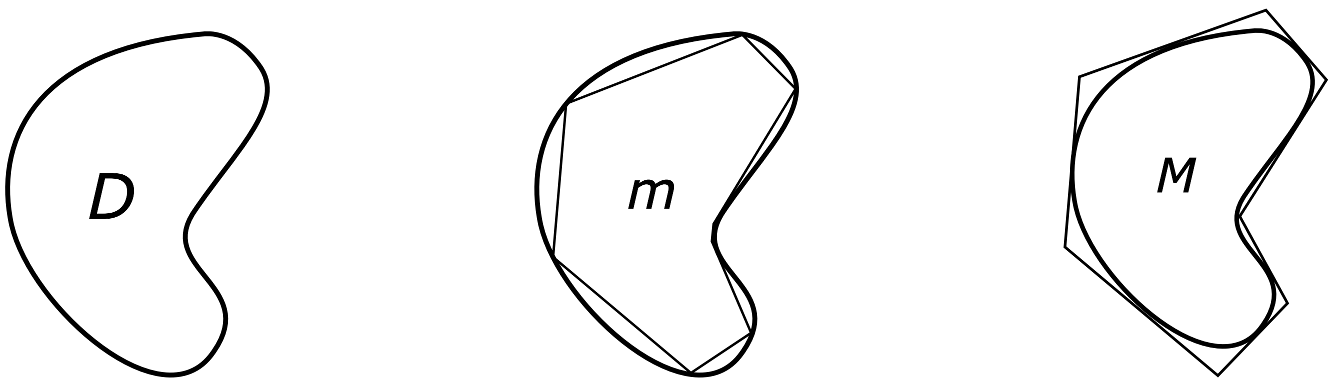
Оглавление

Двойной интеграл

1.1 Площадь плоской фигуры.

Пусть D - фигура на плоскости. Что есть площадь? Если D - треугольник, прямоугольник, многоугольник, то площадь вводится естественным образом.



(a) (b) (c)

Рис. 1: Область D

1 Рассмотрим множество многоугольников m, целиком содержащихся в D (рисунок 1b). $S(m)$ - площадь m

2 Рассмотрим множество многоугольников M, целиком содержащихся в D (рисунок 1c). $S(M)$ - площадь M

Определение. Область D на плоскости, называется квадрируемой, если выполняются следующие условия:

1 $\exists S_* = \sup S(m)$

2 $\exists S^* = \inf S(M)$

3 $S_* = S^*$

При этом величина $S = S_* = S^*$ называется площадью квадрируемой области D $\square$

Определение. Говорят, что множество D точек плоскости имеет площадь 0, если D можно заключить в многоугольник сколь угодно малой площади, то есть

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \text{многоугольник } M : (D \subseteq M) \& (S(M) < \epsilon) \tag{1.1}$$

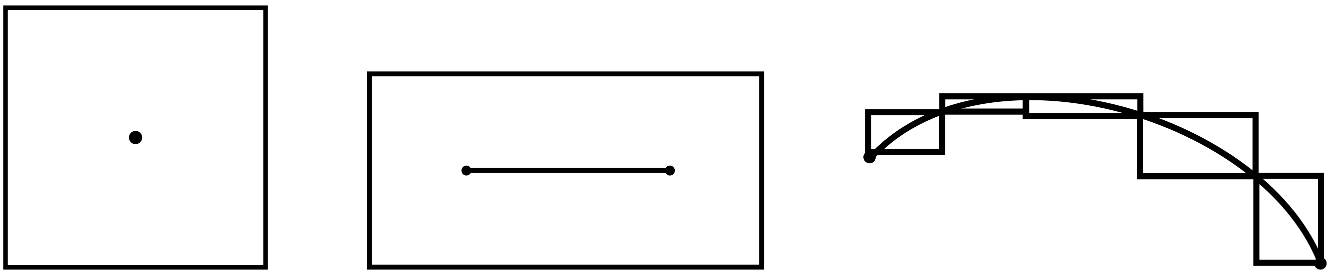
$\square$

Пример. К множествам точек с нулевой плоскостью относятся:

