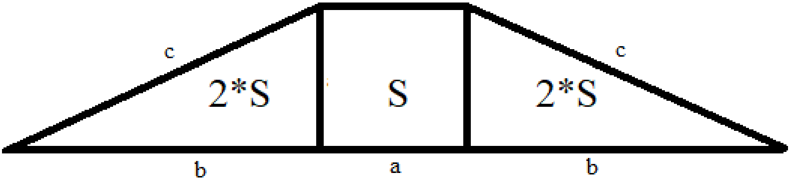
Fermatov poslednji izrek za n=4 in sorodni problemi

Jimmy Zakeršnik

Oddelek za Matematiko
Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Predstavitev seminarske naloge, 16. maj 2019, Ljubljana

Motivacija



Slika: Skica modela, ki ga želimo sestaviti. a, b in c so pozitivna cela števila, S pa površina kvadrata.

Izrek (Fermatov poslednji izrek)

Naj bo n celo število, ki je (strogo) večje od 2 ($n > 2$). Tedaj enačba $x^n + y^n = z^n$ nima netrivialnih celoštevilskih rešitev $x, y, z \in \mathbb{Z}$

Izrek (Fermatov poslednji izrek)

Naj bo n celo število, ki je (strogo) večje od 2 ($n > 2$). Tedaj enačba $x^n + y^n = z^n$ nima netrivialnih celoštevilskih rešitev $x, y, z \in \mathbb{Z}$

Nas zanima poseben primer $n = 4$

Metoda neskončnega spusta

Pomnimo:

Po Peanovih aksiomih, ima množica pozitivnih celih števil $\mathbb{Z}^+$ (oz. naravnih števil $\mathbb{N}$) najmanjši element. Drugače povedano, $\mathbb{Z}^+$ je navzdol omejena množica.

Metoda neskončnega spusta

Najpogosteje jo uporabljamo da dokažemo, da neka enačba nima celoštevilskih rešitev:

- Predpostavimo, da obstaja neka celoštevilska rešitev a_1,

Metoda neskončnega spusta

Najpogosteje jo uporabljamo da dokažemo, da neka enačba nima celoštevilskih rešitev:

- Predpostavimo, da obstaja neka celoštevilska rešitev a_1,
- pokažemo, da za predpostavljeno rešitev obstaja še ena celoštevilska rešitev a_2,

Metoda neskončnega spusta

Najpogosteje jo uporabljamo da dokažemo, da neka enačba nima celoštevilskih rešitev:

- Predpostavimo, da obstaja neka celoštevilska rešitev a_1,
- pokažemo, da za predpostavljeno rešitev obstaja še ena celoštevilska rešitev a_2,
- postopek ponavljamo in pridobljene rešitve razvrstimo po velikosti s pomočjo preslikave $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$ (npr. $f : x \mapsto |x|$),

Metoda neskončnega spusta

Najpogosteje jo uporabljamo da dokažemo, da neka enačba nima celoštevilskih rešitev:

- Predpostavimo, da obstaja neka celoštevilska rešitev a_1,
- pokažemo, da za predpostavljeno rešitev obstaja še ena celoštevilska rešitev a_2,
- postopek ponavljamo in pridobljene rešitve razvrstimo po velikosti s pomočjo preslikave $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$ (npr. $f : x \mapsto |x|$),
- dobimo neskončno padajočo verigo,

Metoda neskončnega spusta

Najpogosteje jo uporabljamo da dokažemo, da neka enačba nima celoštevilskih rešitev:

- Predpostavimo, da obstaja neka celoštevilska rešitev a_1,
- pokažemo, da za predpostavljeno rešitev obstaja še ena celoštevilska rešitev a_2,
- postopek ponavljamo in pridobljene rešitve razvrstimo po velikosti s pomočjo preslikave $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$ (npr. $f : x \mapsto |x|$),
- dobimo neskončno padajočo verigo,

$$f(a_1) > f(a_2) > f(a_3) > f(a_4) > \dots$$

Metoda neskončnega spusta

Najpogosteje jo uporabljamo da dokažemo, da neka enačba nima celoštevilskih rešitev:

- Predpostavimo, da obstaja neka celoštevilska rešitev a_1,
- pokažemo, da za predpostavljeno rešitev obstaja še ena celoštevilska rešitev a_2,
- postopek ponavljamo in pridobljene rešitve razvrstimo po velikosti s pomočjo preslikave $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$ (npr. $f : x \mapsto |x|$),
- dobimo neskončno padajočo verigo,

$$f(a_1) > f(a_2) > f(a_3) > f(a_4) > \dots$$

- protislovje z dejstvom, da so $\mathbb{Z}^+$ navzdol omejena.

