1

Capítulo 5:

Sección 5.1: Espacios vectoriales.

31 - Demuestre que el conjunto de números reales positivos forma un espacio vectorial bajo las operaciones:

$$x+y = xy \quad \& \quad \alpha x = x^{\alpha}$$

Dem: Por hipótesis $V=\mathbb{R}$, veamos si cumple los diez axiomas.

i) Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Por los axiomas de los reales se sabe que es real, es decir, $xy \in \mathbb{R}$

$$\therefore x+y \in \mathbb{R}$$

ii) Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(x+y)+z = xy+z = (xy)z = x(yz) = x+yz = x+(y+z)$$

iii) Exhibimos al elemento identidad del grupo $(\mathbb{R}, \cdot)$ 1, $\cdot$: multiplicación usual.

$$x+1 = x \cdot 1 = x = 1 \cdot x = 1+x$$

donde $x \cdot 1 = 1 \cdot x$ se satisface por el axioma de la multiplicación de los reales y la identidad.

iv) Si existe $x \in \mathbb{R}$ también un inverso absoluto $0 \in (\mathbb{R}, +)$

$$x+0 = x \cdot 0 = 0$$

v) Sean $x, y \in \mathbb{R}$, de los axiomas de los reales se sabe que

$$xy = yx, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

entonces

$$x+y = xy = yx = y+x$$

vi) Veamos con la serie de taylor de x^{α} y la función Gamma que $\alpha x \in \mathbb{R}$.

$$x^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^{\alpha})^{(n)}}{n!}\Big|_{x=1} \cdot (x-1)^{n}$$

Nos quedarán factores del tipo

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)}, \quad n, \beta \in \mathbb{N}$$

Se sabe que si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\Gamma(\alpha+1) \in \mathbb{R}$ así como el polinomio $(x-1)^{n} \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$\therefore \alpha x \in \mathbb{R}.$$

②

vii) Sean $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha(x+y) = (x+y)^{\alpha} = (xy)^{\alpha} = x^{\alpha}y^{\alpha} = x^{\alpha}+y^{\alpha} = \alpha x + \alpha y$$

viii) Sean $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha+\beta)x = x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha}x^{\beta} = x^{\alpha}+x^{\beta} = \alpha x + \beta x$$

ix) Sean $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha(\beta x) = \alpha(x^{\beta}) = x^{\alpha\beta} = (\alpha\beta x)$$

x) Exhibimos al elemento identidad de $(\mathbb{R}, \circ)$ con la multiplicación de $\mathbb{R}$ usual.

$$1 \cdot x = x^{1} = x$$

Se cumplen los diez 10 axiomas.

$\therefore V = \mathbb{R}$ es un espacio vectoral. ▨

③

13 - El conjunto de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

con las operaciones de suma de matrices y multiplicación por escalar usual.
Sol: El conjunto V, con α, β escalares, de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

no forma un espacio vectorial puesto que no cumple los axiomas i,

i) Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ escalares

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \delta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha+\gamma \\ \beta+\delta & 2 \end{pmatrix} \notin V$$

$$\neq \begin{pmatrix} 2 & \alpha+\gamma \\ \beta+\delta & 1 \end{pmatrix}$$

ya que tenemos $1 \neq 2$. Es el único axioma que no se cumple extrictamente.

$\therefore V$ no es un espacio vectorial. ∎

5.2 : Subespacios Vectoriales.

10- $V = M_{mn}$: $H = \{T : T$ es triangular inferior$\}$

Dem: Probemos que H es subespacio vectorial de V.

Las matrices triangulares son una forma especial de matrices cuadradas, entonces

$$T \in M_{mm}$$

donde T es de la forma

$$T = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & l_{m3} & \cdots & l_{mm} \end{pmatrix} \in T_i = H$$

i) Sean T_1 y T_2 matrices triangulares inferiores

$$T_1 + T_2 = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & l_{m3} & \cdots & l_{mm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{m1} & K_{m2} & K_{m3} & \cdots & K_{mm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} l_{11}+K_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21}+K_{21} & l_{22}+K_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31}+K_{31} & l_{32}+K_{32} & l_{33}+K_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1}+K_{m1} & l_{m2}+K_{m2} & l_{m3}+K_{m3} & \cdots & l_{mm}+K_{mm} \end{pmatrix} \in H$$

ii) Se $T \in H$ y α un escalar

$$\alpha T = \alpha \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & l_{m3} & \cdots & l_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha l_{11} & 0 & 0 & & 0 \\ \alpha l_{21} & \alpha l_{22} & 0 & & 0 \\ \alpha l_{31} & \alpha l_{32} & \alpha l_{33} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha l_{m1} & \alpha l_{m2} & \alpha l_{m3} & \cdots & \alpha l_{mm} \end{pmatrix} \in H$$

$\therefore H$ es un subespacio vectorial de V. ▨

28) $V = C[a,b]$: $H = \{ f \in C[a,b] : \int_a^b f(x)\,dx = 1 \}$

Dem:

i) Sean $f, g \in H$ ó $f, g \in C[a,b]$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
$$= 1 + 1$$
$$= 2$$

Vemos que no se cumple la condición ya que si bien

$$(f+g) \in C[a,b]$$

no se cumple que

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx \neq 1$$

ii) Sean $f \in H$ y $\alpha \in ₵$

$$\int_a^b (\alpha f(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx = \alpha(1) = \alpha \neq 1$$

$\therefore H$ no es subespacio vectorial de V. ▨

⑥

Sección 5.3: Combinación Lineal y Espacio generado.

