse x . Le equazioni per il campo elettrico e magnetico assumono la forma

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} - \sigma \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

La derivata prima rappresenta il termine di smorzamento. Si noti come questo termine scompare quando $\sigma = 0$, ovvero nel caso di un dielettrico perfetto.

Teorema 9.6.2. *L'onda piana che si propaga lungo l'asse x in un conduttore omogeneo e isotropo ha forma*

$$\phi(x, t) = A e^{\gamma x} e^{j(\beta x + \omega t)}$$

⁴Nel caso dei ferromagneti, questo è vero solo localmente.

con

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2} [1 \pm \sqrt{1 + (\sigma/\omega\varepsilon)^2}]}$$

$$\gamma = \frac{\omega\sigma\mu}{2\beta}$$

Dimostrazione. Si pongano i campi nella forma

$$\phi(x, t) = \phi x e^{-j\omega t}$$

L'esponenziale complesso viene introdotto per comodità di calcolo. Siccome l'equazione differenziale è a coefficienti reali, il campo fisicamente significativo è costituito solo dalla parte reale della soluzione. Sostituendo nell'equazione delle onde si trova un'equazione differenziale per $\phi(x)$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - j\omega\sigma\phi + \omega^2\varepsilon\mu\phi = 0$$

È lecito prendere $\phi(x)$ nella forma $\phi(x) = Ae^{j\alpha x}$ siccome l'equazione è lineare, ma siccome i coefficienti in questo caso sono complessi non si può più affermare che la parte fisicamente significativa sia solo quella reale. Sostituendo nell'equazione differenziale si trova un'equazione algebrica per α :

$$\alpha^2 = \varepsilon\mu\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

α^2 è un numero complesso e di conseguenza anche α è complesso che può essere preso nella forma $\alpha = \beta - j\gamma$. Inserendo nell'equazione precedente e uguagliando i vari termini si trova la tesi. \square

L'onda progressiva si ha scegliendo $\beta < 0$ e di conseguenza $\gamma < 0$: $|\gamma|$ svolge il ruolo di coefficiente di attenuazione. Spesso $\sigma \gg \varepsilon\omega^5$ e i coefficienti β e γ assumono la semplice forma

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}$$

$$\gamma = -\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}$$

Il risultato appena trovato fornisce una giustificazione all'*effetto pelle*: quando un conduttore è percorso da una corrente alternata ad alta frequenza (e quindi ω grande) la corrente tende ad addensarsi sullo strato superficiale del conduttore, riducendone la sezione utile ed aumentandone la resistenza. Per valutare qualitativamente il fenomeno e capire quali entità fisiche entrano in gioco, si consideri quindi un conduttore collegato ad un generatore di corrente alternata, ovvero un generatore nel quale gli accumuli di carica sui morsetti varino nel tempo. Di conseguenza il campo elettrico prodotto varia nel tempo, quindi varia la corrente circolante nel conduttore e anche il campo di induzione magnetica generato dal conduttore. Si ha il fenomeno dell'autoinduzione, per cui si sviluppa un campo elettrico indotto E_i che si oppone alla variazione temporale del campo elettrico che lo ha generato. Concretamente, si prenda un conduttore cilindrico percorso da corrente variabile

⁵Ad esempio nel caso del rame $\sigma \approx 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$. Nel visibile $\omega \approx 10^{15} Hz$ e dunque $\varepsilon\omega \approx 10^4 \ll 10^7$.

