Metody gradientowe oraz szacowania przedziału

- dr Łukasz Pietrzak
- IMSI
- lukasz.pietrzak@p.lodz.pl

Politechnika Łódzka

Metoda gradientu prostego

Jedna z najprostszych metod wykorzystująca poszukiwanie na kierunku z wykorzystaniem gradientu funkcji celu.

Założenia początkowe:

- funkcja celu jest przynajmniej klasy C1,
- funkcja celu jest wypukła w całym przedziale poszukiwań minimum

Dodatkowo:

- wykonujemy poszukiwanie minimum funkcji celu, czyli wykorzystujemy -$\nabla f(x)$
- Zakładamy stałość długości kroku w kolejnych iteracjach lub jego zmienność (2 warianty metody)

Metoda gradientu prostego

Określenie kierunku

W metodzie gradientu prostego kierunek poszukiwania minimum funkcji celu w danym punkcie ze zbioru D (rozwiązań dopuszczalnych) określamy według następującego wzoru:

$$d_i = -\nabla f(x_i), i = 1,2,3, \ldots$$

gdzie i jest numerem iteracji

Metoda gradientu prostego

W kolejnych iteracjach otrzymujemy argumenty przybliżające nas do poszukiwanego rozwiązania:

$$x_{i+1} = x_i - \lambda_i d_i$$

Gdzie: λ_i jest długością kroku w danej iteracji

x_i jest w przypadku pierwszej iteracji x0 czyli wybranym punktem startu

d_i dla pierwszej iteracji jest $d_0 = -\nabla f(x_0)$

Metoda gradientu prostego

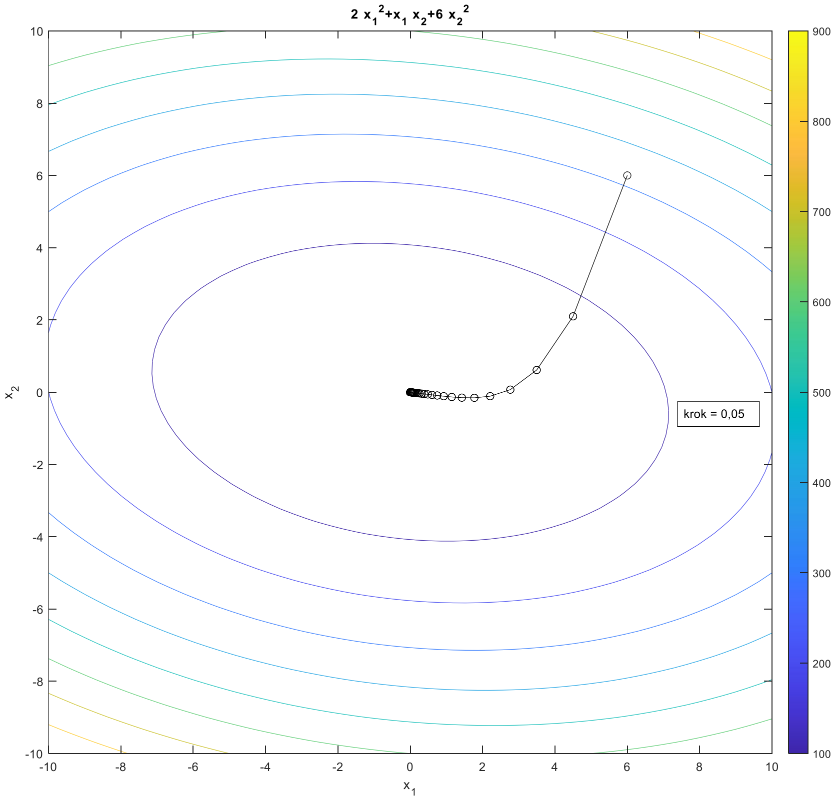
W przypadku omawianej metody istnieją dwa możliwe przypadki:

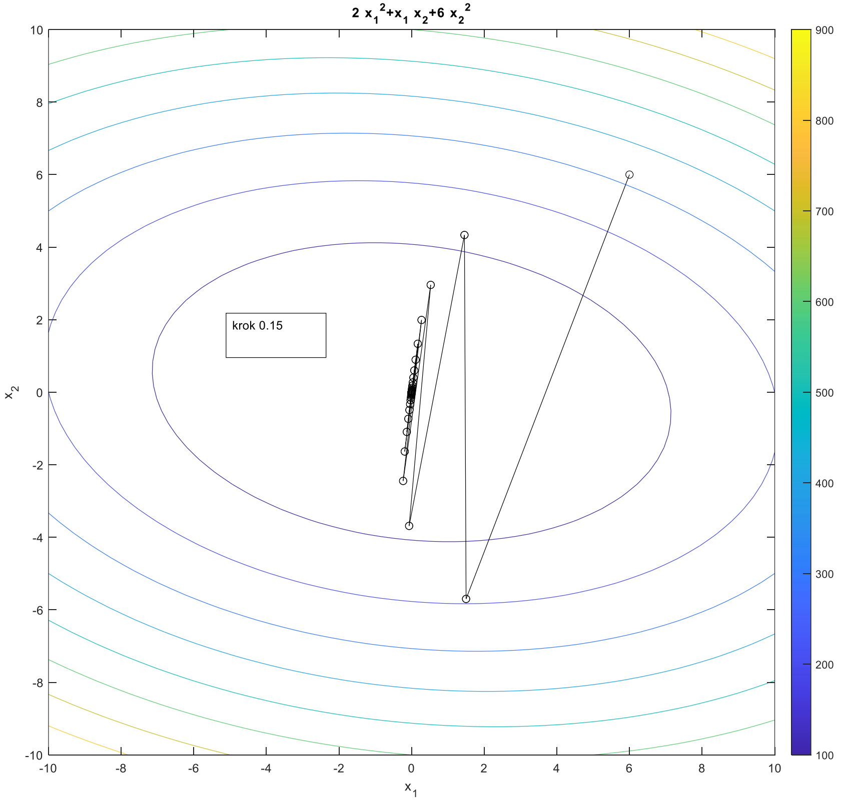
- W kolejnych iteracjach posługujemy się stałą długością kroku λ_i
- Możemy modyfikować długość kroku w zależności od otrzymanego rezultatu – wartości funkcji celu dla uzyskanego argumentu x_i. Minimum funkcji celu znajduje się w punkcie styczności kierunku ustalonego w danej iteracji do poziomicy funkcji celu.

