UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Matematika – 2. stopnja

Jimmy Zakeršnik

Omejeni linearni operatorji na Hilbertovih prostorih

Magistrsko delo

Mentor: dr. Daniel Eremita

Maribor, 2024/25

Kazalo

Omejeni linearni operatorji na Hilbertovih prostorih

POVZETEK

Bo napisan zadnji

Bounded linear operators on Hilbert spaces

ABSTRACT

Will be written last

Math. Subj. Class. (2020): 47A25, 47B02, 47B15,

Ključne besede: Linearna algebra, funkcionalna analiza, Hilbertov prostor, omejen linearen operator, spekter, spektralni radij, normalen operator, unitaren operator, sebi-adjungiran operator

Keywords: Linear algebra, funkcional analysis, Hilbert space, bounded linear operator, spectrum, spectral radius, normal operator, unitary operator, self-adjoint operator

1. Uvod

Sem spada uvod, ki bo napisan, ko bo naloga bolj vsebinsko dovršena.

2. Hilbertovi prostori

V tem poglavju bomo najprej osvežili znanje o nekaterih pomembnih definicijah in rezultatih iz študije Banachovih in Hilbertovih prostorov. V nadaljevanju bomo pozornost posvetili t. i. adjungiranim operatorjem, nato pa še njihovim posebnim primerom - normalnim, sebi-adjungiranim in unitarnim operatorjem. Pri tem se bomo primarno sklicevali na vir [1].

Tukaj bom povedal osnovno o Hilbertovih prostorih:

- Izrek o odprti preslikavi (brez dokaza)
- Kaj so Hilbertovi prostori
- Neenakost $C - S - B$
- Ortogonalni komplement
- Riezsov izrek
- Prostor omejenih linearnih operatorjev nad Hilbertovimi prostori

Lema 2.1. *Za poljubna normirana prostora X ter Y in poljuben $T \in B(X,Y)$ velja: Če je T obrnljiv, je $||Tx|| \geq ||T^{-1}||^{-1}||x||;\ \forall x \in X$.*

Lema 2.2. *Za poljuben Banachov prostor X, poljuben normiran prostor Y ter poljuben $T \in B(X,Y)$ velja: Če obstaja tak $r > 0$, da je $||Tx|| \geq r||x||;\ \forall x \in X$, je ImT zaprti podprostor v Y.*

Definicija 2.3. Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Preslikavi $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ pravimo *skalarni produkt* na V, če velja:

- $\langle x, x \rangle \geq 0;\ \forall x \in V$
- $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle};\ \forall x, y \in V$
- $\langle \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle;\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}\ \&\ \forall x_1, x_2, y \in V$

Če je V vektorski prostor (nad $\mathbb{F}$) in $\langle .,. \rangle$ skalarni produkt na njem, pravimo, da je $(V, +, \cdot, \langle .,. \rangle)$ *prostor s skalarnim produktom.*

Primer 2.4. Spomnimo se nekaj znanih primerov vektorskih prostorov s skalarnim produktom:

- Prostor $\mathbb{R}^n$ (za $n \in \mathbb{N}$) skupaj s skalarnim produktom $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
- Prostor $\mathbb{C}^n$ (za $n \in \mathbb{N}$) skupaj s skalarnim produktom $\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i}$.
- V prostoru zaporedij l^2 je s predpisom $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i \overline{y_i};\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in l^2$ definiran skalarni produkt.
- V prostoru zveznih funkcij na zaprtem intervalu $[a,b], \mathcal{C}([a,b])$, je s predpisom $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx;\ \forall f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ definiran skalarni produkt.

$\diamondsuit$

Opomba 2.5. Naj bo $(V, +, \cdot, \langle .,. \rangle)$ prostor s skalarnim produktom nad poljem $\mathbb{F}$. Enostavno je preveriti, da je s predpisom $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}\ \forall x \in V$ definirana norma na V. Za tako normo pravimo, da je *porojena s skalarnim produktom* $\langle .,. \rangle$.

Definicija 2.6. Naj bo (M, d) poljuben metrični prostor. Pravimo, da je M *poln* metrični prostor, če je vsako Cauchyjevo zaporedje v M konvergentno v M.

Primer 2.7. Navedimo nekaj klasičnih primerov polnih metričnih prostorov.

- Prostori $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ s standardno Evklidsko normo.
- Prostori $\mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ s standardno Evklidsko normo.
- Prostor l^2, skupaj z normo, definirano s predpisom $||\bar{x}||_2 = (\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$; $\forall \bar{x} \in l^2$, je polni metrični prostor.
- Prostor s kvadratom integrabilnih funkcij na (realnem ali kompleksnem) merljivem prostoru X, opremljenim z Lebesguesovo mero μ; $\mathcal{L}^2(X,\mu)$; skupaj z normo, definirano s predpisom $||f||_2 = (\int_X |f|^2 d\mu)^{\frac{1}{2}}$; $\forall f \in \mathcal{L}^2(X,\mu)$.

$\diamondsuit$

Sedaj definirajmo Hilbertove prostore.

Definicija 2.8. Naj bo $(V, \langle .,. \rangle)$ poljuben prostor s skalarnim produktom nad poljem $\mathbb{F}$. Naj bo $||.||$ norma na V porojena s $\langle .,. \rangle$ in naj bo $d : V \times V \to \mathbb{R}$ metrika na V porojena z $||.||$. Če je (V, d) poln metrični prostor, pravimo, da je $(V, \langle .,. \rangle)$ *Hilbertov prostor* nad $\mathbb{F}$.

Primer 2.9. Navedimo nekaj znanih primerov Hilbertovih prostorov.

- Prostori $\mathbb{R}^n$ (za $n \in \mathbb{N}$) skupaj s standardnim skalarnim produktom.
- Prostori $\mathbb{C}^n$ (za $n \in \mathbb{N}$) skupaj s (standardnim) skalarnim produktom iz primera 2.4.
- Prostor l^2 skupaj s skalarnim produktom iz primera 2.4.
- Prostor $\mathcal{L}^2(X,\mu)$ iz primera 2.7, skupaj s skalarnim produktom, definiranim s predpisom $\langle f, g \rangle = \int_{[a,b]} (f \cdot \bar{g}) d\mu; \forall f, g \in \mathcal{L}^2(X,\mu)$.

$\diamondsuit$

Opomba 2.10. V primeru, ko je merljivi prostor X v primeru 2.9 zaprti interval $[a, b]$, sta Lebesguesov in Riemannov integral enaka. Tako oznako za množico poenostavimo na $\mathcal{L}^2([a, b])$, predpis za skalarni produkt pa se spremeni v: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx;\ \forall f, g \in \mathcal{L}^2([a, b])$.

Posledica 2.11. *Za poljuben zaprti podprostor Y poljubnega Hilbertovega prostora velja $Y^{\perp\perp} = Y$.*

Posledica 2.12. *Za poljuben podprostor Y poljubnega Hilbertovega prostora velja $Y^{\perp\perp} = \overline{Y}$.*

Lema 2.13. *Naj bo $(X, \langle .,. \rangle)$ poljuben kompleksen vektorski prostor s skalarnim produktom in naj bosta $S, T \in B(X)$ poljubna. Če $\forall x \in X$ velja $\langle Tx, x \rangle = \langle Sx, x \rangle$, potem je $T = S$.*

Izrek 2.14. *Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Naj bo $T \in B(X)$ poljuben. Če je $||T|| < 1$, je operator $I - T$ obrnljiv in velja: $(I - T)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} T^n$.*

Izrek 2.15. *Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor ter z $\mathcal{G}(X)$ označimo množico vseh obrnljivih operatorjev v $B(X)$. Velja:*

a) $(\mathcal{G}, \cdot)$ je grupa.
b) Množica $\mathcal{G}$ je odprta v $B(X)$.
c) Preslikava invertiranja, $^{-1} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, s predpisom $^{-1}(T) = T^{-1}$; $\forall T \in \mathcal{G}(X)$ je zvezna.

