Some Class
Random Examples

Your Name

Contents

Chapter 1

1.1 Linear programming LP

Date **n** variabili continue, funzione obiettivo lineare e **m** vincoli lineari (semispazi)

Example 1.1.1 (Forma generale di un LP)
$z(LP) = max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
Vincoli: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, x_j \geqslant 0, \forall \ \ j \in \{1, 2, \ldots, n\} \ c^{n-1} \quad A^{n*m} \quad b^{m-1}$

Notazione matriciale
$z(LP) = max \ c^{T(\text{trasposta})} x \quad A^{\text{matrice}} x \leqslant b \quad x \geqslant 0$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \text{Vettore colonna di n variabili continue}$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{bmatrix} \text{Vettore colonna di coefficienti f obiettivo}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} \text{Vettore colonna dei RHS dei vincoli (termini noti)}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{Matrice dei coefficienti dei vincoli}$$

Definition 1.1.1: Intersezione di due iperpiani $(\tilde{x_1}, \tilde{x_2})$

$$x = \begin{cases} ax_1 + bx_2 + c = 0 \\ rx_1 + sx_2 + t = 0 \end{cases} \qquad a = -1, b = 1, c = -2r = 8, s = 2, t = -19$$

Example 1.1.2 (Esempio:)

$$(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}) = (\frac{c * s - b * t}{b * r - a * s}, \frac{a * t - c * r}{b * r - a * s}) = \frac{-2 * 2 - 1(-19)}{1 * 8 - (-1)2}, \frac{-1 * (-19) - (-2)8}{1 * 8 - (-1) * 2} = (\frac{15}{10}, \frac{35}{10}) = (\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$$

Chapter 2

2.1 Principio di induzione

Forma generale: "Per ogni n $\in \mathbb{R}$ n $\geqslant n_0$, vale la proprietà P(n)"

1. Si dimostra P(n) vera per n=0 $\rightarrow$ Primo passo dell'induzione
2. Si dimostra che n $\geqslant n_0$, dal fatto che P(n) è vero segue che P(n+1) è vero $\rightarrow$ Passo induttivo o ipotesi induttiva

Allora per ogni n $\geqslant n_0 P(n)$ è vero.

Chapter 3

3.1 Ottimo in forma analitica

Note:-

Forma generale di un problema di LP:
$Z(LP) = \text{MAX} \sum_{s=1}^{n} c_j x_j, \sum_{j=1}^{m} x_s \leqslant b, i\epsilon\{1, 2, \ldots, m\}, x_j \geqslant 0s \in \{1, 2, \ldots, m\}$
Data una soluzione euristica, rispetta tutti i vincoli $\hat{x}$
$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{c}_j \hat{x}_j \leqslant Z(LP)$

Linee di livello: punti in cui f è costante, i punti che possono essere ottimi in particolar modo per le linee sono i corner

Example 3.1.1 (Esempio visto numerose volte in classe)
MAX $x_1 + \frac{64}{100} x_2$, n=2 variabili, m=2 vincoli, $f(x_1, x_2) = x_1 + \frac{64}{100} x_2$

$$50x_1 + 31x_2 \leqslant 250 - 3x_1 + 2x_2 \leqslant 4x_1, x_2 > 0$$

Soluzione ottima: $\tilde{x}, z(LP) = \sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{64}{100} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 50 & 31 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 250 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$N_z = (\tilde{x_1}, \tilde{x_2})$
$\nabla f(x) = \frac{\delta f(x)}{f(x_1)}, \frac{\delta f(x)}{f(x_2)} = [1, \frac{64}{100}]$
$\tilde{x} = (\frac{396}{193}, \frac{950}{193})\ Z(LP) = \frac{984}{193}$

3.2 Simplesso tramite metodo analitico

Per arrivare alla forma standard di un problema LP è necessario aggiungere due variabili di "slack", di modo da far comparire una uguaglianza, anziché un $\geqslant$, oltre a questo motivo si aggiungono n variabili perché per poter risolvere un sistema si devono avere m=n vincoli e variabili

Example 3.2.1 (Esempio)

$$\begin{aligned} 50x_1 + 31x_2 + x_3 + \quad\quad &= 250 \\ -3x_1 + 2x_2 \quad\quad + x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

$$x_3 = 250 - 50x_1 - 31x_2$$
$$x_4 = +4 + 3x_1 - 2x_2$$
$$- - - - - - - - - - - -$$
$$z = 0 + x_1 + \frac{64}{100}x_2$$

Dizionario: Scritto in funzione della soluzione $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 250, x_4 = 4$

$$\begin{cases} x_3 = 250 - 250x_1 \longrightarrow \underbrace{250 + 50x_1}_{x_1 \geqslant 0} \geqslant 0 \quad x_1 \leqslant 5 \\ x_4 = 4 + 3x_1 \longrightarrow \underbrace{4 + 3x_1}_{x_4 \geqslant 0} \geqslant 0 \quad x_1 \geqslant \frac{4}{3} \end{cases}$$

Aumentando il valore di x_1 a 5, il valore di x_3 diventa 0

$$x_3 = 250 - 50x_1 - 31x_2 \longrightarrow x_1 = 5 - \frac{31}{50}x_2 - \frac{1}{50}x_3$$
$$x_4 = 4 + 3\left(5 - \frac{31}{50}x_2 - \frac{1}{50}x_3\right) - 2x_2 \longrightarrow= 19 - \frac{199}{50}x_2 - \frac{3}{50}x_3$$
$$z = \left(5 - \frac{31}{50}x_2 - \frac{1}{50}x_3\right) + \frac{64}{100}x_2 = 5 + \frac{1}{50}x_2 - \frac{1}{50}x_3$$

Nuovo dizionario:

$$x_1 = 5 - \frac{31}{50}x_2 - \frac{1}{50x_3}$$
$$x_2 - 19 - \frac{193}{50}x_2 - \frac{3}{50}x_3$$
$$- - - - - - - - - - - - -$$
$$z = 5 + \frac{1}{50}x_2 - \frac{1}{50}x_3$$

$x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 19$ Fissiamo x2, x3

$$\begin{cases} x_1 = 5 - \frac{31}{50}x_2 \longrightarrow \underbrace{5 - \frac{31}{50}}_{x_1 \geqslant 0} \geqslant 0 \quad x_1 \leqslant \frac{250}{31} \\ x_4 = 19 + \frac{193}{50}x_2 \longrightarrow \underbrace{19 + \frac{193}{50}}_{x_4 \geqslant 0} \geqslant 0 \quad x_2 \leqslant \frac{950}{193} \end{cases}$$

