UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Matematika – 2. stopnja

Jimmy Zakeršnik

Omejeni linearni operatorji na Hilbertovih prostorih

Magistrsko delo

Mentor: dr. Daniel Eremita

Maribor, 2024/25

Kazalo

Omejeni linearni operatorji na Hilbertovih prostorih

Povzetek

Bo napisan zadnji

Bounded linear operators on Hilbert spaces

Abstract

Will be written last

Math. Subj. Class. (2020): 47A25, 47B02, 47B15,

Ključne besede: Linearna algebra, funkcionalna analiza, Hilbertov prostor, omejen linearen operator, spekter, spektralni radij, normalen operator, unitaren operator, sebi-adjungiran operator

Keywords: Linear algebra, funkcional analysis, Hilbert space, bounded linear operator, spectrum, spectral radius, normal operator, unitary operator, self-adjoint operator

1. Uvod

Sem spada uvod, ki bo napisan, ko bo naloga bolj vsebinsko dovršena.

2. Hilbertovi prostori

Tukaj bom povedal osnovno o Hilbertovih prostorih:

- Izrek o odprti preslikavi (brez dokaza)
- Kaj so Hilbertovi prostori
- Neenakost $C - S - B$
- Ortogonalni komplement
- Riezsov izrek
- Prostor omejenih linearnih operatorjev nad Hilbertovimi prostori

Lema 2.1. *Za poljubna normirana prostora X ter Y in poljuben $T \in B(X, Y)$ velja: Če je T obrnljiv, je $||Tx|| \geq ||T^{-1}||^{-1}||x||;\ \forall x \in X$.*

Lema 2.2. *Za poljuben Banachov prostor X, poljuben normiran prostor Y ter poljuben $T \in B(X, Y)$ velja: Če obstaja tak $r > 0$, da je $||Tx|| \geq r||x||;\ \forall x \in X$, je ImT zaprti podprostor v Y.*

Definicija 2.3. Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Preslikavi $\langle ., . \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ pravimo *skalarni produkt* na V, če velja:

- $\langle x, x \rangle \geq 0;\ \forall x \in V$
- $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle};\ \forall x, y \in V$
- $\langle \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle;\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}\ \&\ \forall x_1, x_2, y \in V$

Če je V vektorski prostor (nad $\mathbb{F}$) in $\langle ., . \rangle$ skalarni produkt na njem, pravimo, da je $(V, +, \cdot, \langle ., . \rangle)$ *prostor s skalarnim produktom.*

Opomba 2.4. Naj bo $(V, +, \cdot, \langle ., . \rangle)$ prostor s skalarnim produktom nad poljem $\mathbb{F}$. Enostavno je preveriti, da je s predpisom $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}\ \forall x \in V$ definirana norma na V. Za tako normo pravimo, da je *porojena s skalarnim produktom* $\langle ., . \rangle$.

Definicija 2.5. Naj bo (M, d) poljuben metrični prostor. Pravimo, da je M *poln* metrični prostor, če je vsako Cauchyjevo zaporedje v M konvergentno v M.

Sedaj definirajmo Hilbertove prostore.

Definicija 2.6. Naj bo $(V, \langle ., . \rangle)$ poljuben prostor s skalarnim produktom nad poljem $\mathbb{F}$. Naj bo $||.||$ norma na V porojena s $\langle ., . \rangle$ in naj bo $d : V \times V \to \mathbb{R}$ metrika na V porojena z $||.||$. Če je (V, d) poln metrični prostor, pravimo, da je $(V, \langle ., . \rangle)$ *Hilbertov prostor* nad $\mathbb{F}$.

Posledica 2.7. *Za poljuben zaprti podprostor Y poljubnega Hilbertovega prostora velja $Y^{\perp\perp} = Y$.*

Posledica 2.8. *Za poljuben podprostor Y poljubnega Hilbertovega prostora velja $Y^{\perp\perp} = \overline{Y}$.*

Lema 2.9. *Naj bo $(X, \langle ., . \rangle)$ poljuben kompleksen vektorski prostor s skalarnim produktom in naj bosta $S, T \in B(X)$ poljubna. Če $\forall x \in X$ velja $\langle Tx, x \rangle = \langle Sx, x \rangle$, potem je $T = S$.*

3. Omejeni linearni operatorji nad Hilbertovimi prostori

V tem poglavju bomo obravnavali lastnosti omejenih linearnih operatorjev nad Hilbertovimi prostori ter lastnosti njihovih spektrov, kadar sta domena in kodomena kompleksna Hilbertova prostora. Posebej nas bo zanimala operacija adjungiranja, zato bomo najprej povedali nekaj o njej.

