Groupes de Lie et Puissances Reduites de Steenrod
Author(s): A. Borel and J.-P. Serre
Source: *American Journal of Mathematics*, Vol. 75, No. 3 (Jul., 1953), pp. 409-448
Published by: The Johns Hopkins University Press
Stable URL: http://www.jstor.org/stable/2372495
Accessed: 03-06-2017 09:49 UTC

GROUPES DE LIE ET PUISSANCES RÉDUITES DE STEENROD.*

Par A. Borel et J.-P. Serre.

Introduction. N. E. Steenrod a défini de nouvelles opérations cohomologiques, les puissances réduites, qui généralisent ses i-carrés. Nous nous proposons ici d'étudier ces opérations dans la cohomologie mod p, (p premier), des groupes de Lie et de leurs espaces classifiants, et d'appliquer les résultats obtenus à divers problèmes.

Pour la commodité du lecteur, nous avons rappelé dans la première partie tous les principaux résultats sur les groupes de Lie et leurs espaces classifiants dont nous avons à faire usage par la suite, en les complétant du reste sur quelques points. La deuxième partie est consacrée aux puissances réduites, dont nous indiquons les propriétés au No. 7, sans en répéter la définition explicite, qui n'interviendra pas ici; nous calculons ensuite ces opérations dans les espaces projectifs complexes et quaternioniens, ce qui permet d'obtenir quelques renseignements sur les groupes d'homotopie des sphères, par la méthode de Steenrod.

Dans la troisième partie, nous combinons les résultats de I et II pour étudier les puissances réduites dans les algèbres de cohomologie $H^*(G, Z_p)$ et $H^*(B_G, Z_p)$ d'un groupe de Lie compact connexe G et d'un espace B_G classifiant pour G, *lorsque G et son quotient G/T par un tore maximal sont sans p-torsion.*[1] Dans ce cas en effet, $H^*(B_G, Z_p)$ s'identifie à une sous-algèbre de $H^*(B_T, Z_p)$; or $H^*(B_T, Z_p)$ est engendrée par ses éléments de degré deux, (B_T peut même, si l'on veut, être envisagé comme produit d'espaces projectifs complexes), et les puissances réduites y sont donc connues d'après II. Cela détermine en principe les puissances réduites dans $H^*(B_G, Z_p)$, et par conséquent aussi dans $H^*(G, Z_p)$ car, sous les hypothèses faites, $H^*(B_G, Z_p)$ est une algèbre de polynômes dont les générateurs sont images par transgression de générateurs de $H^*(G, Z_p)$, (qui est une algèbre extérieure), et la transgression commute aux puissances réduites. Cette méthode générale est ensuite appliquée aux groupes unitaire $\boldsymbol{U}(n)$ et unitaire symplectique $\boldsymbol{Sp}(n)$ pour p (premier) quelconque, au groupe orthogonal

---

* Received February 22, 1953.

[1] On dit qu'un espace a de la p-torsion (p premier), si l'un de ses groupes d'homologie entière a un coefficient de torsion divisible par p.

$\boldsymbol{SO}(n)$ pour $p \neq 2$, et à leurs espaces classifiants, ce qui donne, entre autres, des résultats sur les classes de Chern.

La quatrième partie est consacrée aux applications. Nous montrons dans le No. 15 la non-existence de structures presque-complexes sur $\boldsymbol{S}_n$, $(n \geq 8)$, et d'un type d'algèbres à division de dimension > 8, et dans le No. 17, la non-existence de sections dans certaines fibrations, (par exemple $\boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{U}(n-1) = \boldsymbol{S}_{2n-1}$) ; on en déduit quelques renseignements sur les groupes d'homotopie des groupes classiques, auxquels nous consacrons également les Nos. 18 et 19. Enfin, le No. 20 donne des conditions nécessaires pour l'existence de sections dans des fibrations où espace, base et fibre sont des variétés de Stiefel complexes.

I. Espaces fibrés à groupe structural de Lie.

1. Espaces universels et espaces classifiants pour un groupe de Lie. Soit G un groupe de Lie compact; rappelons que l'on appelle *espace universel pour* G jusqu'à la dimension n un espace E, fibré principal de groupe structural G, tel que $\pi_i(G) = 0$ pour $0 \leq i \leq n$, ([14], § 19) ; sa base $B = E/G$ est dite *espace classifiant pour* G et pour la dimension n, elle permet en effet de classer tous les espaces fibrés principaux de groupe structural G ayant comme base un polyèdre X donné de dimension n, (une classe d'espaces fibrés correspondant biunivoquement à une classe d'applications homotopes de X dans B, *voir* [14], § 19).

On sait, ([14], 19. 7), que l'on peut trouver pour tout G et pour tout n des espaces universels qui sont, ainsi que leurs bases, des variétés analytiques compactes, donc des polyèdres finis; il est souvent commode de les considérer pour n arbitrairement grand et pour éviter d'avoir à préciser cet entier, on peut introduire les notions d'espace universel et d'espace classifiant pour G, (sous-entendu: pour tout n), de la façon suivante:

Soit $E_1, E_2, \cdots$ une suite d'espaces universels pour G et pour des dimensions $n_1 < n_2 < \cdots$; il est clair que l'on peut la choisir telle que E_i et $B_i = E_i/G$ soient des polyèdres finis et qu'il existe un homéomorphisme f_i de E_i dans E_{i+1} commutant avec les opérations de G, $(i = 1, 2, \cdots)$. La limite inductive E des E_i est alors un espace fibré principal de groupe structural G, dont tous les groupes d'homotopie sont nuls; E sera dit universel pour G, sa base B, qui est limite inductive des espaces B_i, sera dite espace classifiant pour G. On déduit immédiatement du théorème de classification que deux espaces universels, ou deux espaces classifiants, ont même type d'homotopie; il n'y a donc pas d'inconvénient, tant que l'on ne s'intéresse qu'à des questions homologiques ou homotopiques, à désigner par E_G, resp. B_G, l'un quelconque de ces espaces; en particulier, on pourra parler des groupes d'homologie singulière ou de cohomologie singulière de l'espace B_G; on a d'ailleurs, Γ étant un groupe de coefficients:

$$H_p(B_G, \Gamma) \approx H_p(B_i, \Gamma), \qquad H^p(B_G, \Gamma) \approx H^p(B_i, \Gamma) \qquad \text{si } n_i > p,$$

(les isomorphismes en cohomologie étant bien entendu compatibles avec le cup-produit si Γ est un anneau) ; les groupes $H^p(B_G, \Gamma)$ sont donc isomorphes aux groupes $H^p(B_i, \Gamma)$ lorsque i est assez grand, on retrouve ainsi les conventions de [2], § 18.[2]

Nous avons donc fait correspondre à tout groupe de Lie compact G un espace, ou plutôt une classe d'espaces ayant le même type d'homotopie, B_G. On peut de plus associer à tout homomorphisme $f: H \to G$ d'un groupe de Lie compact dans un autre une classe d'applications homotopes $\rho(f): B_H \to B_G$.

Soit en effet E_H un espace universel pour H; par extension du groupe structural de H à G au moyen de f, E_H définit un espace E'_H principal pour G et de base B_H; cet espace est le quotient $(E_H, G)_H$ du produit $E_H \times G$ par la relation d'équivalence $(x, g) \approx (x \cdot h, f(h) \cdot g)$. Comme la base de E'_H est limite inductive de polyèdres, le théorème de classification s'applique, et il existe une classe d'applications homotopes $\rho(f)$ de B_H dans B_G telle que E'_H soit l'image réciproque de E_G par les $\rho(f)$; cela définit les $\rho(f)$.

Bien entendu, $\rho(f)$ est homotope à l'identité si f est l'identité, et les $\rho(f)$ vérifient la propriété de transitivité $\rho(f \circ g) = \rho(f) \circ \rho(g)$. On peut donc dire que la correspondance $G \to B_G$ est un *foncteur covariant* de G.

Le cas particulier le plus important de la notion précédente est celui où f est l'application identique d'un sous-groupe fermé H d'un groupe G dans le groupe G lui-même; on désigne alors $\rho(f)$ par $\rho(H, G)$, conformément aux notations de [2], § 21. Dans ce cas on peut choisir $\rho(f)$ de telle sorte que $\rho(f): B_H \to B_G$ *définisse B_H comme espace fibré de base B_G et de fibre l'espace homogène G/H*. En effet, puisque H est plongé dans G, il opère sur E_G et E_G, muni de ces opérateurs, est un espace universel pour H, que l'on peut prendre comme E_H. On aura alors $B_H = E_G/H$, $B_G = E_G/G$ et l'application $\rho(f)$ n'est autre que la projection canonique de E_G/H sur E_G/G; elle définit bien B_H comme espace fibré de fibre G/H et de base B_G.

Dans le cas général, on peut, au moins au point de vue homologique ou

---

[2] Si G est discret (cas que nous n'avons pas exclu), les groupes $H_p(B_G, \Gamma)$ et $H^p(B_G, \Gamma)$ ne sont autres que les groupes d'homologie et de cohomologie de G au sens de Hopf-Eilenberg-MacLane-Eckmann.

homotopique, envisager aussi $\rho(f)$ comme projection d'un espace fibré. Soit en effet $X = (E'_H, E_H)_H$ le quotient de $E'_H \times E_H$ par la relation d'équivalence $(x, y) \approx (x \cdot h, y \cdot h)$, il admet deux fibrations, l'une de fibre E'_H et de base B_H, l'autre de fibre E_H et de base B_G; notons α et β les projections correspondantes. Comme E_H est acyclique, β définit un isomorphisme β_* des groupes d'homologie (ou d'homotopie) de X sur ceux de B_H. D'autre part un homomorphisme de E'_H dans E_H définit de façon évidente une section s: $B_H \to X$, qui composée avec α redonne $\rho(f)$; ainsi, une fois les groupes d'homologie de B_H identifiés à ceux de X par β_*^{-1}, l'homomorphisme $\rho_*(f)$ devient l'homomorphisme α_* induit par la projection α.

En particulier, si f est la projection de H sur son quotient H/N par un sous-groupe invariant fermé N, l'espace E'_H est visiblement un espace B_N et $\rho_*(f)$ *s'identifie à l'homomorphisme induit par la projection d'un espace fibré ayant même homologie que B_H, de fibre B_N et de base $B_{H/N}$.*

Note. Soit E un espace fibré de groupe structural H dont la base X est un polyèdre fini; E est donc bien défini par une classe d'applications homotopes $\zeta : X \to B_H$; en les composant avec les applications $\rho(f) : B_H \to B_G$, on définit donc un espace fibré de base X et de groupe structural G; en outre, d'après la construction même de $\rho(f)$, cet espace est celui que l'on obtient à partir de E *en étendant le groupe structural de H à G au moyen de f.*

C'est sous cette forme que l'on trouvera étudiée, dans des cas particuliers, l'application $\rho(f)$, notamment par Wu ([18], [19]). On voit également que pour qu'un espace fibré de base X, de groupe G, défini par $\zeta : X \to B_G$ puisse être obtenu à partir d'un espace fibré de groupe H par extension du groupe structural il faut et il suffit que ζ puisse se "factoriser" par $\rho(f)$. Si l'on connait les algèbres de cohomologie $H^*(B_H)$ et $H^*(B_G)$, ainsi que $\rho^*(f)$: $H^*(B_G) \to H^*(B_H)$, on tire de là des conditions cohomologiques nécessaires pour que l'on puisse restreindre le groupe structural de G à H. C'est là la méthode suivie par Wu [18] pour étudier les structures presque complexes, (f étant alors l'inclusion de $\boldsymbol{U}(n)$ dans $\boldsymbol{SO}(2n)$).

2. Cohomologie des groupes de Lie et de leurs espaces classifiants.

Soit G un groupe de Lie compact connexe de rang l, (rappelons que le rang est la dimension commune des tores maximaux de G). D'après un théorème classique de Hopf, l'algèbre de cohomologie de G relativement à un corps de caractéristique zéro est une algèbre extérieure engendrée par l éléments de degrés impairs. Ce résultat vaut encore pour $H^*(G, Z_p)$, (p premier, Z_p corps des entires modulo p), lorsque G est sans p-torsion,[1] ([2], Proposition 7. 2);

de même, si G n'a pas de torsion, $H^*(G, Z)$ est l'algèbre extérieure d'un groupe abélien libre ayant l générateurs de degrés impairs.

Dans le cas où G est sans p-torsion, on peut établir des relations très précises entre $H^*(G, Z_p)$ et $H^*(B_G, Z_p)$ en utilisant la transgression. Rappelons que la transgression dans un espace fibré E, de base B et de fibre F, relativement à un groupe de coefficients Γ, est en dimension s, $(s = 0, 1, 2, \cdots)$, un homomorphisme:

$$\tau : T^s(F, \Gamma) \to H^{s+1}(B, \Gamma)/L^{s+1}(B, \Gamma) \tag{2.1}$$

d'un sous-groupe $T^s(F, \Gamma)$ de $H^s(F, \Gamma)$ dans un quotient de $H^{s+1}(B, \Gamma)$. L'homomorphisme τ est le composé $q^{*-1} \circ \delta$, où δ désigne l'homomorphisme de cobord qui applique $H^s(F, \Gamma)$ dans $H^{s+1}(E, F; \Gamma)$, et où q^* est le produit de l'isomorphisme de $H^{s+1}(B, \Gamma)$ sur $H^{s+1}(B, b; \Gamma)$, (b projection de F), par l'homomorphisme $p^* : H^{s+1}(B, b; \Gamma) \to H^{s+1}(E, F; \Gamma)$ transposé de la projection (*voir* [2], § 5; [11], pp. 434, 457). En particulier nous noterons $T^s(G, \Gamma)$ l'ensemble des éléments de $H^s(G, \Gamma)$ transgressifs dans un espace universel E_G, et qui seront dits être *universellement transgressifs*.

Ces définitions étant posées, on peut exprimer ainsi les propriétés de la fibration de E_G par G, base B_G qui sont établies dans [2], (Théorèmes 13. 1, 19. 1):

2. 2. *Soit p un nombre premier, et supposons G sans p-torsion. Alors $H^*(G, Z_p)$ possède un système de générateurs $h_1, \cdots, h_l$ de degrés impairs qui forment une base du sous-espace $T(G, Z_p)$ de $H^*(G, Z_p)$ engendré par les éléments universellement transgressifs.*

2. 3. *Le sous-espace $L^{s+1}(B_G, Z_p)$ de $H^{s+1}(B_G, Z_p)$*, (notations de 2. 1), *est égal au sous-espace des éléments décomposables de $H^{s+1}(B_G, Z_p)$*, (c'est à dire au sous-espace engendré par les produits d'éléments de degrés $< s + 1$).

Nous désignerons par $D^j(B_G, \Gamma)$, ou par D^j si cela ne prête pas à confusion, l'ensemble des éléments décomposables de $H^j(B_G, \Gamma)$ et par $D(B_G, \Gamma)$, ou par D, la somme directe des D^j.

2. 4. *Soient τ la transgression dans E_G et $y_i \in H^*(B_G, Z_p)$ un représentant de $\tau(h_i)$, $(i = 1, \cdots, l)$. Alors $H^*(B_G, Z_p)$ est identique à l'algèbre des polynômes admettant les y_i comme générateurs.*

On a ici $\tau(h_i) = y_i \bmod D$ et $H^*(B_G, Z_p)$ est une algèbre de polynômes à l générateurs dont les degrés sont égaux aux degrés des h_i augmentés d'une unité (et sont par conséquent pairs).

Les résultats 2. 2, 2. 3, 2. 4 restent valables si l'on remplace partout Z_p par un corps de caractéristique zéro, sans hypothèse sur G, ou encore si l'on substitue Z à Z_p lorsque G n'a pas de torsion.

3. Relations entre $\boldsymbol{H^*(B_G, Z_p)}$ et le groupe de Weyl de $\boldsymbol{G}$. Soient T un tore maximal du groupe de Lie compact connexe G de rang l, N le normalisateur de T dans G, et Φ le groupe de Weyl de G, c'est à dire le quotient N/T. On sait que Φ est un groupe fini. D'après les résultats du No. 2, la transgression établit un isomorphisme de $H^1(T, Z)$ sur $H^2(B_T, Z)$, et $H^*(B_T, Z)$ est l'algèbre symétrique libre engendrée par $H^2(B_T, Z)$; toute base $(\xi_1, \cdots, \xi_l)$ de $H^1(T, Z)$ définit donc par transgression un système de générateurs indépendants $(x_1, \cdots, x_l)$ de $H^*(B_T, Z)$ de degrés égaux à deux

Puisque N est une extension de T par Φ, le groupe Φ opère canoniquement sur T, et de ce fait sur $H^1(T, Z)$ donc aussi sur $H^*(B_T, Z)$. On notera I_G la sous-algèbre des éléments de $H^*(B_T, Z)$ invariants par Φ. Il est clair que si $x \in H^*(B_T, Z)$ est tel que $n \cdot x \in I_G$, (n entier), on a aussi $x \in I_G$; par conséquent I_G est *facteur direct* de $H^*(B_T, Z)$ pour la structure de groupe abélien, ce qui permet de considérer $I_G \otimes Z_p$ comme plongé dans

$$H^*(B_T, Z) \otimes Z_p \approx H^*(B_T, Z_p).$$

Cela étant posé, on a ([2], Prop. 29. 2) :

3. 1. *Si G et G/T sont sans torsion, l'homomorphisme*

$$\rho^*(T, G) : H^*(B_G, Z) \rightarrow H^*(B_T, Z)$$

est biunivoque et son image est I_G.

3. 2. *Soit p un nombre premier. Si G et G/T sont sans p-torsion, il en est de même de B_G, l'homomorphisme:*

$$\rho^*(T, G) : H^*(B_G, Z_p) \rightarrow H^*(B_T, Z_p)$$

est biunivoque, et son image est $I_G \otimes Z_p$, (plongé dans $H^*(B_T, Z_p)$ comme il a été dit plus haut).

