Analiza IV

Egon Zakrajšek

24. maj 1999

Kazalo

Predgovor

Ta učbenik pokriva predmet Analiza IV, kot sem ga predaval študentom četrtega letnika matematike v letih 1994/95, 1996/97 in 1998/99.

Učbenik predpostavlja razumno znanje Analize I, Analize II, Analize III in Algebre I ter rudimentarno poznavanje funkcionalne analize, v poglavju 1 pa še nekaj kompleksne analize.

Poglavje 1 obravnava obnašanje funkcij, definiranih z integralom, za velike vrednosti argumenta in podaja nekaj izrekov, ki omogočajo konstrukcijo asimptotskih vrst. Priloženih je nekaj (netrivialnih) primerov.

Poglavje 2 obravnava Fourierjevo transformacijo. Fourierjeva tranformacija je nadvse pomembno orodje v kvantni mehaniki, sicer pa predstavlja lep primer unitarnega operatorja v prostoru $L^2(\mathbb{R})$.

V poglavju 3 obravnavamo vrsto standardnih nalog matematične fizike, da bi si pridobili občutek za tovrstno matematično modeliranje in tako zvedeli, od kod prihajajo takšne parcialne diferencialne enačbe. Poglavje 4 obravnava precej podrobno parcialne diferencialne enačbe prvega reda, poglavje 5 pa (kvazilinearne) parcialne diferencialne enačbe drugega reda.

Konec dokaza je označen z $\blacksquare$, konec primera z $\blacktriangle$.

Egon Zakrajšek
Ljubljana, Slovenija
Maj 1999

Poglavje 1

Asimptotske vrste

1.1 Asimptotske vrste

Analitični funkciji f znamo včasih prirediti formalno vrsto

$$a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots, \tag{1.1}$$

ki morda ni konvergentna za noben z, velja pa naslednje. Naj bo

$$S_n(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}$$

njena delna vsota in

$$R_n(z) = f(z) - S_n(z)$$

ostanek. Če v nekem sektorju

$$\Delta = \{z; z \in \mathbb{C},\ \alpha \leq \arg z <= \beta\}$$

za *vsak* n velja

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \Delta}} z^n R_n(z) = 0, \tag{1.2}$$

pravimo, da je (1.1) *asimptotska vrsta* za f in pišemo

$$f(z) \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots,\ \ z \to \infty,\ \ z \in \Delta.$$

V zvezi z asimptotskimi vrstami uporabljamo priročna simbola $\mathcal{O}$ in o. Če sta f in g dve funkciji, definirani na sektorju Δ, in eksistirata konstanti R in A, da velja

$$|z| \geq R, \quad z \in \Delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \leq A,$$

tedaj pišemo

$$f(z) = \mathcal{O}[g(z)], \quad z \to \infty, \quad z \in \Delta.$$

Če pa velja

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \Delta}} \frac{f(z)}{g(z)} = 0,$$

pišemo

$$f(z) = o[g(z)], \quad z \to \infty, \quad z \in \Delta.$$

V definicijah simbolov $\mathcal{O}$ in o je g sicer poljubna funkcija, v uporabi pa bo (skoraj) vedno $g(z) = z^n$.

V vsakdanjem življenju pri uporabi simbolov $\mathcal{O}$ in o pogosto opuščamo navedbo sektorja (Δ), če je iz konteksta jasno, da je to, na primer, $\arg z = 0$, in navedbo limite, če je iz konteksta razvidno, da je to na primer $z \to \infty$. Tako pogosto rečemo, da terja LU razcep matrike reda n $\mathcal{O}(n^3)$ operacij, pri tem pa implicitno mislimo, da to velja pri pogojih $n \to \infty$ in $n \in \mathbb{N}$, torej, $\arg n = 0$.

Iz definicije asimptotske vrste (1.2) sledi

$$R_n(z) = o(z^{-n}), \quad z \to \infty, \quad z \in \Delta. \tag{1.3}$$

Dalje,

$$R_n(z) = \frac{a_{n+1}}{z^{n+1}} + R_{n+1}(z) = \frac{a_{n+1}}{z^{n+1}} + o(z^{-n-1}), \quad z \to \infty, \quad z \in \Delta$$

in zato

$$R_n(z) = \mathcal{O}(z^{-n-1}), \quad z \to \infty, \quad z \in \Delta.$$

Izrek 1.1 *Če asimptotska vrsta za f obstaja, je (v danem sektorju Δ) ena sama.*

Dokaz. Iz (1.3) sledi

$$\begin{aligned}
f(z) &= a_0 + o(1), \\
a_0 &= \lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \Delta}} f(z), \\
f(z) &= a_0 + \frac{a_1}{z} + o(z^{-1}), \\
z[f(z) - a_0] &= a_1 + z o(z^{-1}) = a_1 + o(1), \\
a_1 &= \lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \Delta}} z[f(z) - a_0]
\end{aligned}$$

in splošno

$$a_n = \lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \Delta}} z^n \left[f(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} - \frac{a_2}{z^2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} \right].$$

■

Naj bo sedaj $a > 0$ neko število in

$$f(z) = e^{-az}$$

ter

$$\Delta = \{z; \quad z \in \mathbb{C}, \quad |\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta, \quad \delta > 0\}. \tag{1.4}$$

Ker je

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \Delta}} z^n f(z) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

je

$$f(z) \sim 0, \quad z \to \infty, \quad z \in \Delta.$$

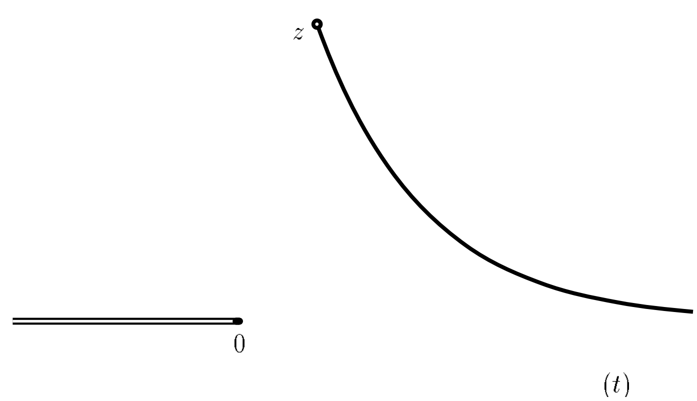
Posledica 1.1 *Če je f neka funkcija, ki ima v sektorju (1.4) asimptotsko vrsto, ima funcija $z \to f(z) + e^{-az}$ v sektorju (1.4) isto asimptotsko vrsto. Asimptotska vrsta* ne *določa funkcije enolično.*

1.2 Eksponentni integral

Najpreprostejši primer prave, netrivialne, asimptotske vrste ima funkcija

$$E_1(z) := \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

Da ne bo težav z večličnostjo, naj bosta ravnini (z) in (t) prerezani po negativni realni osi (glej sliko 1.1).



Slika 1.1: Integracijska pot za eksponentni integral

Integriranje po delih nam dá za $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} E_n(z) &:= \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t^n}\,dt = \\ &= -\left.\frac{e^{-t}}{t^n}\right|_{t=z}^{\infty} - n\int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+1}}\,dt = \\ &= \frac{e^{-z}}{z^n} - nE_{n+1}(z). \end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned} E_1(z) &= \frac{e^{-z}}{z} - \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt = \\ &= \frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-z}}{z^2} + 2!\int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t^3}\,dt = \cdots = \\ &= \frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-z}}{z^2} + \cdots + (-1)^n n!\frac{e^{-z}}{z^{n+1}} + (-1)^{n+1}(n+1)!\int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+2}}\,dt, \end{aligned}$$

ali

$$f(z) := ze^z E_1(z) = 1 - \frac{1!}{z} + \frac{2!}{z^2} + \cdots + (-1)^n\frac{n!}{z^n} + R_n(z),$$

kjer je

$$R_n(z) = (-1)^{n+1}(n+1)!ze^z\int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+2}}\,dt.$$

Izberimo $z \in \Delta$, glej (1.4). Potem lahko integriramo kar po vzporednici z realno osjo

$$t = z + \xi, \qquad \xi \geq 0$$

in je

$$R_n(z) = (-1)^{n+1}(n+1)!z\int_0^\infty \frac{e^{-\xi}}{(\xi+z)^{n+2}}\,d\xi.$$

Ker je $z \in \Delta$, pri $\xi \geq 0$ velja

$$|\xi + z| \geq |z|$$

in je

$$|R_n(z)| \leq (n+1)!|z|^{-n-1}\int_0^\infty e^{-\xi}\,d\xi = \frac{(n+1)!}{|z|^{n+1}}.$$

Zato je

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \Delta}} z^n R_n(z) = 0$$

in sledi

$$E_1(z) \sim \frac{e^{-z}}{z}\left[1 - \frac{1!}{z} + \frac{2!}{z^2} - \frac{3!}{z^3} + \cdots\right], \quad z \to \infty, \quad |\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta, \quad \delta > 0.$$

1.3 Laplaceov razvoj

Izrek 1.2 *Naj bo integral*

$$F(z) = \int_{\mathcal{C}} e^{zf(t)} g(t)\, dt \tag{1.5}$$

pri $z = z_0 = x_0 + iy_0$ *absolutno konvergenten, funkcija* f *pa naj bo na integracijski poti* $\mathcal{C}$ *realna in navzgor omejena*

$$f(t) \le a, \qquad t \in \mathcal{C}.$$

Tedaj pri $\Re z \ge x_0$ *integral (1.5) absolutno konvergira in obstaja konstanta* M*, da je*

$$|F(z)| \le M e^{a \Re z}.$$

Dokaz. Po pogojih izreka obstaja konstanta

$$M_0 = \int_{\mathcal{C}} \left| e^{z_0 f(t)} g(t) \right| ds = \int_{\mathcal{C}} e^{x_0 f(t)} |g(t)|\, ds.$$

Pri $z = x + iy$, $x \ge x_0$, velja

$$\begin{aligned}
|F(z)| &\le \int_{\mathcal{C}} e^{xf(t)} |g(t)|\, ds = \\
&= \int_{\mathcal{C}} e^{x_0 f(t)} e^{(x-x_0)f(t)} |g(t)|\, ds \le \\
&\le e^{(x-x_0)a} \int_{\mathcal{C}} e^{x_0 f(t)} |g(t)|\, ds = \\
&= M_0 e^{(x-x_0)a} = M e^{ax}, \qquad M = M_0 e^{-ax_0}.
\end{aligned}$$

■

Posledica 1.2 *Če je na integracijski poti* $f(t) \le a < 0$*, tedaj je*

$$F(z) \sim 0, \;\; z \to \infty, \;\; |\arg z| \le \frac{1}{2}\pi - \delta, \;\; \delta > 0.$$

Izrek 1.3 (Watsonov lema) [1] *Naj bo*

$$0 < A \le \infty, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

in

$$F(z) = \int_0^A e^{-zt^\alpha} t^{\beta-1} g(t)\, dt, \tag{1.6}$$

[1] George Neville Watson (1886-1965) je bil angleški matematik.

kjer je funkcija g analitična vsaj v nekem krogu

$$|t| \leq H,$$

integral (1.6) pa je vsaj za $z = z_0$ absolutno konvergenten. Tedaj ima funkcija F asimptotsko vrsto v sektorju $|\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta$, $\delta > 0$. To asimptotsko vrsto dobimo tako, da funkcijo g razvijemo v potenčno vrsto in dobljeno vrsto formalno členoma integriramo od 0 do ∞.

Dokaz. Izberimo $h < H$. Po posledici 1.2 je

$$\int_h^A e^{-zt^\alpha} t^{\beta-1} g(t)\, dt \sim 0, \quad z \to \infty, \quad |\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta, \quad \delta > 0,$$

saj je

$$-t^\alpha \leq -h^\alpha < 0.$$

Zato zadošča, da dokažemo izrek za funkcijo

$$G(z) = \int_0^h e^{-zt^\alpha} t^{\beta-1} g(t)\, dt.$$

Vzemimo Taylorjevo vrsto funkcije g z ostankom

$$g(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k + Q_n(t) \tag{1.7}$$

$$Q_n(t) = \frac{t^{n+1}}{2\pi i} \oint_{|w|=H} \frac{g(w)}{w^{n+1}(w-t)}\, dw. \tag{1.8}$$

Ocenimo ostanek Q_n. Naj bo

$$M = \sup_{|w|=H} |g(w)|.$$

Ker je $|t| \leq h$, sledi

$$|w| = H, \qquad |t| \leq h < H, \qquad |w-t| \geq |w| - |t| \geq H - h.$$

Zato je

$$|Q_n(t)| \leq \frac{M}{H-h} \frac{|t|^{n+1}}{H^n}$$

in sledi

$$G(z) = \sum_{k=0}^n a_k \int_0^h e^{-zt^\alpha} t^{k+\beta-1}\, dt + \int_0^h e^{-zt^\alpha} t^{\beta-1} Q_n(t)\, dt.$$

Po posledici 1.2 in po uvedbi nove spremenljivke $t^\alpha = \xi$ je

$$\begin{aligned}
\int_0^h e^{-zt^\alpha} t^{k+\beta-1}\, dt &\sim \int_0^\infty e^{-zt^\alpha} t^{k+\beta-1}\, dt = \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-z\xi} \xi^{\frac{k+\beta}{\alpha}-1}\, d\xi = \\
&= \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right) z^{-\frac{k+\beta}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Torej

$$\begin{aligned}
F(z) &\sim \frac{z^{-\frac{\beta}{\alpha}}}{\alpha}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right) z^{-\frac{k}{\alpha}} + R_n(z)\right], \\
R_n(z) &= \alpha z^{\frac{\beta}{\alpha}} \int_0^h e^{-zt^\alpha} t^{\beta-1} Q_n(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Ocenimo:

$$\begin{aligned}
|R_n(z)| &\leq \alpha |z|^{\frac{\beta}{\alpha}} \int_0^h e^{-xt^\alpha} t^{\beta-1} \frac{M}{H-h} \frac{t^{n+1}}{H^n}\, dt \leq \\
&\leq C_1 |z|^{\frac{\beta}{\alpha}} \int_0^\infty e^{-xt^\alpha} t^{n+\beta}\, dt = \\
&= C_2 \frac{|z|^{\frac{\beta}{\alpha}}}{x^{\frac{n+\beta+1}{\alpha}}}.
\end{aligned}$$

Naj bo $|\arg z| = \frac{1}{2}\pi - \delta,\ \delta > 0$. Tedaj je $x = |z| \cos(\arg z) \leq |z| \sin\delta$ in sledi

$$|R_n(z)| \leq C_3 \frac{|z|^{\frac{\beta}{\alpha}}}{|z|^{\frac{\beta+n+1}{\alpha}}} = \frac{C_3}{|z|^{\frac{n+1}{\alpha}}},$$

kjer so C_1, C_2 in C_3 konstante. Zato je

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ |\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta,\ \delta > 0}} z^{\frac{n}{\alpha}} R_n(z) = 0$$

in

$$F(z) \sim \frac{z^{-\frac{\beta}{\alpha}}}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right) z^{-\frac{k}{\alpha}}, \quad z \to \infty, \quad |\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta, \quad \delta > 0. \tag{1.9}$$

■

1.4 Hankelov asimptotski razvoj

Vzemimo integral v Poissonovi integralski predstavitvi [24]

$$\begin{aligned}
H_\nu^{(1)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{z^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} e^{+i(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)} \times \int_0^\infty e^{-zt} t^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{it}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}, \\
H_\nu^{(2)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{z^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} e^{-i(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)} \times \int_0^\infty e^{-zt} t^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1-\frac{it}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

namreč

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} t^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 \pm \frac{it}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} dt$$

in uporabimo izrek 1.3. Po binomskem izreku je

$$\left(1 \pm \frac{it}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty}(\pm i)^k \binom{\nu-\frac{1}{2}}{k}\left(\frac{t}{2}\right)^k$$

in

$$\begin{aligned} F(z) &\sim \sum_{k=0}^{\infty}(\pm i)^k \binom{\nu-\frac{1}{2}}{k}\frac{1}{2^k}\int_0^{\infty} e^{-zt}t^{k+\nu-\frac{1}{2}}\,dt \sim \\ &\sim \sum_{k=0}^{\infty}(\pm i)^k \binom{\nu-\frac{1}{2}}{k}\Gamma\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(2z)^k}z^{-\nu-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ker je

$$\binom{\nu-\frac{1}{2}}{k} = \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\nu-k+\frac{1}{2}\right)},$$

uvedemo *Hankelov simbol*

$$(\nu,k) = \frac{\Gamma\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)}{k!\Gamma\left(\nu-k+\frac{1}{2}\right)} \tag{1.10}$$

in dobimo

$$F(z) \sim \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)z^{-\nu-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}(\pm i)^k\frac{(\nu,k)}{(2z)^k}.$$

Ta rezultat vstavimo v Poissonovo integralsko predstavitev [24] in sledi

$$H_\nu^{(1,2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{\pm i\left(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)}\sum_{k=0}^{\infty}(\pm i)^k\frac{(\nu,k)}{(2z)^k}, \tag{1.11}$$

kjer zgornji predznak velja za funkcijo $H_\nu^{(1)}$, spodnji pa za funkcijo $H_\nu^{(2)}$, čeprav še nismo dokazali, da sta to res ti dve funkciji.

Vrsto razbijmo na sode in lihe člene in definirajmo

$$P(\nu,z) \sim \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\nu,2k)}{(2z)^{2k}}, \quad z\to\infty, \quad |\arg z| \le \frac{1}{2}\pi-\delta, \quad \delta>0, \tag{1.12}$$

$$Q(\nu,z) \sim \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\nu,2k+1)}{(2z)^{2k+1}}, \tag{1.13}$$

$$z\to\infty, \quad |\arg z| \le \frac{1}{2}\pi-\delta, \quad \delta>0.$$

Uvedemo še

$$\chi := z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi \tag{1.14}$$

in dobimo

$$H_\nu^{(1,2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{\pm i\chi}[P(\nu, z) \pm iQ(\nu, z)]. \tag{1.15}$$

Asimptotski razvoj (1.11) smo dokazali za

$$|\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta, \qquad \delta > 0,$$

v resnici pa velja širše, glej [22], vsaj do

$$|\arg z| \leq \pi - \delta, \qquad \delta > 0.$$

1.5 Posplošitev Watsonovega leme

Izrek 1.4 *Naj bo*

(i) $a < b \leq \infty$,

(ii) funkciji g *in* f *analitični v neki okolici točke* $t = a$,

(iii) f *realna na* $[a, b]$,

(iv) $a < t \leq b \Rightarrow f(t) < f(a)$,

(v) integral $\int_a^b e^{zf(t)} g(t)\, dt$ *je vsaj za* $z = z_0$ *absolutno konvergenten .*

Če je

$$f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0, \qquad f^{(m)}(a) \neq 0, \tag{1.16}$$

tedaj za

$$F(z) := \int_a^b e^{zf(t)} g(t)\, dt$$

velja

$$F(z) \sim e^{zf(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{m} \Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right) z^{-\frac{k+1}{m}}, \;\; z \to \infty, \;\; |\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta, \;\; \delta > 0,$$

kjer je

$$\begin{aligned} w^m &= f(a) - f(t), \\ g(t)\frac{dt}{dw} &= a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots . \end{aligned} \tag{1.17}$$

Dokaz. Označimo

$$\Phi(z) := e^{-zf(a)} F(z) = \int_a^b e^{z[f(t) - f(a)]} g(t)\, dt.$$

Zaradi pogoja (iv) je po izreku 1.2

$$\Phi(z) \sim \int_a^{a+h} e^{z[f(t)-f(a)]} g(t)\,dt, \quad z \to \infty, \quad |\arg z| \le \frac{1}{2}\pi - \delta, \quad \delta > 0,$$

kjer je $h > 0$ poljubno majhno število.

