1 Vektorgeometrie

Winkel zwischen zwei Vektoren: Vektoren u und v schließen den Winkel φ ein. Dann gilt: $cos\varphi = \frac{\langle u,v\rangle}{|u|\cdot|v|}$

Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene $= 90° - cos\varphi = \frac{\langle n,r\rangle}{|n|\cdot|r|}$

1.1 Geraden

Gerade in Parameterform:

$$g\colon x(\lambda) = a + \lambda v$$

1.2 Ebenen

Ebene in Parameterform (Punkt-Richtungs-Form):

$$E : x(\lambda, \mu) = a + \lambda r_1 + \mu r_2$$

Ebene in Normalform:

$$E : \langle x - a, n\rangle = 0$$

Ebene in Koordinatenform:

$$E : n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = a$$

1.2.1 Umformen

Normalform nach Koordinatenform:

$$\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rangle - \langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - (a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3) = 0$$

Parameterform nach Normalform

$$geg\colon E\colon (\lambda, \mu) = a + \lambda \cdot r_1 + \mu \cdot r_2$$
$$n = r_1 \times r_2 \Rightarrow \langle x - a, n\rangle = 0$$

(a ist Aufpunkt der Ebene)

Koordinatenform nach Normalform: Normalenvektor ablesen:

$$geg\colon -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$
$$\Rightarrow n = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nun muss man einen Punkt finden, welcher in der Ebene liegt, also die Koordinatengleich erfüllt. Dieser Punkt ist a in $\langle x - a, n\rangle = 0$. Fertig.

Koordinatenform nach Parameterform: Man muss drei Punkte a, r_1, r_2 in der Ebene finden, diese werden dann in $x(\lambda, \mu) = a + \lambda r_1 + \mu r_2$ eingesetzt.

1.2.2 Lagebeziehungen

Ebene zu Gerade Eine Ebene ist zu einer Gerade parallel, wenn der Normalenvektor der Ebene orthogonal zum Richtungsvektor der Geraden ist (Skalarprodukt = 0).

1.2.3 Schnitte

Schnittpunkt zweier Geraden dazu müssen die beiden Richtungsvektoren der Geraden linear unabhängig sein. Dann wird einfach $g = h$ gesetzt.

Schnittpunkt Gerade mit Ebene $x(t_o) = a + t_0 \cdot r$, so dass $\langle n, x(t_0)\rangle = \delta_E$
$\Rightarrow t_0 = \frac{\delta_E - \langle n,a\rangle}{\langle n,r\rangle}$

1.2.4 Abstände

Punkt zu Punkt: Abstand von P zu Q $= |P-Q|$

Punkt zu Gerade: gegeben sei die Gerade $g\colon x = a + \lambda r$ mit $||r|| = 1$ und Punkt P. Man wählt bel. Punkt B auf g. Setze $\omega := p - b$. Es Sei $\varphi := \sphericalangle(\omega, r)$. Dann gilt:
Abstand $\delta = ||\omega||\cdot sin\varphi = ||\omega||\cdot||r||\cdot sin\varphi = ||\omega \times r||$

Abstand zwischen zwei parallelen Geraden: Wähle Punkt P auf g_1, dann wie oben δ berechnen.

Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden: Die Geraden $g : x = p + tu$ und $h : x = q + sv$ seien windschief. $n = u \times v$ (n steht senkrecht auf u und v). Dann gilt: $\delta = \frac{|(q-p)\cdot n|}{|n|}$.

Punkt zu Ebene Hilfsgerade $h : x = p + t \cdot n$ durch P, die senkrecht auf der Ebene E steht. Wo sich h und E schneiden ist der Fußpunkt F. Abstand $\delta = |PF|$.

Gerade zu Ebene Beliebigen Punkt auf der Geraden (alle Punkte haben den gleichen Abtand) in $|HNF|$ mit ($|n| = 1$) einsetzen.

Ebene zu Ebene