Leçon 245 : Fonction d'une variable complexe exemples et applications

[AMR] : Amar, Matheron - Analyse complexe
[TAU] : Tauvel, Analyse complexe pour la licence 3
[RUD] : Rudin, Analyse réelle et complexe

I Fonctions holomorphes

I.1 $\mathbb{C}$-dérivabilité

[AMR] p66 - 68

Def 1 Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $a \in \Omega$ si $f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe dans $\mathbb{C}$

Ex 2 : $z \mapsto z$ $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$

Ex 3 : $z \mapsto \bar{z}$ de classe C^∞ mais non $\mathbb{C}$-dérivable

Prop 4 : somme produit et composé de fonctions $\mathbb{C}$-dérivable est $\mathbb{C}$-dérivable

Ex 5 : les fonctions polynomiale sont $\mathbb{C}$-dérivable

Def 6 : $f : \Omega \to \mathbb{C}$ différentiable en a si il existe $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-linéaire tel que $f(a+h) = f(a) + T(h) + o(h)$

Prop 7 on a les équivalences suivante
(i) f est $\mathbb{C}$-dérivable
(ii) f est différentiable en a et $df(a)$ est une similitude directe
(iii) f est différentiable et $df(a)$ est $\mathbb{C}$-linéaire

Cor 8 : f est $\mathbb{C}$-dérivable alors elle est différentiable la reciproque est fausse

Prop 9 : $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable ssi f est différentiable et vérifie les équations de Cauchy-Riemann $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ $u = \mathrm{Re}(f)$, $v = \mathrm{Im}(f)$, $z = x + iy$

I.2 Holomorphie et Analycité

[TAU] p33 - 41

Def 10 : U ouvert de $\mathbb{C}$ f est holomorphe sur U si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de U

Ex 11 : une serie entière est holomorphe sur son disque ouvert de convergence

Th 12 : $\sum a_n z^n$ est infiniment dérivable en tout point de son disque de convergence et ses dérivées successives sont les fonctions sommes des séries entières dérivées successives

Def 13 : f développable en serie entière au point z_0 s'il existe $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence normal et un voisinage V de z_0 tels que $\forall z \in V$
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

[TAU] p41

Def 14 : f est analytique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ si elle admet un développement en série entière en tout point de U

p50

Ex 15 $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (z-a)^n \quad \forall a \in \mathbb{C}^* \ |z-a| < |a|$

Th 16 (Principe du prolongement analytique)
U ouvert de $\mathbb{C}$ connexe $z \in U$ f analytique alors on a les équivalences :
(i) f est identiquement nulle dans U
(ii) f est identiquement nulle dans un voisinage de a
(iii) $f^{(n)}(a) = 0 \quad \forall n \geq 0$

p52

Cor 17 U ouvert connexe de $\mathbb{C}$ f, g analytique si f et g coincident sur un voisinage d'un point de U alors $f = g$

Def 18 : A est dit une partie localement fini de U * si (i) $A \cap V$ fini V voisinage de $z \in U$
$\Leftrightarrow$ (ii) $\forall K$ compact de U $A \cap K$ fini
$\Leftrightarrow$ (iii) A est une partie discrète et fermé de U

Th 19 U ouvert connexe de $\mathbb{C}$ f analytique non identiquement nulle l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est une partie localement fini de U (principe des zéros isolés)

Prop 20 : U ouvert connexe f analytique non identiquement nulle sur U $u \in U$ zéros de f, on a les équivalence :
(i) On a $f^{(k)}(u) \neq 0$ et $\forall p \in \{1 \dots k-1\}$ $f^{(p)}(u) = 0$
(ii) le premier terme non nul du DSE de f au voisinage de u et de la forme $a_k (z-u)^k$ $a_k \neq 0$
(iii) $\exists V$ voisinage de u dans U et h analytique tel que $f(z) = (z-u)^k h(u)$ et $h(u) \neq 0$ au voisinage de u k est l'ordre ou la multiplicité du zéros u

II Formule de Cauchy et conséquence

II. Formule de Cauchy

[TAU] p 68-78

Def 21. On appelle "arc" tout application de $[a,b]$ compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. $\gamma(a)$ est l'origine, $\gamma(b)$, l'extrémité. γ est fermé si $\gamma(a)=\gamma(b)$. L'arc γ est simple si γ est injective et réduit à un point si γ constante.

