UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Matematika – 2. stopnja

Jimmy Zakeršnik

Omejeni linearni operatorji na Hilbertovih prostorih

Magistrsko delo

Mentor: dr. Daniel Eremita

Maribor, 2024/25

Kazalo

Omejeni linearni operatorji na Hilbertovih prostorih

Povzetek

Bo napisan zadnji

Bounded linear operators on Hilbert spaces

Abstract

Will be written last

Math. Subj. Class. (2020): 47A25, 47B02, 47B15,

Ključne besede: Linearna algebra, funkcionalna analiza, Hilbertov prostor, omejen linearen operator, spekter, spektralni radij, normalen operator, unitaren operator, sebi-adjungiran operator

Keywords: Linear algebra, funkcional analysis, Hilbert space, bounded linear operator, spectrum, spectral radius, normal operator, unitary operator, self-adjoint operator

1. Uvod

Sem spada uvod, ki bo napisan, ko bo naloga bolj vsebinsko dovršena.
Pojmi:

- Neenakost $C - S - B$
- Ortogonalni komplement
- Riezsov izrek

2. Hilbertovi prostori

Tukaj bom povedal osnovno o Hilbertovih prostorih: Kaj so Hilbertovi prostori Prostor omejenih linearnih operatorjev nad Hilbertovimi prostori Osnovne lastnosti in rezultati

Preden se lotimo glavne teme naloge bomo definirali in opisali nekaj osnovnih lastnosti Hilbertovih prostorov.

Spomnimo se najprej definicije vektorskih prostorov in linearne neodvisnosti.

Definicija 2.1. Naj bo F poljubno polje z nevtralnim elementom 0 in enoto 1. Neprazna množica V, skupaj z operacijama $+ : V \times V \to V$ in $\cdot : F \times V \to V$ je *vektorski prostor nad F*, če velja:

- $(V, +)$ je Abelova grupa
- $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x;\ \forall \alpha, \beta \in F\ \&\ \forall x \in V$
- $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y;\ \forall \alpha \in F\ \&\ \forall x, y \in V$
- $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x;\ \forall \alpha, \beta \in F\ \&\ \forall x \in V$
- $1 \cdot x = x;\ \forall x \in V$

Definicija 2.2. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in naj bo V poljuben vektorski prostor nad poljubnim poljem F. Pravimo, da so vektorji $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ *linearno neodvisni*, če enakost $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n = 0$ velja le za $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Če vektorji $x_1, x_2, \ldots, x_n$ niso linearno neodvisni, pravimo, da so *linearno odvisni*.

Naj bo M poljubna neprazna podmnožica vektorskega prostora V. Pravimo, da je M *linearno neodvisna*, če je vsaka njena končna podmnožica linearno neodvisna.

Opomba 2.3. V nadaljevanju bomo s $\mathbb{F}$ označili polje, ki je ali polje realnih števil $\mathbb{R}$, ali pa polje kompleksnih števil $\mathbb{C}$. Kadar bo pomembno, bomo natančno navedli, če je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ali $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Sedaj se spomnimo definicij norme in skalarnega produkta, saj bosta v nadaljevanju ta pojma ključna.

Definicija 2.4. Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Preslikavi $||.|| : V \to \mathbb{R}$ pravimo *norma* na V, če velja:

- $||x|| \geq 0;\ \forall x \in V$
- $||x|| = 0 \iff x = 0$
- $||\alpha \cdot x|| = |\alpha| ||x||;\ \forall \alpha \in \mathbb{F}\ \&\ \forall x \in V$
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||;\ \forall x, y \in V$

Če je $||.||$ norma na V, pravimo, da je $(V, +, \cdot, ||.||)$ *normiran prostor* (nad $\mathbb{F}$).

Opomba 2.5. Naj bo $(V, +, \cdot, ||.||)$ normiran prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Enostavno je preveriti naslednje rezultate:

- $||0|| = 0$
- $||x_1 + x_2 + \ldots + x_n|| \leq ||x_1|| + ||x_2|| + \ldots + ||x_n||;\ \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$

- $||x|| - ||y||| \leq ||x-y||; \ \forall x, y \in V$

Opomba 2.6. Naj bo $(V, +, \cdot, ||.||)$ normiran prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Enostavno je preveriti, da je s predpisom $d(x,y) = ||x-y|| \ \forall x, y \in V$ definirana metrika na V. Za to metriko pravimo, da je *porojena z normo* $||.||$.

