Projektna naloga pri Statistiki

Jimmy Zakeršnik

17.7.2022

Povzetek

V tej projektni nalogi pri predmetu Statistika, bom obravnaval tri naloge po navodilih. Vsaka naloga bo obravnavana v svojem lastnem poglavju. Da bo se lažje sklicevati na njih, bo prva naloga poimenovana *Kibergrad*, druga *Slučajni sprehod* in tretja *Temperature*.

Kazalo

1 Kibergrad

Priložena datoteka *Kibergrad.csv*, ki vsebuje podatke o dani populaciji (prebivalci mesta Kibergrad), je bila odprta v programu LibreOffice Calc. S pomočjo vgrajenega orodja so nato, bili zbrani vzorci velikosti 500 po postopku enostavnega vzorčenja. V priloženi datoteki *Kibergradwork.ods* so na prvi strani izpisani vsi podatki ter vseh pet pridobljenih vzorcev, na drugi strani je posebej obravnavan prvi vzorec v smislu kvartilov in extremnih vrednosti, na tretji strani pa se na enak način obravnavajo vsi vzorci glede na dohodek družin tipa 1. Obe primerjavi sta dodatno podprti s pomočjo škatel z brki in na koncu sta izračunani še s tipi pojasnjena varianca in nepojasnjena varianca dohodkov. Pri tem je v veliko pomoč programski jezik R.

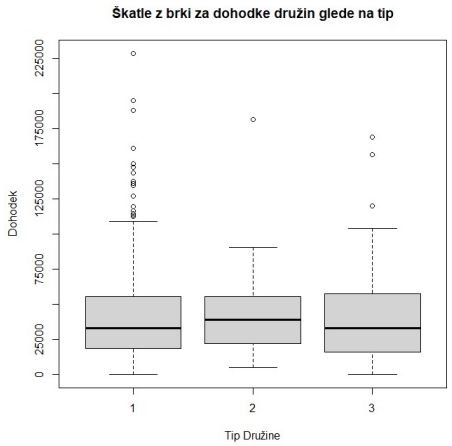
1.1 Primerjava dohodkov med tipi družin prvega vzorca

Poglejmo si najprej prvi vzorec in primerjajmo dohodke družin glede na tip družine. V delovnem okolju jezika **R** odpremo in poženemo skripto *Kibergrad_a.R*. Ob pogonu se v konzoli izpišejo vrednosti o dohodku, ki so navedene v spodnji tabeli.

	Tip 1	Tip 2	Tip 3
Max	228727	181696	168926
Q3	55360	54859	57631
Med	32975	38883	33310
Q1	18700	22011	16071
Min	0	5184	0

Tabela 1: *Tabela vrednosti, ki so potrebne za risanje škatel z brki za vsak tip družine*

Istočasno skripta izriše vzporedne škatle z brki, kot lahko vidimo na spodnji sliki, s pomočjo katerih lahko grafično primerjamo dohodke družin različnih tipov.



Slika 1: *Vzporedno narisane škatle z brki tipov družin* 1, 2 *in* 3

Škatle z brki nam ponudijo nekaj zanimivih ugotovitev. V minimalnih dohodkih ni velikih odstopanj, razen pri tipu 2, ki ima za razliko od ostalih pozitiven minimalen dohodek. Če ignoriramo ostale vzorce in tem rezultatom naivno verjamemo, so enostarševske družine z očetom (torej družine tipa 2) relativno bolj premožne od ostalih tipov. To domnevo podpira tudi opazka, da je povprečna vrednost tipa 2 višja kot povprečni vrednosti ostalih dveh tipov, kar lahko preberemo iz izpisa na konzoli.

Vrednosti so hkrati tudi dostopne v spodnji tabeli.

Tip	1	2	3
Povprečje	41655	46301	39931
SD	32974,23	39500,3	31069,71

Tabela 2: *Povprečne vrednosti in standardni odkloni dohodkov po tipih*

Če ne bi imeli že izračunanih povprečij, bi lahko še vedno sklepali o njihovih velikostih s pomoćjo škatel z brki. Opazimo namreč, da se prvi kvartili nahajajo na približno enaki višini z maksimalno razliko v okolici 6000 v prid družinam tipa 2, kar velja tudi za mediane. Šele pri tretjem kvartilu ostala dva tipa premagata tip 2, a tudi tu je največja razlika v rangu 4000. V tem primeru tipu 2 pomaga to, da ima izmed vseh tipov družin najmanjšo razdaljo med tretjim kvartilom in mediano, kar pomeni, da so vrednosti, ki pripadajo temu intervalu, bolj gosto porazdeljene.

Višje povprečje dohodka družin tipa 2 ni edino, kar izstopa pri škatlah z brki. Družine tipa 1 izstopajo v tem, da imajo, v primerjavi z ostalimi tipi, veliko število osamelcev (torej tistih vrednosti, ki so na sliki označene s krogi izven škatel).

Družine tipa 3 se odlikujejo po tem, da imajo najširši interkvartilni razmik. Za lažji pregled in primerjavo, so vsi interkvartilni razmiki navedeni v konzoli (po pogonu skripte) ter v tabeli spodaj:

Tip	1	2	3
IQR	36660	32848	41560

Tabela 3: *Interkvartilni razmiki dohodkov po tipih*

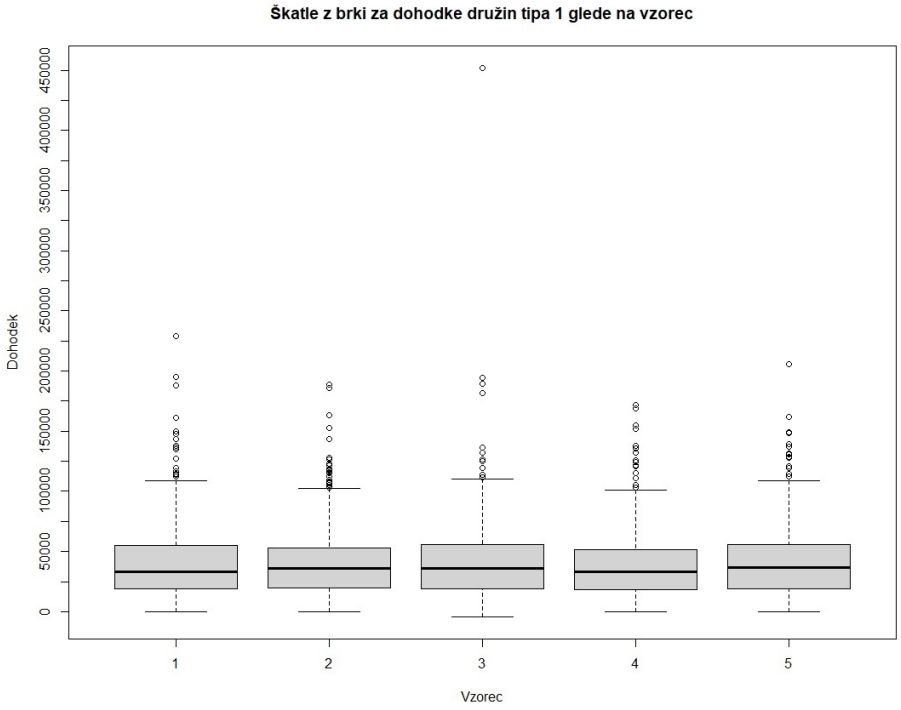
Družine tipa 2 so torej v povprečju bolj premožne od družin ostalih tipov in družine tipa 3 so v povprečju najmanj premožne. Vrednosti družin tipa 3 so hkrati tudi najbolj razpršene v »srednji polovici«, kar nam pove velikost interkvartilnega razmika. Družine tipa 1 se v obeh primerih nahajajo v sredini med družinami tipa 2 in 3. Hkrati imajo tudi razmeroma več osamelcev od ostalih tipov. V vsakem primeru nam rezultati namigujejo, da obstaja povezava med tipom družine in njenim dohodkom.