Naj bo h tako majhen, da sta funkciji f in g v krogu $|z - a| < h$ analitični. Razvijmo funkcijo f v Taylorjevo vrsto

$$f(t) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(t-a) + \cdots.$$

Zaradi (1.16) je

$$f(t) = f(a) + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(t-a)^m + \cdots.$$

Zaradi pogoja (iv) je

$$p^m := -\frac{m!}{f^{(m)}(a)} > 0. \tag{1.18}$$

Sledi

$$f(t) = f(a) - \left(\frac{t-a}{p}\right)^m [1 + b_1(t-a) + \cdots],$$

kjer so b_1, b_2, ... nekakšni koeficienti. Uvedemo novo integracijsko spremenljivko w s predpisom

$$w^m = f(a) - f(t) = \left(\frac{t-a}{p}\right)^m [1 + b_1(t-a) + \cdots].$$

Zaradi pogoja (iv) lahko vzamemo, da pri $t > a$ velja $w > 0$, zato

$$w = \frac{t-a}{p}[1 + b_1(t-a) + \cdots]^{\frac{1}{m}} \tag{1.19}$$

in bo pri dovolj majhnih $|t-a|$ funkcija

$$t \longmapsto w = \frac{t-a}{p}[1 + c_1(t-a) + \cdots],$$

kjer so c_1, c_2, ... spet nekakšni koeficienti, analitična.

Ker je

$$w'(a) = \frac{1}{p} > 0,$$

je funkcija w v dovolj majhni okolici točke a monotono naraščajoča. Zato je

$$\begin{aligned} \Phi(z) &\sim \int_a^{a+h} e^{-zw^m} g(t)\,dt = \\ &= \int_0^A e^{-zw^m} g(t) \frac{dt}{dw}\,dw, \quad z \to \infty, \quad |\arg z| \le \frac{1}{2}\pi - \delta, \quad \delta > 0, \end{aligned} \tag{1.20}$$

kjer je

$$A = w(a+h) > 0.$$

Po izreku 1.3 je

$$\Phi(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{m} \Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right) z^{-\frac{k+1}{m}}, \quad z \to \infty, \quad |\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta, \quad \delta > 0,$$

kjer so koeficienti a_k določeni z enačbo (1.17). ∎

Posledica 1.3 *Pri istih pogojih, kot veljajo za izrek 1.4, velja*

$$F(z) := \int_a^b e^{zf(t)} g(t)\, dt \quad \sim \quad \frac{g(a)}{m} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) e^{zf(a)} \sqrt[m]{\frac{m!}{-f^{(m)}(a) z}} \left[1 + \mathcal{O}\left(z^{-\frac{1}{m}}\right)\right],$$
$$z \to \infty, \quad |\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta, \quad \delta > 0.$$

Dokaz. Prvi člen vrste (1.17) lahko preprosto izračunamo:

$$a_0 = g(t) \frac{dt}{dw}\bigg|_{w=0} = \frac{g(a)}{\frac{dw}{dt}\big|_{t=a}} = g(a) p = g(a) \sqrt[m]{\frac{m!}{-f^{(m)}(a)}}.$$

∎

Oglejmo si še primer, ko doseže funkcija f maksimum v notranjosti intervala $[a, b]$, recimo v točki t_0, $a < t_0 < b$.

Izrek 1.5 *Naj bo*

(i) $-\infty \leq a < b \leq \infty$,

(ii) funkciji g in f analitični v neki okolici točke t_0, $a < t_0 < b$,

(iii) f realna na $[a, b]$,

(iv) $t \in [a, b], t \neq t_0 \Rightarrow f(t) < f(t_0)$,

(v) integral $\int_a^b e^{zf(t)} g(t)\, dt$ je vsaj za $z = z_0$ absolutno konvergenten .

Če je

$$f'(t_0) = \cdots = f^{(2r-1)}(t_0) = 0, \qquad f^{(2r)}(t_0) \neq 0, \tag{1.21}$$

tedaj za

$$F(z) \quad := \quad \int_a^b e^{zf(t)} g(t)\, dt$$

velja

$$F(z) \sim e^{zf(t_0)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{r} \Gamma\left(\frac{2k+1}{2r}\right) z^{-\frac{2k+1}{2r}}, \quad z \to \infty, \quad |\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta, \quad \delta > 0,$$

kjer je

$$\begin{aligned} w^{2r} &= f(a) - f(t), \\ g(t)\frac{dt}{dw} &= a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Dokaz. Označimo

$$\Phi(z) := e^{-zf(t_0)} F(z) = \int_a^b e^{z[f(t)-f(t_0)]} g(t)\, dt.$$

Zaradi pogoja (iv) je po izreku 1.2

$$\Phi(z) \sim \int_{t_0-h}^{t_0+h} e^{z[f(t)-f(t_0)]} g(t)\, dt, \quad z \to \infty, \quad |\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta, \quad \delta > 0,$$

kjer je $h > 0$ poljubno majhno število.

Naj bo h tako majhen, da sta funkciji f in g v krogu $|z - t_0| < h$ analitični. Razvijmo funkcijo f v Taylorjevo vrsto

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \cdots.$$

Zaradi (1.21) je

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f^{(2r)}(t_0)}{(2r)!}(t - t_0)^{2r} + \cdots.$$

Zaradi pogoja (iv) namesto (1.18) dobimo enačbo

$$p^{2r} \quad := \quad -\frac{(2r)!}{f^{(2r)}(t_0)} > 0.$$

Sledi

$$f(t) = f(t_0) - \left(\frac{t - t_0}{p}\right)^{2r} \left[1 + b_1(t - t_0) + \cdots\right],$$

kjer so b_1, b_2, ... nekakšni koeficienti. Uvedemo novo integracijsko spremenljivko w s predpisom

$$w^{2r} = f(t_0) - f(t) = \left(\frac{t - t_0}{p}\right)^{2r} \left[1 + b_1(t - t_0) + \cdots\right].$$

Zaradi pogoja (iv) lahko vzamemo, da pri $t > t_0$ velja $w > 0$, zato namesto enačbe (1.19) dobimo enačbo

$$w \quad = \quad \frac{t - t_0}{p}[1 + b_1(t - t_0) + \cdots]^{\frac{1}{2r}},$$

ki velja tudi za $t < t_0$. Končno dobimo namesto enačbe (1.20)

$$\begin{aligned}\Phi(z) &\sim \int_{t_0-h}^{t_0+h} e^{-zw^{2r}} g(t)\,dt = \\ &= \int_A^B e^{-zw^{2r}} g(t) \frac{dt}{dw}\,dw, \\ &\qquad z \to \infty, \quad |\arg z| \le \frac{1}{2}\pi - \delta, \quad \delta > 0,\end{aligned}$$

kjer je

$$\begin{aligned} A &= w(t_0 - h) < 0, \\ B &= w(t_0 + h) > 0. \end{aligned}$$

Integral razbijemo na dva dela in po izreku 1.3 dobimo

$$\begin{aligned}\Phi(z) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2r}\Gamma\left(\frac{k+1}{2r}\right) z^{-\frac{k+1}{2r}} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{a_k}{2r}\Gamma\left(\frac{k+1}{2r}\right) z^{-\frac{k+1}{2r}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{r}\Gamma\left(\frac{2k+1}{2r}\right) z^{-\frac{2k+1}{2r}}.\end{aligned}$$

■

Posledica 1.4 *Pri istih pogojih, kot veljajo za izrek 1.5, velja*

$$\int_a^b e^{zf(t)} g(t)\,dt \sim \frac{g(t_0)}{r}\Gamma\left(\frac{1}{2r}\right) e^{zf(t_0)} \sqrt[2r]{\frac{(2r)!}{-f^{(2r)}(t_0)\,z}} \left[1 + \mathcal{O}\left(z^{-\frac{1}{r}}\right)\right],$$
$$z \to \infty, \quad |\arg z| \le \frac{1}{2}\pi - \delta, \quad \delta > 0.$$

Rezultat posledice 1.4 je posebno lep pri $r = 1$:

$$\int_a^b e^{zf(t)} g(t)\,dt \sim g(t_0)\sqrt{\frac{2\pi}{-f''(t_0)\,z}} e^{zf(t_0)} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right],$$
$$z \to \infty, \quad |\arg z| \le \frac{1}{2}\pi - \delta, \quad \delta > 0.$$

1.6 Metoda prevala

Izreka 1.4 in 1.5 hočemo uporabiti na funkciji

$$F(z) = \int_{\mathcal{C}} e^{zf(t)} g(t)\,dt, \tag{1.22}$$

kjer sta f in g analitični v okolici poti $\mathcal{C}$, vendar ni nujno, da je f na $\mathcal{C}$ realna funkcija.

Pa denimo, da ima pot $\mathcal{C}$ lastnost, da je na njej

$$\Im f(t) = \text{const.}$$

Če teče pot čez točko $t = t_0$, je

$$\Im f(t) = \Im f(t_0) \tag{1.23}$$

enačba poti. To metodo računanja funkcije F imenujemo *metoda prevala (sedla)*, ker, kot bomo videli, teče taka pot čez preval ali sedlo funkcije $\Re f$.

Naj bo

$$t = \sigma + i\tau, \qquad f(t) = u(\sigma, \tau) + iv(\sigma, \tau).$$

Enačba poti (1.23) se torej glasi

$$v(\sigma, \tau) = v(\sigma_0, \tau_0) = \text{const.} \tag{1.24}$$

Vemo, da veljata Cauchy-Riemannovi enačbi

$$\frac{\partial u(\sigma,\tau)}{\partial \sigma} = \frac{\partial v(\sigma,\tau)}{\partial \tau}, \qquad \frac{\partial u(\sigma,\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial v(\sigma,\tau)}{\partial \sigma}. \tag{1.25}$$

Naj bo

$$\boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$

vektorska enota na tangenti na krivuljo $\mathcal{C}$, torej enačba (1.25) pove

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\sigma,\tau)}{\partial l} &:= \boldsymbol{l} \cdot grad\, v(\sigma,\tau) = \\ &= \cos\alpha \frac{\partial v(\sigma,\tau)}{\partial \sigma} + \sin\alpha \frac{\partial v(\sigma,\tau)}{\partial \tau} = \\ &= -\cos\alpha \frac{\partial u(\sigma,\tau)}{\partial \tau} + \sin\alpha \frac{\partial u(\sigma,\tau)}{\partial \sigma} = 0, \end{aligned} \tag{1.26}$$

ker je funkcija v vzdolž poti konstantna. Če označimo

$$U^2 = \left[\frac{\partial u(\sigma,\tau)}{\partial \sigma}\right]^2 + \left[\frac{\partial u(\sigma,\tau)}{\partial \tau}\right]^2, \tag{1.27}$$

iz enačb (1.26) in (1.27) dobimo

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{1}{U}\frac{\partial u(\sigma,\tau)}{\partial \sigma}, \\ \sin\alpha &= \frac{1}{U}\frac{\partial u(\sigma,\tau)}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

V točkah, kjer je $U \neq 0$, ima torej $\boldsymbol{l}$ smer $grad\, u$, zato se vzdolž poti $\mathcal{C}$ funkcija u najhitreje spreminja, metodi prevala pa pravimo tudi *gradientna metoda*. Ker je

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{\left[\frac{\partial u(\sigma,\tau)}{\partial \sigma}\right]^2 + \left[\frac{\partial u(\sigma,\tau)}{\partial \tau}\right]^2} = \\ &= \sqrt{\left[\frac{\partial u(\sigma,\tau)}{\partial \sigma}\right]^2 + \left[\frac{\partial v(\sigma,\tau)}{\partial \sigma}\right]^2} = \\ &= \left|\frac{\partial f(t)}{\partial \sigma}\right| = \\ &= |f'(t)|, \end{aligned}$$

je smer poti dobro določena povsod razen v točkah, kjer je $f'(t) = 0$.

Izrek 1.6 *Naj bosta f in g analitični funkciji v okolici krivulje $\mathcal{C}$, ki se začenja v točki $t = t_0$ z lastnostjo*

$$f'(t_0) = f''(t_0) = \cdots = f^{(m-1)}(t_0) = 0, \qquad f^{(m)}(t_0) \neq 0.$$

Krivulja $\mathcal{C}$ naj bo določena z enačbo

$$\Im f(t) = \Im f(t_0)$$

in naj se začenja v smeri $\arg p$, kjer je

$$p = \sqrt[m]{-\frac{m!}{f^{(m)}(t_0)}} := Re^{i\beta}, \ \ R > 0 \tag{1.28}$$

eden od m korenov. Tedaj je

$$\begin{gathered} \int_{\mathcal{C}} e^{zf(t)} g(t)\, dt \quad \sim \quad \frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) e^{zf(t_0)} g(t_0) \sqrt[m]{\frac{m!}{-f^{(m)}(t_0)\, z}} \left[1 + \mathcal{O}\Big(z^{-\frac{1}{m}}\Big)\right], \\ z \to \infty, \ \ |\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta, \ \ \delta > 0. \end{gathered}$$

Dokaz. Ker je

$$f'(t_0) = f''(t_0) = \cdots = f^{(m-1)}(t_0) = 0, \qquad f^{(m)}(t_0) \neq 0,$$

je

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t_0) + \frac{f^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m + \frac{f^{(m+1)}(t_0)}{(m+1)!}(t-t_0)^{m+1} + \cdots = \\ &= f(t_0) + \frac{f^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m \left[1 + b_1(t-t_0) + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Če pišemo

$$t - t_0 = re^{i\varphi}, \qquad b_k = \rho_k e^{i\beta_k}, \qquad r, \rho_k \geq 0,$$

sledi

$$\begin{aligned} f(t_0) - f(t) &= \left(\frac{t-t_0}{p}\right)^m [1 + b_1(t-t_0) + \cdots] = \\ &= \left(\frac{r}{R}\right)^m e^{im(\varphi-\beta)} \left[1 + r\rho_1 e^{i(\varphi+\beta_1)} + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Zanima nas krivulja (1.23), torej

$$\sin m(\varphi-\beta) + r\rho_1 \sin[m(\varphi-\beta) + \varphi + \beta_1] + \cdots = 0.$$

Pri $t = t_0$, to je pri $r = 0$, dobimo

$$\begin{aligned} \sin m(\varphi-\beta) &= 0, \\ m(\varphi-\beta) &= j\pi, \qquad j = 0, 1, \ldots, 2m-1, \end{aligned}$$

ali

$$\varphi = \beta + \frac{j\pi}{m}, \qquad j = 0, 1, \ldots, 2m-1.$$

Tako imamo v točki t_0 na voljo $2m$ smeri. Ko se oddaljimo od točke t_0, postane $f'(t) \neq 0$ in je smer popolnoma določena.

Izberimo si torej smer j, $0 \leq j < 2m$. Tedaj je

$$\Re[f(t_0) - f(t)] = \left(\frac{r}{R}\right)^m \left[\cos j\pi + r\rho_1 \cos\left(j\pi + \frac{j\pi}{m} + \beta + \beta_1\right) + \cdots\right].$$

Pri sodem j funkcija $t \to \Re f(t)$ pada, pri lihem j pa narašča, zato izberemo nek sod j, recimo $j = 2r$. Za to imamo na voljo m možnosti

$$\varphi = \beta + \frac{2r\pi}{m}, \qquad r = 0, 1, \ldots, m-1,$$

te pa so ravno pokrite z različnimi izbori m-tega korena v (1.28), zato se lahko omejimo na izbor $j = r = 0$, to je

$$\varphi = \beta$$

in prepustimo izbiranje smeri m-temu korenu v enačbi (1.28).

Naj bo sedaj $\mathcal{C}$ krivulja, ki se začne v točki $t = t_0$ in nato zavije v smer $\arg p$ (v dolino!). Po dolini je $f'(t)$ ves čas od nič različen, vzdolž krivulje $\mathcal{C}$ funkcija $\Re f(t)$ ves čas pada, in to kar se da hitro, saj je $\Im f(t)$ vzdolž krivulje konstanten.

Vpeljimo novo integracijsko spremenljivko w po formuli

$$w^m = f(t_0) - f(t) = \left(\frac{t-t_0}{p}\right)^m [1 + b_1(t-t_0) + \cdots],$$

ali

$$w = \frac{t-t_0}{p}[1 + c_1(t-t_0) + \cdots]. \tag{1.29}$$

Funkcija w bo na krivulji $\mathcal{C}$ realna.

Nadaljevanje je znano.

Substitucija (1.29) prevede (1.22) v

$$\begin{aligned} F(z) &\sim e^{zf(t_0)} \int_0^A e^{-zw^m} g(t) \frac{dt}{dw}\, dw \sim \\ &\sim e^{zf(t_0)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{m} \Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right) z^{-\frac{k+1}{m}}, \\ &\qquad z \to \infty, \quad |\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta, \quad \delta > 0, \end{aligned}$$

kjer je

$$g(t)\frac{dt}{dw} = a_0 + a_1 w + \cdots$$

in

$$a_0 = g(t_0)\, p,$$

A pa je neko pozitivno število, vseeno kakšno, zaradi izreka 1.3. ∎

Dva posebna primera sta omembe vredna.

(i) Če je $m = 1$, je $f'(t_0) \neq 0$ in se pot sploh ne začne v sedlu ampak nekje na sredi strmine. Dobimo

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} e^{zf(t)} g(t)\, dt &\sim e^{zf(t_0)} \frac{g(t_0)}{-f'(t_0)\, z} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right], \\ &\qquad z \to \infty, \quad |\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta, \quad \delta > 0. \end{aligned}$$

(ii) Pomembnejši primer je $m = 2$, pot pa teče *preko sedla*. V tem primeru pišemo integral kot vsoto dveh integralov, od nekod do sedla in od sedla naprej do nekod. Za vsak člen dobimo asimptotsko vrsto, nato pa obe vrsti seštejemo. Tako dobimo

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} e^{zf(t)} g(t)\, dt &\sim e^{zf(t_0)} g(t_0) \sqrt{\frac{2\pi}{-f''(t_0)\, z}} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right] \\ &\qquad z \to \infty, \quad |\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta, \quad \delta > 0. \end{aligned} \tag{1.30}$$

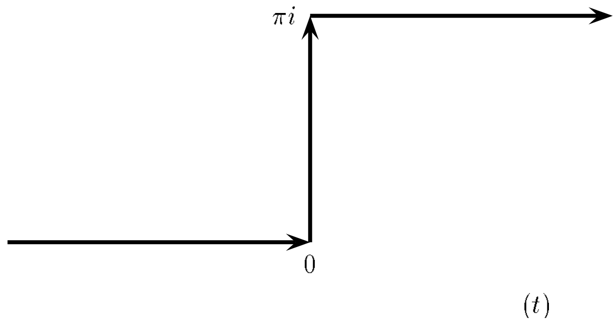
Če poti ne tečejo tako lepo, si pomagamo s Cauchyjevim izrekom.

1.7 Besselove funkcije

Pridobljeno znanje izkoristimo na integralu, glej [24],

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty + \pi i} e^{z \sinh t - \nu t}\, dt.$$

Integracijsko pot si mislimo sestavljeno iz treh delov, glej sliko 1.2,



Slika 1.2: Integracijska pot za Hankelovo funkcijo

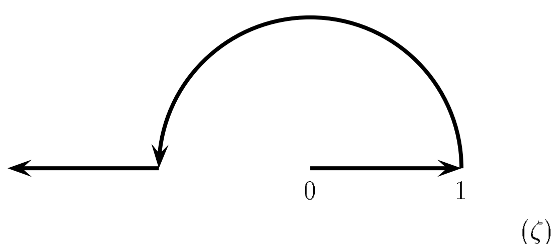
(i)
$$t = -\xi, \qquad \xi \geq 0,$$

(ii)
$$t = i\xi, \qquad 0 \leq \xi \leq \pi,$$

(iii)
$$t = i\pi + \xi, \qquad \xi \geq 0,$$

in uvedimo spremenljivko
$$\zeta = e^t, \qquad t = \log \zeta.$$

Dobimo, glej sliko 1.3,



Slika 1.3: Transformirana integracijska pot za Hankelovo funkcijo

(i)

$$\zeta = e^{-\xi}, \qquad \xi \geq 0,$$

(ii)

$$\zeta = e^{i\xi}, \qquad 0 \leq \xi \leq \pi,$$

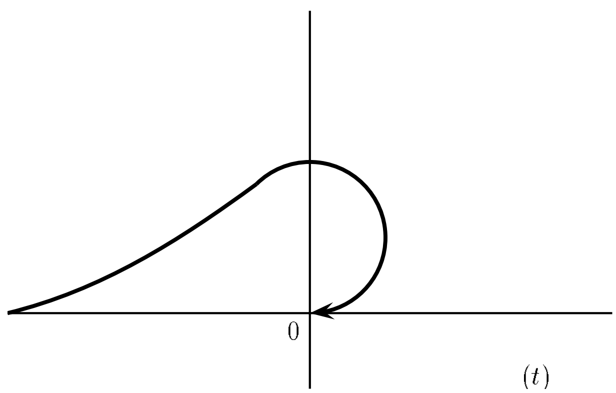
(iii)

$$\zeta = e^{i\pi+\xi} = -e^{\xi}, \qquad \xi \geq 0,$$

torej

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{0+} e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)} t^{-\nu-1}\, dt, \tag{1.31}$$

kjer smo pot obrnili in spet pisali t namesto ζ, glej sliko 1.4.