- ad esempio, crescente. Per simmetria il campo \mathbf{B} è costituito da cerchi centrati nell'asse del cilindro e cresce nel tempo come la corrente dando luogo ad un campo indotto \mathbf{E}_i orientato parallelamente all'asse del conduttore con verso opposto a quello di \mathbf{J} . Si consideri ora una linea chiusa rettangolare l di lati h e dr , che giaccia su un piano contenente l'asse del cilindro. Si prenda come verso positivo quello antiorario, in modo che la normale alla superficie sia concorde in verso con \mathbf{B} e che quindi il flusso sia positivo e crescente. Per la legge di Faraday-Neumann

$$-\frac{d}{dt}\Phi_S(\mathbf{B}) = \oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} \simeq E_i(r+dr)h - E_i(r)h$$

Ma per come è stato impostato il problema \mathbf{B} è crescente nel tempo, perciò la sua derivata è positiva. Quindi $E_i(r) > E_i(r+dr)$: E_i aumenta all'aumentare della profondità del conduttore e quindi ostacola maggiormente il passaggio di corrente negli strati profondi che negli strati superficiali.

9.7 Onde stazionarie

Quanto visto porta ad un fenomeno analogo a quello delle onde stazionarie meccaniche. Si consideri un'onda piana che si propaga con verso positivo rispetto all'asse z e incide su un conduttore perfetto (ovvero con conducibilità infinita) posto in $z=0$. Verranno ora trattati campo elettrico e magnetico separatamente, cominciando col campo elettrico. L'onda è polarizzata linearmente e il campo elettrico può essere immaginato lungo la direzione x . Per l'ipotesi di conducibilità infinita è trascurabile la parte di campo che penetra nel conduttore, ma siccome il campo elettrico è tangente alla superficie di separazione per la condizione di continuità della componente tangente $E=0$ immediatamente fuori dal conduttore. Nel semispazio vuoto sono presenti sia presente l'onda incidente⁶ $E_i = E_{(+)}e^{i(kz-\omega t)}$ che l'onda riflessa $E_r = E_{(-)}e^{i(kz+\omega t)}$ che si sovrappongono. Dato che il conduttore è perfetto le due onde hanno uguale ampiezza ma segno opposto. Il campo elettrico nello spazio vuoto vale:

$$\begin{aligned} E_x &= \text{Re}(E_i + E_r) = \text{Re}(E_{(+)}e^{jkz}(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t})) = \\ &= \text{Re}(-2jE_{(+)}\sin(\omega t)e^{jkz}) = 2E_{(+)}\sin(kz)\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Questa non è un'onda perchè non ha $kz \pm \omega t$ come argomento: è un'oscillazione armonica di pulsazione ω con ampiezza $2E_{(+)}\sin(kz)$ che presenta dei nodi fissi per i valori di z tali da annullare il seno. La distanza fra due nodi adiacenti vale

$$\Delta z = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{2\pi}\lambda = \frac{\lambda}{2}$$

Per quanto concerne il campo magnetico invece, per le condizioni di ortogonalità questo ha solo componente y . Siccome $E/H = \pm Z$, dove si ha segno positivo per onde progressive e segno negativo per onde regressive,

$$\begin{aligned} H &= \text{Re}\left(\frac{E_{+}}{Z}e^{i(kz-\omega t)} + \frac{-E_{(+)}}{-Z}e^{i(kz+\omega t)}\right) = \text{Re}\left(2\frac{E_{(+)}}{Z}e^{jkz}\cos(\omega t)\right) \\ &= 2\frac{E_{(+)}}{Z}\cos(kz)\cos(\omega t) \end{aligned}$$

⁶Siccome il campo è diretto solo lungo la direzione x l'equazione può essere posta in forma scalare.

Il campo magnetico è perciò sfasato di $\pi/2$ rispetto al campo elettrico. Inoltre, quando uno dei due campi è nullo l'altro è massimo e vale il doppio del campo elettromagnetico totale. Questo risultato non è in contraddizione col fatto che in un'onda elettromagnetica E ed H sono in fase, perchè un'onda stazionaria è il risultato della sovrapposizione di due onde che viaggiano in versi opposti.