1.2 Primerjava dohodkov družin tipa 1 v petih vzorcih

Da nadaljujemo analizo podatkov si oglejmo porazdelitev dohodkov družin nekega tipa preko 5 neodvisno izbranih vzorcev. Pri tem za prvega vzamemo kar vzorec, ki smo ga obravnavali v prejšnjem podpoglavju, ostale štiri pa pridobimo s pomočjo orodij v LibreOffice Calc. Vsi vzorci so posebej shranjeni v lastni datoteki tipa *.csv* z imeni tipa *KibergradVzorec#.csv*.

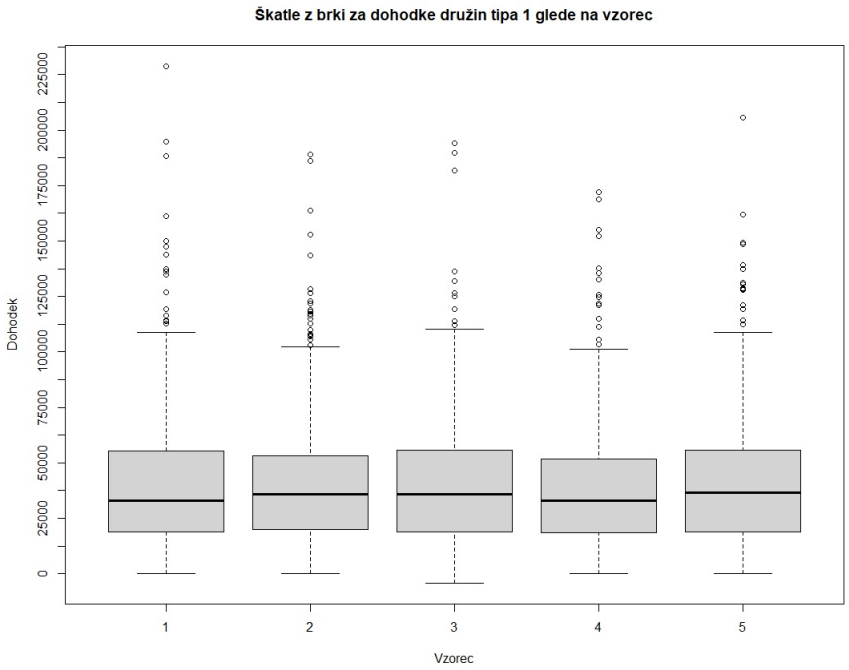
Da izrišemo škatle z brki, s pomočjo katerih bomo primerjali dohodke preko vzorcev, poženemo skripto *Kibergrad_b.R*. V njej najprej naložimo vzorce, nato vsakemu vzorcu dodamo stolpec vrednosti, ki nam pove kateremu vzorcu pripada dan podatek. Torej vzorcu 1 dodamo stolpec samih enk, vzorcu 2 stolpec samih dvojk itd. Te tabele nato združimo v eno samo tabelo, iz nje prefiltriramo družine vseh tipov razen 1 in nato s pomočjo te nove tabele po enakem postopku kot v prejšnjem podpoglavju primerjamo dohodke družin glede na vzorec.

Dobljene škatle z brki so prikazane spodaj.



Slika 2: *Vzporedno narisane škatle z brki družin tipa* 1 *po vzorcih*

Takoj opazimo, da je prikazan graf razpotegnjen, v glavnem na račun enega osamelca iz tretjega vzorca. Da dobimo bolj pregleden graf, odstranimo vse vrednosti, ki so večje od 250000 (v resnici je taka zgolj ena). Škatle z brki, ki jih dobimo po tem popravku in so prikazane spodaj, skripta samostojno izriše.



Slika 3: *Popravljene vzporedno narisane škatle z brki družin tipa* 1 *po vzorcih*

Ker smo pri »popravku« zanemarili zgolj eno vrednost, nam to bistveno ne pokvari primerjave. Izoliran osamelec bi lahko na našo obravnavo vplival kvečjemu negativno. Zato bomo pri izračunu povprečja za vsak vzorec uporabili tabelo, ki tega osamelca ne vsebuje.

Vrednosti (kvartili, povprečja, maksimalna in minimalna vrednost, IQR), ki jih skripta izpiše v konzolo, so prikazane v spodnji tabeli:

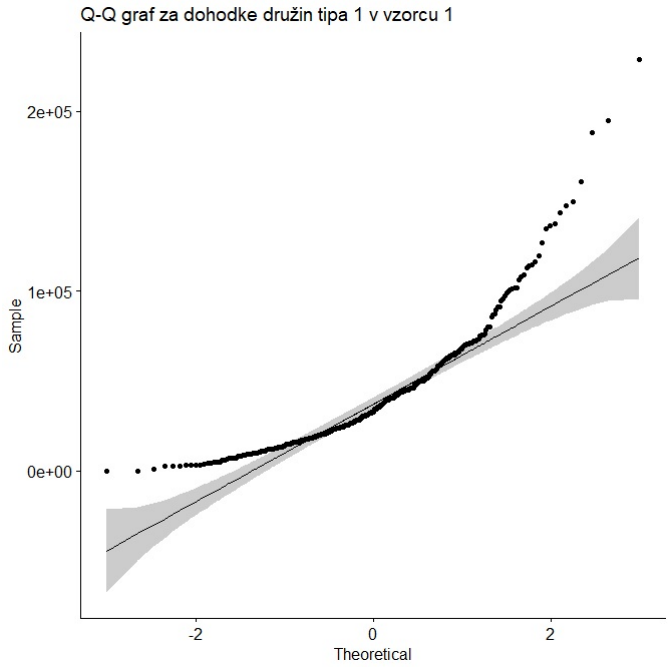
	Vzorec 1	Vzorec 2	Vzorec 3	Vzorec 4	Vzorec 5
Max	228727	188899	194230	171999	205712
Q3	55360	53121	55700	51700	55863
Med	32975	36000	35850	33006	36527
Q1	18700	20008	18800	18327	18668
Min	0	0	−4198	0	0
Povprečje	41655	41822	41337	39344	41697
SD	32974,23	31037,97	30517,25	29867,4	31099,04
IQR	36660	33113	36900	33373	37195