10 - Veamos si el siguiente conjunto genera $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = v_3$$

Sol: Veamos si $\forall v \in \mathbb{R}^3$ se puede expresar como combinación lineal del conjunto anterior, es decir, hallemos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tq

$$\vec{v} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3$$

Sea

$$v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} ; \ x, y, z \in \mathbb{R}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&x\\1&1&0&y\\1&1&1&z\end{array}\right)$$

Luego

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&x\\1&1&0&y\\1&1&1&z\end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&x\\0&1&0&y-x\\0&1&1&z-x\end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&x\\0&1&0&y-x\\0&0&1&z-y\end{array}\right)$$

Vemos que

$$a = x, \quad b = y-x \quad \& \quad c = z-y$$

$\therefore v_1, v_2, v_3$ generan $\mathbb{R}^3$. ✓

34 - Demuestre que dos polinomios de grado menor o igual a dos, no pueden generar P_2.

Dem: Sea $a_3x^2+b_3x+c_3 \in P_2$ y gen$\{a_1x^2+b_1x+c_1, a_2x^2+b_2x+c_2\}$ la propuesta de spanning set (conjunto generador). Veamos si

$$a_3x^2+b_3x+c_3 = \alpha(a_1x^2+b_1x+c_1)+\beta(a_2x^2+b_2x+c_2)$$

Análogamente al ejercicio anterior

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 - \frac{a_2b_1}{a_1} & b_3 - \frac{a_3b_1}{a_1} \\ 0 & c_2 - \frac{a_2c_1}{a_1} & c_3 - \frac{a_3c_1}{a_1} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 - \frac{a_2b_1}{a_1} & b_3 - \frac{a_3b_1}{a_1} \\ 0 & 1 & \frac{a_1c_3 - a_3c_1}{a_1c_2 - a_2c_1} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & 0 & a_3 - a_2\left(\frac{a_1c_3-a_3c_1}{a_1c_2-a_2c_1}\right) \\ 0 & 0 & \frac{a_1b_3-a_3b_1}{a_1} - \frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1}\left(\frac{a_1c_3-a_3c_1}{a_1c_2-a_3c_1}\right) \\ 0 & 1 & \frac{a_1c_3-a_3c_1}{a_1c_2-a_2c_1} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}\left(\frac{a_1c_3-a_3c_1}{a_1c_2-a_2c_1}\right) \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_1}\left[a_1b_3-a_3b_1-(a_1b_2-a_2b_1)\left(\frac{a_1c_3-a_3c_1}{a_1c_2-a_3c_1}\right)\right. \\ 0 & 1 & \frac{a_1c_3-a_3c_1}{a_1c_2-a_2c_1} \end{array}\right)$$

Basta ver que dos polinomio de grado $n \leq 2$ sólo genera un subconjunto de P_2 ya que deben de cumplir una relación entre coeficientes

$$a_1b_3-a_3b_1-(a_1b_2-a_2b_1)\left(\frac{a_1c_3-a_3c_1}{a_1c_2-a_3c_1}\right)=0$$

es decir, no son independientes los coeficientes a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 y c_2 ∎

5.4 : Linealmente Independiente

29 - Determine una condición sobre los números a, b, c y d tal que los vectores $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sean linealmente dependientes.

Sol: Saltemos a la matriz directamente

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & c & 0 \\ b & d & 0 \end{array}\right) \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Sin embargo, usemos el "Teorema 5.4.6." y veamos si su determinante

$$\det(A) \neq 0$$

Así

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb \neq 0$$

De aquí sacamos una condición y es que

$$\underline{ad \neq cb \ \ldots (1)}$$

Ahora usemos el "Teorema 5.4.4" $(A\vec{X} = 0 \leftrightarrow \vec{X} = 0)$. Sea

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

y teniendo un sistema homogéneo

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & c & 0 \\ b & d & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - \frac{b}{a}R_1} \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{pmatrix}$$

Si $\vec{x} = 0$ ó $x_1 = x_2$ implica en el primer renglón que al menos una entrada es distinta 0

$$\underline{a \neq 0 \ \cdots (2)}$$

y del segundo renglón se llega a la condición (1)

$$\underline{ad \neq cb \ \ldots (1)}$$

30* - Es lo mismo que el 29 con el determinante así que no tiene chiste hacerlo.

