Linearna algebra nad polkolobarji

Jimmy Zakeršnik

mentor: prof. dr. Tomaž Košir

23. junij 2023

Napovednik:

1. Motivacija
2. Monoidi in urejenost
3. Polkolobarji in dioidi
4. Polmoduli in moduloidi
5. Matrike nad polkolobarji
6. Pideterminanta in karakteristični pipolinom
7. Posplošeni Cayley-Hamiltonov izrek

Motivacija:

Polkolobarjev je veliko - pojavljajo se v skoraj vsakem področju matematike. Nekateri primeri so:

- $\mathbb{N}_0$ oz. $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{R}^+$ za standardne operacije $+$ in $*$,
- *max-plus algebra* $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, max, +)$ in *min-plus algebra* $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, min, +)$,
- Boolove algebre,
- Potenčne množice za $\cup$ in $\cap$.

Monoidi in urejenost:

Definicija

Monoid $(M, *)$ je *kanonično urejen*, če je kanonična šibka urejenost $x \leq y \iff \exists z \in M : y = x * z$ na M antisimetrična.

Monoidi in urejenost:

Definicija

Monoid $(M, *)$ je *kanonično urejen*, če je kanonična šibka urejenost $x \leq y \iff \exists z \in M : y = x * z$ na M antisimetrična.

Izrek

Monoid ne more hkrati biti grupa in kanonično urejen.

Monoidi in urejenost:

Definicija

Monoid $(M, *)$ je *kanonično urejen*, če je kanonična šibka urejenost $x \leq y \iff \exists z \in M : y = x * z$ na M antisimetrična.

Izrek

Monoid ne more hkrati biti grupa in kanonično urejen.

Izrek

Naj bo monoid $(M, *)$ okrajšljiv in naj zadošča pogoju pozitivnosti. Potem je kanonična šibka urejenost $\leq$ na M antisimetrična.

Polkolobarji in dioidi:

Definicija

Za neprazno množico R, ki je opremljena z operacijama $\oplus$ in $\otimes$ pravimo, da je *polkolobar*, če zanjo velja naslednje:

1. $(R, \oplus)$ je komutativen monoid z nevtralnim elementom 0,
2. $(R, \otimes)$ je monoid z enoto 1,
3. leva oz. desna distributivnost $\otimes$ in $\oplus$,
4. $0 \otimes a = 0 = a \otimes 0; \forall a \in R$.

Če je operacija $\otimes$ komutativna, pravimo, da je polkolobar R komutativen. Oznaka: $(R, \oplus, \otimes)$.

Polkolobarji in dioidi:

Definicija

Naj bo $(R, \oplus, \otimes)$ polkolobar. Če je kanonično urejen glede na kanonično šibko urejenost definirano preko $\oplus$, pravimo, da je *dioid*.

Polkolobarji in dioidi:

Definicija

Naj bo $(R, \oplus, \otimes)$ polkolobar. Če je kanonično urejen glede na kanonično šibko urejenost definirano preko $\oplus$, pravimo, da je *dioid*.

Trditev

Če je $(R, \oplus, \otimes)$ polkolobar na katerem kanonična šibka urejenost $\leq$ definirana preko $\oplus$ ni antisimetrična in je $\mathcal{E}$ ekvivalenčna relacija s predpisom $x\mathcal{E}y \iff x \leq y \ \& \ y \leq x$, je $R/\mathcal{E}$ dioid za inducirani operaciji.

Polkolobarji in dioidi:

Definicija

Dioid $(R, \oplus, \otimes)$ je *poln*, če je za kanonično delno urejenost definirano preko $\oplus$ poln kot množica in ustreza t. i. posplošeni distributivnosti: $\forall P \subseteq R, \forall r \in R:$

- $\left(\bigoplus_{p \in P} p\right) \otimes r = \bigoplus_{p \in P} (p \otimes r)$
- $r \otimes \left(\bigoplus_{p \in P} p\right) = \bigoplus_{p \in P} (r \otimes p)$

Polmoduli in moduloidi:

Definicija

Naj bo R polkolobar. *Levi R-polmodul* je komutativen monoid $(M, +)$ z aditivno identiteto θ, na katerem imamo definirano množenje s skalarjem $\cdot : R \times M \to M$, ki zadošča naslednjim pogojem za vsaka $\lambda, \mu \in R$ in vsaka $x, y \in M$:

1. $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$,
2. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ in $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$,
3. $1 \cdot x = x$ in $\lambda \cdot \theta = \theta = 0 \cdot x$

Analogno definiramo desni R-polmodul.

