

UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Matematika – 2. stopnja

Jimmy Zakeršnik

Omejeni linearni operatorji na Hilbertovih prostorih

Magistrsko delo

Mentor: dr. Daniel Eremita

Maribor, 2024/25

KAZALO

1. Uvod	4
2. Hilbertovi prostori	4
3. Omejeni linearni operatorji nad Hilbertovimi prostori	4
3.1. Adjungirani operatorji	5
3.2. Normalni operatorji	8
Literatura	8

Omejeni linearni operatorji na Hilbertovih prostorih

POVZETEK

Bo napisan zadnji

Bounded linear operators on Hilbert spaces

ABSTRACT

Will be written last

Math. Subj. Class. (2020): 47A25, 47B02, 47B15,

Ključne besede: Linearna algebra, funkcionalna analiza, Hilbertov prostor, omejen linearen operator, spekter, spektralni radij, normalen operator, unitaren operator, sebi-adjungiran operator

Keywords: Linear algebra, functional analysis, Hilbert space, bounded linear operator, spectrum, spectral radius, normal operator, unitary operator, self-adjoint operator

1. UVOD

Sem spada uvod, ki bo napisan, ko bo naloga bolj vsebinsko dovršena.

2. HILBERTOVI PROSTORI

Tukaj bom povedal osnovno o Hilbertovih prostorih:

- Izrek o odprti preslikavi (brez dokaza)
- Kaj so Hilbertovi prostori
- Neenakost $C - S - B$
- Ortogonalni komplement
- Riezsov izrek
- Prostor omejenih linearnih operatorjev nad Hilbertovimi prostori

Lema 2.1. *Za poljubna normirana prostora X ter Y in poljuben $T \in B(X, Y)$ velja: Če je T obrnljiv, je $\|Tx\| \geq \|T^{-1}\|^{-1}\|x\|$; $\forall x \in X$.*

Lema 2.2. *Za poljuben Banachov prostor X , poljuben normiran prostor Y ter poljuben $T \in B(X, Y)$ velja: Če obstaja tak $r > 0$, da je $\|Tx\| \geq r\|x\|$; $\forall x \in X$, je $\text{Im}T$ zaprti podprostor v Y .*

Definicija 2.3. Naj bo V vektorski prostor nad \mathbb{F} . Preslikavi $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ pravimo *skalarni produkt* na V , če velja:

- $\langle x, x \rangle \geq 0$; $\forall x \in V$
- $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$; $\forall x, y \in V$
- $\langle \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle$; $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F} \ \& \ \forall x_1, x_2, y \in V$

Če je V vektorski prostor (nad \mathbb{F}) in $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalarni produkt na njem, pravimo, da je $(V, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *prostor s skalarnim produktom*.

Opomba 2.4. Naj bo $(V, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ prostor s skalarnim produktom nad poljem \mathbb{F} . Enostavno je preveriti, da je s predpisom $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ $\forall x \in V$ definirana norma na V . Za tako normo pravimo, da je *porojena s skalarnim produktom* $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definicija 2.5. Naj bo (M, d) poljuben metrični prostor. Pravimo, da je M *poln metrični prostor*, če je vsako Cauchyjevo zaporedje v M konvergentno v M .

Sedaj definirajmo Hilbertove prostore.

Definicija 2.6. Naj bo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ poljuben prostor s skalarnim produktom nad poljem \mathbb{F} . Naj bo $\|\cdot\|$ norma na V porojena s $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in naj bo $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ metrika na V porojena z $\|\cdot\|$. Če je (V, d) poln metrični prostor, pravimo, da je $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *Hilbertov prostor* nad \mathbb{F} .

