Référence | Francinou Gianella Nicolas Oraux X-Ens algèbre 3 (p 229)

Leçons
150
152
158
171
203
219

Développement : Ellipsoïde de John Loewner

Enoncé

Soit K compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$ (contenant 0) il existe une unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

Lemme Soit A, B deux matrices réelles symétrique définies positives et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tel que $\alpha+\beta=1$

$$\text{On a } \det(\alpha A+\beta B) > (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$$

Preuve du lemme

Le théorème de pseudo-réduction simultanée donne qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^tPP$ $B = {}^tPDP$

les $\lambda_i > 0$ car B définie positive

$$(\det A)^\alpha (\det B)^\beta = (\det P^2)^\alpha (\det P^2 \det D)^\beta \overset{\text{car } \alpha+\beta=1}{=} \det P^2 \det D^\beta$$

$$\text{et } \det(\alpha A+\beta B) = \det P^2 \det(\alpha I + \beta D)$$

On veut que $\prod_{i=1}^{n} (\alpha+\beta\lambda_i) \geq \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^\beta$

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(\alpha+\beta\lambda_i) \geq \beta \sum_{i=1}^{n} \ln(\lambda_i)$$

On a que $\ln(\alpha+\beta\lambda_i) > \alpha\ln(1) + \beta\ln(\lambda_i) = \beta\ln(\lambda_i)$ car $\ln$ est strictement concave

donc en sommant l'inégalité on a le résultat $\square$

Notons Q (resp. Q^+ resp Q^{++}) l'ensemble des formes quadratique (resp. positives resp. définies positives)

On pose $\mathcal{E}_q = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \leq 1 \}$ $q \in Q^{++}$

① Volume de $\mathcal{E}_q$ ellipsoïde V_q

il existe une BON $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ dans laquelle

$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ avec $a_i > 0$

d'où $V_q = \iint \cdots \int_{a_1 x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1} dx_1 \dots dx_n$

On effectue le changement de variable $x_i = \frac{t_i}{\sqrt{a_i}}$ (C^1 difféomorphisme)

dont le determinant du jacobien vaut $\frac{1}{\sqrt{a_1 \dots a_n}}$

Soit S la matrice de q dans une BON quelconque

il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ ${}^tPDP = S$ $D = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$

$\det(S) = \det(D) = a_1 \dots a_n$ notons le $D(q)$

On a $V_q = \int \cdots \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1} \frac{dx_1 \dots dx_n}{\sqrt{D(q)}} = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}}$ volume de la boule unité

On cherche maintenant à maximiser $D(q)$

On muni Q de la norme $N(q) = \sup_{\|x\| \leq 1} |q(x)|$

On considère alors l'ensemble $A = \{ q \in Q^+ \mid \forall x \in K$ (compact) $q(x) \leq 1 \}$

② Montrons A compact

A est fermé

Soit $(q_n)_n$ une suite de A dans Q convergente vers q

On a $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $|q(x) - q_n(x)| \leq N(q - q_n) \|x\|$

d'où $\lim_{n \to \infty} q_n(x) = q(x)$

donc $\forall x$ $q(x) = \lim_{n \to \infty} q_n(x) \geq 0$ $q(x) = \lim_{n \to \infty} q_n(x) \leq 1$

donc $q \in A$ A est fermé

A bornée

Comme K est d'intérieur non vide
il existe $a \in K$ et $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset K$
Si $\|x\| < r$ alors $x + a \in K$ donc $q(a+x) \leq 1$
de plus on sait que $q(a) = q(a) \leq 1$
Par l'inégalité de Minkowsky on a
$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q(x+a-a)} \leq \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(a)} \leq 2$$
donc $q(x) \leq 4$ si $\|x\| \leq 1$ $|q(x)| = \frac{1}{r^2} q(rx) \leq \frac{4}{r^2}$
d'où $N(q) \leq \frac{4}{r^2}$ donc A borné

A non vide

K compact, il est borné Soit $M > 0$ tel que
$\forall x \in K$ $\|x\| \leq M$ $q(x) = \frac{\|x\|^2}{M^2} \in A$
donc A non vide

Finalement on a bien A compacte non vide de Q

Le determinant est continue donc $q \mapsto D(q)$ est continue sur le compact A. $D(q)$ est donc bornée atteint ses bornes. Il existe $q_0 \in A$ sur lequel elle atteint son maximum
Comme $x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M^2}$ est définie positive
on a $D(q_0) > 0$

3 Unicité de q_0

A convexe, en effet $q, q' \in A$ $\lambda \in [0,1]$
$\forall x \in \mathbb{R}^n$ $0 \leq q(x) \leq 1$ et $0 \leq q'(x) \leq 1$
$0 \leq \lambda q(x) \leq \lambda$ et $0 \leq (1-\lambda) q' \leq 1-\lambda$

d'où $0 \leq \lambda q(x) + (1-\lambda) q'(x) \leq 1$
$\lambda q + (1-\lambda) q' \in A$
A est convexe

Supposons qu'il existe $q \in A$
tel que $D(q) = D(q_0)$ avec $q \neq q_0$

Soit S_0 matrice de q_0
S matrice de q

On a $D\left(\frac{1}{2}(q+q_0)\right) = \det\left(\frac{1}{2}(S+S_0)\right) > (\det S)^{\frac{1}{2}}(\det S_0)^{\frac{1}{2}}$
$> \det(S_0) = D(q_0)$

contradiction $D(q_0)$ maximal