Wahrscheinlichkeit und Statistik | WrStat

Zusammenfassung

INHALTSVERZEICHNIS

1. HITCHHIKER'S GUIDE TO WRSTAT

***Hinweis:** In der Zusammenfassung werden Anweisungen zur Taschenrechnerbenutzung gegeben. Diese beziehen sich auf den TI nSpire CX II-T und das Skript auf https://github.com/KROIA/OST_WrStat. Das Skript im TR in den «MyLib»-Ordner kopieren, dann auf Menu-1-7-1. Nun sind alle Funktionen des Skripts im Scratchpad mit der Buch-Taste → 6 → wrstat erreichbar.*

Nachfolgend ist die Reihenfolge einer typischen WrStat-Prüfung von Andreas Müller:

1.1. AUFGABE 1

«Kombinatorik» (Seite 3) Gegeben ist ein Fliesstext oder ein Bild.

«Auf wieviele Arten…» / «Wie viele verschiedene Kombinationen»

1.2. AUFGABE 2

«Lineare Regression» (Seite 7): Gegeben ist eine Tabelle mit zwei Spalten und/oder eine Grafik mit Punkten oder einer Linie.

«Finden Sie ein Modell ….»

1.3. AUFGABE 3

«Erwartungswert und Varianz, Wahrscheinlichkeitsdichte» (Seite 8): Gegeben ist eine Funktion und das Wort «Wahrscheinlichkeitsdichte» kommt vor.

«Betrachten Sie die Funktion …» / «Gegeben ist die Funktion …»

1.4. AUFGABE 4

- ***«Wahrscheinlichkeitsverteilung» (Seite 15):*** Gegeben ist meist ein längerer Text mit Prozentzahlen.
  «Wann ist …» / «Zu welcher Zeit …» / «Mit wie vielen …», «Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit …»
- ***«Hypothesen testen» (Seite 23):*** Gegeben ist eine Studie oder Untersuchung mit diversen Messdaten.
  «Kann man daraus schliessen …» / «Kann damit eine Aussage über xy gemacht werden» / «Formulieren Sie einen Test …»

1.5. AUFGABE 5

«Hypothesen testen» (Seite 23): Gegeben ist eine Studie oder Untersuchung mit diversen Messdaten.

«Kann man daraus schliessen …» / «Kann damit eine Aussage über xy gemacht werden» / «Formulieren Sie einen Test …»

1.6. AUFGABE 6

«Wahrscheinlichkeitsverteilung» (Seite 15): Gegeben ist meist ein längerer Text mit Prozentzahlen.

«Wann ist …» / «Zu welcher Zeit …» / «Mit wie vielen …», «Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit …»

1.7. AUFGABE 7 / 8

- ***«Wahrscheinlichkeitsverteilung» (Seite 15):*** Gegeben ist meist ein längerer Text mit Prozentzahlen
  «Wann ist …» / «Zu welcher Zeit …» / «Mit wie vielen …», «Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit …»
- ***«Hypothesen testen» (Seite 23):*** Gegeben ist eine Studie oder Untersuchung mit diversen Messdaten
  «Kann man daraus schliessen …» / «Kann damit eine Aussage über xy gemacht werden» / «Formulieren Sie einen Test …»
- ***«Ereignisse und Wahrscheinlichkeit» (Seite 25):*** Gegeben ist eine komplizierte Situation. Nur «ja / nein»-Resultate, keine Messwerte, Abhängigkeit.
  «Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass …» / «Wie wahrscheinlich ist es, …» / «Wie häufig …»

2. KOMBINATORIK

Meist Aufgabe 1
Punkteverteilung: *Punkte sind auf Teilaufgaben verteilt. Pro Erkennung von Problemtyp manchmal auch ein Punkt.*

2.1. METHODIK

Aufgabe
Gegeben ist ein Fliesstext oder ein Bild.

Die Frage ist meist «Auf wieviele Arten …» / «Wie viele verschiedene Kombinationen …»

Vorgehensweise
1. Aufgabe zuerst auslassen und am Schluss der Prüfung lösen, weil meist relativ kompliziert und zeitintensiv.
2. Versuchen, die Texte auf eines der untenstehenden Probleme herabzubrechen
3. Entsprechende Regeln anwenden

2.2. PRODUKTREGEL: DIE FÜR-JEDES-GIBT-ES REGEL

Für jede der n Möglichkeiten gibt es eine von der ersten Position ***unabhängige Anzahl*** k Möglichkeiten für den Rest, also $n \cdot k$ Möglichkeiten.

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i$$

Beispiel: Wie viele mögliche Würfelkombinationen können entstehen, wenn i verschiedene Würfel mit je j Augen geworfen werden? Da die Würfel voneinander unabhängig sind, gibt es $i \cdot j$ verschiedene Kombinationen.

Beispiel: Ein Autohändler bietet 5 verschiedene Fahrzeugtypen in 30 verschiedenen Farben an. Zu jedem Fahrzeugtyp gibt es 7 verschiedene Extraausstattungen. Wie viele verschiedene Fahrzeuge kann der Autohändler verkaufen? Da die Fahrzeugtypen (i), die Farben (j) und die Extraausstattungen (k) voneinander unabhängig sind, gibt es $i \cdot j \cdot k$ verschiedene Fahrzeuge, also $5 \cdot 30 \cdot 7 = 1050$.

2.3. PERMUTATIONEN/REIHENFOLGE

«Auf wieviele Arten lassen sich n verschiedene Objekte anordnen?»
Für das erste Objekt stehen n Plätze zur Verfügung. Für das zweite Objekt muss einer der $n-1$ verbleibenden Plätze gewählt werden. Bisher sind nun $n \cdot (n-1)$ Möglichkeiten gefunden. Führt man diese Reihenfolge fort, ergeben sich $n!$ Möglichkeiten.

n Objekte kann man auf $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ Arten anordnen. *Bei mehreren Gruppen: $n! \cdot m!$*

Beispiel: In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen können 8 Läufer ins Ziel gelangen? $8! = 40320$

Beispiel: Es treten 7 Frauen und 7 Männer an. Es gibt geschlechtergetrennte Ranglisten. Wie viele Kombinationen gibt es?

$$7! \cdot 7! = 5040^2 = 254'001'600$$

Beispiel: Eine Skiverleihfirma besitzt 6 Paare weisser und 7 Paare schwarzer Skis einer bestimmten Grösse. Die Skis sind asymmetrisch, man kann linke und rechte Skis unterscheiden. Nach dem Sommer werden die Skis aus dem Lagercontainer geholt, wo sie ziemlich durcheinander geraten sind.

a) Auf wieviele Arten können die Skis zu Paaren zusammengefügt werden?

$$n_{\text{schwarz}}! \cdot n_{\text{weiss}}! = 7! \cdot 6! = 5040 \cdot 720 = 3'628'800$$

b) Der Marketingchef findet, es dürften durchaus auch gemischfarbige Paare vermietet werden, wieviele mögliche Paarungen gibt es in diesem Fall?

$$(n_{\text{schwarz}} + n_{\text{weiss}})! = (7+6)! = 13! = 6'227'020'800$$

c) Bei der Revision stellt sich heraus, das zwei schwarze linke Skis und eine linker weisser Ski nicht mehr zu reparieren sind. Wieviele mögliche Paarungen gibt es jetzt noch?

Hat man nur n linke und m rechte Skis einer gewissen Farbe, mit $n < m$, muss man zuerst aus den m Skis deren n auswählen, die man verwenden will. Das geht auf $\binom{m}{n}$ Arten. Davon kann man wieder $n!$ Anordnungen bilden. Die Gesamtzahl möglicher Paarungen ist also

$$\binom{m}{n} \cdot n! = \binom{7}{5} \cdot 5! = 1'814'400$$

TR: Menü-5-3 / $\mathrm{nCr}(m, n)$

2.4. AUSWAHLPROBLEM

2.4.1. Kombination: Ziehen ohne Zurücklegen

«Auf wie viele Arten kann man k Objekte aus n auswählen?»

Sei C_k^n die Anzahl der Möglichkeiten, k aus n Objekten auszuwählen. Es ist zuerst k mal eine Auswahl zu treffen. Für die erste Auswahl stehen n Objekte zur Verfügung. Danach muss noch $k-1$ mal eine Auswahl getroffen werden, es stehen noch $n-1$ Alternativen zur Verfügung. So lassen sich $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) ... (n-k+1)$ Möglichkeiten finden. Ist die Reihenfolge der Objekte nicht relevant, muss noch durch $k!$ geteilt werden.

$$C_k^n = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)(n-k-1)..2 \cdot 1}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\Leftrightarrow C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1} = \binom{n}{k}$$

TR: Menü-5-3 / $\mathrm{nCr}(n, k)$

Beispiel: In einem Wald mit 1000 Bäumen schlägt fünfmal der Blitz ein. Wir dürfen annehmen, dass kein Baum zweimal getroffen wird. Auf wieviele Arten können die getroffenen Bäume im Wald verteilt sein?
Es müssen 5 von 1000 Bäumen ausgewählt werden:

$$\binom{1000}{5} = \frac{1000!}{5!(1000-5)!} = \underline{8'250'291'250'200}$$

Beispiel: In einem von $n = 6$ Koffern befindet sich eine Waffe. Es dürfen zwei Koffer geöffnet werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es für Erfolg und wie viele für Misserfolg?

Es gibt $\binom{6}{2} = 15$ Möglichkeiten, zwei Schachteln auszuwählen, aber nur $\binom{5}{2} = 10$ Möglichkeiten, zwei Schachteln auszuwählen, die die Tatwaffe nicht enthalten. Es gibt also 5 Möglichkeiten für Erfolg und 10 Möglichkeiten für Misserfolg.

2.4.2. Variation: Ziehen mit Zurücklegen

Perlenkettenproblem

«Auf wie viele Arten kann man k mal unter n verschiedenen Objekten auswählen?»

Anzahl Möglichkeiten, n verschiedene Objekte k mal auszuwählen: $V_{n,k} = n^k$

Beispiel: Auf wie viele Arten kann man eine Perlenkette der Länge $k = 10$ aus $n = 4$ Farben von Perlen herstellen?

$$V_{4,10} = 4^{10} = 1'048'576 \text{ Möglichkeiten}$$

2.4.3. Beispiel 1: Kartenspiel

Ein Kartenspiel mit 52 Karten besteht aus 26 roten und 26 schwarzen Karten.

a) *Auf wieviele Arten kann man das Kartenspiel mischen?*

   Dies ist ein Anordnungsproblem, es gibt $52!$ solche Reihenfolgen.

b) *Auf wieviele Arten kann man das Kartenspiel mischen, so dass die oberste und die unterste Karte die gleiche Farbe haben?* Zunächst wählen wir eine von 52 Karten, dies wird die oberste Karte. Dann wählen wir eine Karte der gleichen Farbe, davon gibt es noch 25, dies wird die unterste Karte. Die verbleibenden 50 Karten können nun in jeder beliebiger Reihenfolge dazwischengelegt werden.

$$52 \cdot 25 \cdot 50!$$

c) *Welcher Prozentsatz der möglichen Kartenstapel hat gleichfarbige oberste und unterste Karten?* Dies ist der Quotient

$$\frac{52 \cdot 25 \cdot 50!}{52!} = 0.490$$

d) *Jetzt werden dem Spiel noch drei Joker-Karten hinzugefügt, die sowohl als rot als auch als schwarz betrachtet werden können. Auf wieviele Arten kann man das erweiterte Kartenspiel mischen, sodass die oberste und unterste karte die gleiche Farbe haben?* Die oberste Karte könnte nun eine Farbkarte oder eine Jokerkarte sein.