3.1. **Adjungirani operatorji.**

Izrek 3.1. *Naj bosta $(X, \langle\langle ., . \rangle\rangle)$ in $(Y, \langle ., . \rangle)$ poljubna kompleksna Hilbertova prostora in naj bo T poljuben element $B(X,Y)$. Tedaj obstaja enolično določen operator $T^* \in B(Y,X)$, za katerega velja*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle\langle x, T^*y \rangle\rangle \; ; \; \forall x \in X \;\&\; \forall y \in Y$$

Dokaz. Naj bo $y \in Y$ poljuben ter naj bo $f_y : X \to \mathbb{C}$ preslikava definirana s predpisom $f_y(x) = \langle Tx, y \rangle \; ; \; \forall x \in X$. Opazimo, da je f_y linearen funkcional nad X. Po neenakosti Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky potem velja:

$$|f_y(x)| = |\langle Tx, y \rangle| \leq ||Tx||_Y \cdot ||y||_Y \leq ||T|| \cdot ||x||_X \cdot ||y||_Y ; \; \forall x \in X$$

To pomeni, da je f_y omejen linearen funkcional nad X. Posledično velja, po Riezsovem izreku, da obstaja enolično določen $z \in X$, tak, da je $f_y(x) = \langle\langle x, z \rangle\rangle \; ; \; \forall x \in X$. Sedaj definiramo preslikavo $T^* : Y \to X$, ki vsakemu $y \in Y$ priredi pripadajoči $z \in X$ (tisti, enolično določen, za katerega je $f_y(x) = \langle\langle x, z \rangle\rangle \; ; \; \forall x \in X$). Posledično velja:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle\langle x, T^*y \rangle\rangle \;\; \forall x \in X, \; \forall y \in Y$$

Sedaj preverimo, da je T^* omejen linearen operator. Naj bodo $y_1, y_2 \in Y$ in $x \in X$ poljubni elementi ter $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ poljubna skalarja. Tedaj je:

$$\begin{aligned}
\langle\langle x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle\rangle &= \langle Tx, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle \\
&= \bar{\alpha} \langle Tx, y_1 \rangle + \bar{\beta} \langle Tx, y_2 \rangle \\
&= \bar{\alpha} \langle\langle x, T^*y_1 \rangle\rangle + \bar{\beta} \langle\langle x, T^*y_2 \rangle\rangle \\
&= \langle\langle x, \alpha T^*y_1 \rangle\rangle + \langle\langle x, \beta T^*y_2 \rangle\rangle
\end{aligned}$$

Sledi, da je $T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T^*y_1 + \beta T^*y_2; \; \forall x \in X, \forall y_1, y_2 \in Y, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, torej je T^* res linearna preslikava. Dodatno, velja:

$$||T^*y||_X^2 = \langle\langle T^*y, T^*y \rangle\rangle = \langle TT^*y, y \rangle \leq ||TT^*y||_Y ||y||_Y \leq ||T|| ||T^*y||_X ||y||_Y ; \; \forall y \in Y$$

Če je $||T^*y||_X \neq 0$, dobljeno neenakost delimo z $||T^*y||_X$ ter tako dobimo oceno $||T^*y||_X \leq ||T|| ||y||_Y$. V primeru, ko je $||T^*y||_X = 0$, prejšnja ocena velja trivialno. Sledi, da je

$$||T^*y||_X \leq ||T|| ||y||_Y ; \forall y \in Y$$

Preslikava T^* je torej omejen linearen operator in velja $||T^*|| \leq ||T||$. Za konec še pokažimo, da je T^* enolično določen. Denimo, da imamo $U_1, U_2 \in B(Y, X)$, za katera velja: $\langle Tx, y \rangle = \langle\langle x, U_1 y \rangle\rangle = \langle\langle x, U_2 y \rangle\rangle \; ; \; \forall x \in X, \forall y \in Y$. Tedaj velja, da je $U_1 y = U_2 y; \; \forall y \in Y$, torej je $U_1 = U_2$. Sledi, da je T^* res enolično določen. $\square$

Izrek 3.1 nas motivira, da vpeljemo naslednjo definicijo.