Def 22 γ est appelé chemin si elle est C^1 par morceaux.

Prop 23 deux chemin $([a,b],\gamma)$ et $([c,d],\delta)$ sont équivalent si (i) φ bijective croissante C^1 par morceaux
(ii) φ^{-1} réciproque bijection C^1 par morceaux aussi
(iii) $\gamma = \delta \circ \varphi$

Def 24 $([a,b],\gamma)$ chemin f continue sur $\mathrm{Im}(\gamma)$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

Prop 25 $([a,b],\gamma)$ $([c,d],\delta)$ deux chemin équivalents f continue sur $\mathrm{Im}\,\gamma \cup \mathrm{Im}\,\delta$ alors $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\delta f(z)\,dz$

Def 26 $([a,b],\gamma)$ chemin fermé et $U = \mathbb{C}\setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ ouvert connexe

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt$$ c'est l'indice de z par rapport à γ

Th 27 $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est à valeur dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de U et nulle sur la composante connexe non bornée de U ($\mathrm{ind}_\gamma(z)$ "nombre de tour")

Ex 28 Soit γ un cercle $C(a,r)$ orienté dans le sens direct. On a $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z-a|>r \\ 1 & \text{si } |z-a|<r \end{cases}$

Th 29 f continue sur U on a les équivalences suivantes :
(i) f admet une primitive dans U
(ii) pour tout chemin fermé γ on a $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Th 30 (Théorème de Goursat)
Soient U ouvert de $\mathbb{C}$, $w \in U$ f continue sur U et holomorphe sur $U\setminus\{w\}$. Alors pour tout triangle $\Delta \subset U$ on a

$$\int_{\partial\Delta} f(\xi)\,d\xi = 0$$

Th 31 (Théorème de Cauchy pour un convexe)
Soient U ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $w \in U$, f continue sur U, holomorphe sur $U\setminus\{w\}$ alors f possède une primitive et $\forall \gamma$ chemin fermé $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Th 32 (Formule de Cauchy pour un convexe) γ chemin fermé dans U ouvert convexe $z \in U \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ et f holomorphe sur U

$$f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$$

[TAU]

Th 33 Soient U ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$, f holomorphe. Alors :
(i) f est analytique et le rayon de convergence de la série de taylor au point a est au moins égal à $d(a, \mathbb{C}\setminus U)$
(ii) Si U convexe et γ chemin fermé tel que $a \notin \mathrm{Im}\,\gamma$ on a $f^{(n)}(a)\,\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{n!}{2i\pi}\int \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\,d\xi$

Th 34 (Théorème de Morera) U ouvert, f continue on a les équivalences suivantes :
(i) f holomorphe sur U
(ii) f analytique sur U
(iii) f possède localement une primitive dans U
(iv) pour tout triangle $\Delta \subset U$ $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$

II.2 Inégalité de Cauchy et Conséquences

Th 35 (Formule de la moyenne) f holomorphe sur un disque $D(z_0,r)$ [TAU] p 85

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\,e^{-in\theta}\,d\theta \quad \forall n \geq 0$$

Cor 36 Si f holomorphe dans un disque $D(z_0,R)$ alors $\forall n \geq 0$ $\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| \leq \frac{M(r)}{r^n}$ avec $M(r) = \sup_{|z-z_0|=r}\{|f(z)|\}$

Rq 37. De plus si on a égalité pour un n_0 et un $r<R$ alors $f(z)$ est de la forme $\lambda(z-z_0)$ avec λ constante

Th 38 (Convergence de Weierstrass)
Si (f_n) est une suite de fonctions holomorphes convergent uniformément sur des compact vers une fonction f alors f holomorphe et (f_n') convergent uniformément vers f' sur les compact

[TAU] p85

Th 39 (Théorème de Liouville) Tout fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ bornée est constante

Th 40 (Théorème de d'Alembert) Tout polynome de $\mathbb{C}[X]$ non constant admet au moins une racine ($\mathbb{C}$ algébriquement clos)

[AM] p91-92

Th 41 (Montel) $(f_n)_n$ suite de fonction holomorphes (f_n) uniformément bornée sur les compact alors elle admet une sous suite qui converge uniformément vers f holomorphe sur les compacts

[RUD] DVP p330

Appli 42 (Théorème des representations conformes) Tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$ est biholomorphe au disque unité ouvert.