1 точка (рисунок 2a)

2 отрезок (рисунок 2b)

3 гладкая кривая (рисунок 2c)



(a) (b) (c)

Рис. 2: Множества точек плоскости с нулевой площадью

$\square$

Теорема. Пусть D – замкнутая область. Тогда D – квадрируема тогда и только тогда, когда граница D имеет нулевую площадь. $\square$

Теорема. Пусть L – плоская кривая конечной длины. Тогда L имеет площадь нуль. $\square$

Следствие. Если D – плоская область, ограниченная конечным набором гладких кривых, каждая из которых имеет конечную длину, то D – квадрируема. $\square$

Замечание. В дальнейшем, если иное не оговорено, будем рассматривать только квадрируемые области. $\square$

1.2 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

1.2.1 Задача об объёме цилиндрического тела

Пусть:

1 D - область на плоскости xOy

2 $f : D \to R$

3 $f(x, y) \geq 0, (x, y) \in D$

Рассмотрим тело:

$$T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\} \tag{1.2}$$

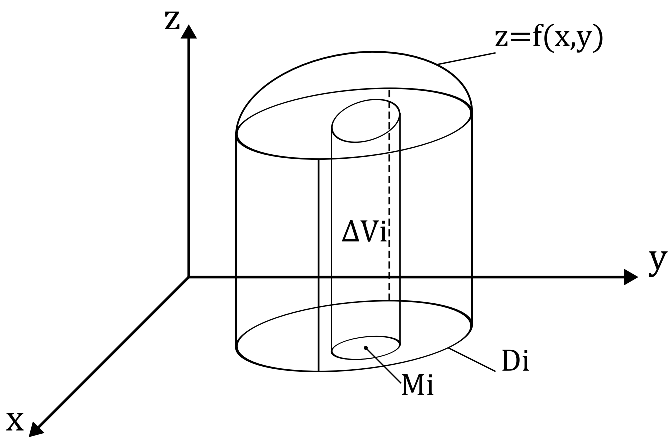


Рис. 3: Тело T

Найдём объём тела T.

1 Раздробим область D на части

$$D = \bigcup_{i=\overline{1,n}} D_i;\ \text{где } intD_i \cap intD_j = \emptyset, i \neq j \tag{1.3}$$

$intD$ - множество внутренних точек области D. Важно отметить, что она должна быть разделена без пересечений, как на рисунке 4b, но допустимо наличие границы, как на рисунке 4a

2 Выберем в каждой из $D_i, i = \overline{1, n}$ точку $M_i \in D$

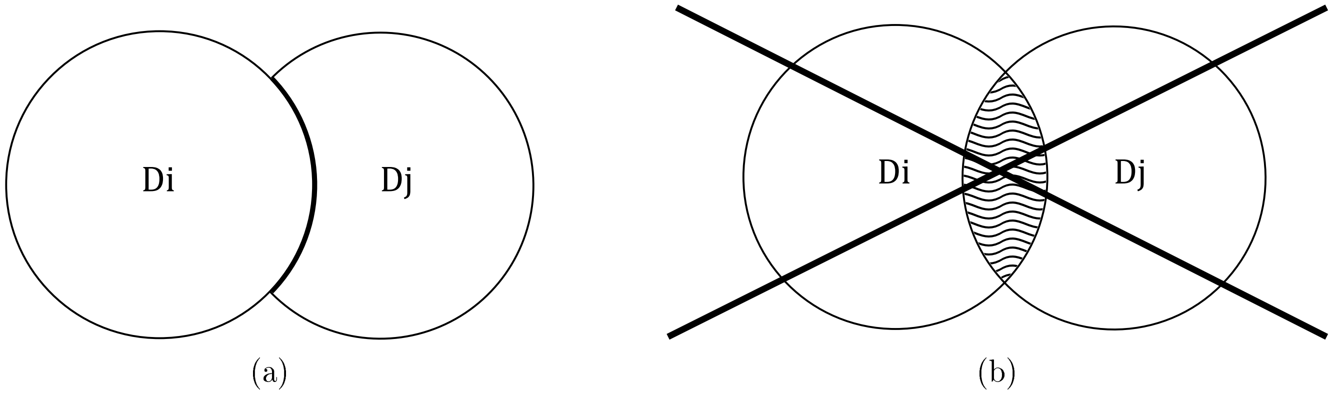


Рис. 4

3 Объём ΔV_i той части тела T, которая расположена над D_i, рассчитывается по формуле:

