

UNIVERZA V MARIBORU  
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Matematika – 2. stopnja

Jimmy Zakeršnik

**Omejeni linearni operatorji na Hilbertovih prostorih**

Magistrsko delo

Mentor: dr. Daniel Eremita

Maribor, 2024/25

## KAZALO

1. Uvod	4
2. Hilbertovi prostori	4
3. Omejeni linearni operatorji nad Hilbertovimi prostori	5
3.1. Adjungirani operatorji	5
3.2. Normalni operatorji	9
3.3. Sebi-adjungirani operatorji	10
3.4. Unitarni operatorji	12
Literatura	13

# Omejeni linearni operatorji na Hilbertovih prostorih

POVZETEK

Bo napisan zadnji

# Bounded linear operators on Hilbert spaces

ABSTRACT

Will be written last

**Math. Subj. Class. (2020):** 47A25, 47B02, 47B15,

**Ključne besede:** Linearna algebra, funkcionalna analiza, Hilbertov prostor, omejen linearen operator, spekter, spektralni radij, normalen operator, unitaren operator, sebi-adjungiran operator

**Keywords:** Linear algebra, functional analysis, Hilbert space, bounded linear operator, spectrum, spectral radius, normal operator, unitary operator, self-adjoint operator

## 1. UVOD

Sem spada uvod, ki bo napisan, ko bo naloga bolj vsebinsko dovršena.

## 2. HILBERTOVI PROSTORI

V tem poglavju bomo najprej osvežili znanje o nekaterih pomembnih definicijah in rezultatih iz študije Banachovih in Hilbertovih prostorov. V nadaljevanju bomo pozornost posvetili t. i. adjungiranim operatorjem, nato pa še njihovim posebnim primerom - normalnim, sebi-adjungiranim in unitarnim operatorjem. Pri tem se bomo primarno sklicevali na vir [1].

Tukaj bom povedal osnovno o Hilbertovih prostorih:

- Izrek o odprti preslikavi (brez dokaza)
- Kaj so Hilbertovi prostori
- Neenakost  $C - S - B$
- Ortogonalni komplement
- Riezsov izrek
- Prostor omejenih linearnih operatorjev nad Hilbertovimi prostori

**Lema 2.1.** Za poljubna normirana prostora  $X$  ter  $Y$  in poljuben  $T \in B(X, Y)$  velja: Če je  $T$  obrnljiv, je  $\|Tx\| \geq \|T^{-1}\|^{-1}\|x\|$ ;  $\forall x \in X$ .

**Lema 2.2.** Za poljuben Banachov prostor  $X$ , poljuben normiran prostor  $Y$  ter poljuben  $T \in B(X, Y)$  velja: Če obstaja tak  $r > 0$ , da je  $\|Tx\| \geq r\|x\|$ ;  $\forall x \in X$ , je  $\text{Im}T$  zaprti podprostor v  $Y$ .

**Definicija 2.3.** Naj bo  $V$  vektorski prostor nad  $\mathbb{F}$ . Preslikavi  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  pravimo *skalarni produkt* na  $V$ , če velja:

- $\langle x, x \rangle \geq 0$ ;  $\forall x \in V$
- $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ;  $\forall x, y \in V$
- $\langle \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle$ ;  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F} \ \& \ \forall x_1, x_2, y \in V$

Če je  $V$  vektorski prostor (nad  $\mathbb{F}$ ) in  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  skalarni produkt na njem, pravimo, da je  $(V, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  *prostor s skalarnim produktom*.

**Primer 2.4.** Spomnimo se nekaj znanih primerov vektorskih prostorov s skalarnim produktom:

- Prostor  $\mathbb{R}^n$  (za  $n \in \mathbb{N}$ ) skupaj s skalarnim produktom  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .
- Prostor  $\mathbb{C}^n$  (za  $n \in \mathbb{N}$ ) skupaj s skalarnim produktom  $\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i}$ .
- V prostoru zaporedij  $l^2$  je s predpisom  $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$ ;  $\forall \bar{x}, \bar{y} \in l^2$  definiran skalarni produkt.
- V prostoru zveznih funkcij na zaprtem intervalu  $[a, b]$ ,  $\mathcal{C}([a, b])$ , je s predpisom  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ ;  $\forall f, g \in \mathcal{C}([a, b])$  definiran skalarni produkt.

◇

**Opomba 2.5.** Naj bo  $(V, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  prostor s skalarnim produktom nad poljem  $\mathbb{F}$ . Enostavno je preveriti, da je s predpisom  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$   $\forall x \in V$  definirana norma na  $V$ . Za tako normo pravimo, da je *porojena s skalarnim produktom*  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Definicija 2.6.** Naj bo  $(M, d)$  poljuben metrični prostor. Pravimo, da je  $M$  *poln metrični prostor*, če je vsako Cauchyjevo zaporedje v  $M$  konvergentno v  $M$ .

**Primer 2.7.** Navedimo nekaj klasičnih primerov polnih metričnih prostorov.

- Prostori  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) s standardno Evklidsko normo.
- Prostori  $\mathbb{C}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) s standardno Evklidsko normo.
- Prostor  $l^2$ , skupaj z normo, definirano s predpisom  $\|\bar{x}\|_2 = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ ;  $\forall \bar{x} \in l^2$ , je polni metrični prostor.
- Prostor s kvadratom integrabilnih funkcij na (realnem ali kompleksnem) merljivem prostoru  $X$ , opremljenim z Lebesguesovo mero  $\mu$ ;  $\mathcal{L}^2(X, \mu)$ ; skupaj z normo, definirano s predpisom  $\|f\|_2 = (\int_X |f|^2 d\mu)^{\frac{1}{2}}$ ;  $\forall f \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$ .

◇

Sedaj definirajmo Hilbertove prostore.