Slika 1.4: Obrnjena integracijska pot za Hankelovo funkcijo

Na integralu (1.31) želimo uporabiti izrek 1.6. V tem primeru je

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right), \\ g(t) &= t^{-\nu-1}. \end{aligned}$$

Poiščimo sedla. Najprej je

$$f'(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_0 = \pm i.$$

Ker je

$$f\left(t_0\right) = \frac{1}{2}\left(\pm i \mp \frac{1}{i}\right) = \pm i,$$

se enačba poti čez sedlo glasi

$$\Im\left(t-\frac{1}{t}\right)=\pm 2.$$

Pišimo

$$t=\sigma+i\tau$$

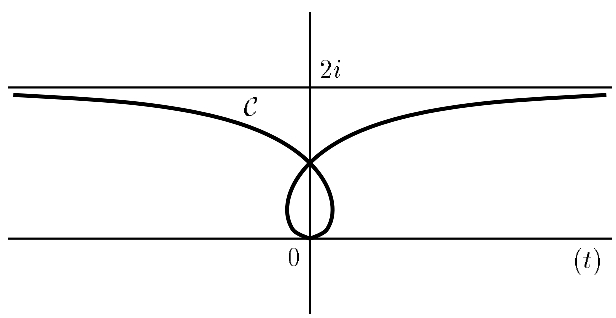
in dobimo

$$\tau+\frac{\tau}{\sigma^2+\tau^2}=\pm 2.$$

Izberimo sedlo $t_0=i$. Sledi

$$\begin{aligned}
\frac{\tau}{\sigma^2+\tau^2} &= 2-\tau, \\
\sigma^2+\tau^2 &= \frac{\tau}{2-\tau}, \\
\sigma^2 &= \frac{\tau}{2-\tau}-\tau^2=\frac{\tau}{2-\tau}[1-\tau(2-\tau)]=\frac{\tau(1-\tau)^2}{2-\tau}, \\
\sigma &= \pm(1-\tau)\sqrt{\frac{\tau}{2-\tau}}.
\end{aligned}$$

To krivuljo si lahko ogledate na sliki 1.5.



Slika 1.5: Sedlasta integracijska pot $\mathcal{C}$ za Hankelovo funkcijo

Pot v integralu (1.31) lahko po Cauchyjevemu izreku deformiramo v pot po krivulji $\mathcal{C}$. Integral po daljici od x do $x+2i$ namreč teži k nič, če teži $x\longrightarrow-\infty$. Tako dobimo

$$H_\nu^{(1)}(z)=\frac{i}{\pi}\int_{-\infty+2i}^{0+}e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)}t^{-\nu-1}\,dt.$$

Poglejmo še naprej

$$\begin{aligned}
f''(t) &= -\frac{1}{t^3}, \\
f''(t_0) &= -\frac{1}{i^3}=-i.
\end{aligned}$$

Iz formule

$$p = \sqrt{-\frac{2}{f''(t_0)}}.$$

sledi

$$p = \sqrt{\frac{2}{i}} = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}\pi i},$$

to pa je ravno smer krivulje $\mathcal{C}$, torej je po formuli (1.30)

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) \quad &\sim \quad \frac{i\sqrt{2}}{\pi}e^{-\frac{1}{4}\pi i}\sqrt{\pi}e^{iz}z^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(\nu+1)\pi i}\left[1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right], \\ &\qquad z\to\infty,\ \ |\arg z| \le \frac{1}{2}\pi-\delta,\ \ \delta>0, \end{aligned}$$

ali

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) \quad &\sim \quad \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i\left(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)}\left[1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right], \\ &\qquad z\to\infty,\ \ |\arg z| \le \frac{1}{2}\pi-\delta,\ \ \delta>0. \end{aligned}$$

Ta razvoj primerjamo s formulo (1.11) in ugotovimo, da je

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) \quad &= \quad \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i\chi}[P(\nu,z)+iQ(\nu,z)], && (1.32) \\ &\qquad z\to\infty,\ \ |\arg z| \le \frac{1}{2}\pi-\delta,\ \ \delta>0, \\ H_\nu^{(2)}(z) \quad &= \quad \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-i\chi}[P(\nu,z)-iQ(\nu,z)], && (1.33) \\ &\qquad z\to\infty,\ \ |\arg z| \le \frac{1}{2}\pi-\delta,\ \ \delta>0, && (1.34) \end{aligned}$$

kjer so funkcije χ, P in Q opisane z (1.14), (1.12) in (1.14). Od tod pa sledi še

$$\begin{aligned} J_\nu(z) \quad &\sim \quad \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(\chi)\left[1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right],\ \ z\to\infty,\ \ |\arg z| \le \frac{1}{2}\pi-\delta,\ \ \delta>0, \\ N_\nu(z) \quad &\sim \quad \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin(\chi)\left[1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right],\ \ z\to\infty,\ \ |\arg z| \le \frac{1}{2}\pi-\delta,\ \ \delta>0 \end{aligned}$$

in, ker asimptotika (1.32) v resnici velja vsaj pri $|\arg z| \le \pi-\delta$, $\delta>0$, glej [22], dobimo še

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}\left[1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right],\ \ z\to\infty,\ \ z\in\Delta, \qquad (1.35)$$

kjer je

$$\Delta = \{z; z\in\mathbb{C}, \qquad -\frac{3}{2}\pi+\delta \le \arg z \le \frac{1}{2}\pi-\delta, \quad \delta>0\}.$$

1.8 Naloge

1.1 Z metodo integriranja po delih dokaži asimptotsko vrsto za $\int_z^\infty e^{-t^2}\,dt$ in določi, v katerem sektorju velja.

1.2 Z metodo integriranja po delih izpelji asimptotsko vrsto za Fresnelov integral $F(z) = \int_0^z e^{it^2}\,dt$. Namig. Upoštevaj znano formulo $\int_0^\infty e^{it^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{i\pi/4}$ in za integral $\int_z^\infty e^{it^2}\,dt$ uvedi novo spremenljivko $s = t^2$ ter uporabi integriranje po delih.

1.3 Dokaži Taylorjevi formuli (1.7) in (1.8).

1.4 Dokaži Lagrangeov[2] izrek

Izrek 1.7 (Lagrange) *Naj bosta f in ϕ analitični na robu sklenjene krivulje $\mathcal{C}$ in v njeni notranjosti in naj t za vse $z \in \mathcal{C}$ zadošča pogoju $|t\phi(z)| < |z-a|$. Potem ima enačba $\zeta = a + t\phi(\zeta)$ kot enačba za ζ en sam koren v notranjoti krivulje $\mathcal{C}$ in vsako funkcijo, analitično na in v notranjosti $\mathcal{C}$, lahko razvijemo v vrsto po potencah t po formuli*

$$f(\zeta) = f(a) + \sum_{n=1}^\infty \frac{t^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left\{f'(a)[\phi(a)]^n\right\}.$$

Namig. Glej [23].

1.5 Analiziraj asimptotsko obnašanje Airyjeve[3] funkcije

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{3}s^3 + xs\right)ds$$

za velike pozitivne vrednosti x.

(a) Dokaži

$$Ai\left(z^{2/3}\right) = \frac{z^{1/3}}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \exp\left[iz\left(\frac{1}{3}t^3 + t\right)\right]dt.$$

(b) Uporabi metodo prevala na funkciji

$$F(z) = \int_{\mathcal{C}} \exp\left[iz\left(\frac{1}{3}t^3 + t\right)\right]dt.$$

Pokaži, da so sedla v točkah $t := \sigma + i\tau = \pm i$, da se pot preko sedla glasi $\sigma\left(\sigma^2 - 3\tau^2 + 3\right) = 0$ in da lahko napišemo

$$2\pi z^{-1/3}Ai\left(z^{2/3}\right) = \int_i^{\infty\cdot\exp(i\pi/6)} e^{zf(t)}\,dt - \int_i^{\infty\cdot\exp(5i\pi/6)} e^{zf(t)}\,dt =: I_1 - I_2,$$

kjer je $f(t) = i\left(\frac{1}{3}t^3 + t\right)$.

[2] Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) je bil pomemben francoski matematik.
[3] Sir George Bidell Airy (1801-1892) je bil angleški matematik.

(c) Integrala $I_{1,2}$ izračunamo tako, da uvedemo $u = f(i)-f(t) = (t-i)^2-\frac{i}{3}(t-i)^3$ ali

$$\pm u^{\frac{1}{2}} = (t-i)\left[1-\frac{i}{3}(t-i)\right]^{\frac{1}{2}},$$

kjer velja zgornji znak za I_1, spodnji pa za I_2.

(d) Na osnovi Lagrangeovega izreka, izrek 1.7, dokaži razvoj

$$t-i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}\Gamma(3n/2-1)}{n!\Gamma(n/2)3^{n-1}} \left(\pm u^{\frac{1}{2}}\right)^n .$$

(e) Dokaži

$$e^{2z/3} I_{1,2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n i^{n-1}\Gamma(3n/2-1)}{2(n-1)!3^{n-1}z^{n/2}}$$

(f) Dokaži

$$Ai(x) \sim \frac{1}{2\pi x^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(3m+\frac{1}{2}\right)}{(2m)!} \left(-9x^{3/2}\right)^{-m} . \tag{1.36}$$

(g) Dokaži, da asimptotska vrsta (1.36) velja za

$$x \to \infty, \quad |\arg x| \le \pi/3-\delta, \quad \delta > 0.$$

Poglavje 2

Fourierjeva transfomacija

2.1 Absolutno zvezne funkcije

Najprej bomo definirali pojem *absolutno zvezne funkcije.*

Definicija 2.1 *Funkcija f, definirana na intervalu $[a, b]$, se imenuje* absolutno zvezna *na intervalu $[a, b]$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak sistem paroma tujih podintervalov*

$$(a_k, b_k) \subset [a, b], \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

s skupno dolžino $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$, ki je manjša od δ, velja

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Izrek 2.1 *Nedoločeni integral*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

sumabilne funkcije f je absolutno zvezna funkcija.

Dokaz. Glej [10]. ∎

Izrek 2.2 (Lebesgue.) *Če je funkcija F absolutno zvezna na $[a, b]$, potem je funkcija F' sumabilna na $[a, b]$ in*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\, dt.$$

Dokaz. Glej [10]. ∎

2.2 Fourierjeva transformacija

Za funkcijo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definirajmo za $y \in \mathbb{R}$

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x y} f(x)\, dx.$$

Funkcijo F imenujemo *Fourierjeva transformiranka* funkcije f. Ker je $\left|e^{-2\pi i x y}\right| = 1$, za Fourierjevo transformiranko velja

Izrek 2.3 *Če je f absolutno sumabilna na $\mathbb{R}$, tedaj $F(y)$ obstaja za vsak $y \in \mathbb{R}$ in velja*

1. *Funkcija F je omejena, $|F(y)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx =: \|f\|_1$.*
2. *Funkcija F je enakomerno zvezna na $\mathbb{R}$.*
3. $\lim_{y \to \pm\infty} F(y) = 0$.
4. *Preslikava $\mathcal{F} : f \mapsto F$ je linearna.*

Dokaz. Naj bo $f \in L^1(\mathbb{R})$. Tedaj sledi

1. $|F(y)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \|f\|_1$. Pri $f(x) \geq 0$ a.e. in $y = 0$ imamo seveda enačaj.
2. Naj bo $\varepsilon > 0$ predpisano število. Ker $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx$ obstaja, lahko najdemo $N > 0$, da velja
$$\int_N^{\infty} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{6}$$
in
$$\int_{-\infty}^{-N} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{6}.$$
Sledi
$$\begin{aligned} F(y+h) - F(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x y} \left(e^{-2\pi i x h} - 1\right) f(x)\, dx = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{-N} + \int_{-N}^{N} + \int_N^{\infty}\right) e^{-2\pi i x y} \left(e^{-2\pi i x h} - 1\right) f(x)\, dx. \end{aligned}$$
Ocenimo
$$\left|\int_N^{\infty} e^{-2\pi i x y} \left(e^{-2\pi i x h} - 1\right) f(x)\, dx\right| \leq 2 \int_N^{\infty} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{3}$$
in analogno
$$\left|\int_{-\infty}^{-N} e^{-2\pi i x y} \left(e^{-2\pi i x h} - 1\right) f(x)\, dx\right| \leq 2 \int_{-\infty}^{-N} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ti dve oceni veljata neodvisno od y in h. Končno je

$$\left|\int_{-N}^{N} e^{-2\pi ixy}\left(e^{-2\pi ixh}-1\right)f(x)\,dx\right| \le \int_{-N}^{N}\left|e^{-2\pi ixh}-1\right|\cdot|f(x)|\,dx.$$

Ker je $|x|\le N$, za vsak $\delta>0$ pri dovolj majhnem $|h|$ velja $|2\pi ixh|<\delta$ in bo tudi

$$\left|e^{-2\pi ixh}-1\right| < \frac{\varepsilon}{3\|f\|_1}.$$

Potem pa je tudi

$$\left|\int_{-N}^{N} e^{-2\pi ixy}\left(e^{-2\pi ixh}-1\right)f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Končno dobimo $|F(y+h)-F(y)|<\varepsilon$.

3. Ta točka izreka je ekvivalentna *Riemann-Lebesgueovi*[1] *lemi*. Naj bo $\varepsilon>0$ poljubno število. Ker je $f\in L^1(\mathbb{R})$, lahko najdemo tak $N>0$, da bo $\int_N^\infty |f(x)|\,dx<\varepsilon$ in $\int_{-\infty}^{-N}|f(x)|\,dx<\varepsilon$. Zato je tudi $\left|\int_N^\infty e^{-2\pi ixy}f(x)\,dx\right|<\varepsilon$ in $\left|\int_{-\infty}^{-N} e^{-2\pi ixy}f(x)\,dx\right|<\varepsilon$ za vsak $y\in\mathbb{R}$. Kot naslednje lahko definiramo funkcijo φ, absolutno zvezno na $[-N,N]$, da bo

$$\int_{-N}^{N}|f(x)-\varphi(x)|\,dx<\varepsilon,$$

potem pa tudi

$$\left|\int_{-N}^{N} e^{-2\pi ixy}[f(x)-\varphi(x)]\,dx\right|<\varepsilon$$

za vsak $y\in\mathbb{R}$. Dalje,

$$\int_{-N}^{N} e^{-2\pi ixy}\varphi(x)\,dx = \left.\frac{e^{-2\pi ixy}\varphi(x)}{-2\pi iy}\right|_{-N}^{N} + \frac{1}{2\pi iy}\int_{-N}^{N} e^{-2\pi ixy}\varphi'(x)\,dx$$

in pri izbranem N lahko izberemo y_0 tako velik, da je ta izraz po absolutni vrednosti pod ε, če je $y>y_0$ in sledi

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ixy}f(x)\,dx\right|<4\varepsilon, \qquad (y>y_0).$$

4. Linearnost Fourierjeve transformacije je trivialna posledica linearnosti integrala.

■

Lema 2.1 *Naj bo funkcija f absolutno zvezna, absolutno sumabilna in odvod absolutno sumabilen. Tedaj obstajata limiti* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ *in obe sta enaki nič.*

[1] Henri Léon Lebesgue (1875-1941) je bil francoski matematik.

Dokaz. Velja $\int_0^N f'(x)\,dx = f(N) - f(0)$. Ker je f' absolutno sumabilna, obstaja integral $\int_0^\infty f'(x)\,dx$, zato obstaja limita $\lim_{N\to\infty} f(N) = a$. Recimo, da je $a > 0$. Tedaj za nek $A > 0$ velja $x \geq A \Rightarrow |f(x) - a| \leq \frac{a}{2}$. Zato je $x \geq A \Rightarrow f(x) \geq \frac{a}{2}$, potem pa funkcija f ne more biti sumabilna. Podoben sklep velja, če je $a < 0$, torej ja $a = 0$. Na isti način dokažemo, da je $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. ■

Posledica 2.1 *Če so funkcije f, f' in f'' absolutno sumabilne, velja*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$$

in podobno za višje odvode.

Izrek 2.4 *Naj bo funkcija f zvezno odvedljiva, f in f' absolutno sumabilne. Tedaj velja*

$$\mathcal{F}(f')(y) = (2\pi i y)\mathcal{F}(f)(y).$$

Dokaz. Naslednji integral smemo integrirati po delih:

$$\int_{-N}^{N} e^{-2\pi i x y} f'(x)\,dx = e^{-2\pi i x y} f(x)\Big|_{x=-N}^{N} + 2\pi i y \int_{-N}^{N} e^{-2\pi i x y} f(x)\,dx.$$

Zintegrirana člena z naraščajočim N po lemi 2.1 težita k nič in s tem je izrek dokazan. ■

Posledica 2.2 *Naj bo funkcija f n-krat zvezno odvedljiva, funkcija f in vseh njenih n odvodov naj bodo absolutno sumabilni. Tedaj velja formula*

$$\mathcal{F}\left(f^{(n)}\right)(y) = (2\pi i y)^n \mathcal{F}(f)(y).$$

Posledica 2.3 *Velja naslednje*

1. *Naj bo f zvezno odvedljiva funkcija, $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$. Tedaj je funkcija F s kvadratom sumabilna na $\mathbb{R}$.*
2. *Naj bo f dvakrat zvezno odvedljiva, $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$. Tedaj je funkcija F absolutno sumabilna na $\mathbb{R}$.*

Dokaz.

1. Ker je $f \in L^1(\mathbb{R})$, je po izreku 2.3 F zvezna funkcija, torej sumabilna na vsakem končnem intervalu, na primer $[-N, N]$. Če je f zvezno odvedljiva, $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$, iz izreka 2.4 sledi

   $$F(y) = \frac{\mathcal{F}(f')}{2\pi i y},$$

   zato je $|F(y)|^2 \leq \frac{M_1^2}{4\pi^2 y^2}$, kjer je $M_1 = \|f'\|_1$. Sedaj ocenimo

   $$\int_N^\infty |F(y)|^2\,dy \leq \int_N^\infty \frac{M_1^2}{4\pi^2 y^2}\,dy = \frac{M_1^2}{4\pi^2 N} < \infty$$

   in analogno za $\int_{-\infty}^{-N} |F(y)|^2\,dy$.

2. Ker je f dvakrat zvezno odvedljiva funkcija, po posledici 2.2 sledi

$$|F(y)| \leq \frac{M_2}{4\pi^2 y^2}, \tag{2.1}$$

kjer je $M_2 = \|f''\|_1$. Ker je F zvezna, je sumabilna na $[-N, N]$ in po oceni (2.1)

$$\int_N^\infty |F(y)|\, dy \leq \frac{M_2}{4\pi^2 N} < \infty$$

in velja $F \in L^1(\mathbb{R})$.