Incrementando x_2 a $\frac{950}{193}$

$$x_4 = 19 - \frac{193}{50}x_2 - \frac{3}{50}x_3$$
$$x_2 = \frac{950}{193} - \frac{3}{193}x_3 - \frac{50}{193}x_4$$

Sostituisco:

$$x_1 = 5 - \frac{31}{50}\left(\frac{950}{193} - \frac{3}{193}x_3 - \frac{80}{193}x_1\right) - \frac{1}{50}x_3 = \frac{376}{193} - \frac{2}{193}x_3 + \frac{31}{193}x^4$$
$$Z = 5 + \frac{1}{50}\left(\frac{950}{193} - \frac{3}{193}x_3 - \frac{50}{193}x_4\right) = \frac{964}{193} - \frac{38}{4825}x_3 - \frac{1}{193}x_4$$

$$x_1 = \frac{376}{193} - \frac{2}{193}x_3 + \frac{31}{193}x_4,$$
$$x_2 = \frac{950}{193} - \frac{3}{193}x_3 - \frac{50}{193}x_4$$
$$-------------$$
$$z = \frac{984}{193} - \frac{98}{4825} - x_3 - \frac{1}{193}x_4$$

Soluzione del problema: $x_1 = \frac{376}{193}, x_2 = \frac{950}{193}, x_3, x_4 = 0$

3.2.1 Revised Simpelex Algorithm

Forma generica di un problema LP in forma non standard

$$Z(LP) = \text{MAX}\,\bar{C}^\top \bar{x}$$
$$\bar{A}x \leqslant b \text{ (Abbiamo tanti vincoli quante righe)}$$
$$x \geqslant 0$$

Si portano in forma standard le n variabili $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ Si aggiungono le variabili slack, cioè si aggiunge un vettore di m variabili

$$Z(LP) = C^T x$$
$$Ax = b \quad \text{m Vincoli}$$
$$x \geqslant 0$$

Question 1: Ipotesi

1. $n > m$
2. $rank(A) = m$
   (a) m vincoli linearmente indipendenti
   (b) m variabili linearmente indipendenti

Idea principale

1. Assegnare il vettore 0 a n-m variabili (Non basic variables), così otteniamo un sistema di m equazioni in m variabili
2. Esprimere il valore delle m variabili e della funzione obiettivo in funzione delle n-m variabili a 0
3. Controllare se aumentare il valore delle n-m variabili

Variabili settate a 0 $\rightarrow$ Prova di ottimalità (Ottimo locale), basata sul fatto che un LP è convesso **Partizione delle variabili**

1. Basic variables
   (a) $x_B \in B \subset x \begin{cases} B \cap \bar{B} = 0 \\ B \cup \bar{B} = x \end{cases}$ m Variabili, $|B| = m$
2. Non basic Variables
   (a) $x_{\bar{B}} \in \bar{B} \subset x$ $n - m$ Variabili, $|B| = n - m$

$x = x_B, x_{\bar{B}}$

$$\boxed{A_x = b} \quad A_B x_B + A_{\bar{B}} x_{\bar{B}} = b$$
$$A_B x_B = b - A_{\bar{B}} x_{\bar{B}}$$
$$\boxed{x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_{\bar{B}} - x_{\bar{B}}}$$

Dal secondo al terzo passaggio $A_B \cdot A_B^{-1} = I$ si moltiplica per l'inversa Nel terzo passaggio è necessario calcolare la trasposta, anche se è complesso da computare, in x_B alla fine sono conosciute le variabili fuori base conosciuta l'inversa

$c = x_B, x_{\bar{B}}$

$$\boxed{c_x^\top} = c_B^\top x_B + c_{\bar{B}}^\top x_{\bar{B}}$$
$$c_B^\top \left(A_B^{-1} \cdot b - A_B^{-1} \cdot A_B \cdot x_{\bar{B}}\right) + c_B^\top x_{\bar{B}} =$$
$$\boxed{c_x^\top = c_B^\top A_B^{-1} b + \left(c_{\bar{B}} - c_B^\top \cdot A_B^{-1} A_{\bar{B}}\right) x_{\bar{B}}}$$

Se è conosciuta A_B^{-1} si è a conoscenza del valore delle variabili di base e della funzione obiettivo.

$$\text{Dizionario} \begin{cases} x_B = \tilde{b} + \tilde{A} x_{\overline{B}} \\ c^\top x = \psi + \tilde{c}_{\bar{B}}^\top x_{\bar{B}} \end{cases} \qquad \text{DEVE} \begin{cases} \tilde{b} = A_B^{-1} b & \psi = c_B^\top A_B^{-} b \\ \tilde{A} = -A_B^{-1} A_{\bar{B}} x_{\bar{B}} & \boxed{\tilde{C}_{\bar{B}}^\top = C_{\bar{B}}^\top - \boxed{C_B^\top A_B^{-1}} A_{\bar{B}}} \end{cases}$$

La parte cerchiata sono i costi ridotti, cioè un optimal simplex dictionary $\tilde{C}_B^T \leqslant 0$ Dato che le variabili in B fuori base sono a 0

$$\begin{cases} x_B = \tilde{b} \to \tilde{b} \to \text{Valore corrente della funzione obiettivo} \\ c^T x = \psi \to \psi \to \text{Valore delle variabili di base} \end{cases}$$

Note:-

Dizionario

n variabili, m variabili libere

$$\binom{m}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad \text{Non si possono enumerare tutte}$$

Definition 3.2.1: Soluzione di base ammissibile

Una soluzione di base ammissibile $\quad x_B = \tilde{b} \geqslant 0$ ha questa forma

Definition 3.2.2: Cambiamento di base

x_p con $\tilde{c}_p \geqslant 0$ pivot column

- Variabili di base: $x_B = \tilde{b}\tilde{A} x_B$ una volta determinata x_p

$$x_B = \tilde{b} + \tilde{A}_P x_P$$
$$\text{Calcolare } y = C_B^\top A_B^{-1}$$
$$y A_B = C_B^\top \longrightarrow y = C_B^\top A_B^{-1}$$

La pivot colum x_p sarà la prima variabile fuori base tale che: $y A_P < c_p \longrightarrow \tilde{c}_p < 0$

Example 3.2.2

$$\begin{aligned} & 50x_1 + 3x_2 + x_3 \quad = 250 \quad m = 4 \\ Max\ x_1 + \frac{64}{100} & x_2 - 3x_1 + 2n_2 \quad + x_4 = 4 \quad m = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \qquad m - m = 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

$$x = \{x_1, x_2, k_3, x_4\} \quad A = \begin{bmatrix} 50 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 250 \\ 4 \end{bmatrix} c^\top \quad = \begin{bmatrix} 1 & \frac{64}{100} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \{x_3, x_4\}, \bar{B} = \{x_1, x_4\}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{\bar{B}} = \begin{bmatrix} 50 & 31 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad C_B^\top = [0, 0] \quad C_{\bar{B}}^\top = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{64}{100} \end{bmatrix}$$