Sulla base di quanto detto si può capire cosa succede qualora venga lanciata un'onda elettromagnetica fra due piani conduttori paralleli posti a distanza L , in modo tale che incida ortogonalmente sui due piani. Siccome il campo elettrico si deve annullare sui due piani, ovvero deve avere dei nodi sui due piani, la lunghezza L deve contenere un numero intero di lunghezze d'onda

$$L = \frac{\lambda}{2} n$$

9.8 Momenti di un'onda elettromagnetica

In questo paragrafo $n = dN/d\tau$ torna ad indicare il numero di cariche per unità di volume e non l'indice di rifrazione.

Si consideri un'onda elettromagnetica incidente su un materiale. Per quanto visto nel paragrafo sul vettore di Poynting il campo elettromagnetico esercita una forza sulla superficie. Dalla (8.3) si ha che la potenza assorbita dal materiale per unità di volume vale $w = dP/d\tau = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$.

Osservazione 9.8.1.

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

con σ complesso. Quindi \mathbf{J} ha lo stesso andamento di \mathbf{E} , ampiezza proporzionale all'ampiezza di \mathbf{E} ed è sfasato rispetto ad \mathbf{E} della fase del coefficiente σ .

Dimostrazione. Se il materiale è un conduttore la tesi è evidente sulla base della relazione che lega \mathbf{E} e \mathbf{J} nei conduttori. In linea del tutto generale, sotto l'effetto del campo oscillante le cariche si comportano come oscillatori smorzati che compiono un moto oscillatorio forzato: per quanto visto nella dimostrazione dell'osservazione 9.5.2 $\dot{\mathbf{r}}$ è proporzionale al campo elettrico mediante un coefficiente complesso e dunque lo è anche la sua derivata -e di conseguenza, la velocità di deriva. Ma siccome $\mathbf{J} = nq\mathbf{v}_d$, si ha la tesi. \square

Alla luce di questo risultato,

$$w = \sigma E^2$$

Il valor medio della potenza su un periodo, detto E_0 l'ampiezza del campo elettrico e α la fase di σ , vale quindi

$$[w] = \frac{E_0^2}{2} |\sigma| \cos \alpha$$

Teorema 9.8.2. La quantità di moto che l'onda trasferisce nell'unità di tempo all'unità di volume del materiale è diretta come la velocità di propagazione dell'onda e vale

$$[\mathbf{q}] = \frac{[w]}{v} \hat{\mathbf{v}}$$

Dimostrazione. La quantità di moto trasferita nell'unità di tempo all'unità di volume è data dall'impulso trasferito nell'unità di tempo, cioè la media temporale della forza impressa per unità di volume. Dal paragrafo sul vettore di Poynting si ha che questa forza vale

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{d\tau} = nq(\mathbf{E} + \mathbf{v}_d \times \mathbf{B})$$

Siccome la media temporale del campo elettrico è nulla

$$[\mathbf{q}] \equiv [\mathbf{f}] = [nq\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}] = [\mathbf{J} \times \mathbf{B}]$$

Dato che campo elettrico e magnetico sono ortogonali e \mathbf{J} è parallelo a \mathbf{E}

$$[\mathbf{q}] = [JB]\hat{\mathbf{v}}$$

Tenendo conto della relazione fra i moduli di B ed E

$$[\mathbf{q}] = \frac{[\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}]}{v} \hat{\mathbf{v}}$$

Ovvero la tesi. □

Qualora ci si trovi nel caso di assorbimento totale, ovvero nel caso in cui l'onda trasferisca al materiale tutta la sua energia, conviene far riferimento all'energia incidente sull'unità di superficie nell'unità di tempo, ovvero al modulo del vettore di Poynting. In questo caso al posto della potenza per unità di volume si avrà l'intensità, ovvero potenza per unità di superficie, e al posto della quantità di moto per unità di volume e unità di tempo si avrà la quantità di moto trasferita all'unità di superficie normale all'onda nell'unità di tempo \mathbf{p} . Perciò

$$\mathbf{p} = \frac{I}{v} \hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{I}}{v}$$

Quindi, dalla definizione di vettore di Poynting

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu v} \quad (9.7)$$

p ha le dimensioni di una forza diviso una superficie ed è quindi effettivamente una pressione. La stessa pressione, in verso opposto la subisce una sorgente che emetta un'onda con intensità I . Una superficie perfettamente riflettente investita ortogonalmente dall'onda subisce una pressione doppia.