3. Omejeni linearni operatorji nad Hilbertovimi prostori

V tem poglavju bomo obravnavali lastnosti omejenih linearnih operatorjev nad Hilbertovimi prostori ter lastnosti njihovih spektrov, kadar sta domena in kodomena kompleksna Hilbertova prostora. Posebej nas bo zanimala operacija adjungiranja, zato bomo najprej povedali nekaj o njej.

3.1. **Adjungirani operatorji.**

Izrek 3.1. *Naj bosta $(X, \langle\langle ., . \rangle\rangle)$ in $(Y, \langle ., . \rangle)$ poljubna kompleksna Hilbertova prostora in naj bo T poljuben element $B(X, Y)$. Tedaj obstaja enolično določen operator $T^* \in B(Y, X)$, za katerega velja*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle\langle x, T^* y \rangle\rangle \; ; \; \forall x \in X \;\&\; \forall y \in Y$$

Dokaz. Naj bo $y \in Y$ poljuben ter naj bo $f_y : X \to \mathbb{C}$ preslikava definirana s predpisom $f_y(x) = \langle Tx, y \rangle$; $\forall x \in X$. Opazimo, da je f_y linearen funkcional nad X. Po neenakosti Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky potem velja:

$$|f_y(x)| = |\langle Tx, y \rangle| \leq ||Tx||_Y \cdot ||y||_Y \leq ||T|| \cdot ||x||_X \cdot ||y||_Y ; \; \forall x \in X$$

To pomeni, da je f_y omejen linearen funkcional nad X. Posledično velja, po Riezsovem izreku, da obstaja enolično določen $z \in X$, tak, da je $f_y(x) = \langle\langle x, z \rangle\rangle$; $\forall x \in X$. Sedaj definiramo preslikavo $T^* : Y \to X$, ki vsakemu $y \in Y$ priredi pripadajoči $z \in X$ (tisti, enolično določen, za katerega je $f_y(x) = \langle\langle x, z \rangle\rangle$; $\forall x \in X$). Posledično velja:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle\langle x, T^* y \rangle\rangle \;\; \forall x \in X, \; \forall y \in Y$$

Sedaj preverimo, da je T^* omejen linearen operator. Naj bodo $y_1, y_2 \in Y$ in $x \in X$ poljubni elementi ter $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ poljubna skalarja. Tedaj je:

$$\begin{aligned}
\langle\langle x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle\rangle &= \langle Tx, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle \\
&= \bar{\alpha} \langle Tx, y_1 \rangle + \bar{\beta} \langle Tx, y_2 \rangle \\
&= \bar{\alpha} \langle\langle x, T^* y_1 \rangle\rangle + \bar{\beta} \langle\langle x, T^* y_2 \rangle\rangle \\
&= \langle\langle x, \alpha T^* y_1 \rangle\rangle + \langle\langle x, \beta T^* y_2 \rangle\rangle
\end{aligned}$$

Sledi, da je $T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T^* y_1 + \beta T^* y_2$; $\forall x \in X, \forall y_1, y_2 \in Y, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, torej je T^* res linearna preslikava. Dodatno, velja:

$$||T^* y||_X^2 = \langle\langle T^* y, T^* y \rangle\rangle = \langle TT^* y, y \rangle \leq ||TT^* y||_Y ||y||_Y \leq ||T|| ||T^* y||_X ||y||_Y ; \; \forall y \in Y$$

Če je $||T^* y||_X \neq 0$, dobljeno neenakost delimo z $||T^* y||_X$ ter tako dobimo oceno $||T^* y||_X \leq ||T|| ||y||_Y$. V primeru, ko je $||T^* y||_X = 0$, prejšnja ocena velja trivialno. Sledi, da je

$$||T^* y||_X \leq ||T|| ||y||_Y ; \forall y \in Y$$

Preslikava T^* je torej omejen linearen operator in velja $||T^*|| \leq ||T||$. Za konec še pokažimo, da je T^* enolično določen. Denimo, da imamo $U_1, U_2 \in B(Y, X)$, za katera velja: $\langle Tx, y \rangle = \langle\langle x, U_1 y \rangle\rangle = \langle\langle x, U_2 y \rangle\rangle$; $\forall x \in X, \forall y \in Y$. Tedaj velja, da je $U_1 y = U_2 y$; $\forall y \in Y$, torej je $U_1 = U_2$. Sledi, da je T^* res enolično določen. □

Izrek 3.1 nas motivira, da vpeljemo naslednjo definicijo.

Definicija 3.2. Naj bosta X in Y kompleksna Hilbertova prostora ter naj bo $T \in B(X, Y)$. Tedaj operatorju T^* iz izreka 3.1 pravimo *adjungiran operator* operatorja T.

Primer 3.3. Spomnimo se operatorja $D \in B(l^2)$, imenovanega »desni premik«, s predpisom $D(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$; $\forall \bar{x} \in l^2$ in določimo predpis njegovega adjungiranega operatorja D^*. Naj bosta $\bar{x}, \bar{y} \in l^2$ poljubna ter označimo $\bar{z} = D^*y$. Tedaj po definiciji adjungiranega operatorja velja, da je $\langle Dx, y\rangle = \langle x, D^*y\rangle = \langle x, z\rangle$ oziroma

$$\langle(0, x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, y_3, \ldots)\rangle = \langle(x_1, x_2, x_3, \ldots), (z_1, z_2, z_3, \ldots)\rangle$$

Ko to enakost razpišemo, dobimo:

$$x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_3} + \ldots = x_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2} + x_3\overline{z_3} + \ldots$$

Opazimo, da če velja $z_1 = y_2, z_2 = y_3, \ldots z_i = y_{i+1} \forall i \in \mathbb{N}$, potem bo naša enačba veljavna za poljuben $\bar{x}$. Enoličnost adjungiranega operatorja nam posledično da predpis: $D^*(y_1, y_2, y_3 \ldots) = (y_2, y_3, y_4, \ldots)$; $\forall \bar{y} \in l^2$. Še več, prepoznamo, da je dobljeni operator ravno t. i. »levi premik«, ki ga tipično označimo z L. $\diamondsuit$

Primer 3.4. Za vsak $k \in \mathcal{C}([0,1])$ definiramo operator $T_k \in B(\mathcal{L}^2([0,1]))$ (skupaj s skalarnim produktom iz primera 2.9) s predpisom $(T_k g)(t) = k(t)g(t)$; $\forall t \in [0,1]$ (oziroma $T_k g = kg$), $\forall g \in \mathcal{L}^2([0,1])$. Določimo predpis adjungiranega operatorja $(T_k)^*$.

Naj bosta $f, g \in \mathcal{L}^2([0,1])$ poljubna ter naj bo $h = (T_k)^*g$. Tedaj, po definiciji adjungiranega operatorja, velja:

$$\langle T_k f, g\rangle = \langle f, (T_k)^*g\rangle = \langle f, h\rangle$$

V skladu z opombo 2.10 potem sledi:

$$\int_0^1 k(t)f(t)\overline{g(t)}dt = \int_0^1 f(t)\overline{h(t)}dt$$

Ta enačba bo držala, če je $\overline{h(t)} = k(t)\overline{g(t)}$; $\forall t \in [0,1]$ oziroma $h(t) = \overline{k(t)}g(t)$; $\forall t \in [0,1]$. Drugače povedano, enačba velja, če je $h = T_{\overline{k}}g$. Ker sta bila f in g poljubna, sledi, da sklep velja za vsak par elementov $\mathcal{L}^2([0,1])$. Ker je adjungirani operator enolično določen, sledi, da je $(T_k)^* = T_{\overline{k}}$. $\diamondsuit$

Sedaj bomo navedli in dokazali nekatere pomembne lastnosti adjungiranja.