Definicija 3.2. Naj bosta X in Y kompleksna Hilbertova prostora ter naj bo $T \in B(X,Y)$. Tedaj operatorju T^* iz izreka 3.1 pravimo *adjungiran operator* operatorja T.

Sedaj bomo navedli in dokazali nekatere pomembne lastnosti adjungiranja.

Izrek 3.3. *Naj bodo* $(X, \langle\langle ., . \rangle\rangle)$, $(Y, \langle ., . \rangle)$ *in* $(Z, \langle\langle\langle ., . \rangle\rangle\rangle)$ *poljubni kompleksni Hilbertovi prostori ter naj bodo* $U, V \in B(X, Y)$ *ter* $T \in B(Y, Z)$ *poljubni omejeni linearni operatorji. Tedaj velja:*
a) $(\alpha U + \beta V)^* = \bar{\alpha} U^* + \bar{\beta} V^*; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
b) $(TU)^* = U^* T^*$.
c) $(U^*)^* = U$.
d) $||U^*|| = ||U||$.
e) Preslikava $f : B(X, Y) \to B(Y, X)$*, definirana s predpisom* $f(U) = U^*$ *je zvezna.*
f) $||U^* U|| = ||U||^2$.

Dokaz. a) Naj bodo $U, V \in B(X, Y)$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ poljubni. Tedaj $\forall x \in X, \forall y \in Y$ velja:

$$\begin{aligned}
\langle\langle x, (\alpha U + \beta V)^* y \rangle\rangle &= \langle (\alpha U + \beta V)x, y \rangle \\
&= \alpha \langle Ux, y \rangle + \beta \langle Vx, y \rangle \\
&= \alpha \langle\langle x, U^* y \rangle\rangle + \beta \langle\langle x, V^* y \rangle\rangle \\
&= \langle\langle x, \bar{\alpha} U^* y \rangle\rangle + \left\langle\left\langle x, \bar{\beta} V^* y \right\rangle\right\rangle \\
&= \left\langle\left\langle x, (\bar{\alpha} U^* + \bar{\beta} V^*) y \right\rangle\right\rangle
\end{aligned}$$

Sledi, da je $(\alpha U + \beta V)^* = (\bar{\alpha} U^* + \bar{\beta} V^*)$.

b) Naj bosta $U \in B(X, Y)$ in $T \in B(Y, Z)$ poljubna. Tedaj $\forall x \in X, \forall z \in Z$ velja:

$$\langle\langle x, (TU)^* z \rangle\rangle = \langle\langle\langle (TU)x, z \rangle\rangle\rangle = \langle\langle\langle T(Ux), z \rangle\rangle\rangle = \langle Ux, T^* z \rangle = \langle\langle x, U^* T^* z \rangle\rangle$$

Posledično je res $(TU)^* = U^* T^*$.

c) Naj bo $U \in B(X, Y)$ poljuben. Tedaj $\forall x \in X, \forall y \in Y$ velja:

$$\langle y, (U^*)^* x \rangle = \langle\langle U^* y, x \rangle\rangle = \overline{\langle\langle x, U^* y \rangle\rangle} = \overline{\langle Ux, y \rangle} = \langle y, Ux \rangle$$

Posledično je $(U^*)^* = U$.

d) V dokazu izreka 3.1 smo že pokazali, da je $||U^*|| \leq ||U||$. Ko upoštevamo prejšnjo točko, vidimo, da velja:

$$||U|| = ||(U^*)^*|| \leq ||U^*|| \leq ||U||$$

Posledično sledi, da je $||U^*|| = ||U||$.

e) Naj bodo $U, V \in B(X, Y)$ $\varepsilon > 0$ poljubni in izberemo $\delta = \varepsilon$. Denimo, da je $||U - V|| < \delta$. Tedaj je $||f(U) - f(V)|| = ||U^* - V^*|| = ||(U - V)^*||$. Po prejšnji točki je $||(U - V)^*|| = ||U - V|| < \delta = \varepsilon$, torej je f zvezna.

f) Naj bo $U \in B(X, Y)$ poljuben. Ker že vemo, da je $||U^*|| = ||U||$, hitro vidimo, da je $||U^* U|| \leq ||U^*|| ||U|| = ||U||^2$. Hkrati vidimo, da za $\forall x \in X$ velja $||Ux||_Y^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle\langle U^* Ux, x \rangle\rangle$. Ko upoštevamo neenakost Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky, dobimo oceno $\langle\langle U^* Ux, x \rangle\rangle \leq ||U^* Ux||_X ||x||_X \leq ||U^* U|| ||x||_X^2$. Sledi ocena: $||Ux||_Y^2 \leq ||U^* U|| ||x||_X^2 \forall x \in X$, torej je $||U||^2 \leq ||U^* U||$. Posledično velja iskana enakost.

