Оглавление

Двойной интеграл

Курс читает Власов Павел Александрович, ФН12 (рабочий кабинет 1024л). Электронная почта: pvbx@mail.ru

1.1 Площадь плоской фигуры.

Пусть D - фигура на плоскости. Что есть площать? Если D - треугольник, прямоугольник, многоугольник, то площадь вводится еcтветсвенным образом.

1 Рассмотрим множествомногоугольником m, целиком содержащихся в D. $S(m)$ - площадь m.

2 TODO:

1.2 Задача, приводящая к понятию двойного интеграла

1.3 Свойства двойного интеграла

1.3.1 Двойной интеграл единицы

Если D имеет конечную полщадь $S(D)$, то

$$\iint_D 1dxdy = S(D) \tag{1.1}$$

1.3.2 Линейность

Если f, g интегрируемы в D, то функция $f \pm g$, то имеет место:

$$\iint_D \dots \tag{1.2}$$

1.3.3 TODO

1.3.4 TODO

1.3.5 TODO

1.3.6 TODO

1.3.7 TODO

1.3.8 Теорема о среднем значении для двойного интеграла

Пусть:

1 D - линейно-связная, квадрируемая замкнутая область

2 f - непрерывна и интегрируема в D

Тогда $\exists$ точка $M_0(x_0, y_0) \in D$ такая, что

$$f(M_0) = \frac{1}{S(D)} \iint_D f(x,y)dxdy \tag{1.3}$$

Замечание: правую часть формулы из свойства 8 называют среднем значением функции f в области D

Множество O называется связным, если $\forall$ точек $M_1, M_2 \exists$ кривая $S \in O$

1.3.9 Обобщённая теорема о среднем

Пусть:

1 f - непрерывна на D

2 g - интегрируема на D

3 g - знакопостоянна на D

4 D - линейно связная область

Тогда $\exists M_o \in D$ такая, что

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)dxdy = f(M_0)\iint_D g(x,y)dxdy \tag{1.4}$$

1.3.10 Вычисление двойного интеграла

Пусть D - область на плоскости Oxy. По определению D называется y-правильной, если её можно задать в виде:

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b, \phi_2(x) \le y \le \phi_2(x)\} \tag{1.5}$$

Замечание: область D является y-правильной тогда и только тогда, когда любая прямая параллельная плоскости Oxy пересекает не более чем в двух точках, либо содержит участок границы целиком.

Теорема. Пусть:

1 $\exists \iint_D f(x,y)dxdy = I$

2 D является y-правильной и удовлетворяет формуле 1.5

3 $\forall x \in [a,b] \exists F(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy$

Тогда существует повторный интеграл

$$I_{repeat} = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy = \int_a^b F(x)dx \tag{1.6}$$

причём $I = I_{repeat}$

Замечание:

1 Область называется x-правилььной, если её можно задать в виде:

$$D = \{(x,y) : c \le y \le d, \phi_1(y) \le x \le \phi_2(y)\} \tag{1.7}$$

2 Пусть

2.1. $\exists \iint_D f(x,y)dxdy = I$

2.2. D является х-правильной и удовлетворяет формуле 1.7

2.3. $\forall y \in [c,d] \exists F(y) = \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx$

Тогда

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx \tag{1.8}$$

3 Если область D не является правильной в направлении какой-либо координатной оси, то её можно разбить на правильныйе части и использовать свойство аддитивности двойного интеграла

1.4 Замена переменных в двойном интеграле

Пусть $I = \iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy$. Предположим подобрано преобразование $\Phi : D_{uv} \rightarrowtail D_{xy}$

$$\Phi : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \tag{1.9}$$

Теорема о замене переменных в двойном интеграле. Пусть:

1 $D_{xy} = \Phi(D_{uv})$

2 Φ - биекция.

3 Φ - непрерывна и параллельна диаграмме.

