Thm : $\Gamma : \mathcal{P} = \{ z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0 \} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

Γ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ et un prolongement analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$

① Γ bien défini sur $\mathcal{P}$

$$\Gamma(z) = \underbrace{\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt}_{f(z)} + \underbrace{\int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt}_{g(z)}$$

- $\forall t \in [0,1]$, $|e^{-t} t^{z-1}| \leq |t^{z-1}| \leq t^{Re(z)-1}$ intégrable sur $[0,1]$ car $Re(z)-1 > -1$

- $\forall t \in [1,+\infty[$ $|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{Re(z)-1} \underset{t\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ intégrable sur $[1,\infty[$

② f est méromorphe sur $\mathbb{C}$

$$e^{-t} t^{z-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$$

$$\int_0^1 \sum_{n\geq 0} \left| \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \right| dt = \int_0^1 \sum_{n \geq 0} \frac{t^{Re(z)+n-1}}{n!} dt$$

$$= \int_0^1 t^{Re(z)-1} e^t \, dt$$

$$\leq e \int_0^1 t^{Re(z)-1} dt < +\infty$$

On peut appliquer Fubini

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} dt = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{t^{n+z}}{n+z} \right]_0^1$$

$$= \sum_{n \geq 0} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}}_{f_n(z)} = \sum_{n \geq 0} f_n(z)$$

Lemme : Si $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est méromorphe sur U
et si $\forall K \subset U$ compacte $\exists N_K$ tel que $\forall n > N_K$
f_n n'a pas de pôle dans K et si $\sum_{n > N_K} f_n(z)$ converge
uniformément sur K Alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ est méromorphe sur U

$\forall n \in \mathbb{N}$ f_n méromorphe sur $\mathbb{C}$ (avec un seul pôle $-n$)

Soit K compacte de $\mathbb{C}$ $K \subset \overline{D(0, N_K)}$

$\rightarrow$ $\forall n > N_K$ f_n n'a pas de pôles dans K

$\rightarrow$ $\forall z \in K$ $\forall n > N_K$ $|f_n(z)| \leq \frac{1}{n!(n - N_K)}$

$|n+z| \geq n - |z| \geq n - N_K$

donc f est bien méromorphe sur $\mathbb{C}$

3 g est holomorphe sur $\mathbb{C}$

On applique le théorème d'holomorphie sous le signe intégral

$\rightarrow$ $\forall z \in \mathbb{C}$ $t \mapsto e^{-t} t^{z-1}$ mesurable sur $[1, +\infty[$

$\rightarrow$ $\forall t \in [1, +\infty[$ $z \mapsto e^{-t} t^{z-1}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$

$\rightarrow$ Soit $K \subset \mathbb{C}$ compact

$\exists M > 0$ $\forall z \in K$ $Re(z) < M$

$\forall z \in K$ $|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{Re(z)-1}$

$\leq e^{-t} t^{M-1}$ intégrable sur $[1, \infty[$

Donc g est holomorphe

Bilan :

- Γ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$
- Γ admet un prolongement analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$

L'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente et vaut $\frac{\pi}{2}$

① $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{x+k\pi} dx$$

$$\geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

② Montrons que $\int_0^A \frac{\sin x}{x} dx \xrightarrow[A\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$

On pose $f : [0, A] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \longmapsto e^{-xy} \sin(x)$

Montrons que f est intégrable

Par Fubini-Tonelli :

$$\iint_{[0,A]\times\mathbb{R}_+} e^{-xy} |\sin x| \, dx dy = \int_0^A \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy} dy \right) |\sin x| dx = \int_0^A \frac{|\sin x|}{x} dx < \infty$$

f est donc intégrable on applique fubini-lebesgue

$$\int_0^A \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \left(\int_0^A e^{-xy} \sin x \, dx \right) dy$$

③ calcule de $\int_0^A e^{-xy} \sin x \, dx$

$$e^{-xy} \sin x = \mathrm{Im}\left(e^{-xy} e^{ix}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{x(i-y)}\right)$$

$$\int_0^A e^{x(i-y)} dx = \frac{e^{A(i-y)} - 1}{i-y} = \frac{\left(e^{A(i-y)} - 1\right)(i+y)}{-(1+y^2)}$$

$$= -\frac{e^{-yA} e^{i\left(A+\frac{\pi}{2}\right)} - i + y e^{-yA} e^{iA} - y}{1+y^2}$$

Ainsi la partie imaginaire

donne : $\displaystyle\int_0^A e^{-xy}\sin(x)\,dx = \operatorname{Im}\left(\frac{y+i-e^{-yA}e^{i(A+\frac{\pi}{2})}-ye^{-A}e^{iA}}{1+y^2}\right) =$

$$= \frac{1-e^{-yA}\cos A - y\,e^{-yA}\sin(A)}{1+y^2}$$

d'où $\displaystyle\int_0^A \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{1-e^{-yA}\cos(A)-y\,e^{-yA}\sin(A)}{1+y^2}\,dy$

$$= \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} - \int_0^\infty \frac{e^{-yA}(\cos A - y\sin(A))}{1+y^2}\,dy$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{e^{-yA}(\cos A - y\sin(A))}{1+y^2}\,dy$$

Pour $A \geq 1$

on a $\displaystyle\left|\frac{e^{-yA}(\cos(A)+y\sin(A))}{1+y^2}\right| \leq \frac{e^{-y}(1+y)}{1+y^2}$ intégrable

Par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-yA}(\cos(A)+y\sin(A))}{1+y^2}\,dy = \int_0^\infty \lim_{A\to\infty}\frac{e^{-yA}(\cos A + y\sin(A))}{1+y^2}\,dy = 0$$

d'où on a $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$