Oltre alla quantità di moto le onde elettromagnetiche trasportando anche un momento angolare. Dato un polo O è evidente infatti che le onde trasportino il momento

$$\mathbf{L} = \int_S \mathbf{r} \times d\mathbf{p}$$

dove \mathbf{r} è la distanza fra il polo ed il punto dell'onda con momento $d\mathbf{p}$. Nel caso di un'onda opportunamente collimata questa espressione si semplifica a $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Inoltre, la radiazione elettromagnetica possiede un momento angolare intrinseco quando è polarizzata circolarmente, ovvero quando il campo elettrico ruota attorno alla direzione di propagazione. Il momento angolare intrinseco vale

$$\mathbf{S} = \pm \omega \mathbf{I}$$

dove il segno dipende dal verso di polarizzazione, destrorsa o sinistrorsa. Il momento angolare intrinseco è longitudinale, ovvero diretto come la velocità dell'onda. Un'onda con polarizzazione lineare, in cui il campo elettrico oscilla su un piano fisso, non possiede momento angolare intrinseco, in quanto può essere ottenuta come sovrapposizione di due onde identiche con polarizzazione circolare in un caso destrorsa e nell'altro sinistrorsa.

9.9 Leggi di riflessione e rifrazione

Uno dei grandi successi della teoria dell'elettromagnetismo di Maxwell è la possibilità di dedurre le leggi dell'ottica. Le leggi di riflessione e rifrazione in particolare, derivano dalle condizioni al contorno fra due materiali. Suppongo di avere a che fare con un'onda piana (il che è ragionevole nel caso in cui la sorgente sia molto lontana) che incida sulla superficie di separazione fra due materiali con ϵ_1 , μ_1 ed ϵ_2 , μ_2 . Per la (??) noto il campo elettrico è noto anche il campo magnetico: per le successive considerazioni ci si può quindi limitare a considerare il campo elettrico. In generale, si avrà a che fare con tre diversi campi elettrici

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)\} & (\text{incidente}) \\ \mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_0 \exp\{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t + \phi')\} & (\text{riflesso}) \\ \mathbf{E}'' &= \mathbf{E}''_0 \exp\{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega'' t + \phi'')\} & (\text{rifratto}) \end{aligned}$$

Di questi, solo il campo incidente è noto.

Si immagini senza perdita di generalità che la propagazione avvenga solo nel piano yz e si ponga lo 0 dell'asse z al livello della superficie di separazione fra i due mezzi. La condizione di raccordo per il campo elettrico $E_{t1} = E_{t2}$ implica l'uguaglianza dei moduli e delle fasi dei campi incidente, riflesso e rifratto. L'uguaglianza delle fasi permette di dedurre le leggi di riflessione e rifrazione; l'uguaglianza dei moduli, oltre a queste due leggi, consente di ricavare informazioni sulla polarizzazione dell'onda a scapito di un calcolo più lungo e tedioso. Ci si concentrerà solo sull'uguaglianza delle fasi. Si ha dunque

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t + \phi = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} + \omega' t + \phi' = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} + \omega'' t + \phi''$$

Si tratta di un'uguaglianza fra polinomi nelle variabili y, z, t . L'uguaglianza è soddisfatta per ogni valore di y, z, t se e solo se sono uguali i coefficienti. Banalmente $\phi = \phi' = \phi''$ e $\omega = \omega' = \omega''$: non si hanno sfasamenti nel passaggio fra i mezzi e la pulsazione dipende esclusivamente dalla sorgente. Il discorso è solo leggermente più complesso per l'uguaglianza $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}$. Per il sistema di riferimento scelto $k_x = 0$ e $z = 0$, da cui segue $k_y y = k'_x x + k'_y y = k''_x x + k''_y y$. Uguagliando nuovamente termine a termine e chiamando $\theta, \theta', \theta''$ l'angolo che i tre raggi formano con la perpendicolare alla superficie di separazione si ha

$$\begin{aligned} 0 &= k'_x = k''_x \\ k_y \sin \theta &= k'_y \sin \theta' = k''_y \sin \theta'' \end{aligned}$$