   Fall 1, Jokerkarte: Es gibt 3 mögliche Jokerkarten für die erste Karte, dann passt jede beliebige Karte als unterste Karte, davon gibt es 54. Die verbleibenden Karten können beliebig angeordnet werden.

$$3 \cdot 54 \cdot 53!$$

   Fall 2, Farbkarte: Gleich wie Aufgabe b, einfach andere Zahlen

$$52 \cdot 28 \cdot 53!$$

   Die beiden Fälle sind disjunkt, können also addiert werden.

$$3 \cdot 54 \cdot 53! + 52 \cdot 28 \cdot 53!$$

2.4.4. Beispiel 2: Wortanordnungen

Hinweis: Das deutsche Alphabet hat 5 Vokale und 21 Konsonanten.

a) *Wie viele Wörter der Länge 9 gibt es, die genau 4 benachbarte und zwei einzelne Vokale enthalten?*

   Die Vokalgruppen lassen sich auf 12 Arten anordnen *(aufzeichnen und zählen)*. Die insgesamt 6 Vokalplätze lassen sich auf 5^6 Arten belegen, die 3 Konsonantenplätze auf 26^3 Arten. Die Gesamtzahl der Wörter wird daher

$$12 \cdot 5^6 \cdot 21^3 = 1'736'437'500.$$

b) *Wie viele Wörter der Länge i gbt es, die genau 6 benachbarte Vokale enthalten?*

   Die Vokalgruppe lässt sich auf 4 verschiedene Arten platzieren. Da es immer noch 6 Vokalplätze und 3 Konsonantenplätze gibt, ist die Gesamtzahl der Wörter daher

$$4 \cdot 5^6 \cdot 21^3 = 578'812'500$$

2.4.5. Beispiel 3: Zugwagen

In einem Zugwagen gibt es 16 Plätze, davon 8 Fenster- und 8 Gangplätze. Je die Hälfte ist in Fahrtrichtung gerichtet. Eine Gesellschaft von zwölf Personen will im Zug Platz nehmen.

a) *Auf wieviele Arten können die Reisenden die Plätze annehmen?*

Es müssen 12 der 16 Plätze ausgewählt werden, das ist auf $\binom{16}{12}$ Arten möglich. Auf den 12 ausgewählten Plätzen können die Fahrgäste auf $12!$ Arten angeordnet werden. Deshalb gilt

$$\binom{16}{12} \cdot 12! = \mathrm{nCr}(16, 12) \cdot 12! = 871'782'912'000$$

b) *Vier der Personen möchten unbedingt einen Fensterplatz haben. Auf wieviele Arten können die Reisenden nun Platz nehmen?*

4 der 8 Fensterplätze können auf $\binom{8}{4}$ Arten ausgewählt werden und die Fensterplatzfahrer in $4!$ möglichen Arten platzier werden. Dann werden 8 von 12 Plätzen für die verbliebenden Gäste gewählt und auf $8!$ Arten angeordnet. So ergeben sich

$$\binom{8}{4} \cdot 4! \cdot \binom{12}{8} \cdot 8! = \mathrm{nCr}(8, 4) \cdot 4! \cdot \mathrm{nCr}(12, 8) \cdot 8! = 33'530'112'000$$

c) *Einer Person wird übel, wenn sie nicht in Fahrtrichtung schauen kann, und benötigt einen Fensterplatz. Wie viele Arten gibt es nun?*

Die Person nimmt einen von 4 Fensterplätzen in Fahrtrichtung ein. Die anderen 4 Gäste werden auf die 7 verbleibenden Fensterplätze platziert und anschliessen werden 7 von den verbleibenden 11 Plätzen gewählt.

$$4 \cdot \binom{7}{4} \cdot 4! \cdot \binom{11}{7} \cdot 7! = 4 \cdot \mathrm{nCr}(7, 4) \cdot 4! \cdot \mathrm{nCr}(11, 7) \cdot 7! = 5'588'352'000$$

3. LINEARE REGRESSION

Meist Aufgabe 2

***Punkteverteilung:** Methode der linearen Regression (1), Wert von a (1), Wert von b (1), Wert von r (1), Beurteilung der linearen Regression (1)*

3.1. METHODIK

Aufgabe

Gegeben ist eine Tabelle mit zwei Spalten und/oder eine Grafik mit Punkten oder einer Linie.

Die Frage ist meist «Finden Sie ein Modell ….»

Vorgehensweise

1. Beiblatt ***«Lineare Regression»*** verwenden
2. TR-Skript ***«linreg»*** verwenden:

$$\text{linreg}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix}$$

2.15214E6 = 2’152’140. → Punkt um 6 Stellen nach rechts schieben

1. Auf Prüfung schreiben, dass die Lineare Regression auf dem Beiblatt steht
2. $y(x) = a \cdot x + b$ mit a und b von linearer Regression verwenden, um Aufgabe zu lösen

3.2. DEFINITION

Seien X und Y zwei reelle Zufallsvariablen. Der ***lineare Zusammenhang*** zwischen diesen zwei Messwerten kann mit der Gleichung $\boldsymbol{Y = a \cdot X + b + \text{Fehler}}$ dargestellt werden.
a und b müssen so gewählt werden, dass der Fehler minimal ist: $\boldsymbol{\text{var}(Y - a \cdot X - b)}$ ***soll minimal werden.*** Dies gilt dann, wenn:

$$a = \frac{E(XY) - E(X) \cdot E(Y)}{E(X^2) - E(X)^2} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(x)}$$

$$b = E(Y) - a \cdot E(X)$$

3.3. BEISPIELE

a) Wie viele y werden innerhalb vom Zeitraum $x = 10\ \text{Tage}$ verwendet?

$$y(x) = a \cdot 10 + b$$

b) An welchem Zeitpunkt x ist $y = 100$?

$$100 = a \cdot x + b \Rightarrow \frac{100 - b}{a} = x$$

3.4. REGRESSIONSKOEFFIZIENT

Für die ***Fehlerbeurteilung*** wird der Regressionskoeffizient verwendet. Die Regression ist umso ***genauer***, je näher der Koeffizient $\boldsymbol{r}$ ***bei*** $\boldsymbol{\pm 1}$ liegt. r hat immer das gleiche Vorzeichen wie die Steigung der Regressionsgerade *(fallend = minus)*.

$$r = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}}$$

- $\boldsymbol{r = 0}$***:*** kein linearer Zusammenhang zwischen X und Y
- $\boldsymbol{r \approx \pm 1}$***:*** kein Fehler bei der Approximation
  ($+1$: positiver/steigender linearer Zusammenhang, -1: negativer/fallender Zusammenhang)

4. ERWARTUNGSWERT UND VARIANZ, WAHRSCHEINLICHKEITSDICHTE

Meist Aufgabe 3.

***Punkteverteilung:** Normierungsbedingung / Formel auf 1 setzen (1), Bestimmen der Variable in der Verteilungsfunktion $\varphi(x)$ (1), Erwartungswert aufschreiben (1), Erwartungswert berechnen (1), Varianzformel aufschreiben (1), Varianz berechnen (1)*

4.1. METHODIK

Aufgabe

Gegeben ist eine Funktion und das Wort «Wahrscheinlichkeitsdichte» kommt vor.

Die Frage ist oft: «Betrachten Sie die Funktion …» / «Gegeben ist die Funktion …»

Vorgehensweise

1. Zuerst muss überprüft werden, ob es sich wirklich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt.
   Dafür muss die Variable *(oft a)* so gewählt werden, dass das Integral von φ den Wert 1 hat.
2. Integral mit TR ausrechnen
3. Erwartungswert ausrechnen *Falls Funktion y-Achsensymmetrisch, ist $E(X) =$ Mittelpunkt der Funktion*
4. Varianzformel $\operatorname{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$ hinschreiben, ausrechnen

TR-Tipps:

- *Integral: -Taste mit Betrag und Cases*
- *Solve: Menu-3-1*
- *Wenn solve ein Integral zurückgibt, auszurechnende Variabel aus dem Integral rausnehmen*
- *Zahlen in Brüche umwandeln: Menu - Zahl - Brüche approximieren*

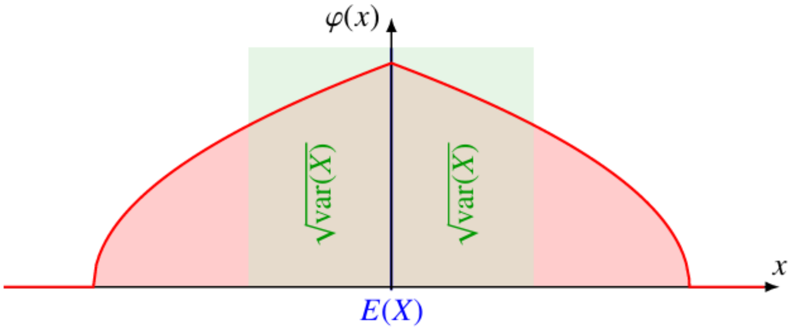
4.1.1. Beispiel 1: Symmetrische Funktion

Aufgabenstellung

Die Funktion

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x\leq -1\\ a\sqrt{x+1} & -1<x\leq 0\\ a\sqrt{1-x} & 0<x\leq 1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

soll als Wahrscheinlichkeitsdichte einer Zufallsvariable X verwendet werden.



a) Wie muss a gewählt werden, damit φ wirklich eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist?
b) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$
c) Bestimmen Sie die Varianz $\operatorname{var}(X)$

Lösung

a) Es muss gelten: *(Integralgrenzen aus der Wahrscheinlichkeitsfunktion übernehmen)*

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\ dx=\int_{-1}^{0}a\sqrt{x+1}\ dx+\int_{0}^{1}a\sqrt{1-x}\ dx$$

Formel mit dem Taschenrechner mit der Funktion $\operatorname{solve}()$ lösen:

$$\operatorname{solve}\left(1=\int_{-1}^{0}a\sqrt{x+1}\ dx+\int_{0}^{1}a\sqrt{1-x}\ dx,\quad a\right)\Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

b) Da die Funktion $\varphi(x)$ symmetrisch bzw. gerade ist, ist $E(X)=0$.
(Ist die Funktion gerade, aber nicht um 0, ist $E(X)=$ Mittelpunkt)

c) Für die Varianz brauchen wir $E(X^2)$:

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\varphi(x)\ dx=2a\int_{0}^{1}x^2\sqrt{1-x}\ dx$$

Wieder mit TR lösen ($e=$ Variable für $E(X^2)$):

$$\operatorname{solve}\left(e=2\cdot\overbrace{\frac{3}{4}}^{a}\int_{0}^{1}x^2\sqrt{1-x}\ dx,e\right)\Rightarrow e=\frac{8}{35}\Rightarrow E(X^2)=\frac{8}{35}$$

Varianz berechnen:

$$\operatorname{var}(X)=E(X^2)-E(X)^2=E(X^2)-0^2=E(X^2)=\frac{8}{35}\approx 0.22857$$

4.1.2. Beispiel 2: Symmetrische Funktion, konstant

Aufgabenstellung

Man betrachte die Funktion

$$\varphi(x) = \begin{cases} a & -\frac{3}{2} \le x \le -\frac{1}{2} \text{ oder } \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

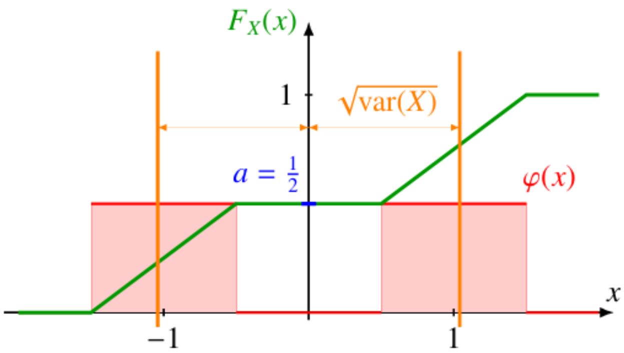
a) Wie muss a gewählt werden, damit $\varphi(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Zufallsvariable X wird?
b) Zeichnen Sie einen Graphen der Verteilungsfunktion $F_X(x)$.
c) Bestimmen Sie $E(X)$.
d) Bestimmen Sie die Varianz $\operatorname{var}(X)$.

Lösung

a) Das Integral von $\varphi(x)$ muss 1 werden.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\ dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} a\ dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} a\ dx \overset{\text{TR solve}}{\overbrace{\Rightarrow}} a = \frac{1}{2}$$

b) F_X ist konstant in den Teilen des Definitionsbereiches, wo $\varphi(x) = 0$ ist. Ausserhalb dieses Bereichs hat der Graph die Steigung $a = \frac{1}{2}$. Der Graph von $F_{X(x)}$ sieht also wie folgt aus:



c) da $\varphi(x)$ eine gerade Funktion ist, ist $E(X) = 0$.