□

Pri obravnavi adjungiranih operatorjev bomo potrebovali naslednji pomožni rezultat.

Lema 3.4. *Naj bosta* $(X, \langle\langle ., . \rangle\rangle)$ *in* $(Y, \langle ., . \rangle)$ *poljubna kompleksna Hilbertova prostora ter naj bo* $T \in B(X, Y)$ *poljuben. Tedaj velja:*

a) $KerT = (ImT^*)^\perp$.
b) $KerT^* = (ImT)^\perp$.
c) $KerT^* = \{0\} \iff ImT$ *je gosta v* Y.

Dokaz. a) Najprej pokažimo, da je $KerT \subseteq (ImT^*)^\perp$. Naj bo $x \in KerT$ poljuben ter izberemo poljuben $z \in ImT^*$. Potem za z obstaja $y \in Y$, da je $T^*y = z$. Posledično, je

$$\langle\langle x, z\rangle\rangle = \langle\langle x, T^*y\rangle\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0$$

Sledi, da je $x \in (ImT^*)^\perp$. Ker je x bil poljuben, premislek velja za vsak $x \in KerT$, torej je $KerT \subseteq (ImT^*)^\perp$. Naj bo sedaj $x \in (ImT^*)^\perp$ poljuben. Ker je $T^*Tx \in ImT^*$, velja:

$$||Tx||^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = 0$$

Sledi, da je $Tx = 0$ oz. $x \in KerT$. Ker je bil x poljuben, sledi $(ImT^*)^\perp \subseteq KerT$. Posledično velja enakost.

b) Da dokažemo ta rezultat, upoštevamo prejšnjo točko tega dokaza za T^* ter točko *c*) izreka 3.3. Posledično je $KerT^* = (Im(T^*)^*)^\perp = (ImT)^\perp$.

c) Da dokažemo ta rezultat bomo dokazali, da veljata implikaciji v obe smeri.

$\Rightarrow$) Denimo, da je $KerT^* = \{0\}$. Potem vidimo, upoštevajoč posledico 2.8 ter točko *a*) tega dokaza, da velja:

$$\overline{ImT} = ((ImT)^\perp)^\perp = (KerT^*)^\perp = \{0\}^\perp = Y$$

Sledi, da je ImT gosta v Y po definiciji.

$\Leftarrow$) Denimo, da je ImT gosta v Y. Potem po posledici 2.8 velja, da je

$$((ImT)^\perp)^\perp = \overline{ImT} = Y$$

Po točki *b*) tega dokaza velja $KerT^* = (ImT)^\perp$. Ker je $ImT \subseteq Y$ neprazna podmnožica, velja, da je $(ImT)^\perp$ zaprti podprostor v Y. Po posledici 2.7 potem sledi:

$$KerT^* = (ImT)^\perp = (((ImT)^\perp)^\perp)^\perp = Y^\perp = \{0\}$$

□

Posledica 3.5. *Naj bo* X *poljuben kompleksen Hilbertov prostor ter naj bo* $T \in B(X)$. *Tedaj je operator* T *obrnljiv natanko tedaj, ko je* $KerT^* = \{0\}$ *in obstaja tak* $r > 0$, *da je* $||Tx|| \geq r||x||$ $\forall x \in X$.

Dokaz. Dokazali bomo obe implikaciji.

$\Rightarrow$) Denimo, da je T obrnljiv. Tedaj je T bijekcija in njegov inverz, T^{-1}, pripada $B(X)$. Posledično je $ImT = Y$. Ker je X Hilbertov prostor, je tudi normiran prostor, torej po lemi 2.1 velja, da je $||Tx|| \geq ||T^{-1}||^{-1}||x||$; $\forall x \in X$. Določimo $r = ||T^{-1}||^{-1}$. Ker je X tudi Banachov prostor, po lemi 2.2 velja, da je ImT zaprti podprostor v Y. Sledi, da je $ImT = \overline{ImT} = Y$, torej je ImT gost v Y. Po lemi 3.4 je potem $KerT^* = \{0\}$.