Polmoduli in moduloidi:

Definicija

Naj bo R dioid in $(M, +)$ (levi) R-polmodul. Če je $(M, +)$ kanonično delno urejen glede na $+$, mu pravimo (levi) R-moduloid.

Polmoduli in moduloidi:

Definicija

Naj bo X neka neprazna družina elementov R-polmodula $(M, +)$. Najmanjši R-podpolmodul v M, ki vsebuje X, imenujemo R-polmodul generiran z X in ga označimo z $\langle X \rangle$. Če je $\langle X \rangle = M$, pravimo, da X *generira* M. Če je X končna družina, ki generira M, pravimo, da je M *končno generiran*.

Polmoduli in moduloidi:

Definicija

Naj bo X neka neprazna družina elementov R-polmodula $(M, +)$. Najmanjši R-podpolmodul v M, ki vsebuje X, imenujemo R-polmodul generiran z X in ga označimo z $\langle X \rangle$. Če je $\langle X \rangle = M$, pravimo, da X *generira* M. Če je X končna družina, ki generira M, pravimo, da je M *končno generiran*.

Definicija

Rang R-polmodula $(M, +)$ je najmanjše naravno število $n \in \mathbb{N}$ za katerega obstaja družina $X \subseteq M$ kardinalnosti n, ki generira M.

Polmoduli in moduloidi:

Definicija

Naj bo $(M,+)$ R-polmodul z enoto θ in $X=(x_j)_{j\in J}$ neka neprazna (končna ali neskončna) družina elementov iz M. Pravimo, da je X *linearno neodvisna*, če za vsak disjunktni par $I_1, I_2 \subseteq J$ velja $\langle X_{I_1}\rangle \cap \langle X_{I_2}\rangle = \{\theta\}$.

Polmoduli in moduloidi:

Definicija

Naj bo $(M, +)$ R-polmodul z enoto θ in $X = (x_j)_{j\in J}$ neka neprazna (končna ali neskončna) družina elementov iz M. Pravimo, da je X *linearno neodvisna*, če za vsak disjunktni par $I_1, I_2 \subseteq J$ velja $\langle X_{I_1}\rangle \cap \langle X_{I_2}\rangle = \{\theta\}$.

Definicija

Naj bo $(M, +)$ R-polmodul z enoto θ in $X = (x_j)_{j\in J}$ neka neprazna (končna ali neskončna) družina elementov iz M. Pravimo, da je X *šibko linearno neodvisna*, če za njo velja pogoj: $\forall j \in J : x_j \notin \langle X \setminus \{x_j\}\rangle$.

Polmoduli in moduloidi:

Definicija

Naj bo $(M, +)$ R-polmodul z enoto θ in $X = (x_j)_{j \in J}$ neka neprazna (končna ali neskončna) družina elementov iz M. Pravimo, da je X *baza* M, če je linearno neodvisna in generira M.

Polmoduli in moduloidi:

Definicija

Naj bo $(M, +)$ R-polmodul z enoto θ in $X = (x_j)_{j \in J}$ neka neprazna (končna ali neskončna) družina elementov iz M. Pravimo, da je X *baza* M, če je linearno neodvisna in generira M.

Definicija

Naj bo $(M, +)$ R-polmodul z enoto θ in $X = (x_j)_{j \in J}$ neka neprazna (končna ali neskončna) družina elementov iz M. Pravimo, da je X *šibka baza* M, če je šibko linearno neodvisna in generira M.

Polmoduli in moduloidi:

Definicija

Naj bo $(M, +)$ R-polmodul z enoto θ in $X = (x_j)_{j \in J}$ neka neprazna (končna ali neskončna) družina elementov iz M. Pravimo, da je X *prosta množica* v M, če je za vsak element iz M, ki ga lahko zapišemo kot linearno kombinacijo elementov iz X, ta zapis enoličen.

Proste baze so hkrati tudi šibke.

Polmoduli in moduloidi:

Definicija

Naj bo $(M, +)$ R-polmodul z enoto θ in $X = (x_j)_{j \in J}$ neka neprazna (končna ali neskončna) družina elementov iz M. Pravimo, da je X *prosta množica* v M, če je za vsak element iz M, ki ga lahko zapišemo kot linearno kombinacijo elementov iz X, ta zapis enoličen.

Proste baze so hkrati tudi šibke.

Izrek

Če R-polmodul M premore kako neskončno šibko bazo, so vse šibke baze M neskončne.