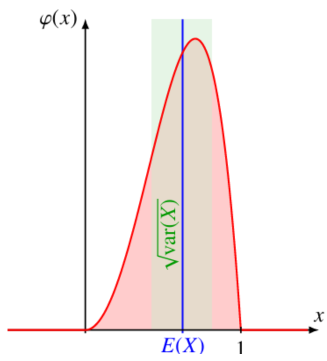
d) Die Varianz kann mit Hilfe von $E(X^2)$ berechnet werden.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x)\ dx \\ &= \int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} ax^2\ dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} ax^2\ dx \\ &= \int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}x^2\ dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}x^2\ dx \overset{\text{TR solve}}{\overbrace{\Rightarrow}} E(X^2) = \frac{13}{12} \end{aligned}$$

Varianz berechnen:

$$\operatorname{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - 0^2 = E(X^2) = \frac{13}{12} \approx 1.08333$$

4.1.3. Beispiel 3: Asymmetrische Funktion, Median



Aufgabenstellung

Die Funktion

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ a(x^2 - x^4) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases}$$

soll als Wahrscheinlichkeitsdichte einer Zufallsvariable X verwendet werden.

a) Wie muss a gewählt werden, damit $\varphi(x)$ tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsdichte sein kann?
b) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.
c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$.
d) Bestimmen Sie die Varianz von X.
e) Bestimmen Sie den Median von X.

Lösung

a) a muss so gewählt werden, dass das Integral von φ über $\mathbb{R}$ den Wert 1 haben muss. Man berechnet daher:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\ dx = \int_0^1 a(x^2 - x^4)\ dx = a \int_0^1 (x^2 - x^4)\ dx \overset{\text{TR solve}}{\Rightarrow} a = \frac{15}{2}$$

b) Der Erwartungswert ist das Integral von $x \cdot \varphi(x)$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x)\ dx = \int_0^1 x \cdot a(x^2 - x^4)\ dx \overset{\text{TR solve}}{=} \frac{5}{8}$$

c) Die Verteilungsfunktion ist für x-Werte zwischen 0 und 1:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(\xi)\ d\xi = \int_0^x a(x^2 - x^4)\ dx \overset{\text{TR}}{=} \frac{-x^3 \cdot (3x^2 - 5)}{2}$$

Die Verteilungsfunktion ist damit

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{-x^3 \cdot (3x^2 - 5)}{2} & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

d) Für die Varianz brauchen wir zunächst $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \varphi(x)\ dx = \int_0^1 x^2 \cdot a(x^2 - x^4)\ dx \overset{\text{TR solve}}{=} \frac{3}{7}$$

Daraus kann nun die Varianz berechnet werden:

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{3}{7} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 \overset{\text{TR}}{=} \frac{17}{448} \approx 0.037946$$

e) Der Median x_{med} ist derjenige Wert, für den $F_X(x_{\text{med}}) = \frac{1}{2}$. Es gilt also

$$\frac{-x_{\text{med}}^3 \cdot (3x_{\text{med}}^2 - 5)}{2} = \frac{1}{2} \overset{\text{TR solve}}{\Rightarrow} x_{\text{med}} = -1.343209 \text{ oder } 0.643138$$

Da die Funktion nur zwischen 0 und 1 Werte annimmt, muss der erste x_{med} Wert verworfen werden. x_{med} ist also 0.643138.

4.2. THEORIE

4.2.1. Begriffe

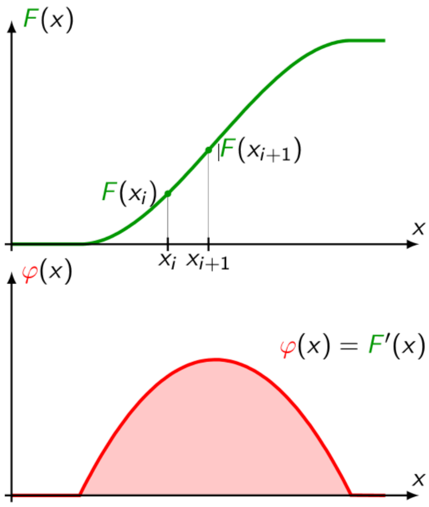
- ***Zufallsvariable:*** Eine Zufallsvariable X ist eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$, die einem Versuchsausgang ω einen Wert $X(\omega)$ zuordnet. *(Die Zufälligkeit liegt in dem Versuch, der das ω ermittelt)*
  - ***Diskrete Zufallsvariable:*** Nimmt nur einzelne, genau bestimmte Zahlenwerte an *(z.B. Würfelzahlen)*
  - ***Stetige Zufallsvariable:*** Nimmt einen beliebigen Wert in einem Intervall an *(Einzelwerte haben Wahrscheinlichkeit 0!)*
- ***Ereignisse:*** Die Zufallsvariable X definiert neue Ereignisse

Eine Zufallsvariable kann wieder neue Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten definieren. Bei stetigen Zufallsvariablen ist $\{X = a\}$ nur beschränkt von Nutzen, da selten das exakt selbe Ereignis eintrifft *(z.B. nie die exakt selbe Messung durch Messfehler)*.

Ereignis/W'keit gleich a	***Ereignis/W'keit kleiner als a***	***Ereignis/W'keit zwischen a und b***
$A = \{X = a\}, \quad \mathrm{P}(\{X = a\})$	$A = \{X \le a\}, \quad \mathrm{P}(\{X \le a\})$	$A = \{a < X \le b\}, \quad \mathrm{P}(\{a < X \le b\})$

4.2.2. Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi(x)$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi(x)$ von $F(x)$ ist die ***Ableitung*** von $F(x)$ und sagt aus, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Wert in einem Intervall ist. ***Achtung:*** nur für stetige Zufallsvariablen.



Die Ableitung der Verteilungsfunktion heisst ***Wahrscheinlichkeitsdichte***.

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = F'(x)$$

$F(x)$ ist eine Stammfunktion.

$$\mathrm{P}(a < X \le b) = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

4.2.3. Erwartungswert

Ist X eine Zufallsvariable, dann ist der Erwartungswert

$E(X) = \sum \mathrm{Wert} \cdot \mathrm{Wahrscheinlichkeit} = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \mathrm{P}(\{\omega\}) = \sum_{i=1}^{k} X(A_i) \cdot P(A_i)$

wobei X konstant auf A_i und $A_i = \Omega$ sein muss.

Wenn die Wahrscheinlichkeit in allen Fällen ***gleich*** ist *(Laplace-Experiment)*, entspricht der Erwartungswert dem ***Durchschnitt***, dieser muss kein annehmbarer Wert der Zufallsvariable sein.

Der ***empirische Erwartungswert*** entspricht dem gewichteten Mittelwert *(arithmetisches Mittel)*.

$$E(X) = \sum_i X(i) \cdot \mathrm{P}(X = x_i)$$

Beispiel Würfelspiel

Augenzahl:	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***
Gewinn:	0	0	$\mathbf{5}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{2}$
Wahrscheinlichkeit:	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

$$E(X) = \sum \mathrm{Wert} \cdot \mathrm{Wahrscheinlichkeit} = 0 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + \mathbf{5} \cdot \frac{1}{6} + \mathbf{1} \cdot \frac{1}{6} + \mathbf{2} \cdot \frac{1}{6} + \mathbf{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1.666$$

Rechenregeln

Sind X, Y Zufallsvariablen, dann gilt:

- ***Multiplikation*** mit einem Faktor: $E(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot E(X)$ *(z.B. Gewinn verdoppeln)*
- ***Addition*** zweier Zufallswerte: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- ***Produkt*** zweier Zufallswerte: $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$, nur falls X und Y ***unabhängig*** sind.
  Unabhängig = keine gegenseitige Beeinflussung
- ***Potenzieren:*** $E(X^2) \neq E(X)^2$ *$E(X)$ und $E(X)$ sind nie unabhängig*
- Erwartungswert einer ***Konstante*** c: $E(c) = c$

Verbindung zu Wahrscheinlichkeit

Ist $A \subset \Omega$ ein Ereignis, dann ist die ***charakteristische Funktion*** von A eine Zufallsvariable:

$$\chi_A : \Omega \to \mathbb{R} : \omega \to \chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

Ihr Erwartungswert ist: $E(\chi_A) = \chi_A(A) \cdot \mathrm{P}(A) + \chi_A\left(\bar{A}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\bar{A}\right) = 1 \cdot \mathrm{P}(A) + 0 \cdot (1 - \mathrm{P}(A)) = \mathrm{P}(A)$

Oder anders ausgedrückt: Gibt es nur die Ereignisse «Trifft ein»/«Trift nicht ein», ist der Erwartungswert gleich der Wahrscheinlichkeit des Eintreffen des Ereignis.

4.2.4. Varianz (Streumass)

Die ***Varianz*** ist die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert bzw. die ***Streuung*** einer Zufallsvariable. Je grösser die Varianz, desto grösser ist die Wahrscheinlichkeit für eine grosse Abweichung vom Erwartungswert.

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Die Varianz ist aufgrund der Quadrierung in einer ***anderen Einheit als die Messwerte*** und kann darum häufig nicht für konkrete Aussagen verwendet werden *(z.B.* Jahre^2*)*. Möchte man die Varianz in z.B. einem Histogramm zusammen mit den Messungen visualisieren, sollte $\sqrt{\mathrm{var}(X)}$ verwendet werden

Beispiel Kopf (1) oder Zahl (0)

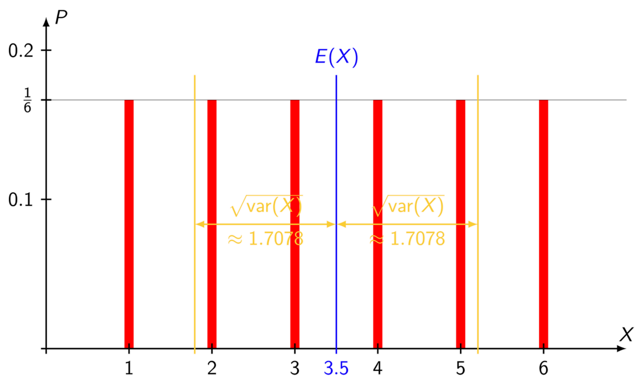
Faire Münze: $\mathrm{P}(X = 0) = \mathrm{P}(X = 1) = 0.5,\ \ E(X) = 0.5,\ \ X^2 = X$:

$$\mathrm{var}(x) = \frac{1}{2} \cdot (0 - E(X))^2 + \frac{1}{2} \cdot (1 - E(X))^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Beispiel Würfel

ω	$\mathrm{P}(\omega)$	X	X^2	$X - E(X)$	$(X - E(X))^2$
⚀	1/6	1	1	−2.5	6.25
⚁	1/6	2	4	−1.5	2.25
⚂	1/6	3	9	−0.5	0.25
⚃	1/6	4	16	0.5	0.25
⚄	1/6	5	25	1.5	2.25
⚅	1/6	6	36	2.5	6.25
		$E(X) =$ 21/6	$E(X^2) =$ 91/6		$\mathrm{var}(X) = 35/12$



$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - \frac{21^2}{6^2} = \frac{91 \cdot 6 - 21^2}{6^2} = \frac{105}{6^2} = \frac{35}{12} \approx 2.9166$$

Rechenregeln

Sind X, Y ***unabhängige*** Zufallsvariablen, dann gilt:

- ***Multiplikation*** mit einem Faktor: $\operatorname{var}(\lambda \cdot X) = \lambda^2 \cdot \operatorname{var}(X)$
- ***Addition*** zweier unabhängiger Zufallswerte: $\operatorname{var}(X + Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)$
- ***Subtraktion*** zweier unabhängiger Zufallswerte: $\operatorname{var}(X - Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(-Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)$
- ***Produkt*** zweier Zufallswerte: $\operatorname{var}(X \cdot Y) = \operatorname{var}(X) \cdot \operatorname{var}(Y) + \operatorname{var}(Y)E(X)^2 + \operatorname{var}(X)E(Y)^2$
- Varianz einer ***Konstante*** c: $\operatorname{var}(c) = 0$

4.2.5. Korrelation und Kovarianz

Zwei Zufallsvariablen X, Y sind ***unkorreliert***, wenn der Erwartungswert des Produktes $E(X \cdot Y)$ dasselbe ist wie das Produkt des Erwartungswertes $E(X) \cdot E(Y)$

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \Rightarrow \text{unkorreliert}$$

Die ***Kovarianz*** misst die Stärke des Zusammenhangs zwischen zwei Zufallsvariablen.