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}] \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 250 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{valore var di base}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_B \\ x_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ a \end{bmatrix}$$

$$\psi = [0, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 250 \\ 4 \end{bmatrix} = 0 \text{ f obiettivo per queste variabili base}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 - \tfrac{31}{50}x_2 - \tfrac{1}{50}x_3 \\ x_4 &= 19 - \tfrac{143}{50}x_2 - \tfrac{3}{50}x_3 \\ &------------ \\ z &= 5 + \tfrac{1}{50}x_2 - \tfrac{1}{50}x_3 \end{aligned} \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{31}{50} & \frac{1}{50} \\ \frac{193}{50} & \frac{3}{50} \end{bmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 51 \\ 19 \end{bmatrix} 5 = \psi \tilde{C}_{\bar{B}}^\top = [\frac{1}{50} - \frac{1}{50}] B = \{x_1, x_4\}, \bar{B} = \{x_2, x_3\}$$

È di nostro interesse solo la colonna di x_2, le altre non sono interessanti al fine di trovare i costi ridotto $y = A_B = C_B^\top$ Per calcolare $y = C_B^\top A_B^{-1}$

$$\begin{cases} y_1 & = 0 \\ y_2 & = 0 \end{cases}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y = [y_1, y_2]$$

$$\tilde{c}_{\bar{B}}^T = \begin{bmatrix} 1, & \frac{64}{100} \end{bmatrix} - \left[\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix}}\right] \begin{bmatrix} 50 & 31 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{c_1}{1} & \overset{c_2}{\frac{64}{100}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{64}{100} \end{bmatrix} \longrightarrow p = x_1$$

Example 3.2.3

Appena $[1, \frac{64}{100}] > 0[\underset{-3}{0}]$ Confronto con quello dopo e appena trovo un valore positivo ci si ferma Appena la matrice cerchiata diventa più piccola del costo, la si sceglie.
Si mette $y = C_B^\top A_B^{-1}$, non siamo intenzionati a calcolare la trasposta, la si porta a $y = C_B^\top A_B^{-1}$, una volta calcolata questa possiamo confrontare l'altra parte dei membri, ottenendo anhe la funzione obiettivo $\psi = [0, 0][25\underset{4}{0}0] = [0, 0]$
La pivot column entra in base, Pivot row esce dalla base.
Data la pivot column $A_B d = A_p$ $d = A_B^{-1} A_P = \tilde{A}_p$

A_p è: $Ap = \begin{bmatrix} 50 \\ -3 \end{bmatrix} d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} d_1 = 50 \\ d_2 = -3 \end{cases}$ Questo è il pezzo di $\tilde{A}$ interessa

$\tilde{b} = td > 0$ Trovare il valore massimo di t facendo salire a t la variabile di pivot

$$\begin{aligned} \tilde{b_1} - td_1 \geqslant 0 \quad & 250 - t * 50 \geqslant 0 \quad & t \leqslant 5 \\ \tilde{b}_2 - td_2 \geqslant 0 \quad & 4 - t(-3) \geqslant 0 \quad & t \geqslant -\tfrac{4}{3} \end{aligned} \quad |$$

$\underset{=5 \text{ nuovo } x_1}{t^*}$ è il nuovo valore di x_p le altre variabili $\tilde{b} - td$ $x_4 = 19$

Per far partire l'algoritmo del simplesso si fanno comparire una entità alla destra della matrice

A

L'algoritmo del simplesso è migliorabile se dall'iterazione precedente è possibile migliorare ciò che si ha.

In alcuni casi l'algoritmo può ciclare, per esser sicuri che ciò non accada è necessario prendere le variabili sempre in ordine (**Regola di Bland**), fino ad arrivare in fondo, se un ciclo si presenta è un campanello d'allarme che non sono state prese le variabili in ordine corretto

Chapter 4

4.1 Problema duale

Problema duale del problema già affrontato, in questo caso lo scopo è trovare degli Upper-BoundProblema duale del problema già affrontato, in questo caso lo scopo è trovare degli Upper-Bound

Example 4.1.1

Max $4x_1+x_2+5x_3+3x_4\,(x_1)\,x_1-x_2-x_3+3x_4 \leqslant 1\,(y_2)\,5x_1+x_2+3x_3+8x_4 \leqslant 55(y_3)-x_1+2n_2+3n_3-5n_4 \leqslant 3x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$

$\hat{x_1} = 1, \hat{x_2} = 0, \hat{x_3} = 0, \hat{x_4} = 0, z = 4$ Lower-Bound
y1,y2,y3 sono moltiplicatori dei vincoli, per ottenere un Bound valido, essi devono essere $\geqslant$ della funzione obiettivo
Moltiplicando la seconda riga per $\frac{5}{3}$
$\frac{25}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 5x_3 + \frac{40}{3}x_4 \leqslant \frac{275}{3}$ I termini sono tutti $\leqslant$ della funzione Obiettivo
$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leqslant \frac{25}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 5x_3 + \frac{40}{3}x_4 \leqslant \frac{275}{3}$ Questo valore è un Upper-Bound, Non è possibile moltiplicare per un termine negativo, poiché la disuguaglianza si andrebbe a girare di segno.
Andando a sommare la seconda e la terza riga
$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leqslant 58 \longrightarrow$ Miglior Upper-Bound, 58 è il maggiore
Upper-bound migliori si ottengono andando a ricercare combinazioni lineari dei vincoli quando abbiamo una sima per eccesso della funzione obiettivo
Vincoli $\longrightarrow$ si moltiplica o si somma $\longrightarrow$ facendo si che i coefficienti siano sopra la sunzione obiettivo

$$\begin{aligned} y_1 + 5y_2 - 9_3 &\geqslant 4 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 &\geqslant 1 \\ -y_1 + 3y_2 + 3y_3 &\geqslant 5 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

4,1,5 Sono i coefficienti della funzione obiettivo (Si ha ribaltato i vincoli di 90° per ottenere il duale)

$(y_1 + 5y_2 - y_3)\,x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3)\,x_2 + (-y_1 + 3y_2 + 3y_3)\,x_3 + \left(3y_1 + 8y_2 - y_{y_3}\right)x_4 \leqslant y_1 + 55y_2 + 3y_3 \rightsquigarrow$ Coefficienti dei vincol

Questi passaggi restituiscono un Upper-Bound, è necessario minimizzare questo tra i moltiplicatori per cercare un **vero Upper-Bound.**