Należy nadmienić, że wariant metody ze stałym krokiem nie zawsze prowadzi do znalezienia rozwiązania a sama metoda w tym wariancie nie zawsze będzie zbieżna.

Metoda gradientu prostego

Często od doboru kroku zależy osiągnięcie rozwiązania, jak i działanie samej metody. Na załączonych obrazach widać wpływ zmiany długości kroku na działanie metody:

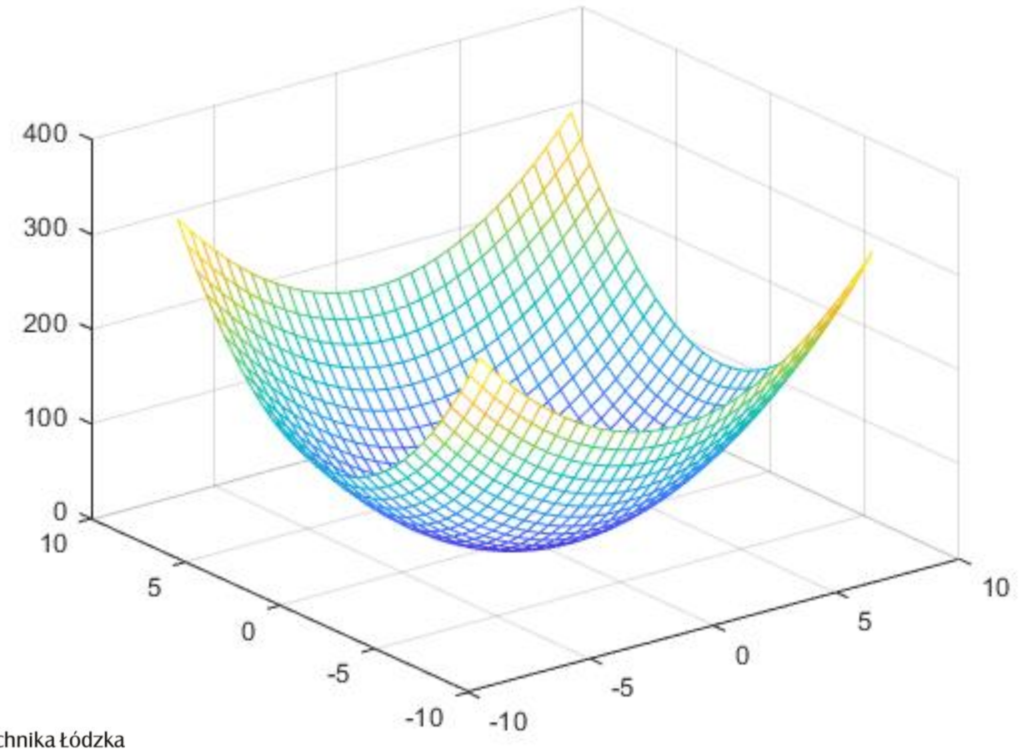


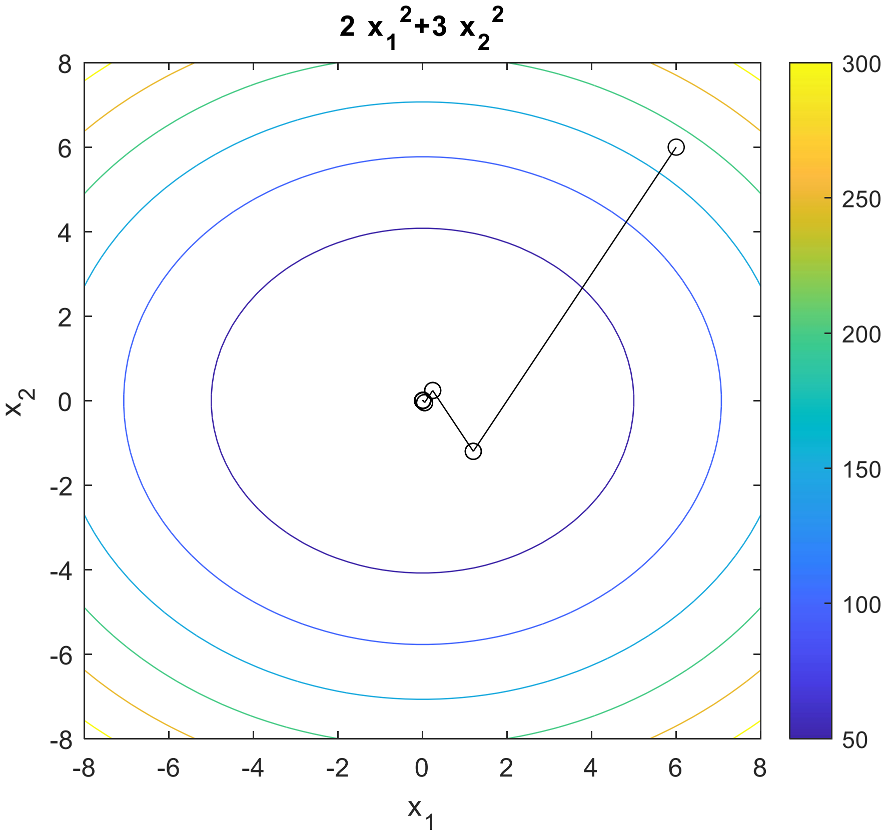


Metoda gradientu prostego - przykład

Posłużymy się metodą gradientu prostego dla funkcji celu postaci:

$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2$





n=7
f=1.1796e
-09
Xopt=
1.0e-04 *
0.1536
0.1536

Metoda gradientu prostego - przykład

Policzmy kolejne przybliżenia:

$$d_i = -\nabla f(x_1, x_2) = -\begin{bmatrix} 4x_1 \\ 6x_2 \end{bmatrix}$$

Kolejne argumenty funkcji celu dla punktu startu (6,6), długości kroku 0.2 i dokładności 0.001:

X1 = $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} - 0.2 \begin{bmatrix} 24 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ -1.2 \end{bmatrix}$; f(X1)=7.2

