Leçon 203 : Utilisation de la notion de compacité

[GOU2] Gourdon Analyse
[HL] Hirsh - Lacombe - Elements d'Analyse fonctionelle
[POM] Pommelet - Cours d'analyse
[FGN Anal2] Francinou Gianella Nicolas Oraux X-ENS analyse 2

I Généralités sur la compacité

I.1 Définitions et caractérisations

[GOU2] p27-30

Soit (E,d) espace métrique

Def 1 : Un espace topologique (X,τ) est dit compact si de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement fini

Ex 2 : Tout espace métrique fini est compact

Prop 3 : Un espace métrique compact est borné

Prop 4 (Aspect dual de Borel Lebesgue) (E,d) est compact ssi de tout intersection vide de fermé on peut extraire une sous famille fini d'intersection vide

Prop 5 : $A \subset E$ une partie compacte de E ssi de tout recourrement d'ouvert de A il existe un sous recourrement fini

Prop 6 : Une réunion finie de parties compact est compact

Prop 7 : Une intersection de compacts est compacte

Th 8 : (Bolzano Weierstrass) (E,d) compact ssi de toute suite de point de E on peut en extraire une sous-suite convergente

Def 9 : E est précompacte si pour tout $\varepsilon>0$ il existe un recourrement fini de E par des boules ouverte de rayon ε.

Cor 10 : (Bolzano-Weierstrass) (E,d) compact si on a ou bien toute suite de E admet au moins une valeur d'adhérence ou toute partie infinie admet un point d'accumulation dans E

Prop 11 : Un espace compact est complet

Prop 12 : si E compact $(x_n)_n$ suite de E admettant une unique valeur d'adhérence.

Prop 13 : E compact ssi E precompacte et complet

p32

I.2 Extraction diagonale

[HL] p11-12

Def 14 $A \subset X$, espace topologique A partie relativement compacte si l'adhérence de A est compacte

Th 15 : Soit $(E_p, d_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'espace métriques et $\forall (x_{m,p})_{m\in\mathbb{N}}$ suite de E_p. Si E_p relativement compacte $\forall p\in\mathbb{N}$ il existe $\phi : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall p\in\mathbb{N}$ $(x_{\phi(m),p})_m$ est convergente dans X_p

Th 16 (Tychonoff) Soit $(E_p)_{p\in\mathbb{N}}$ suite d'espace métrique compacts $X = \prod_{p\in\mathbb{N}} X_p$ muni de la distance produit est compact

II Fonctions continue sur un compact

II.1 Continuité et extrémas

[GOU2] p31

Prop 17 : (E,d) et (F,δ) espace métrique avec E compact et $f : E\to F$ continue alors $f(E)$ est compact

Prop 18 Soit $f : (E,d)\to(F,\delta)$ continue et bijective si E,d compact alors f^{-1} continue (f est un homéomorphisme

Prop 19 : $f : (E,d)\to\mathbb{R}$ application continue avec (E,d) compact Alors f est bornée et atteint ses bornes. $\exists c,d\in E$ tel que $f(c)=\inf_{x\in E} f(x)$ $f(d)=\sup_{x\in E}(f(x))$

[GOU] p73-74

Th 20 (Rolle) : $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ application vérifiant :
- f continue sur $[a,b]$
- f dérivable sur $]a,b[$
- $f(a)=f(b)$

alors $\exists c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$ (cf fig 1)

(concavité du logarithme)

DVP

Lemme 21 : Soient $A,B\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$ tel que $\alpha+\beta=1$ alors on a $\det(\alpha A+\beta B)\geq(\det A)^\alpha(\det B)^\beta$

Appli 22 : (Ellipsoide de John Loewner) Soit K compact d'intérieur non vide alors il existe un unique ellipsoide de volume minimal centrée en 0 contenant K

II.2 Théorème de Heine.

[PUH] p65 -68

Th23 (Heine) : f application continue de (E,d) dans (F,δ) deux espace métrique f uniformément continue.

Ex 24 $\sin x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$

Ex 25 Toute fonctions continue périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est uniformément continue

Ex 26 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$ alors f uniformément continue

[FGN analyse 2] p156

Th27 (Dini) Soit $a<b$ $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ suite de fonctions continues convergent simplement vers f si $(f_n)_n$ est croissante la convergence est uniforme

II.3 Théorème du point fixe

[GOU2] p34

Th28 (Théorème du point fixe) (E,d) espace métrique compact $f : E \to E$ vérifiant $\forall (x,y)$ $x \neq y$ $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ f admet un unique point fixe

Rq 29 : si on suppose E complet seulement le résultat est faux $f(x) = \begin{cases} 1 & x<0 \\ x + \frac{1}{1+x} & x>0 \end{cases}$ n'a pas de point fixe

DVP

Th30 (Théorème du point fixe de Brouwer)

Toute application continue de $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ admet un point fixe (où $\mathbb{B}^n$ est la boule unité fermé)

II.4 Théorème de Weierstrass

[GOU2] p235

Th31 (Théorème de Weierstrass)

Toute fonction continue $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes

DVP p242

Th 32 : (Polynôme de Berstein) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ $B_n(f) : I \to \mathbb{C}$ défini par $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ $(B_n f)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$

III Compacité dans les evn

III.1 En dimension finie

[GOUL] p50

On fixe $(E, \|\cdot\|)$ evn de dimension fini

Th 34 : Dans un evn de dimension finies toutes les normes sont équivalentes

cor 35 Tout application linéaire de E est continue

cor 36 : E est complet

cor 37 : Touts ev de E est fermé

cor 38 : les parties compactes d'un evn sont les fermés bornés

Th 39 : (Riez) la boule unité fermé de E est compacte ssi E est bien de dimension fini

III.2 Dimension infinie et Espace de fonctions

[HL] 27 -39

$C^{\mathbb{K}}(X)$ l'espace des fonctionc continues de $X \to \mathbb{K}$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Def40 $h \in H \subset C^{\mathbb{R}}(X)$ est dite séparante si $\forall (x,y) \in X$ $x \neq y \Rightarrow h(x) \neq h(y)$

Def41 : $H \subset C^{\mathbb{R}}(X)$ est réticulé si $\forall f,g \in H$ $\sup(f,g) \in H$ et $\inf(f,g) \in H$

Th 42 : H sev de $C^{\mathbb{R}}(X)$ réticulé, séparant et contenant les fonctions constantes alors H est dense dans $C^{\mathbb{R}}(X)$

Th 43 : (Stone Weierstrass, cas réel) Toute sous algèbre de $C^{\mathbb{R}}(X)$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $C^{\mathbb{R}}(X)$

Def44 : $H \subset C^{\mathbb{K}}(X)$ est auto conjugué si pour $h \in H$ $\bar{h}$ définit par $\overline{h(x)}$ l'est aussi

Th45 (Stone Weierstrass cas complexe)

Toute sous algèbre séparante, autoconjugué contenant les fonctions constantes est dense dans $C^{\mathbb{C}}(X)$

Def46 $H \subset C^{\mathbb{K}}(X)$ équicontinue en un point x_0 de X si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \eta$ $\forall x \in X$ $d(x,x_0) < \eta \Rightarrow \forall h \in H$ $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$

Th47 (Ascoli) Une partie de $C^{\mathbb{K}}(X)$ est relativement compacte ssi elle est bornée et équicontinue

Fig