Izrek 3.5. *Naj bodo $(X, \langle\langle ., .\rangle\rangle)$, $(Y, \langle ., .\rangle)$ in $(Z, \langle\langle\langle ., .\rangle\rangle\rangle)$ poljubni kompleksni Hilbertovi prostori ter naj bodo $U, V \in B(X, Y)$ ter $T \in B(Y, Z)$ poljubni omejeni linearni operatorji. Tedaj velja:*

a) $(\alpha U + \beta V)^* = \bar{\alpha}U^* + \bar{\beta}V^*; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
b) $(TU)^* = U^*T^*$.
c) $(U^*)^* = U$.
d) $||U^*|| = ||U||$.
e) Preslikava $f : B(X, Y) \to B(Y, X)$*, definirana s predpisom* $f(U) = U^*$ *je zvezna.*
f) $||U^*U|| = ||U||^2$.

Dokaz. a) Naj bodo $U, V \in B(X,Y)$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ poljubni. Tedaj $\forall x \in X, \forall y \in Y$ velja:

$$\begin{aligned}\langle\langle x, (\alpha U + \beta V)^* y\rangle\rangle &= \langle(\alpha U + \beta V)x, y\rangle \\ &= \alpha\langle Ux, y\rangle + \beta\langle Vx, y\rangle \\ &= \alpha\langle\langle x, U^* y\rangle\rangle + \beta\langle\langle x, V^* y\rangle\rangle \\ &= \langle\langle x, \bar{\alpha}U^* y\rangle\rangle + \left\langle\left\langle x, \bar{\beta}V^* y\right\rangle\right\rangle \\ &= \left\langle\left\langle x, (\bar{\alpha}U^* + \bar{\beta}V^*)y\right\rangle\right\rangle\end{aligned}$$

Sledi, da je $(\alpha U + \beta V)^* = (\bar{\alpha}U^* + \bar{\beta}V^*)$.

b) Naj bosta $U \in B(X,Y)$ in $T \in B(Y,Z)$ poljubna. Tedaj $\forall x \in X, \forall z \in Z$ velja:

$$\langle\langle x, (TU)^* z\rangle\rangle = \langle\langle\langle(TU)x, z\rangle\rangle\rangle = \langle\langle\langle T(Ux), z\rangle\rangle\rangle = \langle Ux, T^* z\rangle = \langle\langle x, U^* T^* z\rangle\rangle$$

Posledično je res $(TU)^* = U^* T^*$.

c) Naj bo $U \in B(X,Y)$ poljuben. Tedaj $\forall x \in X, \forall y \in Y$ velja:

$$\langle y, (U^*)^* x\rangle = \langle\langle U^* y, x\rangle\rangle = \overline{\langle\langle x, U^* y\rangle\rangle} = \overline{\langle Ux, y\rangle} = \langle y, Ux\rangle$$

Posledično je $(U^*)^* = U$.

d) V dokazu izreka 3.1 smo že pokazali, da je $||U^*|| \leq ||U||$. Ko upoštevamo prejšnjo točko, vidimo, da velja:

$$||U|| = ||(U^*)^*|| \leq ||U^*|| \leq ||U||$$

Posledično sledi, da je $||U^*|| = ||U||$.

e) Naj bodo $U, V \in B(X,Y)$ $\varepsilon > 0$ poljubni in izberemo $\delta = \varepsilon$. Denimo, da je $||U - V|| < \delta$. Tedaj je $||f(U) - f(V)|| = ||U^* - V^*|| = ||(U - V)^*||$. Po prejšnji točki je $||(U - V)^*|| = ||U - V|| < \delta = \varepsilon$, torej je f zvezna.

f) Naj bo $U \in B(X,Y)$ poljuben. Ker že vemo, da je $||U^*|| = ||U||$, hitro vidimo, da je $||U^*U|| \leq ||U^*||||U|| = ||U||^2$. Hkrati vidimo, da za $\forall x \in X$ velja $||Ux||_Y^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle\langle U^*Ux, x\rangle\rangle$. Ko upoštevamo neenakost Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky, dobimo oceno $\langle\langle U^*Ux, x\rangle\rangle \leq ||U^*Ux||_X||x||_X \leq ||U^*U||||x||_X^2$. Sledi ocena: $||Ux||_Y^2 \leq ||U^*U||||x||_X^2 \forall x \in X$, torej je $||U||^2 \leq ||U^*U||$. Posledično velja iskana enakost.

□

Pri obravnavi adjungiranih operatorjev bomo potrebovali naslednji pomožni rezultat.

Lema 3.6. *Naj bosta $(X, \langle\langle.,.\rangle\rangle)$ in $(Y, \langle.,.\rangle)$ poljubna kompleksna Hilbertova prostora ter naj bo $T \in B(X,Y)$ poljuben. Tedaj velja:*

a) $KerT = (ImT^*)^\perp$.
b) $KerT^* = (ImT)^\perp$.
c) $KerT^* = \{0\} \iff ImT$ je gosta v Y.

Dokaz. a) Najprej pokažimo, da je $KerT \subseteq (ImT^*)^\perp$. Naj bo $x \in KerT$ poljuben ter izberemo poljuben $z \in ImT^*$. Potem za z obstaja $y \in Y$, da je $T^* y = z$. Posledično, je

$$\langle\langle x, z\rangle\rangle = \langle\langle x, T^* y\rangle\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0$$

Sledi, da je $x \in (ImT^*)^\perp$. Ker je x bil poljuben, premislek velja za vsak $x \in KerT$, torej je $KerT \subseteq (ImT^*)^\perp$. Naj bo sedaj $x \in (ImT^*)^\perp$ poljuben. Ker je $T^*Tx \in ImT^*$, velja:

$$||Tx||^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = 0$$

Sledi, da je $Tx = 0$ oz. $x \in KerT$. Ker je bil x poljuben, sledi $(ImT^*)^\perp \subseteq KerT$. Posledično velja enakost.

b) Da dokažemo ta rezultat, upoštevamo prejšnjo točko tega dokaza za T^* ter točko $c)$ izreka 3.5. Posledično je $KerT^* = (Im(T^*)^*)^\perp = (ImT)^\perp$.

c) Da dokažemo ta rezultat bomo dokazali, da veljata implikaciji v obe smeri.

$\Rightarrow$) Denimo, da je $KerT^* = \{0\}$. Potem vidimo, upoštevajoč posledico 2.12 ter točko $a)$ tega dokaza, da velja:

$$\overline{ImT} = ((ImT)^\perp)^\perp = (KerT^*)^\perp = \{0\}^\perp = Y$$

Sledi, da je ImT gosta v Y po definiciji.

$\Leftarrow$) Denimo, da je ImT gosta v Y. Potem po posledici 2.12 velja, da je

$$((ImT)^\perp)^\perp = \overline{ImT} = Y$$

Po točki $b)$ tega dokaza velja $KerT^* = (ImT)^\perp$. Ker je $ImT \subseteq Y$ neprazna podmnožica, velja, da je $(ImT)^\perp$ zaprti podprostor v Y. Po posledici 2.11 potem sledi:

$$KerT^* = (ImT)^\perp = (((ImT)^\perp)^\perp)^\perp = Y^\perp = \{0\}$$

$\square$

Posledica 3.7. *Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor ter naj bo $T \in B(X)$. Tedaj je operator T obrnljiv natanko tedaj, ko je $KerT^* = \{0\}$ in obstaja tak $r > 0$, da je $||Tx|| \geq r||x||$ $\forall x \in X$.*

Dokaz. Dokazali bomo obe implikaciji.

$\Rightarrow$) Denimo, da je T obrnljiv. Tedaj je T bijekcija in njegov inverz, T^{-1}, pripada $B(X)$. Posledično je $ImT = Y$. Ker je X Hilbertov prostor, je tudi normiran prostor, torej po lemi 2.1 velja, da je $||Tx|| \geq ||T^{-1}||^{-1}||x||$; $\forall x \in X$. Določimo $r = ||T^{-1}||^{-1}$. Ker je X tudi Banachov prostor, po lemi 2.2 velja, da je ImT zaprti podprostor v Y. Sledi, da je $ImT = \overline{ImT} = Y$, torej je ImT gost v Y. Po lemi 3.6 je potem $KerT^* = \{0\}$.