La prima equazione afferma che se il raggio incidente propaga nel piano yz , anche i raggi riflesso e rifratto propagano nello stesso piano. Per quanto concerne la seconda si osservi che

$$\frac{n}{c} v = \lambda v = \lambda \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{k} \omega$$

Per quanto visto ω non dipende dal mezzo, mentre n dipende dal mezzo per definizione: anche k deve dipendere dal mezzo. Si ottiene quindi

$$n_1 y \sin \theta = n_2 y \sin \theta'$$

$$n_1 y \sin \theta = n_1 y \sin \theta''$$

Dalla prima segue la nota legge di rifrazione $n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta'$; la legge di riflessione $\theta = \theta''$

9.10 Spettro della radiazione elettromagnetica

A seconda della loro frequenza, le onde elettromagnetiche sono prodotte da tipi diversi di sorgente, hanno proprietà diverse e diversi modi di interagire con la materia.

$10^3 - 10^9 \text{ Hz}$ - *Onde a radiofrequenza*. Usate per le comunicazioni, sono prodotte da circuiti oscillanti accoppiati ad antenne.

$10^9 - 10^{11} \text{ Hz}$ - *Microonde*. Usate per lo studio di strutture atomiche o molecolari e nelle comunicazioni, sono prodotte da circuiti oscillanti associati a dispositivi meccanici come cavità risonanti o guide d'onda.

$5 \cdot 10^{11} - 4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ - *Infrarossi*. Viene ulteriormente divisa in *lontano*, *medio*, *vicino infrarosso*. È spontaneamente emessa dai corpi caldi.

$4 \cdot 10^{14} - 8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ - *Radiazione visibile*. Viene emessa da atomi e molecole quando i relativi elettroni compiono una transizione da uno stato eccitato allo stato fondamentale.

$8 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{17} \text{ Hz}$ - *Radiazione ultravioletta*. Anche questa è emessa da atomi e molecole, in particolare nei gas sottoposti ad una scarica elettrica.

$3 \cdot 10^{17} - 5 \cdot 10^{19} \text{ Hz}$ - *Raggi X*. Sono generati da cariche che subiscono una forte accelerazione, come un raggio catodico che viene bruscamente fermato dall'impatto con un materiale solido. La radiazione emessa (costituita non solo da raggi X) prende il nome di *bremsstrahlung*. Molte stelle o ammassi stellari sono sorgenti di questo tipo di radiazione. Trovano applicazione in radiochimica e medicina grazie al diverso assorbimento ad opera di materiali con diversa densità e consistenza.

-10^{18} Hz - *Raggi gamma*. La loro emissione si accompagna a molti processi nucleari. A queste frequenze la descrizione dell'interazione fra campo elettromagnetico e materia non può prescindere dalla meccanica quantistica.

9.11 Effetto Doppler

Nel caso delle onde sonore, se la sorgente, il mezzo materiale in cui si propaga l'onda e l'osservatore sono in moto relativo si manifesta l'effetto Doppler: se l'osservatore si sta avvicinando alla sorgente vede arrivare il suono a velocità maggiore e quindi incontra un numero maggiore di fronti d'onda a parità di intervallo di tempo e quindi osserva una frequenza maggiore; viceversa se è in allontanamento.