Note:-

Forma generale di un problema duale LP

$$Z(D(LP)) = MIN \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\underset{A}{\text{Vincolato}} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$y_i \geqslant 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Claim 4.1.1 Regola generale passaggio Primale-Duale

- Variabili libere $\longrightarrow$ Vincolo di uguaglianza
- Variabile $\geqslant$ 0 $\longrightarrow$ Vincolo $\geqslant$ 0
- Vincolo $\leqslant$ 0 $\longrightarrow$ Variabile $\geqslant$0
- Vicolo = $\longrightarrow$ Variabile libera

Example 4.1.2

$$Max\ 2x_1 - 4x_2$$
$$(y_1)\ -x_1 + x_2 \leqslant 2$$
$$(y_2) 8x_1 + 2x_2 \leqslant 19$$

n=2 m=2: Il punto di intersezione ($\tilde{x}$) viene calcolato utilizzanzo la formula del punto di incostro date due equazioni in n variabili
$\tilde{x} = \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right]$
Dati:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 19 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Variabili primali:

$$\text{MIN } 2y_1 + 19y_2 - y_1 + 8y_2 \geqslant 2y_1 + 2y_2 \geqslant 4y_1, y_2 \geqslant 0$$

Duale $\longrightarrow$ Upper senza simplesso
$\tilde{y} = \left[\frac{14}{5}, \frac{3}{5}\right]$

Note:-

Forma matriciale

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$A^T y \geqslant c$$
$$yA \geqslant c$$

Vincoli del duale

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$b^T y$ Funzione Obiettivo

Note:-

Forma generale vincoli in forma non duale

$$z(LP) = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} (\lambda_i)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j, \forall j \in \{1, 2, ..., m\} (\pi_j)$$

$$\forall \ x_{ij} \geqslant 0 \ \forall \ i \ j$$

m e n non sono più il numero di vincoli e di variabili, ma ora indicano stazioni e depositi, nell'esempio

4.1.1 Da problema di massimo a problema di minimo

Example 4.1.3

Massimo

$$\begin{array}{ccccccc}
300x_{11} & +200x_{12} & +100x_{13} & +250x_{21} & +400x_{22} & +80x_{23} & \\
x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & & & & \leqslant 1200,5 \ (\lambda_1) \\
 & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & \leqslant 1100,5 (\lambda_2) \\
x_{11} & & & +x_{21} & & & \leqslant -500,5 \ (\pi_1) \\
 & x_{12} & & & +x_{22} & & \leqslant -600,5 \ (\pi_2) \\
 & & x_{13} & & & +x_{23} & \leqslant -1000,5 (\pi_3)
\end{array}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geqslant 0$$

Per ottenere il minimo è necessario "ribaltare" la matrice utilizzando come variabili π e λ

Minimo

$$\begin{array}{cccccc}
1200,5\lambda_1 + 1100,5\lambda_2 - 500,5\pi_1 - 600,5\pi_2 - 1000\pi_3 & & & & & \\
\lambda_1 & & -\pi_1 & & & \geqslant -300 \\
\lambda_1 & & & -\pi_2 & & \geqslant -200 \\
\lambda_1 & & & & -\pi_3 & \geqslant -100 \\
 & \lambda_2 & -\pi_1 & & & \geqslant -250 \\
 & \lambda_2 & & -\pi_2 & & \geqslant -400 \\
 & \lambda_2 & & & -\pi_3 & \geqslant -80
\end{array}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \pi_1, \pi_2, \pi_3 \geqslant 0$$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \pi_1 = 250, \pi_2 = 200, \pi_3 = 80$
$-500,5 \cdot 250 - 600,5 \cdot 200 - 1000,5 \cdot 80 = -325268$
Il numero trovato è un upper-bound del problema, cioè: 325265 leq Z(LP)

$$-Z(O(LP)) = min \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i + \sum_{j=1}^{m} -b_j\pi_j$$
$$\lambda_i - \pi_j \geqslant -c_{ij} \quad \forall i\epsilon\{1,2,\dots,n\}, \quad \forall j\epsilon\{1,2,\dots,m\}$$
$$\lambda i \geqslant 0 \quad \forall i \in \{1,2,\dots,m\}$$
$$\pi_j \geqslant 0 \quad \forall j \in \{1,2,\dots,m\,|\}$$

Lenma 4.1.1 Il duale del duale coincide col primale

$$MAX \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \sum_{j=1}^{m} -a_{ij}x_j \leqslant b \quad i \in \{1,2,\dots,m\} x_j \geqslant 0, \quad i \in \{1,2,\dots,m\}$$

$$MIN \sum_{i=1}^{m} b_j y_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geqslant c_j, \forall \in \{1,2,\dots,n\} y_i > 0, j \in \{1,2,\dots,m\}$$

$$MAX \sum_{i=1}^{m} -b_i y_i \longrightarrow min \sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j \leqslant -c_j \quad \forall i \in \{1,2,\dots,n\} y_i > 0, j \in \{1,2,\dots,m\}$$

$$MAX \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j \longrightarrow \sum_{j=1}^{m} -a_{ij}x_j \geqslant -b \quad \forall i \in \{1,2,\dots,m\} x_j \geqslant 0, \quad j \in \{1,2,\dots,m\}$$

$$\longrightarrow MAX \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \sum_{j=1}^{m} -a_{ij}x_j \leqslant b \quad i \in \{1,2,\dots,m\} x_j \geqslant 0, \quad i \in \{1,2,\dots,m\}$$

Note:-

Forma generica di un LP e del duale

- n variabili
-
  - m1 variabili non negative
  - m-m1 variabili libere
- m vincoli
-
  - m1 disuguaglianze
  - m-m1 disuguaglianze

$$z(LP) = MAX \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$(y_i) \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \quad i \in \{1,2,\dots,m_1\}$$
$$(y_i) \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad i \in \{m_1+1,2,\dots,m\}$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j \in \{1,2,\dots,m\}$$

$$\Updownarrow$$

$$z(D(LP)) = MIN \sum_{j=1}^{m} b_i y_i$$
$$(x_j) \ \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j \geqslant c_j \quad \forall j \in \{1,2,\dots,n_1\}$$
$$(x_j) \ \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j = c_j \quad \forall j \in \{n_1+1,2,\dots,n\}$$
$$y_i \geqslant 0, \quad \forall i \in \{1,2,\dots,m_1\}$$

Proprietà del duale

Non si massimizzano le costanti, per esempio $Max \sum \alpha_i$ non ha senso

Generazione di ulteriori vincoli da quelli già disponibili:

Se si volessero generare altri vincoli validi si potrebbe procedere andando a sommare i vincoli già esistenti anche moltiplicati per una costante.