Lorsqu'on sera dans les hypothèses de 3. 1, (resp. 3. 2), on identifiera $H^*(B_G, Z)$, (resp. $H^*(B_T, Z_p)$), à I_G, (resp. $I_G \otimes Z_p$) ; cela permettra comme on le verra de ramener beaucoup de questions portant sur B_G aux questions analogues sur B_T, qui est plus simple à étudier. Soient par exemple H et G deux groupes de Lie vérifiant 3. 2, $f : H \rightarrow G$ un homomorphisme et cherchons à déterminer $\rho^*(f) : H^*(B_G, Z_p) \rightarrow H^*(B_H, Z_p)$. Soient T' un tore maximal de H, T un tore maximal de G contenant $f(T')$, et $g: T' \to T$ la restriction de f à T'. Elle définit un homomorphisme $\rho^*(g): H^*(B_T, Z_p) \to H^*(B_{T'}, Z_p)$ dont la restriction à $I_G \otimes Z_p$ est évidemment $\rho^*(f)$; pour connaître $\rho^*(f)$, il suffit donc de connaître $\rho^*(g)$, ce qui est très facile: Soient $\xi_1, \cdots, \xi_r$, (resp. $\xi'_1, \cdots, \xi'_s$), une base de $H^1(T, Z_p)$, (resp. de $H^1(T', Z_p)$. On peut écrire:

$$g^*(\xi_i) = \Sigma\, n_{ij}\xi'_j, \qquad (n_{ij} \in Z_p),$$

et, si x_i, resp. x'_i, est image par transgression de ξ_i, resp. ξ'_i, un polynôme $Q(x_1, \cdots, x_r)$ en les x_i a comme image par $\rho^*(g)$ le polynôme

$$Q(\Sigma\, n_{1j}x'_j, \cdots, \Sigma\, n_{rj}x'_j),$$

(*voir* pour plus de détails [2], § 28, 31 où cette méthode est appliquée dans le cas où f est biunivoque).

Un cas particulier important est celui où f est l'inclusion d'un sous-groupe H de G dans G, *H et G ayant même rang.* On a alors $T = T'$, et $\rho^*(g)$ est l'identité; tenant compte des identifications faites plus haut on voit que $H^*(B_G, Z_p)$ *s'identifie à une sous-algèbre de* $H^*(B_H, Z_p)$, *elle-même identifiée à une sous-algèbre de* $H^*(B_T, Z_p)$.

Conditions d'application des résultats précédents. Les hypothèses 3. 1 et 3. 2 sont fréquemment vérifiées, en effet:

3. 3. *Si l'algèbre de Lie de G ne contient aucun facteur isomorphe à $\boldsymbol{E}_6$, $\boldsymbol{E}_7$, ou $\boldsymbol{E}_8$, G/T est sans torsion* ([2], Prop. 29. 1).

3. 4. *Pour tout n les groupes classiques $\boldsymbol{U}(n)$, $\boldsymbol{SU}(n)$, $\boldsymbol{Sp}(n)$ sont sans torsion* ([2], Prop. 9. 1).

3. 5. *Pour tout n et pour tout nombre premier p impair, $\boldsymbol{SO}(n)$ est sans p-torsion,* ([2], Prop. 10. 4).

Ainsi, *à l'exception de $\boldsymbol{SO}(n)$ pour $p = 2$, tout groupe classique est justiciable de* 3. 2. Dans le cas de $\boldsymbol{SO}(n)$, $p = 2$, il convient de remplacer les tores maximaux par des sous-groupes abéliens maximaux de type $(2, 2, \cdots, 2)$, (*voir* [3]).

4. Cas particulier: le groupe unitaire $\boldsymbol{U}(n)$. Soit $G = \boldsymbol{U}(n)$ le groupe des matrices complexes unitaires à n lignes et n colonnes; les matrices diagonales en constituent un tore maximal $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{U}(n)$ est donc de rang n. Désignant par $\exp(2i\pi\zeta_1), \cdots, \exp(2i\pi\zeta_n)$ les valeurs propres d'une matrice diagonale, nous prendrons les éléments $\xi_i = d\zeta_i$ comme base de $H^1(\boldsymbol{T}, Z)$ et noterons x_i l'image par transgression de ξ_i dans $H^2(B_{\boldsymbol{T}}, Z)$.

Le normalisateur $\boldsymbol{N}$ de $\boldsymbol{T}$ dans $\boldsymbol{U}(n)$, est l'ensemble des matrices *monomiales* (c'est à dire produits d'une matrice diagonale par une matrice de permutation), et $\Phi = \boldsymbol{N}/\boldsymbol{T}$ est le groupe des permutations des ξ_i ou des x_i; par conséquent I_G est l'algèbre des polynômes symétriques en les x_i; de même $I_{\boldsymbol{U}(n)} \otimes Z_p$ est l'ensemble des polynômes symétriques à coefficients dans Z_p.

Soit C_{2i} la i-ème fonction symétrique élémentaire $\Sigma\, x_1 \cdots x_i$ [3] c'est donc un élément de $I_G = H^*(B_{\boldsymbol{U}(n)}, Z)$ et de plus I_G est identique à l'algèbre des polynômes en les C_{2i}; comparant cela avec les résultats du No. 2, on voit que $H^*(\boldsymbol{U}(n), Z)$ contient des éléments bien déterminés h_i, $(1 \leq i \leq n)$, de degré $2i - 1$, tels que $\tau(h_i) = C_{2i} \bmod (C_2, \cdots, C_{2i-2})$, τ étant la transgression dans $E_{\boldsymbol{U}(n)}$; en outre $H^*(\boldsymbol{U}(n), Z)$ est l'algèbre extérieure engendrée par les h_i.

Il s'impose de comparer les résultats précédents avec ceux qu'obtient S. S. Chern dans [6]. Au moyen des grassmanniennes complexes et des symboles de Schubert, Chern y définit des éléments $c_{2i} \in H^{2i}(B_{\boldsymbol{U}(n)}, Z)$ et montre que $H^*(B_{\boldsymbol{U}(n)}, Z)$ est l'algèbre des polynômes admettant les c_{2i}, $(1 \leq i \leq n)$, comme générateurs; ainsi les classes C_{2i} ont les mêmes propriétés que les classes de Chern c_{2i}; en fait on a:

Proposition 4. 1. *Les classes $C_{2i} = \Sigma\, x_1 \cdots x_i$ coïncident avec les classes de Chern c_{2i} $(i = 1, \cdots, n)$.*

Pour éviter toute confusion, nous n'identifierons pas dans cette démonstration $I_{\boldsymbol{U}(n)}$ et $H^*(B_{\boldsymbol{U}(n)}, Z)$. Nous devons donc montrer que *l'homomorphisme $\rho^*(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{U}(n)) : H^*(B_{\boldsymbol{U}(n)}, Z) \to H^*(B_{\boldsymbol{T}}, Z)$ applique c_{2i} sur C_{2i}.*

Nous établirons la Prop. 4. 1 par récurrence sur n en utilisant la *formule de dualité* des classes de Chern (4. 3), (*voir* [7], [19]). Pour $n = 1$, $\boldsymbol{U}(1) = \boldsymbol{T}$ et la proposition est évidente car C_2 et c_2 sont toutes deux images par transgression de la classe $\xi = d\zeta$ de $H^1(\boldsymbol{T}, Z)$. Nous supposons maintenant la proposition démontrée pour $\boldsymbol{U}(m)$ si $m < n$; comme nous aurons à considérer plusieurs valeurs de n, il sera commode de distinguer par un indice n, que nous placerons en haut à gauche, ce qui est relatif à $\boldsymbol{U}(n)$; ainsi nous parlerons de ${}^n\xi_i$, ${}^nx_i$, ${}^nC_{2i}$, ${}^nc_{2i}$, etc.

Soient $p, q > 0$ tels que $p + q = n$, f l'inclusion canonique de $\boldsymbol{U}(p) \times \boldsymbol{U}(q)$ dans $\boldsymbol{U}(n)$, $\boldsymbol{T}^p$, $\boldsymbol{T}^q$ et $\boldsymbol{T}^n = \boldsymbol{T}^p \times \boldsymbol{T}^q$ des tores maximaux de $\boldsymbol{U}(p)$, $\boldsymbol{U}(q)$ et

[3] Dans tout ce travail, nous notons un polynôme symétrique par son terme initial précédé du signe Σ.

$\boldsymbol{U}(n)$; la restriction g de f à $\boldsymbol{T}^p \times \boldsymbol{T}^q$ est donc l'identité. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{T}^p \times \boldsymbol{T}^q & \xrightarrow{g} & \boldsymbol{T}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \boldsymbol{U}(p) \times \boldsymbol{U}(q) & \xrightarrow{f} & \boldsymbol{U}(n) \end{array}$$

où les flèches sont des inclusions, donne lieu au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^*(B_{\boldsymbol{T}^p}, Z) \otimes H^*(B_{\boldsymbol{T}^q}, Z) & \xleftarrow{\alpha} & H^*(B_{\boldsymbol{T}^n}, Z) \\ \uparrow \beta & & \uparrow \delta \\ H^*(B_{\boldsymbol{U}(p)}, Z) \otimes H^*(B_{\boldsymbol{U}(q)}, Z) & \xleftarrow{\gamma} & H^*(B_{\boldsymbol{U}(n)}, Z) \end{array}$$

où, dans les notations du No. 1:

$$\alpha = \rho^*(g) = \rho^*(\boldsymbol{T}^p \times \boldsymbol{T}^q, \boldsymbol{T}^n), \qquad \beta = \rho^*(\boldsymbol{T}^p \times \boldsymbol{T}^q, \boldsymbol{U}(p) \times \boldsymbol{U}(q)),$$
$$\gamma = \rho^*(\boldsymbol{U}(p) \times \boldsymbol{U}(q), \boldsymbol{U}(n)) = \rho^*(f) \text{ et enfin } \delta = \rho^*(\boldsymbol{T}^n, \boldsymbol{U}(n)).$$

Si l'on prend dans $H^1(\boldsymbol{T}^p, Z)$, $H^1(\boldsymbol{T}^q, Z$ et $H^1(\boldsymbol{T}^n, Z)$ les bases $({}^p\xi_j)$, $({}^q\xi_k)$, $({}^n\xi_i)$ indiquées au début de ce No, il est clair que g^* est définie par

$$g^*({}^n\xi_i) = {}^p\xi_i \quad (i \leq p), \qquad g^*({}^n\xi_{p+i}) = {}^q\xi_i, \quad (1 \leq i \leq q),$$

par conséquent, α est défini par

$$\alpha({}^nx_i) = {}^px_i \otimes 1 \quad (1 \leq i \leq p)\, ; \qquad \alpha({}^nx_{p+j}) = 1 \otimes {}^qx_j \quad (1 \leq j \leq q),$$

et il en résulte évidemment que

$$(4.2) \qquad \alpha({}^nC_{2i}) = \Sigma_{j+k=i}\ {}^pC_{2j} \otimes {}^qC_{2k}$$

en posant bien entendu ${}^pC_{2j} = 0$ si $j > p$, ${}^qC_{2k} = 0$ si $k > q$; en faisant une convention analogue pour les classes de Chern, on peut écrire la formule de dualité:

$$(4.3) \qquad \gamma({}^nc_{2i}) = \Sigma_{j+k=i}\ {}^pc_{2j} \otimes {}^qc_{2k}$$

mais l'homomorphisme β est le produit tensoriel des homomorphismes $\rho^*(\boldsymbol{T}^p, \boldsymbol{U}(p))$ et $\rho^*(\boldsymbol{T}^q, \boldsymbol{U}(q))$, donc, vu l'hypothèse d'induction, on obtient:

$$(4.4) \qquad \beta \circ \gamma({}^nc_{2i}) = \Sigma_{j+k=i}\ {}^pC_{2j} \otimes {}^qC_{2k}$$

d'où, compte tenu de (4.2) et de $\beta \circ \gamma = \alpha \circ \delta$,

$$\alpha \circ \delta({}^nc_{2i}) = \alpha({}^nC_{2i}), \qquad (1 \leq i \leq n),$$

et finalement $\delta({}^nc_{2i}) = {}^nC_{2i}$ puisque α est biunivoque, *Remarques.* (1) Sans utiliser la formule de dualité on peut montrer aisément que ${}^nc_{2i} = \epsilon_i C_{2i}$, où $\epsilon_i = \pm 1$. Pour prouver la Proposition 4. 1, il ne reste donc plus qu'à établir les égalités $\epsilon_i = 1$ $(1 \leq i \leq n)$, ce qui peut se faire en se servant des valeurs des classes de Chern de la structure tangente de l'espace projectif complexe et du calcul des puissances de Steenrod des classes ${}^nC_{2i}$ qui sera fait au No. 11. Malheureusement cette méthode, au reste peu naturelle, conduit à des calculs assez compliqués.

Il serait intéressant de trouver une démonstration de la Proposition 4. 1 qui soit simple et indépendante de la dualité; peut être est-ce possible en utilisant l'expression des classes de Chern comme formes différentielles? On déduirait alors la formule de dualité directement de l'identité évidente (4. 2), comme cela est fait dans [3] pour les classes de Stiefel-Whitney réduites mod 2.

5. Autres groupes classiques. Nous allons passer brièvement en revue les autres groupes classiques, renvoyant à [2] pour plus de détails.[4]

Examinons tout d'abord les groupes *orthogonaux*. Le groupe $\boldsymbol{SO}(2n+1)$ est de rang n, et son groupe de Weyl est le groupe des permutations et changements de signes des x_i. Il en résulte donc que $H^*(B_{\boldsymbol{SO}(2n+1)}, Z_p)$ est l'algèbre des polynômes ayant comme générateurs les n éléments $P_{4i} = \Sigma x_1{}^2 \cdots x_i{}^2$, $(1 \leq i \leq n)$, lorsque p est impair (cette restriction étant due, rappelons-le, au fait que $\boldsymbol{SO}(n)$ a de la 2-torsion pour $m \geq 3$).

Le groupe $\boldsymbol{SO}(2n)$ est aussi de rang n, et son groupe de Weyl est engendré par les permutations et les changements de signes *en nombre pair* des x_i. Il en résulte aisément que pour p premier impair $H^*(B_{\boldsymbol{SO}(2n)}, Z_p)$ est l'algèbre des polynômes admettant comme générateurs les P_{4i} $(1 \leq i \leq n-1)$, et $W_{2n} = x_1 \cdots x_n$.

PROPOSITION 5. 1. *P_{4i} coïncide avec la classe de Pontrjagin de dimension $4i$, réduite mod p; W_{2n} coïncide avec la classe de Stiefel-Whitney de dimension $2n$, réduite mod p.*

Nous noterons p_{4i} et w_{2n} les classes de Pontrjagin et de Stiefel-Whitney respectivement.

Soit d'abord f l'inclusion de $U(n)$ dans $SO(2n)$; ces deux groupes étant de même rang, $\rho^*(f) = \rho^*(\boldsymbol{U}(n), \boldsymbol{SO}(2n))$ est biunivoque et, vu les identifications faites plus haut, se ramène au plongement des polynômes en les P_{4i}

[4] Pour tout ce qui concerne le groupe de Weyl, *voir* par exemple E. Stiefel, *Comm. Math. Helv.*, tome 14 (1941-42), pp. 350-380.

et W_{2n} dans l'algèbre de tous les polynômes symétriques. Il en résulte visiblement:

$$\rho^*(f)(W_{2n}) = C_{2n}. \tag{5.2}$$

Mais il est classique ([13], 41.8) que, étant donné un espace fibré de groupe structural $\boldsymbol{U}(n)$ et de classes de Chern c_{2i}, on obtient en étendant le groupe structural à $\boldsymbol{SO}(2n)$ un espace fibré dont la classe de Stiefel-Whitney w_{2n} est égale à c_{2n}; cela signifie que $\rho^*(f)(w_{2n}) = c_{2n}$ et, comme $C_{2n} = c_{2n}$, l'égalité (5.1) donne bien $W_{2n} = w_{2n}$, puisque $\rho^*(f)$ est biunivoque.

On pourrait raisonner de la même façon pour les classes de Pontrjagin, à l'aide du No. 3 de la Note [18] de Wu, mais il est plus commode de procéder différemment, en partant du plongement canonique de $\boldsymbol{SO}(n)$ dans $\boldsymbol{U}(n)$, qui définit un homomorphisme

$$\sigma = \rho^*(\boldsymbol{SO}(n), \boldsymbol{U}(n)) : H^*(B_{\boldsymbol{U}(n)}, Z_p) \to H^*(B_{\boldsymbol{SO}(n)}, Z_p)$$

déterminé explicitement dans [2], § 31; on a

$$\begin{aligned} &\sigma(C_{2i}) = 0 \text{ si } i \text{ est impair} \\ &\sigma(C_{4k}) = (-1)^k P_{4k}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

D'autre part, on a d'après Wu ([20], p. 9):

$$\sigma(c_{4k}) = (-1)^k p_{4k},$$

ce qui, joint à $C_{4k} = c_{4k}$, donne $P_{4k} = p_{4k}$.

Remarque. De même que pour la Proposition 4.1, il y aurait intérêt à avoir une démonstration de la Proposition 5.1 indépendante des résultats de Wu, car on obtiendrait alors ces derniers de façon simple, par des calculs sur les polynômes symétriques et des changements de variables.

Le cas du groupe unitaire symplectique $\boldsymbol{Sp}(n)$ est tout à fait analogue à celui du groupe $\boldsymbol{SO}(2n+1)$, car ces deux groupes ont même rang et des groupes de Weyl isomorphes; la différence essentielle est que l'on peut raisonner directement avec des coefficients entiers puisque $\boldsymbol{Sp}(n)$ n'a pas de torsion.

On trouve alors que $H^*(B_{\boldsymbol{Sp}(n)}, Z)$ est identique à l'algèbre des polynômes ayant pour générateurs des classes K_{4i}, $(1 \leq i \leq n)$, définies par: $K_{4i} = \Sigma\, x_1^2 \cdots x_i^2$.