4 Якобиан отображения к Φ:

$$J_\Phi = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0 \text{ в } D_{uv} \tag{1.10}$$

5 f интегрируема на D_{xy}

Тогда справедливо:

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint_{D_{uv}} f(x(u,v), y(u,v))|J_\Phi(u,v)|dudv \tag{1.11}$$

Замечание:

1 Аналогия с обычным интегралом:

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} \text{Замена:} x = \xi(t) \\ dx = \xi'(t)dt \\ x = a \Rightarrow t = \xi^{-1}(a) \\ x = b \Rightarrow t = \xi^{-1}(b) \end{array} \right| = \int_{\xi^{-1}(a)}^{\xi^{-1}(b)} f(\xi(t))\xi'(t)dt \tag{1.12}$$

2 Теорема останется справедливой и в случае, когда свойства 2, 3, 4 нарушаются в отдельных точках области D или на конечном числе кривых площади 0.

Пример. Переход в двойном интеграле к полярным координатам. В прямоугольная декартова система состоит из начала координат и двух взаимно перпендикулярных осей. Положение точки в такой системе задаётся с помощью пары чисел (x, y), геометрическая интерпретация которых такова: первое число x есть проекция точки на ось X, второе число y есть проекция точки на ось Y.

Полярная система координат состоит из начала координат O и луча P. Каждая точка задаётся как пара чисел (r, ϕ). r задаёт расстояние на луче P, ϕ задаёт угол против часовой стрелки, на который нужно повернуть получившийся радиус-вектор, чтобы достичь точки M

Связь полярной системы координат с декартовой:

$$x = \rho\cos(\phi) \tag{1.13a}$$

$$y = \rho\sin(\phi) \tag{1.13b}$$

Теория вероятностей

2.1 Определение вероятности

2.1.1 Случайный эксперимент

Случайным называется такой эксперимент, результат которого невозможно точно предсказать.

Примеры:

1 Бросают монету. Возможные результаты - выпадение орла или решки

$$\Omega = \{O, P\} \tag{2.1}$$

2 Бросают шестигранную игральную кость.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \tag{2.2}$$

3 Из колоды из 36 карт извлекают две карты

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_i \text{ - номер карты, которую достали при извлечении}\} \tag{2.3}$$

В данном случае, число возможных исходов равно $36 \cdot 35 = 1260$. Можно записать уравнение 2.3 следующим образом:

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_i \in 1, ..., 36, x_1 \neq x_2\} \tag{2.4}$$

4 Бросают монету, до первого появления решки.

$$\Omega = \{1, 2, 3, ...\}, |\Omega| = \aleph_0 \tag{2.5}$$

5 Производят выстрел по плоской мишени. Возможный исход описывается парой (x_1, x_2).

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\} \tag{2.6}$$

Множеством всех возможных исходов случайного эксперимента называется множество всех возможных элементарных исходов.

Замечание: в этом определении предполагается, что:

1 каждый исход из Ω является делимым и неделимым, то есть не может быть разбит на более мелкие исходы в рамках данного эксперимента

2 в результате проведения эксперимента, обязательно имеет место ровно один элементарный исход

Событие (или, более точно, случайное событие) называется любое подмножество множества Ω элементарных исходов. Данное определение является нестрогим.

Говорят, что в результате эксперимента произошло событие A, если наступил один из входящих в A исходов.

РИСУНОК

Говорят, что событие A является следствием события B, если наступление события B всегда влечёт наступление события A.

РИСУНОК

Замечание: любое множество Ω содержит подмножество $\emptyset$ и Ω. Соответствующее событие считается невозможным $\emptyset$ и достоверным Ω. Эти события называются несобственными, а все остальные – собственными.

Пример: из ящика, содержащего 2 красных и 3 синих шара, извлекают 1 шар.

$$A = \{\text{извлечённый шар красный или синий}\} = \Omega \tag{2.7a}$$

$$B = \{\text{извлечённый шар белый}\} = \emptyset \tag{2.7b}$$

Событие (или случайное событие) - множество, являющееся подмножеством Ω.