$\Leftarrow$) Denimo sedaj, da je $KerT^* = \{0\}$ in da obstaja tak $r > 0$, da za $\forall x \in X$ velja $||Tx|| \geq r||x||$. Po lemi 3.6 potem sledi, da je ImT gost v Y. Lema 2.2 nam tudi pove, da je ImT zaprti podprostor v Y. Sledi, da je $ImT = \overline{ImT} = Y$. Naj bo sedaj $x \in KerT$ poljuben. Tedaj je $Tx = 0$, po predpostavki pa potem sledi, da je $0 = ||Tx|| \geq r||x||$. To je pa možno le, kadar je $x = 0$. Sledi, da je $KerT = \{0\}$, torej je T bijektiven endomorfizem nad Banachovim prostorom X. Po izreku o odprti preslikavi sledi, da je T obrnljiv.

$\square$

Primer 3.8. Primer neobrnljivega operatorja najdemo v desnem premiku $D \in B(l^2)$. Kot smo premislili v primeru 3.4, je njegov adjungirani operator ravno levi premik $L \in B(l^2)$, za katerega pa velja, da je $L(1, 0, 0, \ldots) = \bar{0}$. Sledi, da $KerD^* = KerL \neq \{0\}$, torej D ni obrnljiv. $\Diamond$

Za konec tega podpoglavja premislimo, v sledeči lemi, kako sta povezani operaciji invertiranja in adjungiranja.

Lema 3.9. *Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor ter naj bo $T \in B(X)$ poljuben. Če je T obrnljiv, je obrnljiv tudi T^*.*

Dokaz. Naj bo $T \in B(X)$ poljuben obrnljiv operator. Tedaj velja, da je $TT^{-1} = T^{-1}T = I$. Enačbo adjungiramo ter tako dobimo $(TT^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = I^*$. Ko upoštevamo točko *b*) izreka 3.5, se enačba poenostavi v:

$$(T^{-1})^*T^* = T^*(T^{-1})^* = I$$

Posledično je T^* obrnljiv ter $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. □

3.2. **Normalni operatorji.** Sedaj se bomo posvetili, glede na adjungiranje, posebnim primerom operatorjev. Prvi izmed teh, so t. i. normalni operatorji.

Definicija 3.10. Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Pravimo, da je $T \in B(X)$ *normalen*, če je $TT^* = T^*T$.

Primer 3.11. Enostavno je videti, da je operator T_k, kot je bil definiran v primeru 3.4, normalen operator. Naj bo $f \in \mathcal{L}^2([0,1])$ poljuben.

$$(T_k(T_k)^*)f = (T_kT_{\overline{k}})f = T_k(\overline{k}f) = k\overline{k}f$$
$$((T_k)^*T_k)f = (T_{\overline{k}}T_k)f = T_{\overline{k}}(kf) = \overline{k}kf = k\overline{k}f$$

Ker je bil f poljuben, sklep velja za vse elemente $\mathcal{L}^2([0,1])$. Sledi, da je $T_k(T_k)^* = (T_k)^*T_k$, torej je operator T_k res normalen. ♢

Lema 3.12. *Naj bo $(X, \langle .,. \rangle)$ poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Naj bo $T \in B(X)$ poljuben normalen operator ter $r > 0$ poljuben. Velja:*
a) $||Tx|| = ||T^*x||$; $\forall x \in X$.
b) Če je $||Tx|| \geq r||x||$; $\forall x \in X$, je $KerT^* = \{0\}$.

Dokaz. a) Naj bo $x \in X$ poljuben. Potem je

$$\begin{aligned}||Tx||^2 - ||T^*x||^2 &= \langle Tx, Tx\rangle - \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle - \langle TT^*x, x\rangle \\ &= \langle T^*Tx - TT^*x, x\rangle = \langle (T^*T - TT^*)x, x\rangle\end{aligned}$$

Ker je T normalen, je $TT^* = T^*T$, torej je

$$||Tx||^2 - ||T^*x||^2 = \langle (T^*T - TT^*)x, x\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$$

Posledično je $||Tx|| - ||T^*x||$. Ker je bil x poljuben, enakost velja za $\forall x \in X$.

b) Denimo, da obstaja tak $r > 0$, da je $||Tx|| \geq r||x||$; $\forall x \in X$. Naj bo $x \in KerT^*$ poljuben. Po točki *a*) tega dokaza je potem $0 = ||T^*x|| = ||Tx|| \geq r||x||$. Sledi, da je $||x|| = 0$ oz. $x = 0$. Posledično je $KerT^* = \{0\}$.

□

Na podlagi posledice 3.7 in leme 3.12 sledi naslednja posledica.

Posledica 3.13. *Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor in naj bo $T \in B(X)$ poljuben normalen operator. Tedaj je operator T obrnljiv natanko tedaj, ko obstaja tak $r > 0$, da je $||Tx|| \geq r||x||$ $\forall x \in X$.*

Dokaz. Da dokažemo ekvivalenco, bomo dokazali implikaciji v obe smeri.

$\Rightarrow$) Velja direktno po posledici 3.7.

$\Leftarrow$) Denimo, da obstaja tak $r > 0$, da je $||Tx|| \geq r||x||$ $\forall x \in X$. Po lemi 3.12 je potem $KerT^* = \{0\}$. Po posledici 3.7 je potem T obrnljiv.

□

3.3. **Sebi-adjungirani operatorji.** Pri obravnavi preslikav nas pogosto zanimajo t. i. »fiksne točke« - točke, ki jih preslikava preslika nazaj vase. V primeru adjungiranja, operatorjem, ki jih operacija »fiksira« damo posebno ime.

Definicija 3.14. Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Pravimo, da je $T \in B(X)$ *sebi-adjungiran*, če velja $T = T^*$.

Primer 3.15. Trivialno je videti, da je identični operator I sebi-adjungiran. Dodatno, če se vrnemo k operatorju T_k iz primera 3.4, vidimo, da je tudi ta sebi-adjungiran za vsako izbiro funkcije $k \in \mathcal{C}([0,1])$. To je res, saj je funkcija $k \in \mathcal{C}([0,1])$ realna, torej je $\overline{k} = k$ in posledično je $(T_k)^* = T_{\overline{k}} = T_k$.

$\diamondsuit$

V naslednji lemi so povzete nekatere osnovne lastnosti sebi-adjungiranih operatorjev.

Lema 3.16. *Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Naj bo $\mathcal{S}(X)$ množica vseh sebi-adjungiranih operatorjev znotraj $B(X)$ in naj bo $T \in B(X)$ poljuben. Velja:*
a) Za poljubni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in poljubna $T_1, T_2 \in \mathcal{S}(X)$ velja: $\alpha T_1 + \beta T_2 \in \mathcal{S}(X)$.
b) Množica $\mathcal{S}(X)$ je zaprta podmnožica $B(X)$.
c) Operatorja TT^* in T^*T sta sebi-adjungirana.
d) $T = R + iS$, za neka sebi-adjungirana operatorja $R, S \in \mathcal{S}(X)$.