$$\Delta V_i \approx f_i \cdot S(D_i);\ f_i = f(M_i) \tag{1.4}$$

Считаем, что размеры D_i малы, тогда объём ΔV приближённо равен объёму цилиндра, высота которого $f(M_i)$, а площадь основания $S(D_i)$. Обозначим $\Delta S_i = S_i(D_i),\ i = \overline{1, n}$

4 Объём всего тела T:

$$V(T) = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f_i \Delta S_i \tag{1.5}$$

Определение. Диаметром области D называется число:

$$diamD = \sup |MN|;\ M, N \in D \tag{1.6}$$

□

1.2.2 Задача о массе пластины

Пусть пластина занимает плоскую область D на плоскости Oxy, $f(x, y) \geq 0$ - значение поверхностной плотности материала в точке $(x, y) \in D$. Как найти массу $m(D)$ пластины? Данная задача решается точно так-же, как и предыдущая, потому разбирать повторно мы её не будем.

1.3 Определение двойного интеграла

1.3.1 Двойной интеграл единицы

Пусть D - квадрируемая замкнутая область на Oxy.

Определение. Разбиением области D будет называться множество

$$R = \{D_1, D_2, ..., D_n\}, \tag{1.7}$$

где $D_i \leq D, i = \overline{1,n};\ D = \bigcup D_i;\ intD_i \cap intD_j \neq \emptyset, i \neq j \quad \square$

Определение. Диаметром разбиения R на число $d(R) = \max\limits_{i=\overline{1,n}}(diamD_i) \quad \square$

Пусть $f : D \to R$ - заданная в области D функция двух переменных (не обязательно $f \geq 0$)

Определение. Двойным интегралом функции f по области D называется число

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{d(R)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i, \tag{1.8}$$

где $\Delta S_i = S(D_i),\ M_i \in D,\ i = \overline{1,n},\ R = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ – разбиение обл. D $\square$

Замечание. В определении подразумевается, что указанный предел существует, конечен и не зависит от способа выбора точек $M_i \in D_i$, а так же от способа разбиения области D. $\quad \square$

Определение. Функция f, для которой $\exists \iint\limits_D f dxdy$, называется интегрируемой в области D. $\quad \square$

1.4 Свойства двойного интеграла

1.4.1 Двойной интеграл единицы

Если D имеет конечную площадь $S(D)$, то

$$\iint\limits_D 1dxdy = S(D) \tag{1.9}$$

1.4.2 Линейность

Если f, g интегрируемы в D, то функция $f \pm g$ тоже интегрируема в D, причём:

$$\iint\limits_D (f \pm g) dxdy = \iint\limits_D f dxdy \pm \iint\limits_D dxdy \tag{1.10}$$

Если f интегрируема в D, то $c \cdot f, c = const$ тоже интегрируема в D, причём:

$$\iint\limits_D (c \cdot f) dxdy = c \cdot \iint\limits_D f dxdy \tag{1.11}$$

1.4.3 Аддитивность

Пусть f интегрируема в D_1 и D_2 и $intD_1 \cap intD_2 = \emptyset$. Тогда f интегрируема в $D_1 \cup D_2$, причём:

$$\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f dxdy = \iint\limits_{D_1} f dxdy + \iint\limits_{D_2} f dxdy \tag{1.12}$$

