Leçon 235 : Problème d'interversion limite-intégrale

I Interversion et convergence uniforme

I.1. Convergence uniforme et dérivation

$f_n : X \to (E, \|\cdot\|)$
$f : X \to (E, \|\cdot\|)$

Def I.1 Convergence simple $\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$

Def I.2 Convergence uniforme $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N \Rightarrow (\forall x \in X\ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon)$

Rq I.3 La convergence simple ne preserve pas la continuité

Ex I.4 $x \mapsto x^n$ suite de fonctions C^∞ converge vers f non continue

Prop I.5 (f_n) converge uniformément $\boxed{ssi}$ $\mu_n = \sup_{x \in X} \|f_n(x) - f(x)\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Th I.6 si $(f_n)_n$ CU vers f alors $\forall n$ f_n continue en $a \Rightarrow f$ continue en a

Cor I.7 si $(f_n)_n$ CU vers f alors $\forall n$ f_n continue sur $X \Rightarrow f$ continue sur X

Rq I.8 il existe des suites de fonctions qui converge non uniformément vers une fonction continue (c'est une condition suffisante mais non necessaire)

Ex I.9 : e^{-nx} converge simplement vers 0 non uniformément

Rq I.10 La convergence uniforme preserve la continuité mais pas la derivabilité

Ex I.11 : $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ CU vers $|x|$ non dérivable en 0

Th I.12 (f_n) dérivable CS vers f si (f_n') CU sur I f dérivable et $f_n' \xrightarrow[\text{sur } I]{} f'$

Th I.13 (f_n) C^1 CS vers f si (f_n') CU alors f C^1 et $f_n \to f'$

I.2 Interversion limite-limite et limite intégrable sur un segment

Th I.14 (double limite) (f_n) suite de fonction de $X \subset F$ evn de dim $< \infty$ dans E evn complet

(f_n) CU vers f $a \in \bar{X}$ $f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} b_n$ $b_n \xrightarrow[n \to \infty]{} b$ $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$

alors $\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x)$

Cor I.15 On a la même chose pour les serie de fonctions

$\sum f_n$ CU vers S, $f_n \xrightarrow[x \to a]{} b_n$ alors $\sum b_n$ cv S admet une limite en a

$\lim_{x \to a} S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ i.e $\lim_{x \to a} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right)$

Ex. I.16

Th. I.17 $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur $[a, b]$ dans E, $\forall n$ $\int_a^b f_n(x)\,dx$ cv

alors $\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x)\,dx$

Cor I.18 $\sum_n f_n$ CU vers S sur $[a, b]$ $a, b \in E$ evn complet

$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n$

II Grand théorème d'interversion et conséquence

II.1 Théorème fondamentaux

Th. II.1 (convergence monotone) $(f_n)_n$ suite croissante de fonctions mesurable positive alors $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim\limits_{n\to\infty} f_n \, d\mu$

cor II.2 (f_n) suites croissante mesurable positive μ.p.p $\sum\limits_{n\geq 0} \int_X f_n d\mu = \int_X \sum\limits_{n\geq 0} f_n d\mu$

Lem II.3 (Lemme de Fatou) $(f_n)_n$ suite de fonctions mesurable positive alors $0 \leq \int_X \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_X f_n \leq \infty$

Rq : II.4 l'inégalité peut être strict

Ex. II.5 $0 = \int_0^1 \underline{\lim}_{n\to\infty} (n+1) x^n dx < \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_0^1 (n+1) x^n dx = 1$

Th II.6 (convergence dominée) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu.p.p} f$ $\forall n \geq 1$ $|f_n(x)| \leq g(x)$ g intégrable

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu$$

II.2 Conséquence sur les intégrales à paramètre

Th II.7 (Continuité sous le signe intégrale)

- $\forall x \in E$ $t \mapsto f(x,t)$ mesurable
- $\forall t \in X$ $x \mapsto f(x,t)$ continue
- $\exists g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ tq $\forall x \in E$ $\|f(x,t)\| \leq g(t)$

$F(x) = \int_X f(x,t) d\mu(t)$ définie et continue sur X

Th II.8 (Derivation sous le signe intégrale)

- $\forall x \in E$ $t \mapsto f(x,t)$ intégrable
- $\forall t$ $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ existe
- $\exists g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ telle que $\forall x \in E$ $\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right\| \leq g(t)$

alors $F(x) = \int_X f(x,t) d\mu(t)$ dérivable

et $F'(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \, d\mu(t)$

II.3 Théorème d'interversion intégrale-intégrale

Prop II.9 la mesure $\lambda_d = \lambda_1^{\otimes d}$ est la mesure de lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$

Th II.10 (Fubini-Tonelli) $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable avec μ et ν deux mesuré σ-finie sur $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ respectivement

$x \mapsto \int_Y f(x,y) \, d\nu(y)$, et $y \mapsto \int_X f(x,y) \, d\mu(x)$ resp. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ mesurable

et $\int_{X\times Y} f \, d\mu\otimes\nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) d\mu(x)\right) d\nu(y)$

Th II.11 (Fubini-Lebesgue) $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu \otimes \nu)$ alors $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

- $y \mapsto f(x,y)$ ν intégrable μ-p.p $x \mapsto f(x,y)$ μ intégrable ν-p.p
- $y \mapsto \int_X f(x,y) \, d\mu(x)$ defini ν p.p $x \mapsto \int_Y f(x,y) \, d\nu(y)$ défini μ-p.p

DVP $\boxed{\text{Th L'intégrale de Dirichlet et semi-convergente et vaut } \frac{\pi}{2}}$

III Applications

III.1 Application à l'holomorphie

$\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{C}$

Def III.1 f est dite "holomorphe" sur $\mathcal{U}$ si elle est $\mathbb{C}$ dérivable en tout point de $\mathcal{U}$

Déf III.2 f est dite "méromorphe" sur $\mathcal{U}$ si il existe $\mathcal{P}$ ensemble de point isolés de $\mathcal{U}$ tel que f holomorphe sur $\mathcal{U} \setminus \mathcal{P}$ et $\forall p \in \mathcal{P}$ $\exists n \in \mathbb{N}^*, b \in \mathbb{C}^*$ tels que $f(z) \underset{z \to p}{\sim} b(z-p)^{-n}$

DVP

Th. Soit $E = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0 \}$. $\Gamma : E \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$

Γ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$