31 - ¿Para qué valor(es) de α serán linealmente dependientes los vectores

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}?$$

Sol. Escribamos la matriz del sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$

$$\vec{A}\vec{x} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & \alpha & 0 \\ -3 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2+3R_3]{R_1-2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \alpha-4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \text{con} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Usando el "Teorema 5.4.4" sabemos que si es linealmente dependiente al menos una entrada tiene que ser distinta de 0, en este caso $x_1 \neq 0$

$$\Rightarrow \alpha - 4 = 0$$

$$\therefore \alpha = 4$$

Veamos si llegamos a lo mismo con el "Teorema 5.4.6" con

$$\det(\vec{A}) = 0$$

Así, de forma explícita y sin usar operaciones con columnas

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & \alpha \\ -3 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \alpha\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(14) + 4(-7) + \alpha(0) = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{0}\alpha = 28 - 28 \rightarrow 0 = 0$$

No se llegó a alguna condición con el "Teorema 5.4.6" pero sí con e "Teorema 5.4.4".

Sección 5.5 : Bases y Dimensión

10 - Determine si el conjunto dado es una base para el espacio vectorial al que se refiere:

En M_{22} : $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, donde $a,b,c,d \neq 0$.

Sol: Basta mostrar que cada matriz es un múltiplo de la base canónica de M_{22}

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al ser cada matriz un múltiplo de alguna de las matrices canónicas vemos que si generan y son l.i. para M_{22}, es decir, al ser c.l. de la base canónica, son base de M_{22}.

16 - Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en el plano

$$3x - 2y + z = 0$$

Sol: De la ecuación de plano obtenemos

$$z = 2y - 3x$$

sean x, y las variables independientes. Describamos al conjunto

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 3x - 2y + z = 0 \right\}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2y-3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 2y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ son base de $\mathcal{P}$ con $\dim(\mathcal{P}) = 2$.

32.- Encuentre una base para D_3, el espacio vectorial de matrices diagonales de 3×3. ¿Cuál es la dimensión?

Sol: Se tiene que

$$D_3 = \left\{ M \ ; \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} ; a,b,c \in K \right\}$$

Es intuitiva y obvia la propuesta para la base de D_3

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

S notable que ninguna matriz es c.l. de la otra y que $\forall M \in D_3$ se puede escribir como c.l. de las matrices de $\mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $\mathcal{B}$ está formada por tres matrices l.i. entonces

$$\dim(D_3) = 3$$

33.- ¿Cuál es la dimensión D_n, el espacio de las matrices diagonales $n\times n$?

Sol: Extrapolemos del ejercicio anterior la idea para probarlo con inducción matemática expandiendo las matrices para cada paso consiguiente:

•) Para D_1 la base $\mathcal{B} = \{(1)\}$ sabemos que cumple. y $\dim(D_1) = 1$.

•) Para D_2 se hace análogo al ejercicio 32. y $\dim(D_2) = 2$.

•) Asumimos cierto para D_{n-1} con $\dim(D_{n-1}) = n-1$

•) Veamos para D_n. Basta observar que para la matriz n-ésima de la propuesta de base al tener su único elemento no nulo en la entrada nn y las demás matrices diagonales al no tener ningún elemento no nulo en la columna o fila n-ésima, no pueden generar a

$$\begin{array}{c} \text{n-entrada} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix} \right. \\ \text{n-entrada} \end{array}$$

①

Por lo tanto, se tienen una base $\mathcal{B}_1$ de n matrices l.i., para D_n.

$$\therefore \dim(D_n) = n$$

Sección 5.7: Rango, Nulidad, Espacio Renglón y Espacio Columna.

De los problemas que se muestran a continuación, encuentre el rango y la nulidad de la matriz dada, además encuentre una base para la imagen y el espacio nulo de la matriz:

7.23 - $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A$

Sol:

•) Rango: A pesar de que es obvio que los vectores renglones son l.i. reescribamos la matriz A con operaciones elementales

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} = \mathcal{J}$$

Una base para R_A es $\mathcal{B} = \{(1,0,-\frac{1}{3}), (0,1,-\frac{1}{2})\}$, es decir

$$R_A = \text{gen}\{(1,0,-\tfrac{1}{3}), (0,1,-\tfrac{1}{2})\}$$

•) Espacio Nulo de A: Por definición $N_A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$. Utilicemos la matriz $\mathcal{J}$ y $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

$$\mathcal{J}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 - \tfrac{1}{3}x_3 &= 0 \\ x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}x_3 \quad \& \quad x_2 = -\frac{1}{2}x_3$$

Entonces

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_3 \\ -\frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ con } \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ base de } N_A.$$

• Nulidad de A: Del punto anterior es evidente que

$$\nu(A) = 1.$$

• Imágen de la matriz: Usemos el "Teorema 5.7.3" $C_A = Im(A)$. Hagamos uso de B^T y veamos si las columnas de B son l.i.

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El tercer vector columna es combinación lineal de las otras columnas, siendo $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $Im(A)$

$$Im(A) = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = C_A = \mathbb{R}^2$$

15,26- Se procederá de manera análoga:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Rango de A:

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \zeta$$

Tenemos que

$$R_A = gen\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

• Espacio Nulo y Nulidad: Se $\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

$$\mathcal{E}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

$$\therefore N_A = \{0\} \quad \& \quad \nu(A) = 0$$

• Imágen: Es claro por la forma de la matriz $\mathcal{E}$, al ser diagonal, que

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^4$$