■

Posledica 2.4 *Če je f dvakrat zvezno odvedljiva in $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$, potem za vsak $x \in \mathbb{R}$ obstaja enakomerno zvezna funkcija*

$$x \mapsto \int_{-\infty}^\infty e^{2\pi ixy} F(y)\, dy.$$

Dokaz. Po točki 2 posledice 2.3 je F absolutno sumabilna, potem pa uporabimo izrek 2.3. ■

2.3 Inverzna formula

Naj bo f absolutno sumabilna funkcija. Po izreku 2.3 je funkcija F enakomerno zvezna in obstaja funkcija f_R, za katero po Fubinijevem[2] izreku velja

$$\begin{aligned}
f_R(x) \quad &:= \int_{-R}^R e^{2\pi ixy} F(y)\, dy = \\
&= \int_{-R}^R e^{2\pi ixy} \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-2\pi ity} f(t)\, dt \right) dy = \\
&= \int_{-\infty}^\infty f(t) \left(\int_{-R}^R e^{-2\pi iy(t-x)}\, dy \right) dt = \qquad \text{(po Fubinijevem izreku)} \\
&= \int_{-\infty}^\infty f(t) \frac{(-1)}{2\pi i(t-x)} \left[e^{-2\pi iR(t-x)} - e^{2\pi iR(t-x)} \right] dt = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \frac{\sin 2\pi R(t-x)}{t-x}\, dt = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x+u) \frac{\sin 2\pi Ru}{u}\, du. \qquad (t - x = u)
\end{aligned}$$

V naslednjem integralu uvedemo novo spremenljivko s po formuli $2\pi Ru = s$ in dobimo

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2\pi Ru}{u}\, du = \int_0^\infty \frac{\sin s}{s}\, ds = \frac{\pi}{2},$$

[2] Guido Fubini (1879-1943) je bil italijanski matematik.

ali

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi Ru}{u}\,du = 1,$$

zato velja

$$f_R(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[f(x+u) - f(x)]\frac{\sin 2\pi Ru}{u}\,du. \tag{2.2}$$

Definicija 2.2 *Za funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R})$ pravimo, da v točki x zadošča* Dinijevemu[3] pogoju, *če za nek pozitiven δ integral*

$$\int_0^{\delta}\left|\frac{f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)}{t}\right| dt \tag{2.3}$$

obstaja. Če je funkcija f v točki x odvedljiva, tedaj v točki x zagotovo zadošča Dinijevemu pogoju.

Sedaj lahko formuliramo

Izrek 2.5 *Naj absolutno sumabilna funkcija f v točki x zadošča Dinijevemu pogoju. Potem velja*

$$f(x) = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{2\pi ixy}F(y)\,dy, \tag{2.4}$$

to se pravi, glavna vrednost po Cauchyjy teži proti $f(x)$.

Dokaz. Po formuli (2.2) je

$$\begin{aligned}
f_R(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}[f(x+u) - f(x)]\frac{\sin 2\pi Ru}{u}\,du + \\
&+ \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}[f(x+u) - f(x)]\frac{\sin 2\pi Ru}{u}\,du + \\
&+ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta}[f(x+u) - f(x)]\frac{\sin 2\pi Ru}{u}\,du.
\end{aligned}$$

Če je Dinijev pogoj izpolnjen, gre prvi člen proti 0 po Riemann-Lebesgueovi lemi. Drugi člen zapišemo kot

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}[f(x+u) - f(x)]\frac{\sin 2\pi Ru}{u}\,du = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{f(x+u)}{u}\sin 2\pi Ru\,du - \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{\sin 2\pi Ru}{u}\,du \cdot f(x).
\end{aligned}$$

[3] Ulisse Dini (1845-1918) je bil italijanski matematik.

Ker je $u \mapsto f(x+u)$ absolutno sumabilna funkcija na $\mathbb{R}$, je $u \mapsto \frac{f(x+u)}{u}$ absolutno sumabilna na $[\delta, \infty)$ in Riemann-Lebesgueov lema pove, da gre

$$\frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} \frac{f(x+u)}{u} \sin 2\pi R u \, du$$

proti 0. Za integral $\int_{\delta}^{\infty} \frac{\sin 2\pi R u}{u} \, du$ velja $\int_{\delta}^{\infty} \frac{\sin 2\pi R u}{u} \, du = \int_{2\pi R \delta}^{\infty} \frac{\sin s}{s} \, ds \xrightarrow{R \to \infty} 0$ po definiciji izlimitiranega Riemannovega integrala. Analogno obdelamo tretji integral. ∎

Posledica 2.5 *Velja naslednje*

1. *Absolutno sumabilna funkcija f naj bo zvezna in zvezno odvedljiva na $\mathbb{R}$. Tedaj za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja inverzna formula (2.4).*
2. *Funkcija f naj bo zvezna in dvakrat zvezno odvedljiva na $\mathbb{R}$ in f, f' in f'' naj bodo absolutno sumabilne. Tedaj za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja inverzna formula v obliki*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x y} F(y) \, dy. \tag{2.5}$$

Dokaz.

1. Pri teh predpostavkah je Dinijev pogoj izpolnjen za vsak $x \in \mathbb{R}$.
2. Pri teh predpostavkah je funkcija F absolutno sumabilna in glavna vrednost je kar integral.

∎

2.4 Konvolucija

Naj bosta funkciji f in g absolutno sumabilni na $\mathbb{R}$ in definirajmo njuno *konvolucijo* (nemško Faltung, pregib) kot

$$h(x) = (f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) \, dt.$$

Lema 2.2 *Če sta funkciji f in g absolutno sumabilni, velja*

1. $f * g = g * f$.
2. *$f * g$ je absolutno sumabilna.*
3. $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$.

Dokaz.

1.

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)\,ds = \qquad (x-t=s) \\ &= (g*f)(x).\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |(f*g)(x)|\,dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)||g(t)|\,dt\right)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|\,dx\right)dt = \qquad \text{(Fubini)} \\ &= \|f\|_1\cdot\|g\|_1.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f*g)(y) &= \int_{-\infty}^{-\infty} e^{-2\pi ixy}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt\right)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{-\infty} g(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ixy}f(x-t)\,dx\right)dt = \qquad \text{(Fubini)} \\ &= \int_{-\infty}^{-\infty} g(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(s+t)y}f(s)\,ds\right)dt = \qquad (x=s+t) \\ &= \int_{-\infty}^{-\infty} e^{-2\pi ity}g(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi isy}f(s)\,ds\right)dt = \\ &= \mathcal{F}(f)(y)\cdot\mathcal{F}(g)(y).\end{aligned}$$

■

Izrek 2.6 (Parsevalova enačba) *Naj bo* $f\in C^2(\mathbb{R})$, f, f' *in* f'' *absolutno sumabilne na* $\mathbb{R}$. *Tedaj velja*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}} |F(y)|^2\,dy \tag{2.6}$$

Dokaz. Za funkcijo f, ki zadošča pogojem izreka, velja inverzna formula (2.5), zato je

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x)}\,dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ixy} F(y)\,dy \right) dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}} F(y) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi ixy} f(x)\,dx \right)} dy = \qquad \text{(Fubini)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} F(y)\overline{F(y)}\,dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}} |F(y)|^2\,dy.
\end{aligned}$$

■

2.5 Plancherelova teorija Fourierjeve transformacije

Sedaj bomo definicijo Fourierjeve transformacije prestavili iz prostora $L^1(\mathbb{R})$ v prostor $L^2(\mathbb{R})$. To je Plancherelova[4] teorija Fourierjeve transformacije.

Vemo, da je $C_K^2(\mathbb{R})$, množica dvakrat zvezno odvedljivih funkcij s kompaktnim nosilcem v $\mathbb{R}$, gost podprostor tako v prostoru $L^1(\mathbb{R})$ kot v prostoru $L^2(\mathbb{R})$.

Izrek 2.7 *Fourierjeva transformacija $\mathcal{F}$ je na podprostoru $C_K^2(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ izometrična preslikava. Abstraktno jo lahko razširimo na ves $L^2(\mathbb{R})$ in razširitev preslikave je še vedno izometrična.*

Dokaz. Vemo, da za funkcije iz $C_K^2(\mathbb{R})$ velja Parsevalova[5] enačba (izrek 2.6)

$$||f||_2 = ||F||_2.$$

Naj bo $f \in L^2(\mathbb{R})$; tedaj obstaja zaporedje $\{f_n\} \subset C_K^2(\mathbb{R})$, ki po normi prostora $L^2(\mathbb{R})$ konvergira proti funkciji f: $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Zaporedje $\{f_n\}$ je tudi Cauchyjevo, po Parsevalovi enačbi je Cauchyjevo tudi zaporedje Fourierjevih transformirank $\{F_n\}$, kjer je $F_n = \mathcal{F}(f_n)$. Ker je prostor $L^2(\mathbb{R})$ poln, obstaja $F \in L^2(\mathbb{R})$, da velja

$$F_n \to F \qquad \text{v normi prostora} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

Ker je norma zvezna funkcija, velja

$$||F||_2 = \lim_{n\to\infty} ||F_n||_2 = \lim_{n\to\infty} ||f_n||_2 = ||f||_2.$$

[4] Michel Plancherel (1885-1967) je bil švicarski matematik.
[5] Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755-1836) je bil francoski matematik.

Dokazati je še treba, da je razširitev F neodvisna od izbora zaporedja $\{f_n\}$. Če bi izbrali drugačno zaporedje, recimo $\{\tilde{f}_n\}$, in s tem tudi zaporedje transformirank $\{\tilde{F}_n\}$, bi v normi prostora $L^2(\mathbb{R})$ veljalo $F_n \to F$ in $\tilde{F}_n \to \tilde{F}$, od tod po trikotniški neenakosti sledi $F = \tilde{F}$. Tako definirana preslikava $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ je po Parsevalovi enačbi in zveznosti norme izometrija. ∎

Naj ima sedaj $g \in L^2(\mathbb{R})$ kompakten nosilec, na primer $\operatorname{supp} g \subset [a, b]$. Pokažimo, da se za tako funkcijo originalna definicija Fourierjeve transformacije in zgornja posplošitev ujemata. Najprej za funkcijo g velja $g \in L^1(\mathbb{R})$. Res, karakteristična funkcija φ intervala $[a, b]$ je tudi element prostora $L^2(\mathbb{R})$, zato je po Cauchy-Schwarzovi neenačbi

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, dx = \int_a^b |g(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\varphi(x)\, dx = \langle |g|, \varphi\rangle \leq \|\varphi\|_2 \|g\|_2$$

in je tudi $g \in L^1(\mathbb{R})$. Zato obstajata klasična Fourierjeva transformacija

$$\tilde{G}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi ixy} g(x)\, dx = \int_a^b e^{-2\pi ixy} g(x)\, dx$$

in Fourierjeva transformacija G po Plancherelu

$$G = \lim_{n\to\infty} G_n, \qquad G_n(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi ixy} g_n(x)\, dx,$$

kjer je $\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_2 = 0$. Na končnem intervalu $[a, b]$ je funkcija $x \mapsto e^{2\pi ixy} \in L^2([a, b])$, zato je

$$\tilde{G}(y) = \left\langle g, x \mapsto e^{2\pi ixy} \right\rangle_{L^2([a,b])}.$$

Vzemimo poljubno zaporedje $\{g_n\}$, $g_n \in C_K^2(\mathbb{R})$, ki konvergira po normi prostora $L^2(\mathbb{R})$ k funkciji g. Brez škode za splošnost smemo predpostaviti, da velja $\operatorname{supp} g_n \subset [a, b]$. Ker je skalarni produkt zvezna funkcija, za vsak fiksen y velja

$$\tilde{G}(y) = \left\langle g, x \mapsto e^{2\pi ixy} \right\rangle_{L^2([a,b])} = \lim_{n\to\infty} \left\langle g_n, x \mapsto e^{2\pi ixy} \right\rangle_{L^2([a,b])} = \lim_{n\to\infty} G_n(y).$$

Zaporedje $\{G_n\}$ konvergira po točkah proti $\tilde{G}$, po normi prostora $L^2(\mathbb{R})$ pa k funkciji G; teorija mere nam jamči, da mora biti tedaj $\tilde{G}(y) = G(y)$ za skoraj vsak $y \in \mathbb{R}$.

Lema 2.3 *Preslikava $\mathcal{F}$ je surjektivna, zato sta razširitvi $\mathcal{F}$ in $\mathcal{F}^{-1}$ na $L^2(\mathbb{R})$ unitarni preslikavi.*

Dokaz. Za funkcijo $f \in C_K^2(\mathbb{R})$ velja $\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}(f)\right](x) = f(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, zato je $\mathcal{R}_{\mathcal{F}} \supset C_K^2$. Ker je razširitev $\mathcal{F}$ na $L^2(\mathbb{R})$ zvezna in ima zvezen inverz, mora biti $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ zaprta, torej $\mathcal{R}_{\mathcal{F}} = L^2(\mathbb{R})$. ∎

Opomba 2.1 *Zgoraj navedena konstrukcija razširitve Fourierjeve transformacije na ves prostor $L^2(\mathbb{R})$ se imenuje* razširitev zvezne preslikave po zveznosti. *Lahko se vprašamo, zakaj moramo definirati Fourierjeve tranformacijo v $L^2(\mathbb{R})$ po tako* *ovinkasti poti. Odgovor je naslednji. V $L^2(\mathbb{R})$ obstajajo funkcije, za katere klasična Fourierjeva transformacija ne obstaja (integral divergira), zgoraj definirana razširitev pa obstaja. Za primer vzemimo funkcijo*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & za \quad x \geq 1 \\ 0 & sicer \end{cases} .$$

Integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x y} f(x)\, dx = \int_1^\infty \frac{e^{-2\pi i x y}}{x}\, dx$$

gotovo ne obstaja pri $y = 1$; zanimivo je, da zgornji integral pri $y \neq 0$ obstaja kot izlimitirani Riemannov integral, kot Lebesgueov pa ne. Posplošena Fourierjeva transformiranka pa po zgornjem obstaja, saj je $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Tako smo dokazali *Fourierjev*[6] *izrek*

Izrek 2.8 (Fourier) *Če je $f \in L^2(\mathbb{R})$, velja*

$$F(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x y} f(x)\, dx$$

in

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x y} F(y)\, dy.$$

Opomba 2.2 *V fiziki pišemo Fourierjevo transformacijo s črko k namesto z y, kjer k stoji za* valovno število, *torej*

$$F(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i k x} f(x)\, dx$$

in

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i k x} F(k)\, dk.$$

2.6 Kosinusna in sinusna Fourierjeva transformacija

Za sode funkcije se Fourierjeva transformacija poenostavi.

Lema 2.4 *Če je funkcija f soda, je tudi F soda funkcija.*

Dokaz.

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_0^\infty e^{-2\pi i x y} f(x)\, dx + \int_{-\infty}^0 e^{-2\pi i x y} f(x)\, dx = \\ &= \int_0^\infty \left[e^{-2\pi i x y} f(x) + e^{2\pi i x y} f(x) \right] dx = \\ &= 2 \int_0^\infty f(x) \cos 2\pi x y\, dx. \end{aligned}$$

[6] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) je bil zelo pomemben francoski matematični fizik.

■

Definicija 2.3 Kosinusno Fourierjevo transformacijo *definiramo kot*

$$\mathcal{F}_c(f) : L^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty),$$

$$\mathcal{F}_c(f)(y) = F_c(y) = 2\int_0^\infty f(x)\cos 2\pi xy\,dx.$$

Če funkcijo, definirano na $(0,\infty)$ razširimo na $\mathbb{R}$ kot sodo funkcijo, je kosinusna Fourierjeva transformacija identična s Fourierjevo transformacijo.

Lema 2.5 *Pri istih pogojih kot velja Fourierjev izrek velja*

$$f(x) = 2\int_0^\infty F_c(y)\cos 2\pi xy\,dy.$$

Dokaz. Funkcijo f nadaljujemo na negativno realno os kot sodo funkcijo, funkcija F je potem tudi soda in velja

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ixy} F(y)\,dy = \\ &= \int_0^\infty e^{2\pi ixy} F_c(y)\,dy + \int_{-\infty}^0 e^{2\pi ixy} F_c(y)\,dy = \\ &= \int_0^\infty \left[e^{2\pi ixy}F_c(y) + e^{-2\pi ixy}F_c(y)\right]\,dy = \\ &= 2\int_0^\infty F_c(y)\cos 2\pi xy\,dy. \end{aligned}$$

■

Lema 2.6 *Pri istih pogojih kot velja Fourierjev izrek velja formula*

$$||F_c||_2 = ||f||_2.$$

Dokaz. Funkcijo f nadaljujemo na negativno realno os kot sodo funkcijo. Funkcija $F = F_c$ je potem tudi soda in

$$\begin{aligned} 2||F_c||_2^2 &= 2\int_0^\infty |F(y)|^2\,dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |F(y)|^2\,dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx = \\ &= 2\int_0^\infty |f(x)|\,dx = \\ &= 2||f||_2^2 \end{aligned}$$

■

Tudi za lihe funkcije se Fourierjeva transformacija poenostavi.

Lema 2.7 *Če je funkcija f liha, je tudi F liha funkcija.*

Dokaz.

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_0^\infty e^{-2\pi ixy} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^0 e^{-2\pi ixy} f(x)\,dx = \\ &= \int_0^\infty \left[e^{-2\pi ixy} f(x) - e^{2\pi ixy} f(x)\right]\,dx = \\ &= -2i \int_0^\infty f(x) \sin 2\pi xy\,dx. \end{aligned}$$

■

Definicija 2.4 Sinusno Fourierjevo transformacijo *definiramo kot*

$$\mathcal{F}_s(f) : L^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty),$$

$$\mathcal{F}_s(f)(y) = F_s(y) = 2\int_0^\infty f(x) \sin 2\pi xy\,dx.$$

Če funkcijo, definirano na $(0,\infty)$ razširimo na $\mathbb{R}$ kot liho funkcijo, je sinusna Fourierjeva transformacija, pomnožena z $(-i)$, identična s Fourierjevo transformacijo

$$\mathcal{F} = (-i)\mathcal{F}_s.$$

Lema 2.8 *Pri istih pogojih kot velja Fourierjev izrek velja*

$$f(x) = 2\int_0^\infty F_s(y) \sin 2\pi xy\,dy.$$

Dokaz. Funkcijo f nadaljujemo na negativno realno os kot liho funkcijo, funkcija F je potem tudi liha in velja

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ixy} F(y)\,dy = \\ &= -i\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ixy} F_s(y)\,dy = \\ &= -i\left[\int_0^\infty e^{2\pi ixy} F_s(y)\,dy - \int_0^{-\infty} e^{2\pi ixy} F_s(y)\,dy\right] = \\ &= -i\int_0^\infty \left[e^{2\pi ixy} - e^{-2\pi ixy}\right] F_s(y)\,dy = \\ &= 2\int_0^\infty F_s(y) \sin 2\pi xy\,dy. \end{aligned}$$

■

Lema 2.9 *Pri istih pogojih kot velja Fourierjev izrek velja*

$$\|F_s\|_2 = \|f\|_2.$$

Dokaz. Funkcijo f nadaljujemo na negativno realno os kot liho funkcijo. Funkcija $F = (-i)F_s$ je potem tudi liha in

$$\begin{aligned} 2\|F_s\|_2^2 &= 2\int_0^\infty |F(y)|^2 \, dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |F(y)|^2 \, dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx = \\ &= 2\int_0^\infty |f(x)| \, dx = \\ &= 2\|f\|_2^2 \end{aligned}$$

■

2.7 Naloge

2.1 Izračunaj kosinusne transformacije naslednjih funkcij in po možnosti preveri, kaj pove inverzni Fourierjev izrek:

(a) $f(x) = Ne^{-\alpha x^2}, \qquad (N,\ \alpha = \text{konst.})$

(b) $f(x) = \frac{a}{a^2+x^2}, \qquad (a > 0)$

(c) $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \qquad (a > 0)$

2.2 Preveri veljavnost Parsevalovega izreka za funkcije v primerih 2.1.

2.3 Dokaži naslednje lastnosti Fourierjeve transformacije

(a) $\mathcal{F}\{x \mapsto e^{ax} f(x)\}(k) = F\left(k + \frac{a}{2\pi i}\right),$

(b) $\mathcal{F}\{x \mapsto f(x-a)\}(k) = e^{2\pi i k a} F(k).$

2.4 Izračunaj Fourierjeve transformacije naslednjih funkcij:

(a) $f(x) = e^{-\lambda x^2} \cos \beta x, \qquad (\lambda > 0),$

(b) $f(x) = \frac{\cos \beta x}{a^4 + x^4},$

(c) $f(x) = \begin{cases} \cos k_0 x & (|x| < N\pi/k_0) \\ 0 & (|x| > N\pi/k_0) \end{cases}$, kjer je $N \in \mathbb{N}$.

