UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Matematika – 2. stopnja

Jimmy Zakeršnik

Omejeni linearni operatorji na Hilbertovih prostorih

Magistrsko delo

Mentor: dr. Daniel Eremita

Maribor, 2024/25

Kazalo

Omejeni linearni operatorji na Hilbertovih prostorih

Povzetek

Bo napisan zadnji

Bounded linear operators on Hilbert spaces

Abstract

Will be written last

Math. Subj. Class. (2020): 47A25, 47B02, 47B15,

Ključne besede: Linearna algebra, funkcionalna analiza, Hilbertov prostor, omejen linearen operator, spekter, spektralni radij, normalen operator, unitaren operator, sebi-adjungiran operator

Keywords: Linear algebra, funkcional analysis, Hilbert space, bounded linear operator, spectrum, spectral radius, normal operator, unitary operator, self-adjoint operator

1. Uvod

Sem spada uvod, ki bo napisan, ko bo naloga bolj vsebinsko dovršena.

2. Hilbertovi prostori

Tukaj bom povedal osnovno o Hilbertovih prostorih: Kaj so Hilbertovi prostori Prostor omejenih linearnih operatorjev nad Hilbertovimi prostori Osnovne lastnosti in rezultati

Preden se lotimo glavne teme naloge bomo definirali in opisali nekaj osnovnih lastnosti Hilbertovih prostorov.

Spomnimo se najprej definicije vektorskih prostorov in linearne neodvisnosti.

Definicija 2.1. Naj bo F poljubno polje z nevtralnim elementom 0 in enoto 1. Neprazna množica V, skupaj z operacijama $+ : V \times V \to V$ in $\cdot : F \times V \to V$ je *vektorski prostor nad* F, če velja:

- $(V, +)$ je Abelova grupa
- $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x;\ \forall \alpha, \beta \in F\ \&\ \forall x \in V$
- $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y;\ \forall \alpha \in F\ \&\ \forall x, y \in V$
- $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x;\ \forall \alpha, \beta \in F\ \&\ \forall x \in V$
- $1 \cdot x = x;\ \forall x \in V$

Definicija 2.2. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in naj bo V poljuben vektorski prostor nad poljubnim poljem F. Pravimo, da so vektorji $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ *linearno neodvisni*, če enakost $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n = 0$ velja le za $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Če vektorji $x_1, x_2, \ldots, x_n$ niso linearno neodvisni, pravimo, da so *linearno odvisni.*

Naj bo M poljubna neprazna podmnožica vektorskega prostora V. Pravimo, da je M *linearno neodvisna*, če je vsaka njena končna podmnožica linearno neodvisna.

Opomba 2.3. V nadaljevanju bomo s $\mathbb{F}$ označili polje, ki je ali polje realnih števil $\mathbb{R}$, ali pa polje kompleksnih števil $\mathbb{C}$. Kadar bo pomembno, bomo natančno navedli, če je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ali $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Sedaj se spomnimo definicij norme in skalarnega produkta, saj bosta v nadaljevanju ta pojma ključna.

Definicija 2.4. Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Preslikavi $||.|| : V \to \mathbb{R}$ pravimo *norma* na V, če velja:

- $||x|| \geq 0;\ \forall x \in V$
- $||x|| = 0 \iff x = 0$
- $||\alpha \cdot x|| = |\alpha| ||x||;\ \forall \alpha \in \mathbb{F}\ \&\ \forall x \in V$
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||;\ \forall x, y \in V$

Če je $||.||$ norma na V, pravimo, da je $(V, +, \cdot, ||.||)$ *normiran prostor* (nad $\mathbb{F}$).

Opomba 2.5. Naj bo $(V, +, \cdot, ||.||)$ normiran prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Enostavno je preveriti naslednje rezultate:

- $||0|| = 0$
- $||x_1 + x_2 + \ldots + x_n|| \leq ||x_1|| + ||x_2|| + \ldots + ||x_n||;\ \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$
- $|||x|| - ||y||| \leq ||x - y||;\ \forall x, y \in V$

Opomba 2.6. Naj bo $(V, +, \cdot, ||.||)$ normiran prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Enostavno je preveriti, da je s predpisom $d(x, y) = ||x - y||\ \forall x, y \in V$ definirana metrika na V. Za to metriko pravimo, da je *porojena z normo* $||.||$.

