Investigação Operacional - Atividade 3

PL:

$\text{Min } Z = 16x_1 + 14x_2$ $\qquad$ $\text{Max } Z' = -16x_1 - 14x_2$

s.a.

- $10x_1 + 4x_2 \geq 120 \; (\times(-1))$ $\quad$ • $-10x_1 - 4x_2 \leq -120$ $\quad$ • $-10x_1 - 4x_2 + x_3 = -120$
- $3x_1 + 4x_2 \geq 60 \; (\times(-1))$ $\rightarrow$ • $-3x_1 - 4x_2 \leq -60$ $\xrightarrow{+\text{ slacks}}$ • $-3x_1 - 4x_2 + x_4 = -60$
- $x_1 + x_2 \leq 20$ $\quad$ • $x_1 + x_2 \leq 20$ $\quad$ • $x_1 + x_2 + x_5 = 20$
- $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ $\quad$ • $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ $\quad$ • $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

a) método dual do Simplex

		-16	-14	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	0	-10	-4	1	0	0	-120
x_4	0	-3	-4	0	1	0	-60
x_5	0	1	1	0	0	1	20
$z_j - c_j$		16	14	0	0	0	0

$\frac{16}{|-10|} = 1{,}6 \qquad \frac{14}{|-4|} = 3{,}5$

SBNA: $x = (0, 0, -120, -60, 20)$

- - - - -

		-16	-14	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	-16	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	0	12
x_4	0	0	$-\frac{14}{5}$	$-\frac{3}{10}$	1	0	-24
x_5	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	1	8
$z_j - c_j$		0	$\frac{38}{5}$	$\frac{8}{5}$	0	0	-192

$(1)' = -\frac{1}{10}(1)$

$(2)' = (2) + 3(1)'$

$(3)' = (3) - (1)'$

$\frac{\frac{38}{5}}{\left|-\frac{14}{5}\right|} = \frac{19}{7} \qquad \frac{\frac{8}{5}}{\left|-\frac{3}{10}\right|} = \frac{16}{3}$

SBNA: $x = (12, 0, 0, -24, 8)$

- - - - -

		-16	-14	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	-16	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{60}{7}$
x_2	-14	0	1	$\frac{3}{28}$	$-\frac{5}{14}$	0	$\frac{60}{7}$
x_5	0	0	0	$\frac{1}{28}$	$\frac{3}{14}$	1	$\frac{20}{7}$
$z_j - c_j$		0	0	$\frac{11}{14}$	$\frac{19}{7}$	0	$-\frac{1800}{7}$

$(1)'' = (1)' - \frac{2}{5}(2)''$

$(2)'' = -\frac{5}{14}(2)'$

$(3)'' = (3)' - \frac{3}{5}(2)''$

Como todos os valores da coluna b são maiores ou iguais a zero (≥ 0) este é o quadro ótimo. Assim:

- $Z' = -\frac{1800}{7} \Rightarrow Z = \frac{1800}{7}$
- SBA: $x^* = \left(\frac{60}{7}, \frac{60}{7}, 0, 0, \frac{20}{7}\right)$

b) formulação do problema dual

$\boxed{\text{PRIMAL}}$ $\longleftrightarrow$ $\boxed{\text{DUAL}}$

PRIMAL

$\text{Min } z = 16x_1 + 14x_2$

s.a.

- $10x_1 + 4x_2 \geq 120$
- $3x_1 + 4x_2 \geq 60$
- $x_1 + x_2 \leq 20$
- $x_1 \geq 0 \, , \, x_2 \geq 0$

DUAL

$\text{Max } zd = 120u_1 + 60u_2 + 20u_3$

s.a.

- $10u_1 + 3u_2 + u_3 \leq 16$
- $4u_1 + 4u_2 + u_3 \leq 14$
- $u_1 \geq 0 \, , \, u_2 \geq 0 \, , \, u_3 \leq 0$

c) solução ótima do problema dual / valor ótimo da sua função objetivo

Como o valor ótimo da função objetivo do dual e do primal são iguais, $zd = z = \frac{1800}{7}$.

Dividindo a tabela da solução ótima do primal podemos obter a solução ótima do dual.

		-16	-14	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	-16	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{60}{7}$
x_2	-14	0	1	$\frac{3}{28}$	$-\frac{5}{14}$	0	$\frac{60}{7}$
x_5	0	0	0	$\frac{1}{28}$	$\frac{3}{14}$	1	$\frac{20}{7}$
$z_j - c_j$		0	0	$\frac{11}{14}$	$\frac{10}{7}$	0	$-\frac{1800}{7}$
		$\bar{u}_4$	$\bar{u}_5$	$\bar{u}_1$	$\bar{u}_2$	$\bar{u}_3$	

Deste modo, SBA: $x^*\left(\frac{11}{14}, \frac{10}{7}, 0, 0, 0\right)$.