[wiki:] *«**Правило Рунге**— правило оценки погрешности численных методов, было предложено К. Рунге в начале 20 века. Основная идея (для методов Рунге-Кутты решения ОДУ) состоит в вычислении приближения выбранным методом с шагом h, а затем с шагом h/2, и дальнейшем рассмотрении разностей погрешностей для этих двух вычислений.»*

Если подынтегральная функция имеет производные более старших порядков (нежели два), то можно получить более содержательную оценку погрешности.

Если $f \in C^4[a,b]$, то для $I = \int_a^b f(x)dx$ можно получить следующие выражения:

$$I = I_h^{\text{пр}} + c \cdot h^2 + O(h^4), \qquad c = \frac{1}{24}\int_a^b f''(x)dx$$

$$I = I_h^{\text{тр}} + c_1 \cdot h^2 + O(h^4) \qquad c_1 = -\frac{1}{12}\int_a^b f''(x)dx$$

где $I_h^{\text{пр}}$, $I_h^{\text{тр}}$ – приближенные значения интеграла I, вычисленные по составной формуле средних прямоугольников и составной формуле трапеций соответственно, с шагом h ($h = \frac{b-a}{n}$); c и c_1 – постоянные, не зависящие от h.

Если $f \in C^6[a,b]$, то аналогично можно получить соотношение:

$$I = I_h^{\text{С}} + c \cdot h^4 + O(h^6)$$

где $I_h^{\text{С}}$ – приближенное значение интеграла I, найденное по составной формуле Симпсона, c – некоторая не зависящие от h постоянная.

Правило Рунге. Пусть I_h – приближенное значение интеграла I, найденное по одной из трех рассмотренных составных формул (по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона). Объединим полученные соотношения в одно:

$$I = I_h + c \cdot h^k + O(h^{k+2}) \qquad \textbf{(1)}$$

где c – не зависит от h, k – порядок точности квадратурной формулы ($k = 2$ для составных формул средних прямоугольников и трапеций, $k = 4$ для составной формулы Симпсона). Предполагается, что $f \in C^{k+2}[a,b]$.

На основании формулы (1) можем записать, что

$$I = I_{h/2} + c \cdot (\tfrac{h}{2})^k + O(h^{k+2}) \qquad \textbf{(2)}$$

Вычитая равенство (2) из (1), находим

$$I_{h/2} - I_h = c \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^k (2^k - 1) + O(h^{k+2})$$

Отсюда

$$c \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^k = \frac{I_{\frac{h}{2}} - I_h}{2^k - 1} + O(h^{k+2})$$

и, следовательно, согласно формуле (2), с точностью до $O(h^{k+2})$ имеем

$$I - I_{h/2} \approx \frac{I_{\frac{h}{2}} - I_h}{2^k - 1} \qquad \textbf{(3)}$$

Вычисление приближенной оценки погрешности по формуле (3) при выполнении условия (2) [т. е. при возможности представления значения интеграла I в виде (2)] называется *правилом Рунге*.

Источник: http://hoster.bmstu.ru/~fn1/wp-content/uploads/2011/08/uchebno-metod/Blumin_Fed_Hrap_chisl_met.pdf

Численные методы вычисления интегралов и решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Численные методы», МГТУ им Баумана, с. 18–20