$\Leftarrow$) Denimo sedaj, da je $KerT^* = \{0\}$ in da obstaja tak $r > 0$, da za $\forall x \in X$ velja $||Tx|| \geq r||x||$. Po lemi 3.4 potem sledi, da je ImT gost v Y. Lema 2.2 nam tudi pove, da je ImT zaprti podprostor v Y. Sledi, da je $ImT = \overline{ImT} = Y$. Naj bo sedaj $x \in KerT$ poljuben. Tedaj je $Tx = 0$, po predpostavki pa potem sledi, da je $0 = ||Tx|| \geq r||x||$. To je pa možno le, kadar je $x = 0$. Sledi, da je $KerT = \{0\}$, torej je T bijektiven endomorfizem nad Banachovim prostorom X. Po izreku o odprti preslikavi sledi, da je T obrnljiv.

□

Za konec tega podpoglavja premislimo, v sledeči lemi, kako sta povezani operaciji invertiranja in adjungiranja.

Lema 3.6. *Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor ter naj bo $T \in B(X)$ poljuben. Če je T obrnljiv, je obrnljiv tudi T^*.*

Dokaz. Naj bo $T \in B(X)$ poljuben obrnljiv operator. Tedaj velja, da je $TT^{-1} = T^{-1}T = I$. Enačbo adjungiramo ter tako dobimo $(TT^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = I^*$. Ko upoštevamo točko b) izreka 3.3, se enačba poenostavi v:

$$(T^{-1})^*T^* = T^*(T^{-1})^* = I$$

Posledično je T^* obrnljiv ter $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. □

3.2. **Normalni operatorji.** Sedaj se bomo posvetili, glede na adjungiranje, posebnim primerom operatorjev. Prvi izmed teh, so t. i. normalni operatorji.

Definicija 3.7. Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Pravimo, da je $T \in B(X)$ *normalen*, če je $TT^* = T^*T$.

Lema 3.8. *Naj bo $(X, \langle ., . \rangle)$ poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Naj bo $T \in B(X)$ poljuben normalen operator ter $r > 0$ poljuben. Velja:*
a) $||Tx|| = ||T^*x||;\ \forall x \in X$.
b) Če je $||Tx|| \geq r||x||;\ \forall x \in X$, je $KerT^* = \{0\}$.

Dokaz. a) Naj bo $x \in X$ poljuben. Potem je

$$\begin{aligned} ||Tx||^2 - ||T^*x||^2 &= \langle Tx, Tx\rangle - \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle - \langle TT^*x, x\rangle \\ &= \langle T^*Tx - TT^*x, x\rangle = \langle (T^*T - TT^*)x, x\rangle \end{aligned}$$

Ker je T normalen, je $TT^* = T^*T$, torej je

$$||Tx||^2 - ||T^*x||^2 = \langle (T^*T - TT^*)x, x\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$$

Posledično je $||Tx|| - ||T^*x||$. Ker je bil x poljuben, enakost velja za $\forall x \in X$.

b) Denimo, da obstaja tak $r > 0$, da je $||Tx|| \geq r||x||;\ \forall x \in X$. Naj bo $x \in KerT^*$ poljuben. Po točki a) tega dokaza je potem $0 = ||T^*x|| = ||Tx|| \geq r||x||$. Sledi, da je $||x|| = 0$ oz. $x = 0$. Posledično je $KerT^* = \{0\}$.

□

Na podlagi posledice 3.5 in leme 3.8 sledi naslednja posledica.

Posledica 3.9. *Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor in naj bo $T \in B(X)$ poljuben normalen operator. Tedaj je operator T obrnljiv natanko tedaj, ko obstaja tak $r > 0$, da je $||Tx|| \geq r||x||\ \forall x \in X$.*

Dokaz. Da dokažemo ekvivalenco, bomo dokazali implikaciji v obe smeri.

$\Rightarrow$) Velja direktno po posledici 3.5.
$\Leftarrow$) Denimo, da obstaja tak $r > 0$, da je $||Tx|| \geq r||x||\ \forall x \in X$. Po lemi 3.8 je potem $KerT^* = \{0\}$. Po posledici 3.5 je potem T obrnljiv.

□

3.3. **Sebi-adjungirani operatorji.** Pri obravnavi preslikav nas pogosto zanimajo t. i. »fiksne točke« - točke, ki jih preslikava preslika nazaj vase. V primeru adjungiranja, operatorjem, ki jih operacija »fiksira« damo posebno ime.