**Definicija 2.8.** Naj bo  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  poljuben prostor s skalarnim produktom nad poljem  $\mathbb{F}$ . Naj bo  $\|\cdot\|$  norma na  $V$  porojena s  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  in naj bo  $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  metrika na  $V$  porojena z  $\|\cdot\|$ . Če je  $(V, d)$  poln metrični prostor, pravimo, da je  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  *Hilbertov prostor* nad  $\mathbb{F}$ .

**Primer 2.9.** Navedimo nekaj znanih primerov Hilbertovih prostorov.

- Prostori  $\mathbb{R}^n$  (za  $n \in \mathbb{N}$ ) skupaj s standardnim skalarnim produktom.
- Prostori  $\mathbb{C}^n$  (za  $n \in \mathbb{N}$ ) skupaj s (standardnim) skalarnim produktom iz primera 2.4.
- Prostor  $l^2$  skupaj s skalarnim produktom iz primera 2.4.
- Prostor  $\mathcal{L}^2(X, \mu)$  iz primera 2.7, skupaj s skalarnim produktom, definiranim s predpisom  $\langle f, g \rangle = \int_{[a,b]} (f \cdot \bar{g}) d\mu$ ;  $\forall f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$ .

◇

**Opomba 2.10.** V primeru, ko je merljivi prostor  $X$  v primeru 2.9 zaprti interval  $[a, b]$ , sta Lebesguesov in Riemannov integral enaka. Tako oznako za množico poenostavimo na  $\mathcal{L}^2([a, b])$ , predpis za skalarni produkt pa se spremeni v:  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$ ;  $\forall f, g \in \mathcal{L}^2([a, b])$ .

**Posledica 2.11.** Za poljuben zaprti podprostor  $Y$  poljubnega Hilbertovega prostora velja  $Y^{\perp\perp} = Y$ .

**Posledica 2.12.** Za poljuben podprostor  $Y$  poljubnega Hilbertovega prostora velja  $Y^{\perp\perp} = \overline{Y}$ .

**Lema 2.13.** Naj bo  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  poljuben kompleksen vektorski prostor s skalarnim produktom in naj bosta  $S, T \in B(X)$  poljubna. Če  $\forall x \in X$  velja  $\langle Tx, x \rangle = \langle Sx, x \rangle$ , potem je  $T = S$ .

### 3. OMEJENI LINEARNI OPERATORJI NAD HILBERTOVIMI PROSTORI

V tem poglavju bomo obravnavali lastnosti omejenih linearnih operatorjev nad Hilbertovimi prostori ter lastnosti njihovih spektrov, kadar sta domena in kodomena kompleksna Hilbertova prostora. Posebej nas bo zanimala operacija adjungiranja, zato bomo najprej povedali nekaj o njej.

#### 3.1. Adjungirani operatorji.

**Izrek 3.1.** Naj bosta  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  in  $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  poljubna kompleksna Hilbertova prostora in naj bo  $T$  poljuben element  $B(X, Y)$ . Tedaj obstaja enolično določen operator  $T^* \in B(Y, X)$ , za katerega velja

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle; \quad \forall x \in X \ \& \ \forall y \in Y$$

*Dokaz.* Naj bo  $y \in Y$  poljuben ter naj bo  $f_y : X \rightarrow \mathbb{C}$  preslikava definirana s predpisom  $f_y(x) = \langle Tx, y \rangle; \forall x \in X$ . Opazimo, da je  $f_y$  linearen funkcional nad  $X$ . Po neenakosti Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky potem velja:

$$|f_y(x)| = |\langle Tx, y \rangle| \leq \|Tx\|_Y \cdot \|y\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X \cdot \|y\|_Y; \forall x \in X$$

To pomeni, da je  $f_y$  omejen linearen funkcional nad  $X$ . Posledično velja, po Riezsovem izreku, da obstaja enolično določen  $z \in X$ , tak, da je  $f_y(x) = \langle \langle x, z \rangle \rangle; \forall x \in X$ . Sedaj definiramo preslikavo  $T^* : Y \rightarrow X$ , ki vsakemu  $y \in Y$  priredi pripadajoči  $z \in X$  (tisti, enolično določen, za katerega je  $f_y(x) = \langle \langle x, z \rangle \rangle; \forall x \in X$ ). Posledično velja:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle \langle x, T^*y \rangle \rangle \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

Sedaj preverimo, da je  $T^*$  omejen linearen operator. Naj bodo  $y_1, y_2 \in Y$  in  $x \in X$  poljubni elementi ter  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  poljubna skalarja. Tedaj je:

$$\begin{aligned} \langle \langle x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle \rangle &= \langle Tx, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle Tx, y_1 \rangle + \bar{\beta} \langle Tx, y_2 \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle \langle x, T^*y_1 \rangle \rangle + \bar{\beta} \langle \langle x, T^*y_2 \rangle \rangle \\ &= \langle \langle x, \alpha T^*y_1 \rangle \rangle + \langle \langle x, \beta T^*y_2 \rangle \rangle \end{aligned}$$

Sledi, da je  $T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T^*y_1 + \beta T^*y_2; \forall x \in X, \forall y_1, y_2 \in Y, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , torej je  $T^*$  res linearna preslikava. Dodatno, velja:

$$\|T^*y\|_X^2 = \langle \langle T^*y, T^*y \rangle \rangle = \langle TT^*y, y \rangle \leq \|TT^*y\|_Y \|y\|_Y \leq \|T\| \|T^*y\|_X \|y\|_Y; \forall y \in Y$$