Dejstvo, da vsaka norma porodi metriko nas motivira, da obravnavamo konvergenco tudi v normiranih prostorih.

Definicija 2.7. Naj bo $(V, ||.||)$ normiran prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Naj bo $\bar{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje s členi iz V.

- Pravimo, da je zaporedje $\bar{x}$ *konvergentno*, če obstaja tak $x \in V$, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja: $n \geq n_0 \Rightarrow ||x_n - x|| < \varepsilon$. V tem primeru pravimo, da je x *limita zaporedja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in pišemo $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
- Pravimo, da je zaporedje $\bar{x}$ *Cauchyjevo*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za poljubna $m, n \in \mathbb{N}$ velja: $m, n \geq n_0 \Rightarrow ||x_m - x_n|| < \varepsilon$.
- Naj bo $\bar{s}$ zaporedje podano s predpisom $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$; $\forall n \in \mathbb{N}$. Pravimo, da je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *konvergentna*, če je konvergentno zaporedje $\bar{s}$. Če je s limita zaporedja $\bar{s}$, tedaj pravimo, da je s *vsota vrste* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ in pišemo $s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$.
- Pravimo, da je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *absolutno konvergentna*, če je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}||x_k||$ konvergentna.

Naslednja trditev nam pove, da za limite v normiranih prostorih veljajo analogi nekaterih rezultatov, ki so nam znani že iz obravnave realnih zaporedij.

Trditev 2.8. *Naj bo $(V, ||.||)$ normiran prostor nad $\mathbb{F}$. Naj bosta $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ poljubni konvergentni zaporedji s členi iz V in z limitama x ter y. Naj bo $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ poljubno konvergentno zaporedje s členi iz $\mathbb{F}$ z limito α. Tedaj velja:*

i) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$

ii) $\lim_{n\to\infty}||x_n|| = ||\lim_{n\to\infty} x_n|| = ||x||$

iii) $\lim_{n\to\infty}(\alpha_n \cdot x_n) = \alpha \cdot x$

Dokaz. i) Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Ker sta zaporedji $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentni z limitama x in y, obstajata taka $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, da vse $n \in \mathbb{N}$, ki so večji ali enaki n_1, velja $||x_n - x|| < \frac{\varepsilon}{2}$ in za vse $n \in \mathbb{N}$, ki so večji ali enaki n_2 velja $||y_n - y|| < \frac{\varepsilon}{2}$. Naj bo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Tedaj je $||x_n + y_n - (x + y)|| = ||(x_n - x) + (y_n - y)|| \leq ||x_n - x|| + ||y_n - y|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ za vse $n \in \mathbb{N}$, ki so večji ali enaki n_0. Sledi, da je zaporedje $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno z limito $x + y$.

ii) Najprej opazimo, da je zaporedje $(||x_n - x||)$ realno konvergentno zaporedje z limito 0, saj je zaporedje (x_n) konvergentno z limito x. Po tretji točki iz opombe 2.5 za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $0 \leq |||x_n|| - ||x||| \leq ||x_n - x||$. Po pravilu o sendviču zato sklepamo, da je $\lim_{n\to\infty}|||x_n|| - ||x||| = 0$. Po znanem rezultatu iz Analize 1 potem velja, da je tudi $\lim_{n\to\infty}(||x_n|| - ||x||) = 0$. Sledi, da je $\lim_{n\to\infty}||x_n|| - ||x|| = 0$ oziroma $\lim_{n\to\infty}||x_n|| = ||x||$.

