

# 1 Vektorgeometrie

**Winkel zwischen zwei Vektoren:** Vektoren  $u$  und  $v$  schließen den Winkel  $\varphi$  ein. Dann gilt:  
 $\cos\varphi = \frac{\langle u, v \rangle}{|u| \cdot |v|}$

**Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene**  
 $= 90^\circ - \cos\varphi = \frac{\langle n, r \rangle}{|n| \cdot |r|}$

## 1.1 Geraden

Gerade in Parameterform:

$$g: x(\lambda) = a + \lambda v$$

## 1.2 Ebenen

Ebene in Parameterform (Punkt-Richtungs-Form):

$$E: x(\lambda, \mu) = a + \lambda r_1 + \mu r_2$$

Ebene in Normalform:

$$E: \langle x - a, n \rangle = 0$$

Ebene in Koordinatenform:

$$E: n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = a$$

### 1.2.1 Umformen

**Normalform nach Koordinatenform:**

$$\begin{aligned} & \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \Rightarrow & \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \Rightarrow & a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 - (a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3) = 0 \end{aligned}$$

**Parameterform nach Normalform**

$$\begin{aligned} \text{geg: } E: (\lambda, \mu) &= a + \lambda \cdot r_1 + \mu \cdot r_2 \\ n &= r_1 \times r_2 \Rightarrow \langle x - a, n \rangle = 0 \end{aligned}$$

(a ist Aufpunkt der Ebene)

**Koordinatenform nach Normalform:** Normalenvektor ablesen:

$$\begin{aligned} \text{geg: } -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ \Rightarrow n &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun muss man einen Punkt finden, welcher in der Ebene liegt, also die Koordinatengleich erfüllt. Dieser Punkt ist  $a$  in  $\langle x - a, n \rangle = 0$ . Fertig.

**Koordinatenform nach Parameterform:**

Man muss drei Punkte  $a, r_1, r_2$  in der Ebene finden, diese werden dann in  $x(\lambda, \mu) = a + \lambda r_1 + \mu r_2$  eingesetzt.

### 1.2.2 Lagebeziehungen

**Ebene zu Gerade** Eine Ebene ist zu einer Gerade parallel, wenn der Normalenvektor der Ebene orthogonal zum Richtungsvektor der Geraden ist (Skalarprodukt = 0).

### 1.2.3 Schnitte

**Schnittpunkt zweier Geraden** dazu müssen die beiden Richtungsvektoren der Geraden linear unabhängig sein. Dann wird einfach  $g = h$  gesetzt.

**Schnittpunkt Gerade mit Ebene**  $x(t_0) = a + t_0 \cdot r$ , so dass  $\langle n, x(t_0) \rangle = \delta_E$   
 $\Rightarrow t_0 = \frac{\delta_E - \langle n, a \rangle}{\langle n, r \rangle}$

### 1.2.4 Abstände

**Punkt zu Punkt:** Abstand von P zu Q =  $|P - Q|$

**Punkt zu Gerade:** gegeben sei die Gerade  $g: x = a + \lambda r$  mit  $\|r\| = 1$  und Punkt  $P$ . Man wählt bel. Punkt B auf  $g$ . Setze  $\omega := p - b$ . Es Sei  $\varphi := \angle(\omega, r)$ . Dann gilt:  
Abstand  $\delta = \|\omega\| \cdot \sin\varphi = \|\omega\| \cdot \|r\| \cdot \sin\varphi = \|\omega \times r\|$

**Abstand zwischen zwei parallelen Geraden:** Wähle Punkt  $P$  auf  $g_1$ , dann wie oben  $\delta$  berechnen.

**Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden:** Die Geraden  $g: x = p + tu$  und  $h: x = q + sv$  seien windschief.  $n = u \times v$  ( $n$  steht senkrecht auf  $u$  und  $v$ ). Dann gilt:  $\delta = \frac{|(q-p) \cdot n|}{|n|}$ .

**Punkt zu Ebene** Hilfsgerade  $h : x = p + t \cdot n$  durch P, die senkrecht auf der Ebene  $E$  steht. Wo sich  $h$  und  $E$  schneiden ist der Fußpunkt F. Abstand  $\delta = |PF|$ .

**Gerade zu Ebene** Beliebigen Punkt auf der Geraden (alle Punkte haben den gleichen Abstand) in  $|HNF|$  mit  $(|n| = 1)$  einsetzen.

**Ebene zu Ebene**

## 2 Matrizen

$a_{ij}$ :  $i$ -te Zeile,  $j$ -te Spalte

## 3 lineare Abbildungen

eine Abbildung ist linear wenn gilt:  
 $\varphi(\lambda x + y) = \lambda \varphi(x) + \varphi(y)$  und  $\varphi(0) = 0$