Example 4.1.4

$$\begin{gathered}(y_1)2\cdot(2w_1+3x_2)\leqslant 3\cdot 2\\ (y_1)\,2\cdot(7x_1+4x_2)\leqslant 7\cdot 2\\ \downarrow\\ 18x_1+14x_2\leqslant 20\end{gathered}$$

Theorem 4.1.1 Teorema della dualità debole

Dati $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ soluzione ammissibile primale e $*(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)*$ soluzione ammissibile duale, abbiamo: $\sum_{s=1}^{n} c_j\bar{x}_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i\bar{y}_i$

Dimostrazione dualità debole: Per ogni coppia di soluzioni ammissibili primale-duale abbiamo:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\bar{x}_j \leqslant \sum_{I=1}^{n}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i}_{\text{Ammissibilità duale}}\right)\bar{x}_j = \sum_{i=1}^{m}\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j}_{\text{Ammissibilità primale}}\right)\bar{y}_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i\bar{y}_i$$

- Ammissibilità duale
  - $c_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_J$
- Ammissibilità primale
  - $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j \leqslant b_i$

😊

Theorem 4.1.2 Teorema della dualità forte

Dati $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_m)$ soluzione ottima primale, $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_m)$ soluzione ottima dove abbiamo:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\tilde{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i\tilde{y}_i \quad (A)$$

Proof: Costruiamo un duale $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_m)$ che soddisfi (A), allora per la dualità debole è ottima.

Dal primale in forma canonica introduco le variabili di slack $\boxed{(*)}$

$x_{m+i} = b_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j, \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$

Eseguendo l'algoritmo del simplesso: $z(LP) = z^* + \sum_{k=1}^{n+m} \tilde{c}_k x_k$ con z^* si ottiene l'ultima riga del $\boxed{(B)}$ dizionario ottimo

Dove $\tilde{C}k \leqslant 0, \forall k \in \{1, 2, \ldots, m+m\}(\tilde{C}k = 0$ se variabile di base)

Definiamo $\boxed{(**)}$

$\boxed{\tilde{y}_1 = -\tilde{C}_{n+i}}, \forall\ i \in \{, \ldots, m\}$

Quindi abbiamo da $\boxed{B}$, usando $\boxed{*}$ ed $\boxed{**}$:

$$\sum_{J=1}^{m} c_j x_j = z^* + \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j - \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\tilde{y}_i}_{\tilde{y}_i = -c\tilde{j}_{n+1}} \underbrace{\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)}_{x_{n+1}}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \boxed{x_j} = \left(z^* - \sum_{i=1}^{m} b_i\tilde{y}_i\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\tilde{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\tilde{y}\right)\boxed{x_j}$$

Valida per ogni scelta

↓

Quindi abbiamo che:

(Perché si verifichi l'uguaglianza si devono verificare 2 condizioni, che la prima parte sia uguale a 0, la seconda sommatoria sia uguale a 0)

$(I)\ z^* = \sum_{i=1}^m b_i\tilde{y}_i$
Quindi dalla dualità debole
Abbiamo una soluzione ottima

$(II)\ c_J = \tilde{c_J} + \sum_{i=1}^m a_{ij}\tilde{y}_i, \forall\ j\ \in \{1, \ldots, m\}$
Dato che $\tilde{c}_k \leqslant 0$
$\sum_{i=1}^m a_{ij}\tilde{y}_i \geqslant c_j \in \tilde{y}_i \geqslant 0, \forall i \in \{1, \ldots, m\}$
Quindi $\tilde{y}$ è una soluzione ammissibile

Quindi
$\Downarrow$
$$z^* = \sum_{j=1}^n C_j\tilde{k}_j = \sum_{i=1}^m b_i\tilde{y}_i$$

😄

Corollary 4.1.1 Scarti complementari: (corollario di dualità forte e debole)

Può essere espresso in 3 versioni, equivalenti tra loro:
Siano $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ una soluzione ammissibile primale e $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_m)$ una soluzione ammissibile duale, allora condizioni necessarie e sufficienti (se e solo se) e sufficienti all'ottimalità di entrambe sono:

1. Prima versione (A):
   (a) $\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot \tilde{y}i = c_j$ oppure $\tilde{x}_j = 0$ (o entrambi) $\forall\ j \in \{1, \ldots, n\}$
   (b) $\sum_{i=1}^n a_{ij}\tilde{x}_j = b_i$ oppure $\tilde{y}_j = 0$ (o entrambi) $\quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}$
2. Seconda versione (B):
3. (a) $\tilde{x}_j \left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij}\tilde{y}_i\right) = 0$
   (b) $\tilde{y}_i \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}\tilde{x}_j - b_i\right) = 0$
4. Terza versione (C): Data $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ soluzione ammissibile primale, è soluzione ottima se e solo se esiste un vettore $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_m)$ tale:
   (a) $\sum_{i=1}^m a_{ij}\tilde{y}_i = c_j \,\text{se}\, x_j > 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$
   (b) $\tilde{y} = 0$ se $\sum_{j=1}^n a_{ij}\tilde{x}_i < b_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}$
   (c) $\sum_{i=1}^m a_{ij}\tilde{y}_i \geqslant c_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$
   (d) $\tilde{y}_i \geqslant 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}$ ammissibilità duale

Chapter 5

Integer Linear Programming (ILP)

5.1 Duale come sottoinsieme di LP

Il duale esiste solo nei problemi di LP, se è necessario ottenere il duale in un ILP è necessario rilassare il problema

$$Z(ILP) = Max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$
$$\text{Variabili intere: } \boxed{x_j \in \mathbb{Z}_+}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Soluzione ottima:
$x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \quad Z(ILP) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$ Valore della soluzione
Soluzione ammissibile:
$\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n \quad \underline{z} = \sum_{i=1}^{n} c_j \underline{x}_j \rightarrow \underline{z} \leqslant z(ILP)$ Si ottiene un lowerbound
Rilassamento continuo di un problema di ILP:
$x_j \in \mathbb{Z}_+ \Longrightarrow x_j \geqslant 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$
Se è un problema di ILP: z(ILP)¡Z(LP), viene restituito un upperbound, in caso z(ILP)=Z(LP), l'ottimo del problema è un intero

5.1.1 Implicazioni tra variabili binarie

$x \in \{0, 1\}$ if true x=1 else (if false) x=0
Boolean expressions →In vincoli lineari