Dejstvo, da vsaka norma porodi metriko nas motivira, da obravnavamo konvergenco tudi v normiranih prostorih.

Definicija 2.7. Naj bo $(V, ||.||)$ normiran prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Naj bo $\bar{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje s členi iz V.

- Pravimo, da je zaporedje $\bar{x}$ *konvergentno*, če obstaja tak $x \in V$, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja: $n \geq n_0 \Rightarrow ||x_n - x|| < \varepsilon$. V tem primeru pravimo, da je x *limita zaporedja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in pišemo $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
- Pravimo, da je zaporedje $\bar{x}$ *Cauchyjevo*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za poljubna $m, n \in \mathbb{N}$ velja: $m, n \geq n_0 \Rightarrow ||x_m - x_n|| < \varepsilon$.
- Naj bo $\bar{s}$ zaporedje podano s predpisom $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k; \ \forall n \in \mathbb{N}$. Pravimo, da je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *konvergentna*, če je konvergentno zaporedje $\bar{s}$. Če je s limita zaporedja $\bar{s}$, tedaj pravimo, da je s *vsota vrste* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ in pišemo $s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$.
- Pravimo, da je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *absolutno konvergentna*, če je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||$ konvergentna.

Naslednja trditev nam pove, da za limite v normiranih prostorih veljajo analogi nekaterih rezultatov, ki so nam znani že iz obravnave realnih zaporedij.

Definicija 2.8. Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Preslikavi $\langle ., . \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ pravimo *skalarni produkt* na V, če velja:

- $\langle x, x \rangle \geq 0; \ \forall x \in V$
- $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}; \ \forall x, y \in V$
- $\langle \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle; \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F} \ \& \ \forall x_1, x_2, y \in V$

Če je V vektorski prostor (nad $\mathbb{F}$) in $\langle ., . \rangle$ skalarni produkt na njem, pravimo, da je $(V, +, \cdot, \langle ., . \rangle)$ *prostor s skalarnim produktom.*

Opomba 2.9. Naj bo $(V, +, \cdot, \langle ., . \rangle)$ prostor s skalarnim produktom nad poljem $\mathbb{F}$. Enostavno je preveriti, da je s predpisom $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \ \forall x \in V$ definirana norma na V. Za tako normo pravimo, da je *porojena s skalarnim produktom* $\langle ., . \rangle$.

Definicija 2.10. Naj bo (M, d) poljuben metrični prostor. Pravimo, da je M *poln* metrični prostor, če je vsako Cauchyjevo zaporedje v M konvergentno v M.

Sedaj definirajmo Hilbertove prostore.

Definicija 2.11. Naj bo $(V, \langle ., . \rangle)$ poljuben prostor s skalarnim produktom nad poljem $\mathbb{F}$. Naj bo $||.||$ norma na V porojena s $\langle ., . \rangle$ in naj bo $d : V \times V \to \mathbb{R}$ metrika na V porojena z $||.||$. Če je (V, d) poln metrični prostor, pravimo, da je $(V, \langle ., . \rangle)$ *Hilbertov prostor* nad $\mathbb{F}$.

3. Omejeni linearni operatorji nad Hilbertovimi prostori

V tem poglavju bomo obravnavali lastnosti omejenih linearnih operatorjev nad Hilbertovimi prostori ter lastnosti njihovih spektrov, kadar sta domena in kodomena kompleksna Hilbertova prostora. Posebej nas bo zanimala operacija adjungiranja, zato bomo najprej povedali nekaj o njej.

3.1. **Adjungirani operatorji.**

Izrek 3.1. *Naj bosta* $(X, \langle\langle .,. \rangle\rangle)$ *in* $(Y, \langle .,. \rangle)$ *poljubna kompleksna Hilbertova prostora in naj bo* T *poljuben element* $B(X,Y)$. *Tedaj obstaja enolično določen operator* $T^* \in B(Y,X)$, *za katerega velja*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle\langle x, T^*y \rangle\rangle \, ; \; \forall x \in X \;\&\; \forall y \in Y$$

Dokaz. Naj bo $y \in Y$ poljuben ter naj bo $f_y : X \to \mathbb{C}$ preslikava definirana s predpisom $f_y(x) = \langle Tx, y \rangle \, ; \; \forall x \in X$. Opazimo, da je f_y linearen funkcional nad X. Po neenakosti Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky potem velja:

$$|f_y(x)| = |\langle Tx, y \rangle| \le ||Tx||_Y \cdot ||y||_Y \le ||T|| \cdot ||x||_X \cdot ||y||_Y ; \; \forall x \in X$$