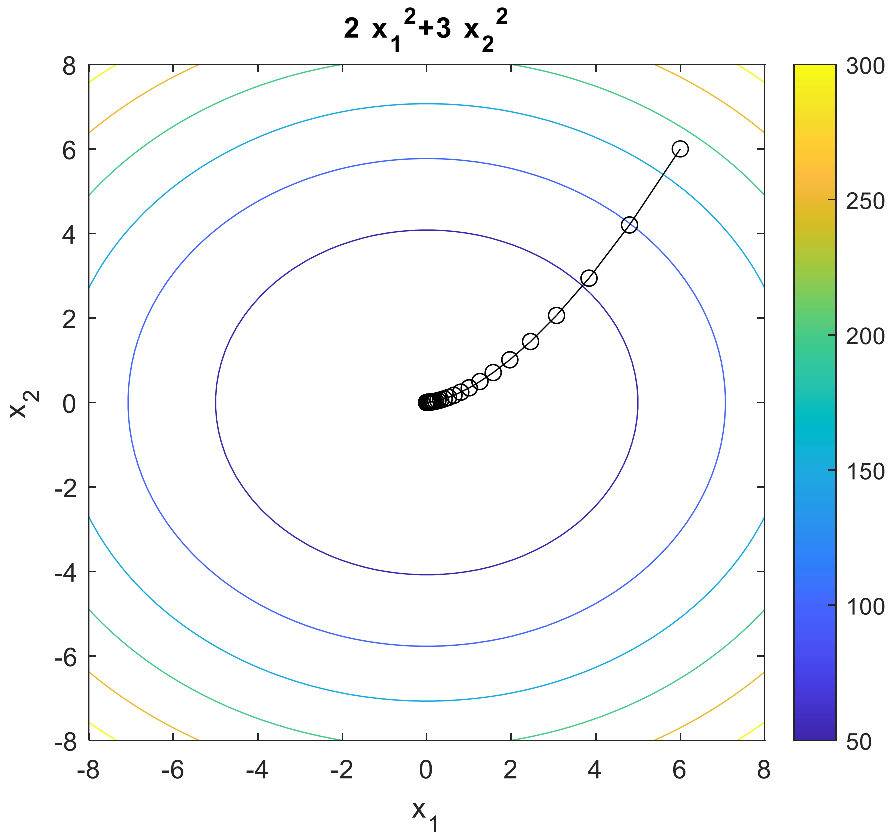
X2 = $\begin{bmatrix} 1.2 \\ -1.2 \end{bmatrix} - 0.2 \begin{bmatrix} 4.8 \\ -7.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.24 \\ 0.24 \end{bmatrix}$; f(X2)= 0.2880

Metoda gradientu prostego - przykład

X3 = $\begin{bmatrix} 0.24 \\ 0.24 \end{bmatrix} - 0.2 \begin{bmatrix} 0.96 \\ 1.44 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.048 \\ -0.048 \end{bmatrix}$; f(X3)= 0.0115

X4 = $\begin{bmatrix} 0.0480 \\ -0.0480 \end{bmatrix} - 0.2 \begin{bmatrix} 0.192 \\ -0.288 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0096 \\ 0.0096 \end{bmatrix}$; f(X4)= 4.6080e-04

Metoda gradientu prostego - przykład



n=46
F(xopt) =
5.5949e-08
xopt =
1.0e-03 *

0.1673
0.0003

Metoda Newtona Raphsona

W metodzie Newtona do wyznaczenia kierunku poszukiwań wykorzystuje się gradient funkcji oraz Hessian – macierz drugich pochodnych. Metoda ta jest bardzo szybko zbieżna dla funkcji kwadratowych. Jej wadą jest rozbieżności dla niektórych funkcji i punktów początkowych oraz konieczność liczenia i odwracania Hessianu.

