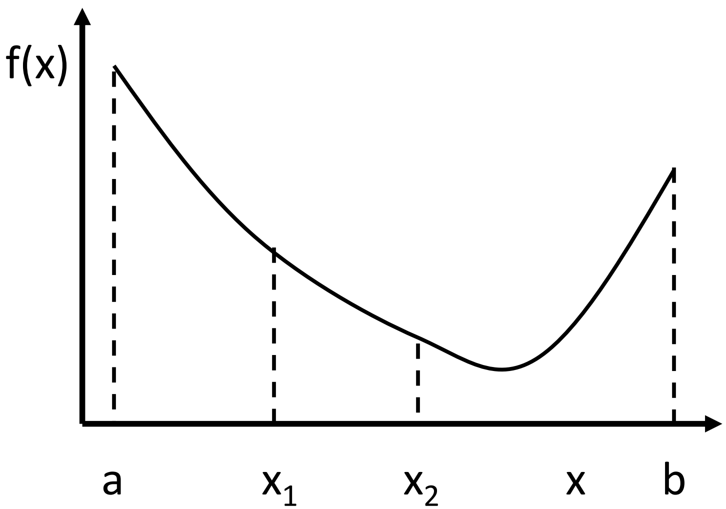
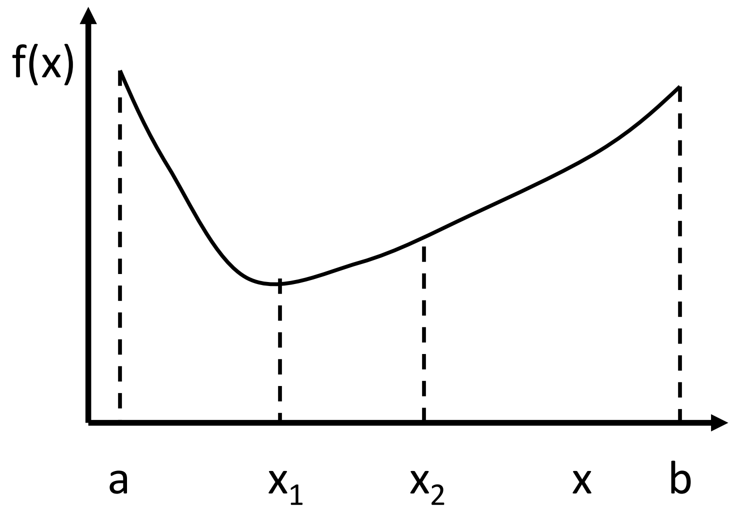
Metoda złotego podziału

Lemat: Jeżeli funkcja f(x) jest *unimodalna* (posiada tylko jedno minimum) w przedziale [a,b] to dla określenia podprzedziału, w którym leży punkt stacjonarny należy obliczyć wartość funkcji w *dwóch* punktach tego przedziału oprócz końców przedziału.





Jeżeli dla $a<x_1<x_2<b$ zachodzi $f(a)>f(x_1)$ i $f(x_1)<f(x_2)$ to minimum znajduje się pomiędzy a oraz x_2; jeżeli zachodzi $f(x_2)<f(x_1)$ i $f(x_2)<f(b)$ to minimum znajduje się pomiędzy x_1 i b. Te obserwacje stanowią podstawę zawężania przedziału, w którym zawarte jest minimum.

W metodzie złotego podziału chcemy żeby przedział był zawężany w tym samym stosunku α w każdej iteracji. Musi zatem zachodzić:

$$\frac{x_2 - a}{b - a} = \frac{b - x_1}{b - a} = \alpha \;\Rightarrow\; x_1 - a = b - x_2$$

Załóżmy, że minimum jest pomiędzy a i x_2. Wtedy mamy:

$$\frac{x_1 - a}{x_2 - a} = \alpha = -1 + \frac{1}{\alpha} \;\Rightarrow\; \alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618$$

Algorytm:

1. Oblicz: $x1 = b - \tau (b - a)$

   $x2 = a + \tau (b - a)$
2. Jeżeli $f(x1) < f(x2)$, to min znajduje się w „lewej części” i podstaw: $a = a$ $b = x2$
3. Jeżeli $f(x1) > f(x2)$, to min znajduje się w „prawej części” i podstaw: $a = x1$ $b = b$ 4.
4. Jeżeli $b - a \geq 2 \varepsilon$, to wróc do pkt. 1, wp $x^* = (b + a) / 2$ i zakończyć algorytm

Uwagi:

1. W każdej iteracji przedział poszukiwań jest zmniejszany o ok. 38.2%.
2. Jeden z punktów x1 lub x2 jest wykorzystywany w kolejnej iteracji. Stąd w każdej iteracji potrzebna jest tylko jedna dodatkowa ewaluacja funkcji celu.
3. Długość przedziału po n ewaluacjach funkcji celu jest zadana wzorem:

$$L_n = 0{,}618^{(n-1)} L_1$$

gdzie: L1 – długość początkowa przedziału

Logarytmując to wyrażenie, można policzyć minimalną liczbę ewaluacji funkcji n, potrzebną do uzyskania dokładności L_n, tj.

$$n = sufit\left(\frac{\ln(L_n / L_1)}{\ln(0,618)} + 1\right)$$

Zlokalizować minimum funkcji $e^x - x$ w przedziale $[-1,1]$