Capítulo 7: Transformaciones Lineales

7.1. Definición y Ejemplos:

14.- Veamos si la siguiente transformación es lineal

$$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

Sol Sea $y \in \mathbb{R}^n$ $\ni$ $y^t = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$. Entonces

$$T(x+y) = T\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} = (x_1+y_1) + (x_2+y_2) + \dots + (x_n+y_n)$$

$$= (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

$$= \underline{T(x) + T(y)}$$

38. $T: C'[0,1] \to \mathbb{R}$ $Tf(x) = f($

Sol. Análogamente al ejercicio anterior, Sea $g \in C'[0,1]$. Entonces

$$T(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x) + g(x))\Big|_{x=\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{d}{dx}(f(x))\Big|_{x=\frac{1}{2}} + \frac{d}{dx}(g(x))\Big|_{x=\frac{1}{2}}$$

Esto último porque el operador de defirenciación es lineal

$$T(f(x) + g(x)) = T(f(x)) + \underline{T(g(x))}$$

16

De los problemas siguientes encuentre el núcleo, imágen, rango y nulidad de la transformación lineal dada.

6 - $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix}$

Sol:

•) Imagen: Hallemos la imagen o mapeo de los vectores canónicos de $\mathbb{R}^4$ para hallar la base de la imagen

$T(1,0,0,0) = (1,0)$; $T(0,1,0,0) = (0,1)$; $T(0,0,1,0) = (1,0)$; $T(0,0,0,1) = (0,1)$

Veamos la representación matricial de $Im(T)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, con $\mathbb{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ y $\dim(\mathbb{B}) = 2$ implica que

$$Im(T) = gen\{(1,0),(0,1)\}$$

•) Rango: De lo anterior, es obvio que

$$\rho(T) = \cancel{rank}(T) = 2$$

•) Núcleo y Nulidad: Hallemos $v = (x, y, z, w)$ ∏ $T(v) = 0$

$$T(v) = \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x+z=0 \\ y+w=0 \end{matrix} \Rightarrow$$

Escogiendo a x y y como variables independientes o libres

$$\begin{matrix} z = -x \\ w = -y \end{matrix}$$

Fijemos $x = -1$ y $y = -1$ y podríamos obtener una base, a pesar de ser evidente la respuesta, hagámoslo explícitamente

$$T(u) = \begin{pmatrix} x-x \\ y-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \quad Ker(T) = \{0\} \quad y \quad \nu(T) = 0$

Además, por un teorema, vemos que

$$\dim(Im(T)) + \dim(Ker(T)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2).$$

8- $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \; T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x+y$

•) Imagen: Tomemos o mapeemos la base de $\mathbb{R}^2$

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Así

$$T(1,0) = 1 \quad \& \quad T(0,1) = 1$$

cuya representación matricial es

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, con $\mathcal{B} = \{(1)\}$

$$Im(T) = gen\{1\}$$

•) Rango: De la base de la imagen

$$rank(T) = \rho(T) = 1$$

•) Nulidad y Espacio Nulo: de un teorema se sabe que

$$\dim(IM(T)) + \dim(nuc(T)) = \dim(\mathbb{R})$$
$$\Rightarrow \dim(nuc(T)) + 1 = 1$$
$$\Rightarrow \dim(nuc(T)) = 0$$
$$\therefore \nu(T) = 0$$

Y

$$Nuc(T) = \{0\}$$