Tabela 4: *Ekstremi, kvartili, povprečja, standardni odkloni in interkvartilni razmiki dohodkov družin tipa* 1 *po vzorcih*

Sedaj, ko imamo narisane škatle z brki in zraven napisano tabelo, lahko komentiramo rezultate. V prvi vrsti opazimo, da so si povprečja dokaj blizu. Vsa povprečja razen povprečje četrtega vzorca se nahajajo v okolici 41500 ± 500, povprečje vzorca 4 pa se od 41500 razlikuje za manj kot 2500. Če bi si izbrali še več vzorcev, bi se po vsej verjetnosti njihova povprečja tudi nahajala v neki

bližnji okolici 41500. Podobno obnašanje standardnih odklonov, ki se nabirajo v okolici 31000 ± 2000 nas privede do nepresenetljivega sklepa, da je dohodek družin tipa 1 porazdeljen po vzorcih, torej porazdelitev dohodka ni odvisna od vzorca. To potrjuje tudi relativna bližina kvartilov v tabeli (npr. tretji kvartili se zbirajo v okolici 53000 ± 3000).

Na tej točki bi želeli preveriti, ali je porazdelitev slučajno normalna. Tako test s primerjalnim kvartilnim grafikonom kot Shapiro-Wilkov test na vzorcu 1 nam poveta, da to ne drži. V primeru Shapiro-Wilkovega testa, dobimo vrednost $p < 2.2e{-}16 < 0.05$, torej porazdelitev ni normalna. To vidimo tudi na primerjanlen kvartilnem grafikonu spodaj. Enak sklep seveda velja tudi za ostale vzorce.



Slika 4: *Primerjalni kvartilni grafikon dohodkov družin tipa* 1 *v vzorcu 1*

Četudi dohodki niso porazdeljeni normalno, so še vedno razmeroma konsistentni preko obravnavanih vzorcev. To je v kontrastu z razlikami in odstopanji, ki smo jih opazili, ko smo v prvem vzorcu primerjali dohodke glede na tip družine. Ta kontrast dodatno potrjuje sklep, da tip družine netrivialno vpliva na dohodek družine.

1.3 S tipom pojasnjena varianca populacije

Na koncu prejšnjega podpoglavja smo prišli do sklepa, da ima tip družine netrivialen vpliv na dohodek družine. Če to drži ali ne, lahko preverimo z izračunom s tipom družine pojesnjene variance. Čim smo poračunali to, se lahko skličemo na zvezo med varianco in pojasnjeno ter nepojasnjeno varianco ($Celotna\_varianca = Pojasnjena\_varianca + Nepojasnjena\_varianca$) in poračunamo še slednjo. Vsi računi in primerjave se prikažejo ob pogonu skripte

Kibergrad_c.R.

Z n_i označimo število družin tipa i ter z N velikost naše populacije. Z X označimo dohodke družin, z Y pa slučajno spremenljivko tipov družin, ki ima porazdelitev $P(Y = i) = n_i/N$. Predpostavimo, da so dohodki tipov družin $X_i = X_{|Y=i}$ medseboj neodvisni. Predpostavko upravičimo z argumentom, da v splošnem dohodek soseda ne vpliva na naš dohodek. Pomnimo tudi, da je $E[X|Y]$ neka funkcija spremenljivke Y, recimo $\Phi(Y)$. Z $\bar{X}_i$ še označimo pričakovano vrednost dohodka v družini tipa i, torej $\bar{X}_i = E[X|Y = i]$. S tipom pojasnjeno varianco potem izračunamo po formuli:

$$
\begin{aligned}
&Var(E[X|Y]) = Var(\Phi(Y)) = E\left[(\Phi(Y) - E[\Phi(Y)])^2\right] = \\
&= \sum_{i=1}^{3} (\Phi(Y = i) - E[\Phi(Y)])^2 * P(Y = i) = \\
&= 1/N * \sum_{i=1}^{3} n_i * (E[X|Y = i] - E[E[X|Y]])^2 = \\
&= 1/N * \sum_{i=1}^{3} n_i * (\bar{X}_i - E[X])^2 = 1/N * \sum_{i=1}^{3} n_i * (\bar{X}_i - \bar{X})^2
\end{aligned}
$$

S pomočjo zgoraj pridobljene formule v *Kibergrad_c.R* poračunamo pojasnjeno varianco. Nepojasnjeno varianco nato poračunamo kot razliko populacijske variance in pojasnjene variance. Vrednosti skripta izpiše v konzolo, dostopne pa so tudi v spodnji tabeli.

Varianca	1026385670
Pojasnjena	113781162
Nepojasnjena	912604508
SD	32037,2544062437

Tabela 5: *Populacijska, s tipi pojasnjena in nepojasnjena varianca*

Opazimo, da je nepojasnjena varianca bistveno višja od pojasnjene variance. Če pogledamo delež, ki ga varianci zavzemata, nam s tipi družin pojasnjena varianca predstavlja le približno 11,09%. To nam pove, da je tip družine netrivialen faktor pri napovedi dohodka družine, ni pa glavni faktor. To se ujema s tem, kar smo razbrali v prejšnjih podpoglavjih. Že zgolj za družine tipa 1 v podpoglavju 1.2 je bil standardni odklon, torej koren variance, razmeroma visok v vsakem vzorcu. To se ujema s tem, da večino variance pridobimo od faktorjev, ki niso tip družine. Če bi tip družine bil odgovoren za večji delež celotne variance dohodkov, bi bila varianca znotaj tipov manjša.