Če je  $\|T^*y\|_X \neq 0$ , dobljeno neenakost delimo z  $\|T^*y\|_X$  ter tako dobimo oceno  $\|T^*y\|_X \leq \|T\| \|y\|_Y$ . V primeru, ko je  $\|T^*y\|_X = 0$ , prejšnja ocena velja trivialno. Sledi, da je

$$\|T^*y\|_X \leq \|T\| \|y\|_Y; \forall y \in Y$$

Preslikava  $T^*$  je torej omejen linearen operator in velja  $\|T^*\| \leq \|T\|$ . Za konec še pokažimo, da je  $T^*$  enolično določen. Denimo, da imamo  $U_1, U_2 \in B(Y, X)$ , za katera velja:  $\langle Tx, y \rangle = \langle \langle x, U_1y \rangle \rangle = \langle \langle x, U_2y \rangle \rangle; \forall x \in X, \forall y \in Y$ . Tedaj velja, da je  $U_1y = U_2y; \forall y \in Y$ , torej je  $U_1 = U_2$ . Sledi, da je  $T^*$  res enolično določen.  $\square$

Izrek 3.1 nas motivira, da vpeljemo naslednjo definicijo.

**Definicija 3.2.** Naj bosta  $X$  in  $Y$  kompleksna Hilbertova prostora ter naj bo  $T \in B(X, Y)$ . Tedaj operatorju  $T^*$  iz izreka 3.1 pravimo *adjungiran operator* operatorja  $T$ .

**Primer 3.3.** Spomnimo se operatorja  $D \in B(l^2)$ , imenovanega »desni premik«, s predpisom  $D(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots); \forall \bar{x} \in l^2$  in določimo predpis njegovega adjungiranega operatorja  $D^*$ . Naj bosta  $\bar{x}, \bar{y} \in l^2$  poljubna ter označimo  $\bar{z} = D^*y$ . Tedaj po definiciji adjungiranega operatorja velja, da je  $\langle Dx, y \rangle = \langle x, D^*y \rangle = \langle x, z \rangle$  oziroma

$$\langle (0, x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots) \rangle = \langle (x_1, x_2, x_3, \dots), (z_1, z_2, z_3, \dots) \rangle$$

Ko to enakost razpišemo, dobimo:

$$x_1 \bar{y}_2 + x_2 \bar{y}_3 + \dots = x_1 \bar{z}_1 + x_2 \bar{z}_2 + x_3 \bar{z}_3 + \dots$$

Opazimo, da če velja  $z_1 = y_2, z_2 = y_3, \dots, z_i = y_{i+1} \forall i \in \mathbb{N}$ , potem bo naša enačba veljavna za poljuben  $\bar{x}$ . Enoličnost adjungiranega operatorja nam posledično da

predpis:  $D^*(y_1, y_2, y_3 \dots) = (y_2, y_3, y_4, \dots)$ ;  $\forall \bar{y} \in l^2$ . Še več, prepoznamo, da je dobljeni operator ravno t. i. »levi premik«, ki ga tipično označimo z  $L$ .  $\diamond$

**Primer 3.4.** Za vsak  $k \in \mathcal{C}([0, 1])$  definiramo operator  $T_k \in B(\mathcal{L}^2([0, 1]))$  (skupaj s skalarnim produktom iz primera 2.9) s predpisom  $(T_k g)(t) = k(t)g(t)$ ;  $\forall t \in [0, 1]$  (oziroma  $T_k g = kg$ ),  $\forall g \in \mathcal{L}^2([0, 1])$ . Določimo predpis adjungiranega operatorja  $(T_k)^*$ .

Naj bosta  $f, g \in \mathcal{L}^2([0, 1])$  poljubna ter naj bo  $h = (T_k)^* g$ . Tedaj, po definiciji adjungiranega operatorja, velja:

$$\langle T_k f, g \rangle = \langle f, (T_k)^* g \rangle = \langle f, h \rangle$$

V skladu z opombo 2.10 potem sledi:

$$\int_0^1 k(t) f(t) \overline{g(t)} dt = \int_0^1 f(t) \overline{h(t)} dt$$

Ta enačba bo držala, če je  $\overline{h(t)} = k(t) \overline{g(t)}$ ;  $\forall t \in [0, 1]$  oziroma  $h(t) = \overline{k(t)} g(t)$ ;  $\forall t \in [0, 1]$ . Drugače povedano, enačba velja, če je  $h = T_{\bar{k}} g$ . Ker sta bila  $f$  in  $g$  poljubna, sledi, da sklep velja za vsak par elementov  $\mathcal{L}^2([0, 1])$ . Ker je adjungirani operator enolično določen, sledi, da je  $(T_k)^* = T_{\bar{k}}$ .  $\diamond$

Sedaj bomo navedli in dokazali nekatere pomembne lastnosti adjungiranja.

**Izrek 3.5.** Naj bodo  $(X, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle)$ ,  $(Y, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle)$  in  $(Z, \langle \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle \rangle)$  poljubni kompleksni Hilbertovi prostori ter naj bodo  $U, V \in B(X, Y)$  ter  $T \in B(Y, Z)$  poljubni omejeni linearni operatorji. Tedaj velja:

- a)  $(\alpha U + \beta V)^* = \bar{\alpha} U^* + \bar{\beta} V^*$ ;  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .
- b)  $(TU)^* = U^* T^*$ .
- c)  $(U^*)^* = U$ .
- d)  $\|U^*\| = \|U\|$ .
- e) Preslikava  $f : B(X, Y) \rightarrow B(Y, X)$ , definirana s predpisom  $f(U) = U^*$  je zvezna.
- f)  $\|U^* U\| = \|U\|^2$ .