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

Bei einer grossen ***positiven Kovarianz*** ist ein starker positiver/gleichläufiger Zusammenhang vorhanden *(wird X grösser, wird Y auch grösser)*, bei grosser ***negativen Kovarianz*** ein starker negativer/gegenläufiger Zusammenhang *(wird X grösser, wird Y kleiner)*. Ist das ***Resultat nahe 0***, besteht kein linearer Zusammenhang.

Unabhängige Zufallsvariablen sind immer auch unkorreliert. Das umgekehrte muss aber nicht zwangsläufig korrekt sein.

4.2.6. Genauigkeit des Mittelwerts

Tschebyscheff-Ungleichung

Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable X um mehr als ε vom Erwartungswert $E(X)$ abweicht:

$$\mathrm{P}(|X - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\operatorname{var}(X)}{\varepsilon^2}$$

Satz von Bernoulli

Je mehr Messungen, desto unwahrscheinlicher ist eine grosse Abweichung des Mittelwertes M_n vom Erwartungswert μ. Für eine Verbesserung um 1 Stelle muss n 100x grösser werden.

$$\mathrm{P}(|M_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\operatorname{var}(X)}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Gesetz der grossen Zahlen

Je grösser die Anzahl Durchführungen, desto kleiner die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit h_n stark von der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A abweicht.

$$\mathrm{P}(|h_n - \mathrm{P}(A)| > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{P}(A)(1 - \mathrm{P}(A))}{n \cdot \varepsilon^2} \leq \frac{1}{4 \cdot n \cdot \varepsilon^2}$$

5. WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG

Meist Aufgaben 4, 6 und 7 - kann also in bis zu 3 Aufgaben vorkommen. Normalverteilung fast immer, Binomial & Possion sind sehr häufig
***Punkteverteilung:** Korrekter Verteilung verwendet (1), Standardisierung (1), Werte korrekt aus Tabelle ablesen (1), Korrekte Gleichung für μ / σ (1), μ und σ korrekt berechnet*

5.1. METHODIK

Aufgabe
Gegeben ist meist ein längerer Text mit Prozentzahlen

Die erste Frage ist meist «Wann ist …» / «Zu welcher Zeit …» / «Mit wie vielen …» und die zweite «Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit …»

Vorgehensweise
1. Erkennen, welche Verteilung verwendet werden sollte
   - ***Exponentialverteilung:*** Etwas geht kaputt, Radioaktiver Zerfall, Warteschlangen
   - ***Normalverteilung:*** Messungen weichen von einem Mittelwert ab
   - ***Binomalverteilung:*** Ereignis tritt ein oder nicht, Person ist X ja/nein
   - ***Poissonverteilung:*** In der Aufgabenstellung steht das Wort «selten»
2. Ähnlichstes Beispiel verwenden, Formeln entsprechend aufschreiben und ausrechnen

Ein ***Zufallsprozess*** erzeugt ***Zufallsvariablen*** mit einer gewissen Verteilung, die den ***Zufallsprozess*** modellieren. Es gibt verschiedene Verteilungen, man muss ***klären***, nach welcher Verteilung die Werte verteilt sind.

5.2. ZENTRALER GRENZWERTSATZ

Der ***zentrale Grenzwertsatz*** besagt, dass sich der Mittelwert und die Summe unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen bei einer beliebigen Verteilung mit zunehmenden Stichprobenumfang der Normalverteilung annähern.
Oder anders gesagt: Viele kleine unabhängige Zufallseffekte summieren sich ungefähr zu einer Normalverteilung. Dadurch sind z.B. Mittelwerte von Stichproben normalverteilt.

$$S_N = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} e^{t^2/2} \text{ (Standardnormalverteilung)}$$

Ist also die Verteilung unbekannt, kann die Wahrscheinlichkeit approximativ mit der Normalverteilung berechnet werden.

5.3. EXPONENTIALVERTEILUNG

Wird verwendet für radioaktiver Zerfall oder Warteschlangen.

Anwendung: gedächtnislose Prozesse.

T ist ***gedächtnislos***, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis in einem Intervall eintritt, immer gleich gross ist. Die Vergangenheit hat ***keinen Einfluss*** auf den Ausgang eines Experimentes.

(Bedeutung von a: $1/a$ = «Mean Time between Failure»)

Die Dichte- und Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung sind:

$$\varphi(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 - e^{-ax} & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Erwartungswert	***Varianz***	***Median***
$E(X) = \frac{1}{a}$	$\operatorname{var}(X) = \sigma = \frac{1}{a^2}$	$\text{Median } t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{a}$

5.3.1. Beispiel: Komponentenlebensdauer

Mittlere Lebensdauer einer Komponente ist eine Woche. Nach einem Jahr wird diese Komponente also etwa 52 mal ausgewechselt. Für Budgetzwecke wird angenommen, dass man mit 10 zusätzlichen Austauschaktionen pro Jahr durchkommt.

Verwenden Sie eine geeignete, einfache Approximation, um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass das Budget nicht reicht.

Jede Komponente hat eine exponentialverteilte Lebensdauer $T_1, ..., T_n$ mit $a = 1$ (Woche). Gefragt ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gesamte Lebensdauer der n Komponenten kleiner ist als 52.

$$X = T_1 + ... + T_n, \quad \text{gesucht: } \mathrm{P}(X < 52)$$

Approximation mit Normalverteilung

Eine Summe vieler kleiner Einflüsse kann mit der Normalverteilung approximiert werden. Damit gilt:

$$E(X) = \mu = n \cdot E(T) = n \cdot 1[\text{Woche}] = n, \quad \operatorname{var}(X) = \sigma^2 = n \cdot \operatorname{var}(T) = n \cdot 1[\text{Woche}^2] = n, \quad \sigma = \sqrt{n}$$

Standardisierung:

$$\mathrm{P}(X < 52) = \mathrm{P}(X \leq 52) = \mathrm{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{52-\mu}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{52-n}{\sqrt{n}}\right)$$

$52 - n < 0 \Rightarrow$ nicht in Tabelle der Verteilungsfunktion, deshalb muss das Komplement abgelesen werden

$$\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{52-n}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{-52+n}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{n-52}{\sqrt{n}}\right)$$

Für $n = 62$ gilt also:

$$1 - \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{62-52}{\sqrt{62}}\right) = 1 - \mathrm{P}(Z \leq 1.27) \Rightarrow 1 - \overbrace{\text{normCdf}(-\infty, 1.27, 0, 1)}^{\text{Menu}-5-5-2} = 1 - 0.89796 = 0.102 \Rightarrow \underline{10.2\%}$$

5.4. GLEICHVERTEILUNG

Jeder Wert innerhalb eines Intervalls ist gleich wahrscheinlich.

Anwendungen: Verteilung von Zufallszahlen, keine bevorzugten Werte.

Die Dichte- und Verteilungsfunktion der Gleichverteilung sind:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x > b \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a,b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Erwartungswert	***Varianz***	***Median***
$E(X) = \frac{a+b}{2}$	$\text{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$	$\text{Median} = \frac{a+b}{2}$

5.4.1. Beispiel: Masse von Kartoffeln

Selektierte Kartoffeln haben eine Masse zwischen 80 und $100g$. Diese werden im Intervall besser mit einer Gleichverteilung anstatt einer Normalverteilung beschrieben.

a) *Wie gross ist die Varianz der Masse einer selektierten Kartoffel?*

$$K = \text{Masse einer selektierten Kartoffel}, \quad a = 80g, \quad b = 100g, \quad E(K) = \mu_0 = \frac{80+100}{2} = 90g$$

Die Varianz einer Gleichverteilung zwischen a und b ist

$$\sigma_0^2 = \text{var}(K) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(100-80)^2}{12} = 33.333g^2$$

b) *Wie gross muss n sein, damit man mit mindestens 10kg Kartoffeln rechnen kann?* Die Masse $K_1, ..., K_n$ der n Kartoffeln sind gleichverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert $90g$, daher hat die Summe $X = K_1 + ... + K_n$ den Erwartungswert $E(X) = n \cdot \mu_0$. Damit der Erwartungswert 10kg erreicht, muss $n \geq 10\text{kg}/\mu_0$ sein:

$$E(X) = n \cdot \mu_0, \quad E(X) \geq 10\text{kg} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{E(X)}{\mu_0} = \frac{10\text{kg}}{90g} = \frac{10'000g}{90g} = 111.11 \Rightarrow n = 112.$$

c) *Die Masse der Kartoffeln kann aber immer noch streuen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, nicht die verlangten 10kg zu erhalten?*

Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist X annähernd normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = n \cdot \mu_0$ und Varianz $\sigma^2 = n \cdot \sigma_0^2$. Die Wahrscheinlichkeit, dass $X < 10\text{kg}$ ist, kann jetzt mit Standardisierung berechnet werden

$$\begin{aligned} \text{P}(X < 10\text{kg}) = \text{P}(X \leq 10\text{kg}) &= \text{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{10\text{kg}-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \text{P}\left(Z \leq \frac{10\text{kg}-\mu}{\sigma}\right) = \text{P}\left(Z \leq \frac{10\text{kg}-n\cdot\mu_0}{\sqrt{n}\cdot\sigma_0}\right) = \Phi\left(\frac{10\text{kg}-n\cdot\mu_0}{\sqrt{n}\cdot\sigma_0}\right) \end{aligned}$$

Da das Argument Φ negativ ist, gehen wir zum Komplement über *(Achtung: Dividend ändert sich)*

$$= 1 - \Phi\left(\frac{n\cdot\mu_0 - 10\text{kg}}{\sqrt{n}\cdot\sigma_0}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{112\cdot 90g - 10\text{kg}}{\sqrt{112\cdot 33.333g^2}}\right)$$

Für $n = 112$ ergibt sich

$$\text{P}(X < 10\text{kg}) = 1 - \Phi(1.3093) = 1 - 0.9047 = 0.0953 = 9.53\%$$

5.5. NORMALVERTEILUNG

Modellierung vieler kleiner Einflüsse, Messwerte, wiederholte Experimente.

