

Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

23. oktober 2025

Področje pogovora in predikati

Področje pogovora je neprazna *množica*. Na primer ljudje, številke, živali.

Predikati so logične *funkcije*, ki za svoje argumente uporabijo elemente področja pogovora.

Če v predikate vstavljamo elemente področja pogovora, dobimo *izjave*.

Predikati

Predikate ločimo po mestnosti.

V izbrani interpretaciji enomestni predikati ustrezajo *lastnostim* elementov področja pogovora.

Dvomestni predikati ustrezajo *zvezam* (tudi *relacijam*) med elementi področja pogovora.

Kvantifikatorja

Poznamo dva kvantifikatorja:

- \forall univerzalni kvantifikator
- \exists eksistenčni kvantifikator

Pomen kvantifikatorjev

Velja samo za izbrano interpretacijo.

$\forall x P(x)$ je izjava, ki je resnična natanko takrat, ko imajo vsi elementi področja pogovora lastnost P . Sicer je neresnična.

$\exists x P(x)$ je izjava, ki je resnična natanko takrat, ko obstaja (vsaj en) element področja pogovora, ki ima lastnost P . Sicer je neresnična.

Formalizacija

Definiraj ustrezne predikate in zapiši naslednje izjave:

- ▶ *Nekateri politiki so nepošteni.*
- ▶ *Noben politik ni nepošten.*
- ▶ *Vsi politiki so nepošteni.*

⋮

Interpretacija

Dvomestni predikat $P(x, y)$ naj pomeni x pozna y -ona.

Na katere načine lahko formulo $P(x, y)$ spremeniš v izjavo?

Izjavne formule

- ▶ *spremenljivke* x, y, z, \dots ,
- ▶ *konstante* a, b, c, \dots ,
- ▶ *predikati* P, Q, R, \dots ,
- ▶ izjavni vezniki $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \dots$,
- ▶ *kvantifikatorja* \forall in \exists ter
- ▶ oklepaja (in) .

Spremenljivkam in konstantam pravimo tudi *termi*.

Atomi predikatnega računa so, na primer,

$$P(x), P(a), Q(x, y), Q(a, x), \dots$$

Atome dobimo tako, da terme vstavimo v predikate.

Izjavne formule

Izjavne formule so definirane induktivno:

1. Atomi so izjavne formule.
2. Če sta W in V izjavni formuli in je x spremenljivka, potem so tudi

$$(\neg W), (W \wedge V), (W \vee V), (W \Rightarrow V), (W \Leftrightarrow V), \dots$$

$$(\exists x W) \quad \text{in} \quad (\forall x W)$$

izjavne formule.

Doseg kvantifikatorjev

Doseg kvantifikatorja je *najmanjši možen*: najmanjša izjavna formula, ki jo preberemo desno od kvantifikatorja (skupaj z njegovo spremenljivko).

Kvantifikator *veže* svojo spremenljivko in proste spremenljivke z istim imenom v svojem dosegu.

Vezane in proste spremenljivke

V formuli imamo vezane in proste spremenljivke:

- ▶ vstop spremenljivke x je *vezan*, če se *ta* x nahaja v dosegu (območju delovanja) kvantifikatorja $\forall x$ ali $\exists x$,
- ▶ vstop spremenljivke, ki ni vezan, je *prost*.

Doseg, vezane in proste spremenljivke

Določi doseg kvantifikatorjev in odloči, katere spremenljivke so vezane in katere proste:

$$\forall x P(x, y) \wedge Q(x, y)$$

$$\forall x P(w, y) \wedge Q(x, y)$$

$$\forall x (P(x, y) \wedge Q(z, y))$$

Doseg, vezane in proste spremenljivke

Določi doseg kvantifikatorjev in odloči, katere spremenljivke so vezane in katere proste:

$$\forall x \neg \exists x \forall z P(x, y, z)$$

$$\exists x \neg P(x, y) \Rightarrow Q(x) \wedge R(y)$$

$$\exists x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x) \vee P(x) \wedge R(x) \vee S(y)$$

Interpretacija izjavne formule

Interpretacija \mathcal{I} izjavne formule W je sestavljena iz neprazne množice \mathcal{D} , ki ji pravimo *področje pogovora* interpretacije.