Metoda Newtona Raphsona

- **Oznaczenia:**
- x_0 – pierwsze przybliżenie rozwiązania (punkt startowy)
- x_i – i-te przybliżenie rozwiązania
- H – macierz drugich pochodnych (Hessian) –

  $H = \nabla^2 f(x_i)$

ε – wymagana dokładność

Metoda Newtona Raphsona

- **Algorytm:**
  1. Ustal i:=0, x_0, ε > 0
  2. Sprawdź, czy punkt x_i spełnia kryterium stopu – jeśli $|\nabla^2 f(x_i)|^2 \leq \varepsilon$ to x_i jest rozwiązaniem
  3. Wyznacz kolejne przybliżenie rozwiązania $x_{i+1}=x_i+\lambda_i d_i$, gdzie

     - $d_i:=-H^{-1}(x_i)\nabla f(x_i)$ jest kierunkiem poprawy,

     - $H^{-1}(x_i)$ jest macierzą odwrotną do macierzy drugich pochodnych w punkcie x_i, natomiast $\lambda_i>0$ to długość kroku minimalizująca jednowymiarową funkcję

       $f(\lambda_i)=f(x_i + \lambda_i d_i)$

Metoda Newtona Raphsona

4. i:=i+1
5. Idź do punktu 2.

Uzupełnienie do met. Newtona

Wzór:

$A^{-1}=(A^D)^T \cdot 1/\det(A)$

gdzie:

A^{-1} - macierz odwrotna

A^D - macierz dopełnień algebraicznych

$(A^D)^T$ - macierz dołączona - czyli transponowana z macierz dopełnień algebraicznych

det(A) - wyznacznik macierzy

MACIERZ MUSI BYĆ NIEOSOBLIWA CZYLI $\det(A)\neq 0$!!!

Jak działa algorytm w praktyce?

Poszukujemy minimum bez ograniczeń funkcji:

F(x_1,x_2)=$4x_1^3 + 2x_1x_2^4$

1. Wybieramy punkt startowy i określamy wymaganą dokładność :

x0 = [1, 1]; ε = 0,2

Jak działa algorytm w praktyce?

By przejść do punktu 2 i sprawdzić warunek stopu,

$$|\nabla^2 f(x_i)|^2 \leq \varepsilon$$

musimy policzyć:

$$\nabla^2 f(x_i)$$

A dokładniej Hessian czyli…

MACIERZ DRUGICH POCHODNYCH

Obliczanie pochodnych cząstkowych

Pierwsze pochodne

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = 12x_1^2 + 2x_2^4$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = 12x_1 x_2^3$$

Drugie pochodne

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 x_1} = 24x_1$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2 x_2} = 24x_1\, x_2$$

Politechnika Łódzka

Obliczanie pochodnych cząstkowych

Pochodne mieszane:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2} = 8x_2^3 = \frac{\partial^2}{\partial x_2 x_1}$$

Hesjan

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_2 x_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24x_1 & 8x_2^3 \\ 8x_2^3 & 24x_1\, x_2 \end{bmatrix}$$

Hesjan

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_2 x_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24x_1 & 8x_2^3 \\ 8x_2^3 & 24x_1\ x_2 \end{bmatrix}$$

Czyli przechodzimy do punktu 2

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 24x_1 & 8x_2^3 \\ 8x_2^3 & 24x_1\ x_2 \end{bmatrix};$$ x0 = [1, 1]

Czyli:

$$H(x_0) = \begin{bmatrix} 24 & 8 \\ 8 & 24 \end{bmatrix}$$

Policzyliśmy Hesjan w punkcie x0

Punkt 2 cd.

Sprawdź, czy punkt x_i spełnia kryterium stopu – jeśli $|\nabla^2 f(x_i)|^2 \leq \varepsilon$ to x_i jest rozwiązaniem

$$|H| = 262144 > \varepsilon$$

Czyli nie jest spełnione kryterium stopu, więc możemy przejść do punktu 3

Punkt 3

Wyznacz kolejne przybliżenie rozwiązania $x_{i+1}=x_i+\lambda_i d_i$; *gdzie* $d_i:=-H^{-1}(x_i)\nabla f(x_i)$

Czyli:

$$d_0 = -1 * \begin{bmatrix} 24 & 8 \\ 8 & 24 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 14 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Teraz musimy policzyć macierz dopełnień algebraicznych, by określić H^{-1}

Punkt 3

Macierz dopełnień

$$H_d = \begin{bmatrix} 24 & -8 \\ -8 & 24 \end{bmatrix}$$

Transponowana macierz dopełnień algebraicznych:

$$H_d^T = \begin{bmatrix} 24 & -8 \\ -8 & 24 \end{bmatrix}$$

Punkt 3

I dochodzimy do obliczenia H^{-1} :

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 0.046875 & -0.015625 \\ -0.015625 & 0.046875 \end{bmatrix}$$

A następnie naszego kierunku poprawy w pkt. x0

$$\boxed{d_0 = -1 * \begin{bmatrix} 24 & 8 \\ 8 & 24 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 14 \\ 12 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -0.4688 \\ -0.3438 \end{bmatrix}}}$$

Punkt 3

Teraz chcemy znaleźć punkt x1; sposób analogiczny jak w metodzie Powell'a, czyli:

- Argumentem funkcji jest teraz $(x_0 + \lambda_1 d_1)$

$F(x_0 + \lambda_1 d_1)=(-0,033*\lambda_1^5-1,441*\lambda_1^4-1,665*\lambda_1^3+$

$+1,934*\lambda_1^2+6,56*\lambda_1+4$

Punkt 3

Musimy znaleźć wartość λ_1 minimalizującą funkcję na wyznaczonym kierunku.