*Dokaz.* a) Naj bodo  $U, V \in B(X, Y)$  in  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  poljubni. Tedaj  $\forall x \in X, \forall y \in Y$  velja:

$$\begin{aligned} \langle \langle x, (\alpha U + \beta V)^* y \rangle \rangle &= \langle (\alpha U + \beta V)x, y \rangle \\ &= \alpha \langle Ux, y \rangle + \beta \langle Vx, y \rangle \\ &= \alpha \langle \langle x, U^* y \rangle \rangle + \beta \langle \langle x, V^* y \rangle \rangle \\ &= \langle \langle x, \bar{\alpha} U^* y \rangle \rangle + \langle \langle x, \bar{\beta} V^* y \rangle \rangle \\ &= \langle \langle x, (\bar{\alpha} U^* + \bar{\beta} V^*) y \rangle \rangle \end{aligned}$$

Sledi, da je  $(\alpha U + \beta V)^* = (\bar{\alpha} U^* + \bar{\beta} V^*)$ .

b) Naj bosta  $U \in B(X, Y)$  in  $T \in B(Y, Z)$  poljubna. Tedaj  $\forall x \in X, \forall z \in Z$  velja:

$$\langle \langle x, (TU)^* z \rangle \rangle = \langle \langle \langle (TU)x, z \rangle \rangle \rangle = \langle \langle \langle T(Ux), z \rangle \rangle \rangle = \langle Ux, T^* z \rangle = \langle \langle x, U^* T^* z \rangle \rangle$$

Posledično je res  $(TU)^* = U^* T^*$ .

c) Naj bo  $U \in B(X, Y)$  poljuben. Tedaj  $\forall x \in X, \forall y \in Y$  velja:

$$\langle y, (U^*)^* x \rangle = \langle \langle U^* y, x \rangle \rangle = \overline{\langle \langle x, U^* y \rangle \rangle} = \overline{\langle Ux, y \rangle} = \langle y, Ux \rangle$$

Posledično je  $(U^*)^* = U$ .

- d) V dokazu izreka 3.1 smo že pokazali, da je  $\|U^*\| \leq \|U\|$ . Ko upoštevamo prejšnjo točko, vidimo, da velja:

$$\|U\| = \|(U^*)^*\| \leq \|U^*\| \leq \|U\|$$

Posledično sledi, da je  $\|U^*\| = \|U\|$ .

- e) Naj bodo  $U, V \in B(X, Y)$   $\varepsilon > 0$  poljubni in izberemo  $\delta = \varepsilon$ . Denimo, da je  $\|U - V\| < \delta$ . Tedaj je  $\|f(U) - f(V)\| = \|U^* - V^*\| = \|(U - V)^*\|$ . Po prejšnji točki je  $\|(U - V)^*\| = \|U - V\| < \delta = \varepsilon$ , torej je  $f$  zvezna.
- f) Naj bo  $U \in B(X, Y)$  poljuben. Ker že vemo, da je  $\|U^*\| = \|U\|$ , hitro vidimo, da je  $\|U^*U\| \leq \|U^*\|\|U\| = \|U\|^2$ . Hkrati vidimo, da za  $\forall x \in X$  velja  $\|Ux\|_Y^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle U^*Ux, x \rangle$ . Ko upoštevamo neenakost Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky, dobimo oceno  $\langle U^*Ux, x \rangle \leq \|U^*Ux\|_X \|x\|_X \leq \|U^*U\| \|x\|_X^2$ . Sledi ocena:  $\|Ux\|_Y^2 \leq \|U^*U\| \|x\|_X^2 \forall x \in X$ , torej je  $\|U\|^2 \leq \|U^*U\|$ . Posledično velja iskana enakost. □

Pri obravnavi adjungiranih operatorjev bomo potrebovali naslednji pomožni rezultat.

**Lema 3.6.** *Naj bosta  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  in  $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  poljubna kompleksna Hilbertova prostora ter naj bo  $T \in B(X, Y)$  poljuben. Tedaj velja:*

- a)  $\text{Ker}T = (\text{Im}T^*)^\perp$ .  
b)  $\text{Ker}T^* = (\text{Im}T)^\perp$ .  
c)  $\text{Ker}T^* = \{0\} \iff \text{Im}T \text{ je gosta v } Y$ .

*Dokaz.* a) Najprej pokažimo, da je  $\text{Ker}T \subseteq (\text{Im}T^*)^\perp$ . Naj bo  $x \in \text{Ker}T$  poljuben ter izberemo poljuben  $z \in \text{Im}T^*$ . Potem za  $z$  obstaja  $y \in Y$ , da je  $T^*y = z$ . Posledično, je

$$\langle x, z \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0$$

Sledi, da je  $x \in (\text{Im}T^*)^\perp$ . Ker je  $x$  bil poljuben, premislek velja za vsak  $x \in \text{Ker}T$ , torej je  $\text{Ker}T \subseteq (\text{Im}T^*)^\perp$ . Naj bo sedaj  $x \in (\text{Im}T^*)^\perp$  poljuben. Ker je  $T^*Tx \in \text{Im}T^*$ , velja:

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle = 0$$

Sledi, da je  $Tx = 0$  oz.  $x \in \text{Ker}T$ . Ker je bil  $x$  poljuben, sledi  $(\text{Im}T^*)^\perp \subseteq \text{Ker}T$ . Posledično velja enakost.

- b) Da dokažemo ta rezultat, upoštevamo prejšnjo točko tega dokaza za  $T^*$  ter točko c) izreka 3.5. Posledično je  $\text{Ker}T^* = (\text{Im}(T^*)^*)^\perp = (\text{Im}T)^\perp$ .
- c) Da dokažemo ta rezultat bomo dokazali, da veljata implikaciji v obe smeri.  
 $\Rightarrow$ ) Denimo, da je  $\text{Ker}T^* = \{0\}$ . Potem vidimo, upoštevajoč posledico 2.12 ter točko a) tega dokaza, da velja:

$$\overline{\text{Im}T} = ((\text{Im}T)^\perp)^\perp = (\text{Ker}T^*)^\perp = \{0\}^\perp = Y$$

Sledi, da je  $\text{Im}T$  gosta v  $Y$  po definiciji.