Poleg tega

- ▶ vsakemu predikatu ustreza 0/1 logična funkcija v \mathcal{D}
- ▶ vsaki konstanti določimo vrednost v \mathcal{D} (ponavadi je implicitno določena že z imenom konstante)
- ▶ vsaki prosti spremenljivki v W določimo vrednost v \mathcal{D} , pri tem vsem prostim spremenljivkam z istim imenom določimo *isto* vrednost iz \mathcal{D} .

Pomen kvantifikatorjev

Naj bo W formula. Z $W(x/a)$ označimo formulo, ki jo dobimo tako, da v formuli W vse proste vstope spremenljivke x nadomestimo z a .

$$W \qquad P(x) \vee \exists x Q(x, y) \wedge R(b, x)$$

$$W(x/a) \qquad P(a) \vee \exists x Q(x, y) \wedge R(b, a)$$

Pomen kvantifikatorjev

Formula $\forall x W$ je *resnična* v interpretaciji \mathcal{I} , če je za vsak element področja pogovora $d \in \mathcal{D}$ resnična formula $W(x/d)$. Sicer je $\forall x W$ neresnična.

Formula $\exists x W$ je *resnična* v interpretaciji \mathcal{I} , če v področju pogovora obstaja $d \in \mathcal{D}$, za katerega je formula $W(x/d)$ resnična. Sicer je $\exists x W$ neresnična.

Preimenovanje spremenljivk

Dejstvo: če je W formula, potem imen prostih spremenljivk ne smemo spreminjati, če želimo pridelati enakovredno formulo.

Želja: Vezane spremenljivke lahko *preimenujemo* tako, da *ista* spremenljivka (tj. spremenljivka z istim imenom)

- ▶ ne nastopa pri več kvantifikatorjih
- ▶ ni hkrati vezana in prosta.

Preimenovanje spremenljivk

$$\forall x \exists y (P(x, y) \Rightarrow \exists x Q(x, y) \vee \forall y R(x, y)) \vee S(y)$$

Enakovredne izjavne formule

Izjavni formuli W in V sta *enakovredni*, če imata isto logično vrednost v vseh možnih interpretacijah.

V tem primeru pišemo $W \sim V$.

Enakovredne izjavne formule

Izjavna formula W je *splošno veljavna*, če je resnična v vsaki interpretaciji.

Izjavna formula V je *neizpolnljiva*, če je neresnična v vsaki interpretaciji.

Zakoni predikatnega računa

So nekateri pomembni pari enakovrednih izjavnih formul:

$$\neg \forall x W \sim \exists x \neg W$$

$$\neg \exists x W \sim \forall x \neg W$$

$$\forall x \forall y W \sim \forall y \forall x W$$

$$\exists x \exists y W \sim \exists y \exists x W$$

$$\forall x (W \wedge V) \sim \forall x W \wedge \forall x V$$

$$\exists x (W \vee V) \sim \exists x W \vee \exists x V$$

Zgledi

$P(x)$... x je plešast.

$N(x)$... x je nesmrten.

$S(x)$... x je sodo število.

$L(x)$... x je liho število.

Zakoni predikatnega računa z omejitvami

Če se x ne pojavi (prosto) v formuli C , potem veljajo naslednje enakovredosti:

$$\forall x (C \vee W) \sim C \vee \forall x W$$

$$\exists x (C \vee W) \sim C \vee \exists x W$$

$$\forall x (C \wedge W) \sim C \wedge \forall x W$$

$$\exists x (C \wedge W) \sim C \wedge \exists x W$$

Preneksna normalna oblika

Trditev

Vsako formulo lahko enakovredno zapišemo tako, da se kvantifikatorji nahajajo samo na začetku.

Kako?

1. Preimenujemo spremenljivke.
2. Znebimo se \Rightarrow in \Leftrightarrow , raje imamo \neg , \wedge in \vee .
3. Izvlečemo kvantifikatorje na začetek z uporabo zakonov predikatnega računa.

Zgled

$$\forall x A(x) \vee \exists x B(x) \Rightarrow D(x) \wedge \exists x D(x)$$

Zgled

Zamenjava raznovrstnih kvantifikatorjev v splošnem ni možna.

$$P(x, y) \quad \dots \quad x \text{ pozna } y\text{-ona.}$$

Včasih vseeno lahko:

$$\forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y)) \sim \exists y \forall x (P(x) \wedge Q(y))$$