Primeri uporabe metode

Izrek:

Ne obstajajo takšna cela števila x, y in z, ki netrivialno rešijo enačbo $x^3 + py^3 + p^2z^3 = 0$, kjer je p poljubno praštevilo.

Primeri uporabe metode

Izrek:

Ne obstajajo takšna cela števila x, y in z, ki netrivialno rešijo enačbo $x^3 + py^3 + p^2z^3 = 0$, kjer je p poljubno praštevilo.

Izrek:

Naj bo d celo število, ki ni popolni kvadrat (torej ne obstaja takšno celo število k, da bi veljalo $d = k^2$. Potem je $\sqrt{d}$ iracionalno število.

Fermatov poslednji izrek za $n = 4$

Definicija:

Pitagorejska trojica je sestavljena iz treh celih števil $a, b, c \in \mathbb{Z}$, za katera velja $a^2 + b^2 = c^2$. Če so a, b in c paroma tuja si števila, pravimo, da je trojica **primitivna**. Pitagorejsko torjico števil a, b in c označimo z (a, b, c).

Fermatov poslednji izrek za $n = 4$

Definicija:

Pitagorejska trojica je sestavljena iz treh celih števil $a, b, c \in \mathbb{Z}$, za katera velja $a^2 + b^2 = c^2$. Če so a, b in c paroma tuja si števila, pravimo, da je trojica **primitivna**. Pitagorejsko torjico števil a, b in c označimo z (a, b, c).

Izrek:

Naj bo (a, b, c) Pitagorejska trojica in d neko pozitivno celo število. Potem je ploščina trojici pripadajočega pravokotnega trikotnika enaka dvakratniku ploščine kvadrata s stranico dolžine d natanko tedaj, ko obstaja netrivialna celoštevilska rešitev enačbe $x^4 + y^4 = z^2$

Definicija:

Primitivna rešitev, za enačbo $a^2 + b^2 = c^2$, kjer so a, b in c pozitivna cela števila in b sodo (brez škode za splošnost) se glasi:

$$a = k^2 - l^2, b = 2kl, c = k^2 + l^2,$$

kjer je k večji od l ter sta si k in l tuji števili različnih parnosti ($gcd(k, l) = 1, k \not\equiv l \ mod \ 2$)

Definicija:

Primitivna rešitev, za enačbo $a^2 + b^2 = c^2$, kjer so a, b in c pozitivna cela števila in b sodo (brez škode za splošnost) se glasi:

$$a = k^2 - l^2, b = 2kl, c = k^2 + l^2,$$

kjer je k večji od l ter sta si k in l tuji števili različnih parnosti ($gcd(k, l) = 1, k \not\equiv l \; mod \; 2$)

Izrek:

Enačba $x^4 + y^4 = z^2$ ni rešljiva v pozitivnih celih številih.

Nekaj posledic

Posledica:

Za vsako trojico racionalnih števil (x, y, z), ki rešijo enačbo $x^4 + y^4 = z^2$ velja, da je bodisi x, bodisi y enak 0.

Nekaj posledic

Posledica:

Za vsako trojico racionalnih števil (x, y, z), ki rešijo enačbo $x^4 + y^4 = z^2$ velja, da je bodisi x, bodisi y enak 0.

Posledica:

Edini racionalni rešitve enačbe $y^2 = x^4 + 1$ sta $(0, \pm 1)$.

Nekaj posledic

Posledica:

Za vsako trojico racionalnih števil (x, y, z), ki rešijo enačbo $x^4 + y^4 = z^2$ velja, da je bodisi x, bodisi y enak 0.

Posledica:

Edini racionalni rešitve enačbe $y^2 = x^4 + 1$ sta $(0, \pm 1)$.

Posledica

Edini racionalni rešitvi enačbe $2y^2 = x^4 - 1$ sta $(\pm 1; 0)$.

Nekaj posledic

Posledica:

Za vsako trojico racionalnih števil (x, y, z), ki rešijo enačbo $x^4 + y^4 = z^2$ velja, da je bodisi x, bodisi y enak 0.

Posledica:

Edini racionalni rešitve enačbe $y^2 = x^4 + 1$ sta $(0, \pm 1)$.

Posledica

Edini racionalni rešitvi enačbe $2y^2 = x^4 - 1$ sta $(\pm 1; 0)$.

Posledica

Edina racionalna rešitev enačbe $y^2 = x^3 + x$ je $(0, 0)$.

Viri

- K. Conrad, *Proofs by Descent*, http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/ugradnumthy/descent.pdf
- *Pythagorean triple*, https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_triple
- *Proof by infinite descent*, https://en.wikipedia.org/wiki/Proof_by_infinite_descent
- *Well-ordering principle*, https://en.wikipedia.org/wiki/Well-ordering_principle
- *Peano axioms*, https://en.wikipedia.org/wiki/Peano_axioms