Leçon 204 : Connexité : Exemple et applications

[GOU2] Gourdon - Analyse
[QUE] Quéflelec - Topologie
[ROU] Rouvière - Petit guide de calcul différentiel
[RUD] Rudin - Analyse réel et complexe
[H_2G_2 vol 1] Caldero Germani Histoires hédonistes de géométrie et géométrie
[HAU] Hauchecorne - Contre ex

I Espace connexe, généralités

I.1 Définitions

[GOU2] p38-39 On pose (E,d) espace métrique et $A \subset E$ partie de E muni de la distance induite

Prop 1 : les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) Il n'existe pas de partition de E en deux ouvert disjoint non vides
(ii) Il n'existe pas de partition de en deux fermés disjoints non vides
(iii) les seules ouvert-fermés sont E et $\emptyset$

Def 2 : Si E vérifie une des assertions précédentes alors E est dit connexe

Prop 3 : A est connexe ssi l'un des conditions suivantes est vérifiée :
(i) $A \subset O_1 \cup O_2$ avec O_1, O_2 ouvert de E tels que $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$ alors $(A \cap O_1 = \emptyset$ et $A \subset O_2)$ ou $(A \cap O_2 = \emptyset$ et $A \subset O_1)$
(ii) $A \subset F_1 \cup F_2$ avec F_1, F_2 fermés de E tels que $A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$ alors $(A \cap F_1 = \emptyset$ et $A \subset F_2)$ ou $(A \cap F_2 = \emptyset$ et $A \subset F_1)$

Ex 4 : $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe de $\mathbb{R}$ car en prenant $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors $\mathbb{Q} \subset]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$

[GOU2] p106 Prop 5 : (Lemme de passage des douaniers) A partie de E toute partie connexe C qui rencontre l'intérieur de A est l'extérieur de A rencontre aussi la frontière

I.2 Propriétés

[GOU2] p39-40 Th 6 : $f : (E,d) \to (E',d')$ une application continue si E connexe alors $f(E)$ connexe

Prop 7 : On note $D = \{0,1\}$ muni de la distance discrète δ (D, δ est un espace métrique non connexe)
E connexe ssi $\forall f : E \to D$ continue est constante

Prop 8 A partie connexe de E si $B \subset E$ tel que $A \subset B \subset \bar{A}$ alors B est connexe

Prop 9 Soit $(C_i)_{i \in I}$ famille de connexe de E tel que $\exists i_0 \in I \quad \forall i \in I \quad C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$ alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.

Prop 10 Si $(C_i)_{i \in I}$ famille dénombrable de connexe alors si $\forall i \neq 0 \; C_i \cap C_{i-1} \neq \emptyset$ alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ connexe.

Prop 11 $(E_1, d_1), \dots (E_n, d_n)$ espace métrique
$E = \prod_{i \in [\![1,n]\!]} E_i$ est connexe ssi E_i est connexe $\forall i$

Ex 12 Intersection connexe pas toujours connexe
$\mathbb{R}$ connexe $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ connexe car $f : t \mapsto e^{it}$ continue dans $\mathbb{C}$ et $f(\mathbb{R}) = \mathbb{U}$ mais $\mathbb{R} \cap \mathbb{U} = \{-1, 1\}$ non connexe.

[GOU2] p39-40

[HAU] p256

I.3 Composantes connexes.

Def 13 : On définit une relation binaire sur E
$x \sim y \iff \exists C$ connexe de E tel que $x \in C$ et $y \in C$
s'est une relation d'équivalence et on appelle composantes connexes les classe d'équivalence de cette relation.
On note $C(x)$ la composante connexe de x (sa classe d'équivalence)

Prop 14 • $C(x)$ est la réunion des connexes contenant x c'est le plus grand connexe contenant x
• $C(x)$ est un fermé

Prop 15 : Si $E = \bigsqcup_{i \in I} \omega_i$ avec ω_i des ouvert connexe non vides alors ω_i sont les composantes connexes de E

Prop 16 : Soit h homoemorphisme de E sur F
h échange les composante connexe de E et F c'est à dire $h(C(x)) = C(h(x)) \quad x \in E$

I.4 Connexité par arcs

[QUE] p 109

Def 17 : Soit $f : [0,1] \to E$ tel que $f(0) = a$ et $f(1) = b$
f est le chemin joignant a à b dans E a est l'origine et b l'extrémité

Def 18 : E est dit connexe par arcs si pour deux point a, b quelconque de E il existe un chemin joignant a à b

TR 19 :
- E connexe par arcs alors E connexe
- Reciproque vraie si E ouvert d'un evn

Ex 20 : la reciproque est fausse en générale
l'adhérence du graphe de $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ est connexe mais non connexe par arc (Fig 1)

II Connexité est applications

II.1 En analyse réelle

[GOUL] 41

TR 21 : Les parties connexe de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$

TR 22 (Théorème des valeur intermédiaire) Soit I intervalle f une application continue alors $f(I)$ est intervalle

[GOUZ] p47

Appli 23 (théorème de Darboux) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable soit I un intervalle ouvert non vide $f'(I)$ est un intervalle

[ROU] p96 - 97

TR 24 (inégalité de la moyenne)
E, F evn U ouvert de E Soit $[a,b] \subset U$
Si $\forall x \in [a,b]$ on a $\|Df(x)\| \leq K$ $K \in \mathbb{R}_+$
alors $\|f(b) - f(a)\| \leq K\|b-a\|$

Cor 25 : Si U ouvert connexe et si $Df(x) = 0$ $\forall x \in U$ alors f est constante sur U.