iii) Ponovno upoštevamo, da je $||x_n - x||$ konvergentno realno zaporedje z limito 0, ter na enak način vidimo, da je $|\alpha_n - \alpha|$ konvergentno realno zaporedje z limito 0. Dodatno vidimo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$0 \leq ||\alpha_n \cdot x_n - \alpha \cdot x|| \leq ||\alpha_n \cdot x_n - \alpha \cdot x_n + \alpha \cdot x_n - \alpha \cdot x||$$

Skrajno desno normo sedaj po trikotniškem pravilu ocenimo navzgor z

$$||\alpha_n \cdot x_n - \alpha \cdot x_n|| + ||\alpha \cdot x_n - \alpha \cdot x|| = |\alpha_n - \alpha|||x_n|| + |\alpha|||x_n - x||$$

Velja torej ocena:

$$0 \leq ||\alpha_n \cdot x_n - \alpha \cdot x|| \leq |\alpha_n - \alpha|||x_n|| + |\alpha|||x_n - x|| \tag{1}$$

Sedaj opazimo, upoštevajoč prejšnjo točko, da je $|\alpha_n - \alpha|||x_n||$ produkt dveh konvergentnih realnih zaporedij in velja:

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha_n - \alpha|||x_n|| = \lim_{n\to\infty} |\alpha_n - \alpha| \cdot \lim_{n\to\infty} ||x_n|| = 0 \cdot ||x|| = 0$$

Dodatno vidimo, da je $\lim_{n\to\infty} |\alpha|||x_n - x|| = |\alpha| \lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = |\alpha| \cdot 0 = 0$. Potem sledi, da je zaporedje $(|\alpha_n - \alpha|||x_n|| + |\alpha|||x_n - x||)_{n\in\mathbb{N}}$ realno konvergentno zaporedje z limito 0. Po pravilu o sendviču, upoštevajoč oceno (1), sklepamo, da je potem $\lim_{n\to\infty} ||\alpha_n \cdot x_n - \alpha \cdot x|| = 0$, od tod pa sledi, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$, ki je večji ali enak n_0, velja $||(\alpha_n \cdot x_n - \alpha \cdot x) - 0|| = ||\alpha_n \cdot x_n - \alpha \cdot x|| < \varepsilon$. Po definiciji konvergence zaporedja potem sledi, da je $\lim_{n\to\infty} (\alpha_n \cdot x_n) = \alpha \cdot x$.

□

Definicija 2.9. Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Preslikavi $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ pravimo *skalarni produkt* na V, če velja:

- $\langle x, x \rangle \geq 0;\ \forall x \in V$
- $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle};\ \forall x, y \in V$
- $\langle \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle;\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}\ \&\ \forall x_1, x_2, y \in V$

Če je V vektorski prostor (nad $\mathbb{F}$) in $\langle .,. \rangle$ skalarni produkt na njem, pravimo, da je $(V, +, \cdot, \langle .,. \rangle)$ *prostor s skalarnim produktom.*

Opomba 2.10. Naj bo $(V, +, \cdot, \langle .,. \rangle)$ prostor s skalarnim produktom nad poljem $\mathbb{F}$. Enostavno je preveriti, da je s predpisom $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}\ \forall x \in V$ definirana norma na V. Za tako normo pravimo, da je *porojena s skalarnim produktom* $\langle .,. \rangle$.

Definicija 2.11. Naj bo (M, d) poljuben metrični prostor. Pravimo, da je M *poln* metrični prostor, če je vsako Cauchyjevo zaporedje v M konvergentno v M.

Sedaj definirajmo Hilbertove prostore.

Definicija 2.12. Naj bo $(V, \langle .,. \rangle)$ poljuben prostor s skalarnim produktom nad poljem $\mathbb{F}$. Naj bo $||.||$ norma na V porojena s $\langle .,. \rangle$ in naj bo $d : V \times V \to \mathbb{R}$ metrika na V porojena z $||.||$. Če je (V, d) poln metrični prostor, pravimo, da je $(V, \langle .,. \rangle)$ *Hilbertov prostor* nad $\mathbb{F}$.

Literatura

[1] B. P. Rynne, M. A. Youngson, *Linear functional analysis*, Springer-Verlag London, Ltd., London, 2008.