Суммой событий A и B определено как:

$$A + B = A \cup B \tag{2.8}$$

РИСУНОК

Произведение событий A и B определяется так:

$$AB = A \cdot B = A \cap B \tag{2.9}$$

РИСУНОК

Событие, противоположное A определено как:

$$\bar{A} = \Omega \setminus A \tag{2.10}$$

2.2 Свойства операций над событиями(основные)

1 $A + B = B + A$

2 $AB = BA$

3 $(A + B) + C = A + (B + C)$

4 $(AB)C = A(BC)$

5 $A(B + C) = AB + AC$

6 $A + BC = (A + B)(A + C)$

7 $\bar{\bar{A}} = A$

8 $A + A = A$

9 $AA = A$

10 $A \bar{+} B = \bar{A}\bar{B}$

11 $A\bar{B} = \bar{A} + \bar{B}$

12 $A \subseteq B \Leftrightarrow A + B = B$

13 $A \subseteq B \Leftrightarrow AB = A$

14 $A \subseteq B \Leftrightarrow \bar{A} \supseteq \bar{B}$

Определения:

1 События A и B являются несовместными, если $A \cdot B = \emptyset$.

2 События $A_1, ..., A_n$ называются попарно несовместными, если любые два из них - несовместные.

3 События $A_1, ..., A_n$ называются несовместными в совокупности, если $A_1 \cdot ... \cdot A_n = \emptyset$

Очевидно, что если $A_1, ..., A_n$ - попарно несовместны, то они несовместны в совокупности.

2.3 Классическое определение вероятности

Пусть $|\Omega| = N < \infty$, $A \subseteq \Omega; |A| = N_A$ и по условиям эксперимента нет объективных оснований предпочесть тот или иной исход остальным (все исходы равновозможны). Тогда вероятностью осуществления события A называется число:

$$P\{A\} = \frac{N_A}{N} \tag{2.11}$$

Пример: два раза бросают шестигранную игральную кость. Событие $A = \{\text{сумма выпавших очком больше или равна } 11\}$. $P\{A\} =?$

Решение: исходом будем считать пару (x_1, x_2), где $x_i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – число, выпавшее на кости. $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}; |\Omega| = N = 36$.

$|A| =?$; $A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\} \Rightarrow |A| = 3$. Считаем все исходы из Ω равновозможными. Используя классическое определение вероятности, получим, что:

$$P\{A\} = \frac{N_A}{N} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \tag{2.12}$$

2.3.1 Свойства вероятности

1 $P\{A\} \geq 0$

2 $P\{\Omega\} = 1$

3 Если A, B - несовместные, то

$$P\{A + B\} = P\{A\} + P\{B\} \tag{2.13}$$

Доказательство:

1 $P\{A\} = \frac{N_A}{N} \geq 0$, что следует из $N_A \geq 0, N \geq 0$

2 $P\{\Omega\} = \frac{N_\Omega}{N} = \{N(\Omega) = |\Omega| = N\} = \frac{N}{N} = 1$

3 $P\{A+B\} = \frac{N_{A+B}}{N}$
$= \{N_{A+B} = |A+B| = |A| + |B| - |AB| = N_A + N_B\}$
$= \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P\{A\} + P\{B\}$

2.4 Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение вероятности является обобщением классического на случай бесконечных элементарных исходов. Пусть выполнены следующие условия:

1 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

2 $\mu(\Omega) < \infty$ - некая мера.

$\mu = 1$ - длина

$\mu = 2$ - площадь

$\mu = 3$ - объём

...

3 возможность принадлежности исхода к тому или иному подмножеству Ω не зависит от формы события и его расположения внутри Ω

Тогда вероятность осуществления возможности события A называется число $P\{A\} = \frac{\mu(N_A)}{\mu(N)}$

Пример: задача о встрече. Два человека договорились встретиться в условленном месте с 12:00 до 13:00. При этом, пришедший ждёт другого человека в течение 15 минут, а потом уходит. Какова вероятность того, что они встретятся, если появление каждого из них равновероятно в любое время в период с 12:00 до 13:00?

Исход: (x_1, x_2), где $x_i \in [0,1]$; - время (в часах после 12:00) появления i-гоо человека в условленном месте. Тогда $\Omega = [0,1] \times [0,1]$.

РИСУНОК

$$A = \{(x_1, x_2) : |x_1 - x_2| \leq \frac{1}{4}\} \tag{2.14}$$

РИСУНОК

Используя геометрические определение, получаем:

$$P\{A\} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\mu(\Omega) - 2 \cdot \mu(K)}{\mu(\Omega)} = \frac{1 - 2 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4}}{\Omega} \qquad (2.15)$$