Dokaz. a) Naj bosta $T_1, T_2 \in \mathcal{S}(X)$ poljubna. Ker sta operatorja sebi-adjungirana, po prvi točki izreka 3.5 velja: $(\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \alpha T_1^* + \beta T_2^* = \alpha T_1 + \beta T_2$. Posledično je $\alpha T_1 + \beta T_2 \in \mathcal{S}(X)$.

b) Naj bo $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno zaporedje s členi v $\mathcal{S}(X)$ in limito $T \in B(X)$. Predzadnja točka izreka 3.5 nam pove, da je adjungiranje zvezno, torej je tudi zaporedje $\{T_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno z limito $T^* \in B(X)$. Ker so $T_n \in \mathcal{S}(X)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, velja $T_n^* = T_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, torej je $T^* = T$. Posledično je tudi $T \in \mathcal{S}(X)$. Sledi, da je $\mathcal{S}(X)$ zaprta.

c) Naj bo $T \in B(X)$ poljuben. Tedaj je, upoštevajoč točko *c*) izreka 3.5, $(T^*T)^* = T^*T^{**} = T^*T$. Sledi, da je $T^*T \in \mathcal{S}(X)$ in na enak način premislimo, da enako velja za TT^*.

d) Naj bo $T \in B(X)$ poljuben. Definiramo operatorja R in S na naslednji način:

$$R = \frac{1}{2}(T + T^*), \ S = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

Očitno velja, da je $T = R + iS$. Preverimo še, da sta R in S res sebi-adjungirana.

$$R^* = (\frac{1}{2}(T + T^*))^* = \frac{1}{2}(T^* + T^{**}) = \frac{1}{2}(T^* + T) = R$$
$$S^* = (\frac{1}{2i}(T - T^*))^* = \frac{-1}{2i}(T - T^*)^* = \frac{-1}{2i}(T^* - T^{**}) = \frac{1}{2i}(T - T^*) = S$$

$\square$

Trditev 3.17. *Naj bo $(X, \langle ., . \rangle)$ poljuben kompleksen Hilbertov prostor in naj bo $T \in B(X)$ poljuben. Operator A je sebi-adjungiran natanko tedaj, ko je $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}; \forall x \in X$.*

Dokaz. Dokazali bomo implikaciji v obe smeri.

$\Rightarrow$) Denimo, da je T sebi-adjungiran in naj bo $x \in X$ poljuben. Tedaj je $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$, torej je $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$. Ker je bil x poljuben, sklep velja za vse elemente X.

$\Leftarrow$) Denimo, da je $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R};\ \forall x \in X$. Tedaj za poljubne $\alpha \in \mathbb{C}, x, y \in X$ velja, da je $\langle T(x+\alpha y), x+\alpha y\rangle \in \mathbb{R}$ oziroma

$$\langle Tx, x\rangle + \alpha\langle Ty, x\rangle + \overline{\alpha}\langle Tx, y\rangle + \alpha\overline{\alpha}\langle Ty, y\rangle \in \mathbb{R}$$

Prvi in zadnji člen sta, po predpostavki, avtomatsko elementa $\mathbb{R}$. Sledi torej, da je tudi $\alpha\langle Ty, x\rangle + \overline{\alpha}\langle Tx, y\rangle \in \mathbb{R}$. Velja:

$$\alpha\langle Ty, x\rangle + \overline{\alpha}\langle Tx, y\rangle = \overline{\alpha}\overline{\langle Ty, x\rangle} + \overline{\overline{\alpha}}\overline{\langle Tx, y\rangle} = \overline{\alpha}\langle x, Ty\rangle + \alpha\langle y, Tx\rangle$$

Dodatno upoštevamo, da je $\overline{\alpha}\langle x, Ty\rangle + \alpha\langle y, Tx\rangle = \overline{\alpha}\langle T^*x, y\rangle + \alpha\langle T^*y, x\rangle$. Sklepamo torej, da je $\alpha\langle Ty, x\rangle + \overline{\alpha}\langle Tx, y\rangle = \overline{\alpha}\langle T^*x, y\rangle + \alpha\langle T^*y, x\rangle$ za vsak $\alpha \in \mathbb{C}$. Če vstavimo $\alpha = 1$ in $\alpha = i$, dobimo naslednji sistem enačb:

$$\alpha = 1 : \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle = \langle T^*x, y\rangle + \langle T^*y, x\rangle$$
$$\alpha = i : -i\langle Tx, y\rangle + i\langle Ty, x\rangle = -i\langle T^*x, y\rangle + i\langle T^*y, x\rangle$$

Prvo enačbo pomnožimo z i, jo odštejemo od druge, ter tako dobimo enakost $\langle Tx, y\rangle = \langle T^*x, y\rangle$. Ker sta bila x in y poljubna, ta sklep velja za vse pare $x, y \in X$, torej po lemi 2.13 sledi, da je $T = T^*$.

□

3.4. **Unitarni operatorji.** Zadnji posebni primer operatorjev, glede na adjungiranje, je primer, v katerem je adjungirani operator hkrati tudi inverz.

Definicija 3.18. Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Pravimo, da je operator $T \in B(X)$ *unitaren*, če velja: $TT^* = T^*T = I$.

Primer 3.19. Za funkcijo $k \in \mathcal{C}([0,1])$ za katero velja, da je $|k(t)| = 1,\ \forall t \in [0,1]$, je operator T_k iz primera 3.4 unitaren operator. Iz primera 3.11 že vemo, da je za poljuben $k \in \mathcal{C}([0,1])$ operator T_k normalen ter da je $T_k(T_k)^*f = k\overline{k}f = |k|^2 f = (T_k)^*T_kf,\ \forall f \in \mathcal{L}^2([0,1])$. Naj bo torej $f \in \mathcal{L}^2([0,1])$ poljuben in naj bo $k \in \mathcal{C}([0,1])$ tak, da je $|k(t)| = 1; \forall t \in [0,1]$. Tedaj je $|k(t)|^2 f(t) = f(t);\ \forall t \in [0,1]$, torej je $T_k(T_k)^*f = f = (T_k)^*T_kf$. Ker je bil f poljuben, sklep velja za vse elemente $\mathcal{L}^2([0,1])$. Sledi, da je $T_k(T_k)^* = I = (T_k)^*T_k$. ♢

Naslednji izrek nam pove, da so unitarni operatorji hkrati tudi izometrije.

Izrek 3.20. *Naj bo $(X, \langle .,. \rangle)$ poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Naj bosta $T, U \in B(X)$ poljubna. Velja:*
a) $T^*T = I \iff T$ je izometrija.
b) U je unitaren $\iff U$ je surjektivna izometrija na X.

Dokaz. Obe ekvivalenci bomo dokazali tako, da bomo pokazali, da veljata implikaciji v obe smeri.

a) Pri dokazu si bomo pomagali z lemo 2.13.

$\Rightarrow$) Denimo, da je $T^*T = I$ in naj bo $x \in X$ poljuben. Tedaj je:

$$||Tx||^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle Ix, x\rangle = \langle x, x\rangle = ||x||^2$$

Ker je bil x poljuben, zgornja enakost velja za vse elemente X, torej je T res izometrija.

$\Leftarrow$) Denimo, da je T izometrija. Naj bo $x \in X$ poljuben. Tedaj velja

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = ||Tx||^2 = ||x||^2 = \langle Ix, x\rangle$$

Ker je x poljuben, sklep velja za vse elemente X, torej po lemi 2.13 sledi, da je $T^*T = I$.

b) Pri dokazu te ekvivalence, si bomo pomagali s prejšnjo točko dokaza.

$\Rightarrow$) Denimo, da je U unitaren. Potem sledi, da je $UU^* = U^*U = I$ in po točki a) je potem U izometrija. Dodatno, naj bo $x \in X$ poljuben. Potem je $x = U(U^*x)$, torej je $x \in ImU$. Sledi, da je $ImU = X$ oz. U je surjektiven.

$\Leftarrow$) Denimo, da je U surjektivna izometrija na X. Ker je U izometrija, po točki a) tega dokaza sledi, da je $U^*U = I$. Naj bo sedaj $y \in X$ poljuben. Ker je U surjektiven operator na X, obstaja tak $x \in X$, da je $Ux = y$. Posledično velja naslednje:

$$UU^*y = UU^*(Ux) = U(U^*Ux) = U(Ix) = Ux = y$$

Ker je bil y poljuben, prejšnji sklep velja za vsak element X. Sledi, da je $UU^* = I$, torej je U unitaren operator.

□

Da dopolnimo znanje o unitarnih operatorjih, premislimo še naslednjo lemo.