Anwendungen: Messwerte, Summe vieler kleiner Einfüsse mit vergleichbar grosser Varianz, Approximation der Binomialverteilung.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$\boldsymbol{\sigma}$: Standardabweichung

Erwartungswert	*Varianz*	*Median*
$E(X) = \mu$	$\operatorname{var}(X) = \sigma^2$	$\text{Median} = \mu$

5.5.1. Typische Werte der Normalverteilung

$$\pm 1\sigma \Rightarrow 68\% \quad \pm 2\sigma \Rightarrow 95\% \quad \pm 3\sigma \Rightarrow 99.7\%$$

5.5.2. Standardnormalverteilung

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \Phi(Z) \text{ (aus Verteilungs-Tabelle)}$$

$$\Phi(Z) = \begin{cases} \Phi(Z) & , Z \geq 0 \\ 1 - \Phi(|Z|) & , Z < 0 \end{cases}$$

$\boldsymbol{Z}$: standardnormalverteilte Zufallsvariable
$\boldsymbol{X}$: nicht-standardisierte normalverteilte Zufallsvariable
$\boldsymbol{\mu, \sigma^2}$: Params der nicht-standardisierten Normalvert.
$\boldsymbol{\Phi}$: Verteilungsfunktion, Wert aus Tabelle ablesen

Erwartungswert	*Varianz*
$E(Z) = 0$	$\operatorname{var}(Z) = 1$

TR Tabellenwert der Standardnormalverteilung lesen:
$\Phi(x)$ *wenn* x *bekannt: Menu-5-5-3 /* $\operatorname{invNorm}(x, 0, 1), x = \text{Fläche}$
$\Phi(x)$ *wenn* a *und* b *gegeben: Menu-5-5-2 /* $\operatorname{normCdf}(a, b, \mu, \sigma)$

Beispiel

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(a < X \leq b) &= \mathrm{P}\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

5.5.3. Beispiel 1: Feuerwerk

Feuerwerk wird in der Silvesternacht ungefähr um Mitternacht gezündet. 5% des Feuerwerks wird schon vor 22 Uhr, 25% erst nach 1 Uhr genzündet.

a) *Zu welcher Zeit erreicht die Explosiondichte ihr Maximum?*

Die gegebenen Wahrscheinlichkeiten sind:

$$\mathrm{P}(X < 22 \text{ Uhr}) = 0.05, \quad \mathrm{P}(X > 25 \text{ Uhr}) = 0.25 \Rightarrow \mathrm{P}(X < 25) = 0.75$$

Wahrscheinlichkeiten standardisieren:

$$\mathrm{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{22-\mu}{\sigma}\right) = 0.05, \quad \mathrm{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{25-\mu}{\sigma}\right) = 0.75$$

Da wir die Wahrscheinlichkeiten schon haben, müssen wir die Werte aus der Quantilstabelle herauslesen oder mit TR $\operatorname{invNorm}(p, 0, 1)$ erhalten.

$$\Phi^{-1}(0.75) = 0.6745, \quad \Phi^{-1}(0.05) = 1 - \Phi^{-1}(0.95) = 1 - 1.6449 = -1.6449$$

Gleichungssystem aufstellen, mit TR $\boxed{|\square| \{^\square_\square}$-Taste rechts neben «9» $\rightarrow$ «$\{^\square_\square$» und dieses dann mit $\operatorname{solve}()$ lösen

$$\begin{cases} \frac{22-\mu}{\sigma} = -1.6449 \\ \frac{25-\mu}{\sigma} = 0.6745 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mu = 24.1276, \sigma = 1.2934$$

Wandelt man μ in Stunden und Minuten um, erhält man als Mittelwert 00:08 Uhr.

b) *Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, nach 2 Uhr noch Explosionen zu hören?*

$$\mathrm{P}(X > 26) = \mathrm{P}\left(Z > \frac{26 - \mu}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(Z > \frac{26 - 24.1276}{1.2934}\right) = \mathrm{P}(Z > 1.4477)$$

Wert aus Standardnormalverteilungstabelle lesen oder mit TR $\operatorname{normCdf}(-\infty, 1.4477, 0, 1)$

$$\Phi(1.4477) = 0.9261$$

Da man nur $\mathrm{P}(X < x)$ berechnen kann, muss noch minus 1 gerechnet werden

$$\mathrm{P}(X > 26) = 1 - \mathrm{P}(X < 26) = 1 - \mathrm{P}(Z < 1.4477) = 1 - 0.9261 = 0.0739 = \underline{7.39\%}$$

5.5.4. Beispiel 2: Geburtsgewicht

8.2% aller Babies werden mit einem Geburtsgewicht unter $x_{\min} = 2.5\mathrm{kg}$ *geboren und gelten als «low birth weight». Das mittlere Gewicht ist 3.5kg. Wie schwer ist ein Baby mindestens, welches schwerer als 95% aller Babies ist?*

Die Wahrscheinlichkeiten aus der Aufgabe herauslesen und standardisieren:

$$\mathrm{P}(X \leq x_{\min}) = 0.082, \quad 0.082 = \mathrm{P}\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x_{\min} - \mu}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{x_{\min} - \mu}{\sigma}\right)$$

Wert aus Quantil-Standardnormalverteilungstabelle lesen *(1 - Wert rechnen, um ihn aus der Tabelle ablesen zu können, danach mit mal −1 wieder zurücktransformieren)* oder direkt mit TR $\operatorname{invNorm}(0.082, 0, 1)$

$$\Phi^{-1}(0.082) = -1 \cdot \Phi^{-1}(1 - 0.082) = -1 \cdot 1.392 = -1.392$$

Standardabweichung σ berechnen:

$$\sigma = \frac{x_{\min} - \mu}{-1.392} = \frac{2.5 - 3.5}{-1.392} = 0.7184$$

Z-Wert für 95%-Quantile aus der Quantilentabelle ablesen oder mit $\operatorname{invNorm}(0.95, 0, 1)$:

$$Z = \Phi^{-1}(0.95) = 1.6449$$

Das kritische Gewicht x mithilfe der Standardnormalverteilungsformel berechnen:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad 1.644 = \frac{x - 3.5}{0.7184} \quad \Rightarrow \quad x = \underline{4.682\mathrm{kg}}$$

Sollte eine Frage zur Varianz bei n Stichproben kommen, muss die Varianz einfach durch n geteilt werden.

$$\operatorname{var}(M_n) = \frac{\operatorname{var}(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}, \sigma_1 = \sqrt{\operatorname{var}(M_n)}$$

5.6. BINOMIALVERTEILUNG

Bei einem Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ausgängen sind die verschiedenen Versuchsausgänge Binomialverteilt.

Anwendungen: Anzahl Eintreten eines Bernoulliexperimentes, z.B. Würfe eines fairen Würfels

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung ist:

$$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

$\boldsymbol{k}$: Anzahl Ereignisse
$\boldsymbol{n}$: Anzahl Durchführungen
$\boldsymbol{p}$: Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis eintritt

Erwartungswert	***Varianz***
$E(X)=n\cdot p$	$\operatorname{var}(X)=n\cdot p\cdot(1-p)$

TR Binominalkoeffizient $\binom{n}{k}$*: menu-5-3 /* $\mathrm{nCr}(n,k)$*, TR Binomialverteilung: menu-5-5-A /* $\mathrm{binomPdf}(n,p,k)$

5.6.1. Normalapproximation Binomialverteilung

X ist die Summe von n kleinen Einflüssen auf das Gesamte $\Rightarrow \mathrm{P}(X\leq k)$ kann mit der ***Normalverteilung*** approximiert werden, sofern die ***Anzahl Wiederholungen*** n gross genug ist und man sich in der Mitte der Normalverteilung befindet.

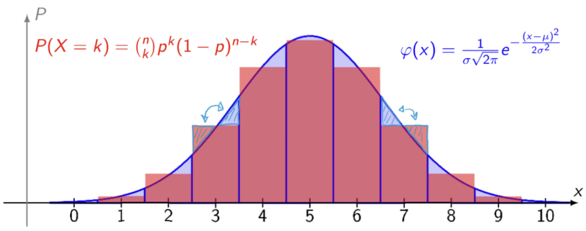
$\dfrac{X-\mu}{\sigma}=\dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ ist angenähert standardnormalverteilt.

5.6.2. Standardisierung mit Korrektur

Für eine genauere Approximation kann folgende Korrektur eingefügt werden:

$$\mathrm{P}(a<X\leq b)=\Phi\left(\frac{b+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{a+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$\mathrm{P}(a\leq X\leq b)=\Phi\left(\frac{b+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{a-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$



5.6.3. Beispiel 1: Schwurbler-Anteil (nicht selten)

An eine Verschwörungstheorie glauben 14% der Amerikaner. Ein Dorf hat 87 Einwohner.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in diesem Dorf mehr als 10 Anhänger dieser Theorie zu finden?

$$X=\text{Anzahl Anhänger im Dorf},\quad n=87,\quad p=0.14$$

Erwartungswert und Varianz

$$\mu=n\cdot p=12.180,\quad \sigma=\sqrt{np(1-p)}\approx 3.2365$$

Nomalverteilungsapproximation der Binomialverteilung

Standardisierung: $Z=(X-\mu)/\sigma$

$$\mathrm{P}(X\leq 10)\approx\mathrm{P}\left(Z<\frac{\overbrace{10.5}^{X+\frac{1}{2}}-\mu}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z<\frac{10.5-12.180}{3.2365}\right)=\mathrm{P}(Z<-0.5191)\overset{5-5-2}{=}0.3018$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}(X>10)\approx 1-0.3018=0.698\Rightarrow \underline{69.8\%}$$

5.6.4. Beispiel 2: Würfel, Abweichung mit Grenzen

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in hundert Würfen von fairen Sechserwürfeln eine um mehr als 5 von der erwarteten Anzahl abweichende Anzahl gerader Augenzahlen zu erhalten?

$$X = \text{Anzahl gerader Augenzahlen}, \quad n = 100, \quad p = \frac{1}{2} \quad (\text{Wahrscheinlichkeit gerade Augenzahl})$$

Erwartungswert und Varianz

$$\mu = n \cdot p = 50, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 5$$

Nomalverteilungsapproximation der Binomialverteilung

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X < 45 \wedge X > 55) &= 1 - \mathrm{P}(45 \leq X \leq 55) \\ \mathrm{P}(45 \leq X \leq 55) &= \mathrm{P}\left(\frac{45-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{55-\mu}{\sigma}\right) \\ &\approx \mathrm{P}\left(\frac{\overbrace{-5.5}^{45-50+\frac{1}{2}}}{5} \leq Z \leq \frac{\overbrace{5.5}^{55-50+\frac{1}{2}}}{5}\right) = \mathrm{P}(-1.1 \leq Z \leq 1.1) \end{aligned}$$

Wert für 1.1 aus Standardnormalverteilungstabelle lesen oder mit TR 5-5-2 $\mathrm{normCdf}(-\infty, 1.1, 0, 1)$

$$\Phi(1.1) - \Phi(-1.1) = \Phi(1.1) - (1 - \Phi(1.1)) = 0.8643 - (1 - 0.8643) = 0.7286$$
$$\Rightarrow \mathrm{P}(X < 45 \wedge X > 55) = 1 - 0.7286 = 0.2714 \Rightarrow \underline{27.14\%}$$

5.6.5. Beispiel 3: Mehr als X Ereign. (nicht selten)

40% aller Kreditkartentransaktionen sind Visa-Transaktionen. Wie wahrscheinlich ist es, in einer Stichprobe von 1000 Transaktionen ***mehr als*** 430 Visa-Transaktionen zu finden?

$$X = \text{Anzahl Visa-Transaktionen}, \quad n = 1000, \quad p = 0.4, \quad Y = \text{Normalverteilte Zufallsvariable}$$

Erwartungswert und Varianz

$$\mu = n \cdot p = 400, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{240}$$

Normalverteilungsapproximation der Binomialverteilung

$$\mathrm{P}(X \leq 430) \approx \mathrm{P}\left(Y \leq 430 + \frac{1}{2}\right)$$

Standardisierung mit $Z = (Y - \mu)/\sigma$

$$\mathrm{P}\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{430 + \frac{1}{2} - 400}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{430.5 - 400}{\sqrt{240}}\right) = \mathrm{P}(Z \leq 1.9688)$$

Quantilwert berechnen mit TR: Menü-5-5-2 $\mathrm{normCdf}()$

$$\Phi^{-1}(1.9688) = \mathrm{normCdf}(-\infty, 1.9688, 0, 1) = 0.97551$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}(X > 430) = 1 - 0.97551 = 0.02449 \Rightarrow \underline{2.44\%}$$

5.7. POISSON-VERTEILUNG

Für gedächtnislose Prozesse mit gleichem Parameter a, einer Anzahl Ereignisse mit exponentialverteilten Intervallen, Approximation der Binomialverteilung für seltene Ereignisse, die mit Rate λ eintreten.

Anwendung: Wenn in einer (Teil-)Aufgabenstellung das Wort «selten» steht.

