Analytisk mekanik

Inverterad pendel

Jesper Wingren

Jw223rn

1fy901

Innehållsförteckning

Introduktion

Ett datorprojekt har utförts med syftet att studera egenskaper hos en rörelseekvation framtagen med Lagranges ekvation på en inverterad pendel. Projektet gick ut på att i första hand komma fram till en rörelseekvation genom att arbeta igenom Lagranges metod. Denna rörelseekvation användes senare i matlab för att studera dess egenskaper.

Matematisk modell

Analytisk modell

Den analytiska modellen för att beräkna en pendels vinkel är p(t) = $p_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} * t\right)$.

Utgår även härifrån att startvinkeln är pi / 4, g är 9,81 och längden är 1 meter.

Modell för datorberäkning

Den matematiska modellen för rörelseekvationen ser ut som följande.

Storheterna och beteckningarna som användes var,

p – pendelns utslagsvinkel = pi / 4 (om inget annat uppges)

g – tyngdaccelerationen = 9,81 m/s^2

l – pendelns längd = 1m

m -pendelns massa

w – pendels referensfrekvens = $\sqrt{\frac{g}{l}}$

v – frekvensen hos oscillatorerna i upphängningspunkten

a – amplituden hos oscillatorerna i upphängningspunkten = 0.1m (om inget annat uppges)

Lagrangefunktionen L beskrivs som L = T – U där T är den kinetiska energin för pendeln och U är den potentiella energin för pendeln. Pendelns koordinater kan enligt uppgiften beskrivas som r = (x, y) = (l sin(p), -l cos(p) – a cos(vt)). L kan även beskrivas som L = $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$. Då x och y är beskrivna i r så kan vi byta ut dessa i ekvationen. Ekvationen blir då följande, L = $\frac{1}{2}m(l^2\dot{p}^2cos^2p + l^2\dot{p}^2sin^2p + \ 2la\dot{p}\sin(p)\sin(vt) + a^2v^2\sin(vt)) - mgl\cos(p) + mga\cos(vt)$. Där p står för vinkelhastigheten det vill säga första derivatan av p med avseende på tiden.

L differentieras sedan med hjälp av Lagranges ekvation, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right) - \ \frac{\partial L}{\partial p} = 0$.

Differentialekvationen blir $\ddot{p} \ = -\frac{g}{l} * \sin\dot{p} - a * \ w^2 * \cos(v * t) * \sin(\dot{p}) - a * v^2 * \cos(v * t)$ som är rörelseekvationen för pendeln.

För att göra beräkningar och dra slutsatser med denna rörelsefunktion behövs ett program som gör det åt dig och i detta fall används matlab och funktionen ode45.

Matlab-Programmet

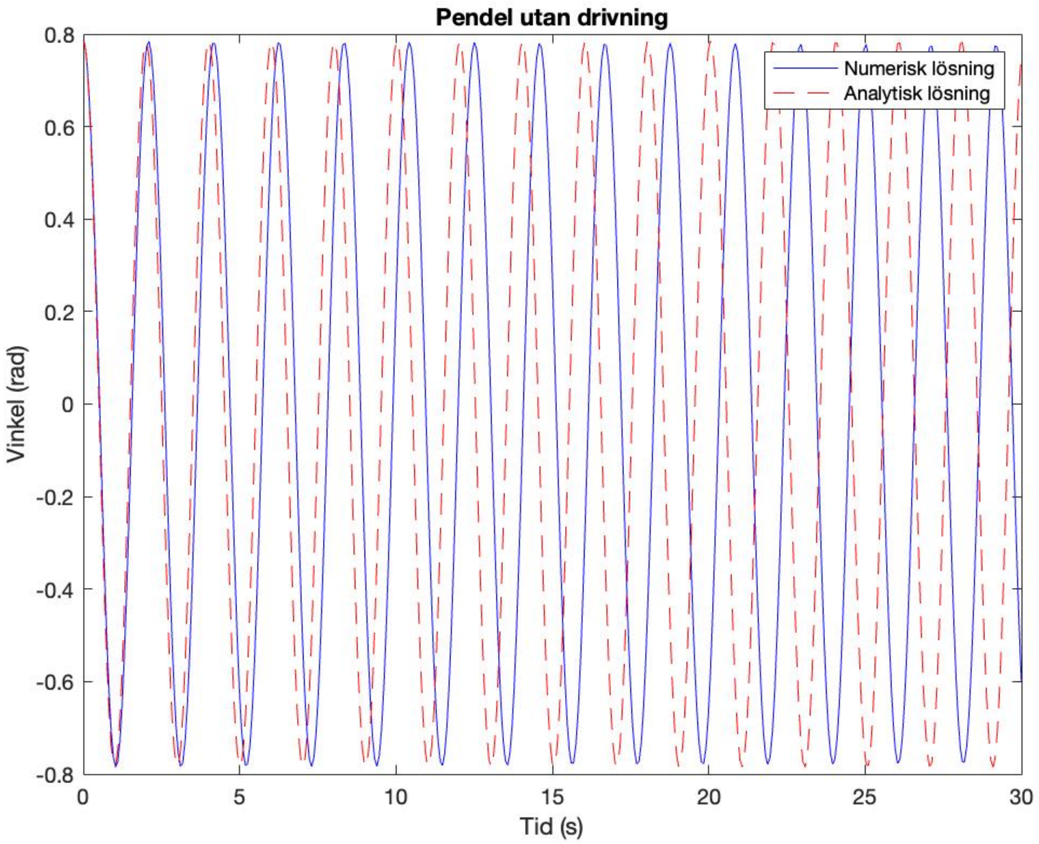
Matlab programmet består först utav att de variabler som används definieras enligt uppgiften som ska göras. Sedan definieras differentialekvationen som en variabel och även tidsspannet som ska beräknas. Differentialekvationen som sätts in ser ut som följande, y(2); $-\frac{g}{l} * \sin\big(y(1)\big) - a * \ w^2 * \cos(v * t) * \sin\big(y(1)\big) - a * v^2 * \cos(v * t)$ där y(1) är densamma som p och y(2) densamma som $\dot{p}$. Startvinkeln och den initierande vinkelhastigheten ansätts också, om inget annat sägs så ansätts startvinkeln till pi/4 och den inledande vinkelhastigheten till 0. När allt är definierat enligt uppgiften så körs funktionen, tiden, vinkelhastigheten och startvinkeln igenom ode45 funktionen i matlab. Denna funktion skickar tillbaka en tabell med tiden samt pendelns utslagsvinkel i radianer. Vinklarna extraheras sedan och via plot med tiden och vinklarna så plottas resultatet.

