Leçon 153 : Polynôme d'endomorphisme en dimension finie. Application à la réduction en dim finie

[OA] BMP Objectif Agrégation

[GOU] Gourdon Algèbre

$\mathbb{K}$ corps commutatif E $\mathbb{K}$-ev de dim finie

I Polynôme d'endomorphismes

I.1 L'algèbre $\mathbb{K}[u]$

[GOU] p174

Def 1 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ $P = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i$

- Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on note $P(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i u^i$
- Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ on note $P(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i$

Def 2 : Soit $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $P \longmapsto P(u)$

l'image de φ_u est une $\mathbb{K}$ algèbre notée $\mathbb{K}[u]$

Prop 3 : Si $A = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$ alors ~~$P(A) = A$~~ alors $P(A) = \mathrm{diag}(P(a_1), \dots, P(a_n))$

un polynôme d'une matrice triangulaire est une matrice triangulaire

[OA] p161

Prop 4 : $\mathbb{K}[X]$ algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ aussi

[GOU] p175

Prop 5 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si λ valeur propre de u et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$ alors $P(\lambda) = 0$

Th 6 (lemme des noyaux) :
$u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = P_1 \dots P_k \in \mathbb{K}[X]$ les polynômes P_i étant premier deux à deux alors

$$\mathrm{Ker}\, P(u) = \mathrm{Ker}\, P_1(u) \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}\, P_k(u)$$

I.2 Le polynôme minimal de u

[OA] p161

Def 7 : $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $P \longmapsto P(u)$ est de noyau non trivial (dimension). Comme $\mathbb{K}$ est un corps l'idéal engendré par le noyau est monogène on note π_u l'unique polynome unitaire qui l'engendre : c'est le polynôme minimal de u

Prop 8 : $\mathbb{K}[u] \simeq \mathbb{K}[X]/(\pi_u)$

Prop 9 : Soit $\pi_u = P_1 \dots P_r$ décomposition en facteur premiers deux à deux

$$\mathbb{K}[u] \simeq \mathbb{K}[X]/(\pi_u) \simeq \mathbb{K}[X]/(P_1) \times \dots \times \mathbb{K}[X]/(P_r)$$

Par le lemme chinois.

Ex 10 : Soit p un projecteur alors $p^2 = p$ donc $X(X-1)$ est annulateur p n'annule pas de polynôme de degré 1 donc $X(X-1)$ polynôme minimal et $\mathbb{K}[p] \simeq \mathbb{K}[X]/(X) \times \mathbb{K}[X]/(X-1)$

[OA] p161 - p162

Prop 11 : Si F est un sous-espace vectoriel stable par u alors $\pi_{u|F} \mid \pi_u$

Prop 12 : Si $E = F_1 \oplus F_2$ avec F_1, F_2 stable par u on a $\pi_u = \mathrm{ppcm}(\pi_{u|F_1}, \pi_{u|F_2})$

Prop 13 : F sev stable par u alors

$$\deg(\pi_{u|F}) = \dim F = \inf\{p \in \mathbb{N},\ (x, u(x), \dots, u^p(x)) \text{ est lié}\}$$

[GOU] p176

Prop 14 : λ valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ ssi $\pi_u(\lambda) = 0$
λ racine du polynôme minimal de u.

I.3 Polynôme caractéristique

[GOU] p162

Def 15 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $\chi_A(X) = \det(A - X I_n)$
Si A est la matrice associé à $u \in \mathcal{L}(E)$ on notera χ_u ce polynôme

Prop 16 : $\chi_A(0) = \det A$ et $\chi_{PAP^{-1}} = \chi_A$
(le polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$ ne dépend pas de la base)

$\chi_{{}^tA} = \chi_A$

Prop 17 : les valeurs propres de u sont exactement les racine de χ_u.

Prop 18 : Si $\mathbb{K}$ algébriquement clos tout $u \in \mathcal{L}(E)$ admet au moins une valeur propres.

Prop 19 : $\chi_u = (-1)^n X^n$ $\boxed{\text{ssi}}$ u est nilpotent.

p163

Th 20 : (Cayley-Hamilton) $u \in \mathcal{L}(E)$ $\chi_u(u) = 0$

[GOU] p176

Rq 21 : on dit que le polynôme minimal de u divise le polynôme annulateur $\pi_u \mid \chi_u$

[OA] p163

Prop 22 ~~$u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si χ_u est scindé racine simple~~

[GOU1] p 164 Appli 23 : Si $\lambda \in \mathbb{K}$ racine de χ_u d'ordre m_λ alors $\dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$

II Polynômes d'endomorphisme : un outils pour la réduction

II.1 Application à la diagonalisation.