2.5 Dokaži naslednje formule:

(a) $\mathcal{F}_s\left\{x\mapsto e^{-x}\cos x\right\}(k)=2\frac{(2\pi k)^3}{(2\pi k)^4+4}$,

(b) $\mathcal{F}_s\left\{x\mapsto\left\{\begin{array}{ll}\sin x & (0\le x\le\pi)\\ 0 & (x>\pi)\end{array}\right.\right\}(k)=2\frac{\sin 2\pi^2 k}{1-(2\pi k)^2}$,

(c) $\mathcal{F}_s\left\{x\mapsto xe^{-ax}\right\}(k)=\frac{8a\pi k}{[a^2+(2\pi k)^2]^2}$,

(d) $\mathcal{F}_c\left\{x\mapsto x^{\alpha-1}\right\}(k)=2\Gamma(\alpha)\frac{\cos\alpha\pi/2}{(2\pi k)^\alpha}$, $\qquad(0<\alpha<1)$.

2.6 Dokaži *trojni Fourierjev izrek*: Če je $f\in L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$, potem velja

$$f(\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^3}e^{2\pi i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}F(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k},$$

kjer je

$$F(\boldsymbol{k})=\int_{\mathbb{R}^3}e^{-2\pi i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}.$$

Poglavje 3

Diferencialne enačbe matematične fizike

V tem poglavju si bomo ogledali vrsto pomembnih nalog matematične fizike in si tako pridobili predstavo, kakšne so parcialne diferencialne enačbe, ki jih srečujemo v fiziki.

3.1 Enačba nihanja strune

Struna je tanka gibka nit z linearno gostoto $\rho \quad [\mathrm{kg/m}]$. Struno naj v vsaki točki napenja vzdolžna sila $T(x) \quad [\mathrm{N}]$, na struno pa naj deluje še prečna sila z linearno gostoto $F(x,t) \quad [\mathrm{N/m}]$.

V mirovni legi naj struna leži na osi x. Gledamo majhne odmike $u(x,t)$. Odmiki so majhni v smislu, da je

$$\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right| \ll 1.$$

Če je $\alpha(x,t)$ naklonski kot strune v točki x (ob času t), glej sliko 3.1, je

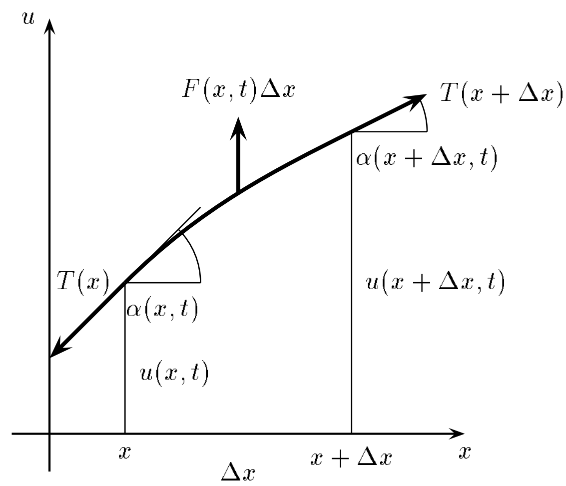
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \tan\alpha(x,t) \approx \sin\alpha(x,t).$$

Skupna sila, ki struno odmika, je po izreku o srednjih vrednostih enaka

$$\begin{aligned} & T(x+\Delta x)\sin\alpha(x+\Delta x,t) - T(x)\sin\alpha(x,t) + F(x^*,t)\,\Delta x \approx \\ \approx \quad & T(x+\Delta x)\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - T(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + F(x^*,t)\,\Delta x = \\ = \quad & \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]_{x=x^{**}} + F(x^*,t)\right\}\Delta x, \end{aligned}$$

kjer je $x < x^* < x+\Delta x$ po izreku o srednjih vrednostih in $x < x^{**} < x+\Delta x$ po Lagrangeovem izreku. Po Newtonovem zakonu je ta sila enaka

$$\rho(x)\Delta x\frac{\partial^2 u(x^{***},t)}{\partial t^2}$$



Slika 3.1: Deformirana struna

kjer je $x < x^{***} < x + \Delta x$ nova vmesna vrednost. Tako dobimo v limiti $\Delta x \to 0$ *enačbo nihanja strune*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] + F(x,t) = \rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \tag{3.1}$$

Najpomembnejši primer je tale:

- prečne sile ni, $F(x,t) = 0$,
- natezna sila $T(x)$ je konstantna,
- linearna gostota $\rho(x)$ je konstantna.

Tedaj dobimo

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \quad c^2 = \frac{T}{\rho}. \tag{3.2}$$

To je enodimenzionalna *valovna enačba.*

Podobno lahko zapišemo enačbi, ki modelirata *nihanje opne* (boben)

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} \tag{3.3}$$

in *nihanje zraka* (zvok)

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2}. \tag{3.4}$$

3.1.1 Lastna nihanja vpete strune

Vzemimo primer, ki ga opisuje enačba (3.2). Struna naj bo na robovih vpeta:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{3.5}$$

Po Fourierju iščemo rešitev v obliki produkta

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Dobimo

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}.$$

Leva stran je neodvisna od t, desna stran je neodvisna od x, zato je vsaka stran zase konstantna, recimo $-\lambda$:

$$\begin{aligned} -X''(x) &= \lambda X(x), && (3.6)\\ \ddot{T}(t) + \lambda c^2 T(t) &= 0. && (3.7) \end{aligned}$$

Robni pogoj (3.5) zahteva

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{3.8}$$

Vidimo, da mora biti X lastna funkcija in λ lastna vrednost operatorja A

$$\begin{aligned} Au &= -u'', \\ \mathcal{D}_A &= \{u, \quad u \in C^2[0,l], \quad u(0) = u(l) = 0\}. \end{aligned}$$

Ta operator smo obravnavali v [24]. Lastne vrednosti so

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.9}$$

lastne funkcije

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad \|X_n\|^2 = \frac{l}{2} \tag{3.10}$$

pa tvorijo kompleten ortogonalen sistem.

Za časovni del dobimo

$$T_n(t) = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \frac{n\pi ct}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Če označimo

$$\omega = \frac{\pi c}{l}, \tag{3.11}$$

dobimo za vsak $n \in \mathbb{N}$ rešitev — *lastno nihanje*

$$u_n(x,t) = X_n(x) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ n\omega t. \tag{3.12}$$

Lastna nihanja imajo krožno frekvenco

$$\begin{aligned}\omega_n &= n\omega,\\ \omega &= \frac{\pi c}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.\end{aligned}$$

3.1.2 Splošna rešitev

Ker so enačba (3.2) in robni pogoji (3.5) *linearni in homogeni*, velja *princip superpozicije*: rešitev naloge (3.2), (3.5) je tudi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)\, X_n(x) \tag{3.13}$$

pri poljubnih konstantah A_n in B_n, če le vrsta (3.13) v *nekem smislu* konvergira.

Taka rešitev je tako splošna, da lahko predpišemo še *začetne pogoje*, to je, začetno lego f in začetno hitrost g:

$$u(x,0) = f(x), \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x). \tag{3.15}$$

Če naj rešitev (3.13) zadošča začetnim pogojem (3.14) in (3.15), sledi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{3.16}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega B_n X_n(x) \tag{3.17}$$

in od tod

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{\langle f, X_n\rangle}{\|X_n\|^2},\\ n\omega B_n &= \frac{\langle g, X_n\rangle}{\|X_n\|^2}\end{aligned}$$

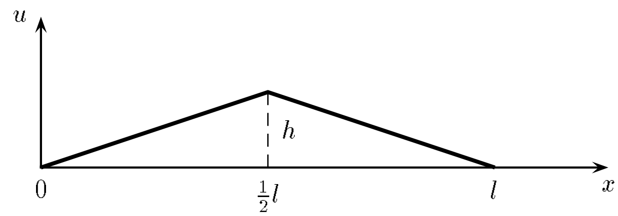
ali

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi, \tag{3.18}$$

$$n\omega B_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi. \tag{3.19}$$

Primer 3.1 Struna naj ob času $t = 0$ miruje v legi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2hx}{l}, & 0 \le x \le \frac{1}{2}l, \\ \frac{2h(l-x)}{l}, & \frac{1}{2}l \le x \le l, \end{cases}$$



Slika 3.2: Začetni položaj napete strune

glej sliko 3.2.
Ker velja $f(x) = f(l-x)$, sledi

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi = \\
&= \frac{2}{l}\int_0^l f(l-\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi = \\
&= \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{n\pi(l-\xi)}{l}\,d\xi = \\
&= \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\left(n\pi-\frac{n\pi\xi}{l}\right)d\xi = \\
&= -(-1)^n\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi
\end{aligned}$$

in zato tudi

$$A_n = \frac{1-(-1)^n}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi.$$

Pri sodem n je zato

$$A_n = 0,$$

pri lihem n pa je

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{4}{l}\int_0^{\frac{1}{2}l} f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi = \\
&= \frac{8h}{l^2}\int_0^{\frac{1}{2}l}\xi\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi = \\
&= -\frac{8h}{l^2}\frac{l}{n\pi}\left[\xi\cos\frac{n\pi\xi}{l}\right]_0^{\frac{1}{2}l} + \frac{8h}{n\pi l}\int_0^{\frac{1}{2}l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi = \\
&= \frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Ker je $g(x) = 0$, je $B_n = 0$ za $n = 1, 2, \ldots$. Tako dobimo rešitev

$$u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l} \cos{(2k+1)\omega t}.$$

▲

3.1.3 D'Alembertova rešitev

Po adicijskih izrekih lahko enačbo (3.13) z upoštevanjem (3.10) in (3.11) prepišemo v

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l}(x-ct) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l}(x+ct)\right] + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi}{l}(x-ct) - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi}{l}(x+ct)\right]. \end{aligned}$$

Funkciji f in g v enačbah (3.16) in (3.17) si mislimo razširjeni na interval $(-l, l)$ kot lihi funkciji, nato pa na vso realno os kot periodični funkciji s periodo $2l$. Tedaj iz (3.16) in (3.10) sledi

$$f(x \pm ct) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l}(x \pm ct),$$

če pa enačbo (3.17) integriramo in upoštevamo (3.10), dobimo

$$\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(\xi)\, d\xi = \text{const.} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

in

$$\frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi}{l}(x-ct) - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi}{l}(x+ct).$$

Skupaj zloženo dobimo d'Alembertovo rešitev

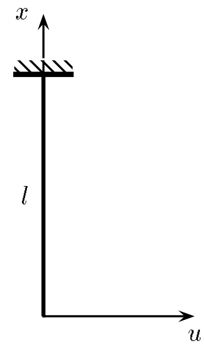
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi. \tag{3.20}$$

3.1.4 Prosto obešena struna

Denimo, da je struna na vrhu, pri $x = l$, pritrjena, spodaj, pri $x = 0$, pa prosto visi, glej sliko 3.3.

Sila $T(x)$, ki struno napenja, je kar teža preostalega dela strune. Če je ρ linearna gostota strune, je

$$T(x) = \rho g x.$$



Slika 3.3: Prosto obešena struna

Če prečne sile ni, iz enačbe (3.1) dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= \frac{1}{g} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, & (3.21) \\ u(l,t) &= 0. & (3.22) \end{aligned}$$

Kot je navada, časovni potek uganemo

$$u(x,t) = v(x) e^{-i\omega t} \tag{3.23}$$

in dobimo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x \frac{dv(x)}{dx} + \frac{\omega^2}{g} v(x) &= 0, & (3.24) \\ v(l) &= 0. & (3.25) \end{aligned}$$

Enačba (3.24) nam ni nič kaj znana. Pa uvedimo novo neodvisno spremenljivko z

$$\begin{aligned} x &= z^2, \\ v(x) &= w(z), \\ \frac{dw(z)}{dz} &= 2z \frac{dv(x)}{dx}, \\ z \frac{dw(z)}{dz} &= 2x \frac{dv(x)}{dx}. \end{aligned}$$

Enačbo (3.24) pomnožimo s $4x$ in dobimo

$$z \frac{d}{dz} z \frac{dw(z)}{dz} + \frac{4\omega^2}{g} z^2 w(z) = 0.$$

Če to enačbo delimo z z^2, vidimo, da mora biti w lastna funkcija,

$$\frac{4\omega^2}{g} = \lambda$$

pa lastna vrednost operatorja A

$$
\begin{aligned}
Aw &= -w'' - \frac{1}{z}w', \\
\mathcal{D}_A &= \{w, \quad w \in C^2[0,\sqrt{l}], \quad w(\sqrt{l}) = 0\}.
\end{aligned}
$$

Ta operator poznamo, glej [24]. Lastne funkcije so

$$
w_n(z) = J_0\left(\frac{\xi_n z}{\sqrt{l}}\right),
$$

lastne vrednosti pa

$$
\lambda_n = \frac{\xi_n^2}{l},
$$

kjer so ξ_n (pozitivne) ničle Besselove funkcije J_0. Lastne funkcije tvorijo kompleten sistem in so ortogonalne z utežjo z, kvadrat norme pa je enak

$$
\|w_n\|^2 = \int_0^{\sqrt{l}} z|w_n(z)|^2\,dz = \frac{l}{2}{J_0'}^2(\xi_n).
$$

Splošna rešitev je zato

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)\,J_0\left(\xi_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right),
$$

kjer je

$$
\omega_n = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_n g} = \frac{\xi_n}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}.
$$

Primer 3.2 Denimo, da je začetna hitrost nič, začetna lega kot na sliki 3.4, torej

$$
u(x,0) = f(x) = h\frac{l-x}{l}.
$$

Ker je

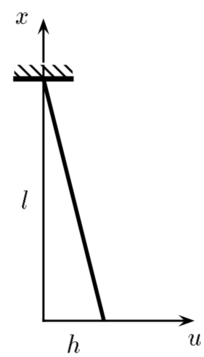
$$
u_t(x,0) = 0,
$$

mora biti

$$
B_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.
$$

Uvedemo

$$
\begin{aligned}
x &= z^2, \\
f(x) &= \tilde{f}(z)
\end{aligned}
$$



Slika 3.4: Primer prosto obešene strune

in sledi

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n w_n(z), \\
A_n &= \frac{1}{\|w_n\|^2} \left\langle \tilde{f}, w_n \right\rangle = \\
&= \frac{1}{\|w_n\|^2} \int_0^{\sqrt{l}} z \tilde{f}(z) w_n(z)\, dz = \\
&= \frac{2}{l} \frac{1}{{J_0'}^2(\xi_n)} \int_0^{\sqrt{l}} z f(z^2) J_0\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{l}} z\right)\, dz.
\end{aligned}$$

Pišimo, zaradi enostavnosti, ξ namesto ξ_n, in uvedimo spremenljivko s:

$$z = \frac{\sqrt{l}}{\xi} s$$

in sledi

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{\xi^2 {J_0'}^2(\xi)} \int_0^{\xi} s f\left(\frac{l s^2}{\xi^2}\right) J_0(s)\, ds = \\
&= \frac{2h}{\xi^2 {J_0'}^2(\xi)} \int_0^{\xi} s \left(1 - \frac{s^2}{\xi^2}\right) J_0(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Upoštevajmo Besselovo enačbo:

$$(s J_0')' + s J_0 = 0$$

in dobimo

$$
\begin{aligned}
\int_0^\xi s\left(1-\frac{s^2}{\xi^2}\right) J_0(s)\,ds &= -\int_0^\xi \left(1-\frac{s^2}{\xi^2}\right)\left[sJ_0'(s)\right]'\,ds = \\
&= -\left[\left(1-\frac{s^2}{\xi^2}\right) sJ_0'(s)\right]_0^\xi - \frac{2}{\xi^2}\int_0^\xi s^2 J_0'(s)\,ds = \\
&= -\frac{2}{\xi^2}\left[s^2 J_0(s)\right]_0^\xi + \frac{4}{\xi^2}\int_0^\xi sJ_0(s)\,ds = \\
&= -\frac{4}{\xi^2}\int_0^\xi \left[sJ_0'(s)\right]'\,ds = \\
&= -\frac{4}{\xi^2}\left[sJ_0'(s)\right]_0^\xi = \\
&= -\frac{4}{\xi}J_0'(\xi).
\end{aligned}
$$

Končno je

$$A_n = -\frac{8h}{\xi^3 J_0'(\xi)}$$

in

$$u(x,t) = -8h\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos\omega_n t}{\xi_n^3 J_0'(\xi_n)} J_0\left(\xi_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right).$$

Oblika obešene strune ob različnih časih je prikazana na sliki 3.5.

▲

3.1.5 Krožeča struna

Podoben primer je struna, ki kroži s konstantno kotno hitrostjo ω_0. Sila T je v tem primeru centrifugalna sila

$$T(x) = \int_x^l \omega_0^2 x\,dm = \frac{\rho\omega_0^2}{2}\left(l^2-x^2\right)$$

in iz enačbe (3.1) dobimo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(l^2-x^2\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = \frac{2}{\omega_0^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \tag{3.26}$$

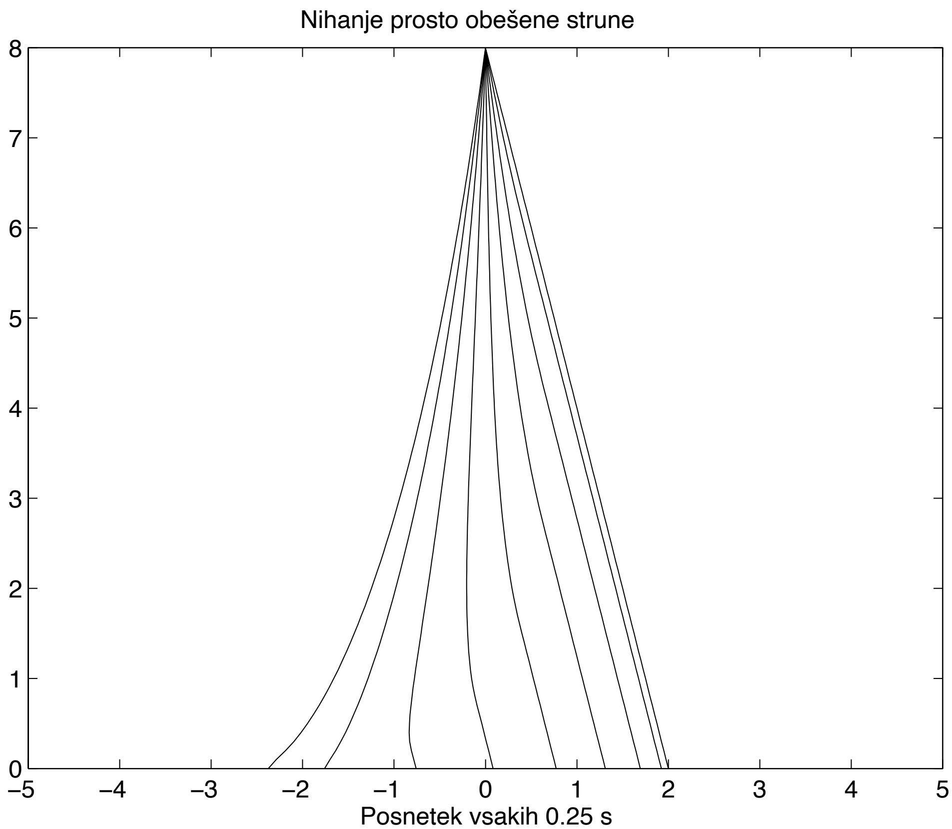
$$u(0,t) = 0. \tag{3.27}$$

Nastavek

$$u(x,t) = v(x)e^{-i\omega t}$$

nam dá

$$\frac{d}{dx}\left[\left(l^2-x^2\right)\frac{dv(x)}{dx}\right] + \frac{2\omega^2}{\omega_0^2}v(x) = 0$$



Slika 3.5: Primer prosto obešene strune, $l = 8\,m,\ h = 2\,m$

in če pišemo

$$\begin{aligned} x &= l\xi, \\ v(x) &= w(\xi), \end{aligned}$$

dobimo Legendreovo enačbo

$$\frac{d}{d\xi}\left[\left(1-\xi^2\right)\frac{dw(\xi)}{d\xi}\right] + \nu(\nu+1)w(\xi) = 0,$$

kjer smo označili

$$\frac{2\omega^2}{\omega_0^2} = \nu(\nu+1).$$

Da bo rešitev pri $\xi = 1$ omejena, mora biti

$$w(\xi) = P_\nu(\xi).$$

Index ν moramo določiti iz pogoja

$$w(0) = 0.$$

Temu pogoju zagotovo zadostimo, če izberemo

$$\nu = 2n+1, \quad n = 0, 1, \ldots$$

in s tem

$$\begin{aligned} \omega_n &= \omega_0 \sqrt{(n+1)(2n+1)}, \\ v_n(x) &= P_{2n+1}\left(\frac{x}{l}\right). \end{aligned}$$

Seveda ni nikjer rečeno, da je $\{v_n\}$ kompleten sistem, obstajajo morda še druge vrednosti indeksa ν, ki prav tako dajo $v(0) = 0$. Pa temu ni tako. Vsako funkcijo iz $\mathcal{D}_A$ lahko razširimo na interval $[-l, l]$ kot zvezno liho funkcijo. Kot tako jo lahko razvijemo v Fourierjevo vrsto po kompletnem sistemu $x \longmapsto P_n\left(\frac{x}{l}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Ker pa je funkcija liha, vsi sodi koeficienti odpadejo in ostanejo samo členi z v_n.