1. Congiunzioni **And**
2. Congiunzioni **And**
3. Disgiunzioni **Or**
4. Negazioni **Not**

CNF: Conjunctive normal form
NOT (x_a OR x_b) → (NOT x_a) AND (NOT x_b)
NOT (x_a AND x_b) → (NOT x_a) OR (NOT x_b)
x_a AND (x_b OR x_c) → (x_a AND x_b) OR (x_a AND x_c)
x_a OR (x_b OR x_c) → (x_a ORx_b) AND (x_a OR x_c)
Implicazioni logiche tra variabili binarie → trasformo l'espressione in CNF, per ogni disgiunzione un vincolo $\geqslant 1$ sostituisco gli **OR** con + e i **NOT** con (1-x)

Chapter 6

Branch and Bound algorithm

6.1 Pseudocodice

Fase di Branching

Fase di Pruning

I solver cercano di tagliare creare alberi più piccoli possibile, tagliando il più possibile

Branch-and-cut-and-Bound: I tagli vengono fatti dove vi sono disuglianze valide

Lavora con una lista di L problemi LP→ Il problema LP di un nodo lo si chiamerà N_k (k contatore di nodi esplorati) ed una soluzione ammissibile intera $\underline{x}$ (Incumbment solution) di valore LB=$-\infty$

Pseudocodice:

q=Numero di nodi totale

1. **Step 0-INIT:** Fare il rilassamento contuinuo del problema ILP→N_0, inserire N_0 dentro la lista L; LB=$-\infty$ oppure al valore di una soluzione euristica → $\underline{x} = x_h$
2. **Step 1-Termination check:** Se la lista L è vuota allora Z(ILP)=LB e l'incumbment solution è una soluzione ottima del problema LP
3. **Step 2-Selezione del nodo di branching:** Selezionare un problema $LP(N_k)$ dalla lista L e cancellarlo dalla lista
4. **Step 3-Bounding:** Risolvere il problema $LP(N_k)$, se è infeasable go to **step 1** [Prune by infeasability], altrimenti sia $\tilde{x}^k$ la soluzione ottima di N_k e $z(N_k)$ Il valore della soluzione $\tilde{x}^n$
5. **Step 4-Pruning:**
   (a) Se $z(N_k) \leqslant LB$ go to **step 1** [Prune by bound] (Non ci sono soluzioni migliori)
   (b) Se $\tilde{x}^k$ non è intera go to **step 5**, altrimenti $LB = z(N_k)$ (Aggiorno incumbent solution), $\underline{x} = \tilde{x}^k$ go to **step 1** [Prune by integrity]
   (c) Cancellare da L i nodi $z(N_k) \leqslant LB$
6. **Step 5-Branching:** Da N_k costruire un insieme di s problemi LP $N_{q+1}, N_{q+2}, \ldots, N_{q+s}$ con la proprietà che tutte le soluzioni intere di N_k siano nell'unione dei s problemi LP creati; Aggiungo $N_{q+1}, N_{q+2}, \ldots, N_{q+s}$ alla lista L, q=q+s e go to **step 1**

Definition 6.1.1: Branching strategy: Binaria per alberi binari (s=2)

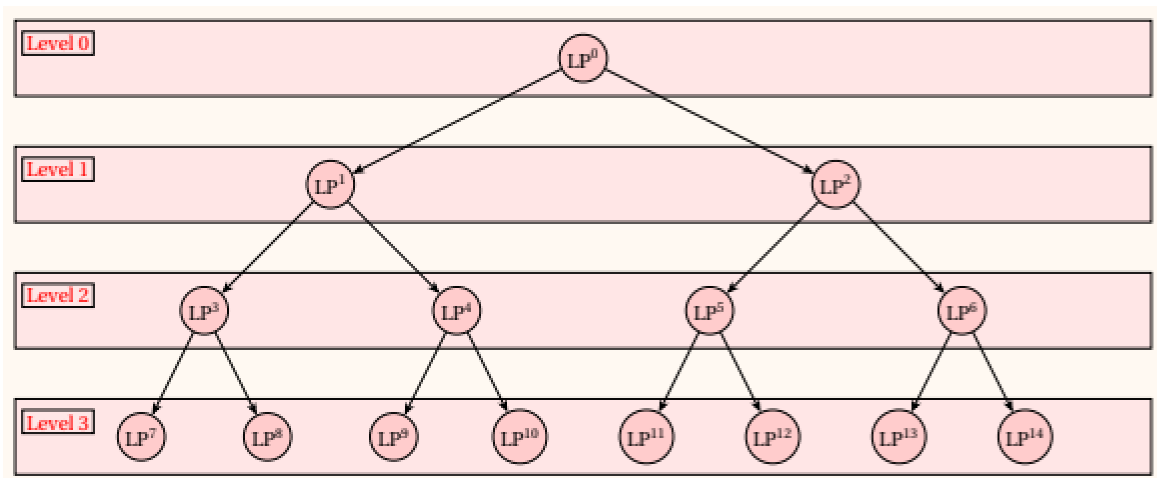
1. Un nodo con un upperbound aggiuntivo sul valore di una variabile
2. Un nodo con un lowerbound sul valore di una variabile

$N_k = \tilde{x}^k$ frazionaria
Selezionare una variabile con un valore frazionario $\tilde{x}_j^k$

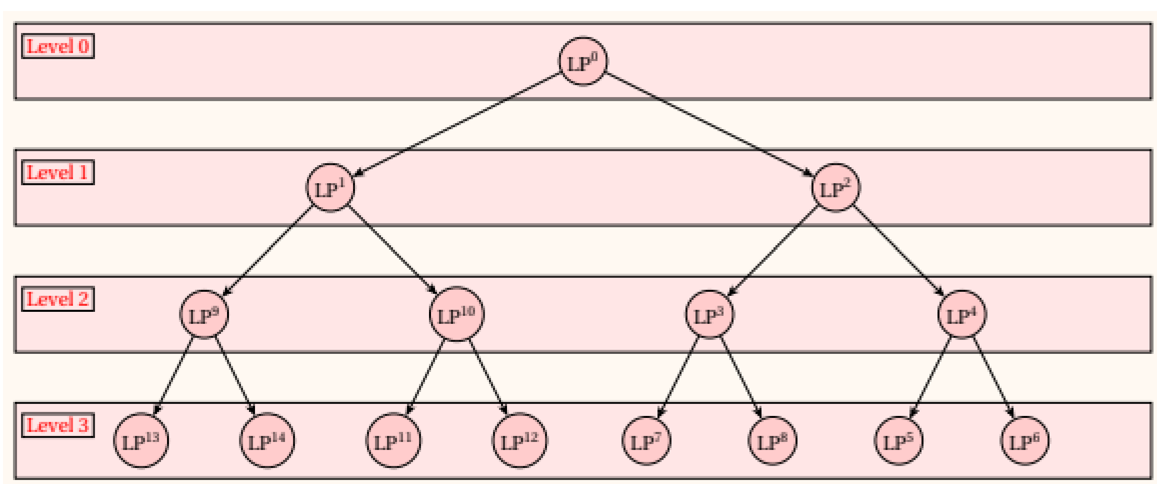
$$\begin{array}{cc} \Downarrow & \Downarrow \\ N_{q+1=N_k} \text{con} x_j \leqslant \lfloor \tilde{x}_j^k \rfloor & N_{q+2} = N_k \text{con} x_j \leqslant \lfloor \tilde{x}_j^k \rfloor + 1 \end{array}$$