1.4.4 О сохранении интегралом знака функции

Пусть $f(x, y) \geq 0$ в D и f интегрируема в D. Тогда:

$$\iint\limits_D f dxdy \geq 0 \tag{1.13}$$

1.4.5 О сохранении интегралом неравенства подынтегральных функций

Пусть $f(x, y) \geq g(x, y)$ в D и f, g интегрируемы в D. Тогда:

$$\iint\limits_D f dxdy \geq \iint\limits_D g dxdy \tag{1.14}$$

1.4.6 Теорема об оценке модуля двойного интеграла

Пусть f интегрируема в D. Тогда $|f|$ тоже интегрируема в D, причём:

$$\left|\iint\limits_D f dxdy\right| \geq \iint\limits_D f dxdy \tag{1.15}$$

1.4.7 Теорема об оценке двойного интеграла

Пусть f и g интегрируемы в D, $m \leq f \leq M$ в D, $g(x, y) \geq 0$ в D. Тогда:

$$m \iint\limits_D g dxdy \leq \iint\limits_D (f \cdot g) dxdy \leq M \iint\limits_D g dxdy \tag{1.16}$$

Следствие. При $g(x, y) = 1$ в D, имеет место:

$$m \cdot S(D) \leq \iint\limits_D f dxdy \leq M \cdot S(D) \tag{1.17}$$

□

1.4.8 Теорема о среднем значении для двойного интеграла

Пусть D – линейно-связная, квадрируемая замкнутая область, f – непрерывна и интегрируема в D. Тогда $\exists$ точка $M_0(x_0, y_0) \in D$ такая, что

$$f(M_0) = \frac{1}{S(D)} \iint_D f(x, y) dxdy \tag{1.18}$$

Замечание: правую часть формули из свойства 8 называют среднем значением функции f в области D

Определение. Область называется линейно-связной, если её граница является связным множеством. □

Определение. Множество O называется связным, если $\forall$ точек $M_1, M_2 \exists$ кривая $S \in O$ □

1.4.9 Обобщённая теорема о среднем

Пусть:

1 f - непрерывна на D

2 g - интегрируема на D

3 g - знакопостоянна на D

4 D - линейно связная область

Тогда $\exists M_o \in D$ такая, что

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)dxdy = f(M_0)\iint\limits_D g(x,y)dxdy \tag{1.19}$$

Замечание. При $g(x,y) = 1$, свойство g совпадает с свойством 1.4.8. $\square$

1.5 Вычисление двойного интеграла

Пусть D - область на плоскости Oxy. По определению D называется y-правильной, если её можно задать в виде:

$$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, \phi_2(x) \leq y \leq \phi_2(x)\} \tag{1.20}$$

Замечание. Область D является y-правильной тогда и только тогда, когда любая прямая параллельная плоскости Oxy пересекает границу D не более чем в двух точках, либо содержит участок границы целиком. $\square$

Теорема. Пусть:

1 $\exists \iint\limits_D f(x,y)dxdy = I$

2 D является y-правильной и удовлетворяет формуле 1.20

3 $\forall x \in [a,b]\ \exists F(x) = \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy$

Тогда существует повторный интеграл

$$I_{\text{повт.}} = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_a^b F(x)dx = I \tag{1.21}$$