Le plongement canonique de $\boldsymbol{Sp}(n)$ dans $\boldsymbol{U}(2n)$ définit un homomorphisme

$$\nu = \rho^*(\boldsymbol{Sp}(n)), \boldsymbol{U}(2n)) \quad : \quad H^*(B_{\boldsymbol{U}(2n)}, Z) \to H^*(B_{\boldsymbol{Sp}(n)}, Z)$$

donné par les formules:

$$(5.4) \qquad \begin{aligned} \nu(C_{2i}) &= 0 \text{ si } i \text{ est impair} \\ \nu(C_{4k}) &= (-1)^k K_{4k}. \end{aligned}$$

Note. Les formules (5.2), (5.3), (5.4) permettent de déterminer les homomorphismes

$$H^*(\boldsymbol{SO}(2n), Z_p) \to H^*(\boldsymbol{U}(n), Z_p) \to H^*(\boldsymbol{SO}(n), Z_p)$$

et

$$H^*(\boldsymbol{U}(2n), Z) \to H^*(\boldsymbol{Sp}(n), Z)$$

induits par les plongements canoniques ([2], Proposition 21.3 et § 31). Ainsi, si l'on désigne par t_k l'élément de $H^{4k-1}(\boldsymbol{SO}(n), Z_p)$ dont l'image par transgression est P_{4k}, par u_n celui dont l'image est W_n (n pair), par v_k l'élément de $H^{4k-1}(\boldsymbol{Sp}(n), Z)$ dont l'image est K_{4k}, on voit que $(-1)^k t_k$ et $(-1)^k v_k$ sont restrictions des classes

$$h_{2k} \,\varepsilon\, H^{4k-1}(\boldsymbol{U}(n), Z_p), \text{ resp. } h_{2k} \,\varepsilon\, H^{4k-1}(\boldsymbol{U}(n), Z).$$

Par conséquent:

5.5. *A l'exception de la classe* u_n, (d'ailleurs exceptionnelle à plus d'un titre), *les générateurs des algèbres de cohomologie des groupes classiques sont restrictions de générateurs de l'algèbre de cohomologie du groupe unitaire* (*pour* $\boldsymbol{SO}(n)$, *on suppose* $p \neq 2$).

II. Les puissances réduites de Steenrod.

6. Les puissances réduites. Dans les Nos. 6 et 7, p désignera un nombre premier fixé, K un polyèdre fini, L un sous-polyèdre de K. On notera $H^q(K, L; Z_p)$ ou $H^q(K, L)$ lorsque cela ne prêtera pas à confusion, les groupes de cohomologie de K modulo L, à coefficients dans Z_p.

Les puissances réduites sont des homomorphismes

$$P_i^p \colon H^q(K, L; Z_p) \to H^{pq-i}(K, L; Z_p)$$

définis pour tout p premier, tout $i \geq 0$, tout $q \geq 0$, et tout couple de polyèdres K et L, L étant un sous-polyèdre de K.

A la place de la notation P_i^p, qui est adoptée dans [15], on trouve fréquemment ([4], [17], [20]) la notation St_p^i qui désigne P^p_{pq-q-i}; ainsi l'homomorphisme St_p^i applique $H^q(K, L)$ dans $H^{q+i}(K, L)$ et élève donc le degré de i unités.

Dans cet article, nous utiliserons une troisième notation, qui figure à la fin de [15b]. Rappelons les raisons de ce changement : D'après un théorème de Thom, ([16], [15b]), on a $St_p{}^i = 0$ si $i \not\equiv 0 \bmod 2\ (p-1)$ et il est connu que $St_p{}^{2i+1}$ se ramène immédiatement à $St_p{}^{2i}$; ainsi, seules les opérations $St_p{}^{2k(p-1)}$ sont réellement importantes, et il est naturel de les désigner par un symbole plus simple ; d'autre part les propriétés des $St_p{}^i$ sont compliquées par la présence de facteurs numériques ; si on cherche à les faire disparaître, en modifiant convenablement la définition des puissances réduites, on est finalement conduit à la notation suivante, qui est celle que nous adopterons dans toute la suite :

On désigne par $\mathfrak{P}_p{}^k$ l'homomorphisme de $H^q(K, L; Z_p)$ dans

$$H^{q+2k(p-1)}(K, L; Z_p)$$

qui est égal à $\lambda(p, q, k) \cdot St_p{}^{2k(p-1)}$, le coefficient $\lambda(p, q, k)$ étant un élément de Z_p défini comme suit:

Si $p = 2,\ \lambda(p, q, k) = 1$

Si $p = 2h + 1,\ \lambda(p, q, k) = (-1)^{hr(r-1)/2}(h!)^{-r}$ *avec* $r = q - 2k$.

7. Formulaire. Nous rappelons ici les propriétés des puissances réduites $\mathfrak{P}_p{}^k$, (*voir* [15b]) ; dans la suite de ce travail, nous n'utiliserons que ces formules, et jamais la définition explicite des $\mathfrak{P}_p{}^k$, (ce qui n'est d'ailleurs pas surprenant, puisque Thom [17] a montré que les formules en question caractérisent complètement les $\mathfrak{P}_p{}^k$).

7. 1. $\mathfrak{P}_p{}^k \colon H^q(K, L; Z_p) \to H^{q+2k(p-1)}(K, L; Z_p)$ *est un homomorphisme défini quels que soient* $q \geq 0$, $k \geq 0$ *et le couple* (K, L).

7. 2. *Soit* $f \colon (K, L) \to (K', L')$ *une application continue. Si* f^* *est l'homomorphisme de* $H^*(K', L')$ *dans* $H^*(K, L)$ *induit par* f *on a* $\mathfrak{P}_p{}^k \circ f^* = f^* \circ \mathfrak{P}_p{}^k$.

7. 3. *Lorsque* $p = 2$, *on a* $\mathfrak{P}_p{}^k = Sq^{2k}$ *("i-carré" de Steenrod).*

7. 4. $\mathfrak{P}_p{}^0$ *est l'application identique de* $H^*(K, L)$ *sur lui-même.*

7. 5. $\mathfrak{P}_p{}^k \colon H^q(K, L) \to H^{q+2k(p-1)}(K, L)$ *est nul lorsque* $q < 2k$, *coïncide avec l'élévation à la p-ième puissance lorsque* $q = 2k$.

7. 6. *Si* δ *désigne l'homomorphisme cobord qui applique* $H^q(L)$ *dans* $H^{q+1}(K, L)$, *on a* $\mathfrak{P}_p{}^k \circ \delta = \delta \circ \mathfrak{P}_p{}^k$.

7. 7. *Soient x et y deux éléments de $H^*(K, L)$, $x \cdot y$ leur cup-produit. Lorsque $p \neq 2$, on a:*

$$\mathcal{P}_p^k(x \cdot y) = \Sigma_{i+j=k} \mathcal{P}_p^i(x) \cdot \mathcal{P}_p^j(y).$$

(Cela montre en particulier que $\mathcal{P}_p^1$ est une *dérivation.*)

7. 8. $Sq^k(x \cdot y) = \Sigma_{i+j=k} \; Sq^i(x) \cdot Sq^j(y)$.

(*Ainsi, la formule* 7. 7 *est valable pour $p = 2$ quand Sq^1 est nul pour tout élément de $H^*(K, L)$.*)

Remarquons enfin que la transgression dans un espace fibré, dont nous avons rappelé la définition au No. 2, est un produit $q^{*-1} \cdot \delta$, où q^* et δ commutent avec $\mathcal{P}_p^k$, vu 7. 2 et 7. 6; par conséquent:

7. 9. *Si τ désigne la transgression dans un espace fibré E on a:*

$$\mathcal{P}_p^k \circ \tau = \tau \circ \mathcal{P}_p^k.$$

De façon plus précise, $\mathcal{P}_p^k$ applique $T^s(F)$ dans $T^{s+2k(p-1)}(F)$, et $L^{s+1}(B)$ dans $L^{s+1+2k(p-1)}(B)$, et on a un diagramme commutaif

$$\begin{array}{ccc} T^s(F) & \xrightarrow{\mathcal{P}_p^k} & T^{s+2k(p-1)}(F) \\ \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\ H^{s+1}(B)/L^{s+1}(B) & \xrightarrow{\mathcal{P}_p^k} & H^{s+1+2k(p-1)}(B)/L^{s+1+2k(p-1)}(B) \end{array}$$

Note. Les puissances réduites $\mathcal{P}_p^k$ sont définies dans [15] pour les couples (K, L) de *polyèdres finis*; mais, comme nous l'a signalé N. E. Steenrod, elles sont définissables dans des théories cohomologiques plus vastes et notament dans la *théorie de Čech* (par passage à la limite à partir des polyèdres) et dans la *théorie singulière* (car il existe une formule simpliciale universelle, analogue à celle des i-produits, qui fait passer d'un cocycle représentant la classe de cohomologie x à un cocycle représentant $\mathcal{P}_p^k(x)$). Bien entendu, le formulaire précédent est encore valable dans ces deux cas.

8. Les puissances réduites dans les espaces projectifs. Nous allons montrer maintenant comment les formules du No. 7 permettent de déterminer les opérations $\mathcal{P}_p^k$ dans quelques cas simples. Les résultats obtenus nous serviront du reste dans la troisième partie de ce travail.

Proposition 8. 1. *Soit u une classe de cohomologie de dimension 2. On a, si $p \neq 2$, $\mathcal{P}_p^k(u^n) = \binom{n}{k} u^{n+k(p-1)}$ (on convient que $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$); si $p = 2$ la formule précédente reste valable lorsque $Sq^1 u = 0$.*

On raisonne par récurrence sur n. Supposons tout d'abord $p \neq 2$; en appliquant 7. 7 on obtient:

$$\mathcal{P}_p^k(u^n) = \Sigma_{i+j=k}\mathcal{P}_p^i(u)\cdot\mathcal{P}_p^j(u^{n-1})$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, la somme du 2ème membre se réduit à

$$\binom{n-1}{k-1}u^{n+k(p-1)} + \binom{n-1}{k}u^{n+k(p-1)} = \binom{n}{k}u^{n+k(p-1)}.$$

Pour $p=2$, on doit appliquer la formule 7. 8 et on trouve un terme supplémentaire, égal à $Sq^1u\cdot Sq^{2k-1}(u^{n-1})$, qui est nul si l'on suppose que $Sq^1u=0$, et le reste du calcul vaut sans changement.

COROLLAIRE 8. 2. *Soient $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}_m(C)$ l'espace projectif complexe de dimension complexe m, u un élément de $H^2(\boldsymbol{X}, Z_p)$. On a:*

$$\mathcal{P}_p^k(u^n) = \binom{n}{k}u^{n+k(p-1)}.$$

La seule chose à vérifier est que $Sq^1u=0$, ce qui résulte de la nullité de $H^3(\boldsymbol{X}, Z_2)$.

COROLLAIRE 8. 3. *Soit $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{P}_m(K)$ l'espace projectif quaternionien de dimension quaternionienne m. Alors $H^4(\boldsymbol{Y}, Z_p)$ contient un élément $v\neq 0$ tel que:*

$$\mathcal{P}_p^k(v^n) = 0 \textit{ si } p=2 \textit{ et si } k \textit{ est impair,}$$

$$\mathcal{P}_p^k(v^n) = \binom{2n}{k}v^{n+k(p-1)/2} \textit{ sinon.}$$

Par définition même, $\boldsymbol{P}_m(K)$ est la base de $\boldsymbol{S}_{4m+3}$, fibrée par le groupe $\boldsymbol{Sp}(1)$ des quaternions de norme 1, qui est homéomorphe à $\boldsymbol{S}_3$; de même le quotient de $\boldsymbol{S}_{4m+3}$ par un sous-groupe $\boldsymbol{S}_1$ de $\boldsymbol{Sp}(1)$ est l'espace $\boldsymbol{P}_{2m+1}(C)$. Ce dernier est donc fibré de fibre $\boldsymbol{S}_3/\boldsymbol{S}_1=\boldsymbol{S}_2$ et de base $\boldsymbol{P}_m(K)$; soit ψ la projection qui définit cette fibration. On voit immédiatement (soit par un raisonnement géométrique, soit en examinant la suite spectrale de cette fibration), que ψ^* est un isomorphisme de $H^*(\boldsymbol{Y})$ sur la sous-algèbre de $H^*(\boldsymbol{P}_{2m+1}(C))$ engendrée par u^2, u étant un générateur de $H^*(\boldsymbol{P}_{2m+1}(C))$. Soit alors v la réduction mod p de l'élément $\hat{v}\,\varepsilon\, H^4(\boldsymbol{Y}, Z)$ tel que $\psi^*(\hat{v})=u^2$.

Pour $p=2$, k impair, $\mathcal{P}_p^k(v^n)$ est de dimension congrue à 2 mod 4, et est donc nul; sinon on a

$$\psi^*(\mathcal{P}_p^k(v^n)) = \mathcal{P}_p^k(u^{2n}) = \binom{2n}{k}u^{2n+k(p-1)} = \phi^*\left(\binom{2n}{k}v^{n+k(p-1)/2}\right),$$

d'où le corollaire, puisque ψ^* est biunivoque.

Remarque. Il est naturel de se demander si, de même que dans le

Corollaire 8.2, la formule du corollaire 8.3 vaut pour *tout* élément de $H^4(Y)$. Un tel élément étant de la forme λv, $(\lambda \in Z_p)$, on est amené à voir si l'on a $\lambda^{k(p-1)/2} \equiv 1 \bmod p$; si k est pair, c'est bien le cas quel que soit $\lambda \not\equiv 0$, mais si k est impair, il faut et il suffit que λ soit reste quadratique mod p.

PROPOSITION 8.4. *Soit X un espace dont l'algèbre de cohomologie $H^*(X, Z_p)$ est engendrée par des éléments de dimension 2. Si $(\mathfrak{P}_p^1)^k$ désigne l'opération $\mathfrak{P}_p^1$ itérée k fois, on a $(\mathfrak{P}_p^1)^k(x) = k!\mathfrak{P}_p^k(x)$ pour tout $x \in H^*(X, Z_p)$.*

Cette égalité résulte immédiatement de la Proposition 8.1 pour x de dimension deux; il nous reste donc simplement à montrer que si elle est vraie pour x et y, elle l'est encore pour $x \cdot y$; or, $\mathfrak{P}_p^1$ étant une dérivation d'après 7.7, on peut lui appliquer la formule de Leibnitz donnant la dérivée k-ième d'un produit, et l'on obtient ainsi:

$$(\mathfrak{P}_p^1)^k(x \cdot y) = \Sigma_{i+j=k}\binom{k}{i}(\mathfrak{P}_p^1)^i(x) \cdot (\mathfrak{P}_p^1)^j(y).$$

D'après l'hypothèse faite sur x et y, le second membre est égal à

$$\Sigma_{i+j=k}\ i!j!\binom{k}{i} \cdot \mathfrak{P}_p^i(x) \cdot \mathfrak{P}_p^j(y) = k!\,\Sigma_{i+j=k}\mathfrak{P}_p^i(x) \cdot \mathfrak{P}_p^j(y),$$

donc à $k!\mathfrak{P}_p^k(x \cdot y)$, d'après 7.7.

COROLLAIRE. *L'opération $\mathfrak{P}_p^1$, itérée p fois, est nulle.*

Remarque. Si $p \neq 2$ la formule $(\mathfrak{P}_p^1)^k = k!\mathfrak{P}_p^k$ est très probablement valable sans hypothèse restrictive sur X; elle l'est en tout cas lorsque $X = G$ et $X = B_G$, G étant un groupe de Lie vérifiant les conditions 3.2, car $H^*(B_G)$ est alors isomorphe à une sous-algèbre de $H^*(B_T)$, laquelle vérifie les hypothèses de la Proposition 8.4, et on passe de là à $H^*(G)$ par transgression. Cette formule est par contre inexacte pour $p = 2$, comme le montre l'exemple $Sq^2 \circ Sq^2 = Sq^3 \circ Sq^1$.

9. Applications aux groupes d'homotopie des sphères. N. E. Steenrod, (*Reduced powers of cohomology classes*, Cours professé au Collège de France, Mai 1951), a montré comment on peut utiliser les puissances réduites pour étudier les groupes $\pi_i(S_n)$. Rappelons sa méthode:

Soient p un nombre premier, k un entier, f une application continue de S_i dans S_n, avec $i = n + 2k(p-1) - 1$. Désignons par $\mathbf{X}$ le complexe cellulaire obtenu en adjoignant à S_n une boule de dimension $i+1$ par l'application f de sa frontière dans S_n; on a:

$$H^0(\mathbf{X}, Z) = H^n(\mathbf{X}, Z) = H^{n+2k(p-1)}(\mathbf{X}, Z) = Z$$

et les autres groupes de cohomologie de $\mathbf{X}$ sont nuls; soit encore s, (resp. t), la réduction mod p du générateur canonique de $H^n(\mathbf{X}, Z)$, (resp. de $H^{n+2k(p-1)}(\mathbf{X}, Z)$). On a $\mathcal{P}_p^k(s) = \lambda_f t$, $(\lambda_f \varepsilon Z_p)$, et il est clair que λ_f ne dépend que de la classe d'homotopie de f, et que l'application $f \to \lambda_f$ définit un homomorphisme de $\pi_{n+2k(p-1)-1}(\boldsymbol{S}_n)$ dans Z_p que nous noterons $\zeta_p^{n,k}$.

Si E désigne la suspension de Freudenthal, on a

9.1 $$\zeta_p^{n+1,k} \circ E = \zeta_p^{n,k},$$

(cela résulte du fait que $\mathcal{P}_p^k$ commute avec δ).

Exemples.

1) $p = 2$. On déduit de l'existence d'applications dont l'invariant de Hopf est 1 que $\zeta_2^{n,1}$, $\zeta_2^{n,2}$ et $\zeta_2^{n,4}$ sont des homomorphismes de $\pi_{n+1}(\boldsymbol{S}_n)$, de $\pi_{n+3}(\boldsymbol{S}_n)$ et de $\pi_{n+7}(\boldsymbol{S}_n)$ *sur* Z_2 (pour $n \geq 2$, $n \geq 4$ et $n \geq 8$ respectivement).

2) $p = 3$. Il est classique que l'espace $\mathbf{X}$ obtenu par le procédé décrit plus haut à partir de l'application de Hopf $f: \boldsymbol{S}_7 \to \boldsymbol{S}_4$ est le *plan projectif quaternionien* $\boldsymbol{P}_2(K)$. Or, d'après 8.3, on a $\mathcal{P}_3^1(v) \not\equiv 0 \bmod 3$ si v est un élément non nul de $H^4(\boldsymbol{P}_2(K), Z_3)$; par conséquent $\zeta_3^{4,1}(f) \neq 0$, ce qui, compte tenu de 9.1, montre que $\zeta_3^{n,1}$ est un homomorphisme de $\pi_{n+3}(\boldsymbol{S}_n)$ *sur* Z_3 pour $n \geq 4$.