Posledica 2.7. *Za poljuben zaprti podprostor Y poljubnega Hilbertovega prostora velja $Y^{\perp\perp} = Y$.*

Posledica 2.8. *Za poljuben podprostor Y poljubnega Hilbertovega prostora velja $Y^{\perp\perp} = \overline{Y}$.*

3. OMEJENI LINEARNI OPERATORJI NAD HILBERTOVIMI PROSTORI

V tem poglavju bomo obravnavali lastnosti omejenih linearnih operatorjev nad Hilbertovimi prostori ter lastnosti njihovih spektrov, kadar sta domena in kodomena kompleksna Hilbertova prostora. Posebej nas bo zanimala operacija adjungiranja, zato bomo najprej povedali nekaj o njej.

3.1. Adjungirani operatorji.

Izrek 3.1. Naj bosta $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ in $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ poljubna kompleksna Hilbertova prostora in naj bo T poljuben element $B(X, Y)$. Tedaj obstaja enolično določen operator $T^* \in B(Y, X)$, za katerega velja

$$\langle Tx, y \rangle = \langle \langle x, T^*y \rangle \rangle; \quad \forall x \in X \ \& \ \forall y \in Y$$

Dokaz. Naj bo $y \in Y$ poljuben ter naj bo $f_y : X \rightarrow \mathbb{C}$ preslikava definirana s predpisom $f_y(x) = \langle Tx, y \rangle; \quad \forall x \in X$. Opazimo, da je f_y linearen funkcional nad X . Po neenakosti Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky potem velja:

$$|f_y(x)| = |\langle Tx, y \rangle| \leq \|Tx\|_Y \cdot \|y\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X \cdot \|y\|_Y; \quad \forall x \in X$$

To pomeni, da je f_y omejen linearen funkcional nad X . Posledično velja, po Riezsovem izreku, da obstaja enolično določen $z \in X$, tak, da je $f_y(x) = \langle \langle x, z \rangle \rangle; \quad \forall x \in X$. Sedaj definiramo preslikavo $T^* : Y \rightarrow X$, ki vsakemu $y \in Y$ priredi pripadajoči $z \in X$ (tisti, enolično določen, za katerega je $f_y(x) = \langle \langle x, z \rangle \rangle; \quad \forall x \in X$). Posledično velja:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle \langle x, T^*y \rangle \rangle \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

Sedaj preverimo, da je T^* omejen linearen operator. Naj bodo $y_1, y_2 \in Y$ in $x \in X$ poljubni elementi ter $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ poljubna skalarja. Tedaj je:

$$\begin{aligned} \langle \langle x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle \rangle &= \langle Tx, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle Tx, y_1 \rangle + \bar{\beta} \langle Tx, y_2 \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle \langle x, T^*y_1 \rangle \rangle + \bar{\beta} \langle \langle x, T^*y_2 \rangle \rangle \\ &= \langle \langle x, \alpha T^*y_1 \rangle \rangle + \langle \langle x, \beta T^*y_2 \rangle \rangle \end{aligned}$$

Sledi, da je $T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T^*y_1 + \beta T^*y_2; \quad \forall x \in X, \forall y_1, y_2 \in Y, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, torej je T^* res linearna preslikava. Dodatno, velja:

$$\|T^*y\|_X^2 = \langle \langle T^*y, T^*y \rangle \rangle = \langle TT^*y, y \rangle \leq \|TT^*y\|_Y \|y\|_Y \leq \|T\| \|T^*y\|_X \|y\|_Y; \quad \forall y \in Y$$

Če je $\|T^*y\|_X \neq 0$, dobljeno neenakost delimo z $\|T^*y\|_X$ ter tako dobimo oceno $\|T^*y\|_X \leq \|T\| \|y\|_Y$. V primeru, ko je $\|T^*y\|_X = 0$, prejšnja ocena velja trivialno. Sledi, da je

$$\|T^*y\|_X \leq \|T\| \|y\|_Y; \quad \forall y \in Y$$

Preslikava T^* je torej omejen linearen operator in velja $\|T^*\| \leq \|T\|$. Za konec še pokažimo, da je T^* enolično določen. Denimo, da imamo $U_1, U_2 \in B(Y, X)$, za katera velja: $\langle Tx, y \rangle = \langle \langle x, U_1y \rangle \rangle = \langle \langle x, U_2y \rangle \rangle; \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$. Tedaj velja, da je $U_1y = U_2y; \quad \forall y \in Y$, torej je $U_1 = U_2$. Sledi, da je T^* res enolično določen. \square

Definicija 3.2. Naj bosta X in Y kompleksna Hilbertova prostora ter naj bo $T \in B(X, Y)$. Tedaj operatorju T^* iz izreka 3.1 pravimo *adjungiran operator* operatorja T .