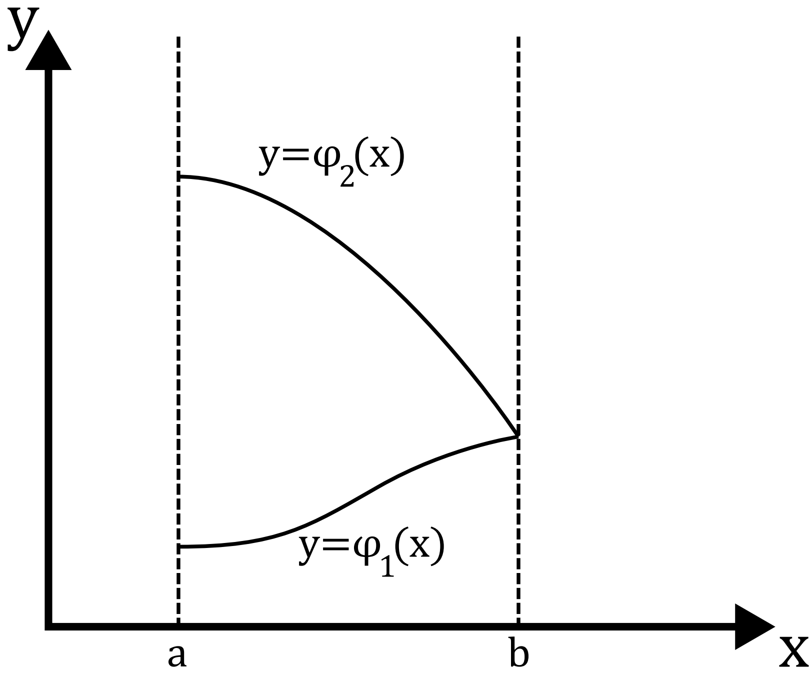


Рис. 5

□

Замечание. Область называется x-правильной, если её можно задать в виде:

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\} \tag{1.22}$$

Пусть:

1 $\exists \iint\limits_D f(x, y)dxdy = I$

2 D является x-правильной и удовлетворяет формуле 1.22

3 $\forall y \in [c, d] \exists F(y) = \int\limits_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y)dx$

Тогда:

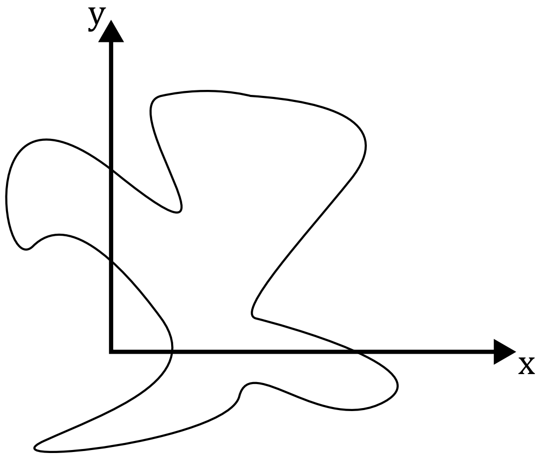
$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y)dx \tag{1.23}$$

□

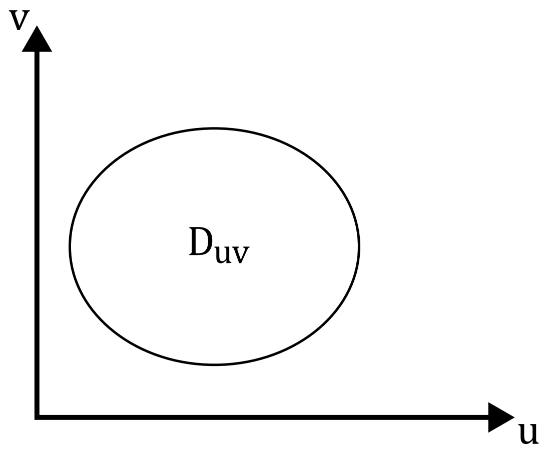
Если область D не является правильной в направлении какой-либо координатной оси (как представлено на рисунке 6а, то её можно разбить на правильные части и использовать свойство аддитивности двойного интеграла.

1.6 Замена переменных в двойном интеграле

Замена переменных позволяет сложные ситуации (как на рисунке 6a) преобразовывать к более простым (рис. 6b).



(a)



(b)

Рис. 6

Пусть $I = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy$. Предположим подобрано преобразование:

$$\Phi : D_{uv} \to D_{xy} \tag{1.24a}$$

$$\Phi : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \tag{1.24b}$$

Теорема (О замене переменных в двойном интеграле)**.** Пусть:

1 $D_{xy} = \Phi(D_{uv})$

2 Φ - биекция.

3 Φ - непрерывна и параллельна диаграмме.