Czyli zminimalizować funkcję o argumencie λ_1

$$\frac{d}{d\lambda}\left(F(x_0 + \lambda_1 d_1)\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = \ldots\ldots$$

UWAGA

I tutaj warto zastanowić się co dalej, bo gdy chcemy wyliczyć λ dla wielomianu 4-tego (!!!) stopnia, wtedy mamy szereg rozwiązań:

-22.9505 + 3.1090i

-22.9505 - 3.1090i

11.1640

-0.0020 + 0.0812i

-0.0020 - 0.0812i

Na nasze szczęście jeden jedyny „nadaje się”

Politechnika Łódzka

Otrzymujemy x_1:

$$x_1 = \begin{bmatrix} -4.4568 \\ -3.0018 \end{bmatrix}$$

I sprawdzamy po raz kolejny kryterium stopu oraz porównujemy wartości funkcji:

$F(x_1)=-1077,84$

Szacowanie przedziału poszukiwań – optymalizacja funkcji jednoargumentowej

W przypadku poszukiwania minimum funkcji zależnej od jednego argumentu, pomocne jest początkowe oszacowanie długości przedziału.

Przedział jest dobrany tak, by spełniony był **warunek unimodalności funkcji** w wybranym przedziale.

Dla zadań ze ściśle zdefiniowanym przedziałem konieczność szacowania nie występuje.

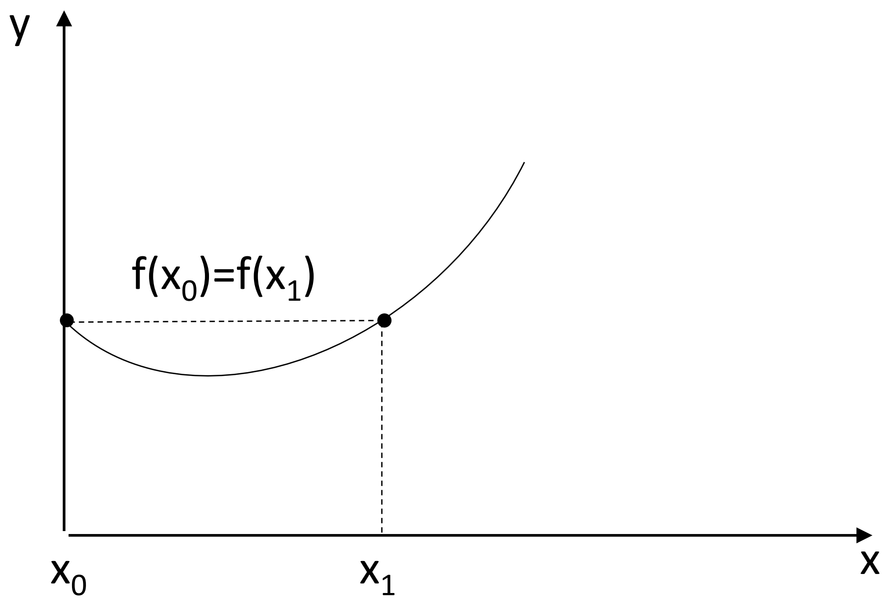
Szacowanie przedziału poszukiwań – metoda ekspansji

Metoda służy do wstępnego oszacowania przedziału poszukiwań minimum dla unimodalnej funkcji celu.

Rozpoczynamy od wyznaczenia wartości funkcji celu w dwóch punktach $x_0=0$ oraz $x_1 > 0$. W zależności od wartości funkcji w tych punktach możemy napotkać trzy przypadki:

Szacowanie przedziału poszukiwań – metoda ekspansji

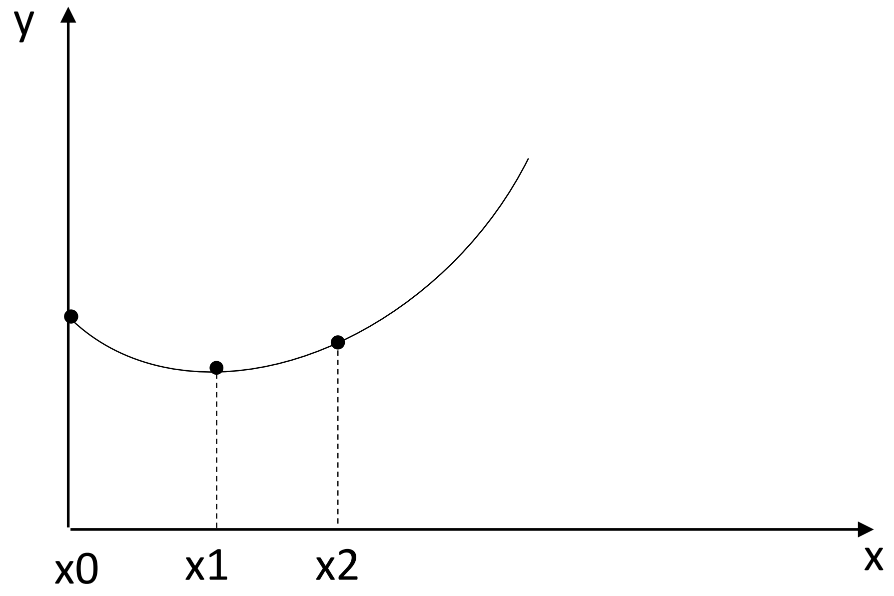
1. **$f(x_0)=f(x_1)$** – minimum funkcji celu znajduje się w przedziale $[x_0,x_1]$ co prowadzi do zakończenia poszukiwań właściwego przedziału



Szacowanie przedziału poszukiwań – metoda ekspansji

2. $f(x_1)<f(x_0)$ – kierunek w którym dokonujemy poszukiwania jest właściwy i następny krok także wykonujemy w tym kierunku.