Node selection strategy:
Strategia con cui si scegliere l'ordine con cui trattare la lista L

1. First-in-first-out: Bfs, migliora l'upperbound



2. Last-in-first-out: Dfs, migliora l'incumbent solution



Livello Branching di un nodo $N_k \rightarrow$ Numero di variabili con cui ho fatto branching
Sia $I(\alpha)$ l'insieme di tutti i nodi a profondità α: $z(ILP) \leqslant \underset{k \in I(\alpha)}{(z(N_k))}$

Numero di nodi di un albero di branching

In un albero generico con q nodi per livello abbiamo:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Proof:

Base con n=1

$$\sum_{K=0}^{0} q^k \Rightarrow q^0 = 1 = \frac{q^1-1}{q-1} = 1$$

Caso induttivo:

$$\sum_{k=0}^{n+1-1} q^k = \sum_{k=0}^{n-1}$$

$$q^k + q^n = \frac{q^n-1}{q-1} + q^n = \frac{q^n-1+q^{n+1}-q^n}{q-1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

😆

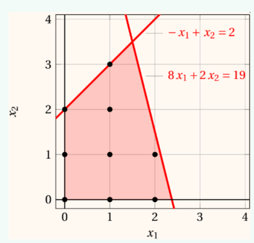
Il numero totale di nodi è $O(q^n) \rightarrow$ per gli alberi binari è $O(2^n)$, la complessità nel caso peggiore del bound è esponenziale

Example 6.1.1 (Esempio da formulazione ILP)

Se tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono interi:

$$\begin{array}{lll} Max\ x_1 & +x_2 & \\ -x_1 & +x_2 \leqslant 2 & \\ 8x_1 & +2x_2 \leqslant 19 & LP_0\ x_1, x_2 \geqslant 0 \\ x_1 & , x_2 \in \mathbb{Z}_+ & \end{array}$$

$z(ILP) \leqslant \lfloor Z(LP) \rfloor$

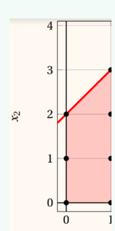


$$\tilde{x}_1 = \frac{3}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{7}{}2z(\text{LP}) = 5\underline{x}_1 = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1, \quad \underline{x}_2 = \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor = 3\underline{z} = 1 + 3 = 4 \leqslant z\,(\text{ ILP }_{\text{KP}})$$

Creo due Lp con 2 condizioni: $\leqslant 1$ e $\geqslant 2$ togliendo la parte non intera

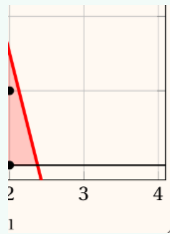
$$\begin{array}{ll} Max\ x_1 & +x_2 \\ -x_1 & +x_2 \leqslant 2 \\ 8x_1 & +2x_2 \leqslant 19 \\ x_1 & \leqslant 1 \\ x_1 & , x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{array}$$

$$\tilde{x}_1 = 1, \quad \tilde{x}_2 = 3 \quad z(LP_1) = 4 \quad \textbf{Intera}$$



$$\begin{array}{rrl} Max\ x_1 & +x_2 & \\ -x_1 & +x_2 & \leqslant 2 \\ 8x_1 & +2x_2 & \leqslant 19 \\ & x_2 & \geqslant 2 \\ x_1 & ,x_2 & \in \mathbb{Z}_+ \end{array}$$

$\tilde{x}_1 = 2, \quad \tilde{x}_2 = \frac{3}{2} \quad z(LP_1) = \frac{7}{2}$ **Ramo Potato**



Chapter 7

7.1 Famiglie di tagli

Branch-and-bound → Branch-and-bound-and-cut (prima si cerca di tagliare un po' poi di fare branch)

Note:-

Rilassamento continuo di un problema ILP:

$$Z(LP) = \text{Max}\, c^\top x$$
$$Ax = b$$
$$x \geqslant 0$$

Note:-

Dizionario ottimo:

$$\begin{cases} x_B + \tilde{A} x_{\bar{B}} = \tilde{b} \\ \underbrace{c^\top}_{z} x = \psi + \underbrace{\tilde{C}_B^\top}_{\tilde{C}_B^T \leqslant 0} x_{\bar{B}} \end{cases} \qquad \tilde{A} = A_B^{-1} A_{\bar{B}}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1(n-m)} \\ \vdots & \dots & & \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \dots & a_m(n-m) \end{bmatrix} \text{m righen-m colonne}$$

7.2 Gomory cuts

$$\tilde{A}_i = [\tilde{a}_{i2}, \dots, \tilde{a}_i(n-m)]$$
$$\lfloor \tilde{A}_i \rfloor = [\lfloor a_{i2} \rfloor, \dots, \lfloor \tilde{a}_i(n-m) \rfloor]$$

Prendiamo la riga i-esima del dizionario ottimo: $\forall i \in \{1, \dots, m\}$

$$(II) x_B^i + \tilde{A}_i x_{\bar{B}} = \tilde{b}_i$$

Dato che le variabili sono tutte negative abbiamo:
$\left\lfloor \tilde{A}_i \right\rfloor x_{\bar{B}} \leqslant \tilde{A}_i x_{\bar{B}}$ Allora $x_B^i + \left\lfloor \tilde{A}_i \right\rfloor x_{\bar{B}} \leqslant \tilde{b}_i$

Dato che le variabili devono essere intere:
$x_B^i + \lfloor \tilde{A}_i \rfloor x_{\bar{b}} \leqslant \lfloor \tilde{b}_i \rfloor \quad (I)$
Sottraendo II e I
$(\tilde{A}_i - \lfloor \tilde{A}_i \rfloor) x_{\bar{B}} \geqslant \tilde{b}_i - \lfloor \tilde{b}_i \rfloor$ ($\geqslant$ perchè togliamo più a dx che sx)
Taglio di Gomery alla riga i

I tagli di Gomory assicurano che la soluzione in base ammissibile $x_B = \tilde{B} \geqslant 0$ diventa infeasible → ma non tagliano nessuna soluzione intera