4 Якобиан отображения к Φ:

$$J_\Phi = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0 \text{ в } D_{uv} \tag{1.25}$$

5 f интегрируема в D_{xy}

Тогда справедливо:

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} f(x(u,v), y(u,v))|J_\Phi(u,v)|dudv \tag{1.26}$$

□

Замечание. Аналогия с обычным интегралом:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \xi(t) \\ dx = \xi'(t)dt \\ x = a \Rightarrow t = \xi^{-1}(a) \\ x = b \Rightarrow t = \xi^{-1}(b) \end{vmatrix} = \int\limits_{\xi^{-1}(a)}^{\xi^{-1}(b)} f(\xi(t))\xi'(t)dt \tag{1.27}$$

□

Замечание. Теорема останется справедливой и в случае, когда свойства 2, 3, 4 нарушаются в отдельных точках области D или на конечном числе кривых площади 0. □

Пример. Переход в двойном интеграле к полярным координатам. В прямоугольная декартова система состоит из начала координат и двух взаимно перпендикулярных осей. Положение точки в такой системе задаётся с помощью пары чисел (x, y), геометрическая интерпретация которых такова: первое число x есть проекция точки на ось X, второе число y есть проекция точки на ось Y.

Полярная система координат состоит из начала координат O и луча P. Каждая точка задаётся как пара чисел (ρ, ϕ). ρ задаёт расстояние на луче P, ϕ задаёт угол против часовой стрелки, на который нужно повернуть получившийся радиус-вектор, чтобы достичь точки M

Связь полярной системы координат с декартовой:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\phi) \\ y = \rho\sin(\phi) \end{cases} \qquad J_\Phi(\rho,\phi) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\phi \\ y'_\rho & y'_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi \\ \sin\phi & \rho\cos\phi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\phi + \rho\sin^2\phi = \rho \tag{1.28}$$

Таким образом:

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{\rho\phi}} f(x\cos\phi, y\sin\phi)\rho d\rho d\phi \tag{1.29}$$

□

1.7 Приложения двойного интеграла

1.7.1 Вычисления площади плоской фигуры

$$S(D) = \iint\limits_D 1dxdy \tag{1.30}$$

1.7.2 Вычисление массы пластины

Пусть $f(x, y)$ - значение поверхностной плотности. Тогда масса пластины:

$$m = \iint\limits_D f(x, y)dxdy \tag{1.31}$$

1.7.3 Вычисление координат центра тяжести

Пусть $f(x, y)$ - значение поверхностной плотности. (x_0, y_0) – координаты центра тяжести.

$$x_0 = \frac{1}{m(D)} \iint\limits_D xf(x, y)dxdy \tag{1.32a}$$

$$y_0 = \frac{1}{m(D)} \iint\limits_D yf(x, y)dxdy \tag{1.32b}$$

1.7.4 Вычисление объёма тела

$$T = \{(x, y, z) : x, y \leq D_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\} \tag{1.33a}$$

$$V(T) = \iint\limits_{D_{xy}} [z_2(x, y) - z_1(x, y)]dxdy \tag{1.33b}$$

Теория вероятностей

2.1 Определение вероятности

2.1.1 Случайный эксперимент

Случайным называется такой эксперимент, результат которого невозможно точно предсказать.

Пример (1). Бросают монету. Возможные результаты - выпадение орла или решки

$$\Omega = \{O, P\} \tag{2.1}$$

□

Пример (2). Бросают шестигранную игральную кость.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \tag{2.2}$$

□

Пример (3). Из колоды из 36 карт извлекают две карты

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_i \text{ - номер карты, которую достали при извлечении}\} \tag{2.3}$$

В данном случае, число возможных исходов равно $36 \cdot 35 = 1260$. Можно записать уравнение 2.3 следующим образом:

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_i \in 1, ..., 36, x_1 \neq x_2\} \tag{2.4}$$

□

Пример (4). Бросают монету, до первого появления решки.

$$\Omega = \{1, 2, 3, ...\}, |\Omega| = \aleph_0 \tag{2.5}$$

□

Пример (5)**.** Производят выстрел по плоской мишени. Возможный исход описывается парой (x_1, x_2).