2 Slučajni sprehod

Za začetek omenimo, da se podatki, ki so uporabljeni v tem delu naloge, vsebovani v datotekah *Kromatin_kratki.csv*, *Kromatin_srednji.csv* in *Kromatin_dolgi.csv*. Ti podatki so razdalje med pari zaporedij nukleotidov, ki so bile izmerjene v treh različnih eksperimentih. Spomnimo se tudi, da imajo te razdalje Rayleighovo

porazdelitev, ki je podana z gostoto

$$f(r|\theta) = \begin{cases} \frac{r}{\theta^2} \exp\big(-\frac{r^2}{2\theta^2}\big) \ ; \ r > 0 \\ 0 \ ; \ \text{sicer} \end{cases}$$

V prvih dveh podpoglavjih, torej 2.1 in 2.2, določili cenilki za θ po metodi največjega verjetja in po metodi momentov. Nato bomo za obe pridobljeni cenilki ugotovili, ali sta nepristranski oz. katera je vsaj asimptotično bolj nepristranska. Pri tem bomo uporabili izračun asimptotične srednje kvadratične napake oz. MSE. V preostalih delih bomo konkretno uporabili priložene datoteke z meritvami, najprej da določimo numerične ocene cenilk za vsak eksperiment (torej vsako datoteko) posebej. Za vse izračune bomo tudi ocenili standardno napako in rezultate grafično prikazali. Na koncu bomo pridobljeni gostoti primerjali s histogramom meritev.

2.1 Cenilka za θ po metodi največjega verjetja

Denimo, da imamo n medseboj neodvisnih in enako porazdeljenih spremenljivk $X_i \ ; \ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ki so vse porazdeljene z Rayleighovo porazdelitvijo 2. Verjetje definiramo s predpisom

$$L(\theta|x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i|\theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta^2} \exp\big(-\frac{x_i^2}{2\theta^2}\big) \ ; \ x_1, \ldots, x_n > 0 \\ 0 \ ; \ \text{sicer} \end{cases}$$

Ker je lahko delo s tem produktom zahtevno, raje vse skupaj logaritmiramo in dobimo

$$l(\theta|x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln(\frac{x_i}{\theta^2}) - \frac{x_i^2}{2\theta^2} \ ; \ za \ x_1, \ldots, x_n > 0$$

Cenilka θ po metodi največjega verjetja je neka funkcija $h(X_1, \ldots, X_n)$ pri kateri $L(\theta|x_1, \ldots, x_n)$ doseže maksimum za vse $X_1, \ldots, X_n$. Logaritmiranje L ohrani ta ekstrem v smislu, da če bo L dosegel svoj maksimum v θ, bo tam svoj maksimum dosegel tudi l in obratno. Sedaj odvajamo l po θ in dobimo:

$$\frac{\partial l}{\partial \theta}(\theta|x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \big(\frac{-2 * \theta^2 * x_i}{\theta^3 * x_i} - \frac{-2 * x_i^2}{2 * \theta^3}\big) = \sum_{i=1}^{n} \big(\frac{x_i^2}{\theta^3} - \frac{2}{\theta}\big) = \sum_{i=1}^{n} \big(\frac{x_i^2}{\theta^3}\big) - \frac{2 * n}{\theta}$$

Da najdemo ekstrem moramo rešiti enačbo $\frac{\partial l}{\partial \theta}(\theta|x_1, \ldots, x_n) = 0$. Ko vanjo vstavimo, kar smo ravnokar poračunali zgoraj, dobimo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\theta^3} = \frac{2 * n}{\theta}$$

oziroma

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 2 * n * \theta^2$$

Od tod izrazimo θ^2 iz zgornje enakosti in rezultat korenimo, da dobimo θ. Velja:

$$\theta = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2 * n}}$$

Preveriti moramo še, da l v θ res doseže maksimum. Za to poračunamo drugi odvod l po θ:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2}(\theta|x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}(-3)\frac{x_i^2}{\theta^4} + \frac{2n}{\theta^2}$$

Sedaj v izraz vstavimo $\theta = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2*n}}$ in tako dobimo

$$\sum_{i=1}^{n}(-3)\frac{4n^2x_i^2}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} + \frac{4n^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{4n^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}(\frac{(-3)\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}+1) = (-2)\frac{4n^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} < 0$$

Ugotovili smo že, da ima verjetje l ekstrema v $+\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2n}}$ in $-\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2n}}$, sedaj pa vemo tudi, da sta oba ekstrema maksimuma. Za cenilko θ po metodi največjega verjetja izberemo koren s pozitivnim predznakom. Cenilka θ po metodi največjega verjetja je torej $\widehat{\theta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2*n}}$. Vrednost cenilke je odvisna od števila spremenljivk. Bolj primerna je torej oznaka $\widehat{\theta}_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2*n}}$.

2.2 Cenilka za θ po metodi momentov

Sedaj se obrnemo na metodo momentov. Denimo, da so $X_1,\ldots,X_n$ neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Da določimo cenilko za izbrane parametre po tej metodi, moramo najprej poračunati momente nizkih stopenj, torej $E\left[X^k\right]$, v odvisnosti od parametrov, ki jih želimo oceniti. Nato iz dobljenih enačb izrazimo parametre v odvisnosti od momentov. Cenilko za parametre dobimo tako, da v enačbi k-ti moment zamenjamo s povprečjem k-tih potenc $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k$. Ker v našem primeru skušamo oceniti samo en paramater, θ, načeloma zadošča če izračunamo samo prvi moment.

$$E\left[X\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|\theta)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\theta^2} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}\,dx$$

Uvedemo novo spremenljivko $u = \frac{x^2}{2\theta^2}$; $du = \frac{x}{\theta^2}\,dx$, torej je $dx = \frac{\theta^2}{x}du$. Naš integral nato postane:

$$\int_0^{\infty} xe^{-u}\,du = \int_0^{\infty} \sqrt{2u\theta^2}e^{-u}\,du = \theta\sqrt{2}\int_0^{\infty} u^{\frac{1}{2}}e^{-u}\,du$$

V integralu prepoznamo obliko gama funkcije in hitro ugotovimo, da je integral enak $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Sledi, da je pričakovana vrednost Rayleighove porazdelitve s parametrom θ enaka $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta$. Od tod izrazimo θ kot $\theta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}E\left[X\right]$. Cenilka θ po metodi momentov je torej $\widehat{\theta} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\bar{X} = \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^n X_i$. Tudi v tem primeru nam število spremenljivk vpliva na vrednost cenilke. Zato smo v resnici pridobili celo zaporedje cenilk $\widehat{\theta}_n$, tako kot v prejšnjem podpoglavju.

2.3 Asimptotični MSE cenilk

Srednja kvadratična napaka cenilke definirana s formulo $MSE(\widehat{\theta}|\theta) = E[(\widehat{\theta} - \theta)^2]$. Da izračunamo asimptotično MSE, najprej za fiksen n poračunamo MSE,

nato pa dobljeno limitiramo: $\lim_{n\mapsto\infty} MSE(\widehat{\theta}_n|\theta)$. Pri računanju nam tudi pomaga enakost $MSE(\widehat{\theta}|\theta) = Var(\widehat{\theta}) + Bias(\widehat{\theta}|\theta)^2$. Pri tem se pristranskost oz »Bias« izračuna po formuli $Bias(\widehat{\theta}|\theta) = E[\widehat{\theta}] - \theta$.