Sedaj bomo navedli in premislili nekatere pomembne lastnosti adjungiranja.

Izrek 3.3. Naj bodo $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ in $(Z, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ poljubni kompleksni Hilbertovi prostori ter naj bodo $U, V \in B(X, Y)$ ter $T \in B(Y, Z)$ poljubni omejeni linearni operatorji. Tedaj velja:

- a) $(\alpha U + \beta V)^* = \bar{\alpha}U^* + \bar{\beta}V^*; \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- b) $(TU)^* = U^*T^*$
- c) $(U^*)^* = U$

d) $\|U^*\| = \|U\|$

e) Preslikava $f : B(X, Y) \rightarrow B(Y, X)$, definirana s predpisom $f(U) = U^*$ je zvezna.

f) $\|U^*U\| = \|U\|^2$

Dokaz. a) Naj bodo $U, V \in B(X, Y)$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ poljubni. Tedaj $\forall x \in X, \forall y \in Y$ velja:

$$\begin{aligned} \langle \langle x, (\alpha U + \beta V)^* y \rangle \rangle &= \langle (\alpha U + \beta V)x, y \rangle \\ &= \alpha \langle Ux, y \rangle + \beta \langle Vx, y \rangle \\ &= \alpha \langle \langle x, U^* y \rangle \rangle + \beta \langle \langle x, V^* y \rangle \rangle \\ &= \langle \langle x, \bar{\alpha} U^* y \rangle \rangle + \langle \langle x, \bar{\beta} V^* y \rangle \rangle \\ &= \langle \langle x, (\bar{\alpha} U^* + \bar{\beta} V^*) y \rangle \rangle \end{aligned}$$

Sledi, da je $(\alpha U + \beta V)^* = (\bar{\alpha} U^* + \bar{\beta} V^*)$.

b) Naj bosta $U \in B(X, Y)$ in $T \in B(Y, Z)$ poljubna. Tedaj $\forall x \in X, \forall z \in Z$ velja:

$$\langle \langle x, (TU)^* z \rangle \rangle = \langle \langle \langle (TU)x, z \rangle \rangle \rangle = \langle \langle \langle T(Ux), z \rangle \rangle \rangle = \langle Ux, T^* z \rangle = \langle \langle x, U^* T^* z \rangle \rangle$$

Posledično je res $(TU)^* = U^* T^*$.

c) Naj bo $U \in B(X, Y)$ poljuben. Tedaj $\forall x \in X, \forall y \in Y$ velja:

$$\langle y, (U^*)^* x \rangle = \langle \langle U^* y, x \rangle \rangle = \overline{\langle \langle x, U^* y \rangle \rangle} = \overline{\langle Ux, y \rangle} = \langle y, Ux \rangle$$

Posledično je $(U^*)^* = U$.

d) V dokazu izreka 3.1 smo že pokazali, da je $\|U^*\| \leq \|U\|$. Ko upoštevamo prejšnjo točko, vidimo, da velja:

$$\|U\| = \|(U^*)^*\| \leq \|U^*\| \leq \|U\|$$

Posledično sledi, da je $\|U^*\| = \|U\|$.

e) Naj bodo $U, V \in B(X, Y)$ $\varepsilon > 0$ poljubni in izberemo $\delta = \varepsilon$. Denimo, da je $\|U - V\| < \delta$. Tedaj je $\|f(U) - f(V)\| = \|U^* - V^*\| = \|(U - V)^*\|$. Po prejšnji točki je $\|(U - V)^*\| = \|U - V\| < \delta = \varepsilon$, torej je f zvezna.