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\} \tag{2.6}$$

□

Определение. Множеством всех возможных исходов случайного эксперимента называется множество всех возможных элементарных исходов. □

Замечание. В этом определении предполагается, что:

1 каждый исход из Ω является делимым и неделимым, то есть не может быть разбит на более мелкие исходы в рамках данного эксперимента

2 в результате проведения эксперимента, обязательно имеет место ровно один элементарный исход

□

Определение (нестрогое)**.** Событием (или, более точно, случайным событием) называется любое подмножество множества Ω элементарных исходов. □

Определение. Говорят, что в результате эксперимента произошло событие A, если наступил один из входящих в A исходов. □

РИСУНОК

Определение. Говорят, что событие A является следствием события B, если наступление события B всегда влечёт наступление события A, то есть $B \subseteq A$ □

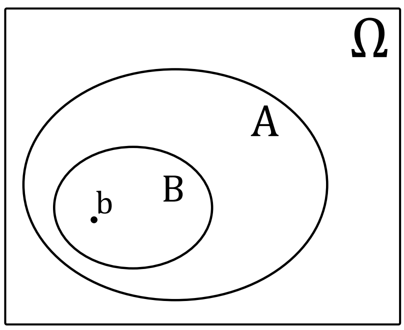


Рис. 1

Замечание. Любое множество Ω содержит подмножества $\emptyset$ и Ω. Соответствующее событие считается невозможным $\emptyset$ и достоверным Ω. Эти события называются несобственными, а все остальные – собственными. $\square$

Пример. Из ящика, содержащего 2 красных и 3 синих шара, извлекают 1 шар.

$$A = \{\text{извлечённый шар красный или синий}\} = \Omega \tag{2.7a}$$

$$B = \{\text{извлечённый шар белый}\} = \emptyset \tag{2.7b}$$

$\square$

Определение. Событие (или случайное событие) - множество, являющееся подмножеством Ω. $\square$

Суммой событий A и B определено как:

$$A + B = A \cup B \tag{2.8}$$

Произведение событий A и B определяется так:

$$A \cdot B = AB = A \cap B \tag{2.9}$$

Событие, противоположное A определено как:

$$\bar{A} = \Omega \setminus A \tag{2.10}$$

2.2 Свойства операций над событиями(основные)

1 $A + B = B + A$

2 $AB = BA$

3 $(A + B) + C = A + (B + C)$

4 $(AB)C = A(BC)$

5 $A(B + C) = AB + AC$

6 $A + BC = (A + B)(A + C)$

7 $\bar{\bar{A}} = A$

8 $A + A = A$

9 $AA = A$

10 $\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$

11 $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$

12 $A \subseteq B \Leftrightarrow A + B = B$

13 $A \subseteq B \Leftrightarrow AB = A$

14 $A \subseteq B \Leftrightarrow \bar{A} \supseteq \bar{B}$

Определения:

1 События A и B являются несовместными, если $A \cdot B = \emptyset$.

2 События $A_1, ..., A_n$ называются попарно несовместными, если любые два из них – несовместные.

3 События $A_1, ..., A_n$ называются несовместными в совокупности, если $A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n = \emptyset$

Очевидно, что если $A_1, ..., A_n$ - попарно несовместны, то они несовместны в совокупности.

2.3 Классическое определение вероятности

Пусть $|\Omega| = N < \infty$, $A \subseteq \Omega; |A| = N_A$ и по условиям эксперимента нет объективных оснований предпочесть тот или иной исход остальным (все исходы равновозможны). Тогда вероятностью осуществления события A называется число:

$$P\{A\} = \frac{N_A}{N} \tag{2.11}$$

Пример. Два раза бросают шестигранную игральную кость. Событие $A = \{\text{сумма выпавших очком больше или равна } 11\}$. $P\{A\} = ?$

Решение: исходом будем считать пару (x_1, x_2), где $x_i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – число, выпавшее на кости. $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}; |\Omega| = N = 36$.