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Poisson-Verteilung ist:

$$\mathrm{P}_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

k: Anzahl Ereignisse
λ: Durchschnittliches Auftreten des Ereignis im Intervall

Erwartungswert	*Varianz*
$E(X) = \lambda$	$\mathrm{var}(X) = \lambda$

5.7.1. Beispiel 1: Schwurbler-Anteil (selten)

*1% der Personen glauben, dass die Erde Flach ist. Wie wahrscheinlich ist es, in einem Dorf mit 87 Einwohner **mehr als** zwei Flacherdler hat?*

$$n = 87, \quad p = 0.01, \quad \lambda = n \cdot p = 87 \cdot 0.01 = 0.87$$

$$\mathrm{P}(X > 2) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 2)$$

$$\mathrm{P}(X \leq 2) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{2} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) \approx 0.9420$$

$$\Rightarrow P(X > 2) = 1 - 0.9420 = 0.0508 \Rightarrow 5.08\%$$

5.7.2. Beispiel 2: 6er mit 5 Würfeln

*Es passiert **sehr selten**, dass beim Werfen von 10 fairen Sechserwürfel genau 5 Würfel eine Fünf zeigen. Wie wahrscheinlich ist es, dass dies in 100 Versuchen **mehr als 2 mal** passiert?*

Genau fünf Fünfer beim Wurf von 10 Würfeln haben die Wahrscheinlichkeit p.

Binom TR: Menü-5-3 / $\mathrm{nCr}(10, 5)$

$$n = 100, \quad p = \binom{10}{5} \frac{1^5 \cdot 5^5}{6^{10}} = 0.013024, \quad \lambda = n \cdot p = 100 \cdot 0.013024 = 1.3024$$

$$\mathrm{P}(Y > 2) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 2)$$

$$\mathrm{P}(X \leq 2) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{2} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) = 0.8566$$

$$\Rightarrow P(Y > 2) = 1 - 0.8566 = 0.1434 \Rightarrow \underline{14.34\%}$$

5.7.3. Beispiel 3: Mehr als X Ereignisse (selten)

*Betrügerische Transaktionen sind **selten**, erreichen aber etwa 1% des gesamten Zahlungsvolumens.*

Unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit einer betrügerischen Transaktion 0.1% *ist, wie wahrscheinlich ist es, dass der Händler in einer Stichprobe von* 1000 *Transaktionen mehr als* 3 *betrügerische findet?*

$$n = 1000, \quad p = 0.001, \quad \lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0.001 = 1$$

$$\mathrm{P}(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$$

$$\mathrm{P}(X \leq 3) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{3} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!}\right) \approx 0.981012$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}(X > 3) = 1 - 0.981012 = 0.018988 \Rightarrow \underline{1.89\%}$$

6. HYPOTHESEN TESTEN

Meist Aufgaben 4 oder 5 und manchmal auch noch 8 - kann also in zwei Aufgaben vorkommen.
Punkteverteilung: *Korrekter Test verwendet (1), Korrekte Nullhypothese (1), sinnvolles α (1), Korrekte Werte (1), Festlegen, ob Nullhypothese verworfen werden kann (1), Korrekte Schlussfolgerung notieren (1)*

6.1. METHODIK

Aufgabe
Gegeben ist eine Studie oder Untersuchung mit diversen Messdaten.

Die Frage ist meist «Kann man daraus schliessen …» / «Kann damit eine Aussage über xy gemacht werden» / «Formulieren Sie einene Test … «

Vorgehensweise
1. Korrekte Testmethode auswählen und entsprechendes Beiblatt verwenden
2. Anleitung des ausgewählten Testes folgen

Sinnvolles α: $0.05, 0.01, 0.001$ *(Häufig* 0.05*)*

6.2. T-TEST

- **Wann verwenden?** Beim Vergleich der Mittwelwerte zweier ***kontinuierlicher*** Datengruppen, Daten sind ***Normalverteilt*** und weisen die gleiche Varianz auf. Die Beobachtungen sind ***unabhängig***.
- **Was macht der Test?** Testet, ob sich zwei Stichproben ***nicht*** signifikant voneinander unterscheiden.
- **Gegeben:** 2 Listen an Datenwerten oder Anzahl Stichproben, Mittelwert und Varianz

Beispiel Nullhypothese H_0: Die Stichproben $X_1, ..., X_n$ und $Y_1, ..., Y_m$ mit gleicher Varianz haben den gleichen Erwartungswert.

6.2.1. Berechnung

- Beiblatt ***«T-Test»*** verwenden *(Beim Fall zwei bleibt der obere Teil mit den Messdaten leer)*
- Falls 2 Listen an Datenwerten gegeben: TR-Skript ***«tverttest»*** verwenden:

$$\text{tverttest}\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix}, \alpha\right)$$

- Falls zwei Datengruppen mit Anzahl Messpunkte, Durchschnittswert und Standardabweichung gebenen: TR-Skript ***«tverttest2»*** verwenden:

$$\text{tverttest2}(n, mx, sx, m, my, sy, \alpha)$$

  $n =$ Anzahl Werte Messreihe X, $mx =$ Durchschnitt der X-Werte, $sx =$ Standardabweichung der X-Werte,
  $m =$ Anzahl Werte Messreihe Y, $my =$ Durchschnitt der Y-Werte, $sy =$ Standardabweichung der Y-Werte
- Auf Prüfung schreiben, dass der T-Test auf dem Beiblatt steht

6.3. χ^2 TEST

Wann verwenden? Um zu prüfen, ob sich die ***Häufigkeitsverteilung*** einer kategorialen Variable von einer angenommenen Gleichverteilung unterscheidet.

Was macht der Test? Häufigkeiten oder Anteile von zwei oder mehr Gruppen kategorialer Daten vergleichen und feststellen, ob sie sich signifikant unterscheiden

Gegeben: Eine Messung für jede Kategorie

Beispiel Nullhypothese H_0: Die beobachteten Häufigkeiten n_i entsprechen den Wahrscheinlichkeiten p_i

6.3.1. Berechnung

- Beiblatt ***«χ^2-Test»*** verwenden
- TR-Skript ***«x2test»*** verwenden:
  Achtung: wenn $P(x_i) = 18\%$, muss in Tabelle 0.18 geschrieben werden und nicht 18

$$\text{x2test}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{P}(x_1) & x_1 \\ \mathrm{P}(x_2) & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ \mathrm{P}(x_n) & x_n \end{pmatrix}, \alpha\right)$$

- Auf Prüfung schreiben, dass der χ^2-Test auf dem Beiblatt steht

6.4. KOMOLGOROV-SMIRNOV-TEST

Wann verwenden? Wenn mehrere Zufallsvariablen und Grenzen angegeben sind.

Was macht der Test? Testet, ob eine gegebene Zufallsvariable einer ***Gleichverteilung*** folgt.

Gegeben: n Werte, die scheinbar gleichverteilt sind, Min- und Max Grenze.

6.4.1. Berechnung

- Beiblatt ***«Beiblatt Kolmogorov-Smirnov-Test»*** verwenden
- TR-Skript ***«smirnovtest»*** verwenden *(Skript sortiert Werte automatisch)*:

$$\text{smirnovtest}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{minVal}, \text{maxVal}\right)$$

  (Achtung: K_{krit} muss manuell aus Tabelle ausgelesen werden)
- Auf Prüfung schreiben, dass der Kolmogorov-Smirnov-Test auf dem Bleiblatt steht

6.5. WEITERE THEORIE

6.5.1. Grundsätzliche Testmethode

1. ***Nullhypothese*** H_0 *(Nichts besonderes)* und ggf. Alternativhypothese H_1 *(Etwas besonderes)* formulieren
2. ***Testgrössen*** und ***Verteilung*** unter Annahme der Nullhypothese bestimmen
3. Wahl des ***Signifikanzniveaus*** α *(Oft 0.05, 0.01, 0.001)*
4. ***Kritischer Wert*** für Testgrösse bestimmen, die nur mit Wahrscheinlichkeit α erreicht wird
5. Kritischer Wert erreicht? $\Rightarrow$ ***H_0 verwerfen***

- ***Fragestellung:*** Hilft das neue Medikament dem Patienten, schneller gesund zu werden?
- ***Nullhypothese H_0:*** Es ist kein Unterschied in der Genesungszeit zwischen Medikament und Placebo feststellbar.
- ***Alternativhypothese H_1:*** Die Genesungszeit zwischen Medikament und Placebo ist verschieden.

7. EREIGNISSE UND WAHRSCHEINLICHKEIT

Meist Aufgabe 7 oder 8.
Punkteverteilung: *Wahl geeigneter Ereignisse (1), Wahrscheinlichkeiten korrekt zuordnen (1), Korrekte Sätze anwenden (1-2), Gesuchte Wahrscheinlichkeiten berechnen (Rest)*

7.1. METHODIK

Aufgabe
Gegeben ist eine komplizierte Situation. Nur «ja / nein»-Resultate, keine Messwerte, Abhängigkeit.

Die Frage ist oft: Mit welcher Wahrscheinlichkeit passiert etwas? «Wie gros ist die Wahrscheinlichkeit, dass …» / «Wie wahrscheinlich ist es, …» / «Wie häufig …»

Vorgehensweise
1. Ereignisse ableiten und hinschreiben
2. Bedingte Wahrscheinlichkeiten zuordnen
3. Gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeiten identifizieren
4. Rechenregeln anwenden: Satz von Bayes und/oder Totale Wahrscheinlichkeit

Satz von Bayes
Für zwei beliebige Ereignisse mit A und B mit nicht verschwindender Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\mathrm{P}(A|B) \cdot \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B|A) \cdot \mathrm{P}(A) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(B|A) \cdot \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}$$

Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit
Hat man für ein Ereignis A mehrere Bedingungen B_i *(z.B. mehrere Fälle oder Ursachen für A)*, kann man die Wahrscheinlichkeit für A berechnen, wenn man die bedingten Wahrscheinlichkeiten für B_i zusammenzählt *(Aus Einzelfällen lässt sich die Gesamtsituation zusammenstellen.)*

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A|B_i) \cdot \mathrm{P}(B_i)$$

7.1.1. Beispiel: Positiver HIV-Test

Experiment
Ein HIV-Test ist nicht immer zuverlässig, er kann einer erkrankten Person ein negatives Resultat liefern oder umgekehrt. ***Ist das Auftreten des gesuchten Ereignis seltener als die Fehlerquote, ist der Test schlechter als 50%.***

Ereignisse
$\Omega = \{$ Alle Testausgänge $\}$
$H = \{$ Person mit HIV infiziert $\}$, $\mathrm{P}(H) = 0.001$
$T = \{$ Test positiv $\}$, $\mathrm{P}(T|H) = 0.999$
$\mathrm{P}\left(\bar{T}|\bar{H}\right) = \{$ negat. Test bei gesunder Pers. $\} = 0.9999$

Totale Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(T)$ für positiven Test, egal ob infiziert

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T) &= \mathrm{P}(T|H) \cdot \mathrm{P}(H) + \mathrm{P}\left(T|\bar{H}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\bar{H}\right) \\ &= \mathrm{P}(T|H) \cdot \mathrm{P}(H) + \underbrace{\left(1 - \mathrm{P}\left(\bar{T}|\bar{H}\right)\right) \cdot (1 - \mathrm{P}(H))}_{\text{Umkehren des Ereignisses in bekannte Werte}} \\ &= 0.999 \cdot 0.0001 + 0.0001 \cdot 0.9999 = \underline{0.00019899}\end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit, bei positivem Test infiziert zu sein $\mathrm{P}(H|T)$

$$\mathrm{P}(H|T) = \mathrm{P}(T|H) \cdot \frac{\mathrm{P}(H)}{\mathrm{P}(T)} = 0.999 \cdot \frac{0.0001}{0.00019899} = \underline{0.502}$$

7.2. BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT

Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, wenn wir schon wissen, dass B eingetreten ist, A und B sind ***unabhängig***.

$$\mathrm{P}(\text{was wir wissen wollen} \mid \text{was wir wissen}) = \mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

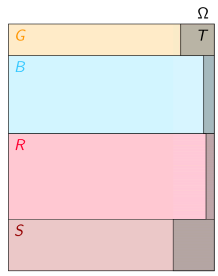
7.2.1. Beispiel: Enterprise

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit zu sterben, wenn man ein Redshirt auf der Enterprise ist?