La suspension itérée E^2 étant un isomorphisme de $\pi_6(\boldsymbol{S}_3)$ sur un sous-groupe d'indice 2 de $\pi_8(\boldsymbol{S}_5)$, (d'après des résultats classiques de Freudenthal et de G. W. Whitehead), la formule 9.1 montre que $\zeta_3^{3,1}$ applique $\pi_6(\boldsymbol{S}_3)$ *sur* Z_3, résultat obtenu d'une autre manière par Steenrod, et que nous préciserons au No. 19 en donnant explicitement un élément de $\pi_6(\boldsymbol{S}_3)$ dont l'image par $\zeta_3^{3,1}$ est $\neq 0$.

Ainsi, pour $p = 2, 3$, l'homomorphisme $\zeta_p^{n,1}$ applique $\pi_{n+2p-3}(\boldsymbol{S}_n)$ sur Z_p lorsque $n \geq 3$; nous allons voir que ce fait est général; plus précisément:

PROPOSITION 9.2. *L'homomorphisme $\zeta_p^{n,1}: \pi_{n+2p-3}(\boldsymbol{S}_n) \to Z_p$ est un isomorphisme du p-composant de $\pi_{n+2p-3}(\boldsymbol{S}_n)$ sur Z_p lorsque $n \geq 3$.*

D'après [13], Chap. IV, Prop. 3 et 4, la suspension de Freudenthal applique isomorphiquement le p-composant de $\pi_{n+2p-3}(\boldsymbol{S}_n)$ sur celui de $\pi_{n+2p-2}(\boldsymbol{S}_{n+1})$ lorsque $n \geq 3$. Vu 9.1, il suffit donc de démontrer 9.2 pour $n = 3$; comme on sait que le p-composant de $\pi_{2p}(\boldsymbol{S}_3)$ est Z_p, (ibid. Proposition 7), on est finalement ramené à prouver que, si $f: \boldsymbol{S}_{2p} \to \boldsymbol{S}_3$ est une application essentielle définissant un élément d'ordre p de $\pi_{2p}(\boldsymbol{S}_3)$, on a $\lambda_f \neq 0$, avec les notations introduites au début de ce paragraphe.

Or, soit $\boldsymbol{X}$ l'espace obtenu en adjoignant à $\boldsymbol{S}_3$ une cellule de dimension $2p+1$ à l'aide de f, et écrivons la suite exacte d'homotopie de $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{S}_3)$:

$$\cdots \to \pi_i(\boldsymbol{S}_3) \to \pi_i(\boldsymbol{X}) \to \pi_i(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{S}_3) \xrightarrow{d} \pi_{i-1}(\boldsymbol{S}_3) \to \pi_{i-1}(\boldsymbol{X}) \to \cdots$$

On a visiblement $\pi_i(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{S}_3) = 0$ lorsque $i < 2p+1$ et $\pi_{2p+1}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{S}_3) = Z$; en outre, l'image de $d\colon \pi_{2p+1}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{S}_3) \to \pi_{2p}(\boldsymbol{S}_3)$ est le sous-groupe engendré par la classe de f, et est donc isomorphe à Z_p. Il suit de là:

$$\pi_i(\boldsymbol{X}) \approx \pi_i(\boldsymbol{S}_3) \text{ si } i < 2p, \qquad \pi_{2p}(\boldsymbol{X}) \approx \pi_{2p}(\boldsymbol{S}_3)/Z_p.$$

Soit alors $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{X}, 4)$ l'espace obtenu à partir de X en tuant $\pi_3(\boldsymbol{X}) = Z$, (au sens de [5], voir aussi [13], Chap. III). Par définition de $\boldsymbol{Y}$, on a $\pi_i(\boldsymbol{Y}) = 0$ pour $i \leq 3$, et $\pi_i(\boldsymbol{Y}) = \pi_i(\boldsymbol{X})$ pour $i \geq 4$, ce qui, joint aux formules précédentes, montre que $\pi_i(\boldsymbol{Y})$, $(i \leq 2p)$, est un groupe fini dont le p-composant est nul; il en résulte que $H^i(\boldsymbol{Y}, Z_p) = 0$ lorsque $0 < i \leq 2p$, ([13], Chap. III, Théor. 1).

Mais d'autre part $\boldsymbol{Y}$ est un espace fibré de base $\boldsymbol{X}$ et dont la fibre est un $K(Z, 2)$, au sens d'Eilenberg-MacLane. L'algèbre $H^*(Z, 2)$ est, comme on sait, une algèbre de polynômes engendrée par un élément de dimension deux, soit r. La transgression τ dans l'espace fibré $\boldsymbol{Y}$ transforme r en un élément de $H^3(\boldsymbol{X})$, qui est nécessairement de la forme λs, $(\lambda \in Z_p)$, s étant le générateur introduit plus haut. L'élément r étant transgressif, il en est de même de $r^r = \mathcal{P}_p^1(r)$, d'après 7. 9, et l'on a: $\tau(r^p) = \mathcal{P}_p^1(\tau(r)) = \lambda \mathcal{P}_p^1(s)$.

Si $\tau(r^p)$ étant nul, r^p définirait un élément non nul de $H^{2p}(\boldsymbol{Y}, Z_p)$ ce qui est impossible, on l'a vu; on doit donc forcément avoir $\mathcal{P}_p^1(s) \neq 0$, ce qui signifie justement que $\lambda_f \neq 0$.

On remarquera que la démonstration précédente, à la différence de celles relatives à $p = 2$ et à $p = 3$, ne fournit aucun élément *explicite* de $\pi_{n+2p-3}(\boldsymbol{S}_n)$ dont l'image par $\zeta_p^{n,1}$ soit non nulle.

III. Les puissances réduites dans la cohomologie des groupes de Lie et de leurs espaces classifiants.

10. Méthode générale. Nous revenons maintenant sur la méthode de calcul des puissances réduites dans $H^*(G, Z_p)$ et $H^*(B_G, Z_p)$ déjà brièvement décrite dans l'introduction.

p étant un nombre premier arbitraire, mais fixé, nous supposerons *dans toute la suite* que G vérifie les conditions 3. 2, autrement dit que G et son quotient G/T par un tore maximal sont sans p-torsion; comme nous l'avons rappelé au No. 3, cela a lieu pour tout groupe classique et tout p, à l'exception du cas $G = \boldsymbol{SO}(n)$, $p = 2$; nous n'obtiendrons donc pas ici les Sq^i dans $H^*(\boldsymbol{SO}(n), Z_2)$ et $H^*(B_{\boldsymbol{SO}(n)}, Z_2)$, pour lesquels nous renvoyons à [3], où ils sont traités par une méthode analogue, utilisant des sous-groupes abéliens maximaux de type $(2, 2, \cdots, 2)$ au lieu de tores maximaux.

G vérifiant 3. 2, l'algèbre $H^*(B_G, Z_p)$ est une algèbre de polynômes à l générateurs de dimensions paires, soient $y_1, \cdots, y_l$, qui s'identifie canoniquement à une sous-algèbre de $H^*(B_T, Z_p)$; or cette dernière est une algèbre de polynômes à l générateurs $x_1, \cdots, x_l$ de dimension deux et les p-puissances réduites y sont déterminées par la Proposition 8. 1 et la formule 7. 7; cela résout donc la question pour $H^*(B_G, Z_p)$.

On passe de là à $H^*(G, Z_p)$ par transgression en utilisant les résultats du No. 2. Soit x_i l'élément universellement transgressif de $H^*(G, Z_p)$ tel que $\tau(x_i) = y_i \bmod D$, $(1 \leq i \leq l)$; d'après 7. 9, $\mathcal{P}_p^k(x_i)$ est aussi universellement transgressif et de plus, compte tenu de 2. 3:

$$\mathcal{P}_p^k(x_i) = \mathcal{P}_p^k(\tau x_i) = \mathcal{P}_p^k(y_i) \bmod D\tau;$$

mais les puissances réduites dans $H^*(B_G, Z_p)$ sont déjà connues; on sait donc exprimer $\mathcal{P}_p^k(y_i)$ comme polynôme en les y_j; désignons par $\Sigma \lambda_j y_j$ sa partie homogène de degré 1. On a donc $\mathcal{P}_p^k(y_i) = \Sigma \lambda_j y_j \bmod D$ ou encore

$$\mathcal{P}_p^k(y_i) = \Sigma \lambda_j(\tau x_j) = \tau(\Sigma \lambda_j x_j) \bmod D$$

d'où finalement $\mathcal{P}_p^k(x_i) = \Sigma \lambda_j x_j$, puisque τ est biunivoque. Cela détermine les puissances réduites des éléments universellement transgressifs de $H^*(G, Z_p)$; comme cette dernière est identique à l'algèbre extérieure engendrée par les x_i, les $\mathcal{P}_p^k$ s'y obtiennent alors grâce à 7. 7.

Remarque. On voit que la partie *essentielle* de cette méthode est le calcul des $\mathcal{P}_p^k$ dans $H^*(B_G, Z_p)$; pour en déduire $\mathcal{P}_p^k$ dans $H^*(G, Z_p)$, il nous suffit même de connaître le terme dominant de $\mathcal{P}_p^k(y_i)$, $(1 \leq i \leq l)$. Inversement la connaissance de $\mathcal{P}_p^k$ dans $H^*(G, Z_p)$ détermine le terme dominant de $\mathcal{P}_p^k(y_i)$ mais ne fournit aucun renseignement sur sa partie décomposable. En fait, nous n'aurons besoin que des termes dominants pour toutes les applications données dans la quatrième partie.

11. Le groupe unitaire $\boldsymbol{U(n)}$. Nous expliciterons tout d'abord la méthode générale dans le cas particulier le plus important, celui du groupe unitaire $\boldsymbol{U}(n)$. Nous reprenons les notations du No. 4; l'algèbre $H^*(B_{\boldsymbol{U}(n)}, Z_p)$ est engendrée par les classes C_{2i}, $(1 \leq i \leq n)$, et il s'agit essentiellement d'exprimer $\mathcal{P}_p^k(C_{2i})$ comme polynôme en les C_{2i}; la classe C_{2i} s'identifie à la i-ième fonction symétrique élémentaire $\Sigma x_1 \cdots x_i = \sigma_i$, une fois $H^*(B_{U(n)}, Z_p)$ plongé dans $H^*(B_T, Z_p)$ comme il a été dit au No. 3.

LEMME 11. 1.

$$\mathcal{P}_p^k(x_1 \cdots x_i) = \Sigma_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq i}\, x^p{}_{i_1} \cdot x^p{}_{i_2} \cdot \cdots \cdot x^p{}_{i_k} \cdot x_{j_1} \cdot \cdots \cdot x_{j_{i-k}}$$

où $\{j_1 < j_2 < \cdots < j_{i-k}\}$ *est l'ensemble complémentaire de* $\{i_1, \cdots, i_k\}$ *dans la suite* $\{1, 2, \cdots, i\}$.

Démonstration par récurrence sur i; pour $i = 1$, le lemme se réduit à la Proposition 8. 1; d'après 7. 7, (qui vaut ici même si $p = 2$, car $H^*(B_T, Z_p)$ est nulle en toute dimension impaire), on a:

$$\mathcal{P}_p^k(x_1 \cdots x_i) = \mathcal{P}_p^k(x_1 \cdots x_{i-1}) \cdot x_i + \mathcal{P}_p^{k-1}(x_1 \cdots x_{i-1}) \cdot \mathcal{P}_p^1(x_i)$$

et, puisque $P_p^1(x_i) = x_i^p$ d'après 7. 5, cela donne:

$$\mathcal{P}_p^k(x_1 \cdots x_i) = \mathcal{P}_p^k(x_1 \cdots x_{i-1}) \cdot x_i + \mathcal{P}_p^{k-1}(x_1 \cdots x_{i-1}) \cdot x_i^p.$$

Vu l'hypothèse de récurrence, le premier terme du second membre est identique à la somme partielle de

$$\Sigma_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq i}\, x^p{}_{i_1} \cdot \cdots \cdot x_{i_k}{}^p \cdot x_{j_1} \cdot \cdots \cdot x_{j_{i-k}}$$

correspondant à $i_k < i$, et le second terme est identique à la somme partielle correspondant à $i_k = i$, ce qui démontre le lemme. (On observera que, si l'on y fait $x_1 = x_2 = \cdots = x_i = x$, on retrouve la Proposition 8. 1). Il résulte évidemment du lemme 11. 1 que

11. 2 $$\mathcal{P}_p^k(\Sigma\, x_1 \cdots x_i) = \Sigma\, x_1^p \cdots x_k^p x_{k+1} \cdots x_i,$$

d'où finalement

THÉORÈME 11. 3. *Soit* $B_p^{k,j}(\sigma_1, \cdots, \sigma_j)$, $(j = i + k(p-1))$, *le polynôme qui exprime le polynôme symétrique de terme typique* $x_1^p \cdots x_k^p x_{k+1} \cdots x_i$ *en fonction des* $\sigma_i = \Sigma\, x_1 \cdots x_i$. *Si* $C_{2i} \in H^{2i}(B_{U(n)}, Z_p)$ *désigne la classe de Chern de dimension* $2i$ *réduite mod* p, *on a*

$$\mathcal{P}_p^k(C_{2i}) = B_p^{k,j}(C_2, \cdots, C_{2j}).$$

Ce théorème est dû à Wu Wen Tsün [20]; notre démonstration est du reste tout à fait semblable à la sienne, la seule différence étant que chez Wu, l'égalité $C_{2i} = \Sigma\, x_1 \cdots x_i$ n'a qu'un caractère "symbolique" et ne peut être utilisée directement pour le calcul de $\mathcal{P}_p^k(C_{2i})$; (Wu raisonne par récurrence sur n, en utilisant le théorème de dualité rappelé au No. 4, alors qu'ici nous avons interprété les x_i comme des éléments de $H^2(B_T, Z_p)$).

En combinant 10. 1 et 11. 3, on obtient:

COROLLAIRE 11. 4. *Soient $b_p^{k,j}\sigma_j$ le terme dominant de $B_p^k(\sigma_1, \cdots, \sigma_j)$, et $h_i \,\varepsilon\, H^{2i-1}(\boldsymbol{U}(n), Z_p)$ l'élément dont l'image par transgression est C_{2i} mod D. On a:*

$$\mathcal{P}_p^k(h_i) = b_p^{k,j}h_j \qquad (1 \leq i \leq n\,;\, j = i + k(p-1)).$$

(Le terme dominant est bien entendu défini par la condition que

$$B_p^{k,j}(\sigma_1, \cdots, \sigma_j) - b_p^{k,j}\sigma_j$$

soit un polynôme en $\sigma_1, \cdots, \sigma_{j-1}$.)

12. Cas particuliers. Lorsque k, j, p sont des entiers donnés, le polynôme $B_p^{k,j}(\sigma_1, \cdots, \sigma_j)$ et son terme dominant $b_p^{k,j}\sigma_j$ peuvent être calculés par un procédé mécanique bien connu; pour $p = 2$, Wu Wen Tsün a même donné une formule générale, valable pour k et j quelconques:

$$B_2^{k,j} = \binom{j-k-1}{k}\sigma_j + \binom{j-k-2}{k-1}\sigma_1 \cdot \sigma_{j-1} + \cdots + \binom{j-2k}{1}\sigma_{k-1} \cdot \sigma_{j-k-1} + \sigma_k \cdot \sigma_{j-k}\,;$$

nous ignorons s'il existe une formule générale du même genre pour $p \neq 2$.

Exemples.

1) Calcul de $B_3^{1,j}$. Il nous faut calculer $\sum x_1^3 x_2 \cdots x_{j-2}$; on a

$$\sum x_1^3 x_2 \cdots x_{j-2} = (\sum x_1^2) \cdot (\sum x_1 \cdots x_{j-2}) - \sum x_1^2 x_2 \cdots x_{j-1},$$

$$\sum x_1^2 x_2 \cdots x_{j-1} = (\sum x_1) \cdot (\sum x_1 \cdots x_{j-1}) - j \cdot \sum x_1 \cdots x_j.$$

Comme $\sum x_1^2 = (\sigma_1)^2 - 2\sigma_2$, on trouve en définitive:

12. 1 $$B_3^{1,j} = (\sigma_1)^2 \cdot \sigma_{j-2} - 2\sigma_2 \cdot \sigma_{j-2} - \sigma_1 \cdot \sigma_{j-1} + j \cdot \sigma_j,$$

d'où, compte tenu de 11. 3:

12. 2 $$\mathcal{P}_3^1(C_{2j-4}) = (C_2)^2 \cdot C_{2j-4} - 2 \cdot C_4 \cdot C_{2j-4} - C_2 \cdot C_{2j-2} + j \cdot C_{2j}.$$

2) Calcul de $b_p^{1,j}$. L'exemple précédent montre que $b_3^{1,j} = j$; nous allons voir que plus généralement:

12. 3 $$b_p^{1,j} \equiv j \mod p.$$

Puisque $(-1)^{p+1} \equiv 1 \bmod p$ pour tout p premier, il suffit évidemment de prouver que le terme dominant de $\Sigma\, x_1{}^q x_2 \cdots x_{j-q+1}$ est $(-1)^{q+1} j \cdot \sigma_j$, ce qui, pour $q=2$, résulte de la formule:

$$\Sigma\, x_1{}^2 x_2 \cdots x_{j-1} = (\Sigma\, x_1)(\Sigma\, x_1 \cdots x_{j-1}) - j \cdot \Sigma\, x_1 \cdots x_j,$$

et, pour $q > 2$, se démontre par récurrence sur q à l'aide de l'identité:

$$\Sigma\, x_1{}^q x_2 \cdots x_{j-q+1} = (\Sigma\, x_1{}^{q-1})(\Sigma\, x_1 \cdots x_{j-q+1}) - \Sigma\, x_1{}^{q-1} x_2 \cdots x_{j-q+2}.$$

En combinant 12. 3 avec 11. 3 et 11. 4, dont nous gardons les notations, on obtient:

Proposition 12. 4. *Soient p un nombre premier, j un entier $> p$, non divisible par p. La classe de Chern C_{2j}, réduite mod p, est égale à $1/j \cdot \mathcal{P}_p{}^1(C_{2j-2p+2})$ augmentée d'un polynôme par rapport aux classes C_{2i}, $(i < j)$, et l'on a $h_j = 1/j \cdot \mathcal{P}_p{}^1(h_{j-p+1})$.*

En fait, dans la plupart des applications, c'est j qui est donné, et l'on cherche un nombre premier p vérifiant les hypothèses de 12. 4; on a à ce sujet:

Lemme 12. 5. *Pour tout entier $j \geq 3$, il existe un nombre premier p tel que $p < j$ et que $j \not\equiv 0 \bmod p$; ce nombre peut être choisi impair si $j \geq 4$.*

La première partie se démontre en prenant pour p un diviseur premier de $j-1$, la seconde en prenant pour p un diviseur premier de $j-1$ ou de $j-2$ suivant que j est pair ou impair.