2.3.1 MSE cenilke po metodi največjega verjetja

Začnimo s cenilko, ki smo jo pridobili po metodi največjega verjetja. Najprej za fiksen n poračunamo pristranskost. Pri tem nam pomaga informacija, ki smo jo pridobili iz vira [2], da ima $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ gama porazdelitev $\Gamma(n, \frac{1}{2*\theta^2})$.

$$E[\widehat{\theta}_n] = E[\frac{1}{\sqrt{2n}}\sqrt{Y}] = \frac{1}{\sqrt{2n}}E[\sqrt{Y}]$$

Poračunajmo sedaj $E[\sqrt{Y}]$.

$$E[\sqrt{Y}] = \int_0^\infty \sqrt{y}\frac{(\frac{1}{2\theta^2})^n}{\Gamma(n)}y^{n-1}e^{-\frac{y}{2\theta^2}}\,dy = \int_0^\infty (\frac{y}{2\theta^2})^n\frac{1}{\Gamma(n)\sqrt{y}}e^{-\frac{y}{2\theta^2}}\,dy$$

Vstavimo novo spremenljivko $u = \frac{y}{2\theta^2}$; $du = \frac{1}{2\theta^2}\,dy$. Pri tem še opazimo, da je $\sqrt{y} = \sqrt{2\theta^2 u}$. Sedaj vstavimo to v integral.

$$E[\sqrt{Y}] = \int_0^\infty u^n\frac{1}{\Gamma(n)\sqrt{2\theta^2}\sqrt{u}}e^{-u}2\theta^2\,du = \frac{\sqrt{2\theta^2}}{\Gamma(n)}\int_0^\infty u^{n-\frac{1}{2}}e^{-u}\,du = \sqrt{2\theta^2}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n)}$$

Sledi, da je $E[\widehat{\theta}_n] = \frac{\theta\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{n}\Gamma(n)}$ in potem je $\widehat{\theta}_n$ pristranska cenilka, saj je

$$E[\widehat{\theta}_n] - \theta = \theta(\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{n}\Gamma(n)} - 1) \neq 0$$

za $\theta \neq 0$. Cenilko lahko popravimo na nepristransko. Nepristranska cenilka je tako

$$\theta_n^+ = \frac{\Gamma(n)\sqrt{n}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\widehat{\theta}_n = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\sqrt{2}}\sqrt{Y}$$

Uspelo nam je torej izračunati pristranskost naše cenilke $\widehat{\theta}_n$:

$$Bias(\widehat{\theta}_n) = \theta(\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{n}\Gamma(n)} - 1)$$

Ko poračunamo limito $\lim_{n\mapsto\infty}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{n}\Gamma(n)} = 1$, vidimo, da je $\widehat{\theta}_n$ asimptotsko nepristranska, saj sledi $\lim_{n\mapsto\infty} Bias(\widehat{\theta}_n) = 0$. Poračunati moramo še varianco cenilke $Var(\widehat{\theta}_n) = E[\widehat{\theta}_n^2] - E[\widehat{\theta}_n]^2 = E[\frac{1}{2n}Y] - E[\widehat{\theta}_n]^2$. Za Porazdelitev Y vemo, da je $\Gamma(n, \frac{1}{2\theta^2})$, tako da hitro pridobimo $E[\frac{1}{2n}Y] = \frac{1}{2n}\frac{n}{\frac{1}{2\theta^2}} = \frac{1}{2n}2n\theta^2 = \theta^2$. Sledi

$$Var(\widehat{\theta}_n) = \theta^2(1 - \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})^2}{n\Gamma(n)^2})$$

Ko to varianco limitiramo z $n \mapsto \infty$, gre izraz v oklepaju proti 0, torej je $\lim_{n\mapsto\infty} Var(\widehat{\theta}_n) = 0$. Posledično je asimptotična $MSE(\widehat{\theta}_n)$ enaka 0, torej $\lim_{n\mapsto\infty} MSE(\widehat{\theta}_n) = 0$.

2.3.2 MSE cenilke po metodi momentov

Sedaj storimo enako še za cenilko, ki smo jo pridobili po metodi momentov $\widehat{\theta}_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\bar{X}$. Najprej poračunajmo njeno pričakovano vrednost.

$$E[\widehat{\theta}_n] = \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E[X] = \theta$$

Od tod lahko že sklepamo, da je $\widehat{\theta}_n$ nepristranska cenilka. Sledi, da je $MSE(\widehat{\theta}_n) = Var(\widehat{\theta}_n)$. Poračunajmo sedaj še varianco in pri tem upoštevamo, da so X_i medseboj neodvisne in enako porazdeljene.

$$Var(\widehat{\theta}_n) = \frac{2}{n^2\pi} Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{2}{n^2\pi} \sum_{i=1}^{n} Var(x_i) = \frac{2}{n\pi} Var(X)$$

Na tej točki se skličemo na varianco rayleighove porazdelitve s parametrom θ^2, ki je enaka $\frac{4-\pi}{2}\theta^2$. Sledi, da je $Var(\widehat{\theta}_n) = \frac{2}{n\pi} * \frac{4-\pi}{2}\theta^2 = \frac{(4-\pi)}{n\pi}\theta^2$, ki konvergira proti 0 ko pošljemo $n \mapsto \infty$. Posledično je $\lim_{n\mapsto\infty} MSE(\widehat{\theta}_n) = \lim_{n\mapsto\infty} Var(\widehat{\theta}_n) = 0$.

Tako prva kot druga cenilka imata torej asimptotično srednjo kvadratično napako 0. Kljub temu sklepamo, da je cenilka, ki smo jo pridobili po metodi momentov, boljša od cenilke, ki smo jo pridobili po metodi največjega verjetja, saj je cenilka po metodi momentov zraven še nepristranska.

2.4 Ševilska ocena prve cenilke

Števílsko oceno cenilke za vsak eksperiment izvedemo s pomočjo skripte *SlucajniSprehodiMNV.R*. Ta ob zagonu poračuna številske vrednosti cenilke, oceni standardno napako vsake cenilke ter izriše pripadajoče grafe gostot za vsak eksperiment in graf na katerem so prikazani vsi trije grafi. Pri tem standardno napako $SE(\widehat{\theta}_n)$ cenilke pridobljene po metodi največjega verjetja izračunamo kot koren njene variance. Velja torej, da je $SE(\widehat{\theta}_n) = \theta\sqrt{1 - \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})^2}{n\Gamma(n)^2}}$. Prej omenjena skripta ocenjene vrednosti cenilk in standardnih napak izpiše v konzolo, so pa zbrane tudi v spodnji tabeli, ki pa vsebuje tudi na dve decimalki zaokrožene vrednosti standardnih napak.

