1. 求定积分

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

2. 计算

$$\iint_{|x|+|y|\le 1} \sin^3(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

3. 计算

$$\iint_S \tan\frac{x^2}{1+|x|+|y|}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^2\sin x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中曲面S为单位球面的上半部分，即$S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1, z\ge 0\}$

4. 计算

$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \frac{y^5}{\sqrt[8]{1+x^7}}\mathrm{d}x$$

5. 计算

$$\int_\Gamma (\frac{y}{(x-1)^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2})\mathrm{d}x + (\frac{1-x}{(x-1)^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2})\mathrm{d}y$$

其中$\Gamma\in\mathbb{R}^2$ 是一条不通过$(0,0)$ 和$(1,0)$两个点的简单光滑闭曲线并取正向

6. 设曲面Σ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上的点(x,y,z) 处切平面为Π，计算曲面积分

$$\iint_\Sigma \frac{1}{\lambda}\mathrm{d}S$$

其中λ是坐标原点到Π的距离

7. 设$P(x,y,z)=Q(x,y,z)=R(x,y,z)=f((x^2+y^2)z)$,$f$ 有连续导数，求极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{\iint_\Omega P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{t^4}$$

其中Ω为圆柱$\{(x,y,z)|x^2+y^2\le t^2, z\in[0,1]\}$的外表面，方向取外侧

8. 设$f(x,y,z)$为$\mathbb{R}^3$上的连续函数，计算

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{3}{4\pi r^3}\iiint_{x^2+y^2+z^2\le r^2} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

9. 计算

$$I(y)=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(2xy)\mathrm{d}x$$

10. 设$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\mathbb{R}^3$上有连续一阶偏导数，$\Sigma\subset\mathbb{R}^3$是一个光滑闭曲面，曲面面积记为$S$，$L_+$是其光滑边界正向闭曲线。试证明

$$
\begin{aligned}
I &= \left|\int_{L_+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z\right| \\
&\leq \max_{(x,y,z)\in\Sigma} \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)^2} \bullet S
\end{aligned}
$$