Il résulte de 12. 4 et 12. 5:

Proposition 12. 6. *Soit j un entier ≥ 3. Il existe un nombre premier $p < j$ ne divisant pas j, impair si $j \geq 4$, tel que C_{2j}, (resp. h_j), réduite mod p, soit égale à la somme d'un polynôme par rapport aux classes C_{2i}, (resp. h_i), $i < j$, et de $\mathcal{P}_p{}^1(\lambda C_{2j-2p+2})$, (resp. $\mathcal{P}_p{}^1(\lambda h_{j-p+1})$), $\lambda \in Z_p$.*

Puisque tout élément de $H^{2j}(B_{\boldsymbol{U}(n)}, Z_p)$, (resp. de $H^{2j-1}(\boldsymbol{U}(n), Z_p)$, est somme d'un multiple de C_{2j}, (resp. de h_j), et d'un polynôme en les C_{2i}, (resp. en les h_i), $i < j$, on déduit de 12. 6:

Corollaire 12. 7. *Si j et p vérifient les conditions de 12. 6, tout élément de $H^{2j}(B_{\boldsymbol{U}(n)}, Z_p)$, et tout élément de $H^{2j-1}(\boldsymbol{U}(n), Z_p)$, peuvent s'exprimer à l'aide de cup-produits et d'opérations de Steenrod à partir d'éléments de dimensions strictement plus petites.*

On notera que ce Corollaire vaut aussi bien pour $\boldsymbol{SU}(n)$; cela pourrait se montrer par des calculs analogues, mais il est plus simple de remarquer que, $\boldsymbol{SU}(n)$ étant totalement nom homologue à zéro dans $\boldsymbol{U}(n)$, les algèbres

$H^*(\boldsymbol{SU}(n), Z_p)$ et $H^*(B_{\boldsymbol{SU}(n)}, Z_p)$ sont des quotients de $H^*(\boldsymbol{U}(n), Z_p)$ et $H^*(B_{\boldsymbol{U}(n)}, Z_p)$, ([2], Cor. à la Prop. 21. 3).

13. Le groupe symplectique unitaire $\boldsymbol{Sp(n)}$. Si l'on applique la méthode générale, on est amené à calculer $\mathcal{P}_p^k(K_{4i})$ avec $K_{4i} = \Sigma\, x_1^2 \cdots x_i^2$.

Le lemme 11. 1 donne la valeur de $\mathcal{P}_p^k(x_1^2 \cdots x_i^2)$, d'où celle de $\mathcal{P}_p^k(K_{4i})$; tous calculs faits, on trouve:

13. 1 $\mathcal{P}_p^k(\Sigma\, x_1^2 \cdots x_i^2)$

$$= \Sigma_{2r+s=k}\, 2^s \Sigma\, x_1^{2p} \cdot x_2^{2p} \cdots x_r^{2p} \cdot x_{r+1}^{p+1} \cdots x_{r+s}^{p+1} \cdot x_{r+s+1}^2 \cdots x_i^2.$$

Lorsque i et k sont assez petits, cette formule permet d'exprimer $\mathcal{P}_p^k(K_{4i})$ comme polynôme en les K_{4i}.

Exemples.

1) $k = 1$, $p = 3$. On doit calculer $2 \cdot \Sigma\, x_1^4 x_2^2 \cdots x_i^2$. On a

$$\Sigma\, x_1^4 x_2^2 \cdots x_i^2 = (\Sigma\, x_1^2)(\Sigma\, x_1^2 \cdots x_i^2) - (i+1) \Sigma\, x_1^2 \cdots x_{i+1}^2,$$

ce qui donne:

13. 2 $$\mathcal{P}_3^1(K_{4i}) = 2 \cdot K_4 \cdot K_{4i} - (2i+2) \cdot K_{4i+4}.$$

2) $k = 1$, $p = 5$. On doit calculer $2\, \Sigma\, x_1^6 x_2^2 \cdots x_i^2$. On a

$$\Sigma\, x_1^6 x_2^2 \cdots x_i^2 = (\Sigma\, x_1^4)(\Sigma\, x_1^2 \cdots x_i^2) - \Sigma\, x_1^4 x_2^2 \cdots x_{i+1}^2,$$

ce qui, compte tenu du calcul précédent et de $(\Sigma\, x_1^4) = (\Sigma\, x_1^2)^2 - 2 \cdot \Sigma x_1^2 x_2^2$ donne:

13. 3 $$\mathcal{P}_5^1(K_{4i}) = 2 \cdot K_4^2 \cdot K_{4i} + K_8 \cdot K_{4i} + 3 \cdot K_4 \cdot K_{4i+4} + (2i+4) \cdot K_{4i+8}.$$

En fait, il est en général plus commode d'utiliser le plongement canonique de $\boldsymbol{Sp}(n)$ dans $\boldsymbol{U}(2n)$; il conduit à un homomorphisme

$$\nu\colon H^*(B_{\boldsymbol{U}(2n)}) \to H^*(B_{\boldsymbol{Sp}(n)})$$

qui, d'après 5. 4, applique C_{4i+2} sur zéro et C_{4i} sur $(-1)^i K_{4i}$. On a donc:

$$\mathcal{P}_p^k(K_{4i}) = (-1)^i \mathcal{P}_p^k(\nu(C_{4i})) = (-1)^i \nu(\mathcal{P}_p^k(C_{4i})).$$

Appliquant alors le Théorème 11. 3, on trouve:

THÉORÈME 13. 4. *Avec les notations du Théorème* 11. 3, *on a:*

$$\mathcal{P}_p^k(K_{4i}) = (-1)^i B_p^{k,2j}(0, -K_4, 0, K_8, \cdots, 0, (-1)^t K_{4t}, \cdots, (-1)^j K_{4j}),$$

j désignant l'entier $i + k(p-1)/2$.

(On a supposé $p \neq 2$, ou bien k pair, car sinon il est évident que $\mathcal{P}_p^k(K_{4i}) = 0$, puisque $H^{4i+2k}(B_{\boldsymbol{Sp}(n)}, Z_2) = 0$.)

De ce théorème on tire la conséquence suivante, analogue à 11.4:

Corollaire 13.5. *Si v_i désigne l'élément de $H^{4i-1}(\boldsymbol{Sp}(n), Z_p)$ dont l'image par transgression est K_{4i} mod D, on a:*

$\mathcal{P}_p^k(v_i) = 0$ *si* $p = 2$ *et si* k *est impair,*

$\mathcal{P}_p^k(v_i) = (-1)^{k(p-1)/2} \cdot b_p^{k,2j} \cdot v_j$ *sinon,* (*avec* $j = i + k(p-1)/2$).

(On pourrait également déduire 13.5 de 11.4 et du fait que v_i est induit par $(-1)^i h_{2i}$, cf. No. 5).

Enfin, 13.4 et 13.5, joints à l'égalité $b_p^{1,2j} \equiv 2j \bmod p$, donnent l'analogue suivant de 12.7:

Corollaire 13.6. *Soit j un entier > 2. Il existe un nombre premier $p < 2j$ impair tel que tout élément de $H^{4j}(B_{\boldsymbol{Sp}(n)}, Z_p)$ et tout élément de $H^{4j-1}(\boldsymbol{Sp}(n), Z_p)$ puissent s'exprimer à l'aide de cup-produits et d'opérations de Steenrod à partir d'éléments de dimensions strictement plus petites.*

14. Le groupe orthogonal $\boldsymbol{SO}(n)$. Nous devons nous borner ici aux nombres premiers p *impairs,* puisque $\boldsymbol{SO}(n)$ a de la 2-torsion. On a vu au No. 5 que $H^*(\boldsymbol{SO}(n), Z_p)$ admet comme système de générateurs les classes de Pontrjagin réduites P_{4i}, auxquelles s'ajoute la classe de Stiefel-Whitney W_n lorsque n est pair; de plus le plongement canonique de $\boldsymbol{SO}(n)$ dans $\boldsymbol{U}(n)$ définit un homomorphisme $\sigma: H^*(B_{\boldsymbol{U}(n)}, Z_p) \rightarrow H^*(B_{\boldsymbol{SO}(n)}, Z_p)$ qui applique C_{4i+2} sur 0 et C_{4i} sur $(-1)^i P_{4i}$, (*voir* 5.3). On peut alors répéter au sujet des P_{4i} le raisonnement fait au No. 13 pour les K_{4i}, et l'on obtient:

Théorème 14.1. *Si $P_{4i} \in H^{4i}(B_{\boldsymbol{SO}(n)}, Z_p)$ désigne la classe de Pontrjagin de dimension 4i réduite mod p, ($p \neq 2$), on a:*

$$\mathcal{P}_p^k(P_{4i}) = (-1)^i \cdot B_p^{k,2j}(0, -P_4, 0, P_8, \cdots, (-1)^j P_{4j}),$$
$$(j = i + k(p-1)/2).$$

Dans le cas où $n = 2m$ est pair, il reste encore à calculer $\mathcal{P}_p^k(W_{2m})$; le plus simple est ici d'appliquer la méthode générale; W_{2m} étant égale à $x_1 \cdots x_m$, on a $\mathcal{P}_p^k(W_{2m}) = \Sigma\, x_1^p \cdots x_k^p x_{k+1} \cdots x_m$, ou encore puisqu'il n'y a que m lettres $x_1 \cdots x_m$:

$$\mathcal{P}_p^k(W_{2m}) = x_1 \cdots x_m \Sigma\, x_1^{p-1} \cdots x_k^{p-1} = W_{2m} \Sigma\, x_1^{2h} \cdots x_k^{2h},$$

en posant $h = (p-1)/2$; il nous reste donc à exprimer $\Sigma\, x_1^{2h} \cdots x_k^{2h}$ comme polynôme en les $P_{4i} = \Sigma_1{}^2 \cdots x_i{}^2$ et $(W_{2m})^2$, ce qui conduit au théorème suivant:

THÉORÈME 13. 2. *Soient p un nombre premier impair, $h = (p-1)/2$, et $C^{k,h}(\sigma_1, \cdots, \sigma_m)$ le polynôme qui exprime la fonction symétrique $\Sigma\, x_1{}^h \cdots x_k{}^h$ comme polynôme en les $\sigma_i = \Sigma\, x_1 \cdots x_i$, les lettres x_i étant au nombre de m. Si $W_{2m} \in H^{2m}(B_{\boldsymbol{SO}(2m)}, Z_p)$ désigne la classe de Stiefel-Whitney de dimension 2m, réduite mod p, on a:*

$$\mathcal{P}_p{}^k(W_{2m}) = W_{2m} \cdot C^{k,h}(P_4, P_8, \cdots, P_{4m-4}, (W_{2m})^2).$$

En particulier, on observera que $\mathcal{P}_p{}^k(W_{2m})$ est toujours un élément *décomposable* si $k \geq 1$.

Les théorèmes 13. 1 et 13. 2 entraînent:

COROLLAIRE 13. 3. *Soient p un nombre premier impair, t_i l'élément de $H^{4i-1}(\boldsymbol{SO}(n), Z_p)$ dont l'image par transgression est P_{4i} mod D, et, pour n pair, $u_n \in H^{n-1}(\boldsymbol{SO}(n), Z_p)$ celui dont l'image par transgression est W_n mod D. On a:*

$$\mathcal{P}_p{}^k(u_n) = 0 \ \textit{lorsque}\ k \geq 1.$$

$$\mathcal{P}_p{}^k(t_i) = (-1)^{k(p-1)/2} \cdot b_p{}^{k,2j} \cdot t_j, \qquad (j = i + k(p-1)/2).$$

(Remarquons en passant que l'on aurait pu prévoir *a priori* la nullité de $\mathcal{P}_p{}^k(u_n)$, $(k \geq 1)$. En effet, par définition même, W_n est image par transgression de l'élément de $H^{n-1}(\boldsymbol{SO}(n), Z)$ qui est image de la classe fondamentale de $\boldsymbol{S}_{n-1}$ par l'homomorphisme transposé de la projection naturelle de $\boldsymbol{SO}(n)$ sur $\boldsymbol{S}_{n-1}$; cet élément, une fois réduit mod p, est forcément égal à u_n puisque la transgression est ici biunivoque; $\mathcal{P}_p{}^k(u_n)$ est donc l'image d'un élément de $H^{n-1+2k(p-1)}(\boldsymbol{S}_{n-1}, Z_p)$ et est bien nul si $k \geq 1$.)

Enfin, par une démonstration tout à fait semblable à celle de 12. 7, on déduit de ce qui précède:

PROPOSITION 13. 4. *Soient j un entier ≥ 2, n un entier impair. Il existe un nombre premier impair $p < 2j$ tel que tout élément de $H^{4j}(B_{\boldsymbol{SO}(n)}, Z_p)$ et tout élément de $H^{4j-1}(\boldsymbol{SO}(n), Z_p)$ puissent s'exprimer à l'aide de cup-produits et d'opérations de Steenrod à partir d'éléments de dimensions strictement plus petites.*

Remarque. Soit G un groupe classique, et soit $2q-1$ la plus grande dimension pour laquelle $H^*(G, R)$, (R corps des nombres réels), contient un élément universellement transgressif non nul.

Quel que soit le nombre premier impair $p < q$, l'opération $\mathcal{P}_p^1$ est non triviale dans $H^*(G, Z_p)$, et de façon plus précise, $\mathcal{P}_p^1$ transforme un élément $x \in H^3(G, Z_p)$ universellement transgressif et non nul, en un élément non nul de $H^{2p+1}(G, Z_p)$.

Cela se vérifie sur chaque cas particulier $G = \boldsymbol{U}(n)$, $\boldsymbol{SU}(n)$, $\boldsymbol{Sp}(n)$, $\boldsymbol{SO}(n)$, en tenant compte de $b_p^{1,j} \equiv j \bmod p$; pour $G = \boldsymbol{U}(n)$, $\boldsymbol{SU}(n)$ c'est encore vrai si $p = 2$.

Par contre, si $p > q$, il est évident a priori que $\mathcal{P}_p^1$, et, plus généralement, $\mathcal{P}_p^k$, est nul dans $H^*(G, Z_p)$.

IV. Applications.

15. Les sphères presque complexes et les algèbres à division sur le corps des nombres réels.

PROPOSITION 15. 1. *La sphère $\boldsymbol{S}_{2n}$, $(n \geq 4)$, n'admet pas de structure presque complexe.*

Raisonnons par l'absurde et soient $c_{2i} \in H^{2i}(\boldsymbol{S}_{2n}, Z)$ les classes de Chern d'une structure presque complexe de $\boldsymbol{S}_{2n}$; la classe c_{2i} est l'image de la classe $C_{2i} \in H^{2i}(B_{\boldsymbol{U}(n)}, Z)$ par l'homomorphisme transposé d'une certaine application continue de $\boldsymbol{S}_{2n}$ dans $B_{\boldsymbol{U}(n)}$, $(1 \leq i \leq n)$; il existe donc, d'après 12. 6 où l'on fait $j = n$, un nombre premier *impair* $p < n$ tel que c_{2n}, réduite mod p, s'exprime à l'aide de cup produits et de l'opération de Steenrod $\mathcal{P}_p^1$ à partir des c_{2i}, $(i < n)$. Mais ces dernières sont nulles puisque $H^{2i}(\boldsymbol{S}_{2n}, Z) = 0$ pour $0 < i < n$, ce qui montre que $c_{2n} \equiv 0 \bmod p$.

Soit d'autre part h la classe fondamentale de $H^{2n}(\boldsymbol{S}_{2n}, Z)$; on sait ([14], 41. 8), que c_{2n} est égale à $\chi(\boldsymbol{S}_{2n}) \cdot h$, c'est à dire à $2 \cdot h$. Comme on a choisi p impair, on voit que $c_{2n} \not\equiv 0 \bmod p$, d'où une contradiction.

Remarque. Le raisonnement précédent s'applique à la sphère $\boldsymbol{S}_{2n}$ munie *d'une structure différentiable quelconque,* alors que la démonstration classique d'inexistence d'une structure presque-complexe sur $\boldsymbol{S}_4$ ([14], 41. 20), suppose de façon essentielle que $\boldsymbol{S}_4$ est munie de la structure usuelle.

On sait que $\boldsymbol{S}_6$ admet une structure presque complexe définie à l'aide des octaves de Cayley ([14], 41. 21); en généralisant cette construction, nous allons démontrer la proposition suivante:

PROPOSITION 15. 2. *Soit A une algèbre (non necessairement associative) sur le corps des nombres réels R, jouissant des propriétés suivantes:*

(a) *A possède un élémente unité, qui sera noté e.*

(b) *La relation $a \cdot b = 0$ entraîne $a = 0$ ou $b = 0$.*

(c) *La relation $a \cdot b = e$ entraîne que a, b et e vérifient une relation linéaire à coefficients réels.*

Dans ces conditions, la dimension de l'algèbre A est 1, 2, 4, *ou* 8.

Avant de passer à la démonstration remarquons que, d'après Hopf et Stiefel,[5] les conditions (a) et (b) seules permettent d'établir que la dimension de A est une puissance de deux; on ignore si elles impliquent l'inégalité $\dim A \leq 8$. Dans le cas où la sous-algèbre engendrée par un élément quelconque est associative la condition (c) équivaut à dire que tout élément de A vérifie une relation quadratique.