[AM] p94-95

Th 43 (holomorphie sous l'intégrale) $(T, \mathcal{T}, \mu)$ espace mesuré et soit $F : \Omega \times T \to \mathbb{C}$ vérifiant :

(i) Pour tout $z \in \Omega$ $t \mapsto F(z,t)$ mesurable

(ii) Pour tout $t \in T$ $z \mapsto F(z,t)$ holomorphe dans Ω

(iii) $\forall K$ compact de Ω $\exists u_K \in \mathcal{L}^1(T,\mu)$ telle que $|F(z,t)| \leq u_K(t)$

Alors $f(z) = \int_T F(z,t)\, d\mu$ est une fonction holomorphe

Ex 44 : $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ défini une fonction holomorphe dans le demi plan $\{Re(z) > 0\}$

DVP

Appli 45 : Γ admet un prolongement analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$

II.3 Principe du maximum

[TAU] p85 - 88

Def 46 On dit que f continue sur U verifie le principe du maximum dans U si elle constante au voisinage de tout point $a \in U$ tel que f admet un maximum relatif en a.

Prop 47 : U ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$, f continue sur $\bar{U}$ verifiant le principe du maximum alors $|f(z)| \leq \sup_{\partial U} |f|$

Th 48 : (Lemme de Schwartz) f holomorphe sur le disque unité et $f(0) = 0$ et $|f(z)| < 1$ alors $\forall z \in D(0,1)$ on a

(i) $|f(z)| \leq |z|$ (ii) $|f'(0)| \leq 1$

Appli 49 : Les automorphisme du disque unité sont les $z \mapsto \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ avec $|\lambda| = 1$ $a \in D(0,1)$

III Fonctions méromorphes et théorème des résidus

III.1 Singularité et série de Laurent

[TAU] p98 - p100

Def 50 : U ouvert de $\mathbb{C}$ f holomorphe sur $U \setminus \{a\}$ alors on dit que f admet une singularité isolée en a si f prolongeable en a alors on dis que a est un point régulier

Def 51 f admet une singularité isolée en a alors il y a 3 cas

(i) a est un point régulier

(ii) $\exists a_{-1}, \dots, a_{-m}$ non nulle telle que a soit un point régulier pour la fonction $z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}$ on dit que a est un pôle d'ordre m $m=1$ alors le pôle est simple

(iii) $\forall r > 0$ $D(a,r) \subset U$ $f(D(a,r) \setminus \{a\})$ est dense dans $\mathbb{C}$ on dit que a est une singularité essentielle

Prop 52 : on a équivalence entre f admet un pôle d'ordre m en a et $\exists r$ tel que g holomorphe sur $D(a,r)$ avec $g(a) \neq 0$ et $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$ sur $D(a,r) \setminus \{a\}$

Def 53 f est dite méromorphe si il existe A localement fini telle que f holomorphe sur $U \setminus A$ avec A l'ensemble des pôles de f

[AM] p137-141

Def 54 : on appelle $C(a,r,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R\}$ la couronne ouverte associé à a, r et R.

Def 55 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n z^n$ est la serie de Laurent associé à la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

Prop 56 : f holomorphe sur la couronne $C(a,r,R)$ alors il existe une unique $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tq $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n$

III.2 Théorème des Résidus

Def 57 f holomorphe sur un disque épointé elle admet un développement en serie de Laurent et $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} (z-a)^{-n}$ est la partie principale et α_{-1} le residu noté $Res(f,a)$

Th 58 : U ouvert de $\mathbb{C}$ f holomorphe sur $U \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$ soit γ lacet tel que $a_k \notin im\, \gamma$ $\forall k$ alors

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} Ind_\gamma(a_k)\, Res(f, a_k)$$

Appli 59 : (Formule des compléments) $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

DVP