Kolejny punkt wybieramy, wykorzystując zapis: $x_2=\varepsilon x_1$, gdzie ε jest współczynnikiem ekspansji $\varepsilon>1$. W momencie gdy $f(x_2)\geq f(x_1)$, kończymy poszukiwania, a poszukiwane minimum znajduje się w przedziale $[x_0,x_2]$;



Szacowanie przedziału poszukiwań – metoda ekspansji

Jeżeli **$f(x_2)<f(x_1)$** wtedy kontynuujemy szukanie w danym kierunku, a kolejne punkty wyznaczane są za pomocą:

$$x_{(i+1)}= \varepsilon_i x_{(i)}$$

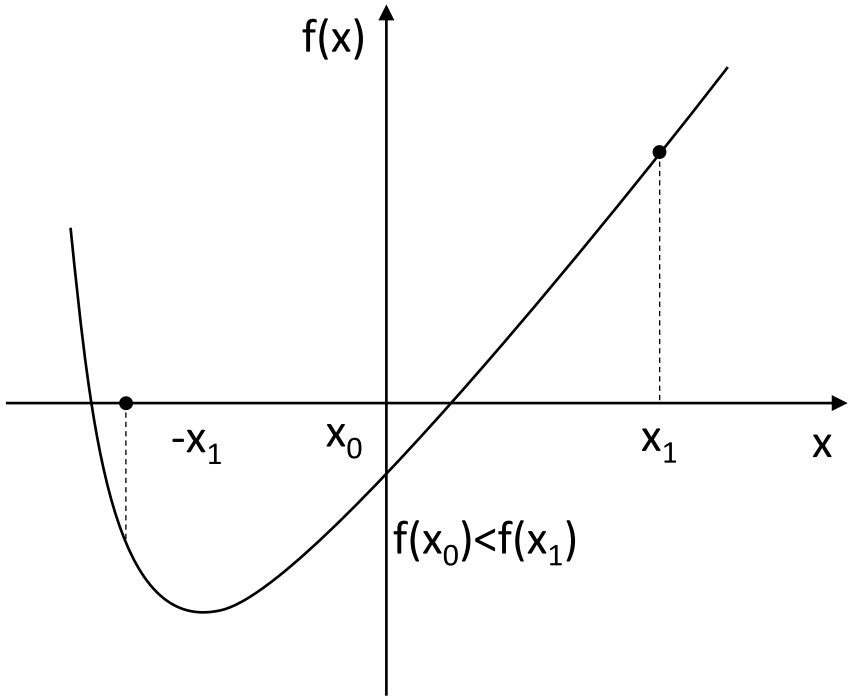
Gdzie i =1, 2, 3,….. i oznacza to kolejne kroki;

Kończymy obliczenia gdy $f(x_{i+1})\geq f(x_i)$, co oznacza że minimum znajduje się w przedziale $[x_{i-1}, x_{i+1}]$

Politechnika Łódzka

Szacowanie przedziału poszukiwań – metoda ekspansji

3. Jeżeli **$f(x_1)>f(x_0)$** to oznacza, że minimum funkcji znajduje się w lewo od punktu $x_0 = 0$. Wtedy należy podstawić $-x_1$ zamiast x_1. Gdy zachodzi nierówność $f(x_1) \geq f(x_0)$ to następuje zakończenie poszukiwań, a minimum znajduje się w przedziale $[-x_1, x_1]$



Szacowanie przedziału poszukiwań – metoda ekspansji

Jeśli nierówność $f(x_1) \geq f(x_0)$ nie jest spełniona, to kontynuujemy poszukiwania według omówionego wcześniej schematu czyli $x_{i+1} = \varepsilon_i x_{1.}$ Różnica tkwi w poruszaniu się w lewo, co skutkuje końcowym przedziałem w postaci $[x_{i-1}, x_{i+1}]$

Politechnika Łódzka

Metoda ekspansji - przykład

Zastosujemy metodę ekspansji dla funkcji:

$$F(x)=-x^4 - 2x^2 + x - 5$$

a) Ustalamy punkt $x_0 = 0$ i określamy początkowy krok $x_1 = 2,5$ i obieramy współczynnik ekspansji $\varepsilon = 2$
b) Obliczamy wartości funkcji dla x_0 i x_1 czyli f(0) = -5 oraz f(2,5)=-24.0625
c) Sprawdzamy spełnienie któregoś z możliwych przypadków – w przypadku badanym spełniona jest nierówność f(2,5)>f(0) czyli $f(x_1) > f(x_0)$ co zgadza się z warunkiem numer 3
d) Spełnienie nierówności z przypadku 3 skutkuje poszukiwaniem minimum po lewej stronie od x_0

Metoda ekspansji - przykład

e) Podstawiamy za $x_1 = -x_1$ czyli po podstawieniu $x_1 = -2,5$ i obliczamy wartość funkcji:

$$f(x_1) = f(-2,5) = 19.0625$$

I w rezultacie spełniona jest nierówność:

$$f(-2,5)>f(0)$$

f) Spełnienie powyższej nierówności implikuje koniec poszukiwań i oznacza że minimum leży w przedziale [-2,5;2,5]

Jeśli nie byłaby spełniona ostatnia nierówność, musielibyśmy poruszać się w wyznaczonym kierunku, wykorzystując współczynnik ekspansji.