To pomeni, da je f_y omejen linearen funkcional nad X. Posledično velja, po Riezsovem izreku, da obstaja enolično določen $z \in X$, tak, da je $f_y(x) = \langle\langle x, z \rangle\rangle \, ; \; \forall x \in X$. Sedaj definiramo preslikavo $T^* : Y \to X$, ki vsakemu $y \in Y$ priredi pripadajoči $z \in X$ (tisti, enolično določen, za katerega je $f_y(x) = \langle\langle x, z \rangle\rangle \, ; \; \forall x \in X$). Posledično velja:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle\langle x, T^*y \rangle\rangle \;\; \forall x \in X, \; \forall y \in Y$$

Sedaj preverimo, da je T^* omejen linearen operator. Naj bodo $y_1, y_2 \in Y$ in $x \in X$ poljubni elementi ter $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ poljubna skalarja. Tedaj je:

$$\begin{aligned}
\langle\langle x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle\rangle &= \langle Tx, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle \\
&= \bar{\alpha} \langle Tx, y_1 \rangle + \bar{\beta} \langle Tx, y_2 \rangle \\
&= \bar{\alpha} \langle\langle x, T^*y_1 \rangle\rangle + \bar{\beta} \langle\langle x, T^*y_2 \rangle\rangle \\
&= \langle\langle x, \alpha T^*y_1 \rangle\rangle + \langle\langle x, \beta T^*y_2 \rangle\rangle
\end{aligned}$$

Sledi, da je $T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T^*y_1 + \beta T^*y_2 ; \; \forall x \in X, \forall y_1, y_2 \in Y, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, torej je T^* res linearna preslikava. Dodatno, velja:

$$||T^*y||_X^2 = \langle\langle T^*y, T^*y \rangle\rangle = \langle TT^*y, y \rangle \le ||TT^*y||_Y ||y||_Y \le ||T|| ||T^*y||_X ||y||_Y ; \; \forall y \in Y$$

Če je $||T^*y||_X \ne 0$, dobljeno neenakost delimo z $||T^*y||_X$ ter tako dobimo oceno $||T^*y||_X \le ||T|| ||y||_Y$. V primeru, ko je $||T^*y||_X = 0$, prejšnja ocena velja trivialno. Sledi, da je

$$||T^*y||_X \le ||T|| ||y||_Y ; \forall y \in Y$$

Preslikava T^* je torej omejen linearen operator in velja $||T^*|| \le ||T||$. Za konec še pokažimo, da je T^* enolično določen. Denimo, da imamo $U_1, U_2 \in B(Y,X)$, za katera velja: $\langle Tx, y \rangle = \langle\langle x, U_1 y \rangle\rangle = \langle\langle x, U_2 y \rangle\rangle \, ; \; \forall x \in X, \forall y \in Y$. Tedaj velja, da je $U_1 y = U_2 y ; \; \forall y \in Y$, torej je $U_1 = U_2$. Sledi, da je T^* res enolično določen. $\square$

Definicija 3.2. Naj bosta X in Y kompleksna Hilbertova prostora ter naj bo $T \in B(X,Y)$. Tedaj operatorju T^* iz izreka 3.1 pravimo *adjungiran operator* operatorja T.

Sedaj bomo navedli in premislili nekatere pomembne lastnosti adjungiranja.

Izrek 3.3. *Naj bodo* $(X, \langle\langle .,. \rangle\rangle)$, $(Y, \langle .,. \rangle)$ *in* $(Z, \langle\langle\langle .,. \rangle\rangle\rangle)$ *poljubni kompleksni Hilbertovi prostori ter naj bodo* $U, V \in B(X,Y)$ *ter* $T \in B(Y,Z)$ *poljubni omejeni linearni operatorji. Tedaj velja:*

a) $(\alpha U + \beta V)^* = \bar{\alpha} U^* + \bar{\beta} V^* ; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

b) $(TU)^* = U^*T^*$
c) $(U^*)^* = U$
d) $||U^*|| = ||U||$
e) Preslikava $f : B(X,Y) \to B(Y,X)$*, definirana s predpisom* $f(U) = U^*$ *je zvezna.*
f) $||U^*U|| = ||U||^2$