$\Leftarrow$ ) Denimo, da je  $\text{Im}T$  gosta v  $Y$ . Potem po posledici 2.12 velja, da je

$$((\text{Im}T)^\perp)^\perp = \overline{\text{Im}T} = Y$$

Po točki b) tega dokaza velja  $\text{Ker}T^* = (\text{Im}T)^\perp$ . Ker je  $\text{Im}T \subseteq Y$  neprazna podmnožica, velja, da je  $(\text{Im}T)^\perp$  zaprti podprostor v  $Y$ . Po posledici 2.11



potem sledi:

$$\text{Ker}T^* = (\text{Im}T)^\perp = (((\text{Im}T)^\perp)^\perp)^\perp = Y^\perp = \{0\}$$

□

**Posledica 3.7.** Naj bo  $X$  poljuben kompleksen Hilbertov prostor ter naj bo  $T \in B(X)$ . Tedaj je operator  $T$  obrnljiv natanko tedaj, ko je  $\text{Ker}T^* = \{0\}$  in obstaja tak  $r > 0$ , da je  $\|Tx\| \geq r\|x\| \forall x \in X$ .

*Dokaz.* Dokazali bomo obe implikaciji.

- $\Rightarrow$ ) Denimo, da je  $T$  obrnljiv. Tedaj je  $T$  bijekcija in njegov inverz,  $T^{-1}$ , pripada  $B(X)$ . Posledično je  $\text{Im}T = Y$ . Ker je  $X$  Hilbertov prostor, je tudi normiran prostor, torej po lemi 2.1 velja, da je  $\|Tx\| \geq \|T^{-1}\|^{-1}\|x\|$ ;  $\forall x \in X$ . Določimo  $r = \|T^{-1}\|^{-1}$ . Ker je  $X$  tudi Banachov prostor, po lemi 2.2 velja, da je  $\text{Im}T$  zaprti podprostor v  $Y$ . Sledi, da je  $\text{Im}T = \overline{\text{Im}T} = Y$ , torej je  $\text{Im}T$  gost v  $Y$ . Po lemi 3.6 je potem  $\text{Ker}T^* = \{0\}$ .
- $\Leftarrow$ ) Denimo sedaj, da je  $\text{Ker}T^* = \{0\}$  in da obstaja tak  $r > 0$ , da za  $\forall x \in X$  velja  $\|Tx\| \geq r\|x\|$ . Po lemi 3.6 potem sledi, da je  $\text{Im}T$  gost v  $Y$ . Lema 2.2 nam tudi pove, da je  $\text{Im}T$  zaprti podprostor v  $Y$ . Sledi, da je  $\text{Im}T = \overline{\text{Im}T} = Y$ . Naj bo sedaj  $x \in \text{Ker}T$  poljuben. Tedaj je  $Tx = 0$ , po predpostavki pa potem sledi, da je  $0 = \|Tx\| \geq r\|x\|$ . To je pa možno le, kadar je  $x = 0$ . Sledi, da je  $\text{Ker}T = \{0\}$ , torej je  $T$  bijektiven endomorfizem nad Banachovim prostorom  $X$ . Po izreku o odprti preslikavi sledi, da je  $T$  obrnljiv.

□

**Primer 3.8.** Primer neobrnljivega operatorja najdemo v desnem premiku  $D \in B(l^2)$ . Kot smo premislili v primeru ??, je njegov adjungirani operator ravno levi premik  $L \in B(l^2)$ , za katerega pa velja, da je  $L(1, 0, 0, \dots) = \bar{0}$ . Sledi, da  $\text{Ker}D^* = \text{Ker}L \neq \{0\}$ , torej  $D$  ni obrnljiv. ◇

Za konec tega podpoglavja premislimo, v sledeči lemi, kako sta povezani operaciji invertiranja in adjungiranja.

**Lema 3.9.** Naj bo  $X$  poljuben kompleksen Hilbertov prostor ter naj bo  $T \in B(X)$  poljuben. Če je  $T$  obrnljiv, je obrnljiv tudi  $T^*$ .

*Dokaz.* Naj bo  $T \in B(X)$  poljuben obrnljiv operator. Tedaj velja, da je  $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ . Enačbo adjungiramo ter tako dobimo  $(TT^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = I^*$ . Ko upoštevamo točko b) izreka 3.5, se enačba poenostavi v:

$$(T^{-1})^*T^* = T^*(T^{-1})^* = I$$

Posledično je  $T^*$  obrnljiv ter  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ .

□

**3.2. Normalni operatorji.** Sedaj se bomo posvetili, glede na adjungiranje, posebnim primerom operatorjev. Prvi izmed teh, so t. i. normalni operatorji.

**Definicija 3.10.** Naj bo  $X$  poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Pravimo, da je  $T \in B(X)$  *normalen*, če je  $TT^* = T^*T$ .

**Primer 3.11.** Enostavno je videti, da je operator  $T_k$ , kot je bil definiran v primeru 3.4, normalen operator. Naj bo  $f \in \mathcal{L}^2([0, 1])$  poljuben.

$$\begin{aligned} (T_k(T_k)^*)f &= (T_k T_k^-)f = T_k(\bar{k}f) = k\bar{k}f \\ ((T_k)^*T_k)f &= (T_k^- T_k)f = T_k^-(kf) = \bar{k}kf = k\bar{k}f \end{aligned}$$

Ker je bil  $f$  poljuben, sklep velja za vse elemente  $\mathcal{L}^2([0, 1])$ . Sledi, da je  $T_k(T_k)^* = (T_k)^*T_k$ , torej je operator  $T_k$  res normalen.  $\diamond$

**Lema 3.12.** *Naj bo  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Naj bo  $T \in B(X)$  poljuben normalen operator ter  $r > 0$  poljuben. Velja:*

- a)  $\|Tx\| = \|T^*x\|$ ;  $\forall x \in X$ .
- b) Če je  $\|Tx\| \geq r\|x\|$ ;  $\forall x \in X$ , je  $\text{Ker}T^* = \{0\}$ .