Posons $n = \dim A$, et supposons $n \geq 3$; nous devons montrer que $n = 4$ ou $n = 8$. Introduisons sur A, considéré comme espace vectoriel réel, une forme quadratique définitive positive. Soient H l'hyperplan homogène de A orthogonal à e, (relativement au produit scalaire défini par cette forme), $\boldsymbol{S}$ l'ensemble des points de H à distance unité de l'origine; $\boldsymbol{S}$ est donc une sphère de dimension $n - 2$. Si x est un point de $\boldsymbol{S}$ on peut identifier l'espace vectoriel T_x des vecteurs tangents à $\boldsymbol{S}$ en x au sous-espace de A orthogonal à e et x et de dimension $n - 2$; soit k_x l'opération de projection orthogonale de A sur T_x, et posons

$$J_x(y) = k_x(x \cdot y) \quad \text{pour} \quad y \,\varepsilon\, T_x.$$

L'opérateur J_x est un endomorphisme de T_x qui varie continûment avec x; montrons que J_x *n'a pas de valeur propre réelle*: une égalité $J_x(y) = \lambda y$, $(\lambda \,\varepsilon\, R)$, peut s'écrire $k_x(x \cdot y - \lambda e) = 0$, ou encore $x \cdot y - \lambda y = \mu e + \nu x$, $(\mu, \nu \,\varepsilon\, R)$, ce qui donne $(x - \lambda \cdot e)(y - \nu \cdot e) = (\mu + \lambda \cdot \nu)e$. Si l'on suppose $y \neq 0$, les éléments $x - \lambda \cdot e$ et $y - \nu \cdot e$ sont $\neq 0$ puisque e et y sont orthogonaux à e; il s'ensuit d'après (b) que $(\mu + \lambda \cdot \nu) \neq 0$; on peut donc poser $w = (\mu + \lambda \cdot \nu)^{-1} \cdot (y - \nu e)$ et l'on a $(x - \lambda \cdot e) \cdot w = e$; d'après (c), il existe alors une relation linéaire entre $(x - \lambda \cdot e)$, w et e, donc aussi entre x, y et e; mais cela est absurde puisque ces éléments sont deux à deux orthogonaux.

Ainsi, nous avons associé à tout point $x \,\varepsilon\, \boldsymbol{S}$ un endomorphisme sans valeurs propres réelles J_x de l'espace des vecteurs tangents à $\boldsymbol{S}$ en x; il en résulte classiquement (voir ci-dessous) que $\boldsymbol{S}$ peut être munie d'une structure presque complexe, et l'on a donc $n - 2 = 2$ ou 6, c'est à dire $n = 4$ ou 8.

Note. Indiquons encore, pour être complet, comment on passe de l'exis-

[5] E. Stiefel, *Comm. Math. Helv.*, tome 13 (1940-41), pp. 201-218, H. Hopf, *ibid.*, pp. 219-239.

tence de l'endomorphisme J_x à une structure presque complexe sur $\mathbf{S}$.[6] Il nous faut remplacer l'endomorphisme J_x par un endomorphisme I_x tel que $(I_x)^2 = -1$.

Soit $T_x \otimes C$ l'extension complexe de l'espace vectoriel réel T_x et soient $(\alpha_1, \cdots, \alpha_q, \bar{\alpha}_1, \cdots, \bar{\alpha}_q)$ les valeurs propres de J_x dans $T_x \otimes C$, chaque α_i ayant une partie imaginaire positive; pour toute valeur propre α nous désignons par V_α le plus grand sous-espace vectoriel de $T_x \otimes C$ sur lequel $J_x - \alpha$ est nilpotent; on sait que $T_x \otimes C$ est la somme directe des V_α, et il est clair que $V_{\bar{\alpha}} = \bar{V}_\alpha$; l'espace $T_x \otimes C$ est donc la somme directe de $W = V_{\alpha_1} + \cdots + V_{\alpha_q}$ et de $\bar{W}$, et tout élément $y \in T_x$ peut se mettre d'une seule façon sous la forme $y = w + \bar{w}$, $(w \in W)$. Posons alors $I_x(y) = iw - i\bar{w}$, c'est un élément de T_x et ainsi I_x définit un endomorphisme de T_x qui vérifie visiblement la condition $(I_x)^2 = -1$; il reste encore à s'assurer qu'il varie continûment avec x; cela résulte, par exemple, de la continuité des valeurs propres de J_x.

16. Sur les espaces fibrés à base sphérique. Nous intercalons ici quelques résultats dont nous aurons besoin dans les Nos. suivants; la Proposition 16.1 a été également utilisée par Miller [10].

PROPOSITION 16. 1. *Soient E un espace fibré de fibre F, de base $\mathbf{S}_r$, β la classe fondamentale de $H^r(\mathbf{S}_r, Z_p)$, (p premier), ζ la projection de E sur $\mathbf{S}_r$. Si la classe $\gamma = \zeta^*(\beta)$ peut s'exprimer à l'aide de cup-produits et d'opérations de Steenrod à partir d'éléments de $H^*(E, Z_p)$ de dimensions $< r$, l'espace fibré E n'admet pas de section.*

Par hypothèse on peut trouver des éléments $u_1, \cdots, u_k \in H^*(E, Z_p)$, $(0 < \dim u_i < r)$, tels que $\gamma = f(u_1, \cdots, u_k)$, où f est une expression formée à l'aide de cup-produits et d'operations $\mathcal{P}_p^k$. Si $s : \mathbf{S}_r \to E$ était une section de l'espace fibré E, l'homomorphisme $s^* : H^*(E, Z_p) \to H^*(\mathbf{S}_r, Z_p)$ vérifierait la relation $s^* \circ \zeta^* = 1$, et l'on aurait:

$$\beta = s^* \circ \zeta^*(\beta) = s^*(\gamma) = s^*(f(u_1, \cdots, u_k)) = f(s^*(u_1), \cdots, s^*(u_k)) = 0$$

puisque $s^*(u_i)$ est une classe de cohomologie de $\mathbf{S}_r$ de dimension strictement comprise entre 0 et r; mais comme $\beta \neq 0$, cela est impossible et montre qu'il n'y a pas de section.

(Bien entendu, ce genre de raisonnement a une portée plus générale et s'applique à d'autres espaces que les sphères, pourvu que l'on soit certain que $s^*(u_i) = 0$ pour tout i.)

La Proposition 16. 1 revient à dire que *la classe caractéristique $\alpha \in \pi_{r-1}(F)$*

---

[6] La démonstration qui suit nous a été obligeamment communiquée par G. de Rham.

de la fibration considérée est un élément non nul de $\pi_{r-1}(F)$; nous allons préciser ce résultat dans les deux propositions suivantes.

PROPOSITION 16. 2. *Avec les hypothèses et notations précédentes, la classe caractéristique* $\alpha \in \pi_{r-1}(F)$ *est, soit d'ordre infini, soit d'ordre fini divisible par* p.

Il nous faut montrer que l'on a $q \cdot \alpha \neq 0$ dans $\pi_{r-1}(F)$ lorsque q est un entier $\neq 0$ et non divisible par p.

Pour cela, soient $\psi : \boldsymbol{S}_r \to \boldsymbol{S}_r$ une application de degré q, E' l'espace fibré image réciproque de E par ψ, et ζ' la projection de E' sur $\boldsymbol{S}_r$; il existe donc une application $\bar{\psi} : E' \to E$ telle que $\psi \circ \zeta' = \zeta \circ \bar{\psi}$. On a évidemment $\psi^*(\beta) = q \cdot \beta$, d'où

$$q \cdot \zeta'^*(\beta) = \zeta'^* \circ \psi^*(\beta) = \bar{\psi}^* \circ \zeta^*(\beta) = \bar{\psi}^*(f(u_1, \cdots, u_k)),$$

ce que donne, puisque $q \not\equiv 0 \bmod p$,

$$\zeta'^*(\beta) = 1/q \cdot f(\bar{\psi}^*(u_1), \cdots, \bar{\psi}^*(u_k)),$$

et E' n'a pas de section d'après 16. 1; cela signifie que la classe caractéristique $\alpha' \in \pi_{r-1}(F)$ de E' est non nulle, et comme cette classe est évidemment égale à $q \cdot \alpha$, la proposition est démontrée.

PROPOSITION 16.3. *Ajoutons aux hypothèses de* 16. 1 *les suivantes:*

(a) *L'espace fibré E est un espace fibré principal à groupe structural F connexe par arcs.*

(b) *Si* $u_1, \cdots, u_k$ *sont les éléments de* $H^*(E, Z_p)$ *tels que* $\gamma = f(u_1, \cdots, u_k)$, *on a* $0 < \dim u_i \leq r-2$ *pour tout* i.

(c) *La classe* γ *est* $\neq 0$.

Alors il n'existe aucun élément $\alpha' \in \pi_{r-1}(F)$ *tel que* $\alpha = p \cdot \alpha'$.

(Autrement dit, α définit un élément non nul de $\pi_{r-1}(F) \otimes Z_p$, résultat évidemment plus précis que celui de 16. 2.)

Nous raisonnons par l'absurde et supposons donc l'existence d'un élément $\alpha' \in \pi_{r-1}(F)$ tel que $\alpha = p \cdot \alpha'$. On sait ([14], 18. 5), que si l'on associe à tout espace fibré principal de base $\boldsymbol{S}_r$, de fibre F, sa classe caractéristique, on définit une correspondance biunivoque entre les classes d'espaces fibrés principaux de fibre F, base $\boldsymbol{S}_r$, et les éléments de $\pi_{r-1}(F)$. Vu notre hypothèse, il existe donc un espace fibré principal E', de classe caractéristique α', dont E est l'image réciproque par une application $\sigma : \boldsymbol{S}_r \to \boldsymbol{S}_r$ de degré p. On désigne comme dans la démonstration précédente par ζ' la projection de E' sur $\boldsymbol{S}_r$; soient encore $\bar{\sigma} : E \to E'$ l'application canonique de E dans E'

et $i^*: H^*(E, Z_p) \to H^*(F, Z_p)$, resp. $i'^*: H^*(E', Z_p) \to H^*(F, Z_p)$, l'homomorphisme défini par l'injection d'une fibre dans E, resp. E'.

On a évidemment $i^* \circ \bar{\sigma}^* = i'^*$; mais, d'après la suite exacte de H. C. Wang (*Duke Math. Jour.*, vol. 16 (1949), 33-38, ou [12], p. 471), i^* et i'^* sont des isomorphismes sur pour les dimensions $\leq r-2$; il en est donc de même pour $\bar{\sigma}^*$ et vu l'hypothèse (b), $H^*(E', Z_p)$ contient des éléments u'_i tels que $u_i = \bar{\sigma}^*(u'_i)$, $(1 \leq i \leq k)$. On a donc

$$i^*(\gamma) = i^*(f(u_1, \cdots, u_k)) = i^* \circ \bar{\sigma}^*(f(u'_1, \cdots, u'_k)) = i'^*(f(u'_1, \cdots, u'_k)).$$

Il est clair que $i^*(\gamma) = 0$, donc $i'^*(f(u'_1, \cdots, u'_k)) = 0$, et la suite de Wang donne alors $f(u'_1, \cdots, u'_k) = \lambda \cdot \zeta'^*(\beta)$, $(\lambda \in Z_p)$. On en tire

$$\gamma = \lambda \cdot \bar{\sigma}^* \circ \zeta'^*(\beta) = \lambda \cdot \zeta^* \circ \sigma^*(\beta),$$

mais cela est impossible car $\sigma^*(\beta) = 0$ puisque σ est de degré p, et d'autre part $\gamma \neq 0$ d'après (c), ce qui démontre 16. 3.

17. Inexistence de sections dans certains espaces fibrés.

PROPOSITION 17. 1. *Les fibrations suivantes n'ont pas de section:*

(a) $\boldsymbol{SU}(n)/\boldsymbol{SU}(n-1) = \boldsymbol{S}_{2n-1}$ *pour* $n \geq 3$.

(b) $\boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{U}(n-1) = \boldsymbol{S}_{2n-1}$ *pour* $n \geq 3$.

(c) $\boldsymbol{Sp}(n)/\boldsymbol{Sp}(n-1) = \boldsymbol{S}_{4n-1}$ *pour* $n \geq 2$.

(d) $\boldsymbol{Spin}(9)/\boldsymbol{Spin}(7) = \boldsymbol{S}_{15}$.

(e) $\boldsymbol{Spin}(7)/\boldsymbol{G}_2 = \boldsymbol{S}_7$.

(Les fibrations (a), (b), (c) sont classiques, pour les deux dernières *voir* [1].)

D'après 16. 1, il suffit de trouver dans chaque cas un nombre premier p tel que tout élément de $H^{2n-1}(\boldsymbol{SU}(n), Z_p)$, de $H^{2n-1}(\boldsymbol{U}(n), Z_p)$, de $H^{4n-1}(\boldsymbol{Sp}(n), Z_p)$, de $H^{15}(\boldsymbol{Spin}(9), Z_p)$, de $H^{7}(\boldsymbol{Spin}(7), Z_p)$ s'exprime à l'aide de cup-produits et de puissances réduites à partir d'éléments de dimensions strictement inférieures. C'est possible pour $\boldsymbol{U}(n)$ et $\boldsymbol{SU}(n)$ d'après 12. 7 et pour $\boldsymbol{Sp}(n)$ d'après 13. 6. Dans le cas (d), on choisit d'abord p impair tel que tout élément de $H^{15}(\boldsymbol{SO}(9), Z_p)$ s'exprime à l'aide de cup-produits et d'opérations $\mathcal{P}_p^k$ à partir d'éléments de dimensions < 15, ce qui est possible pour $p = 3, 5, 7$ d'après 13.4; puisque $\boldsymbol{Spin}(9)$ est un revêtement à deux feuillets de $\boldsymbol{SO}(9)$, l'homomorphisme $H^*(\boldsymbol{SO}(9), Z_p) \to H^*(\boldsymbol{Spin}(9), Z_p)$ transposé de la projection est un isomorphisme sur, et la même propriété a lieu dans $H^*(\boldsymbol{Spin}(9), Z_p)$; on raisonne de la même façon dans le cas (e), pour $p = 3$.

Remarque. La Prop. 17. 1 (a) montre que $\boldsymbol{SU}(3)/\boldsymbol{SU}(2) = \boldsymbol{S}_5$ n'a pas de section, autrement dit que la classe caractéristique $\alpha \varepsilon \pi_4(\boldsymbol{S}_3)$ de cette fibration est non nulle, ce qui a été tout d'abord démontré par Pontrjagin [11], par une étude homotopique de α; on observera que nous sommes parvenus à ce résultat par voie cohomologique, (en utilisant l'opération Sq^2).

PROPOSITION 17. 2. (a) *La classe caractéristique de la fibration* $\boldsymbol{SU}(n)/\boldsymbol{SU}(n-1) = \boldsymbol{S}_{2n-1}$ *définit un élément non nul de* $\pi_{2n-2}(SU(n-1))\otimes Z_p$ *pour tout* p *premier* $< n$, *ne divisant pas* n.

(b) *Il en est de même pour la fibration* $\boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{U}(n-1) = \boldsymbol{S}_{2n-1}$.

(c) *Il en est de même pour tout* p *premier impair* $< 2n$, *ne divisant pas* n, *pour la fibration* $\boldsymbol{Sp}(n)/\boldsymbol{Sp}(n-1) = \boldsymbol{S}_{4n-1}$.

(d) *La classe caractéristique de la fibration* $\boldsymbol{Spin}(9)/\boldsymbol{Spin}(7) = \boldsymbol{S}_{15}$ *définit un élément non nul de* $\pi_{14}(Spin(7))\otimes Z_p$ *pour* $p = 3, 5, 7$.

(e) *La classe caractéristique de la fibration* $\boldsymbol{Spin}(7)/\boldsymbol{G}_2 = \boldsymbol{S}_7$ *définit un élément non nul de* $\pi_6(G_2)\otimes Z_3$.

On doit montrer que les hypothèses de 16. 3 sont vérifiées; 16. 3(a) est évidente, 16. 3(b) résulte de ce que l'opération f utilisée pour établir 17. 1 est chaque fois $\mathcal{P}_p^1$, qui augmente le degré $2(p-1) \geq 2$ unités. Enfin, il est évident dans chaque cas envisagé ici que γ est universellement transgressif, et il résulte de la détermination même des algèbres $H^*(E, Z_p)$ que $\gamma \neq 0$; 16. 3(c) est donc aussi satisfaite.

On vérifie ensuite, en utilisant la formule $b_p^{1,j} \equiv j \bmod p$ et les résultats de III que dans chaque cas, les nombres premiers de l'énoncé sont tels que $\gamma = \mathcal{P}_p^1(u)$, $(u \varepsilon H^*(E, Z_p))$; 17. 2 résulte donc de 16. 3.

Remarque. Pour démontrer la Proposition 17. 2, nous n'avons eu besoin que des opération $\mathcal{P}_p^1$. En se servant des puissances réduites $\mathcal{P}_p^k$ pour k quelconque, et d'un lemme sur les coefficients $b_p^{k,j}$ qui sera établi plus loin (lemme 20. 7), on déduit par le raisonnement ci-dessus un résultat plus complet, que nous énoncerons uniquement dans le cas (a) pour simplifier:

La classe caractéristique de $\boldsymbol{SU}(n)/\boldsymbol{SU}(n-1) = \boldsymbol{S}_{2n-1}$ *définit un élément non nul de* $\pi_{2n-2}(\boldsymbol{SU}(n-1))\otimes Z_p$ *lorsque le nombre premier* $p < n$ *vérifie la condition suivante: Si* $h(p, n)$ *est le plus grand entier tel que* $p^{h(p,n)}\cdot(p-1) < n$, *le nombre* n *n'est pas divisible par* $p^{h(p,n)+1}$.