Lema 3.21. *Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor ter naj bo $\mathcal{U}(X)$ množica vseh unitarnih operatorjev na X. Velja:*

a) Če je $U \in \mathcal{U}(X)$, je tudi $U^* \in \mathcal{U}(X)$, ter $||U|| = ||U^*|| = 1$.
b) Če sta $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(X)$, sta tudi U_1U_2 in U_1^{-1}.
c) $\mathcal{U}(X)$ je zaprta podmnožica $B(X)$.

Dokaz. a) Naj bo U poljuben unitaren operator na X. Tedaj je $U^*(U^*)^* = U^*U = I$ in $(U^*)^*U^* = UU^* = I$, torej je tudi $U^* \in B(X)$ unitaren. Po izreku 3.5 že vemo, da je $||U|| = ||U^*||$. Dodatno nam izrek 3.20 pove, da je U tudi izometrija, torej je $||U|| = 1$.

b) Naj bosta U_1 in U_2 poljubna unitarna operatorja na X. S pomočjo izreka 3.5 vidimo, da je:

$$U_1U_2(U_1U_2)^* = U_1U_2U_2^*U_1^* = U_1IU_1^* = I$$
$$(U_1U_2)^*U_1U_2 = U_2^*U_1^*U_1U_2 = U_2^*IU_2 = I$$

torej je tudi $U_1U_2 \in \mathcal{U}(X)$. Ker je U_1 unitaren, je omejen in po izreku 3.20 bijektiven, je po posledici izreka o odprti preslikavi tudi obrnljiv (znotraj $B(X)$). Dodatno, upoštevamo lemo 3.9 in tako dobimo:

$$(U_1^{-1})^*U_1^{-1} = (U_1^*)^{-1}U_1^{-1} = (U_1U_1^*)^{-1} = I^{-1} = I$$
$$U_1^{-1}(U_1^{-1})^* = U_1^{-1}(U_1^*)^{-1} = (U_1^*U_1)^{-1} = I^{-1} = I$$

Sledi, da je U_1^{-1} unitaren.

c) Naj bo $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje s členi v $\mathcal{U}(X)$ in limito $U \in B(X)$. Potem je po točki a) tega dokaza tudi zaporedje $\{U_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje s členi v $\mathcal{U}(X)$. Ker je adjungiranje zvezno, je $U^* \in B(X)$ limita zaporedja $\{U_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$. Naj bo $x \in X$ poljuben. Potem je $||Ux||^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle U_nx, U_nx\rangle = \lim_{n\to\infty} ||U_nx||^2 = ||x||^2$. Sledi, da je U izometrija, po izreku 3.20 pa sledi, da je potem $U^*U = I$. Na enak način kot za U vidimo, da je tudi U^* izometrija in posledično po izreku 3.20 velja, da je $(U^*)^*U^* = UU^* = I$. Sledi, da je U unitaren.

□

4. Spekter

Problem lastnih vrednosti matrik nam je znan že iz linearne algebre, ni pa omejen le na matrike - na enak način jih lahko definiramo tudi za operatorje na poljubnih prostorih. V tem poglavju bomo obravnavali t. i. spekter operatorja nad kompleksnim Hilbertovim prostorom.

Definicija 4.1. Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor ter naj bo $T \in B(X)$ poljuben. *Spekter* operatorja T je množica, definirana na naslednji način:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \text{ ni obrnljiv}\}$$

V naslednji lemi preverimo, da spekter vsebuje vse lastne vrednosti operatorja.

Lema 4.2. *Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor ter naj bo $T \in B(X)$ poljuben. Če je λ lastna vrednost operatorja T, potem je $\lambda \in \sigma(T)$.*

Dokaz. Naj bo $T \in B(X)$ poljuben ter naj bo λ njegova lastna vrednost. Tedaj po definiciji obstaja nek neničelni vektor $x \in X$, za katerega velja: $Tx = \lambda x$. Posledično, je $x \in Ker(T - \lambda I)$, torej operator $T - \lambda I$ ni injektiven in posledično ni obrnljiv. □

Opomba 4.3. V končno-razsežnih vektorskih prostorih vemo, da je injektivnost linearne preslikave ekvivalentna surjektivnosti. Posledično, je spekter linearne preslikave nad končno-razsežnem kompleksnem Hilbertovim prostorom natanko množica njegovih lastnih vrednosti. V splošnem primeru to ni res - obstajajo omejeni linearni operatorji nad kompleksnimi Hilbertovimi prostori, ki ne premorejo nobene lastne vrednosti. Primer tega je desni premik $D \in B(l^2)$.

Preden določimo nekaj osnovnih lastnosti spektra operatorja, se spomnimo Liouvilleovega izreka iz kompleksne analize.

Izrek 4.4. *Naj bo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ poljubna cela funkcija. Če je f omejena, je tudi konstantna.*

Izrek 4.5. *Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Za vsak $T \in B(X)$ velja:*
a) $\lambda \in \sigma(T) \Rightarrow |\lambda| \leq ||T||$.
b) $\sigma(T)$ *je kompaktna množica v* $B(X)$.
c) $\sigma(T) \neq \emptyset$.

Dokaz. Tekom dokaza se bomo sklicali na izreke 2.14, 2.15 in 4.4.

a) Denimo, da je $\lambda > ||T||$. Tedaj je $||\lambda^{-1}T|| < 1$ in posledično je po izreku 2.14 operator $I - \lambda^{-1}T$ obrnljiv. Sledi, da je tudi operator $-\lambda(I - \lambda^{-1}T) = T - \lambda I$ obrnljiv. Sledi, da $\lambda \notin \sigma(T)$.
b) Ker smo v točki *a*) pokazali, da je spekter omejena množica, za dokaz te točke zadošča, da pokažemo, da je tudi zaprta. Naj bo torej $T \in B(X)$ poljuben in definirajmo preslikavo $f : \mathbb{C} \to B(X)$ s predpisom $f(\lambda) = T - \lambda I$. Opazimo: Za poljubna $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$ je $||f(\mu) - f(\lambda)|| = |\mu - \lambda| \cdot ||I||$. Naj bo sedaj $\varepsilon > 0$ poljuben in naj bo $\delta = \frac{\varepsilon}{||I||}$. Velja: Če je $|\mu - \lambda| < \delta$, je $||f(\mu) - f(\lambda)|| < \frac{\varepsilon}{||I||}||I|| = \varepsilon$. Sledi, da je naša funkcija f enakomerno zvezna. Opazimo še naslednje:

$$\lambda \in \sigma(T) \iff T - \lambda I \in \mathcal{G}^c \iff f(\lambda) \in \mathcal{G}^c \iff \lambda \in f^{-1}(\mathcal{G}^c)$$

Posledično je $f^{-1}(\mathcal{G}^c) = \sigma(T)$. Ker je f zvezna in $\mathcal{G}^c$ zaprta ($\mathcal{G}$ je po izreku 2.15 odprta), je $f^{-1}(\mathcal{G}^c)$ zaprta, torej je tudi $\sigma(T)$ zaprta. Po izreku Heine-Borel-Lebesgue je potem $\sigma(T)$ kompakt.

c) Dokaz bomo izvedli s protislovjem. Naj bo $\sigma(T) = \emptyset$ za nek $T \in B(X)$. Sledi, da je za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ operator $T - \lambda I$ obrnljiv in označimo njegov inverz z $(T - \lambda I)^{-1}$. Naj bo $f : X \to \mathbb{C}$ poljuben omejen linearen funkcional na X. Sedaj definiramo funkcijo $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s predpisom $\varphi(\lambda) = f((T - \lambda I)^{-1})$. V nadaljevanju bomo pokazali, da je φ cela omejena funkcija. Premislimo najprej, da je cela: Naj bo $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ poljuben. Opazimo:

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} &= \frac{1}{\lambda - \lambda_0}(f((T - \lambda I)^{-1}) - f((T - \lambda_0 I)^{-1})) \\
&= \frac{1}{\lambda - \lambda_0} f((T - \lambda I)^{-1} - (T - \lambda_0 I)^{-1}) \\
&= \frac{1}{\lambda - \lambda_0} f((T - \lambda_0 I)^{-1}\left((T - \lambda_0 I) - (T - \lambda I)\right)(T - \lambda I)^{-1}) \\
&= \frac{1}{\lambda - \lambda_0} f((\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}(T - \lambda I)^{-1}) \\
&= f((T - \lambda_0 I)^{-1}(T - \lambda I)^{-1})
\end{aligned}$$