*Dokaz.* a) Naj bo  $x \in X$  poljuben. Potem je

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 &= \langle Tx, Tx \rangle - \langle T^*x, T^*x \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle - \langle TT^*x, x \rangle \\ &= \langle T^*Tx - TT^*x, x \rangle = \langle (T^*T - TT^*)x, x \rangle\end{aligned}$$

Ker je  $T$  normalen, je  $TT^* = T^*T$ , torej je

$$\|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 = \langle (T^*T - TT^*)x, x \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$$

Posledično je  $\|Tx\| = \|T^*x\|$ . Ker je bil  $x$  poljuben, enakost velja za  $\forall x \in X$ .

- b) Denimo, da obstaja tak  $r > 0$ , da je  $\|Tx\| \geq r\|x\|$ ;  $\forall x \in X$ . Naj bo  $x \in \text{Ker}T^*$  poljuben. Po točki a) tega dokaza je potem  $0 = \|T^*x\| = \|Tx\| \geq r\|x\|$ . Sledi, da je  $\|x\| = 0$  oz.  $x = 0$ . Posledično je  $\text{Ker}T^* = \{0\}$ .  $\square$

Na podlagi posledice 3.7 in leme 3.12 sledi naslednja posledica.

**Posledica 3.13.** *Naj bo  $X$  poljuben kompleksen Hilbertov prostor in naj bo  $T \in B(X)$  poljuben normalen operator. Tedaj je operator  $T$  obrnljiv natanko tedaj, ko obstaja tak  $r > 0$ , da je  $\|Tx\| \geq r\|x\|$   $\forall x \in X$ .*

*Dokaz.* Da dokažemo ekvivalenco, bomo dokazali implikaciji v obe smeri.

$\Rightarrow$ ) Velja direktno po posledici 3.7.

$\Leftarrow$ ) Denimo, da obstaja tak  $r > 0$ , da je  $\|Tx\| \geq r\|x\|$   $\forall x \in X$ . Po lemi 3.12 je potem  $\text{Ker}T^* = \{0\}$ . Po posledici 3.7 je potem  $T$  obrnljiv.  $\square$

**3.3. Sebi-adjungirani operatorji.** Pri obravnavi preslikav nas pogosto zanimajo t. i. »fiksne točke« - točke, ki jih preslikava preslika nazaj vase. V primeru adjungiranja, operatorjem, ki jih operacija »fiksira« damo posebno ime.

**Definicija 3.14.** Naj bo  $X$  poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Pravimo, da je  $T \in B(X)$  *sebi-adjungiran*, če velja  $T = T^*$ .

**Primer 3.15.** Trivialno je videti, da je identični operator  $I$  sebi-adjungiran. Dodato, če se vrnemo k operatorju  $T_k$  iz primera 3.4, vidimo, da je tudi ta sebi-adjungiran za vsako izbiro funkcije  $k \in \mathcal{C}([0, 1])$ . To je res, saj je funkcija  $k \in \mathcal{C}([0, 1])$  realna, torej je  $\bar{k} = k$  in posledično je  $(T_k)^* = T_{\bar{k}} = T_k$ .  $\diamond$

V naslednji lemi so povzete nekatere osnovne lastnosti sebi-adjungiranih operatorjev.

**Lema 3.16.** *Naj bo  $X$  poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Naj bo  $\mathcal{S}(X)$  množica vseh sebi-adjungiranih operatorjev znotraj  $B(X)$  in naj bo  $T \in B(X)$  poljuben. Velja:*

- a) Za poljubni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  in poljubna  $T_1, T_2 \in \mathcal{S}(X)$  velja:  $\alpha T_1 + \beta T_2 \in \mathcal{S}(X)$ .
- b) Množica  $\mathcal{S}(X)$  je zaprta podmnožica  $B(X)$ .

c) Operatorja  $TT^*$  in  $T^*T$  sta sebi-adjungirana.

d)  $T = R + iS$ , za neka sebi-adjungirana operatorja  $R, S \in \mathcal{S}(X)$ .

*Dokaz.* a) Naj bosta  $T_1, T_2 \in \mathcal{S}(X)$  poljubna. Ker sta operatorja sebi-adjungirana, po prvi točki izreka 3.5 velja:  $(\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \alpha T_1^* + \beta T_2^* = \alpha T_1 + \beta T_2$ . Posledično je  $\alpha T_1 + \beta T_2 \in \mathcal{S}(X)$ .

b) Naj bo  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergentno zaporedje s členi v  $\mathcal{S}(X)$  in limito  $T \in B(X)$ . Predzadnja točka izreka 3.5 nam pove, da je adjungiranje zvezno, torej je tudi zaporedje  $\{T_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergentno z limito  $T^* \in B(X)$ . Ker so  $T_n \in \mathcal{S}(X) \forall n \in \mathbb{N}$ , velja  $T_n^* = T_n \forall n \in \mathbb{N}$ , torej je  $T^* = T$ . Posledično je tudi  $T \in \mathcal{S}(X)$ . Sledi, da je  $\mathcal{S}(X)$  zaprta.

c) Naj bo  $T \in B(X)$  poljuben. Tedaj je, upoštevajoč točko c) izreka 3.5,  $(T^*T)^* = T^*T^{**} = T^*T$ . Sledi, da je  $T^*T \in \mathcal{S}(X)$  in na enak način premislamo, da enako velja za  $TT^*$ .

