23.Метод квадратного корня

При решении систем линейных алгебраических уравнений с симметрическими матрицами можно сократить объем вычислений почти вдвое.

Пусть A — симметрическая квадратная матрица системы $Ax = b$ порядка n. Решим задачу ее представления в виде

$$A = U^T \cdot U, \text{ где } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}, \; U^T = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Находя произведение $U^T \cdot U$, составим систему уравнений относительно неизвестных элементов матрицы U :

$$\begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_{11}^2 = a_{11}, \quad u_{11} \cdot u_{12} = a_{12}, \quad \ldots, \quad u_{11} \cdot u_{1n} = a_{1n}\,; \\ u_{12}^2 + u_{22}^2 = a_{22}, \quad \ldots, \quad u_{12} \cdot u_{1n} + u_{22} \cdot u_{2n} = a_{2n}\,; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{1n}^2 + u_{2n}^2 + \ldots + u_{nn}^2 = a_{nn}\,. \end{cases}$$

Из первой строки системы находим

$$\boxed{u_{11} = \sqrt{a_{11}}\,, \qquad u_{1j} = \frac{a_{1j}}{u_{11}} \quad j = 2, 3, \ldots, n\,.}$$

Из второй строки определяем

$$u_{22} = \sqrt{a_{22} - u_{12}^2}\,, \qquad u_{2j} = \frac{a_{2j} - u_{12} \cdot u_{1j}}{u_{22}}\,, \quad j = 3, 4, \ldots, n \text{ и т.д.}$$

Из последней строки имеем $u_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} u_{kn}^2}$.

Таким образом, элементы матрицы U находятся из соотношений

$$\begin{gathered} u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{n-1} u_{ki}^2}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,; \\ u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj} \right), \quad j = 2, 3, \ldots, n;\ j > i; \quad u_{ij} = 0\ (j < i). \end{gathered} \qquad (10.10)$$

При осуществлении $U^T U$-разложения симметрической матрицы могут возникать ситуации, когда $u_{ii} = 0$ при некотором i или подкоренное выражение отрицательно. Для симметрических положительно определенных матриц разложение выполнимо.

Если матрица A представима в форме $U^T U$, то система $Ax = b$ имеет вид $U^T U x = b$. Решение этой системы сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами. В итоге процедура решения состоит их двух этапов.

1. *Прямой ход.* Произведение Ux обозначается через y. В результате решения системы $U^T y = b$ находится столбец y.
2. *Обратный ход.* В результате решения системы $Ux = y$ находится решение задачи — столбец x.

Алгоритм метода квадратных корней

1. Представить матрицу A в форме $A = U^T \cdot U$, используя (10.10).
2. Составить систему уравнений $U^T \cdot y = b$ и найти y.
3. Составить систему уравнений $U \cdot x = y$ и найти x.