Nel caso delle onde elettromagnetiche, a causa del principio di costanza della velocità della luce e del fatto che non si propagano in un mezzo, ci si aspetta che l'effetto Doppler non sussista. In realtà, a partire da considerazioni di carattere relativistico si può mostrare che effettivamente l'effetto si manifesta anche per le onde elettromagnetiche. In particolari, per velocità molto minori della velocità della luce

la formula è analoga a quella dell'effetto Doppler acustico

$$\nu' = \nu \left(1 \pm \left| \frac{V}{c} \right| \right)$$

dove ν' e ν sono rispettivamente la frequenza osservata e la frequenza emessa dalla sorgente, V è la velocità relativa fra osservatore e sorgente e il segno deve essere scelto a seconda che sorgente e osservatore siano in avvicinamento o in allontanamento.

Appendice A

Onde

A.1 Definizioni

Definizione A.1.1 (Onda). Si definisce onda una perturbazione che nasce da una sorgente e si propaga nel tempo e nello spazio.

Osservazione A.1.2. Un'onda di ampiezza costante è descritta da una funzione che goda della proprietà

$$f(x, t) = f(\xi(x, t)) \equiv f(\xi)$$

con $\xi(x, t) = x \mp vt$, v costante positiva.

Dimostrazione. Se si considera la funzione $f(\xi)$ questa ha un ben definito profilo che rappresenta la perturbazione generata dalla sorgente. Questo profilo corrisponde al profilo di $f(x)$, con t fissato. Si consideri un certo valore $\xi_0 = x_0 \mp vt_0$. Ci si chiede per quale valore $x_0 + \Delta x$ all'istante $t_0 + \Delta t$ si abbia ancora il valore ξ_0 . Si deve quindi risolvere l'equazione $x_0 \mp vt_0 = (x_0 + \Delta x) \mp v(t_0 + \Delta t)$ che porta alla condizione $\Delta x \mp \Delta t = 0$ ovvero $\Delta x / \Delta t = \mp v$: $f(\xi(x, t))$ rappresenta dunque una perturbazione che viaggia nello spazio con velocità v . \square

ξ viene detto fase dell'onda, v è la velocità con cui si muove la fase dell'onda: l'onda resta costante nel tempo se la si osserva da un sistema di riferimento con velocità v . Per questo motivo v è detta velocità di fase. L'onda si dice positiva o regressiva a seconda del segno che compare nell'espressione di ξ .

Definizione A.1.3 (Fronte d'onda). Si definisce fronte d'onda il luogo dei punti in cui ξ assume lo stesso valore.

Si parla di onde piane, sferiche etc... in base alla forma dei fronti d'onda.

Definizione A.1.4 (Onde periodiche). Si parla di onda periodica quando si ha a che fare con un'onda descritta da una funzione periodica in ξ .

Una classe particolarmente importante di onde periodiche sono le onde sinusoidali.

Definizione A.1.5 (Onde sinusoidali). Si definiscono onde sinusoidali le onde periodiche in cui $f(\xi)$ assume una delle seguenti espressioni fra loro equivalenti

$$\begin{aligned} & A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) + \phi \right] \\ & A \sin \left[\frac{2\pi}{T} \left(\frac{x}{v} - t \right) + \phi \right] \\ & A \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + \phi \right] \\ & A \sin(kx - \omega t + \phi) \end{aligned}$$

dove:

- A : ampiezza
- ϕ : fase iniziale
- λ : lunghezza d'onda, distanza fra due picchi
- T : periodo, tempo necessario affinché nel punto x fissato l'onda assuma nuovamente lo stesso valore
- ω : pulsazione, $\omega = 2\pi/T$
- k : numero d'onda, $k = 2\pi/\lambda$
- $v = \lambda/T = \omega/k$

A.2 Equazioni delle onde

Le equazioni differenziali che danno come soluzione un'onda sono nella forma $\square F = 0$, dove \square è l'operatore dalembertiano

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (\text{A.1})$$

Chiaramente il dalembertiano è un'operatore lineare e dunque le equazioni delle onde sono equazioni differenziali lineari e omogenee. Vale perciò il principio di sovrapposizione: ogni combinazione lineare di soluzioni dell'equazione delle onde è anch'essa una soluzione dell'equazione delle onde.