d) Naj bo  $T \in B(X)$  poljuben. Definiramo operatorja  $R$  in  $S$  na naslednji način:

$$R = \frac{1}{2}(T + T^*), \quad S = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

Očitno velja, da je  $T = R + iS$ . Preverimo še, da sta  $R$  in  $S$  res sebi-adjungirana.

$$R^* = \left(\frac{1}{2}(T + T^*)\right)^* = \frac{1}{2}(T^* + T^{**}) = \frac{1}{2}(T^* + T) = R$$

$$S^* = \left(\frac{1}{2i}(T - T^*)\right)^* = \frac{-1}{2i}(T - T^*)^* = \frac{-1}{2i}(T^* - T^{**}) = \frac{1}{2i}(T - T^*) = S$$

□

**Trditev 3.17.** Naj bo  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  poljuben kompleksen Hilbertov prostor in naj bo  $T \in B(X)$  poljuben. Operator  $A$  je sebi-adjungiran natanko tedaj, ko je  $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}; \forall x \in X$ .

*Dokaz.* Dokazali bomo implikaciji v obe smeri.

$\Rightarrow$ ) Denimo, da je  $T$  sebi-adjungiran in naj bo  $x \in X$  poljuben. Tedaj je  $\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}$ , torej je  $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ . Ker je bil  $x$  poljuben, sklep velja za vse elemente  $X$ .

$\Leftarrow$ ) Denimo, da je  $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}; \forall x \in X$ . Tedaj za poljubne  $\alpha \in \mathbb{C}, x, y \in X$  velja, da je  $\langle T(x + \alpha y), x + \alpha y \rangle \in \mathbb{R}$  oziroma

$$\langle Tx, x \rangle + \alpha \langle Ty, x \rangle + \bar{\alpha} \langle Tx, y \rangle + \alpha \bar{\alpha} \langle Ty, y \rangle \in \mathbb{R}$$

Prvi in zadnji člen sta, po predpostavki, avtomatsko elementa  $\mathbb{R}$ . Sledi torej, da je tudi  $\alpha \langle Ty, x \rangle + \bar{\alpha} \langle Tx, y \rangle \in \mathbb{R}$ . Velja:

$$\alpha \langle Ty, x \rangle + \bar{\alpha} \langle Tx, y \rangle = \bar{\alpha} \overline{\langle Ty, x \rangle} + \bar{\alpha} \overline{\langle Tx, y \rangle} = \bar{\alpha} \langle x, Ty \rangle + \alpha \langle y, Tx \rangle$$

Dodatno upoštevamo, da je  $\bar{\alpha} \langle x, Ty \rangle + \alpha \langle y, Tx \rangle = \bar{\alpha} \langle T^*x, y \rangle + \alpha \langle T^*y, x \rangle$ . Sklepamo torej, da je  $\alpha \langle Ty, x \rangle + \bar{\alpha} \langle Tx, y \rangle = \bar{\alpha} \langle T^*x, y \rangle + \alpha \langle T^*y, x \rangle$  za vsak  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Če vstavimo  $\alpha = 1$  in  $\alpha = i$ , dobimo naslednji sistem enačb:

$$\alpha = 1 : \langle Tx, y \rangle + \langle Ty, x \rangle = \langle T^*x, y \rangle + \langle T^*y, x \rangle$$

$$\alpha = i : -i \langle Tx, y \rangle + i \langle Ty, x \rangle = -i \langle T^*x, y \rangle + i \langle T^*y, x \rangle$$

Prvo enačbo pomnožimo z  $i$ , jo odštejemo od druge, ter tako dobimo enakost  $\langle Tx, y \rangle = \langle T^*x, y \rangle$ . Ker sta bila  $x$  in  $y$  poljubna, ta sklep velja za vse pare  $x, y \in X$ , torej po lemi 2.13 sledi, da je  $T = T^*$ .

□

**3.4. Unitarni operatorji.** Zadnji posebni primer operatorjev, glede na adjungiranje, je primer, v katerem je adjungirani operator hkrati tudi inverz.

**Definicija 3.18.** Naj bo  $X$  poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Pravimo, da je operator  $T \in B(X)$  *unitaren*, če velja:  $TT^* = T^*T = I$ .

**Primer 3.19.** Za funkcijo  $k \in \mathcal{C}([0, 1])$  za katero velja, da je  $|k(t)| = 1, \forall t \in [0, 1]$ , je operator  $T_k$  iz primera 3.4 unitaren operator. Iz primera 3.11 že vemo, da je za poljuben  $k \in \mathcal{C}([0, 1])$  operator  $T_k$  normalen ter da je  $T_k(T_k)^*f = k\bar{k}f = |k|^2f = (T_k)^*T_kf, \forall f \in \mathcal{L}^2([0, 1])$ . Naj bo torej  $f \in \mathcal{L}^2([0, 1])$  poljuben in naj bo  $k \in \mathcal{C}([0, 1])$  tak, da je  $|k(t)| = 1; \forall t \in [0, 1]$ . Tedaj je  $|k(t)|^2f(t) = f(t); \forall t \in [0, 1]$ , torej je  $T_k(T_k)^*f = f = (T_k)^*T_kf$ . Ker je bil  $f$  poljuben, sklep velja za vse elemente  $\mathcal{L}^2([0, 1])$ . Sledi, da je  $T_k(T_k)^* = I = (T_k)^*T_k$ .  $\diamond$

Naslednji izrek nam pove, da so unitarni operatorji hkrati tudi izometrije.