$|A| = ?$; $A = \{(5,6),(6,5),(6,6)\} \Rightarrow |A| = 3$. Считаем все исходы из Ω равновозможными. Используя классическое определение вероятности, получим, что:

$$P\{A\} = \frac{N_A}{N} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \tag{2.12}$$

$\square$

2.3.1 Свойства вероятности

1 $P\{A\} \geq 0$

2 $P\{\Omega\} = 1$

3 Если A, B - несовместные, то

$$P\{A+B\} = P\{A\} + P\{B\} \tag{2.13}$$

Доказательства:

1 $P\{A\} = \frac{N_A}{N} \geq 0$, что следует из $N_A \geq 0, N \geq 0$

2 $P\{\Omega\} = \frac{N_\Omega}{N} = \{N(\Omega) = |\Omega| = N\} = \frac{N}{N} = 1$

3 $P\{A+B\} = \frac{N_{A+B}}{N}$
$= \{N_{A+B} = |A+B| = |A| + |B| - |AB| = N_A + N_B\}$
$= \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P\{A\} + P\{B\}$

2.4 Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение вероятности является обобщением классического на случай бесконечных элементарных исходов. Пусть выполнены следующие условия:

1 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

2 $\mu(\Omega) < \infty$ - некая мера.

$\mu = 1$ - длина

$\mu = 2$ - площадь

$\mu = 3$ - объём

…

3 возможность принадлежности исхода к тому или иному подмножеству Ω не зависит от формы события и его расположения внутри Ω

Тогда вероятность осуществления возможности события A называется число $P\{A\} = \frac{\mu(N_A)}{\mu(N)}$

Пример. Задача о встрече. Два человека договорились встретиться в условленном месте с 12:00 до 13:00. При этом, пришедший ждёт другого человека в течение 15 минут, а потом уходит. Какова вероятность того, что они встретятся, если появление каждого из них равновероятно в любое время в период с 12:00 до 13:00?

Исход: (x_1, x_2), где $x_i \in [0,1]$; - время (в часах после 12:00) появления i-гоо человека в условленном месте. Тогда $\Omega = [0,1] \times [0,1]$.

$$A = \{(x_1, x_2) : |x_1 - x_2| \leq \frac{1}{4}\} \tag{2.14}$$

Используя геометрические определение, получаем:

$$P\{A\} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\mu(\Omega) - 2 \cdot \mu(K)}{\mu(\Omega)} = \frac{1 - 2 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4}}{1} = \frac{7}{16} \tag{2.15}$$

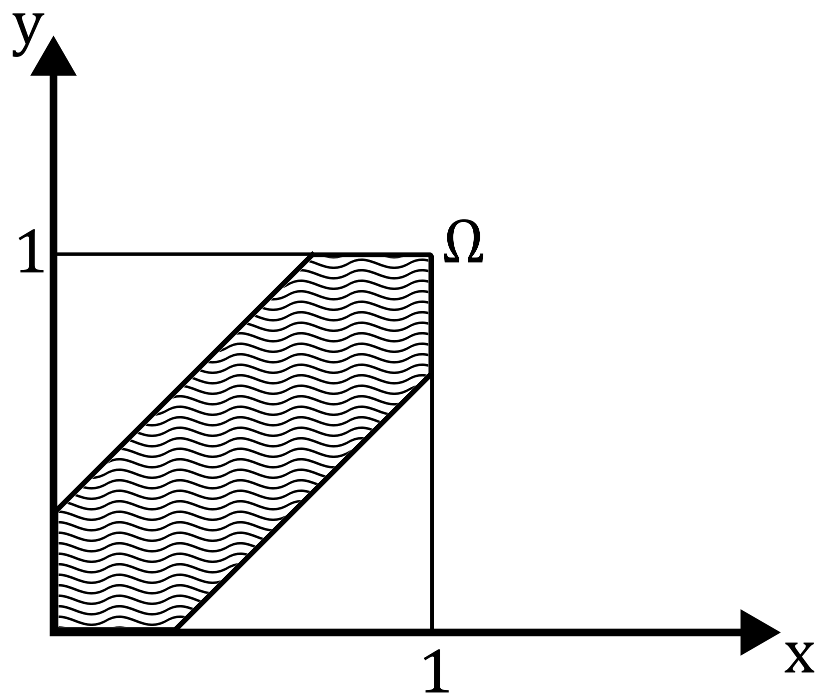


Рис. 2

□