[GOU1] p 163 164 Def 24 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de vecteur propres de u

A diagonisable si A semblable à une matrice diag

Prop 25 : u diagonalisable ssi sa matrice est diagonalisable

Prop 26 : Si χ_u est scindé racine simple alors u est diagonalisable

Prop 27 : les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) u diagonalisable
(ii) χ_u est scindé et pour tout λ_i racine d'ordre m_{λ_i} on a $m_{\lambda_i} = \dim(E_{\lambda_i})$ avec E_{λ_i} sev propre de λ_i
(iii) les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de u vérifie $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$

Prop 28 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et F un sev de E stable par u. Alors $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ est diagonalisable

[OA] p 165 Prop 29 : Si il existe un polynôme annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$ scindé racine simple alors u est diagonalisable

[GOU1] p 166 Prop 30 : Si u, v diagonalisable et commutent, il existe une base commune de diagonalisation (codiagonalisable)

DEV Appli 31 : (Burside) Tout sous groupe d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini

DVP TR 32 : (Réduction d'endomorphismes normaux)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal (qui commutent avec ${}^t u$) alors il existe une BON de E dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$

où $\forall i \in [\![1,r]\!]$ $\lambda_i \in \mathbb{R}$
$\forall j \in [\![1,s]\!]$ $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$

II.2 Application à la trigonalisation

Def 33 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

[GOU1] p 164 [OA] p 166 Prop 34 : Les assertions suivantes sont équivalentes
(i) u trigonalisable
(ii) il existe un polynôme annulateur scindée
(iii) π_u le polynôme minimal est scindée
(iv) χ_u le polynôme caractéristique est scindée

Cor 35 : Si $\mathbb{K}$ algébriquement clos tout endomorphisme de E est trigonalisable

[GOU1] p 166 Prop 36 : Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable et commutent alors il existe une base de trigonalisation commune (ie u et v sont cotrigonalisable)

II.3 Décomposition de Dunford

DVP Th 37 : (Décomposition de Dunford) : Soit u tel que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ alors il existe un unique couple $(d, n) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tels que (i) d diagonalisable (ii) n nilpotente (iii) $d + n = u$ (iv) $d \circ n = n \circ d$
de plus d et n sont des polynômes en u

Ex 38 : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Ex 39 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
car $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne commutent pas.

III Applications

III.1 Calcul de puissances.

Ex 40 : On effectue la division euclidienne de X^n par P où P est un polynôme annulateur de u : $X^n = PQ + R$ avec $\deg P > \deg R$
d'où $u^n = R(u)$
Si on prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ on trouve par cette méthode $A^n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} A + \frac{2^n + (-1)^n}{3} I$

Prop 41 : On peut utiliser la décomposition de Dunford avec $A = D + N$ $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k N^{n-k}$ car D et N commutent

III.2 Calcul de l'inverse

[GOU1] p178

Ex 42 : Si u est inversible et admet un polynôme minimal alors u^{-1} est un polynôme en u

En dimension fini ~~det(x≠0) donc~~ $\chi_u(0) = \det(u) \neq 0$ donc $X \nmid P$ sinon en supposant qu'il existe P tel que $XP = \Pi_u$ (ce polynôme minimal) alors $\Pi_u(u) = 0 = XP(u)$ d'où $P(u) = 0$ ce qui est absurde

X étant irréductible donc premier à Π_u on utilise Bézout $UX + V\Pi_u = 1$ d'où $u^{-1} = U(u)$

Ex 43 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^2 = A + 2I$ donc $A(A - I_n) = 2I$

donc $A^{-1} = \dfrac{A - I}{2}$

III.3 Exponentielle d'endomorphisme

[GOU1] p184

Def 44 : $u \in \mathcal{L}_c(E)$ (endomorphisme continu)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n \in \mathcal{L}_c(E)$ est appelée exponentielle de u noté e^u ou $\exp(u)$

Prop 45 : $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$ avec v inversible alors

$$\exp(v^{-1} u v) = v^{-1} \exp(u) v$$

Prop 46 : $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $vu = uv$

alors $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v) = \exp(v)\exp(u)$

p186 Prop 47 : $\det(\exp(u)) = \exp(\operatorname{tr} u)$

Appli 48 : à l'aide de la décomposition de Dunford on peut trouver une autre expression de l'exponentielle $u = d + n$ [GOU1] p186

$$e^u = e^{d+n} = e^d e^n.$$