Dokaz. a) Naj bodo $U, V \in B(X,Y)$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ poljubni. Tedaj $\forall x \in X, \forall y \in Y$ velja:

$$\begin{aligned}\langle\langle x, (\alpha U + \beta V)^* y\rangle\rangle &= \langle(\alpha U + \beta V)x, y\rangle \\ &= \alpha \langle Ux, y\rangle + \beta \langle Vx, y\rangle \\ &= \alpha \langle\langle x, U^* y\rangle\rangle + \beta \langle\langle x, V^* y\rangle\rangle \\ &= \langle\langle x, \bar{\alpha} U^* y\rangle\rangle + \left\langle\left\langle x, \bar{\beta} V^* y\right\rangle\right\rangle \\ &= \left\langle\left\langle x, (\bar{\alpha} U^* + \bar{\beta} V^*) y\right\rangle\right\rangle\end{aligned}$$

Sledi, da je $(\alpha U + \beta V)^* = (\bar{\alpha} U^* + \bar{\beta} V^*)$.

b) Naj bosta $U \in B(X,Y)$ in $T \in B(Y,Z)$ poljubna. Tedaj $\forall x \in X, \forall z \in Z$ velja:

$$\langle\langle x, (TU)^* z\rangle\rangle = \langle\langle\langle (TU)x, z\rangle\rangle\rangle = \langle\langle\langle T(Ux), z\rangle\rangle\rangle = \langle Ux, T^* z\rangle = \langle\langle x, U^* T^* z\rangle\rangle$$

Posledično je res $(TU)^* = U^* T^*$.

c) Naj bo $U \in B(X,Y)$ poljuben. Tedaj $\forall x \in X, \forall y \in Y$ velja:

$$\langle y, (U^*)^* x\rangle = \langle\langle U^* y, x\rangle\rangle = \overline{\langle\langle x, U^* y\rangle\rangle} = \overline{\langle Ux, y\rangle} = \langle y, Ux\rangle$$

Posledično je $(U^*)^* = U$.

d) V dokazu izreka 3.1 smo že pokazali, da je $||U^*|| \leq ||U||$. Ko upoštevamo prejšnjo točko, vidimo, da velja:

$$||U|| = ||(U^*)^*|| \leq ||U^*|| \leq ||U||$$

Posledično sledi, da je $||U^*|| = ||U||$.

e) Naj bodo $U, V \in B(X,Y)$ $\varepsilon > 0$ poljubni in izberemo $\delta = \varepsilon$. Denimo, da je $||U - V|| < \delta$. Tedaj je $||f(U) - f(V)|| = ||U^* - V^*|| = ||(U - V)^*||$. Po prejšnji točki je $||(U - V)^*|| = ||U - V|| < \delta = \varepsilon$, torej je f zvezna.

f) Naj bo $U \in B(X,Y)$ poljuben. Ker že vemo, da je $||U^*|| = ||U||$, hitro vidimo, da je $||U^*U|| \leq ||U^*||||U|| = ||U||^2$. Hkrati vidimo, da za $\forall x \in X$ velja $||Ux||_Y^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle\langle U^*Ux, x\rangle\rangle$. Ko upoštevamo neenakost Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky, dobimo oceno $\langle\langle U^*Ux, x\rangle\rangle \leq ||U^*Ux||_X ||x||_X \leq ||U^*U|| ||x||_X^2$. Sledi ocena: $||Ux||_Y^2 \leq ||U^*U|| ||x||_X^2 \forall x \in X$, torej je $||U||^2 \leq ||U^*U||$. Posledično velja iskana enakost.

□

Lema 3.4. *Naj bosta* $(X, \langle\langle ., .\rangle\rangle)$ *in* $(Y, \langle ., .\rangle)$ *poljubna kompleksna Hilbertova prostora ter naj bo* $T \in B(X,Y)$ *poljuben. Tedaj velja:*
a) $KerT = (ImT^*)^\perp$
b) $KerT^* = (ImT)^\perp$
c) $KerT^* = \{0\} \iff ImT$ *je gosta v* Y

Dokaz. ... □

Posledica 3.5.

Dokaz. ... □

Lema 3.6.

Dokaz. ... □

Literatura

[1] B. P. Rynne, M. A. Youngson, *Linear functional analysis*, Springer-Verlag London, Ltd., London, 2008.