Resultat

Pendel utan drivning

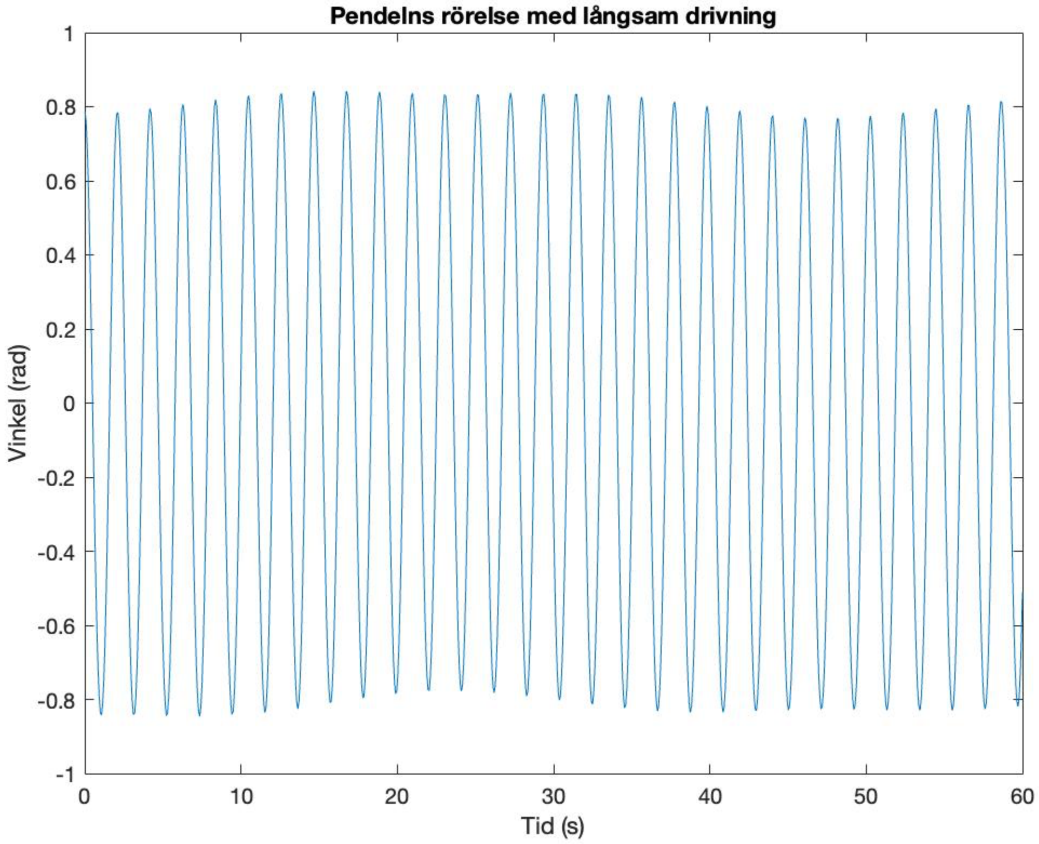
Pendel utan drivning med både den numeriska samt analytiska resultatet visas.