Bereich	*Shirtfarbe*	*Bestand*	*Tot*
Command	gold	55	9
Science	blau	136	7
Engineering	rot	149	6
Security	rot	90	18
Total		430	40

Ereignisse

- $\Omega = \{\text{Alle Besatzungsmitglieder}\}$
- $G = \{\text{Command}\}$
- $B = \{\text{Science}\}$
- $R = \{\text{Redshirts}\}$
- $S = \{\text{Security}\}$
- $T = \{\text{kommt um}\}$



$\mathrm{P}(R|T)$: Wahrscheinlichkeit, dass ein Toter ein rotes Shirt trägt.

- ***Was wir wissen wollen:*** Trägt die Person ein rotes Shirt?
- ***Was wir wissen:*** Person ist tot.

$$\mathrm{P}(R|T) = \frac{\mathrm{P}(R \cap T)}{\mathrm{P}(T)}$$

$\mathrm{P}(T|R)$: Wahrscheinlichkeit, dass ein Redshirt umkommt

- ***Was wir wissen wollen:*** Ist die Person tot?
- ***Was wir wissen:*** Die Person trägt ein rotes Shirt.

$$\mathrm{P}(T|R) = \frac{\mathrm{P}(T \cap R)}{\mathrm{P}(R)}$$

7.2.2. Satz von Bayes

Für zwei beliebige Ereignisse mit A und B mit nicht verschwindender Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\mathrm{P}(A|B) \cdot \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B|A) \cdot \mathrm{P}(A) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(B|A) \cdot \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}$$

Der Satz von Bayes kann angewendet werden, um ***von einer Wahrscheinlichkeit auf die andere zu schliessen***:

$$\mathrm{P}(R|T) = \frac{\mathrm{P}(R \cap T)}{\mathrm{P}(T)} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{P}(R)}{\mathrm{P}(R)}}_{\text{erweitern}} = \underbrace{\frac{\mathrm{P}(T \cap R)}{\mathrm{P}(R)} \cdot \frac{\mathrm{P}(R)}{\mathrm{P}(T)}}_{\text{umstellen}} = \underbrace{\mathrm{P}(T|R)}_{\text{einsetzen}} \cdot \frac{\mathrm{P}(R)}{\mathrm{P}(T)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(R|T) = \mathbf{P}(T|R) \cdot \frac{\mathbf{P}(R)}{\mathbf{P}(T)}$$

Merksatz: *das rechts vom Strich kommt unter den Strich (90° drehen).* $\mathrm{P}(R|T)$ *wird zu ...* $\cdot\, \mathrm{P}(R)/\mathrm{P}(T)$

Im Allgemeinen gilt $\mathrm{P}(A|B) \neq \mathrm{P}(B|A)$, der Satz von Bayes erlaubt aber, die Schlussrichtung umzukehren.

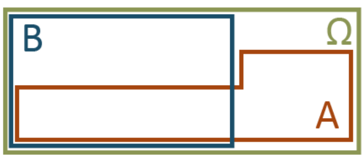
7.2.3. Unabhängigkeit

A und B heissen ***unabhängig***, wenn $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$ *(W'keit für A und B zusammen ist gleich gross wie die einzelne W'keit von A und B multipliziert).*

Abhängig

$\mathrm{P}(A|B) < \mathrm{P}\left(A|\bar{B}\right)$

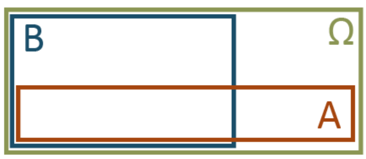
B beinflusst A, W'keit mit B ist darum anderst als ohne. B verändert also die Form von A.



Unabhängig

$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}\left(A|\bar{B}\right)$

B beinflusst A nicht, W'keit ist gleich. Der Anteil von A ist bei B und $\bar{B}$ gleich.



Bei bedingten Wahrscheinlichkeiten gilt:

$$\mathrm{P}\left(\bar{A}|B\right) = 1 - \mathrm{P}(A|B)$$

Der Begriff ***«unabhängig»*** wird manchmal ***verwechselt*** mit dem Begriff ***«disjunkt»***. Zwei disjunkte Ereignisse A und B, also mit $\mathrm{P}(A \cdot B) = \emptyset$, können aber ***nur dann unabhängig*** sein, wenn eins der beiden Ereignisse die ***Wahrscheinlichkeit 0*** hat. Nur dann ist $\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = 0 = \mathrm{P}(\emptyset) = \mathrm{P}(A \cdot B)$.

7.2.4. Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit

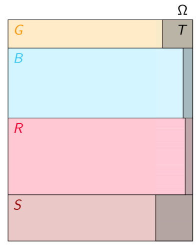
Hat man für ein Ereignis A mehrere Bedingungen B_i *(z.B. mehrere Fälle oder Ursachen für A)*, kann man die Wahrscheinlichkeit für A berechnen, wenn man die bedingten Wahrscheinlichkeiten für B_i zusammenzählt *(Aus Einzelfällen lässt sich die Gesamtsituation zusammenstellen.)*

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A|B_i) \cdot \mathrm{P}(B_i)$$

Beispiel

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(T)$, auf der Enterprise umzukommen?

Wahrscheinlichkeitsfallunterscheidung: Aus den bedingten Wahrscheinlichkeiten die Bedingung herausrechnen, um die Totale Wahrscheinlichkeit zu erhalten.

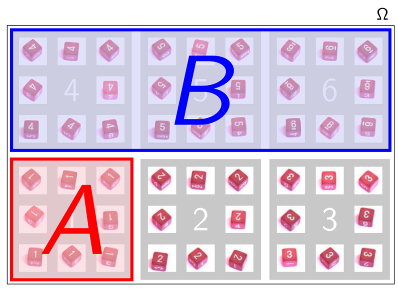


$$\begin{array}{l} \quad \mathrm{P}(T \cap G) = \mathrm{P}(T|G) \cdot \mathrm{P}(G) \\ +\mathrm{P}(T \cap B) = \mathrm{P}(T|B) \cdot \mathrm{P}(B) \\ +\mathrm{P}(T \cap R) = \mathrm{P}(T|R) \cdot \mathrm{P}(R) \\ \hline \quad \mathrm{P}(T) \end{array}$$

7.3. WEITERE THEORIE

- ***Ergebnis:*** Die einzelnen, sich gegenseitig ausschliessenden möglichen Ausgänge eines Zufallsexperiments, also der tatsächlich eingetretene Fall/Messwert *(z.B. Werfen einer 5 mit einem Würfel)*
- ***Ereignis:*** Ergebnisse können zu Ereignissen zusammengefasst werden. Diese Teilmengen werden mit Grossbuchstaben gekennzeichnet. *(z.B Würfeln einer geraden Augenzahl $A = \{2, 4, 6\}$)*
- ***Elementarereignis $\{\omega\}$:*** Ein Ereignis, welches nur ein Ergebnis beinhaltet. Teilmenge von Ω *(Vereinfacht gesagt: «Das Elementarereignis ω ist der Ausgang eines Experiments»)*.

7.3.1. Versuche



- $\omega =$ ***Elementarereignis***, ein (möglicher) Versuchsausgang
- $\Omega =$ Menge aller Elementarereignisse
- $A =$ Ereignis 1 *(Alle Versuchsausgänge, bei denen der Würfel 1 zeigt)*
- $B =$ Ereignis ≥ 4

7.3.2. Spezielle Ereignisse

- ***$A = \Omega \subset \Omega$:*** Das ***sichere*** Ereignis *(Das Ereignis $A = \Omega$ tritt immer auf)*.
- ***$B = \emptyset = \{\} \subset \Omega$:*** Das ***unmögliche*** Ereignis *(Tritt nie ein, z.B. das Würfeln einer 7)*.
- Haben zwei Ereignisse keine Überschneidungen, sind sie ***paarweise disjunkt***.

7.3.3. Ereignis-Algebra

Eine Ereignis-Algebra ist eine Menge $\mathcal{A}$ von Ereignissen derart, dass gilt:

1. Die ***Vereinigung*** von zwei Ereignissen ist ein Ereignis: $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cup B \in \mathcal{A}$ *(A oder B)*
2. Die ***Differenz*** von zwei Ereignissen ist ein Ereignis: $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \setminus B \in \mathcal{A}$ *(A ohne B)*
3. Es gibt das ***unmögliche Ereignis***: $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{A}$
4. Das ***Komplement*** eines Ereignisses ist ebenfalls ein Ereignis: $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ *(!A, nicht A)*
5. Die ***Schnittmenge*** von zwei Ereignissen ist ein Ereignis:
   $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cap B = (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \in \mathcal{A}$ *(A und B)*

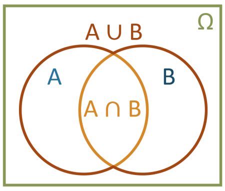
7.3.4. Wahrscheinlichkeit

Begriff	*Modell*	*Beispiel Würfel*
Versuchsausgang, Elementarereignis	ω	Zahl, die gewürfelt wird
alle Versuchsausgänge	Ω	$\{1, ..., 6\}$
Ereignis	$A \subset \Omega$	$A = \{1, 2\}, B = \{2, ..., 4\}$
Ereignis ist eingetreten	$\omega \in A$	1 wurde gewürfelt
sicheres Ereignis, tritt immer ein	Ω	$\{1, ..., 6\}$
unmögliches Ereignis, kann nicht eintreten	$\emptyset$	$\{7\}$
A und B treten ein	$A \cap B$	$\{2\}$
A oder B treten ein	$A \cup B$	$\{1, ..., 4\}$
A hat B zur Folge, wenn A, dann auch B	$A \subset B$	
Komplementärereignis, nicht A	$\bar{A} = \Omega \setminus A$	$\{3, ..., 6\}$

7.3.5. Definition Wahrscheinlichkeit

$$\mathrm{P}(A) = \lim_{\text{Anzahl Versuche} \to \infty} \frac{\text{Anzahl Eintreten von A}}{\text{Anzahl Versuche}} = \lim_{n \to \infty} \text{rel. Häufigkeit von A}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $A \subset \Omega$ ist eine Zahl $\mathrm{P}(A)$ mit ***folgenden Eigenschaften***:



- $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$ *Wertebereich, eine Wahrscheinlichkeit ist immer zwischen 0 und 1*
- $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ *Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses*
- $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$ *Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses*
- $\mathrm{P}\left(\bar{A}\right) = \mathrm{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathrm{P}(A)$ *Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses*
- $\mathrm{P}(A \setminus B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$ *Wahrscheinlichkeit der Differenz zweier Ereignisse A und B*
- $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$ *Wahrscheinlichkeit der Vereinigung zweier beliebiger Ereignisse (Schnittmenge subtrahieren)*
- $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup ...) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + ... + \mathrm{P}(A_n) + ...$ *Diskunkte Vereinigung, Ereignisse nicht gleichzeitig möglich ($A_j \cap A_i = \emptyset$ für $i \neq j$)*

7.3.6. Laplace-Experiment

Alle Versuchsausgänge haben die ***gleiche Wahrscheinlichkeit***. Nur das ***unmögliche Ereignis*** hat W'keit 0.
Würfeln, Karten ziehen, Münzen werfen.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{Anzahl günstige Ausgänge}}{\text{Anzahl mögliche Ausgänge}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Beispiel zwei Würfel

i: Resultat Würfel 1, k: Resultat Würfel 2, D: Pasch gewürfelt, S: Summe der Würfel ergibt 7

- $\Omega = [6] \times [6] = \{(i, k) \mid 1 \leq i, k \leq 6\} \quad \Rightarrow \quad |\Omega| = 36$
- $D = \text{Pasch} = \{(i, i) \mid 1 \leq i \leq 6\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
- $S = \text{Summe} = 7 = \{(i, k) \mid i + k = 7\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(S) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

7.3.7. Bernoulli-Experiment

Genau zwei Versuchsausgänge mit Wahrscheinlichkeiten p und $1 - p$
Münzen werfen, Mädchen oder Junge, Ereignis A tritt ein oder nicht.

$$p = \mathrm{P}(A), \quad 1 - p = 1 - \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(\bar{A}\right)$$

I BEIBLATT LINEARE REGRESSION

Name: ______________________ **Aufgabe:** ______________________

i	x (Punkt auf x-Achse)	y (Punkt auf y-Achse)	x^2	y^2	$x \cdot y$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
$\sum$					
Erwartungs-wert $= \frac{\sum}{\text{Anzahl}}$	$E(X) =$	$E(Y) =$	$E(X^2) =$	$E(Y^2) =$	$E(X \cdot Y) =$

$$\mathbf{cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\mathbf{var}(\boldsymbol{X}) = E(X^2) - E(X)^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\mathbf{var}(\boldsymbol{Y}) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\operatorname{var}(X)} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\boldsymbol{b} = E(Y) - a \cdot E(X) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

linearisiert: $y(x) = a \cdot x + b$

Qualität prüfen

$$r = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X) \cdot \operatorname{var}(Y)}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \quad \rightarrow \quad r^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Qualität der linearisierten Funktion ist besser, je näher r^2 zu 1 ist.