Polmoduli in moduloidi:

Definicija

Naj bo $(M, +)$ R-polmodul z enoto θ in $X = (x_j)_{j \in J}$ neka neprazna družina elementov iz M. Pravimo, da je vektor x *razcepen* na $\langle X \rangle$, če in samo če obstajata taka vektorja $y, z \in \langle X \rangle$, oba različna od x, da je $x = y + z$. Če x ni razcepen na $\langle X \rangle$, pravimo, da je *nerazcepen* na $\langle X \rangle$.

Polmoduli in moduloidi:

Izrek

Naj bo $(R, \oplus, \otimes)$ polkolobar z enotama 0 in 1 za kateregа velja $r \oplus p = 1 \Rightarrow r = 1 \vee p = 1$ in $r \otimes p = 1 \Rightarrow r = 1 \wedge p = 1$. Naj bo $(M, +)$ kanonično urejen R-polmodul na katerem za $y \in M \setminus \{\theta\}, x \in M \setminus \{y\}$ in poljuben $\lambda \in R$ velja $y = \lambda \cdot y + x \Rightarrow \lambda = 1$. Potem velja, da če M premore kako bazo, je ta enolično določena.

Matrike:

Tudi na polmodulih lahko definiramo linearne preslikave: Zahtevamo aditivnost in homogenost.
Nad polkolobarjem $(R, \oplus, \otimes)$ lahko definiramo $m \times n$ matrike, za poljubna $m, n \in \mathbb{N}$. Pri tem seštevanje definiramo enako kot za matrike nad obsegi (po komponentah), množenje pa na sledeč način za $A \in M_{m \times n}(R), B \in M_{n \times l}(R)$:

$$A * B = C \in M_{m \times l}(R);\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} \otimes b_{kj})\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}\ \&\ \forall j \in \{1, 2, \ldots, l\}$$

Pri tem je $C \in M_{m \times l}(R)$.

Pideterminante:

Definicija:

Naj bo A neka $n \times n$ matrika nad komutativnim polkolobarjem R. *Bideterminanta matrike* A je urejeni par $(det^+(A), det^-(A))$, kjer sta vrednosti $det^+(A)$ in $det^-(A)$ definirani na naslednji način:

$$det^+(A) = \sum_{\pi \in Per^+(n)} (\prod_{i=1}^{n} (a_{i,\pi(i)}))$$

$$det^-(A) = \sum_{\pi \in Per^-(n)} (\prod_{i=1}^{n} (a_{i,\pi(i)}))$$

Karakteristični bipolinom

Definicija:

Naj bo A neka $n \times n$ matrika nad komutativnim polkolobarjem R. *Karakteristični bipolinom matrike* A je dvojica $(P_A^+(\lambda), P_A^-(\lambda))$, kjer sta $P_A^+(\lambda)$ in $P_A^-(\lambda)$ polinoma stopnje n v spremenljivki λ, definirana na naslednji način:

$$P_A^+(\lambda) = \sum_{q=1}^{n} \left(\left(\sum_{\substack{\sigma \in Part^+(n) \\ |dom(\sigma)|=q}} \left(\prod_{i \in dom(\sigma)}^{n} (a_{i,\sigma(i)}) \right) \right) * \lambda^{n-q} * \lambda^n \right)$$

$$P_A^-(\lambda) = \sum_{q=1}^{n} \left(\left(\sum_{\substack{\sigma \in Part^-(n) \\ |dom(\sigma)|=q}} \left(\prod_{i \in dom(\sigma)}^{n} (a_{i,\sigma(i)}) \right) \right) * \lambda^{n-q} \right)$$

Cayley-Hamiltonov izrek nad polkolobarji

Izrek:

Naj bo A neka $n \times n$ matrika nad komutativnim polkolobarjem z nevtralnim elementom 0 in enoto 1 in naj bo $(P_A^+(\lambda), P_A^-(\lambda))$ bipolinom, ki pripada matriki A. Tedaj velja:

$$P_A^+(A) = P_A^-(A) \tag{1}$$

kjer sta $P_A^+(A)$ in $P_A^-(A)$ matriki, ki ju dobimo, če v $P_A^+(\lambda)$ in $P_A^-(\lambda)$ λ^{n-q} zamenjamo z A^{n-q}. Pri tem razumemo A^0 kot multiplikativno identiteto v polkolobarju $M_n(R)$.

Literatura:

- Yi-Jia Tan *Invertible matrics over semirings*, https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/03081087.2012.703191
- Yi-Jia Tan *Bases in semimodules over commutative semirings,*, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379513007234
- Yi-Jia Tan *Determinants of matrices over semirings*, https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/03081087.2013.784285
- Michel Gondran, Michel Minoux *Combinatorial Properties of (Pre)-Semirings*, https://www.researchgate.net/publication/319772435_Combinatorial_Properties_of_Pre-Semirings