3.2 Prevajanje toplote

Vzemimo (neenakomerno) segreto telo s temperaturno porazdelitvijo $T(\boldsymbol{x}, t)$. Fizika uči, da je (v prvi aproksimaciji) toplotni tok po telesu podan s Fourierjevim zakonom

$$\boldsymbol{j} = -\lambda \operatorname{grad} T, \tag{3.28}$$

kjer je λ $\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,st}}\right]$ toplotna prevodnost.

Vzemimo nek *del telesa*, Ω, in opazujmo toplotno bilanco. V notranjosti telesa imejmo toplotne izvore z jakostjo

$$Q(\boldsymbol{x}, t) \ \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}\right].$$

Snov v telesu naj ima *specifično toploto* c_p $\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,st}}\right]$. Energija, ki jo rodé izvori v času Δt, se delno porabi za segrevanje telesa, ostanek pa uide čez rob $\partial\Omega$:

$$\Delta t \int_\Omega Q\left(\boldsymbol{x}, t^*\right) dV = \int_\Omega \rho c_p \left[T(\boldsymbol{x}, t+\Delta t) - T(\boldsymbol{x}, t)\right] dV + \Delta t \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{x}, t^{**}\right) \cdot d\boldsymbol{S},$$

kjer je po izreku o srednjih vrednostih $t < t^* < t + \Delta t$ in $t < t^{**} < t + \Delta t$. Po Lagrangeovem izreku je $T(\boldsymbol{x}, t+\Delta t) - T(\boldsymbol{x}, t) = \Delta t \left.\frac{\partial T(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right|_{t=t^{***}}$, $t < t^{***} < t + \Delta t$. Enačbo delimo z Δt in v limiti $\Delta t \to 0$ dobimo

$$\int_\Omega \left[Q(\boldsymbol{x}, t) - \rho c_p \frac{\partial T(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t}\right] dV = \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t)\, dV.$$

Ker to velja za vsak del telesa, dobimo *kontinuitetno enačbo*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) = Q(\boldsymbol{x},t) - \rho c_p \frac{\partial T(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}. \tag{3.29}$$

Upoštevajmo Fourierjev zakon (3.28) in sledi

$$\operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T(\boldsymbol{x},t) = \rho c_p \frac{\partial T(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} - Q(\boldsymbol{x},t). \tag{3.30}$$

Ker običajno ni toplotnih izvorov, $Q = 0$, λ pa je konstanten, dobimo *difuzijsko enačbo*

$$\Delta T(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{D}\frac{\partial T(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}, \quad D = \frac{\lambda}{\rho c_p}. \tag{3.31}$$

Konstanto D imenujemo *difuzijska konstanta.*

3.2.1 Izolirana palica

Vzemimo tanko palico, ki je na bokih toplotno izolirana. Če je palica dovolj tanka, lahko spremembe temperature po preseku zanemarimo. V tem primeru je

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

in iz (3.31) dobimo

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{D}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}. \tag{3.32}$$

Naloga naj bo takale. Poznamo porazdelitev temperature ob času $t = 0$:

$$T(x,0) = f(x), \tag{3.33}$$

kjer je f dana funkcija. Povedati moramo še, kaj se godi na krajiščih palice. Recimo, da je tudi tam palica toplotno izolirana:

$$\boldsymbol{j} = 0 \qquad \text{na} \quad \text{krajiščih},$$

to je,

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \tag{3.34}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=l} = 0. \tag{3.35}$$

Ločimo spremenljivki

$$T(x,t) = X(x)Y(t)$$

in dobimo

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{D}\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}.$$

Leva stran je neodvisna od t, desna stran neodvisna od x, torej je vsaka stran konstantna, recimo $-\mu$. Sledi

$$\begin{aligned} -X''(x) &= \mu X(x), \\ X'(0) &= X'(l) = 0, \\ \dot{Y}(t) + \mu D Y(t) &= 0, \\ Y(t) &= e^{-\mu D t}. \end{aligned}$$

Operator

$$\begin{aligned} Au &= -u'', \\ \mathcal{D}_A &= \{u; \quad u \in C^2[0,l], \quad u'(0) = u'(l) = 0\}, \end{aligned}$$

poznamo. Lastne vrednosti so

$$\mu_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

lastne funkcije pa

$$X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}$$

z normo

$$\|X_n^2\| = \begin{cases} \frac{1}{2}l & n > 0 \\ l & n = 0 \end{cases}.$$

Tako dobimo splošno rešitev

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n A_n \cos\frac{n\pi x}{l} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2} D t\right),$$

kjer je

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & n > 0 \\ \frac{1}{2} & n = 0 \end{cases}. \tag{3.36}$$

Pri $t = 0$ sedaj sledi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n A_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

torej je

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi.$$

3.2.2 Newtonov zakon ohlajanja

Splošnejši primer je telo, kjer na robu uhaja toplotni tok, sorazmeren temperaturni razliki (Newtonov zakon ohlajanja):

$$j_n := \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} = k(T - T_0),$$

kjer je T_0 zunanja temperatura. Če temperaturo merimo s takšno lestvico, da je $T_0 = 0$, sledi

$$\left.\frac{\partial T(\boldsymbol{x},t)}{\partial n} + hT(\boldsymbol{x},t)\right|_{\text{na robu}} = 0,$$

kjer je

$$h = \frac{k}{\lambda}.$$

Pri palici to pomeni

$$\begin{aligned} \left.-\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + hT(x,t)\right|_{x=0} &= 0, \\ \left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + hT(x,t)\right|_{x=l} &= 0. \end{aligned}$$

Za krajevni del dobimo tako nalogo

$$\begin{aligned} -X''(x) &= \mu X(x), \\ hX(0) - X'(0) &= 0, \\ hX(l) + X'(l) &= 0. \end{aligned}$$

Ta operator smo obravnavali v [24]. Lastne vrednosti so

$$\mu_n = 4\frac{\xi_n^2}{l^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

kjer je ξ_n rešitev enačbe, glej [24],

$$\begin{aligned} \xi_n &= \arctan\frac{\alpha}{\xi_n} + \frac{1}{2}n\pi, \\ \alpha &= \frac{hl}{2}. \end{aligned}$$

Lastne funkcije so

$$X_n(x) = \xi_n \cos\frac{2\xi_n x}{l} + \alpha \sin\frac{2\xi_n x}{l}$$

z normo

$$\|X_n\|^2 = \frac{l}{2}(\xi_n^2 + \alpha^2 + \alpha).$$

Če je f porazdelitev temperature ob času $t = 0$, dobimo

$$\begin{aligned} T(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n X_n(x) \exp\left(-\frac{4\xi_n^2 Dt}{l^2}\right), \\ A_n &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l f(\xi) X_n(\xi)\, d\xi. \end{aligned}$$

3.2.3 Notranji izvori

Vzemimo sedaj splošnejšo enačbo

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{D}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{D} Q(x,t) \tag{3.37}$$

z nekakšnimi *homogenimi* robnimi pogoji in z začetnim pogojem

$$T(x,0) = f(x).$$

Reševanje homogene enačbe nam dá nek operator

$$\begin{aligned} Au &= -u'', \\ \mathcal{D}_A &= \{u, \quad u \in C^2[0,l], \quad \ldots\} \end{aligned}$$

z lastnimi vrednostmi μ_n in lastnimi funkcijami X_n. Razvijmo vse nastopajoče funkcije v vrste po $\{X_n\}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x), \\ Q(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(x), \\ T(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x). \end{aligned}$$

Za koeficiente velja

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l f(\xi) X_n(\xi)\, d\xi, \\ q_n(t) &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l Q(\xi,t) X_n(\xi)\, d\xi. \end{aligned}$$

Specialno od tod sledi

$$u_n(0) = f_n. \tag{3.38}$$

Vrste vstavimo v enačbo (3.37) in primerjamo koeficiente

$$-\mu_n u_n(t) = \frac{1}{D}\dot{u}_n(t) - \frac{1}{D} q_n(t),$$

ali

$$\dot{u}_n(t) + \mu_n D u_n(t) = q_n(t).$$

Upoštevamo (3.38) in dobimo

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\mu_n D(t-\tau)} q_n(\tau)\, d\tau + f_n e^{-\mu_n D t}. \tag{3.39}$$

3.2.4 Predpisana temperatura na krajiščih

Vzemimo sedaj nalogo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{1}{D}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}, \\ T(0,t) &= 0, \\ T(l,t) &= \psi(t), \\ T(x,0) &= 0, \end{aligned}$$

kjer je ψ dana funkcija. Moti nas, da je robni pogoj pri $x = l$ sedaj nehomogen. Zato izberemo dovolj gladko funkcijo $p : [0,l] \longrightarrow \mathbb{R}$ z lastnostjo

$$\begin{aligned} p(0) &= 0, \\ p(l) &= 1, \end{aligned}$$

recimo

$$p(x) = \frac{x}{l},$$

ki ima še nepričakovano lepo lastnost, da je

$$p''(x) = 0.$$

Pišimo

$$T(x,t) = p(x)\psi(t) - u(x,t)$$

in dobimo

$$-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{D} p(x)\dot{\psi}(t) - \frac{1}{D}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

ali

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{1}{D}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{D} Q(x,t), \\ Q(x,t) &:= p(x)\dot{\psi}(t), \\ u(0,t) &= 0, \\ u(l,t) &= 0, \\ u(x,0) &= p(x)\psi(0). \end{aligned}$$

To je naloga razdelka 3.2.3 z

$$\begin{aligned}
\mu_n &= \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \\
X_n(x) &= \sin\frac{n\pi x}{l}, \\
\|X_n\|^2 &= \frac{l}{2}.
\end{aligned}$$

Razvijemo

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n X_n(x)$$

in sledi

$$q_n(t) = p_n\dot{\psi}(t), \tag{3.40}$$

$$f_n = p_n\psi(0). \tag{3.41}$$

Iz enačbe (3.39) sedaj sledi

$$\begin{aligned}
u_n(t) &= p_n\left[\psi(0)e^{-\mu_n Dt} + \int_0^t e^{-\mu_n D(t-\tau)}\dot{\psi}(\tau)\,d\tau\right] = \\
&= p_n\left\{\psi(0)e^{-\mu_n Dt} + \left[e^{-\mu_n D(t-\tau)}\psi(\tau)\right]_{\tau=0}^{t} - \right. \\
&- \left.\mu_n D\int_0^t e^{-\mu_n D(t-\tau)}\psi(\tau)\,d\tau\right\} = \\
&= p_n\left[\psi(t) - \mu_n D\int_0^t e^{-\mu_n D(t-\tau)}\psi(\tau)\,d\tau\right].
\end{aligned}$$

Če izberemo

$$\psi(t) = T_0 = \text{const},$$

dobimo takoj

$$u_n(t) = T_0 p_n e^{-\mu_n Dt}.$$

Za koeficiente p_n dobimo

$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \frac{x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \\
&= -\frac{2}{l}\frac{l}{n\pi}\frac{x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_{x=0}^{l} + \frac{2}{l}\frac{l}{n\pi}\frac{1}{l}\int_0^l \cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \\
&= -2\frac{(-1)^n}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Rešitev je

$$T(x,t) = T_0\frac{x}{l} + 2\frac{T_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 Dt}{l^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

3.3 Potencialni tok

Gibanje tekočine je silno komplicirano. Opisujejo ga *Navier–Stokeseve* enačbe, sistem *nelinearnih* parcialnih diferencialnih enačb. Njihovo reševanje spada v računsko dinamiko tekočin (angl. Computational Fluid Dynamics, s kratico CFD) in bo za nas veliko preobsežno.

Opazujemo gibanje tekočine. Naj bo

$$\rho = \rho(\boldsymbol{x}, t)$$

gostota, in

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$$

hitrost v točki $\boldsymbol{x}$ ob času t.

Zakon o ohranitvi mase pravi, da za vsak del prostora Ω velja

$$\int_\Omega \rho(\boldsymbol{x}, t+\Delta t)\, dV = \int_\Omega \rho(\boldsymbol{x}, t)\, dV - \Delta t \oint_{\partial\Omega} \rho\,(\boldsymbol{x}, t^*)\, \boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{x}, t^*) \cdot d\boldsymbol{S},$$

kjer je $t < t^* < t + \Delta t$, ali v limiti $\Delta t \longrightarrow 0$

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t}\, dV + \oint_{\partial\Omega} \rho(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

ali

$$\int_\Omega \left\{ \frac{\partial \rho(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\rho(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)\right] \right\} dV = 0.$$

Ker velja to za vsak del prostora, sledi *kontinuitetna enačba*

$$\frac{\partial \rho(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\rho(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)\right] = 0. \tag{3.42}$$

Če je tekočina *nestisljiva*, je gostota ρ konstantna in dobimo

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{3.43}$$

Če lahko še domnevamo, da je gibanje *brezvrtinčno*, *kar nikakor ni nujno res*, je tudi

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{3.44}$$

Iz enačbe (3.44) sledi, da obstaja *hitrostni potencial* ψ, da velja

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = -\operatorname{grad} \psi(\boldsymbol{x}). \tag{3.45}$$

Kontinuitetna enačba (3.43) sedaj pove

$$\Delta\, \psi(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{3.46}$$

Predpostavka (3.44) je zelo nerealistična, omogoča pa rešitev nekaj lepih matematičnih nalog. John von Neumann[1] je zapisal, da matematiki, ki študirajo hidrodinamiko pod predpostavko (3.44), študirajo tok *suhe vode*, ker se prava, mokra voda, vede drugače [5].

[1] John von Neumann (1903-1957) je bil ameriški matematik madžarskega rodu.

3.3.1 Obtekanje valja

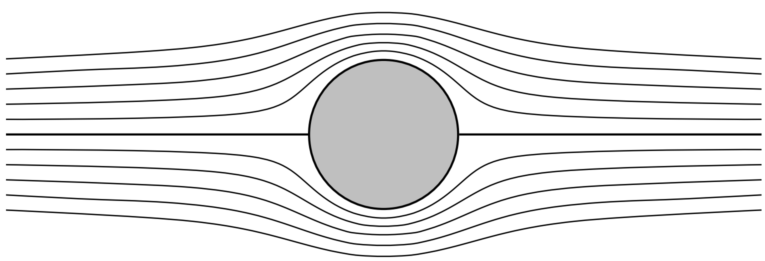
Oglejmo si laminarno obtekanje ovire. Neovirana tekočina naj ima konstantno hitrost, zato je daleč od ovire hitrost tudi konstantna. Ob mirujoči oviri je normalna komponenta hitrosti enaka nič:

$$\frac{\partial \psi(\boldsymbol{x})}{\partial n} = 0.$$

Za oviro izberimo neskončen pokončen cilinder

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

glej sliko 3.6.



Slika 3.6: Obtekanje valja

Če je nemotena hitrost V (v smeri osi x), dobimo

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \sim V\boldsymbol{i}, \quad r \to \infty.$$

Nalogo rešujemo v polarnih koordinatah (r, φ).

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi(\boldsymbol{x})}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{x})}{\partial \varphi^2} = 0, \quad r > a, \tag{3.47}$$

$$\left.\frac{\partial \psi(\boldsymbol{x})}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \tag{3.48}$$

$$\psi(\boldsymbol{x}) \sim -V x, \quad r \to \infty. \tag{3.49}$$

Ločimo koordinati

$$\psi(\boldsymbol{x}) = R(r)F(\varphi)$$

in dobimo

$$\frac{r}{R(r)}[rR'(r)]' = -\frac{F''(\varphi)}{F(\varphi)}.$$

Leva stran je neodvisna od φ, desna stran je neodvisna od r, zato je vsaka stran konstantna, recimo λ, in dobimo

$$-F''(\varphi) = \lambda F(\varphi), \tag{3.50}$$

$$r[rR'(r)]' - \lambda R(r) = 0. \tag{3.51}$$

K enačbi (3.50) sodi še zahteva, da je rešitev periodična:

$$\begin{aligned} F(0) &= F(2\pi), \\ F'(0) &= F'(2\pi). \end{aligned}$$

Ustrezen operator poznamo: lastne vrednosti so

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

lastne funkcije k lastni vrednosti λ_n pa so $\varphi \to \cos n\varphi$ in $\varphi \to \sin n\varphi$, torej

$$F_n(\varphi) = C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi. \tag{3.52}$$

Enačba (3.51) se sedaj glasi

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0.$$

To je Euler-Cauchyjeva enačba, ki jo rešimo z nastavkom

$$R(r) = r^\alpha.$$

Sledi

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha - 1) + \alpha &= n^2, \\ \alpha &= \pm n \end{aligned}$$

in dobimo

$$\begin{aligned} R_n(r) &= A_n r^n + B_n r^{-n}, \quad n > 0, \\ R_0(r) &= A_0 + B_0 \log r. \end{aligned}$$

Splošna rešitev je

$$\begin{aligned} &\psi(\boldsymbol{x}) = A_0 + B_0 \log r + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n r^n + B_n r^{-n}\right) \cos n\varphi + \left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right) \sin n\varphi \right], \end{aligned}$$

kjer smo zamenjali imena konstant

$$\begin{aligned} A_n C_n &\mapsto A_n, \\ B_n C_n &\mapsto B_n, \\ A_n D_n &\mapsto C_n, \\ B_n D_n &\mapsto D_n. \end{aligned}$$

Pogoj (3.48) pove

$$\frac{B_0}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a} \left[\left(A_n a^n - B_n a^{-n} \right) \cos n\varphi + \left(C_n a^n - D_n a^{-n} \right) \sin n\varphi \right] = 0,$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} B_n &= a^{2n} A_n, \\ D_n &= a^{2n} C_n, \\ B_0 &= 0. \end{aligned}$$

Ker je aditivna konstanta A_0 odveč, dobimo

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(r^n + \frac{a^{2n}}{r^n} \right) \left(A_n \cos n\varphi + C_n \sin n\varphi \right).$$

Pogoj (3.49) sedaj pove

$$\begin{aligned} A_1 &= -V, \\ A_n &= 0, \quad n > 1, \\ C_n &= 0, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

in zato

$$\psi(\boldsymbol{x}) = -V \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \varphi,$$

ali

$$\psi(\boldsymbol{x}) = -V x \left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right).$$

3.3.2 Obtekanje krogle

Rešujemo isto nalogo kot v podrazdelku 3.3.1, le da je ovira krogla s polmerom a. Os z obrnemo v smer toka in nalogo rešujemo v sfernih koordinatah

$$\Delta \psi(\boldsymbol{x}) = 0, \quad r > a, \tag{3.53}$$

$$\left. \frac{\partial \psi(\boldsymbol{x})}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \tag{3.54}$$

$$\psi(\boldsymbol{x}) \sim -V z = -V r \cos \vartheta, \quad r \to \infty. \tag{3.55}$$

Rešitev enačbe (3.53), neodvisna od φ, je

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n r^{-n-1} \right) P_n(\cos \vartheta).$$

Pogoj (3.54) pove

$$n A_n a^{n-1} - (n+1) B_n a^{-n-2} = 0$$

ali

$$B_n = \frac{n}{n+1} a^{2n+1} A_n$$

in dobimo

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(r^n + \frac{n}{n+1} \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\vartheta)$$

(aditivno konstanto A_0 opustimo). Pogoj (3.55) sedaj pove

$$\begin{aligned} A_1 &= -V, \\ A_n &= 0, \quad n > 1 \end{aligned}$$

in zato

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{x}) &= -V \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos\vartheta = \\ &= -V z \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right). \end{aligned}$$

3.4 Navierjeve enačbe

Za razliko od CFD je linearna elastomehanika dovolj preprosta, da si lahko privoščimo njen pregled. Uporabljali bomo tenzorsko pisavo, kjer so u_i (kovariantne) komponente vektorja $\boldsymbol{u}$. Funkcije $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ v primeru nekartezičnih koordinat *niso* komponente tenzorja. Namesto parcialnih odvodov moramo vzeti parcialne odvode, popravljene tako, da bomo res dobili komponente nekega tenzorja. Označujemo ga z $u_{i,j}$ in pri tem vejica v indeksu ponazarja odvajanje, natančneje, *kovariantno odvajanje*. Točna oblika kovariantnega odvoda nas ne zanima, a v primeru kartezičnih koordinat je kovariantni odvod isto kot parcialni odvod in to nam bo zaenkrat zadoščalo.