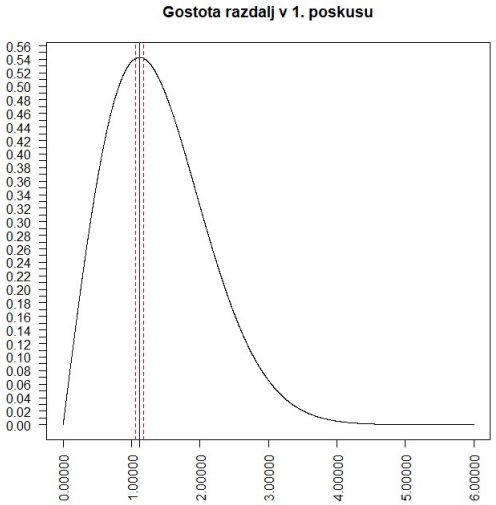
Eksperiment	kratki	srednji	dolgi
Vrednost $\widehat{\theta}$	1,117394	2,075983	3,324422
Ocena SE	0,05728327	0,0658959	0,1451586

Tabela 6: *Numerične vrednosti MNV cenilke in standardne napake po eksperimentih*

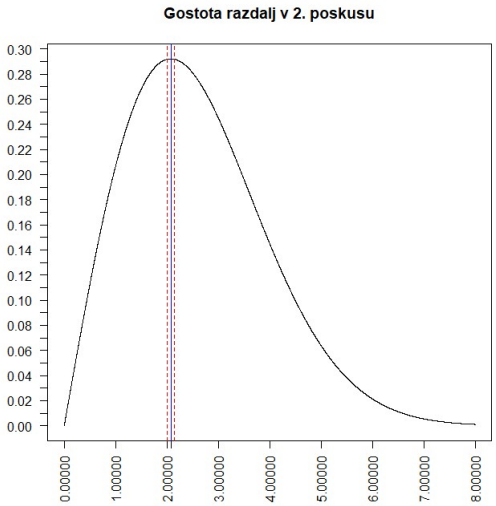
Izračun standardne napake cenilke je neizogiben in pomemben del vsake statistične analize podatkov. Razlog za to je, ker nam služi kot merilo, kako dobro se naša cenilka prilega dejanskemu parametru, ki ga cenimo glede na dane podatke. Če je standardna napaka velika, vrednosti cenilke močno odstopajo od pričakovane vrednosti cenilke, ki je, v primeru ko je cenilka nepristranska, ravno enaka populacijskemu parametru, ki ga ocenjuje. Iz tega razloga, se načeloma raje dela z nepristranskimi cenilkami. Vseeno enaka intuicija velja tudi za pristranske spremenljivke - večja kot je standardna napaka na vzorcu,

bolj odstopa cenilka od dejanske vrednosti parametra, ki ga ocenjujemo, za celotno populacijo in manjša kot je standardna napaka, manj cenilka odstopa od dejanske vrednosti parametra.

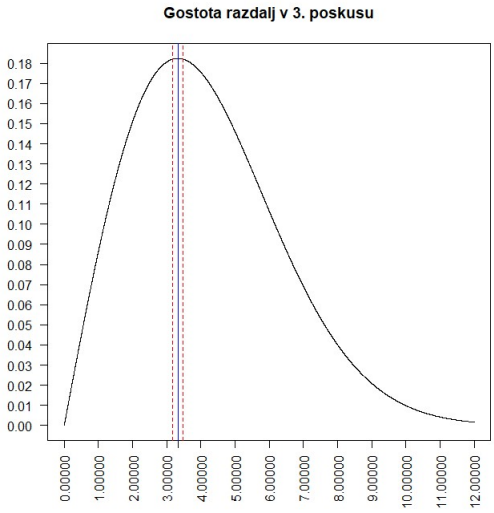
Kot je bilo že prej omenjeno, skripta *SlucajniSprehodiMNV.R* tudi nariše grafe verjetij, ki pripadajo izračunanim ocenam paramatra θ. Na teh grafih je z zeleno črto označena izračunana vrednost θ, okoli nje pa je z rdečima črtkanima premicama označena pripadajoča SE-okolica. Skripta sicer grafe izriše enega zraven drugega, tukaj pa bodo priloženi vsak posebej.



Slika 5: *Verjetje za oceno cenilke θ, pridobljene po metodi največjega verjetja, v prvem poskusu*

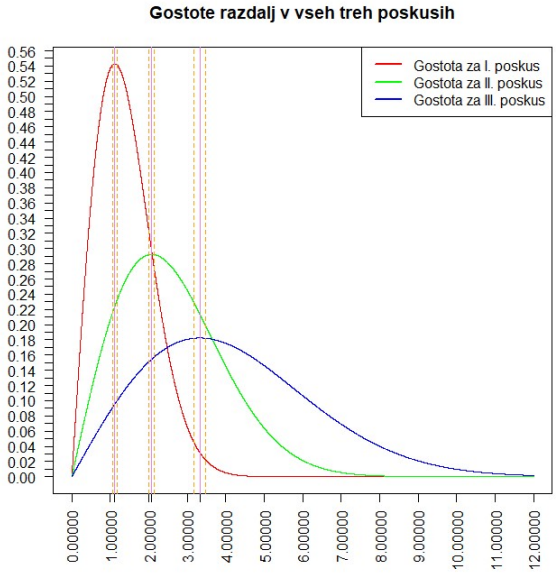


Slika 6: *Verjetje za oceno cenilke θ, pridobljene po metodi največjega verjetja, v drugem poskusu*



Slika 7: *Verjetje za oceno cenilke θ, pridobljene po metodi največjega verjetja, v tretjem poskusu*

Skripta dodatno vrne graf, na katerem so narisane vse tri zgoraj prikazane gostote, skupaj z oznakami njihovih pripadajočih vrednosti cenilk $\widehat{\theta}$ in pripadajočimi SE-okolicami. Namen tega zadnjega grafa je prikazati, kako izgledajo gostote, ko jih postavimo v isti koordinatni sistem in na podlagi tega omogočiti primerjavo.