Posledično je

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} &= \lim_{\lambda \to \lambda_0} f((T - \lambda_0 I)^{-1}(T - \lambda I)^{-1}) \\
&= f(\lim_{\lambda \to \lambda_0} (T - \lambda_0 I)^{-1}(T - \lambda I)^{-1}) \\
&= f((T - \lambda_0 I)^{-1} \lim_{\lambda \to \lambda_0} (T - \lambda I)^{-1}) \\
&= f(((T - \lambda_0 I)^{-1})^2)
\end{aligned}$$

Ker ta limita obstaja za vsak $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, je φ holomorfna na $\mathbb{C}$, torej cela. Premislimo še, da je φ omejena. Naj bo $\lambda \in \mathbb{C}$ in naj bo $|\lambda| > ||T||$. Tedaj je $(T - \lambda I)^{-1} = (-\lambda)(I - \lambda^{-1}T)^{-1}$. Opazimo, da je $||\lambda^{-1}T|| < 1$. Po izreku 2.14, je potem $(T - \lambda I)^{-1} = (-\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda^{-1}T)^n$. Sledi:

$$||(T - \lambda I)^{-1}|| \leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda|^{-n}||T||^n = \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{||T||}{|\lambda|}\right)^n = \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1 - \frac{||T||}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - ||T||}$$

V limiti, ko pošljemo $|\lambda|$ proti ∞, gre $\frac{1}{|\lambda| - ||T||}$ proti 0. Posledično sklepamo, da je $\lim_{|\lambda| \to \infty} ||(T - \lambda I)^{-1}|| = 0$. Z dobljeno limito obravnavamo obnašanje φ daleč od izhodišča: Za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ velja ocena: $|\varphi(\lambda)| = |f((T - \lambda I)^{-1})| \leq ||f||||(T - \lambda I)^{-1}||$. Ko pošljemo $|\lambda|$ proti ∞, gre izraz na desni proti 0, torej bo enako veljalo za $|\varphi(\lambda)|$ in posledično je $\lim_{|\lambda| \to \infty} \varphi(\lambda) = 0$. Sledi, da obstaja tak $R > 0$, da je $|\varphi(\lambda)| \leq 1$ za vsak $\lambda \in \overline{K_R(0)}^c$. Hkrati je φ zvezna na $\overline{K_R(0)}$, torej je tam tudi omejena. Posledično je φ omejena na celem $\mathbb{C}$. Po Liouvilleovem izreku 4.4 je potem φ konstantna funkcija, limita $\lim_{|\lambda| \to \infty} \varphi(\lambda) = 0$ pa nam pove, da je $\varphi \equiv 0$. Sledi, da je $f((T - \lambda I)^{-1}) = 0;\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Ker je f bil poljuben omejen linearen funkcional na X, sklep velja za vse omejene linearne funkcionale na X. Sedaj se spomnimo posledice Hahn-Banachovega izreka, ki nam pove, da obstaja tak omejen linearen funkcional f nad X, da je $f((T - \lambda I)^{-1}) = ||(T - \lambda I)^{-1}|| = 0;\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$ oziroma $(T - \lambda I)^{-1} = 0;\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$. To nas pa privede v protislovje, saj ničelni operator ni obrnljiv.

$\square$

Opomba 4.6. Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Prva točka izreka 4.5 nam pove, da za poljuben $T \in B(X)$ velja, da je $\sigma(T) \subseteq \overline{K_{||T||}(0)}$. S pomočjo druge točke izreka tudi opazimo dva skrajna primera za spekter. V prvem skrajnem primeru spekter vsebuje le eno samo vrednost: $\sigma(T) = \{\lambda_0\}$, za nek $\lambda_0 \in \overline{K_{||T||}(0)}$. Primer takega operatorja T je ravno ničelni operator: $\sigma(0) = \{0\}$. Drugi skrajni primer je, da je $\sigma(T) = \overline{K_{||T||}(0)}$.

Sedaj premislimo še povezavo med spektrom poljubnega operatorja in spektrom njegovega adjungiranca.

Lema 4.7. *Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor in naj bo $T \in B(x)$ poljuben. Tedaj je $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$.*

Dokaz. Denimo, da nek $\lambda \notin \sigma(T)$. Tedaj je operator $T - \lambda I$ obrnljiv in po lemi 3.9 je potem tudi $(T - \lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda} I$ obrnljiv. Sledi, da $\bar{\lambda} \notin \sigma(T^*)$. Na enak način premislimo, da če $\bar{\lambda} \notin \sigma(T^*)$, potem $\lambda \notin \sigma(T)$. Sledi, da je $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$. □

Izrek 4.8. *Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor ter naj bo $T \in B(X)$ poljuben. Naj bo $p \in \mathbb{C}[X]$ poljuben nekonstanten polinom. Velja:*
a) $\sigma(p(T)) = \{p(z) \mid z \in \sigma(T)\}$.
b) Če je T obrnljiv, je $\sigma(T^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$.

Dokaz. Naj bo $T \in B(X)$ poljuben.

a) Naj bo $p \in \mathbb{C}[X]$ poljuben nekonstanten polinom in naj bo $\lambda \in \mathbb{C}$ poljuben. Definiramo polinom q s predpisom $q(z) = \lambda - p(z)$. Po osnovnem izreku algebre lahko polinom q zapišemo kot produkt linearnih faktorjev: $q(z) = a(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n)$, kjer so $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ničle polinoma in $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Velja:
$$\begin{aligned}\lambda \notin \sigma(p(T)) &\iff \text{Operator } \lambda I - p(T) \text{ je obrnljiv} \iff q(T) \text{ je obrnljiv}\\ &\iff a(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \dots (T - \lambda_n I) \text{ je obrnljiv}\\ &\iff (T - \lambda_i I) \text{ je obrnljiv za } \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}\\ &\iff \text{Nobena ničla polinoma } q \text{ ni vsebovana v } \sigma(T)\\ &\iff q(z) \neq 0;\ \forall z \in \sigma(T) \iff \lambda \neq p(z);\ \forall z \in \sigma(T)\end{aligned}$$
Posledično sledi: $\sigma(p(T)) = \{p(z) \mid z \in \sigma(T)\}$.

b) Naj bo $T \in B(X)$ obrnljiv. Posledično $0 \notin \sigma(T)$ in zato lahko vsak element $\sigma(T^{-1})$ zapišemo kot inverz nekega $\mu \in \mathbb{C}$. Opazimo, da je $\mu^{-1} I - T^{-1} = -\mu^{-1} T^{-1}(\mu I - T)$ in da je operator $\mu^{-1} T^{-1}$ obrnljiv. Sledi:
$$\begin{aligned}\mu^{-1} \in \sigma(T^{-1}) &\iff \mu^{-1} I - T^{-1} \text{ ni obrnljiv}\\ &\iff -\mu^{-1} T^{-1}(\mu I - T) \text{ ni obrnljiv}\\ &\iff (\mu I - T) \text{ ni obrnljiv} \iff \mu \in \sigma(T)\end{aligned}$$

Sledi, da je $\sigma(T^{-1}) = \{\mu^{-1} \mid \mu \in \sigma(T)\}$.

□

S pomočjo izreka 4.8 lahko enostavno določimo spektre raznih posebnih tipov operatorjev. V naslednji lemi bomo to storili za idempotentne, nilpotentne in unitarne operatorje.