Nous terminons le No. 17 par la Proposition suivante, tout à fait analogue au cas (c) des Prop. 17. 1 et 17. 2:

PROPOSITION 17. 3. *Soit* $\boldsymbol{W}_{4n-1}$ *la variété des vecteurs de longueur unité tangents à la sphère* $\boldsymbol{S}_{2n}$. *La fibration* $\boldsymbol{SO}(2n+1)/\boldsymbol{SO}(2n-1) = \boldsymbol{W}_{4n-1}$

n'a pas de section si $n \geq 2$. Si p est un nombre premier impair $< 2n$, ne divisant pas n, l'homomorphisme bord d de $\pi_{4n-1}(\boldsymbol{W}_{4n-1})$ dans $\pi_{4n-2}(\boldsymbol{SO}(2n-1))$ définit un sous-groupe isomorphe à Z_p de $\pi_{4n-2}(\boldsymbol{SO}(2n-1)) \otimes Z_p$.

On sait que, si p est impair, $H^*(\boldsymbol{W}_{4n-1}, Z_p) \approx H^*(\boldsymbol{S}_{4n-1}, Z_p)$; le raisonnement de la Prop. 16. 1 s'applique donc sans changement et la première partie de la Proposition résulte de 13. 4.

On sait (*voir* [13], Chap. IV, Prop. 2), qu'il existe une application g de $\boldsymbol{S}_{4n-1}$ dans $\boldsymbol{W}_{4n-1}$ telle que le noyau et le conoyau des applications

$$g_0 : \pi_i(\boldsymbol{S}_{4n-1}) \to \pi_i(\boldsymbol{W}_{4n-1})$$

soient des 2-groupes pour toute valeur de i. Soit $\boldsymbol{E}$ l'espace fibré image réciproque de $\boldsymbol{SO}(2n+1)$ par cette application, et $\bar{g}$ son application canonique dans $\boldsymbol{SO}(2n+1)$. Comme la restriction de $\bar{g}$ à une fibre est un homéomorphisme sur une fibre de $\boldsymbol{SO}(2n+1)$, et comme g^* est pour tout $p \neq 2$ un isomorphisme de $H^*(\boldsymbol{S}_{4n-1}, Z_p)$ sur $H^*(\boldsymbol{W}_{4n-1}, Z_p)$, l'homomorphisme $\bar{g}^*$ est un isomorphisme de $H^*(\boldsymbol{SO}(2n+1), Z_p)$ sur $H^*(\boldsymbol{E}, Z_p)$, ([2], § 4d) ; on peut donc appliquer à $\boldsymbol{E}$ les mêmes raisonnements et calculs qu'à la fibration (c) de 17. 2. Par conséquent l'image de

$$d' : \pi_{4n-1}(\boldsymbol{S}_{4n-1}) \to \pi_{4n-2}(\boldsymbol{SO}(2n-1)) \otimes Z_p$$

est un sous-groupe de $\pi_{4n-2}(\boldsymbol{SO}(2n-1)) \otimes Z_p$ isomorphe à Z_p, ce qui, joint à l'égalité $d' = d \circ g_0$, démontre la deuxième partie de 17. 3.

18. Sur les $\boldsymbol{p}$-composants des groupes d'homotopie des groupes classiques. Les Propositions précédentes permettent de calculer les p-composants des groupes $\pi_i(G)$, $(G = \boldsymbol{SU}(n), \boldsymbol{Sp}(n), \boldsymbol{SO}(n))$, jusqu'à la dimension $4p-3$. Pour énoncer les résultats obtenus, il sera commode d'utiliser le langage de la C-théorie de [13], et en particulier la notion de C-isomorphisme définie dans le Chap. I de [13]. Nous désignons par C_p la classe des groupes finis d'ordre premier à p.

PROPOSITION 18. 1. *Soient p un nombre premier, $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{SU}(n)$. A un C_p-isomorphisme près, les groupes $\pi_i(\boldsymbol{G})$, $(i \leq 4p-3)$, sont les suivants:*

(I). *Si $n \leq p$, on a $\pi_{2j-1}(\boldsymbol{G}) = Z$, $(2 \leq j \leq n)$, $\pi_{2k}(\boldsymbol{G}) = Z_p$, $(p \leq k \leq p+n-2)$, $\pi_{4p-3}(\boldsymbol{G}) = Z_p$, $\pi_i(\boldsymbol{G}) = 0$ sinon.*

(II). *Si $p < n \leq 2p-2$, on a $\pi_{2j-1}(\boldsymbol{G}) = Z$, $(2 \leq j \leq n)$, $\pi_{2k}(\boldsymbol{G}) = Z_p$, $(n \leq k \leq 2p-2)$, $\pi_i(\boldsymbol{G}) = 0$ sinon.*

(III). *Si $n \geq 2p-1$, on a $\pi_{2j-1}(\boldsymbol{G}) = Z$, $(2 \leq j \leq 2p-1)$, $\pi_i(\boldsymbol{G}) = 0$ sinon.*

Si $n \leq p$, il résulte de [13], Chap. V, Prop. 6 que p est *régulier* pour $\boldsymbol{G}$, (au sens du § 4 de cet article), et il s'ensuit que $\pi_i(\boldsymbol{G})$ est C_p-isomorphe à la somme directe des groupes $\pi_i(\boldsymbol{S}_{2m-1})$, $(2 \leq m \leq n)$, ce qui démontre (I).

A partir de là, on raisonne par récurrence sur n pour établir (II) et (III). Il suffit pour cela de considérer la suite exacte:

$$\pi_{i+1}(\boldsymbol{S}_{2n-1}) \rightarrow \pi_i(\boldsymbol{SU}(n-1)) \rightarrow \pi_i(\boldsymbol{SU}(n)) \rightarrow \pi_i(\boldsymbol{S}_{2n-1}),$$

en remarquant que les groupes $\pi_i(\boldsymbol{S}_{2n-1})$ sont tous C_p-nuls sauf pour $i = 2n-1$ puisque $2n-1+2p-3 \geq 4p-2$ et en utilisant la Proposition 17. 2 pour déterminer l'image de $d: \pi_{2n-1}(\boldsymbol{S}_{2n-1}) \rightarrow \pi_{2n-2}(\boldsymbol{SU}(n-1))$ quand $p < n \leq 2p-2$.

Le lecteur n'aura pas de peine à obtenir des résultats analogues pour $G = \boldsymbol{Sp}(n), \boldsymbol{SO}(2n+1)$ que nous n'expliciterons pas. Nous nous bornerons à indiquer comment l'on passe de $\boldsymbol{SO}(2n-1)$ à $\boldsymbol{SO}(2n)$:

PROPOSITION 18. 2. *Si C désigne la classe des 2-groupes, le groupe $\pi_i(\boldsymbol{SO}(2n))$ est C-isomorphe à la somme directe de $\pi_i(\boldsymbol{SO}(2n-1))$ et de $\pi_i(\boldsymbol{S}_{2n-1})$.*

On sait que la classe caractéristique α de la fibration $\boldsymbol{SO}(2n)/\boldsymbol{SO}(2n-1) = \boldsymbol{S}_{2n-1}$ vérifie $2 \cdot \alpha = 0$. L'espace fibré $\boldsymbol{E}$, image réciproques de $\boldsymbol{SO}(2n)$ par une application de $\boldsymbol{S}_{2n-1}$ sur $\boldsymbol{S}_{2n-1}$ de degré deux, est donc isomorphe à $\boldsymbol{SO}(2n-1) \times \boldsymbol{S}_{2n-1}$. En outre, on tire de [2], § 4d, exactement comme dans la démonstration de 17. 3, que l'application canonique de $\boldsymbol{E}$ sur $\boldsymbol{SO}(2n)$ définit un isomorphisme de $H^*(\boldsymbol{SO}(2n), Z_p)$ sur $H^*(\boldsymbol{E}, Z_p)$, pour tout p premier impair. Si $\bar{\boldsymbol{E}}$ et $\boldsymbol{Spin}(2n)$ sont les revêtements universels (à deux feuillets) de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{SO}(2n)$, il en est alors de même de l'application correspondante de $H^*(\boldsymbol{Spin}(2n), Z_p)$ dans $H^*(\bar{\boldsymbol{E}}, Z_p)$; le Théorème 3 du Chap. III de [13] montre alors que $\pi_i(\bar{\boldsymbol{E}}) \rightarrow \pi_i(\mathbf{Spin}(2n))$, donc aussi $\pi_i(\boldsymbol{E}) \rightarrow \pi_i(\boldsymbol{SO}(2n))$, est un C-isomorphisme sur, ce qui termine la démonstration.

19. Groupes d'homotopie de dimension 6 des groupes classiques. Nous supposerons connues les valeurs des cinq premiers groupes d'homotopie des groupes classiques (*voir* [14], 24. 11, 25. 4, 25. 5, et [9], 3. 72) et le fait que $\pi_6(\boldsymbol{S}_3) \approx Z_{12}$.[7] Pour déterminer les 6-ièmes groupes d'homotopie, nous nous appuyerons sur la:

[7] Il est classique que $\pi_6(S_3)$ a 12 éléments; on en trouvera une démonstration simple dans [13], Chap. IV, Prop. 10. Pour prouver qu'il est cyclique, on peut, soit montrer qu'il contient un sous-groupe isomorphe à Z_4, ce qui a été fait par M. G. Barratt et G. F. Paechter, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, tome 38 (1952), pp. 119-121, soit utiliser

PROPOSITION 19. 1. *La classe caractéristique* $\alpha \varepsilon \pi_6(\boldsymbol{S}_3)$ *de la fibration* $\boldsymbol{Sp}(2)/\boldsymbol{Sp}(1)$ *est un générateur de* $\pi_6(\boldsymbol{S}_3)$.

Nous savons déjà par 17. 2(c) que α n'est pas divisible par trois; pour obtenir 19. 1, il nous suffit donc de montrer que α n'est pas divisible par deux.

Identifions $\boldsymbol{Sp}(1)$ à la sphère unité du corps des quaternions, et $\boldsymbol{S}_6$ à la variété des couples (q, q') de quaternions tels que $|q|^2 + |q'|^2 = 1$ et que la partie réelle de q' soit nulle; d'après [14], 24. 11, la classe α est alors définie par l'application $g : \boldsymbol{S}_6 \to \boldsymbol{S}_3$ qui vérifie:

$$g(q, q') = 1 - 2q \cdot (1 + q')^{-2} \cdot \bar{q}.$$

D'après G. W. Whitehead [17], l'application g est homotope à g':

$$g'(q, q') = 1 - 2|q|^2 + 2 \cdot \frac{q \cdot q' \cdot \bar{q}}{|q|}.$$

Si l'on pose $q = Q \cdot \cos\theta$, $q' = Q' \cdot \sin\theta$, avec $0 \leq \theta \leq \pi/2$ et $|Q| = |Q'| = 1$, on voit que

$$g'(Q, Q') = -\cos 2\theta + \sin 2\theta \cdot Q \cdot Q' \cdot \bar{Q}.$$

Cela signifie que $g' : \boldsymbol{S}_6 \to \boldsymbol{S}_3$ est obtenue en faisant la construction de Hopf sur l'application de $\boldsymbol{S}_3 \times \boldsymbol{S}_2$ dans $\boldsymbol{S}_2$ donnée par $(Q, Q') \to Q \cdot Q' \cdot \bar{Q}$. Mais alors, d'après Blakers-Massey, (*Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A.*, vol. 35, (1949), 322-328), l'image de α par l'invariant de Hopf généralisé $H : \pi_6(\boldsymbol{S}_3) \to Z_2$ est *non nulle*; α n'est donc pas divisible par deux.

PROPOSITION 19. 2. *On a* $\pi_6(\boldsymbol{Sp}(1)) = Z_{12}$, *et* $\pi_6(\boldsymbol{Sp}(n)) = 0$ *pour* $n \geq 2$.

La première égalité résulte de $\boldsymbol{Sp}(1) = \boldsymbol{S}_3$. La fibration $\boldsymbol{Sp}(2)/\boldsymbol{Sp}(1) = \boldsymbol{S}_7$ donne lieu à la suite exacte:

$$\pi_7(\boldsymbol{S}_7) \xrightarrow{d} \pi_6(\boldsymbol{S}_3) \to \pi_6(\boldsymbol{Sp}(2)) \to 0.$$

L'image de d étant le sous-groupe engendré par α est *tout* $\pi_6(\boldsymbol{S}_3)$ d'après 19. 1, il s'ensuit que $\pi_6(\boldsymbol{Sp}(2)) = 0$, d'où $\pi_6(\boldsymbol{Sp}(n)) = 0$ pour $n \geq 2$.

PROPOSITION 19. 3. *On a* $\pi_6(\boldsymbol{SO}(3)) = Z_{12}$, $\pi_6(\boldsymbol{SO}(4)) = Z_{12} + Z_{12}$, $\pi_6(\boldsymbol{SO}(n)) = 0$ *pour* $n \geq 5$.

$\boldsymbol{SO}(3)$ et $\boldsymbol{SO}(4)$ ont pour revêtements universels $\boldsymbol{S}_3$ et $\boldsymbol{S}_3 \times \boldsymbol{S}_3$ respectivement, d'où les deux premiers résultats. Il est classique que le revêtement universel de $\boldsymbol{SO}(5)$ est isomorphe à $\boldsymbol{Sp}(2)$, donc, vu 19. 1, $\pi_6(\boldsymbol{SO}(5)) = 0$.

La fibration $\boldsymbol{SO}(6)/\boldsymbol{SO}(5) = \boldsymbol{S}_5$ donne lieu à la suite exacte:

---

la détermination des groupes d'Eilenberg-MacLane en cohomologie modulo 2 due à l'un de nous, *C. R. Acad. Sci. Paris*, tome 234 (1952), pp. 1243-1245, ainsi qu'un article à paraître aux *Comm. Math. Helv.*

$$0 \to \pi_6(\boldsymbol{SO}(6)) \to \pi_6(\boldsymbol{S}_5) \xrightarrow{d} \pi_5(\boldsymbol{SO}(5)) \to \pi_5(\boldsymbol{SO}(6)).$$

Comme $\pi_5(\boldsymbol{SO}(6)) = Z$ et $\pi_5(\boldsymbol{SO}(5)) = Z_2$, (*voir* [9]), on voit que d est un isomorphisme de $\pi_6(\boldsymbol{S}_5) = Z_2$ sur $\pi_5(\boldsymbol{SO}(5))$, d'où $\pi_6(\boldsymbol{SO}(6)) = 0$.

Considérons maintenant la suite exacte:

$$0 \to \pi_6(\boldsymbol{SO}(7)) \to \pi_6(\boldsymbol{S}_6) \xrightarrow{d} \pi_5(\boldsymbol{SO}(6)) \to \pi_5(\boldsymbol{SO}(7)).$$

D'après [9], on a $\pi_5(\boldsymbol{SO}(7)) = 0$ et $\pi_5(\boldsymbol{SO}(6)) = Z$; par suite, d est un isomorphisme sur et $\pi_6(\boldsymbol{SO}(7)) = 0$; comme $\pi_6(\boldsymbol{SO}(n)) = \pi_6(\boldsymbol{SO}(7))$ pour $n \geq 7$, la démonstration de 19. 3 est achevée.

PROPOSITION 19. 4. *On a*

$$\pi_6(\boldsymbol{SU}(2)) = Z_{12},\ \pi_6(\boldsymbol{SU}(3)) = Z_6,\ \pi_6(\boldsymbol{SU}(n)) = 0 \qquad (n \geq 4).$$

La première égalité résulte de $\boldsymbol{SU}(2) = \boldsymbol{S}_3$. Examinons le groupe $\boldsymbol{SU}(3)$; la fibration $\boldsymbol{SU}(3)/\boldsymbol{S}_3 = \boldsymbol{S}_5$ donne lieu à la suite exacte:

$$\pi_7(\boldsymbol{S}_5) \xrightarrow{d} \pi_6(\boldsymbol{S}_3) \to \pi_6(\boldsymbol{SU}(3)) \to \pi_6(\boldsymbol{S}_5) \xrightarrow{d} \pi_5(\boldsymbol{S}_3) \to \pi_5(\boldsymbol{SU}(3)).$$

Montrons tout d'abord que l'homomorphisme $d\colon \pi_6(\boldsymbol{S}_5) \to \pi_5(\boldsymbol{S}_3)$ applique le premier groupe *sur* le second. On sait [11] que $\pi_4(\boldsymbol{SU}(3)) = 0$, donc qu'une application quelconque $\boldsymbol{S}_4 \to \boldsymbol{S}_3 \to \boldsymbol{SU}(3)$ est inessentielle; il en est a fortiori de même pour sa composée avec une application $\boldsymbol{S}_5 \to \boldsymbol{S}_4$; comme $\boldsymbol{S}_5 \to \boldsymbol{S}_4 \to \boldsymbol{S}_3$ est essentielle lorsque $\boldsymbol{S}_5 \to \boldsymbol{S}_4$ et $\boldsymbol{S}_4 \to \mathbf{S}_3$ le sont, cela implique que l'image de $\pi_5(\boldsymbol{S}_3)$ dans $\pi_5(\boldsymbol{SU}(3))$ est nulle, donc que d applique $\pi_6(\boldsymbol{S}_5)$ sur $\pi_5(\boldsymbol{S}_3)$. Par conséquent, la suite exacte précédente donne:

$$\pi_7(\boldsymbol{S}_5) \xrightarrow{d} \pi_6(\boldsymbol{S}_3) \xrightarrow{i} \pi_6(\boldsymbol{SU}(3)) \to 0.$$

Pour établir l'égalité $\pi_6(\boldsymbol{SU}(3)) = Z_6$, il suffit de montrer que l'image de d n'est pas nulle, autrement dit que le noyau de i est non nul. Or Hilton a prouvé que l'application composée $\boldsymbol{S}_6 \to \boldsymbol{S}_5 \to \boldsymbol{S}_4 \to \boldsymbol{S}_3$, où chaque application est essentielle, définit un élément non nul de $\pi_6(\boldsymbol{S}_3)$, (*voir* aussi [13], Chap. IV, Prop. 10, Rem. 1), et le raisonnement fait plus haut, (qui s'applique *a fortiori* ici), montre que cet élément est dans le noyau de i.