Modell gut?

- ☐ Ja, da r^2 nahe an 1 ist ⇒ Modell ist gut
- ☐ Nein, da r^2 nicht nahe bei 1 ist. ⇒ Modell ist schlecht.

II BEIBLATT T-TEST

Name: ________________________ **Aufgabe:** ________________________

Oberer Teil der Tabelle bleibt leer, falls Stichprobengrösse, Mittelwert und Varianz gegeben sind.

i	x	y
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
	$n =$	$m =$
	Geschätzter Erwartungswert:	
	$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i =$	$\bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i =$
	Geschätzte Varianz:	
	$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 =$	$\sigma_y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 =$
	$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} =$	$\sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} =$

Teststatistik

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n-1)\cdot\sigma_x^2 + (m-1)\cdot\sigma_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n\cdot m\cdot(n+m-2)}{n+m}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Nullhypothese

____

____

$\alpha =$ ____________ p-Value $= 1-\alpha =$ ____________ *(Kann auch $1-\alpha/2$ sein, wenn Abweichung beidseitig sein kann)*

Freiheitsgrade $k = m + n - 2 =$ ____________ $T_{\text{krit}} =$ ____________

Ist $|T| > T_{\text{krit}}$?

☐ Ja $\Rightarrow$ Die Nullhypothese muss verworfen werden

☐ Nein $\Rightarrow$ Die Nullhypothese kann nicht verworfen werden

III BEIBLATT χ^2-TEST

Name: ____________________ **Aufgabe:** ____________________

Kategorie i Beschreibung ergänzen	p_i W'keit für Kategorie	n_i Anzahl in Kategorie	$n \cdot p_i$	$(n_i - n \cdot p_i)^2/(n \cdot p_i)$ Diskrepanz Summanden
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
$\sum$	$p =$	$n =$		D *(Diskrepanz)* $=$

Nullhypothese

____

____

____

$\alpha =$ __________ p-Value $= 1 - \alpha =$ __________ $k =$ __________ $D_{\text{krit}} =$ __________

Ist $D > D_{\text{krit}}$**?**

- ☐ Ja $\Rightarrow$ Die Nullhypothese muss verworfen werden
- ☐ Nein $\Rightarrow$ Die Nullhypothese kann nicht verworfen werden.

IV BEIBLATT KOLMOGOROV-SMIRNOV-TEST

Name: ______________________ **Aufgabe:** ______________________

$F(x_j) =$ ______________________

j	x_j (Messwerte sortiert)	$\frac{j}{n} - F(x_j)$	$F(x_j) - \frac{j-1}{n}$
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
		$\mathrm{m1} = \max\left(\frac{j}{n} - F(x_j)\right) =$	$\mathrm{m2} = \max\left(F(x_j) - \frac{j-1}{n}\right) =$
		$K_n^+ = \sqrt{n} \cdot \mathrm{m1} =$	$K_n^- = \sqrt{n} \cdot \mathrm{m2} =$

Nullhypothese

____

____

____

$\alpha =$ ________ $\mathrm{pValue} = 1 - \alpha =$ ________ $\text{Tabellen Zeilen } n =$ ________ $K_{\mathrm{krit}} =$ ________

Ist $K_n^+ > K_{\mathrm{krit}}$?

☐ Ja $\Rightarrow$ Die Nullhypothese muss verworfen werden

☐ Nein $\Rightarrow$ Die Nullhypothese kann nicht verworfen werden

V VERTEILUNGSTABELLEN

V.I NORMALVERTEILUNG

x	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Tabelle 1: Verteilungsfunktion der Normalverteilung

p	x
0.75	0.6745
0.8	0.8416
0.9	1.2816
0.95	1.6449
0.975	1.9600
0.99	2.3263
0.995	2.5758
0.999	3.0902
0.9995	3.2905

Tabelle 2: Quantilen der Normalverteilung

V.II χ^2-VERTEILUNG

k	$p = 0.01$	$p = 0.05$	$p = 0.1$	$p = 0.25$	$p = 0.5$	$p = 0.75$	$p = 0.9$	$p = 0.95$	$p = 0.99$
1	0.000	0.004	0.016	0.102	0.455	1.323	2.706	3.841	6.635
2	0.020	0.103	0.211	0.575	1.386	2.773	4.605	5.991	9.210
3	0.115	0.352	0.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	11.345
4	0.297	0.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	13.277
5	0.554	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	15.086
6	0.872	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	16.812
7	1.239	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	18.475
8	1.646	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	20.090
9	2.088	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	21.666
10	2.558	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	23.209
11	3.053	4.575	5.578	7.584	10.341	13.701	17.275	19.675	24.725
12	3.571	5.226	6.304	8.438	11.340	14.845	18.549	21.026	26.217
13	4.107	5.892	7.042	9.299	12.340	15.984	19.812	22.362	27.688
14	4.660	6.571	7.790	10.165	13.339	17.117	21.064	23.685	29.141
15	5.229	7.261	8.547	11.037	14.339	18.245	22.307	24.996	30.578
16	5.812	7.962	9.312	11.912	15.338	19.369	23.542	26.296	32.000
17	6.408	8.672	10.085	12.792	16.338	20.489	24.769	27.587	33.409
18	7.015	9.390	10.865	13.675	17.338	21.605	25.989	28.869	34.805
19	7.633	10.117	11.651	14.562	18.338	22.718	27.204	30.144	36.191
20	8.260	10.851	12.443	15.452	19.337	23.828	28.412	31.410	37.566
21	8.897	11.591	13.240	16.344	20.337	24.935	29.615	32.671	38.932
22	9.542	12.338	14.041	17.240	21.337	26.039	30.813	33.924	40.289
23	10.196	13.091	14.848	18.137	22.337	27.141	32.007	35.172	41.638
24	10.856	13.848	15.659	19.037	23.337	28.241	33.196	36.415	42.980
25	11.524	14.611	16.473	19.939	24.337	29.339	34.382	37.652	44.314
26	12.198	15.379	17.292	20.843	25.336	30.435	35.563	38.885	45.642
27	12.879	16.151	18.114	21.749	26.336	31.528	36.741	40.113	46.963
28	13.565	16.928	18.939	22.657	27.336	32.620	37.916	41.337	48.278
29	14.256	17.708	19.768	23.567	28.336	33.711	39.087	42.557	49.588
30	14.953	18.493	20.599	24.478	29.336	34.800	40.256	43.773	50.892
50	29.707	34.764	37.689	42.942	49.335	56.334	63.167	67.505	76.154
100	70.065	77.929	82.358	90.133	99.334	109.141	118.498	124.342	135.807
500	429.388	449.147	459.926	478.323	499.333	520.950	540.930	553.127	576.493
1000	898.912	927.594	943.133	969.484	999.333	1029.790	1057.724	1074.679	1106.969

Tabelle 3: Quantilen der χ^2-Verteilung

V.III KOMOLGOROV-SMIRNOV-TEST

n	$p = 0.01$	$p = 0.05$	$p = 0.1$	$p = 0.25$	$p = 0.5$	$p = 0.75$	$p = 0.9$	$p = 0.95$	$p = 0.99$
1	0.01000	0.05000	0.10000	0.25000	0.50000	0.75000	0.90000	0.95000	0.99000
2	0.01400	0.06749	0.12955	0.29289	0.51764	0.70711	0.96700	1.09799	1.27279
3	0.01699	0.07919	0.14714	0.31117	0.51469	0.75394	0.97828	1.10166	1.35889
4	0.01943	0.08789	0.15899	0.32023	0.51104	0.76419	0.98531	1.13043	1.37774
5	0.02152	0.09471	0.16750	0.32490	0.52449	0.76741	0.99948	1.13916	1.40242
6	0.02336	0.10022	0.17385	0.32717	0.53193	0.77028	1.00520	1.14634	1.41435
7	0.02501	0.10479	0.17873	0.32804	0.53635	0.77552	1.00929	1.15373	1.42457
8	0.02650	0.10863	0.18256	0.32802	0.53916	0.77971	1.01346	1.15859	1.43272
9	0.02786	0.11191	0.18560	0.32745	0.54109	0.78246	1.01731	1.16239	1.43878
10	0.02912	0.11473	0.18803	0.32975	0.54258	0.78454	1.02016	1.16582	1.44397
11	0.03028	0.11718	0.19000	0.33304	0.54390	0.78633	1.02249	1.16885	1.44837
12	0.03137	0.11933	0.19160	0.33570	0.54527	0.78802	1.02458	1.17139	1.45207
13	0.03239	0.12123	0.19291	0.33789	0.54682	0.78966	1.02649	1.17357	1.45527
14	0.03334	0.12290	0.19396	0.33970	0.54856	0.79122	1.02823	1.17552	1.45810
15	0.03424	0.12439	0.19482	0.34122	0.55002	0.79259	1.02977	1.17728	1.46060
16	0.03509	0.12573	0.19552	0.34250	0.55123	0.79377	1.03113	1.17888	1.46283
17	0.03589	0.12692	0.19607	0.34360	0.55228	0.79482	1.03237	1.18032	1.46483
18	0.03665	0.12799	0.19650	0.34454	0.55319	0.79578	1.03351	1.18162	1.46664
19	0.03738	0.12895	0.19684	0.34535	0.55400	0.79667	1.03457	1.18282	1.46830
20	0.03807	0.12982	0.19709	0.34607	0.55475	0.79752	1.03555	1.18392	1.46981
30	0.04354	0.13510	0.20063	0.35087	0.56047	0.80362	1.04243	1.19164	1.48009
50	0.05005	0.13755	0.20794	0.35713	0.56644	0.80988	1.04933	1.19921	1.48969
100	0.05698	0.14472	0.21370	0.36331	0.57269	0.81634	1.05627	1.20666	1.49864
200	0.06049	0.14887	0.21816	0.36784	0.57725	0.82099	1.06117	1.21180	1.50458

Tabelle 4: Quantilen für den Komolgorov-Smirnov-Test

V.IV T-VERTEILUNG

k	0.75	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.0000	1.3764	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	0.8165	1.0607	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.7649	0.9785	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.7407	0.9410	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.7267	0.9195	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.7176	0.9057	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	0.8960	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.7064	0.8889	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	0.8834	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	0.8791	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	0.8755	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	0.8726	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	0.8702	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	0.8681	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	0.8662	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467
16	0.6901	0.8647	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.6892	0.8633	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.6884	0.8620	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.6876	0.8610	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.6870	0.8600	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.6864	0.8591	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	0.6858	0.8583	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.6853	0.8575	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.6848	0.8569	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	0.6844	0.8562	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.6840	0.8557	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.6837	0.8551	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.6834	0.8546	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.6830	0.8542	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.6828	0.8538	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
50	0.6794	0.8489	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
100	0.6770	0.8452	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259
500	0.6750	0.8423	1.2832	1.6479	1.9647	2.3338	2.5857
10^3	0.6747	0.8420	1.2824	1.6464	1.9623	2.3301	2.5808
10^4	0.6745	0.8417	1.2816	1.6450	1.9602	2.3267	2.5763
10^5	0.6745	0.8416	1.2816	1.6449	1.9600	2.3264	2.5759
10^6	0.6745	0.8416	1.2816	1.6449	1.9600	2.3264	2.5758

Tabelle 5: Quantilen der t-Verteilung