Definicija 3.10. Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Pravimo, da je $T \in B(X)$ *sebi-adjungiran*, če velja $T = T^*$.

V naslednji lemi so povzete nekatere osnovne lastnosti sebi-adjungiranih operatorjev.

Lema 3.11. *Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Naj bo $\mathcal{S}(X)$ množica vseh sebi-adjungiranih operatorjev znotraj $B(X)$ in naj bo $T \in B(X)$ poljuben. Velja:*
a) Za poljubni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in poljubna $T_1, T_2 \in \mathcal{S}(X)$ velja: $\alpha T_1 + \beta T_2 \in \mathcal{S}(X)$.
b) Množica $\mathcal{S}(X)$ je zaprta podmnožica $B(X)$.
c) Operatorja TT^* in T^*T sta sebi-adjungirana.
d) $T = R + iS$, za neka sebi-adjungirana operatorja $R, S \in \mathcal{S}(X)$.

Dokaz. a) Naj bosta $T_1, T_2 \in \mathcal{S}(X)$ poljubna. Ker sta operatorja sebi-adjungirana, po prvi točki izreka 3.3 velja: $(\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \alpha T_1^* + \beta T_2^* = \alpha T_1 + \beta T_2$. Posledično je $\alpha T_1 + \beta T_2 \in \mathcal{S}(X)$.
b) Naj bo $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno zaporedje s členi v $\mathcal{S}(X)$ in limito $T \in B(X)$. Predzadnja točka izreka 3.3 nam pove, da je adjungiranje zvezno, torej je tudi zaporedje $\{T_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno z limito $T^* \in B(X)$. Ker so $T_n \in \mathcal{S}(X)\ \forall n \in \mathbb{N}$, velja $T_n^* = T_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, torej je $T^* = T$. Posledično je tudi $T \in \mathcal{S}(X)$. Sledi, da je $\mathcal{S}(X)$ zaprta.
c) Naj bo $T \in B(X)$ poljuben. Tedaj je, upoštevajoč točko *c*) izreka 3.3, $(T^*T)^* = T^*T^{**} = T^*T$. Sledi, da je $T^*T \in \mathcal{S}(X)$ in na enak način premislimo, da enako velja za TT^*.
d) Naj bo $T \in B(X)$ poljuben. Definiramo operatorja R in S na naslednji način:

$$R = \frac{1}{2}(T + T^*),\ S = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

Očitno velja, da je $T = R + iS$. Preverimo še, da sta R in S res sebi-adjungirana.

$$R^* = (\frac{1}{2}(T + T^*))^* = \frac{1}{2}(T^* + T^{**}) = \frac{1}{2}(T^* + T) = R$$

$$S^* = (\frac{1}{2i}(T - T^*))^* = \frac{-1}{2i}(T - T^*)^* = \frac{-1}{2i}(T^* - T^{**}) = \frac{1}{2i}(T - T^*) = S$$

□

3.4. **Unitarni operatorji.** Zadnji posebni primer operatorjev, glede na adjungiranje, je primer, v katerem je adjungirani operator hkrati tudi inverz.

Definicija 3.12. Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Pravimo, da je operator $T \in B(X)$ *unitaren*, če velja: $TT^* = T^*T = I$.

Naslednji izrek nam pove, da so unitarni operatorji hkrati tudi izometrije.

Izrek 3.13. *Naj bo $(X, \langle ., . \rangle)$ poljuben kompleksen Hilbertov prostor. Naj bosta $T, U \in B(X)$ poljubna. Velja:*
a) $T^*T = I \iff T$ je izometrija.
b) U je unitaren $\iff U$ je surjektivna izometrija na X.

Dokaz. Obe ekvivalenci bomo dokazali tako, da bomo pokazali, da veljata implikaciji v obe smeri.

a) Pri dokazu si bomo pomagali z lemo 2.9.

$\Rightarrow$) Denimo, da je $T^*T = I$ in naj bo $x \in X$ poljuben. Tedaj je:

$$||Tx||^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle Ix, x\rangle = \langle x, x\rangle = ||x||^2$$

Ker je bil x poljuben, zgornja enakost velja za vse elemente X, torej je T res izometrija.