Il est bien connu que le groupe $\boldsymbol{SU}(4)$ est isomorphe au revêtement universel du groupe $\boldsymbol{SO}(6)$; on a donc $\pi_6(\boldsymbol{SU}(4)) = 0$ d'après 19. 3 et comme $\pi_6(\boldsymbol{SU}(n)) = \pi_6(\boldsymbol{SU}(4))$ pour $n \geq 4$, la Proposition 19. 4 est complètement démontrée.

20. Les fibrations des variétés de Stiefel complexes. Soient $\boldsymbol{W}_{n,q} = \boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{U}(n-q)$ la variété de Stiefel complexe des q-repères orthonormaux de l'espace hermitien C^n, et $\psi_{q,r}$ la projection naturelle de $\boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{U}(n-q) = \boldsymbol{W}_{n,q}$ sur $\boldsymbol{U}(n)/\boldsymbol{U}(n-r) = \boldsymbol{W}_{n,r}$ $(q \geq r)$. On sait ([2], § 9) que $H^*(\boldsymbol{W}_{n,q}, Z)$

est une algèbre extérieure engendrée par des éléments de dimensions $2n-2q+1$, $2n-2q+3, \cdots, 2n-1$, appliquée biunivoquement dans $H^*(\boldsymbol{U}(n), Z)$ par $\psi^*_{n,q}$, et que

20.1 $$H^*(\boldsymbol{U}(n), Z) \approx H^*(\boldsymbol{U}(n-q), Z) \otimes H^*(\boldsymbol{W}_{n,q}, Z).$$

Plus précisément, si l'on désigne par $h_1, \cdots, h_n$ les générateurs universellement transgressifs de $H^*(\boldsymbol{U}(n), Z)$ définis au No. 4, on a:

Lemme 20.2. *L'image de $H^*(\boldsymbol{W}_{n,q}, Z)$ dans $H^*(\boldsymbol{U}(n), Z)$ par $\psi^*_{n,q}$ est la sous-algèbre de $H^*(\boldsymbol{U}(n), Z)$ engendrée par les éléments h_i, $n-q+1 \leq i \leq n$.*

Soit v_i un générateur de $H^{2n-2i+1}(\boldsymbol{W}_{n,i}, Z)$ $(1 \leq i \leq n)$. C'est un élément de dimension positive minimum de $H^*(\boldsymbol{W}_{n,i}, Z)$, par conséquent, d'après un raisonnement aisé, exposé dans [2], § 23, l'élément $\psi^*_{n,i}(v_i)$ est universellement transgressif, d'où $\psi^*_{n,i}(v_i) = m_i h_i$; mais les éléments $\psi^*_{n,i}(v_i)$ forment un système de générateurs de $H^*(\boldsymbol{U}(n), Z)$, ([2], § 9, Remarque 2), donc $m_i = \pm 1$ $(1 \leq i \leq n)$.

La relation de transitivité évidente $\psi^*_{n,i} = \psi^*_{n,q} \circ \psi^*_{q,i}$, $(1 \leq i \leq q)$, montre alors que les éléments h_i $(n-q+1 \leq i \leq n)$ sont dans l'image de $\psi^*_{n,q}$; ils engendrent forcément toute cette image d'après 20.1.

Ce lemme permet de ramener le calcul des puissances réduites dans $H^*(\boldsymbol{W}_{n,q})$ au calcul analogue dans $H^*(\boldsymbol{U}(n))$, que nous avons déjà fait, (*voir* 11.4). Nous voulons en tirer des conditions nécessaires pour l'existence d'une section dans la fibration de $\boldsymbol{W}_{n,r+s}$ par $\boldsymbol{W}_{n-r,s}$, de base $\boldsymbol{W}_{n,r}$.

Proposition 20.3. *Si la fibration $\boldsymbol{W}_{n,r+s}/\boldsymbol{W}_{n-r,s} = \boldsymbol{W}_{n,r}$ admet une section, on a, pour tout p premier, $\mathcal{P}_p^k(h_i) = 0$, ou, ce qui revient au même, $b_p^{k,j} \equiv 0 \bmod p$, lorsque i vérifie les inégalités:*

(1) $n-r-s < i \leq n-r$,

(2) $n-r < j \leq n$, *en posant* $j = i + k(p-1)$.

Soit h'_a l'élément de $H^*(\boldsymbol{W}_{n,r+s})$ vérifiant

$$\psi^*_{n,r+s}(h'_a) = h_a \qquad (n-r-s < a \leq n)$$

et soit de même $h''_b \in H^*(\boldsymbol{W}_{n,r})$ tel que

$$\psi^*_{n,r}(h''_b) = h_b \qquad (n-r < b \leq n).$$

On a évidemment $\psi^*_{r+s,r}(h''_b) = h'_b$, et si $s: \boldsymbol{W}_{n,r} \to \boldsymbol{W}_{n,r+s}$ est une section, l'égalité $s^* \circ \psi^*_{r+s,r} = 1$, donne alors:

$$s^*(h'_i) = 0 \qquad (n-r-s < i \leq n-r)$$

20.4

$$s^*(h'_j) = h''_j \qquad (n-r < j \leq n);$$

si maintenant nous supposons que i vérifie les inégalités de 20. 3, on déduit de 11. 4, 20. 2 et 20. 4:

$$0 = \mathcal{P}_p^k(s^*(h'_i)) = s^*(\mathcal{P}_p^k(h'_i)) = s^*(b_p^{k,j} \cdot h'_j) = b_p^{k,j} \cdot s^*(h'_j) = b_p^{k,j} \cdot h''_j$$

donc $b_p^{k,j} \equiv 0 \ mod\ p$.

COROLLAIRE 20. 5. *Si la fibration* $\boldsymbol{W}_{n,r+s}/\boldsymbol{W}_{n-r,s} = \boldsymbol{W}_{n,r}$ *admet une section, on a* $s = 1$ *ou* $r = 1$.

Supposant $r \geq 2$ et $s \geq 2$, nous appliquerons la Proposition 20. 3 avec $p = 3$; distinguons deux cas:

a) $n - r \equiv 2 \bmod 3$; on pose $i = n - r$, $k = 1$; on a donc $j = i + 2 = n - r + s$ et les inégalités (1) et (2) de 20. 3 sont vérifiées puisque $r \geq 2$; de plus, vu l'hypothèse faite sur $n - r$, on a $j \equiv 1 \bmod 3$. Mais d'après 12. 3 $b_3^{1,j} \equiv j \bmod 3$, donc $b_3^{1,j} \not\equiv 0 \bmod 3$ et il n'y a pas de section vu 20. 3.

(b) $n - r \not\equiv 2 \bmod 3$. On pose $i = n - r - 1$, $k = 1$; les inégalités (1) et (2) sont vérifiées puisque $s \geq 2$; mais $j = n - r + 1 \not\equiv 0 \bmod 3$, d'où comme précédemment, $b_3^{1,j} \not\equiv 0 \bmod 3$.

Nous traiterons maintenant plus en détails le cas $r = 1$; on pourrait étudier de même le cas $s = 1$, mais, les calculs étant plus compliqués, nous ne nous y attarderons pas.

PROPOSITION 20. 6. *Si la fibration* $\boldsymbol{W}_{n,s+1}/\boldsymbol{W}_{n-1,s} = \boldsymbol{W}_{n,1} = \boldsymbol{S}_{2n-1}$ *admet une section, n est divisible par l'entier*

$$N_s = \Pi_p \, p^{1+h(p,s)}$$

où le produit est étendu à les nombres premiers, et où $h(p, s)$ *désigne pour tout* p *le plus grand entier* $h \geq -1$ *tel que* $(p-1) \cdot p^h \leq s$.

Vu la Proposition 20. 3, il nous suffira de prouver ceci:

LEMME 20. 7. *Soient* p *un nombre premier,* s *un entier* $< n$, *et supposons que* $b_p^{k,n} \equiv 0 \ mod\ p$ *pour tout entier* $k > 0$ *tel que* $n - k(p-1) \geq n - s$, (*autrement dit tel que* $k(p-1) \leq s$). *Alors* n *est divisible par* $p^{1+h(p,s)}$.

Ce lemme sera lui-même conséquence du lemme suivant, dans lequel s n'intervient plus:

LEMME 20. 8. *Soient* a *un entier* ≥ 0, $k = p^a$, *supposons* $n > k(p-1)$ *et* n *divisible par* k. *Si* $b_p^{k,n} \equiv 0 \ mod\ p$, *alors* n *est divisible par* p^{a+1}.

Montrons, par récurrence sur s, que 20. 8 entraîne 20. 7. Ce dernier est trivial pour $s = 0$, supposons le vrai pour $s - 1$; puisque

$$h(p, s) \leq 1 + h(p, s-1),$$

cela implique que $p^{h(p,s)}$ divise n; mais $(p-1)\cdot p^{h(p,s)} \leq s < n$ par définition de $h(p,s)$, par conséquent l'entier $a = p^{h(p,s)}$ vérifie les hypothèses de 20. 8 et n est bien divisible par $p^{h(p,s)+1}$.

Le lemme 20. 8 est un cas particulier du résultat suivant, que nous allons maintenant démontrer:

LEMME 20. 9. *Soient F le polynôme symétrique $\Sigma\, x_1^{\alpha_1}\cdots x_i^{\alpha_i}$, de degré $n=\Sigma\,\alpha_i$, p un nombre premier, a un entier. On suppose que p^a divise n et qu'il y a au plus p^a indices j tels que $\alpha_j \neq 1$.*

Dans ces conditions, pour que le terme dominant de F soit $\not\equiv 0 \bmod p$, il faut et il suffit, ou bien que $\alpha_j = 1$ pour tout j, ou bien qu'il y ait exactement p^a indices j tels que $\alpha_j \neq 1$, les α_j correspondants étant tous égaux et n n'étant pas divisible par p^{a+1}.

(On obtient 20. 8 en appliquant 20. 9 au cas où $\alpha_j = p$ pour $1 \leq j \leq p^a$ et $\alpha_j = 1$ pour $j > p^a$.)

Nous démontrerons le lemme 20. 9 par récurrence descendante sur i, le cas $i = n$ étant trivial puisque tous les α_j sont alors égaux à 1.

Nous supposerons que l'on a $\alpha_1,\cdots,\alpha_k > 1$, et $\alpha_{k+1}=\cdots=\alpha_i=1$. On a $1\leq k\leq p^a$, vu $i<n$. Considérons le polynôme symétrique:

$$G = (\Sigma\, x_1^{\alpha_1-1}\cdots x_k^{\alpha_k-1})\cdot(\Sigma\, x_1\cdots x_i)\,;$$

dans le développement de G, nous trouverons évidemment le polynôme F; quant aux autres termes ce seront des polynômes symétriques de la forme:

$$c_{(\beta)}\Sigma\, x_1^{\beta_1}\cdots x_k^{\beta_k}\cdot x_{k+1}\cdots x_{i'},$$

où $i' = n + k - \Sigma\,\beta_j$, et où β_j est égal soit à α_j, soit à $\alpha_j - 1$, ce second cas se présentant pour au moins une valeur de i, (ce qui montre que $i' > i$); le coefficient $c_{(\beta)}$ est un entier.

G est le produit de deux polynômes symétriques, il est donc décomposable et l'égalité:

$$G = F + \Sigma_{(\beta)}\, c_{(\beta)}\Sigma\, x_1^{\beta_1}\cdots x_k^{\beta_k}\cdot x_{k+1}\cdots x_{i'},$$

montre que le terme dominant de F, changé de signe, est égal à la somme des termes dominants des polynômes $c_{(\beta)}\Sigma\, x_1^{\beta_1}\cdots x_k^{\beta_k}x_{k+1}\cdots x_{i'}$; comme $i' > i$, on peut appliquer le lemme à ces derniers vu l'hypothèse de récurrence. Nous distinguerons quatre cas:

(A) *On a $\alpha_j = 2$ pour $j\leq k$.* Dans ce cas, le seul choix des β_j qui conduise à un terme dominant non nul est celui où $\beta_j = 1$ pour tout j; il est immédiat que le coefficient $c_{(\beta)}$ correspondant est égal au coefficient binomial $\binom{n}{k}$, et, puisque $1\leq k\leq p^a$ et que p^a divise n, les propriétés de divisibilité des coefficients binomiaux montrent que:

$$c_{(\beta)} = \binom{n}{k} \equiv 0 \bmod p \quad \text{si } k < p^a,$$
$$c_{(\beta)} = \binom{n}{k} \equiv n/p^a \bmod p \quad \text{si } k = p^a,$$

ce qui établit le lemme sous l'hypothèse (A).

(B) *On a* $\alpha_j = q > 2$ *pour* $j \leq k$. Le seul choix des β_j qui conduise à un terme dominant non nul est celui où $\beta_j = q - 1$ pour $1 \leq j \leq k$, lorsque de plus $k = p^a$ et p^{a+1} ne divise pas n; on voit alors tout de suite que $c_{(\beta)} = 1$, ce qui démontre le lemme dans le cas (B).

(C) *On a* $k < p^a$. Le seul choix des β_j qui conduise à un terme dominant non nul est celui où $\beta_j = 1$ pour tout j; mais les α_j, $(1 \leq j \leq k)$, sont alors égaux à 2, et l'on se retrouve dans le cas (A) déjà traité.

(D) *On a* $k = p^a$, *et les* α_j, $(1 \leq j \leq k)$, *ne sont pas tous égaux.* Dans ce cas, le seul choix des β_j qui conduise à un terme dominant non nul est $\beta_1 = \cdot \cdot \cdot = \beta_k = q > 1$, et ce choix n'est possible que si certains des α_j sont égaux à $q + 1$, et tous les autres à q; soient r et s leurs nombres respectifs. Vu l'hypothèse faite on a $r + s = p^a$, $r \geq 1$, $s \geq 1$; comme $q > 1$, il est immédiat que

$$c_{(\beta)} = \binom{r+s}{r} = \binom{p^a}{r} \equiv 0 \bmod p,$$

d'où le lemme dans le cas (D).

Comme les cas (A), (B), (C), (D) épuisent toutes les possibilités, la démonstration du lemme 20.8 est achevée, et la Proposition 20.6 est complètement établie.

Exemples.

$s = 1$; pour $p = 2$, on a $h(p, 1) = 0$, pour $p > 2$, $h(p, 1) = -1$, d'où $N_1 = 2$. Dans ce cas du reste, la condition "n pair" est non seulement nécessaire mais suffisante pour l'existence d'une section (*voir* Eckmann, [8], Satz IV).

$s = 2$; pour $p = 2$, $h(p, 2) = 1$, pour $p = 3$, $h(p, 2) = 0$, pour $p \geq 5$, $h(p, 2) = -1$, donc $N_s = 12$. Nous ignorons si la condition "n divisible par 12" est suffisante pour l'existence d'une section, mais cela semble peu probable. Il est assez naturel de conjecturer que $\boldsymbol{W}_{n,s+1}/\boldsymbol{W}_{n-1,s} = \boldsymbol{S}_{2n-1}$ n'a pas de section si $s > 1$.

Indiquons pour terminer quelques valeurs de la fonction arithmétique N_s:

$$N_1 = 2,\ N_2 = N_3 = 12,\ N_4 = N_5 = 120,\ N_6 = N_7 = 2.520, \cdot \cdot \cdot,$$
$$N_{20} = N_{21} = 6.983.776.800.$$

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY, PRINCETON,
UNIVERSITÉ DE NANCAGO.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. Borel, " Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes," *C. R. Acad. Sci. Paris*, tome 230 (1950), pp. 1378-1380.

[2] ———, " Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts," *Annals of Mathematics*, tome 57 (1953), pp. 115-207.

[3] ———, " La cohomologie mod 2 de certains espaces homogènes," à paraître aux *Comm. Math. Helv.*

[4] ——— et J.-P. Serre, " Détermination des p-puissances réduites de Steenrod dans la cohomologie des groupes classiques. Applications," *C. R. Acad. Sci. Paris*, tome 233 (1951), pp. 680-682.

[5] H. Cartan et J.-P. Serre, " Espaces fibrés et groupes d'homotopie. I. Constructions générales," *C. R. Acad. Sci. Paris*, tome 234 (1952), pp. 288-290; " II. Applications," *ibid.*, pp. 393-395.

[6] S. S. Chern, " Characteristic classes of hermitian manifolds," *Annals of Mathematics*, tome 47 (1946), pp. 85-121.

[7] ———, " On the characteristic classes of complex spheres bundles and algebraic varieties," à paraître dans l'*Amer. Jour. Math.*

[8] B. Eckmann, " Systeme von Richtungsfeldern in Sphären und stetige Lösungen komplexer linearer Gleichungen," *Comm. Math. Helv.*, tome 15 (1942), pp. 1-26.

[9] ———, " Espaces fibrés et homotopie," *Colloque de Topologie*, Bruxelles, 1950, pp. 83-89.

[10] C. E. Miller, " The topology of rotation groups," *Annals of Mathematics*, tome 57 (1953), pp. 90-114.

[11] L. S. Pontrjagin, " Ueber die topologische Struktur der Lie'schen Gruppen," *Comm. Math. Helv.*, tome 13 (1940), pp. 277-283.

[12] J.-P. Serre, " Homologie singulière des espaces fibrés. Applications," *Annals of Mathematics*, tome 54 (1951), pp. 425-505.

[13] ———, " Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens," à paraître aux *Annals of Mathematics.*

[14] N. E. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton, 1951.

[15] ———, a. " Homology groups of symmetric groups and reduced powers operations " *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, tome 39 (1953), pp. 213-217, b. " Cyclic reduced powers of cohomology classes " *ibid.*, pp. 217-223.

[16] R. Thom, " Une théorie axiomatique des puissances de Steenrod," *Colloque de Topologie*, Strasbourg, 1951.

[17] G. W. Whitehead, " Correction to my paper ' On families of continuous vector fields over spheres,' " *Annals of Mathematics*, tome 48 (1947), pp. 782-783.

[18] W. T. Wu, " Sur la structure presque complexe d'une variété différentiable réelle," *C. R. Acad. Sci. Paris*, tome 228 (1949), pp. 972-973.

[19] ———, *Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques*, *Act. Sci. et Ind.* 1183, Hermann éd., Paris (1952).

[20] ———, " Sur les puissances de Steenrod," *Colloque de Topologie*, Strassbourg, 1951.