Cutting plan→ Soluzione intera trovata con solo tagli

Note:-

Parte intera di un numero reale:
$y \in \mathbb{R}, \lfloor y \rfloor =$ Max intero $q * q \leqslant y$

Example 7.2.1 (Esempi di tagli)

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{5}\right)\right)}_{\frac{4}{5}}x_3+\underbrace{\left(\frac{1}{10}-\left\lfloor\frac{1}{10}\right\rfloor\right)}_{\frac{1}{10}}x_4 \geqslant \underbrace{\left(\frac{3}{2}-\left\lfloor\frac{3}{2}\right\rfloor\right)}_{\frac{1}{2}} \rightarrow 8x_3+x_4 \geqslant 5$$

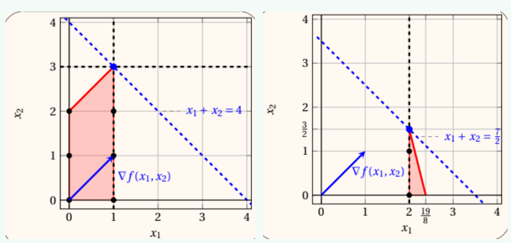
$$(\underbrace{\left(\frac{4}{5}-\left(\frac{1}{5}\right)\right)}_{\frac{4}{5}})x_3+\underbrace{\left(\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)\right)}_{\frac{1}{10}})x_4)(\underbrace{\frac{7}{2}-\left(\frac{7}{2}\right)\right)}_{\frac{1}{2}} \rightarrow 8x_3+x_4 \geqslant 5$$

$$x_3 = 2 + x_1 - x_2 \quad x_4 = 19 - 8x_1 - 2x_2$$

$$8\,(2 + x_1 - x_2) + (19 - 8x_1 - 2n_2) \geqslant 5 \rightarrow \boxed{x_2 \leqslant 3}$$

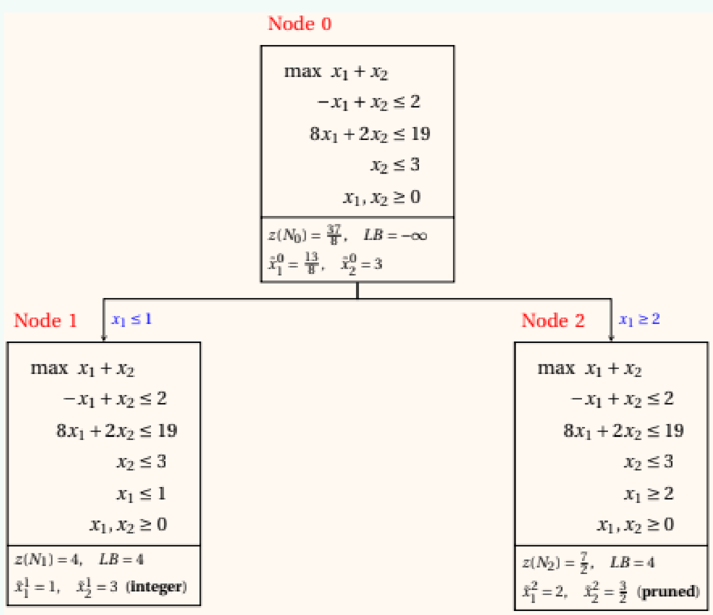
$$\tilde{x}_1 = \frac{13}{8}, \tilde{x}_2 = 3$$

$$z(LP) = \frac{37}{8} \geqslant z(LP)$$



$$\tilde{x}_1 = \frac{13}{8}, \tilde{x}_2 = 3$$

$$z(LP) = \frac{37}{8} \geqslant z(LP)$$



Chapter 8

8.1

Istanza del problema

Definition 8.1.1

1. Insieme N={1,2,...,n} di n oggetti
2. Profitto P_j ($P_j > 0 \in \mathbb{Z}_+$)ed un peso $X_j \geqslant 0 \in \mathbb{Z}_+$
3. Capacità dello zaino $c \in \mathbb{Z}_+$

Obiettivo:
Il Knapsack problem richiede di trovare un sottoinsieme di oggetti $S^* \subseteq N$ di profitto massimo e peso minore o uguale alla capacità dello zaino. Dato un sottoinsieme $S \subseteq N$ di oggetti:

$$P(S) = \sum_{J \in S} P_J \quad W(J) = \sum_{J \in S} W_J$$

Trovare $S^* \subseteq N$ tale che $P(S^*)$ è massimo e $W(S^*) \leqslant c$

Il costo di queste operazioni si attesta di 2^n, dove n è il numero di oggetti da massimizzare

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{if item } j \text{ is selected} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall j \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$$

Claim 8.1.1 ILP$_{\text{KP}}$

$$\begin{aligned} z\,(\text{ILP}_{\text{KP}}) &= \max \sum_{j \in N} p_j x_j \quad \text{Quando è selezionato} \\ \text{subject to} & \sum_{j \in N} w_j x_j \leqslant c, \quad \text{Peso} \leqslant \text{Capacità} \\ x_j &\in \{0, 1\}, \quad \forall j \in N. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Example 8.1.1

item	p_j	w_j	$\frac{p_j}{w_j}$	efficiency
$j = 1$	6	2	$\frac{6}{2}$	$= 3$
$j = 2$	5	3	$\frac{5}{3}$	≈ 1.66
$j = 3$	8	6	$\frac{8}{6}$	≈ 1.33
$j = 4$	9	7	$\frac{9}{7}$	≈ 1.28
$j = 5$	6	5	$\frac{6}{5}$	$= 1.2$
$j = 6$	7	9	$\frac{7}{9}$	≈ 0.77
$j = 7$	3	4	$\frac{3}{4}$	$= 0.75$

$$\begin{array}{lllllllll} \max & 6x_1 & +5x_2 & +8x_3 & +9x_4 & +6x_5 & +7x_6 & +3x_7 & \\ & 2x_1 & +3x_2 & +6x_3 & +7x_4 & +5x_5 & +9x_6 & +4x_7 \leqslant & 9 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 \in & \{0,1\} \end{array}$$

Una soluzione ottima è:

$$x_1^* = 1, x_2^* = 0, x_3^* = 0, x_4^* = 1, x_5^* = 0, x_6^* = 0, x_7^* = 0$$

Il valore della soluzion ottima è $z(ILP_{KP}) = 15$

Soluzione Euristica greedy

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_7 = 1$$

$W(\{1,2,7\}) = 9 \quad P(\{1,2,7\}) = 14$ Non ottima!

La soluzione ottima sarebbe $x_1 = 1, x_4 = 1, z(ILP_{KP}) = 15$