Tidsintervallet är satt till 30 sekunder och startvinkeln är satt till pi dividerat med 4.



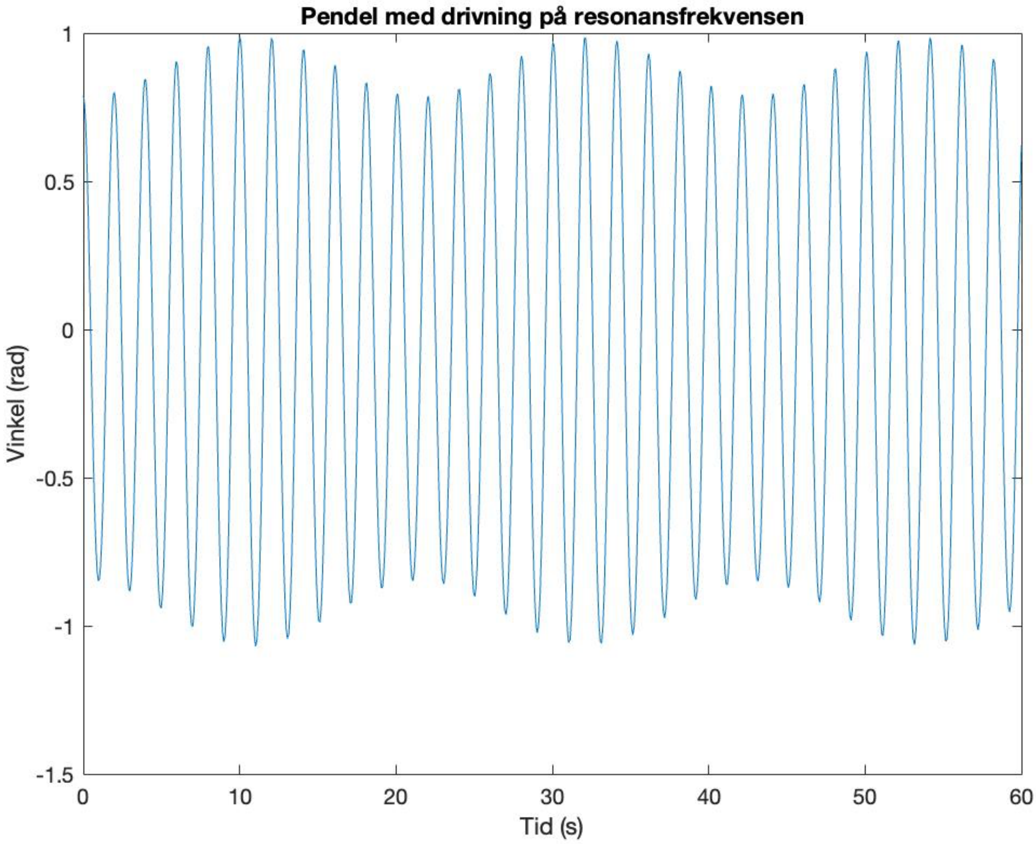
Pendel med långsam drivning

Pendel med en långsam drivning, där v är satt till ett lågt värde, i detta fall som 0,1. Startvinkeln är pi dividerat med 4 och tidsintervallet i denna är satt till 60 sekunder för att tydligare visa någon förändring. En långsam drivning menas att den är låg vid jämförelse med andra egna naturliga frekvenser eller resonansfrekvenser.



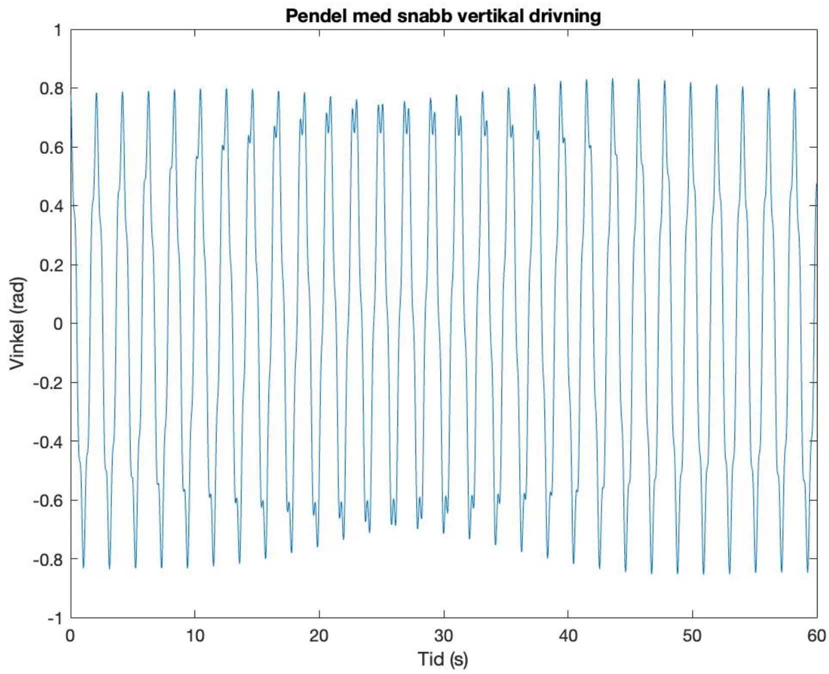
Pendel med drivning på resonansfrekvensen

