AM2 → P7 → 7/MAIO/2020

1) DERIVADAS PARCIAIS DE ORDEM n

$z = f(x,y)$

Ordem 1

$$z \to x \to \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$z \to y \to \frac{\partial z}{\partial y}$$

$\# \; 2^1 = 2$

Ordem 2

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y)$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y)} \quad (1)$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx}(x,y)} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y)$$

$\# \; 2^2 = 4$

Ordem 3

ordem ooo

$\# \; 2^n$

~~Regra~~

(1) = (2)

derivadas "mistas"

~~Teorema de Schwartz~~

$\# \; 2^3 = 8$

Seja $z = f(x,y)$ uma função diferenciável que admite derivadas parciais e que são contínuas

SE $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0}$ (1)

ENTÃO f é HARMÓNICA

(1) Equação de Laplace

(1) é uma equação diferencial

Estamos perante uma equação diferencial com derivadas parciais, logo é uma EDP PDE

Outras EDPs

- Equação de Poisson
- Equação da onda
- Equação Transf. calor ooo

Exercício As funções seguintes são harmónicas! 3/4

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ ✗ b) $g(x,y) = x^2 - y^2$ ✓

c) $h(x,y) = e^x \cos y + e^y \sin x$ ✓

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow 2+2=0$$
$$\Leftrightarrow 4 = 0 \quad \text{P.F}$$

a) i) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2$

$\cdot\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2) = 2x + 0 = \underline{2x}$

ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2y) = 2$

4/4

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \overset{?}{=} 0 \ ✓$$

$h(x,y) = e^x \cos y + e^y \sin x$

1º Passo

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos y\, e^x + e^y \cos x) = \cos y\, e^x - e^y \sin x$$

... TPC

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y + e^y \sin x)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) + \frac{\partial}{\partial x}(e^y \sin x)$$
$$= \cos y \frac{\partial}{\partial x}(e^x) + e^y \frac{\partial}{\partial x}(\sin x)$$
$$= \cos y\, e^x + e^y \cos x$$

$(f+g)' = f' + g'$

$(cf)' = cf'$

$(e^f)' = f' e^f$

$(\sin f)' = f' \cos f$