Metoda ekspansji Boxa – Daviesa – Swanna

Stosujemy dla sytuacji, gdy mamy wstępną informację o położeniu minimum funkcji celu (np. obliczyliśmy minimum analitycznie lub mamy wykonany wykres i z niego jesteśmy w stanie orientacyjnie odczytać wartość).

Wtedy możemy zdecydować się na ustalenie granic wstępnego przedziału poszukiwań w otoczeniu innego punktu niż $x_0 = 0$.

Zmiana w stosunku do metody ekspansji polega na tym że:

Metoda ekspansji Boxa – Daviesa – Swanna

a) Rozpoczynamy z dowolnego punktu początkowego x_0 i wartość współczynnika ekspansji zawsze jest określona ε =2

b) Minimum funkcji celu może znajdować się po prawej jak i po lewej stronie od wybranego punktu – jest to powód by w tej metodzie testować w obu kierunkach osi

c) Kolejne punkty określone są według następującej zależności:

$$X_{i+1} = x_0 \pm \varepsilon_i \Delta x, \text{ gdzie } i = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Znak w równaniu zależy od kierunku testowania (lewo lub prawo):

Δx jest dowolne; i odpowiada numerowi iteracji

Politechnika Łódzka

Metoda ekspansji Boxa – Daviesa – Swanna

d) Długość kroku jest dwukrotnie większa czyli kolejne punkty (w następnych krokach) generowane są w sposób następujący:

$$x_{i+1} = x_0 + 2_i\Delta x \qquad i = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

Co widać, początkowo poruszamy się w prawo;

obliczenia wykonujemy dopóki gdy zajdzie nierówność:

$$f(x_{i+1}) \geq f(x_i)$$

Znaleziony w ten sposób punkt x_{i+1} określa *górną granicę* przedziału poszukiwań

Metoda ekspansji Boxa – Daviesa – Swanna

e) Dolną granicę przedziału poszukiwań określamy stosując tę samą zasadę, wykorzystując formułę:

$$x_{i+1} = x_0 - 2_i \Delta x \qquad i = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

Koniec poszukiwań następuje, gdy spełniona zostanie nierówność:

$$f(x_{i+1}) \geq f(x_i)$$

Wtedy lewy kraniec przedziału poszukiwań znajduje się w $x_{i+1.}$ W ten sposób określamy przedział poszukiwań funkcji celu jako przedział na końcach którego znajdują się wartości x znalezione w punktach d i e czyli podczas szukania w lewo i w prawo.

Metoda ekspansji Boxa – Daviesa – Swanna - przykład

Chcemy wyznaczyć przedział [a,b] funkcji, podczas szukania minimum, dla funkcji:

$$F(x)=2x^2 - 8x+6$$

1. Ustalamy początkowy punkt jako x_0=1, niech $\Delta x = 1$, $F(x_0) =0$; Wartość iteratora ustalamy na i=1,wykonujemy obliczenia:

$$x_1 = x_0 + 2_1\Delta x = 3$$

2. $f(x_1) = 20$ i w związku z tym zachodzi nierówność

$$f(x_1) > f(x_0)$$

Czyli znaleźliśmy prawy koniec przedziału czyli , zatem musimy zająć się poszukiwaniem lewego krańca przedziału

Metoda ekspansji Boxa – Daviesa – Swanna - przykład

4. Określamy lewy kraniec przedziału czyli a. Poruszamy się w lewo od punktu x_0, z wartością iteracji 0 czyli:

$$x_1 = x_0 - 2_0 \Delta x = -1$$

Następnie obliczamy wartość funkcji w tym punkcie i uzyskujemy

$$f(x_1) = 16$$

Czyli spełniona jest nierówność:

$f(x_1) > f(x_0)$, czyli lewy kraniec przedziału wynosi $a = x_1 = -1$

Zatem znaleźliśmy granice przedziału poszukiwań i wynoszą one **[-1,3]**

Poszukiwanie minimum funkcji celu w przedziale liczbowym

Poszukiwanie minimum w danym przedziale [a, b] stosujemy **często w optymalizacji wielowymiarowej**.

Stosowane są one do określenia długości kroku na danym kierunku poszukiwań, tak by samo poszukiwanie ekstremum było bardziej efektywne.

Założenie służące poszukiwaniu ekstremum funkcji jednej zmiennej w danym przedziale jest w tym wypadku niezmiernie ważne i w tym wypadku dotyczy ***unimodalności funkcji celu w danym przedziale.***

Poszukiwanie minimum funkcji celu w przedziale liczbowym

Jeśli założenie o unimodalności jest spełnione w pewnym przedziale [a, b], to do określenia podprzedziału, w którym leży minimum badanej funkcji, wystarczy obliczyć wartości funkcji w dwóch punktach wewnętrznych tego przedziału: c i d, takich że c <d.

Jeżeli f(c) > f(d), wtedy minimum funkcji znajduje się na prawo od punktu c i przedział poszukiwań zawężamy od lewej, do przedziału [c, b].