Slika 8: *Verjetja za vse ocene cenilke θ, pridobljene po metodi največjega verjetja*

Na vsakem grafu verjetja vidimo, da SE-okolica pripadajoče izračunane cenilke vsebuje maksimum verjetja, kar nas ne preseneti, saj je to smiselno za

cenilko pridobljeno po metodi največjega verjetja. Dodatno opazimo, da verjetja postajajo bolj položna z zaporednimi poskusi. Razlog za to je naraščanje velikosti posameznih meritev v zaporednih poskusih kar poveča numerično vrednost cenilke. Obnašanje grafov gostot je torej popolnoma normalno, saj velja, da večji kot je parameter θ, bolj položen bo graf gostote Rayleighove porazdelitve za ta parameter. Zaradi razmeroma majhne velikosti standardnih napak lahko sklepamo, da je cenilka $\widehat{\theta}$ pridobljena po metodi največjega verjetna razmeroma dobra cenilka za parameter θ. Seveda jo lahko še izboljšamo, tako da jo popravimo v nepristransko cenilko $\widehat{\theta}^{+}$, ki smo jo izračunali v podpodpoglavju 2.3.1.

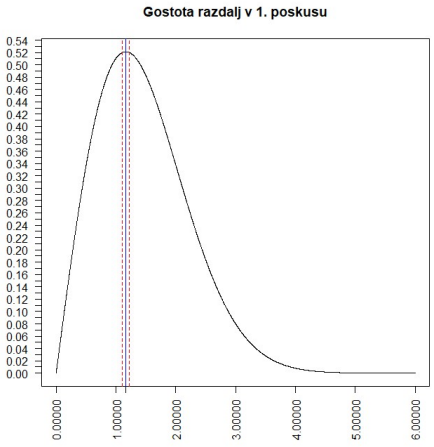
2.5 Številska ocena druge cenilke

Tako kot v poglavju 2.4, lahko tudi za cenilko pridobljeno po metodi momentov stnandardno napako poračunamo kar kot koren variance: $SE(\widehat{\theta}_n) = \sqrt{Var(\widehat{\theta}_n)} = \sqrt{\frac{(4-\pi)}{n\pi}\theta^2} = \sqrt{\frac{(4-\pi)}{n\pi}}\theta$. Ker θ seveda ne poznamo, v izraz vstavimo cenilko $\widehat{\theta}_n$. Tako je naša formula na koncu $SE(\widehat{\theta}_n) = \sqrt{\frac{(4-\pi)}{n\pi}}\widehat{\theta}_n$. Skripta *SlucajniSprehodiMM.R* poračuna oceno cenilke, ki smo jo pridobili po metodi momentov ter standardno napako s pomočjo prej navedene formule. Vrednosti so navedene v spodnji tabeli skupaj z na dve decimalki zaokroženimi vrednostmi standardnih napak.

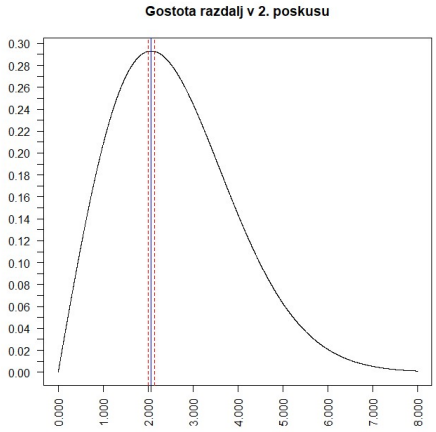
Eksperiment	kratki	srednji	dolgi
Vrednost θ	1,163652	2,068998	3,412388
Ocena SE	0,06240695	0,06867617	0,1558456

Tabela 7: *Numerične vrednosti cenilke pridobljene po metodi momentov in standardne napake po eksperimentih*

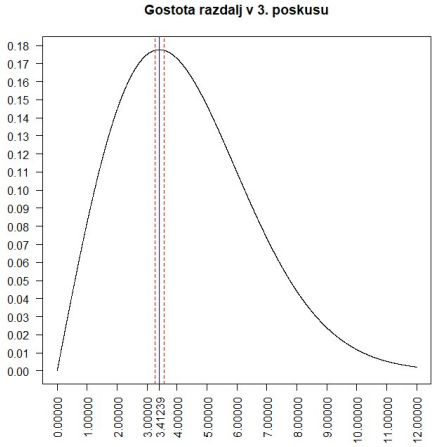
Poleg tega skripta tudi izriše graf gostote za ocenjeno cenilko za vsak poskus. Te grafe izriše enega zraven drugega, spodaj pa so grafi prikazani posebej.



Slika 9: *Verjetje za oceno cenilke θ, pridobljene po metodi momentov, v prvem poskusu*



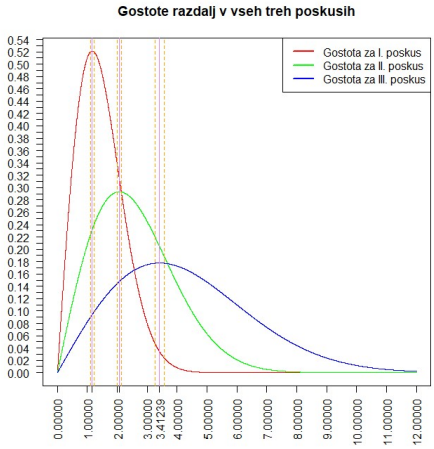
Slika 10: *Verjetje za oceno cenilke θ, pridobljene po metodi momentov, v drugem poskusu*



Slika 11: *Verjetje za oceno cenilke θ, pridobljene po metodi momentov, v tretjem poskusu*

Tudi tukaj pridemo do podobnih sklepov, kot v podpoglavju 2.4 - SE-okolica cenilke vsebuje maksimum gostote in je razmeroma majhna zahvaljujoč majhni standardni napaki cenilke. Standardne napake za to cenilko so v resnici presenetljivo blizu vrednostim standardnih napak pri cenilki pridobljeni z metodo največjega verjetja. V primeru, ko napake zaokrožimo na dve decimalki natančno se razlika pojavi samo v zadnjem poskusu, kjer znaša 0,01. To nam pove, da je tudi cenilka, ki smo jo pridobili po metodi momentov, razmeroma dobra alternativa, še posebej zato, ker jo je veliko lažje izračunati.

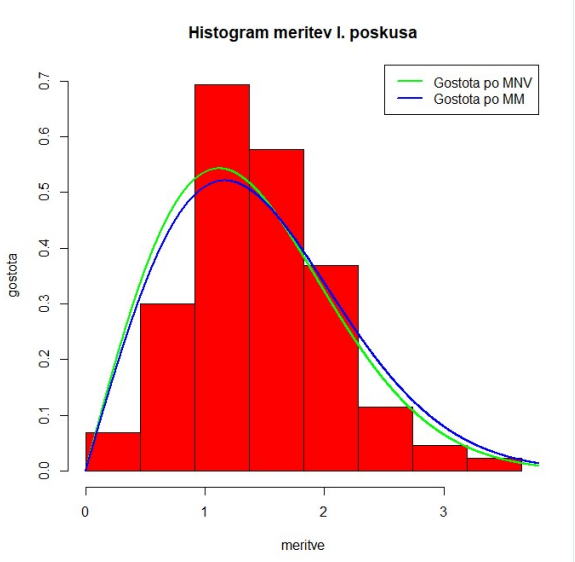
Dodatno je spodaj ponovno priložen graf na katerem so narisane vse tri gostote, za vizualno primerjavo.



