Référence : Amar, Mathéron p 249-251

Formule des compléments

$\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

où $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$

Leçon possible
235
236
239
245

① D'après le principe des zéros isolée (contraposée) il suffit de prouver l'égalité sur $\alpha \in]0,1[$

② En utilisant Fubini on obtient

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \left(\int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt\right)\left(\int_0^\infty s^{-\alpha} e^{-s}\, ds\right)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty s^{-\alpha} t^{\alpha-1} e^{-(s+t)}\, dt\, ds$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha e^{-(s+t)}\, ds\, \frac{dt}{t}$$

On réalise le changement de variable suivant

$\begin{cases} u = s+t \\ v = \frac{s}{t} \end{cases}$ le jacobien vaut $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{t} & -\frac{s}{t^2} \end{pmatrix} = \frac{v+1}{t}$

d'où $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^\infty \int_0^\infty v^{-\alpha} e^{-u} \frac{du\, dv}{v+1} = \int_0^\infty \frac{1}{v^\alpha(v+1)} \int_0^\infty e^{-u}\, du\, dv$

$$= \int_0^\infty \frac{v^{-\alpha}}{v+1}\, dv$$

③ Montrons $I_\alpha = \int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$

$t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ continue et en 0 $\frac{1}{t^\alpha(1+t)} \sim \frac{1}{t^\alpha}$ intégrable car $\alpha < 1$

en ∞ $\frac{1}{t^\alpha(1+t)} \sim \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ intégrable car $1 < 1+\alpha$

On pose $f(z) = \dfrac{1}{z^\alpha(1+z)}$ défini et $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$

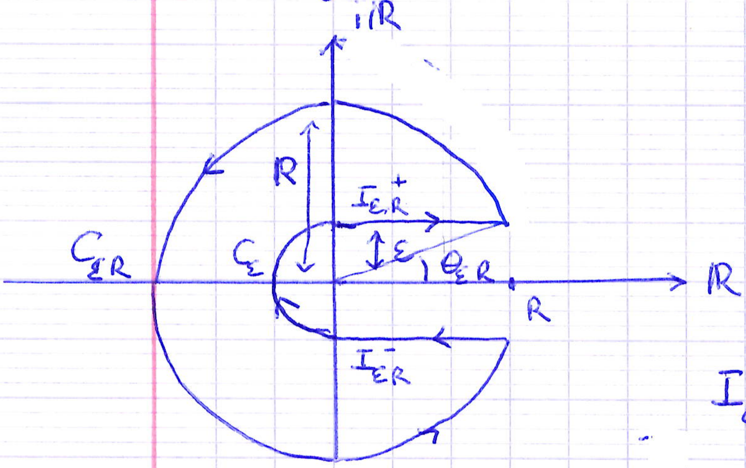
f défini de $\Omega \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{C}$

(4) Pôle de f

f admet un pôle simple en -1

et $\text{Res}(f,-1) = \lim_{z\to -1} (1+z) f(z) = \dfrac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha}$

(5) Definition d'un lacet orienté



Pour $0 < \varepsilon < 1 < R$

$C_\varepsilon = \{|z| = \varepsilon \mid \text{Re}(z) \leq 0\}$

$C_{\varepsilon R} = \{Re^{i\theta} \mid |\theta| \geq \theta_{\varepsilon,R}\}$ $\theta \in [-\pi, \pi]$

avec $\theta_{\varepsilon,R} = \text{Arctan}\left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}\right)$

$I^\pm_{\varepsilon R} = \{\pm i\varepsilon, \pm i\varepsilon + \sqrt{R^2-\varepsilon^2}\}$

On définit le chemin orienté suivant

$\gamma_{\varepsilon,R} = C_\varepsilon \cup I^+_{\varepsilon,R} \cup C_{\varepsilon,R} \cup I^-_{\varepsilon R}$

(6) On applique le théorème des résidus

$$\int_{\gamma_{\varepsilon R}} f(z)\,dz = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$$

- sur C_ε on a $\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)dz\right| \leq \dfrac{1}{\varepsilon^\alpha(1-\varepsilon)} \times \pi\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

- sur $C_{\varepsilon R}$ on a $\left|\int_{C_{\varepsilon,R}} f(z)dz\right| \leq 2\pi \dfrac{R^{1-\alpha}}{R-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

- sur $I^+_{\varepsilon R}$ $\displaystyle\int_{I^+_{\varepsilon R}} f(z)dz = \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} f(\varepsilon i + t)dt = \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} \frac{dt}{(t+\varepsilon i)^\alpha(1+t+\varepsilon i)}$

D'après le théorème de convergence dominé

sur $]0, \sqrt{R^2-\varepsilon^2}[$ $\quad |f(\varepsilon i + t)| \leq \dfrac{1}{|t-\varepsilon|^\alpha(1+t)}$

et on trouve $\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{I^+_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = I_\alpha$

De la même manière on trouve $\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{I^-_{\varepsilon,R}} f(z)dz = -e^{-2i\pi\alpha} I_\alpha$

donc $(1-e^{-2i\pi\alpha}) I_\alpha = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$ ce qui donne $I_\alpha = \dfrac{2i\pi}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}} = \dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$