$\Leftarrow$) Denimo, da je T izometrija. Naj bo $x \in X$ poljuben. Tedaj velja

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = ||Tx||^2 = ||x||^2 = \langle Ix, x\rangle$$

Ker je x poljuben, sklep velja za vse elemente X, torej po lemi 2.9 sledi, da je $T^*T = I$.

b) Pri dokazu te ekvivalence, si bomo pomagali s prejšnjo točko dokaza.

$\Rightarrow$) Denimo, da je U unitaren. Potem sledi, da je $UU^* = U^*U = I$ in po točki a) je potem U izometrija. Dodatno, naj bo $x \in X$ poljuben. Potem je $x = U(U^*x)$, torej je $x \in ImU$. Sledi, da je $ImU = X$ oz. U je surjektiven.

$\Leftarrow$) Denimo, da je U surjektivna izometrija na X. Ker je U izometrija, po točki a) tega dokaza sledi, da je $U^*U = I$. Naj bo sedaj $y \in X$ poljuben. Ker je U surjektiven operator na X, obstaja tak $x \in X$, da je $Ux = y$. Posledično velja naslednje:

$$UU^*y = UU^*(Ux) = U(U^*Ux) = U(Ix) = Ux = y$$

Ker je bil y poljuben, prejšnji sklep velja za vsak element X. Sledi, da je $UU^* = I$, torej je U unitaren operator.

$\square$

Da dopolnimo znanje o unitarnih operatorjih, premislimo še naslednjo lemo.

Lema 3.14. *Naj bo X poljuben kompleksen Hilbertov prostor ter naj bo $\mathcal{U}(X)$ množica vseh unitarnih operatorjev na X. Velja:*

a) Če je $U \in \mathcal{U}(X)$, je tudi $U^* \in \mathcal{U}(X)$, ter $||U|| = ||U^*|| = 1$.

b) Če sta $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(X)$, sta tudi U_1U_2 in U_1^{-1}.

c) $\mathcal{U}(X)$ je zaprta podmnožica $B(X)$.

Dokaz. a) Naj bo U poljuben unitaren operator na X. Tedaj je $U^*(U^*)^* = U^*U = I$ in $(U^*)^*U^* = UU^* = I$, torej je tudi $U^* \in B(X)$ unitaren. Po izreku 3.3 že vemo, da je $||U|| = ||U^*||$. Dodatno nam izrek 3.13 pove, da je U tudi izometrija, torej je $||U|| = 1$.

b) Naj bosta U_1 in U_2 poljubna unitarna operatorja na X. S pomočjo izreka 3.3 vidimo, da je:

$$U_1U_2(U_1U_2)^* = U_1U_2U_2^*U_1^* = U_1IU_1^* = I$$
$$(U_1U_2)^*U_1U_2 = U_2^*U_1^*U_1U_2 = U_2^*IU_2 = I$$

torej je tudi $U_1U_2 \in \mathcal{U}(X)$. Ker je U_1 unitaren, je omejen in po izreku 3.13 bijektiven, je po posledici izreka o odprti preslikavi tudi obrnljiv (znotraj $B(X)$). Dodatno, upoštevamo lemo 3.6 in tako dobimo:

$$(U_1^{-1})^*U_1^{-1} = (U_1^*)^{-1}U_1^{-1} = (U_1U_1^*)^{-1} = I^{-1} = I$$
$$U_1^{-1}(U_1^{-1})^* = U_1^{-1}(U_1^*)^{-1} = (U_1^*U_1)^{-1} = I^{-1} = I$$

Sledi, da je U_1^{-1} unitaren.

c) Naj bo $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje s členi v $\mathcal{U}(X)$ in limito $U \in B(X)$. Potem je po točki a) tega dokaza tudi zaporedje $\{U_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje s členi v $\mathcal{U}(X)$. Ker je adjungiranje zvezno, je $U^* \in B(X)$ limita zaporedja $\{U_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$. Naj bo $x \in X$ poljuben. Potem je $||Ux||^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle U_n x, U_n x\rangle = \lim_{n\to\infty} ||U_n x||^2 = ||x||^2$. Sledi, da je U izometrija, po izreku 3.13 pa sledi, da je potem $U^*U = I$. Na enak način kot za U vidimo, da je tudi U^* izometrija in posledično po izreku 3.13 velja, da je $(U^*)^*U^* = UU^* = I$. Sledi, da je U unitaren.

□

Literatura

[1] B. P. Rynne, M. A. Youngson, *Linear functional analysis*, Springer-Verlag London, Ltd., London, 2008.