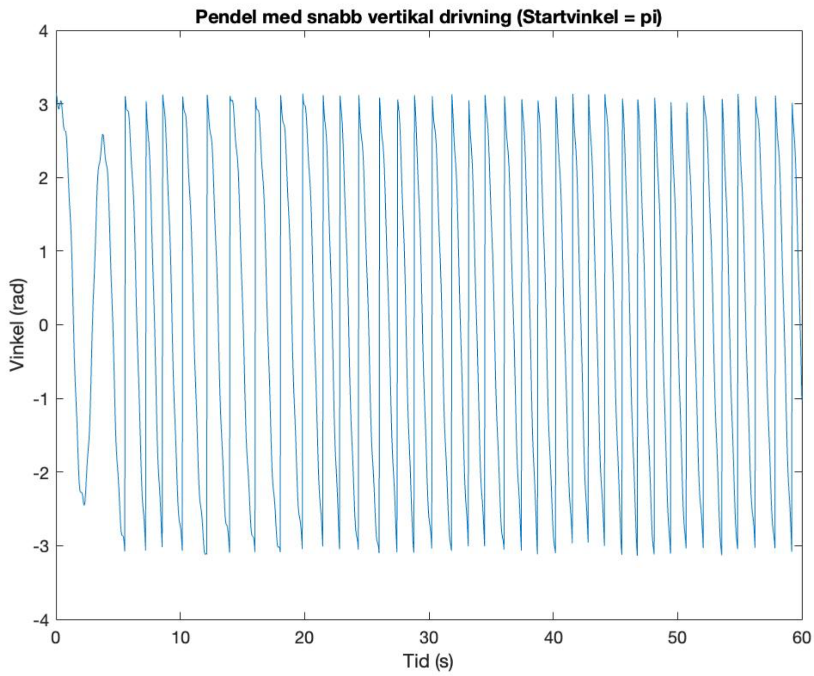
Pendel med drivning på resonansfrekvensen. I denna uppgift är v satt att vara samma som w, startvinkeln är pi dividerat med 4 och tidsintervallet är satt till 60 sekunder.



Pendel med snabb drivning

Pendel med snabb drivning innebär att v är satt till ett högt värde som i detta fall är 15. Tidsintervallet är satt till 60 sekunder och startvinkeln i första bilder är pi dividerat med 4 och i andra bilden satt till pi. En snabb drivning menas att den är hög vid jämförelse med andra egna naturliga frekvenser eller resonansfrekvenser.





Slutsats

Slutsats kring pendel utan drivning

Vid jämförelsen av de analytiska och numeriska modellerna så kan man inte se speciellt stor skillnad. Det man kan se är att den enligt den analytiska modellen så pendlar den någon enstaka gång mer än enligt den numeriska modellen. Detta beror på att den analytiska inte är helt korrekt utan lite förenklad men är inget som märks tydligt på ett kortare intervall. Skulle man däremot ta ett större intervall kan man anta att avståndet mellan modellerna kommer öka.

Slutsats kring pendel med olika drivningar

Vid analys av grafen som visar en pendel med långsam drivning kan man dra slutsatsen att den pendlar lite mer åt varje håll i omgångar. Det vill säga den pendlar mer upp åt ena hållet ett tag för att senare pendla högre åt andra hållet. Det kan ses att detta sker vid en viss höjd. När pendeln drivs på resonansfrekvensen pendlar den högt åt båda hållen för att sedan minska höjd för att sedan öka men är hela tiden nästan symmetrisk det vill säga att den gungar ungefär lika högt åt båda hållen. Vid en snabbare drivning kan man se att vinkelhastigheten ökar precis vid vändtillfället och att pendelns hastighet nästan stannar till precis innan vändningen. Detta blir ännu tydligare när pendeln minskar i höjd efter ca 25 sekunder och håller sig där ett par sekunder innan höjden ökar igen. Med en startvinkel på pi så kan man se att pendeln pendlar lite långsammare till en början innan den stabiliserar sig och pendlar mer symmetrisk. Man kan även här se de små ”hoppen” i grafen nära vändningspunkten som även finns i den med snabb drivning och en annan startvinkel.