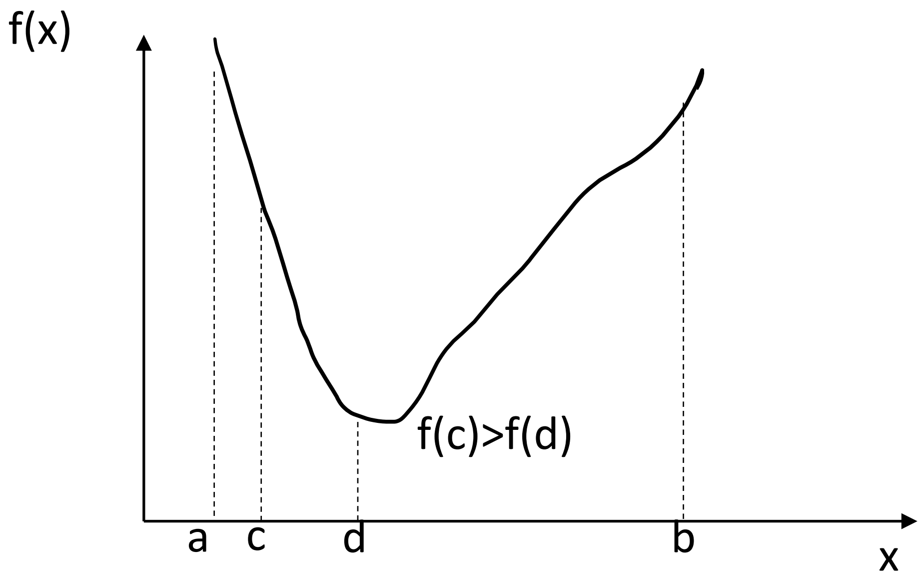
Jeśli f(c) < f(d), to minimum funkcji znajduje się na lewo od punktu d i przedział zawężamy do [a,d].

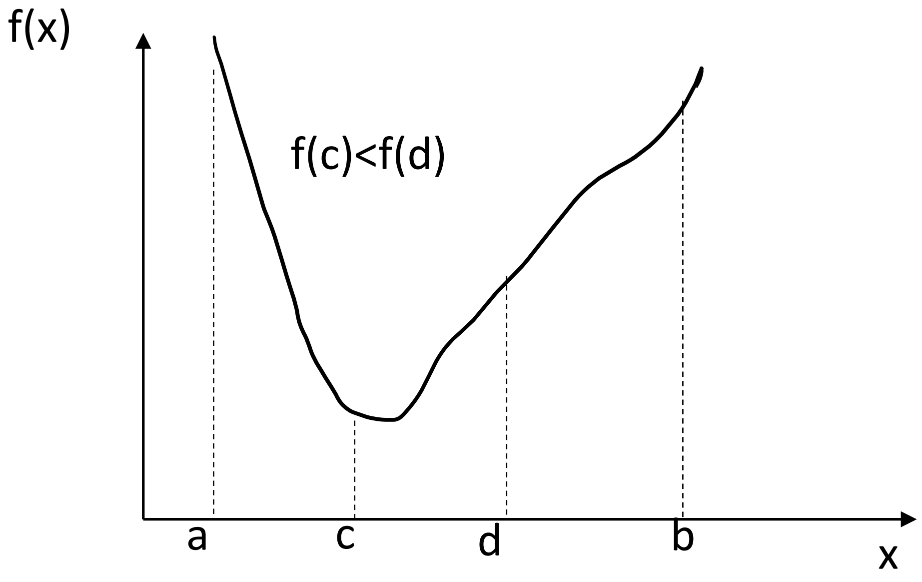
Poszukiwanie minimum funkcji celu w przedziale liczbowym

Żeby określić optymalną długość kroku, zawężamy przedział wykorzystując omówioną metodę określenia położenia minimum funkcji.

W każdym z kolejnych kroków położenie minimum funkcji celu znajduje się w zawężonym przedziale.

Poszukiwanie minimum funkcji celu w przedziale liczbowym





Możliwe przypadki lokalizacji podprzedziału

Schemat poszukiwania ekstremum f. 2 zmiennych

1. Liczymy pochodne cząstkowe I-go rzędu
2. Przyrównujemy te pochodne do zera, tworząc układ równań
3. Układ rozwiązujemy, mamy rozwiązania (o ile istnieją)
4. Każde rozwiązanie to tzw. „punkt stacjonarny”, czyli taki, w którym może (ale nie musi) być ekstremum. Wypisujemy je (nie należące do dziedziny oczywiście odrzucamy)

Schemat poszukiwania ekstremum funkcji wielu zmiennych na przykładzie funkcji dwóch zmiennych

Badanie istnienia ekstremów w punktach stacjonarnych

1) Liczymy pochodne cząstkowe drugiego rzędu;
   (uwaga: pochodne mieszane powinny wyjść takie same)
2) Z pochodnych cząstkowych drugiego rzędu tworzymy wyznacznik
3) Do utworzonego wyznacznika wstawiamy jeden po drugim współrzędne kolejnych punktów stacjonarnych
   - jeśli $W(P_1)$ > 0 wtedy w punkcie P_1funkcja osiąga ekstremum
   - jeśli $W(P_1)$ < 0 wtedy w punkcie P_1funkcja nie osiąga ekstremum
   - jeśli $W(P_1)$ = 0 nie możemy rozstrzygnąć, czy w punkcie P_1 funkcja osiąga ekstremum
4) Zajmujemy się już tylko punktami, w których funkcja osiągnęła ekstremum; Określamy, czy są to minima, czy maksima lokalne.

Schemat poszukiwania ekstremum funkcji wielu zmiennych na przykładzie funkcji dwóch zmiennych

Ad.3

$$W(P_1)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_1) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_1) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_1) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_1) \end{vmatrix}$$

Schemat poszukiwania ekstremum funkcji wielu zmiennych na przykładzie funkcji dwóch zmiennych

Ad 4

$$jeśli\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(P_1) > 0 - wP_1 mamy MINIMUM$$
$$jeśli\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(P_1) < 0 - wP_1 mamy MAKSIMUM$$