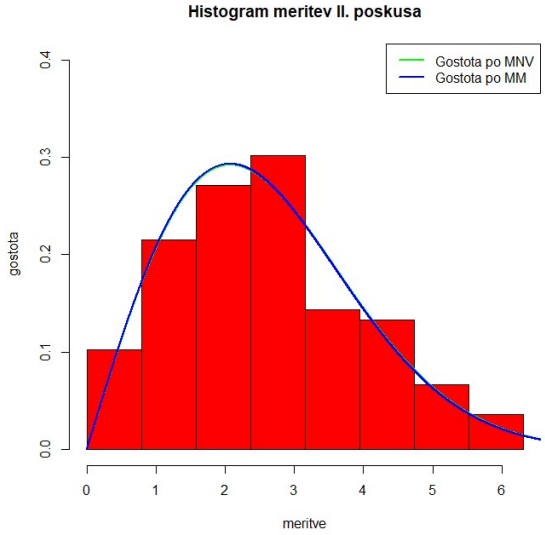
Slika 12: *Verjetja za vse ocene cenilke θ, pridobljene po metodi momentov*

2.6 Histogram meritev in grafi gostot cenilk

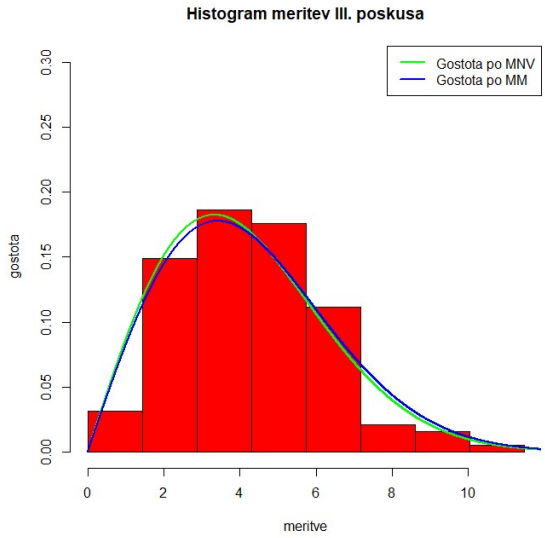
Da se dokončno prepričamo, da sta izračunani cenilki dobri, bomo za vsak poskus narisali histogram meritev in nanj dorisali gostoti za obe cenilki. Pri določanju širine razredov za histograme bomo uporabili modificirano Freedman-Diaconisovo pravilo, po katerem naj bi širina vsakega razreda bila približno $\frac{2{,}6IQR}{\sqrt[3]{n}}$, kjer je n število podatkov, IQR pa njihov interkvartilni razmik. Skripta *SlucajniSprehodiHIST.R* poračuna te širine za vsak eksperiment ter nato izriše pripadajoče histograme skupaj z gostotama obeh cenilki na vrhu. Skripta te grafe tudi izriše, so pa tudi prikazani spodaj.



Slika 13: *Histogram meritev v prvem poskusu skupaj z gostotama za pripadajoči cenilki.*



Slika 14: *Histogram meritev v drugem poskusu skupaj z gostotama za pripadajoči cenilki.*

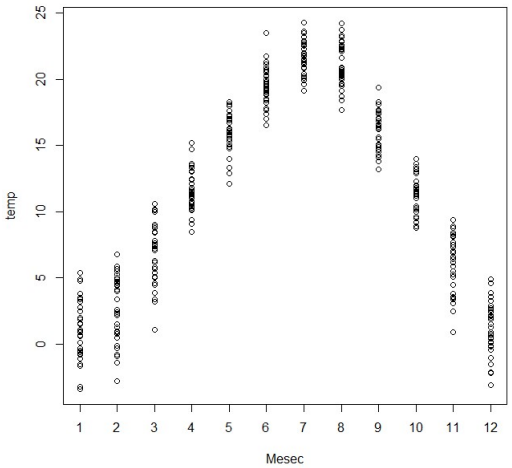


Slika 15: *Histogram meritev v tretjem poskusu skupaj z gostotama za pripadajoči cenilki.*

Vidimo lahko, da se na vsakem grafu obe gostoti medseboj, sicer z manjšimi odstopanji, razmeroma dobro prilegata. V primeru drugega poskusa, se v resnici skoraj popolnoma prekrivata. Tudi s histogrami je podobno - obe gostoti se prilegata obliki, ki jo tvorijo stolpci historgrama. Lahko torej sklepamo, da bi z večanjem vzorcev proti neskončnosti histogram »konvergiral« proti grafu gostote. Dokončno torej zatrdimo, da sta obe cenilki res dobri.

3 Temperature

V datoteki *Temp_LJ.csv* imamo podane povprečne mesečne temperature od leta 1986 do 2020. Glede na dane podatke bi želeli uporabiti model, ki bo čim bolje napovedal temperature v prihodnosti. Predlagana sta nam dva modela. Model A vključuje linearen trend in sinusno nihanje s periodo enega leta, model B pa vključuje linearen trend in člene, ki vsak spreminja temperaturo za svoj mesec. S pomočjo programskega jezika R narišemo graf temperatur v odvisnosti od meseca. Koda za izris tega grafa se nahaja v skripti *Temperature.R*.



Slika 16: *Razpršen graf povprečnih mesečnih temperatur glede na mesec.*

Opazimo, da se v podatkih res skriva nek trend, zato je seveda smiselno, da premislimo kateri model bi bil za to najbolj primeren. Seveda sta glavna kandidata modela A in B. Le ta bosta predmet obravnave v nadaljevanju tega poglavja. V prvem podpoglavju bomo preizkusili model A znotraj modela B, v drugem pa bomo poračunali Akikakijevo informacijo za oba modela.

3.1 Preizkus modela A znotraj modela B

gsdfgsdgsdfg

3.2 Akikakejeva informacija modelov

gsdfdgsdg

Literatura

[1] John Rice, *Mathematical Statistics & Data Analysis*, Duxbury, Berkeley, 2007.

[2] *Rayleighjeva porazdelitev*, v: Wikipedia, Prosta enciklopedija, [ogled 14. 7. 2022], dostopno na `https://sl.wikipedia.org/wiki/Rayleighjeva_porazdelitev`.