f) Naj bo $U \in B(X, Y)$ poljuben. Ker že vemo, da je $\|U^*\| = \|U\|$, hitro vidimo, da je $\|U^*U\| \leq \|U^*\| \|U\| = \|U\|^2$. Hkrati vidimo, da za $\forall x \in X$ velja $\|Ux\|_Y^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle \langle U^* Ux, x \rangle \rangle$. Ko upoštevamo neenakost Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky, dobimo oceno $\langle \langle U^* Ux, x \rangle \rangle \leq \|U^* Ux\|_X \|x\|_X \leq \|U^* U\| \|x\|_X^2$. Sledi ocena: $\|Ux\|_Y^2 \leq \|U^* U\| \|x\|_X^2 \forall x \in X$, torej je $\|U\|^2 \leq \|U^* U\|$. Posledično velja iskana enakost. □

Lema 3.4. Naj bosta $(X, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle)$ in $(Y, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle)$ poljubna kompleksna Hilbertova prostora ter naj bo $T \in B(X, Y)$ poljuben. Tedaj velja:

a) $\text{Ker} T = (\text{Im} T^*)^\perp$

b) $\text{Ker} T^* = (\text{Im} T)^\perp$

c) $\text{Ker} T^* = \{0\} \iff \text{Im} T \text{ je gosta v } Y$

Dokaz. a) Najprej pokažimo, da je $\text{Ker} T \subseteq (\text{Im} T^*)^\perp$. Naj bo $x \in \text{Ker} T$ poljuben ter izberemo poljuben $z \in \text{Im} T^*$. Potem za z obstaja $y \in Y$, da je $T^* y = z$. Posledično, je

$$\langle \langle x, z \rangle \rangle = \langle \langle x, T^* y \rangle \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0$$

Sledi, da je $x \in (ImT^*)^\perp$. Ker je x bil poljuben, premislek velja za vsak $x \in KerT$, torej je $KerT \subseteq (ImT^*)^\perp$. Naj bo sedaj $x \in (ImT^*)^\perp$ poljuben. Ker je $T^*Tx \in ImT^*$, velja:

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle = 0$$

Sledi, da je $Tx = 0$ oz. $x \in KerT$. Ker je bil x poljuben, sledi $(ImT^*)^\perp \subseteq KerT$. Posledično velja enakost.

- b) Da dokažemo ta rezultat, upoštevamo prejšnjo točko tega dokaza za T^* ter točko c) izreka 3.3. Posledično je $KerT^* = (Im(T^*)^*)^\perp = (ImT)^\perp$.
c) Da dokažemo ta rezultat bomo dokazali, da velja implikacija v obe smeri.
 \Rightarrow) Denimo, da je $KerT^* = \{0\}$. Potem vidimo, upoštevajoč posledico 2.8 ter točko a) tega dokaza, da velja:

$$\overline{ImT} = ((ImT)^\perp)^\perp = (KerT^*)^\perp = \{0\}^\perp = Y$$

Sledi, da je ImT gosta v Y po definiciji.

\Leftarrow) Denimo, da je ImT gosta v Y . Potem po posledici 2.8 velja, da je

$$((ImT)^\perp)^\perp = \overline{ImT} = Y$$

Po točki b) tega dokaza velja $KerT^* = (ImT)^\perp$. Ker je $ImT \subseteq Y$ neprazna podmnožica, velja, da je $(ImT)^\perp$ zaprti podprostor v Y . Po posledici 2.7 potem sledi:

$$KerT^* = (ImT)^\perp = (((ImT)^\perp)^\perp)^\perp = Y^\perp = \{0\}$$

□

Posledica 3.5. Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor ter naj bo $T \in B(X)$. Naslednji trditvi sta ekvivalentni:

- (1) Operator T je obrnljiv.
- (2) $KerT^* = \{0\}$ ter obstaja tak $r > 0$, da je $\|Tx\| \geq r\|x\| \forall x \in X$.

Dokaz. Dokazali bomo obe implikaciji.