**Izrek 3.20.** Naj bo  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Naj bosta  $T, U \in B(X)$  poljubna. Velja:

- a)  $T^*T = I \iff T$  je izometrija.
- b)  $U$  je unitaren  $\iff U$  je surjektivna izometrija na  $X$ .

*Dokaz.* Obe ekvivalenci bomo dokazali tako, da bomo pokazali, da veljata implikaciji v obe smeri.

a) Pri dokazu si bomo pomagali z lemo 2.13.

$\Rightarrow$ ) Denimo, da je  $T^*T = I$  in naj bo  $x \in X$  poljuben. Tedaj je:

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle = \langle Ix, x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

Ker je bil  $x$  poljuben, zgornja enakost velja za vse elemente  $X$ , torej je  $T$  res izometrija.

$\Leftarrow$ ) Denimo, da je  $T$  izometrija. Naj bo  $x \in X$  poljuben. Tedaj velja

$$\langle T^*Tx, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|^2 = \|x\|^2 = \langle Ix, x \rangle$$

Ker je  $x$  poljuben, sklep velja za vse elemente  $X$ , torej po lemi 2.13 sledi, da je  $T^*T = I$ .

b) Pri dokazu te ekvivalence, si bomo pomagali s prejšnjo točko dokaza.

$\Rightarrow$ ) Denimo, da je  $U$  unitaren. Potem sledi, da je  $UU^* = U^*U = I$  in po točki a) je potem  $U$  izometrija. Dodatno, naj bo  $x \in X$  poljuben. Potem je  $x = U(U^*x)$ , torej je  $x \in \text{Im}U$ . Sledi, da je  $\text{Im}U = X$  oz.  $U$  je surjektiven.

$\Leftarrow$ ) Denimo, da je  $U$  surjektivna izometrija na  $X$ . Ker je  $U$  izometrija, po točki a) tega dokaza sledi, da je  $U^*U = I$ . Naj bo sedaj  $y \in X$  poljuben. Ker je  $U$  surjektivni operator na  $X$ , obstaja tak  $x \in X$ , da je  $Ux = y$ . Posledično velja naslednje:

$$UU^*y = UU^*(Ux) = U(U^*Ux) = U(Ix) = Ux = y$$

Ker je bil  $y$  poljuben, prejšnji sklep velja za vsak element  $X$ . Sledi, da je  $UU^* = I$ , torej je  $U$  unitaren operator.  $\square$

Da dopolnimo znanje o unitarnih operatorjih, premislimo še naslednjo lemo.

**Lema 3.21.** Naj bo  $X$  poljuben kompleksen Hilbertov prostor ter naj bo  $\mathcal{U}(X)$  množica vseh unitarnih operatorjev na  $X$ . Velja:

- a) Če je  $U \in \mathcal{U}(X)$ , je tudi  $U^* \in \mathcal{U}(X)$ , ter  $\|U\| = \|U^*\| = 1$ .

- b) Če sta  $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(X)$ , sta tudi  $U_1 U_2$  in  $U_1^{-1}$ .  
c)  $\mathcal{U}(X)$  je zaprta podmnožica  $B(X)$ .

*Dokaz.* a) Naj bo  $U$  poljuben unitaren operator na  $X$ . Tedaj je  $U^*(U^*)^* = U^*U = I$  in  $(U^*)^*U^* = UU^* = I$ , torej je tudi  $U^* \in B(X)$  unitaren. Po izreku 3.5 že vemo, da je  $\|U\| = \|U^*\|$ . Dodatno nam izrek 3.20 pove, da je  $U$  tudi izometrija, torej je  $\|U\| = 1$ .

- b) Naj bosta  $U_1$  in  $U_2$  poljubna unitarna operatorja na  $X$ . S pomočjo izreka 3.5 vidimo, da je:

$$\begin{aligned} U_1 U_2 (U_1 U_2)^* &= U_1 U_2 U_2^* U_1^* = U_1 I U_1^* = I \\ (U_1 U_2)^* U_1 U_2 &= U_2^* U_1^* U_1 U_2 = U_2^* I U_2 = I \end{aligned}$$

torej je tudi  $U_1 U_2 \in \mathcal{U}(X)$ . Ker je  $U_1$  unitaren, je omejen in po izreku 3.20 bijektiven, je po posledici izreka o odprti preslikavi tudi obrnljiv (znotraj  $B(X)$ ). Dodatno, upoštevamo lemo 3.9 in tako dobimo:

$$\begin{aligned} (U_1^{-1})^* U_1^{-1} &= (U_1^*)^{-1} U_1^{-1} = (U_1 U_1^*)^{-1} = I^{-1} = I \\ U_1^{-1} (U_1^{-1})^* &= U_1^{-1} (U_1^*)^{-1} = (U_1^* U_1)^{-1} = I^{-1} = I \end{aligned}$$

Sledi, da je  $U_1^{-1}$  unitaren.

- c) Naj bo  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje s členi v  $\mathcal{U}(X)$  in limito  $U \in B(X)$ . Potem je po točki a) tega dokaza tudi zaporedje  $\{U_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje s členi v  $\mathcal{U}(X)$ . Ker je adjungiranje zvezno, je  $U^* \in B(X)$  limita zaporedja  $\{U_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Naj bo  $x \in X$  poljuben. Potem je  $\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_n x, U_n x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n x\|^2 = \|x\|^2$ . Sledi, da je  $U$  izometrija, po izreku 3.20 pa sledi, da je potem  $U^*U = I$ . Na enak način kot za  $U$  vidimo, da je tudi  $U^*$  izometrija in posledično po izreku 3.20 velja, da je  $(U^*)^*U^* = UU^* = I$ . Sledi, da je  $U$  unitaren. □

## LITERATURA

- [1] B. P. Rynne, M. A. Youngson, *Linear functional analysis*, Springer-Verlag London, Ltd., London, 2008.