Opazujemo elastično telo in elastične deformacije. Vektor $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ naj pove, kako se pri deformiranju premakne točka $\boldsymbol{x}$ (*deformacija*). Togi premiki (translacija in rotacija) nimajo z elastičnostjo nič opraviti, zato uvedemo *deformacijski tenzor* $\boldsymbol{e}$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \tag{3.56}$$

Tenzor $\boldsymbol{e}$ ima lastnost, da je $\boldsymbol{e} = 0$ tedaj in le tedaj, ko obstajata konstanti $\boldsymbol{a}$ in $\boldsymbol{b}$, da je

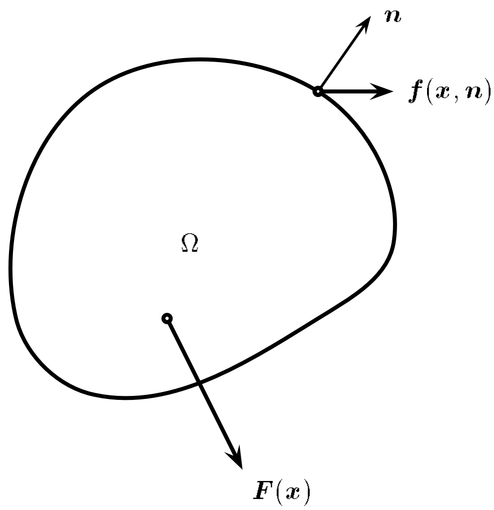
$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{x},$$

torej, če je, (pri majhnem $\boldsymbol{b}$), $\boldsymbol{u}$ tog pomik.

Če iz telesa izrežemo kos Ω, delujejo nanj, glej sliko 3.7, dvojne sile

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ gostota volumskih sil, na primer *teža*, $\boldsymbol{F} = \rho \boldsymbol{g}$ in

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$ gostota površinskih sil, s katerimi delujejo na Ω sosednji deli telesa, na primer *hidrostatični tlak*.



Slika 3.7: Elastične sile

Če telo miruje, morajo biti vse sile v ravnotežju

$$\oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n})\, dS + \int_\Omega \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\, dV = 0. \tag{3.57}$$

Predpostavljamo, da je polje $\boldsymbol{f}$ zvezno. *Cauchyjev fundamentalni izrek* [20] potem trdi, da obstaja tako tenzorsko polje $\boldsymbol{\tau}$, da je

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}, \tag{3.58}$$

ali po komponentah

$$f_i = \tau_{ij} n_j, \tag{3.59}$$

kjer smo uporabili Einsteinov[2] *sumacijski dogovor*, po katerem moramo v vsakem členu, kjer se kakšen indeks podvoji, razumeti vsoto po vseh možnih vrednostih, 1, 2 in 3 v našem primeru.

Tenzor $\boldsymbol{\tau}$ imenujemo *napetostni tenzor*. Ravnotežne enačbe (3.57) sedaj prepišemo v

$$\oint_{\partial\Omega} \tau_{ij} n_j\, dS + \int_\Omega F_i\, dV \quad = \quad 0,$$

ali po Gaußovem izreku,

$$\int_\Omega (\tau_{ij,j} + F_i)\; dV \quad = \quad 0.$$

[2]Albert Einstein (1879-1955) je bil morda največji teoretični fizik vseh časov.

Te enačbe veljajo za vsak del telesa, zato sledijo *ravnotežne enačbe*

$$\tau_{ij,j} + F_i = 0 \tag{3.60}$$

ali

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{F} = 0. \tag{3.61}$$

K ravnotežnim enačbam sodijo še robni pogoji. Na delu roba utegne biti predpisana gostota sile $\boldsymbol{f}$. Na takem delu roba velja

$$\tau_{ij} n_j = f_i .$$

Podobno je lahko na delu roba predpisan pomik $\boldsymbol{u}$ ali pa kakšna druga kombinacija sile in pomika.

Napetostni tenzor $\boldsymbol{\tau}$ ima 9 komponent, ravnotežne enačbe (3.60) so tri, zato iščemo naprej.

Če se telo ne vrti, (ali če se vrti s konstantno kotno hitrostjo okrog neke osi), je vsota vseh navorov enaka nič:

$$\oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{n})\, dS + \int_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{F}\, dV = 0,$$

ali po komponentah,

$$\oint_{\partial\Omega} \varepsilon_{lki} x_k \tau_{ij} n_j\, dS + \int_{\Omega} \varepsilon_{lki} x_k F_i\, dV = 0,$$

kjer je ε *popolnoma antisimetrični enotski tenzor.*

Popolnoma antisimetričen tenzor je tenzor istega reda kot je dimenzija prostora in kjer vsaka komponenta spremeni znak, če dva indeksa zamenjamo. Zato imajo vse od nič različne komponente po absolutni vrednosti isto vrednost e_{123}, predznak pa je določen s parnostjo permutacije števil 123. Enotski pri tem pomeni, da je $e_{123} = 1$.

Gaußov izrek nam sedaj pove, ker so ε_{lki} konstante,

$$\varepsilon_{lki} \int_{\Omega} \left[\left(x_k \tau_{ij} \right)_{,j} + x_k F_i \right] dV = 0.$$

Ker je Ω še vedno poljuben del telesa, je integrand enak nič

$$\varepsilon_{lki} \left[x_k \tau_{ij,j} + x_{k,j} \tau_{ij} + x_k F_i \right] = 0,$$

ali

$$\varepsilon_{lki} x_k \left(\tau_{ij,j} + F_i \right) + \varepsilon_{lki} \tau_{ik} = 0.$$

Zaradi ravnotežnih enačb (3.60) dobimo

$$\varepsilon_{lki} \tau_{ik} = 0,$$

ali

$$\tau_{ik} = \tau_{ki}. \tag{3.62}$$

Tako je tenzor $\boldsymbol{\tau}$ simetričen in ima samo 6 neodvisnih komponent.

Napetosti $\boldsymbol{\tau}$ in deformacije $\boldsymbol{e}$ morajo biti povezane. Pri majhnih deformacijah je upravičena *linearna* zveza (*Hookeov*[3] *zakon*)

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\, e_{kl}, \tag{3.63}$$

kjer so C_{ijkl} elastične konstante. Le-teh ni $3^4 = 81$, ker sta $\boldsymbol{\tau}$ in $\boldsymbol{e}$ simetrična tenzorja in velja

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{jikl}, \\ C_{ijkl} &= C_{ijlk}. \end{aligned}$$

Predpostavka o obstoju potencialne energije vodi še do ene simetrije

$$C_{ijkl} = C_{klij}.$$

Skrbno štetje sedaj pove, da imamo 21 neodvisnih elastičnih konstant. V najsplošnejšem primeru anizotropnega telesa je res vseh 21 konstant neodvisnih. Običajno pa imamo opravka z *izotropnim telesom*. To pomeni naslednje: če kakorkoli zasučemo koordinatni sistem, mora ostati Hookeov zakon nespremenjen. Da bo to res, mora biti

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl}$$

in imamo vsega dve elastični konstanti, λ in μ. To sta Laméjevi[4] elastični konstanti. Za izotropno telo se sedaj Hookeov zakon (3.63) glasi

$$\tau_{ij} = \lambda\delta_{ij}e_{kk} + 2\mu e_{ij}. \tag{3.64}$$

Enačb je sedaj dovolj: po Hookeovem zakonu izrazimo $\boldsymbol{\tau}$ z $\boldsymbol{e}$, le tega z $\boldsymbol{u}$, in to vstavimo v ravnotežne enačbe (3.60). Rezultat so tri enačbe za tri komponente vektorja $\boldsymbol{u}$. To so *Navierjeve*[5] *ravnotežne enačbe*

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F} = 0. \tag{3.65}$$

3.4.1 Obremenitev na nateg

Laméjevi elastični konstanti sta definirani umetno kot sorazmernostni konstanti v linearni funkciji. Poiščimo preprost model, ki bo povedal, kako ju izmeriti.

Vzemimo dolg valj s presekom Ω (žica) in ga obremenimo na nateg. Rešitev kar uganemo: razumno je predpostaviti, da je le

$$\tau_{33} = \mathrm{const.} \neq 0,$$

[3]Robert Hooke (1635-1703) je bil angleški fizik.
[4]Gabriel Lamé (1795-1870) je bil francoski matematik.
[5]Louis Navier (1785-1836) je bil francoski fizik.

ostale komponente tenzorja $\boldsymbol{\tau}$ pa so enake nič. Ker volumskih sil $\boldsymbol{F}$ ni, je tak $\boldsymbol{\tau}$ že rešitev ravnotežnih enačb (3.60), ni pa rečeno, da obstaja tak vektor $\boldsymbol{u}$, iz katerega lahko dobimo naš $\boldsymbol{\tau}$.

Vsekakor lahko izračunamo tenzor $\boldsymbol{e}$. Iz enačb (3.64) dobimo

$$\tau_{kk} = (3\lambda + 2\mu)\, e_{kk},$$

torej

$$2\mu e_{ij} = \tau_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\delta_{ij}\tau_{kk}. \tag{3.66}$$

Če označimo

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix},$$

je

$$\begin{aligned} e_{33} &= u_{3,3} = \\ &= \frac{1}{2\mu}\left(\tau_{33} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\tau_{33}\right) = \\ &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\tau_{33}. \end{aligned}$$

Denimo, da je komponenta u_3 odvisna le od x_3. Tedaj dobimo

$$u_3 = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} x_3 \tau_{33},$$

ali

$$\frac{u_3}{x_3} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\tau_{33}.$$

Če to primerjamo s standardnim Hookeovim zakonom

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{S},$$

kjer je E *Youngov*[6] *modul elastičnosti*, sledi

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \tag{3.67}$$

Dalje, iz enačbe (3.66) dobimo

$$\begin{aligned} e_{11} &= u_{1,1} = \\ &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\tau_{33} = \\ &= -\frac{\sigma}{E}\tau_{33}, \end{aligned}$$

[6] Thomas Young (1773-1829) je bil angleški fizik.

kjer smo označili

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)},$$

ali

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}. \tag{3.68}$$

Konstanto σ imenujemo *Poissonovo razmerje*. Sledi

$$\boldsymbol{u} = \frac{F}{ES}\begin{bmatrix} -\sigma x_1 \\ -\sigma x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \tag{3.69}$$

kjer je $\frac{F}{S} = \tau_{33}$. Če od tu izračunamo najprej $\boldsymbol{e}$ in nato še $\boldsymbol{\tau}$, bomo res dobili samo komponento

$$\tau_{33} = \frac{F}{S}$$

različno od nič.

Z merjenjem raztezka napete žice torej lahko izmerimo Youngov modul E. Količina σ je težje merljiva kot E, saj σ pove, kako se nategnjena žica tanjša. Konstanto σ bomo zato opustili in se lotili drugega modela, torzije, s katero bomo lahko izmerili konstanto μ direktno, za merjenje konstante λ pa se moramo še vedno zateči k obremenitvi na nateg in enačbi (3.67), iz katere lahko pri znanih μ in E izračunamo λ. Dokler pa tega ne bomo storili, lahko izmerimo E in σ, in iz enačb (3.67) in (3.68) lahko izračunamo konstanti λ in μ, ki nastopata v Laméjevih enačbah.

3.4.2 Torzija

Vzemimo pokončen valj z osnovo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Z navorom M valj zvijemo (torzija), zato se presek na višini x_3 zavrti za kot αx_3, kjer je α zasuk na enoto višine.

Os skozi težišče preseka, okrog katere se presek zavrti, vzamemo za os x_3. Pri majhnem zasuku α ima deformacijski vektor

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

komponenti

$$\begin{aligned} u_1 &= -\alpha x_3 x_2, \\ u_2 &= \alpha x_3 x_1. \end{aligned}$$

Vsak presek se zato zvije, vendar vsi enako in to sorazmerno zasuku:

$$u_3 = \alpha\phi(x_1, x_2).$$

Sledi

$$\begin{aligned} e_{11} &= 0, \\ e_{22} &= 0, \\ e_{33} &= 0 \end{aligned}$$

in

$$e_{kk} = \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0,$$

torej, po pričakovanju, *ni prostorske dilatacije*. Dalje sledi

$$\begin{aligned} e_{13} = e_{31} &= \frac{\alpha}{2}\left(\phi_{,1} - x_2\right), \\ e_{23} = e_{32} &= \frac{\alpha}{2}\left(\phi_{,2} + x_1\right). \end{aligned}$$

Vse ostale komponente tenzorja $\boldsymbol{e}$ so nič. Hookeov zakon (3.64) pove

$$\tau_{13} = \tau_{31} = \alpha\mu\left(\phi_{,1} - x_2\right), \tag{3.70}$$

$$\tau_{23} = \tau_{32} = \alpha\mu\left(\phi_{,2} + x_1\right), \tag{3.71}$$

ostale komponente so nič.

Ker volumskih sil $\boldsymbol{F}$ ni, nam ravnotežne enačbe (3.60) povedo

$$\tau_{31,1} + \tau_{32,2} = 0$$

ali

$$\Delta\phi := \phi_{,ii} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} = 0. \tag{3.72}$$

Na plašču valja je zunanja sila enaka nič:

$$\left[\tau_{31} n_1 + \tau_{32} n_2\right]_{\partial\Omega} = 0,$$

ali

$$\left[\left(\phi_{,1} - x_2\right) n_1 + \left(\phi_{,2} + x_1\right) n_2\right]_{\partial\Omega} = 0.$$

Poslednji pogoj nam nič ne ugaja, zato uvedemo *konjugirano funkcijo* φ s Cauchy-Riemannovima enačbama

$$\begin{aligned} \phi_{,1} &= \varphi_{,2}, \\ \phi_{,2} &= -\varphi_{,1}. \end{aligned} \tag{3.73}$$

Za funkcijo φ še vedno velja

$$\Delta\varphi = 0,$$

na robu pa dobimo pogoj

$$\left[\left(\varphi_{,2} - x_2\right) n_1 - \left(\varphi_{,1} - x_1\right) n_2\right]_{\partial\Omega} = 0.$$

Pišimo

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \psi(x_1, x_2) \tag{3.74}$$

in dobimo enačbo

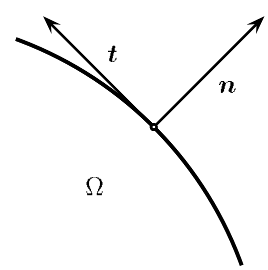
$$-\Delta\psi = 2,$$

na robu pa, (glej sliko 3.8),

$$\begin{aligned} \left[\psi_{,2} n_1 - \psi_{,1} n_2\right]_{\partial\Omega} &= 0, \\ \left[\psi_{,2} t_2 + \psi_{,1} t_1\right]_{\partial\Omega} &= 0, \\ \left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned}$$

torej

$$\psi|_{\partial\Omega} = \text{const.}$$



Slika 3.8: Smer normale in tangente

Ker aditivno konstanto lahko opustimo, dobimo končno

$$-\Delta\psi = 2, \tag{3.75}$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.76}$$

Iz enačb (3.70), (3.71), (3.73) in (3.74) sledi

$$\begin{aligned} \tau_{13} = \tau_{31} &= \alpha\mu\left(\varphi_{,2} - x_2\right) = \alpha\mu\psi_{,2}, \\ \tau_{23} = \tau_{32} &= \alpha\mu\left(-\varphi_{,1} + x_1\right) = -\alpha\mu\psi_{,1}. \end{aligned}$$

Gostota sile na zgornjem preseku,

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

je

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha\mu \begin{bmatrix} \psi_{,2} \\ -\psi_{,1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

in navor, ki ga povzroči, je enak

$$\boldsymbol{M} = \int_\Omega \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f} \, dS.$$

Računamo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & x_2 & 0 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (x_1 f_2 - x_2 f_1)\, \boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

Zato je

$$\boldsymbol{M} = M\boldsymbol{k}$$

in

$$\begin{aligned} M &= \int_\Omega (x_1 f_2 - x_2 f_1)\; dS = \\ &= -\alpha\mu \int_\Omega (x_1 \psi_{,1} + x_2 \psi_{,2})\; dS = \\ &= -\alpha\mu \int_\Omega \boldsymbol{x} \cdot \operatorname{grad} \psi \, dS = \\ &= -\alpha\mu \int_\Omega [\operatorname{div}(\psi \boldsymbol{x}) - \psi \operatorname{div} \boldsymbol{x}]\; dS = \\ &= -\alpha\mu \oint_{\partial\Omega} \psi \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} \, ds + \alpha\mu \int_\Omega \psi \operatorname{div} \boldsymbol{x} \, dS. \end{aligned}$$

Ker je ψ na robu enak nič in $\operatorname{div} \boldsymbol{x} = 2$, dobimo

$$M = 2\alpha\mu \int_\Omega \psi \, dS.$$

Končno sledi

$$M = D\alpha, \tag{3.77}$$

kjer je

$$D = 2\mu \int_\Omega \psi \, dS \tag{3.78}$$

torzijska konstanta, ki jo lahko lepo merimo s torzijskim nihalom.

3.4.3 Okrogel valj

Okrogel valj je pri dani ploščini preseka najbolj tog. Polmer valja naj bo a. Rešiti moramo nalogo (3.75-3.76). Nalogo rešujemo v polarnih kordinatah (r, φ). Rešitev bo neodvisna od polarnega kota, zato dobimo

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\psi(r)}{dr} &= -2,\\ \psi(a) &= 0.\end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned}[r\psi'(r)]' &= -2r,\\ r\psi'(r) &= C - r^2,\\ \psi'(r) &= \frac{C}{r} - r,\\ \psi(r) &= C\log\frac{r}{a} + \frac{a^2-r^2}{2},\end{aligned}$$

kjer smo robni pogoj $\psi(a) = 0$ že upoštevali. Ker mora biti rešitev pri $r = 0$ omejena, sledi $C = 0$ in

$$\psi(r) = \frac{a^2-r^2}{2}.$$

Končno dobimo

$$\begin{aligned}\int_\Omega \psi(r)\,dS &= \pi\int_0^a (a^2-r^2)r\,dr = \\ &= \frac{\pi a^4}{4} = \\ &= \frac{S^2}{4\pi},\end{aligned}$$

kjer je S ploščina preseka. Za torzijsko konstanto okroglega valja dobimo

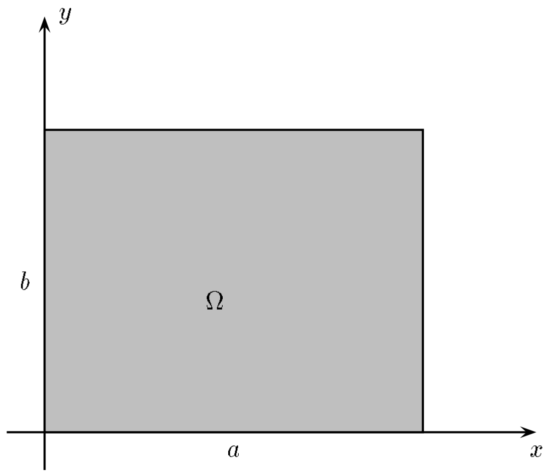
$$D = \frac{\mu S^2}{2\pi}.$$

Za poljuben presek naj bo

$$D = \gamma\frac{\mu S^2}{2\pi}, \tag{3.79}$$

kjer je γ brezdimenzijska geometrijska konstanta. Pri krogu je $\gamma = 1$, sicer pa je manjša:

$$\gamma = \frac{4\pi}{S^2}\int_\Omega \psi(\boldsymbol{x})\,dS. \tag{3.80}$$



Slika 3.9: Pravokotni presek

3.4.4 Pravokotni presek

Za netrivialen primer vzemimo pravokoten presek, slika 3.9.

