Linearna algebra nad polkolobarji

Jimmy Zakeršnik

mentor: prof. dr. Tomaž Košir

15. november 2021

Napovednik:

Motivacija:

Polkolobarjev je veliko - pojavljajo se v skoraj vsakem področju matematike. Nekateri primeri so:

- $\mathbb{N}_0$ oz. $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{R}^+$ za standardne operacije $+$ in $*$
- *max-plus algebra* $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, max, +)$ in *min-plus algebra* $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, min, +)$
- Boolove algebre
- Polkolobarji (pod)množic za $\cup$ in $\cap$

Uvodne definicije

Definicija

Za neprazno množico R, ki je opremljena z operacijama $\oplus$ in $\otimes$ pravimo, da je *polkolobar*, če zanjo velja naslednje:

1. $(R, \oplus)$ je komutativen monoid z nevtralnim elementom 0,
2. $(R, \otimes)$ je monoid z enoto 1,
3. $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ in $(b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a)$; $\forall a, b, c \in R$,
4. $0 \otimes a = 0 = a \otimes 0; \forall a \in R$.

Oznaka: $(R, \oplus, \otimes)$.

Polkolobar nad množicami

Naj bo X neprazna množica in $S \subseteq P(X)$ neprazen nabor podmnožic množice X. Nabor S je polkolobar (pod)množic za operaciji unije in preseka, če zanj velja:

1. $\emptyset \in S$
2. $E, F \in S \Rightarrow E \cap F \in S$
3. Če sta $E, F \in S$, potem obstaja končno mnogo disjunktnih množic $C_1, C_2, \ldots, C_n \in S$, da je $E \setminus F = \bigcup_{i=1}^{n} C_i \in S$.

Obravnavan tip polkolobarjev se uporablja v teoriji mere. Konkreten primer takega polkolobarja je nabor polzaprtih intervalov $[a, b) \subset \mathbb{R}$ za unijo in presek.

Polmoduli

Definicija

Naj bo R polkolobar. *Levi R-polmodul* je komutativen monoid $(M, +)$ z aditivno identiteto θ, na katerem imamo definirano množenje s skalarjem $\cdot\ : R \times M \to M$, ki zadošča naslednjim pogojem za vsaka $\lambda, \mu \in R$ in vsaka $a, b \in M$:

1. $(\lambda\mu) \cdot a = \lambda \cdot (\mu \cdot a)$,
2. $\lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$ in $(\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a$,
3. $1 \cdot a = a$ in $\lambda \cdot \theta = \theta = 0 \cdot a$

Analogno definiramo desni R-polmodul.

Linearne preslikave in matrike nad polkolobarji

Tudi na polmodulih lahko definiramo linearne preslikave: Zahtevamo aditivnost in homogenost.
Nad polkolobarjem $(R, +, \cdot)$ lahko definiramo mxn matrike, za poljubna $m, n \in \mathbb{N}$. Pri tem seštevanje definiramo enako kot za matrike nad obsegi (po komponentah), množenje pa na sledeč način za $A \in M_{m\times n}(R), B \in M_{n\times l}(R)$:

$$A \times B = C \in M_{m\times l}(R);\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj})\forall i \in \underline{m}\ \&\ \forall j \in \underline{l}$$

Bideterminante

Definicija:

Naj bo A neka $n \times n$ matrika nad komutativnim polkolobarjem R. *Bideterminanta matrike* A je urejeni par $(det^+(A), det^-(A))$, kjer sta vrednosti $det^+(A)$ in $det^-(A)$ definirani na naslednji način:

$$det^+(A) = \sum_{\pi \in Per^+(n)} (\prod_{i=1}^{n} (a_{i,\pi(i)}))$$

$$det^-(A) = \sum_{\pi \in Per^-(n)} (\prod_{i=1}^{n} (a_{i,\pi(i)}))$$

Karakteristični bipolinom

Definicija:

Naj bo A neka $n \times n$ matrika nad komutativnim polkolobarjem R. *Karakteristični bipolinom matrike* A je dvojica $(P_A^+(\lambda), P_A^-(\lambda))$, kjer sta $P_A^+(\lambda)$ in $P_A^-(\lambda)$ polinoma stopnje n v spremenljivki λ, definirana na naslednji način:

$$P_A^+(\lambda) = \sum_{q=1}^{n} \left(\left(\sum_{\substack{\sigma \in Part^+(n) \\ |dom(\sigma)|=q}} \left(\prod_{i \in dom(\sigma)}^{n} (a_{i,\sigma(i)}) \right) \right) * \lambda^{n-q} * \lambda^{n} \right)$$

$$P_A^-(\lambda) = \sum_{q=1}^{n} \left(\left(\sum_{\substack{\sigma \in Part^-(n) \\ |dom(\sigma)|=q}} \left(\prod_{i \in dom(\sigma)}^{n} (a_{i,\sigma(i)}) \right) \right) * \lambda^{n-q} \right)$$

Cayley-Hamiltonov izrek nad polkolobarji

Izrek:

Naj bo A neka $n \times n$ matrika nad komutativnim polkolobarjem z nevtralnim elementom 0 in enoto 1 in naj bo $(P_A^+(\lambda), P_A^-(\lambda))$ bipolinom, ki pripada matriki A. Tedaj velja:

$$P_A^+(A) = P_A^-(A) \tag{1}$$

kjer sta $P_A^+(A)$ in $P_A^-(A)$ matriki, ki ju dobimo, če v $P_A^+(\lambda)$ in $P_A^-(\lambda)$ λ^{n-q} zamenjamo z A^{n-q}. Pri tem razumemo A^0 kot multiplikativno identiteto v polkolobarju $M_n(R)$.

Literatura:

- Yi-Jia Tan *Invertible matrics over semirings*, https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/03081087.2012.703191
- Yi-Jia Tan *Bases in semimodules over commutative semirings,*, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379513007234
- Yi-Jia Tan *Determinants of matrices over semirings*, https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/03081087.2013.784285
- Michel Gondran, Michel Minoux *Combinatorial Properties of (Pre)-Semirings*, https://www.researchgate.net/publication/319772435_Combinatorial_Properties_of_Pre-Semirings

Literatura:

- Jonathan S. Golan *Semirings and their applications*, https://books.google.si/books?id=ssDxCAAAQBAJ&lpg=PP7&lr&pg=PP1#v=onepage&q&f=false
- *Semiring*, https://en.wikipedia.org/wiki/Semiring