DVP

TR 26 (Théorème du point fixe de Brouwer) Soit B la boule unité fermé toute application de B dans B admet au moins un point fixe

[QUE] p 126

TR 27 (Unicité globale de Cauchy Lipschitz)
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue et localement lipschitzienne en la deuxième variable soit y_1 et y_2 deux solutions sur $I \subset \mathbb{R}$ de $y' = f(x,y)$ alors si y_1 et y_2 égale en un point de I $y_1 = y_2$

II.2 En analyse complexe

[RUD] p245 - 253

Def 28 Si X espace topologique $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ continue $\gamma(\alpha)$ point initial $\gamma(\beta)$ point final. γ est un chemin si elle est C^1-par morceaux si $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ γ est une courbe fermé

TR 29 (indice d'un chemin) γ chemin fermé on définit sur $X \setminus \operatorname{im}\gamma$ $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{z-\xi}$ pour $z \in X \setminus \operatorname{im}\gamma$
cette fonction est à valeur entières sur $X \setminus \operatorname{im}\gamma$ constante sur chaque composante connexe nulle sur sa composante connexe non bornée

Ex 30 si γ est le cercle de centre a et de rayon r orienté positivement
$$\operatorname{Ind}_\gamma = \begin{cases} 1 & \text{si } |z-a| < r \\ 0 & \text{si } |z-a| > r \end{cases}$$

TR 31 Soit Ω ouvert convexe f continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{p\}$ $p \in \Omega$ on a $\forall \gamma$ $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$
γ chemin fermé

TR 32 Soit γ un chemin fermé sur Ω ouvert convexe soit f holomorphe sur Ω $\forall z \in \Omega \setminus \operatorname{im}\gamma$ $f(z)\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{z-\xi}\,d\xi$

TR 33 : Ω un domaine (ouvert connexe) f holomorphe (principe des zéros isolé) On pose $Z(f) = \{a \in \Omega \mid f(a) = 0\}$
Ou $Z(f) = \Omega$ ou $Z(f)$ n'a pas de point d'accumulation dans Ω dans ce cas $\forall a \in Z(f)$ $\exists m$ tel que $f(z) = (z-a)^m g(z)$ avec g holomorphe et $g(a) \neq 0$ de plus $Z(f)$ est au plus dénombrable

TR 34 (prolongement analytique) f, g holomorphe sur un domaine Ω si pour z dans un ensemble admettant un point d'accumulation $f(z) = g(z)$ alors $\forall z \in \Omega$ $f(z) = g(z)$

TR 35 (Théorème de Liouville) Toute fonction holomorphe bornée est constante

TR 36 (Principe du max) Ω domaine f holomorphe sur Ω
$D(a,r)$ $r > 0$ Alors $|f(a)| \leq \max_\theta (f(a + re^{i\theta}))$

Appli 37 (D'Alembert-Gauss) $\mathbb{C}$ est algébriquement clos

III Cas des groupes topologique et des groupes de matrices

[H_2G_2 vol 1] p26 - 39

Def 38 : un groupe topologique est un groupe muni d'une topologie pour laquelle les applications de produit et de passage à l'inverse sont continues

Prop 39 : $GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe topologique

prop 40 : $GL_n(\mathbb{K})$ ouvert dense de $M_n(\mathbb{K})$ $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Appli 41 : $GL_n(\mathbb{C})$ connexe par arc
$GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe

Prop 42 : $C_n(\mathbb{C})$ les matrice à n valeurs propres distinctes $D_n(\mathbb{C})$ les matrice diagonalisable on a $C_n(\mathbb{C}) \subset D_n(\mathbb{C})$ et C_n dense dans $M_n(\mathbb{C})$

Prop 43 : si n entier naturel $r \in \{0, \dots n\}$
(i) l'ensemble O_r des matrice $n \times n$ de rang r est connexe
(ii) l'ensemble P_r des projecteurs de $M_n(\mathbb{C})$ de rang r est connexe
(iii) Les composantes connexes de l'ensemble des projecteurs de $M_n(\mathbb{C})$ sont les P_r $(0 \leq r \leq n)$

Prop 44 : H sous groupe de G
si H et G/H sont connexes alors G connexe

Prop 45 Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est compacte et connexe
le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est compacte mais non connexe
ses composantes connexes sont homéomorphes à $SO_n(\mathbb{R})$.

DVP $\boxed{\text{Theorème 46 } SO_3(\mathbb{R}) \text{ est simple}}$

Th 47 : $O_n(\mathbb{R})$ est engendré par les reflexions
$SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournement
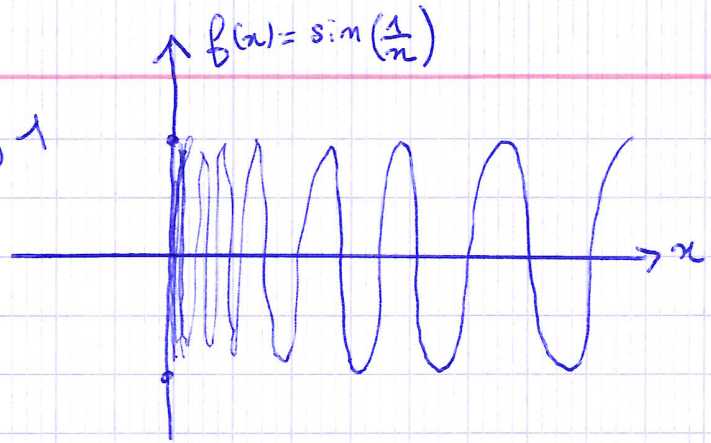
Fig 1