Le soluzioni possono essere risolte sviluppando le soluzioni in serie di Fourier: per il principio di sovrapposizione non si perde di generalità limitandosi a considerare solo soluzioni sinusoidali.

Appendice B

Operazioni

B.1 Operazioni vettoriali

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (\text{B.2})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (\text{B.3})$$

B.2 Operatori vettoriali

$$\nabla \times \nabla f = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times f) = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (\text{B.6})$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{v}) = f\nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla f \cdot \mathbf{v} \quad (\text{B.7})$$

$$\nabla \times (f\mathbf{v}) = f\nabla \times \mathbf{v} + \nabla f \times \mathbf{v} \quad (\text{B.8})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (\text{B.9})$$

B.3 Relazioni integrali

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{v} d\tau = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{B.10})$$

$$\int_S \nabla \times f \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{B.11})$$

$$\int_S \nabla f \times d\mathbf{S} = - \oint_l f d\mathbf{l} \quad (\text{B.12})$$

$$\int_{\tau} \nabla \times \mathbf{v} d\tau = - \int_S \mathbf{v} \times d\mathbf{S} \quad (\text{B.13})$$

B.4 Proprietà operazioni sul raggio vettore

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = \nabla' \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \quad (\text{B.14})$$

$$\nabla^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}' = 4\pi \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{B.15})$$

Appendice C

Unità di misura e costanti

C.1 Capitolo 1

C.1.1 Unità di misura

Carica elettrica

$$[Q] = C = A \cdot s \quad (C.1)$$

Costante dielettrica del vuoto

$$[\epsilon_0] = \frac{C^2}{Nm^2} = \frac{F}{m} \quad (C.2)$$

Campo elettrico

$$[E] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m} \quad (C.3)$$

Potenziale elettrico

$$[V] = V = \frac{J}{C} \quad (C.4)$$

Capacità

$$[C] = F = \frac{C}{V} \quad (C.5)$$

C.1.2 Costanti

ϵ_0 - Costante dielettrica del vuoto

$$\epsilon_0 \simeq \frac{1}{4\pi} \frac{1}{9} 10^{-9} \frac{C^2}{Nm^2} \quad (C.6)$$

C.2 Capitolo 2

C.2.1 Unità di misura

$$= \quad (C.7)$$

C.2.2 Costanti

$$= \quad (C.8)$$

C.3 Capitolo 3**C.3.1 Unità di misura**

$$= \quad (C.9)$$

C.3.2 Costanti

$$= \quad (C.10)$$

C.4 Capitolo 4**C.4.1 Unità di misura**

$$= \quad (C.11)$$

C.4.2 Costanti

$$= \quad (C.12)$$

C.5 Capitolo 5**C.5.1 Unità di misura**

Campo di induzione magnetica

$$[B] = T \quad (C.13)$$

Potenziale vettore

$$[A] = T \cdot m \quad (C.14)$$

C.5.2 Costanti

μ_0 - Suscettività magnetica del vuoto

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{N}{A^2} \quad (C.15)$$

C.6 Capitolo 6

C.6.1 Unità di misura

Polarizzazione magnetica

$$[M] = \frac{A}{m} \quad (C.16)$$

C.6.2 Costanti

$$= \quad (C.17)$$

C.7 Capitolo 7

C.7.1 Unità di misura

$$= \quad (C.18)$$

C.7.2 Costanti

$$= \quad (C.19)$$

C.8 Capitolo 8

C.8.1 Unità di misura

$$= \quad (C.20)$$

C.8.2 Costanti

$$= \quad (C.21)$$

C.9 Capitolo 9

C.9.1 Unità di misura

$$= \quad (C.22)$$

C.9.2 Costanti

$$= \quad (C.23)$$