Lema 4.9. *Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor in naj bo $T \in B(X)$ poljuben. Velja:*

a) Če je $T \in B(X) \setminus \{0, I\}$ idempotent (torej, če je $T^2 = T$), je $\sigma(T) = \{0, 1\}$.
b) Če je $T \in B(X)$ nilpotent (torej, če obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $T^n = 0$), je $\sigma(T) = \{0\}$.
c) Če je $T \in B(X)$ unitaren, je $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

Dokaz. Ključni del dokaza vseh trditev bo uporaba izreka 4.8.

a) Naj bo $T \in B(X) \setminus \{0, I\}$ idempotent. Ker je T idempotent, zadošča enačbi $T^2 - T = 0$. Označimo polinom $p(z) = z^2 - z$ in opazimo, da potem operator T zadošča enačbi $p(z) = 0$. Kot smo že omenili v opombi 4.6, je $\sigma(0) = \{0\}$. Po prvi točki izreka 4.8 je potem $\{0\} = \sigma(0) = \sigma(p(T)) = \sigma(T^2 - T) = \{\lambda^2 - \lambda \mid \lambda \in \sigma(T)\}$. Za vsak $\lambda \in \sigma(T)$ torej velja, da je $\lambda^2 - \lambda = 0$. Ta enačba ima dve rešitvi: $\lambda = 0$ in $\lambda = 1$. Sledi, da je $\sigma(T) \subseteq \{0, 1\}$. Hkrati po tretji točki izreka 4.5 vemo, da $\sigma(T) \neq \emptyset$. Obravnavajmo naslednji možnosti:
   i) Denimo, da $1 \notin \sigma(T)$. Tedaj je operator $T - I$ obrnljiv, torej lahko enačbo $(T - I)T = T^2 - T = 0$ z leve pomnožimo z $(T - I)^{-1}$. Tako dobimo enačbo $T = 0$, kar pa nas privede v protislovje z začetno predpostavko, da je $T \in B(X \setminus \{0, I\})$. Sledi, da je $1 \in \sigma(T)$
   ii) Denimo sedaj, da $0 \notin \sigma(T)$. Tedaj je T obrnljiv, torej lahko enačbo $(T - I)T = T^2 - T = 0$ z leve pomnožimo z T^{-1}. Tako dobimo enačbo $T - I = 0$ oziroma $T = I$. Tudi to nas privede v protislovje z isto začetno predpostavko, kot v prejšnji točki. Sledi, da je $0 \in \sigma(T)$.

   Sledi, da je $\sigma(T) = \{0, 1\}$.

b) Naj bo sedaj $T \in B(X)$ nilpotent in naj bo $n \in \mathbb{N}$ najmanjši taki, da je $T^n = 0$. Označimo polinom $q(z) = z^n$. Tedaj operator T zadošča enačbi $q(T) = 0$. Po prvi točki izreka 4.8 je potem $\{0\} = \sigma(0) = \sigma(q(T)) = \sigma(T^n) = \{\lambda^n \mid \lambda \in \sigma(T)\}$. Sledi, da za vsak $\lambda \in \sigma(T)$ velja, da je $\lambda^n = 0$. Ta enačba ima edino rešitev $\lambda = 0$, torej je $\sigma(T) \subseteq \{0\}$. Ker po tretji točki izreka 4.5 spekter ne more biti prazna množica, sledi, da je $\sigma(T) = 0$.

c) Naj bo sedaj $T \in \mathcal{U}(X)$. Po prvi točki leme 3.21 vemo, da je $||T|| = 1$. Posledično je $\sigma(T) \subseteq \overline{K_1(0)} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$. Hkrati opazimo, da je tudi $\sigma(T^*) \subseteq \overline{K_1(0)}$. Sedaj upoštevamo, da je T unitaren operator, torej je $U^* = U^{-1}$. Po drugi točki izreka 4.8 je potem $\sigma(T) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(T^*)\} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \geq 1\}$. Ker je $\sigma(T)$ hkrati podmnožica $\overline{K_1(0)in K_1^c}(0)$, sledi, da je $\sigma(T)$ vsebovana v robu enotske krogle $K_1(0)$, torej je $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

□

Pred obravnavo spektrov normalnih in sebi-adjungiranih operatorjev vpeljimo naslednja pojma.

Definicija 4.10. Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor in naj bo $T \in B(X)$ poljuben.

a) *Spektralni radij* operatorja T, označen z $r_\sigma(T)$, je definiran na naslednji način:

$$r_\sigma(T) = \sup\{|\lambda \mid \lambda \in \sigma(T)|\}$$

b) *Numerični razpon* operatorja T, označen z $V(T)$, je definiran na naslednji način:

$$V(T) = \{\langle Tx, x\rangle \mid ||x|| = 1\}$$

V primeru normalnih operatorjev velja naslednja zveza med spektrom in numeričnim razponom.

Lema 4.11. *Naj bo* $(X, \langle ., . \rangle)$ *poljuben kompleksen Hilbertov prostor in naj bo* $T \in B(X)$ *poljuben. Če je* T *normalen, je* $\sigma(T) \subseteq \overline{V(T)}$.

Dokaz. Naj bo $\lambda \in \sigma(T)$ poljuben. Preverimo, da je operator $T - \lambda I$ tudi normalen operator:

$$\begin{aligned}
(T - \lambda I)(T - \lambda I)^* &= (T - \lambda I)(T^* - \bar{\lambda} I) \\
&= TT^* - \bar{\lambda} T - \lambda T^* + \lambda \bar{\lambda} I \\
&= T^*T - \lambda T^* - \bar{\lambda} T + \bar{\lambda} \lambda I \\
(T - \lambda I)^*(T - \lambda I) &= (T^* - \bar{\lambda} I)(T - \lambda I) \\
&= T^*T - \lambda T^* - \bar{\lambda} T + \bar{\lambda} \lambda I
\end{aligned}$$

Sledi, da je $(T-\lambda I)(T-\lambda I)^* = (T-\lambda I)^*(T-\lambda I)$, torej je $(T-\lambda I)$ normalen. Ker operator $(T - \lambda I)$ ni obrnljiv, po posledici 3.13 za vsak $r > 0$ obstaja nek x_r, taki, da je $||(T - \lambda I)x_r|| < r||x_r||$. Posledično v X obstaja zaporedje $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$; $||x_n|| = 1$; $\forall n \in \mathbb{N}$, za katero je $\lim_{n\to\infty} ||(T - \lambda I)x_n|| = 0$. Po neenakosti Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky je $\forall n \in \mathbb{N} |\langle (T - \lambda I)x_n, x_n \rangle| \leq ||(T - \lambda I)x_n|| \cdot ||x_n|| = ||(T - \lambda I)x_n||$. Posledično sledi, da je $\lim_{n\to\infty} \langle (T - \lambda I)x_n, x_n \rangle = 0$. Slednjo enakost razpišemo v $\lim_{n\to\infty} (\langle Tx_n, x_n \rangle - \lambda \langle x_n, x_n \rangle) = 0$ in upoštevamo, da je $\langle x_n, x_n \rangle = 1$; $\forall n \in \mathbb{N}$. Tako dobimo, da je $\lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, x_n \rangle = \lambda$. Sledi, da je $\lambda \in \overline{V(T)}$. □

Naslednji izrek opiše lastnosti spektrov in numeričnih razponov sebi-adjungiranih operatorjev.

Izrek 4.12. *Naj bo* $(X, \langle ., . \rangle)$ *poljuben kompleksen Hilbertov prostor in naj bo* $T \in \mathcal{S}(X)$ *poljuben. Velja:*
a) $V(T) \subseteq \mathbb{R}$.
b) $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.
c) $||T|| \in \sigma(T)$ *ali* $-||T|| \in \sigma(T)$.
d) $r_\sigma(T) = \sup\{|t| \mid t \in V(T)\} = ||T||$.
e) $\inf\{\lambda \mid \lambda \in \sigma(T)\} \leq t \leq \sup\{\lambda \mid \lambda \in \sigma(T)\}$; $\forall t \in V(T)$.

Dokaz. Naj bo $T \in \mathcal{S}(X)$ poljuben.
a)

□

Literatura

[1] B. P. Rynne, M. A. Youngson, *Linear functional analysis*, Springer-Verlag London, Ltd., London, 2008.