- (1) \Rightarrow (2) Denimo, da je T obrnljiv. Tedaj je T bijekcija in njegov inverz, T^{-1} pripada $B(X)$. Posledično je $ImT = Y$. Ker je X Hilbertov prostor, je tudi normiran prostor, torej po lemi 2.1 velja, da je $\|Tx\| \geq \|T^{-1}\|^{-1}\|x\|$; $\forall x \in X$. Določimo $r = \|T^{-1}\|^{-1}$. Ker je X tudi Banachov prostor, po lemi 2.2 velja, da je ImT zaprti podprostor v Y . Sledi, da je $ImT = \overline{ImT} = Y$, torej je ImT gost v Y . Po lemi 3.4 je potem $KerT^* = \{0\}$.
(1) \Leftarrow (2) Denimo sedaj, da je $KerT^* = \{0\}$ in da obstaja tak $r > 0$, da za $\forall x \in X$ velja $\|Tx\| \geq r\|x\|$. Po lemi 3.4 potem sledi, da je ImT gost v Y . Lema 2.2 nam tudi pove, da je ImT zaprti podprostor v Y . Sledi, da je $ImT = \overline{ImT} = Y$. Naj bo sedaj $x \in KerT$ poljuben. Tedaj je $Tx = 0$, po predpostavki pa potem sledi, da je $0 = \|Tx\| \geq r\|x\|$. To je pa možno le, kadar je $x = 0$. Sledi, da je $KerT = \{0\}$, torej je T bijektiven endomorfizem nad Banachovim prostorom X . Po izreku o odprti preslikavi sledi, da je T obrnljiv.

□

Lema 3.6. Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor ter naj bo $T \in B(X)$ poljuben. Če je T obrnljiv, je obrnljiv tudi T^* .

Dokaz. Naj bo $T \in B(X)$ poljuben obrnljiv operator. Tedaj velja, da je $TT^{-1} = T^{-1}T = I$. Enačbo adjungiramo ter tako dobimo $(TT^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = I^*$. Ko upoštevamo točko b) izreka 3.3, se enačba poenostavi v:

$$(T^{-1})^*T^* = T^*(T^{-1})^* = I$$

Posledično je T^* obrnljiv ter $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. □

3.2. Normalni operatorji.

Definicija 3.7. Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor in T poljuben omejen linearen operator nad X . Pravimo, da je T *normalen*, če je $TT^* = T^*T$.

Lema 3.8. *Naj bo $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Naj bota $T \in B(X)$ ter $r > 0$ poljubna. Velja:*

- a) $\|Tx\| = \|T^*x\|$; $\forall x \in X$.
- b) Če je $\|Tx\| \geq r\|x\|$; $\forall x \in X$, je $\text{Ker}T^* = \{0\}$.

Dokaz. a) Naj bo $x \in X$ poljuben. Potem je

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 &= \langle Tx, Tx \rangle - \langle T^*x, T^*x \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle - \langle TT^*x, x \rangle \\ &= \langle T^*Tx - TT^*x, x \rangle = \langle (T^*T - TT^*)x, x \rangle \end{aligned}$$

Ker je T normalen, je $TT^* = T^*T$, torej je

$$\|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 = \langle (T^*T - TT^*)x, x \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$$

Posledično je $\|Tx\| = \|T^*x\|$. Ker je bil x poljuben, enakost velja za $\forall x \in X$.

- b) Denimo, da obstaja tak $r > 0$, da je $\|Tx\| \geq r\|x\|$; $\forall x \in X$. Naj bo $x \in \text{Ker}T^*$ poljuben. Po točki a) tega dokaza je potem $0 = \|T^*x\| = \|Tx\| \geq r\|x\|$. Sledi, da je $\|x\| = 0$ oz. $x = 0$. Posledično je $\text{Ker}T^* = \{0\}$. □

LITERATURA

- [1] B. P. Rynne, M. A. Youngson, *Linear functional analysis*, Springer-Verlag London, Ltd., London, 2008.