Na pravokotniku

$$\Omega = (0,a) \times (0,b)$$

si oglejmo operator

$$\begin{aligned} Au &= -\Delta u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \mathcal{D}_A &= \left\{ u; \quad u \in C^2(\overline{\Omega}), \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Operator A je simetričen:

$$\begin{aligned} (Au, v) &= -\int_\Omega \overline{v} \operatorname{div} \operatorname{grad} u \, dS = \\ &= -\int_\Omega \left[\operatorname{div} (\overline{v} \operatorname{grad} u) - \operatorname{grad} u \cdot \overline{\operatorname{grad} v} \right] dS = \\ &= -\oint_{\partial\Omega} \overline{v} \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{n} \, ds + \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \overline{\operatorname{grad} v} \, dS = \\ &= \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \overline{\operatorname{grad} v} \, dS. \end{aligned}$$

Poslednji izraz je očitno simetričen v u in v.

Poiščimo lastne funkcije operatorja A. V ta namen rešimo enačbo

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u.$$

Poskusimo v obliki produkta

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

Sledi

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Vsak člen zase je konstanten:

$$\begin{aligned} X''(x) + \alpha^2 X(x) &= 0, \\ Y''(y) + \beta^2 Y(y) &= 0, \end{aligned}$$

kjer je

$$\lambda = \alpha^2 + \beta^2.$$

Da bo robnemu pogoju zadoščeno, mora biti

$$\begin{aligned} X(x) &= \sin\frac{n\pi x}{a}, \quad \alpha = \frac{n\pi}{a}, \\ Y(y) &= \sin\frac{m\pi y}{b}, \quad \beta = \frac{m\pi}{b} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} u_{nm}(x,y) &= \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}, \\ \lambda_{nm} &= \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right). \end{aligned}$$

Kratek račun nam dá

$$\|u_{nm}\|^2 = \frac{ab}{4}.$$

Sistem lastnih funkcij je očitno kompleten.

Sedaj vemo, glej [24], da je rešitev enačbe

$$A\psi = f$$

kar

$$\psi = \sum_{nm} \frac{\langle f, u_{nm}\rangle}{\lambda_{nm}\|u_{nm}\|^2} u_{nm}.$$

V našem primeru je

$$f = 2$$

in

$$\begin{aligned} \langle f, u_{nm}\rangle &= 2\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}\,dx \int_0^b \sin\frac{m\pi y}{b}\,dy = \\ &= \frac{2ab}{nm\pi^2}(1-\cos n\pi)(1-\cos m\pi) = \\ &= \frac{8ab}{nm\pi^2}, \quad n, m \text{ lih.} \end{aligned}$$

Sledi

$$\psi(x,y) = \sum_{n,m=1,3,5,\ldots} \frac{8ab}{nm\pi^2} \frac{1}{\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)} \frac{4}{ab} u_{nm}(x,y),$$

ali

$$\psi(x,y) = \frac{32}{\pi^4} \sum_{n,m=1,3,5,\ldots} \frac{u_{nm}(x,y)}{nm\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)}.$$

Ker je pri lihih n in m

$$\int_\Omega u_{nm}(\boldsymbol{x})\, dS = \frac{4ab}{nm\pi^2}$$

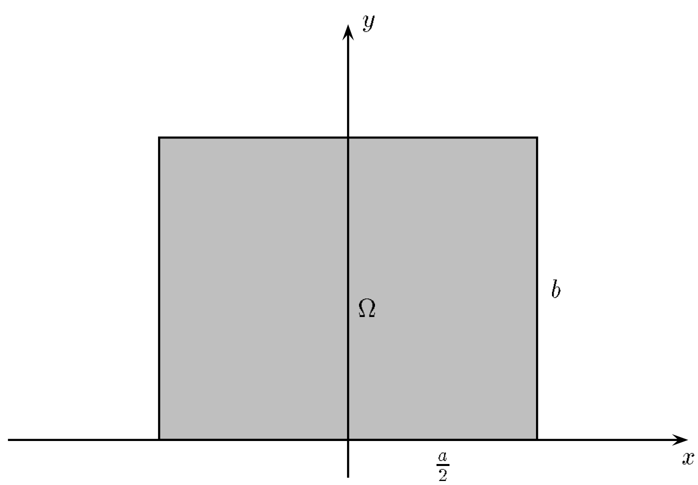
in iz enačbe (3.80)

$$S = ab,$$

sledi

$$\gamma = \frac{512}{ab\pi^5} \sum_{n,m=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n^2m^2\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)}. \tag{3.81}$$

Vrsta (3.81) ni ravno bleščeče konvergentna, zato poskusimo še drugače.



Slika 3.10: Premaknjen pravokoten presek

Premaknemo pravokotnik, glej sliko 3.10, in pišemo

$$\psi(x,y) = y(b-y) - u(x,y),$$

da bo enačba postala homogena in da bo del robnega pogoja pravtako ostal homogen:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \\ u(x,0) &= 0, \\ u(x,b) &= 0, \end{aligned}$$

zato pa

$$u\left(\pm\frac{a}{2}, y\right) = y(b-y).$$

Nastavek

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

vodi do

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0.$$

Vsak člen zase je konstanten in da bo

$$Y(0) = Y(b) = 0,$$

mora biti

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

in dobimo

$$u_n(x,y) = \cosh\frac{n\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

ker je rešitev soda funkcija x-a, ter

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh\frac{n\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Sedaj vzamemo $x = \frac{a}{2}$ in sledi

$$\begin{aligned} C_n \cosh\frac{n\pi a}{2b} &= \frac{2}{b}\int_0^b y(b-y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy = \\ &= \frac{2}{n\pi}\int_0^b (b-2y)\cos\frac{n\pi y}{b}\,dy = \\ &= \frac{4b}{n^2\pi^2}\int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b}\,dy = \\ &= \frac{8b^2}{n^3\pi^3}, \quad n \text{ lih}, \end{aligned}$$

torej

$$u(x,y) = \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} \frac{\cosh \frac{n\pi x}{b}}{\cosh \frac{n\pi a}{2b}} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Dalje velja pri lihih n

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} \cosh \frac{n\pi x}{b}\,dx &= \frac{2b}{n\pi} \sinh \frac{n\pi a}{2b}, \\ \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b}\,dy &= \frac{2b}{n\pi} \end{aligned}$$

in

$$\int_\Omega u(x,y)\,dV = \frac{32b^4}{\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi a}{2b}.$$

Ker je

$$\begin{aligned} \int_\Omega y(b-y)\,dV &= a \int_0^b y(b-y)\,dy = \\ &= ab^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \\ &= \frac{ab^3}{6}, \end{aligned}$$

je

$$\gamma = \frac{4\pi}{a^2 b^2} \left[\frac{ab^3}{6} - \frac{32b^4}{\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi a}{2b} \right].$$

Pišimo še

$$\xi = \frac{a}{b}$$

in dobimo

$$\gamma(\xi) = 4\pi \left[\frac{1}{6\xi} - \frac{32}{\xi^2 \pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi \xi}{2} \right].$$

Za kvadrat ($\xi = 1$) dobimo $\gamma = 0.883271\cdots$.

3.4.5 Potresni valovi

Vemo, da velja enačba (3.65)

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F} = 0,$$

ali, ker je po Newtonovih zakonih

$$\boldsymbol{F} = -\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2},$$

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{u} - \mu\,\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} - \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = 0. \tag{3.82}$$

Vemo, da lahko vsako (dovolj gladko) vektorsko polje $\boldsymbol{u}$ zapišemo v obliki

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2,$$

kjer je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \mathrm{grad}\,\boldsymbol{\varphi}, \\ \boldsymbol{u}_2 &= \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}. \end{aligned}$$

Upoštevamo, da je rot grad $= 0$ in div rot $= 0$ in dobimo

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_1 - \mu\,\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_2 - \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_1}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_2}{\partial t^2} = 0. \tag{3.83}$$

Od tod sledi

$$\mathrm{div}\left[(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_1 - \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_1}{\partial t^2}\right] = 0.$$

Ker je $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_1 = 0$, sledi še

$$\mathrm{rot}\left[(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_1 - \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_1}{\partial t^2}\right] = 0.$$

Označimo

$$\boldsymbol{U} = (\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_1 - \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_1}{\partial t^2} \tag{3.84}$$

in dobimo

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{U} = 0, \tag{3.85}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{U} = 0. \tag{3.86}$$

Iz enačbe (3.86) sledi

$$\boldsymbol{U} = \mathrm{grad}\,\psi$$

in iz enačbe (3.85) sedaj sledi

$$\Delta\psi = 0.$$

Ker je $\lim_{\boldsymbol{x}\to\infty} \boldsymbol{U} = 0$, sledi $\psi = 0$ po vsem prostoru in zato tudi $\boldsymbol{U} = 0$ ali

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_1}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_1. \tag{3.87}$$

V kartezičnem koordinatnem sistemu velja identiteta

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} - \Delta\boldsymbol{u},$$

zato lahko enačbo (3.87) zapišemo v obliki

$$\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_1}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\Delta\boldsymbol{u}_1, \tag{3.88}$$

ker je $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_1 = 0$. To je valovna enačba. Hitrost valovanja je

$$c_{\text{long}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \tag{3.89}$$

Ker je $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_1 = 0$, so rešitve enačbe (3.88) *longitudinalna valovanja.*

Po drugi strani iz enačb (3.83) in (3.87) dobimo še

$$\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_2}{\partial t^2} = \mu\Delta\boldsymbol{u}_2. \tag{3.90}$$

To je spet valovna enačba. Hitrost širjenja je to pot

$$c_{\text{trans}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{3.91}$$

To je *transverzalno valovanje.*

3.5 Specialna teorija relativnosti

V tem razdelku si bomo ogledali, kako so *Maxwellove*[7] *enačbe* preprosta posledica specialne teorije relativnosti. Ves razdelek je v drobnem tisku, da poudari, da to ni obvezna snov, čeprav je zelo lepa in poučna.

3.5.1 Princip relativnosti

Koordinatni sistem, v katerem se prosto telo, to je telo, na katerega ne deluje nobena (zunanja) sila, giblje enakomerno premočrtno, se imenuje *inercialni sistem.* Eksperimenti kažejo, da velja *princip relativnosti*: naravni zakoni, napisani v kateremkoli inercialnem sistemu, se glase vedno enako.

Newtonova mehanika spoštuje *Galilejev*[8] *princip relativnosti.* Newtonove enačbe gibanja

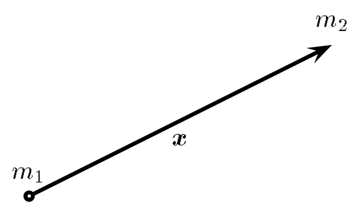
$$\boldsymbol{F} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}$$

so invariantne na *Galilejeve transformacije*

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& x' + Vt' \\ y &=& y' \\ z &=& z' \\ t &=& t' \end{array}\right\}. \tag{3.92}$$

Seveda, v Newtonovem svetu je interakcija trenutna: gravitacijska sila

$$\boldsymbol{F} = G\frac{m_1 m_2 \boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|_3},$$



Slika 3.11: Gravitacijska sila

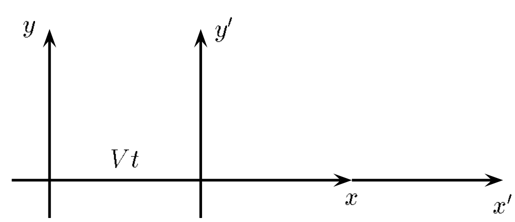
glej sliko 3.11, je odvisna od trenutne lege masnih točk m_1 in m_2. Po Newtonu se ta sila v trenutku spremeni, če premaknemo maso m_2. Izkušnja pa kaže, da je takšna trenutna interakcija nemogoča, interakcija se širi z neko končno hitrostjo $c \approx 3 \times 10^8$m/s, to je, s hitrostjo svetlobe v vakuumu.

Princip relativnosti, povezan s končno hitrostjo širjenja interakcije, ima daljnosežne posledice: *Einsteinova specialna teorija relativnosti.*

Kot prvi primer, zakon o vektorskem seštevanju hitrosti *ne* more veljati, saj bi morala biti hitrost interakcije (svetlobe) v gibajočem koordinatnem sistemu drugačna kot v mirujočem — v nasprotju s principom relativnosti. Michelsonov poskus (1881) je pokazal, da princip relativnosti (vsaj v tem primeru) velja, zato Galilejeva transformacija (3.92) *ne* more biti pravilna.

Težavi se izognemo, če dopustimo, da čas *ni* absoluten, ampak da ima vsak inercialni sistem svoj čas.

Naj bo K nek inercialni sistem, K' pa nek drug inercialni sistem, ki se glede na prvega giblje enakomerno s hitrostjo V v smeri osi x, glej sliko 3.12. Opazujmo dogodek, ko opazovalec v



Slika 3.12: Dva inercialna sistema

sistemu K iz točke (x_1, y_1, z_1) v času t_1 odda svetlobni signal, ki prispe v točko (x_2, y_2, z_2) v času t_2. Ker se signal giblje s hitrostjo c, preleti pot $c(t_2 - t_1)$, ta pot pa je enaka

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

torej velja

$$s_{12}^2 \quad := \quad c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0.$$

[7] James Clerk Maxwell (1831-1979) je bil angleški fizik.

[8] Galileo Galilei (1564-1642) je bil italijanski fizik in astronom.

Količino s_{12} imenujemo *interval*. Po istem razmisleku je

$$s'^2_{12} \quad := \quad c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 = 0.$$

Zato velja: *če je interval v enem inercialnem sistemu enak nič, tedaj je enak nič v vsakem inercialnem sistemu.*

Če sta dogodka (1) in (2) blizu, dobimo v limiti

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{3.93}$$

torej vemo, če je $ds = 0$ v enem inercialnem sistemu, tedaj je $ds' = 0$ v vsakem inercialnem sistemu. Ker sta ds in ds' diferenciala istega reda, to pomeni, da sta sorazmerna

$$ds^2 \quad = \quad a\, ds'^2.$$

Koeficient a ne more biti odvisen koordinat ali od časa, saj bi to nasprotovalo homogenosti prostora in časa. Koeficient a pravtako ne more biti odvisen od smeri relativne hitrosti, saj bi to nasprotovalo izotropnosti prostora.

Vzemimo tri inercialne sisteme K, K_1 in K_2, kjer se K_1 in K_2 gibljeta s hitrostjo V_1 oz. V_2 glede na sistem K. Potem mora biti

$$\begin{aligned} ds^2 &= a\,(V_1)\, ds_1^2, \\ ds^2 &= a\,(V_2)\, ds_2^2, \\ ds_1^2 &= a\,(V_{12})\, ds_2^2, \end{aligned}$$

od koder sledi

$$\frac{a\,(V_2)}{a\,(V_1)} = a\,(V_{12})\,. \tag{3.94}$$

Desna stran je odvisna od kota med vektorjema $\boldsymbol{V}_1$ in $\boldsymbol{V}_2$, leva stran pa ne, zato mora biti $a(V)$ konstanta in sicer zaradi (3.94) enaka 1 . Tako smo dokazali: količina ds, definirana z (3.93), je v vseh inercialnih sistemih ista.

3.5.2 Mirovni čas

Naj bo $K(t, x, y, z)$ nek inercialni sistem. Vzemimo uro, ki se poljubno giblje. V vsakem trenutku lahko smatramo gibanje za enakomerno, tako da lahko z uro vred potuje drug inercialni koordinatni sistem $K'(t', x', y', z')$.

V času dt se ura premakne za $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Kakšen čas dt' registrira ura? V sistemu K' ura miruje, zato je $dx' = dy' = dz' = 0$ in iz

$$ds^2 \quad = \quad ds'^2$$

sledi

$$ds \quad = \quad c\, dt',$$

ali

$$dt' = \frac{ds}{c} \tag{3.95}$$

in

$$\begin{aligned} c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 &= c^2 dt'^2, \\ dt' &= \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}}\, dt, \end{aligned}$$

ali

$$dt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt. \tag{3.96}$$

Čas v koordinatnem sistemu, kjer telo miruje, imenujemo *lastni čas* ali *mirovni čas*.

Enačba (3.96) pove, da tečejo gibajoče se ure počasneje kot ure, ki mirujejo.

Enačbo (3.96) sedaj integrirajmo (po neki poti v (t, x, y, z) prostoru) in če upoštevamo še enačbo (3.95), dobimo

$$\begin{aligned} t_2' - t_1' &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt = \\ &= \frac{1}{c} \int_{(t_1, x_1, y_1, z_1)}^{(t_2, x_2, y_2, z_2)} ds. \end{aligned}$$

Če telo miruje, je $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, $z_2 = z_1$, telo torej opiše odsek premice vzporedni osi t v štiridimenzionalnem prostoru (t, x, y, z). Vidimo, da je $\int ds$ *največji* takrat, ko telo *miruje*.

3.5.3 Lorentzova transformacija

Galilejeva transformacija (3.92) ne zadošča zahtevam relativnosti, ne ohranja (3.93), zato razmišljamo takole.

Namesto tridimenzionalnega (evklidskega) prostora (x, y, z) z neodvisnim parametrom t obravnavamo štiridimenzionalni (psevdo) evklidski prostor s koordinatami (ct, x, y, z). Namesto

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

imamo

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Zaradi minusov v tej formuli prostor (ct, x, y, z) v resnici ni evklidski. V vsakem primeru pa smatramo ct za koordinato, enakovredno koordinatam x, y in z.

Sedaj študirajmo rotacije v (ct, x, y, z) prostoru, to je transformacije, ki ohranjajo ds^2. Posebej si oglejmo *hiperbolično rotacijo* v (ct, x) ravnini:

$$\begin{aligned} cdt &= cdt' \cosh\psi + dx' \sinh\psi, \\ dx &= cdt' \sinh\psi + dx' \cosh\psi, \\ dy &= dy', \\ dz &= dz', \end{aligned} \tag{3.97}$$

kjer je ψ kot hiperbolične rotacije. Transformacija (3.97) očitno ohranja ds^2, torej je res iskana rotacija. V ravninah (ct, x), (ct, y), (ct, z) so rotacije hiperbolične, v ravninah (x, y), (y, z), (z, x) pa so rotacije običajne evklidske rotacije.

Kot ψ je odvisen lahko le od relativne hitrosti v sistema K' glede na sistem K. V sistemu K' izberimo $dx' = 0$. Dobimo

$$\begin{aligned} cdt &= cdt' \cosh\psi, \\ dx &= cdt' \sinh\psi \end{aligned}$$

in sledi

$$\frac{1}{c}\frac{dx}{dt} = \tanh\psi,$$

ali

$$\tanh\psi = \frac{v}{c},$$

kjer je v relativna hitrost sistema K' glede na sistem K. Od tod

$$\begin{aligned} \sinh\psi &= \frac{v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ \cosh\psi &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

in dobimo *Lorentzovo*[9] *transformacijo*

$$\begin{aligned} cdt &= \frac{cdt' + \frac{v}{c}dx'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ dx &= \frac{\frac{v}{c}cdt' + dx'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ dy &= dy', \\ dz &= dz'. \end{aligned} \tag{3.98}$$

Vsako množico štirih količin (A_0, A_1, A_2, A_3), ki se pri prehodu na drug inercialni sistem transformira kot četverica $(dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) := (cdt, dx, dy, dz)$, imenujemo *vektor četverec*. Pri Lorentzovi transformaciji preide vektor četverec (A^0, A^1, A^2, A^3) v četverec (A'^0, A'^1, A'^2, A'^3), kjer je

$$\begin{aligned} A^0 &= \frac{A'^0 + \frac{v}{c}A'^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ A^1 &= \frac{A'^1 + \frac{v}{c}A'^0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ A^2 &= A'^2, \\ A^3 &= A'^3. \end{aligned} \tag{3.99}$$

Pri taki transformaciji velja

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 \quad = \quad (A'^0)^2 - (A'^1)^2 - (A'^2)^2 - (A'^3)^2.$$

Temu nerodnemu pisanju se lahko izognemo, če uvedemo *metrični tenzor* g_{ik}:

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1, \\ g_{11} &= -1, \\ g_{22} &= -1, \\ g_{33} &= -1, \\ g_{ik} &= 0 \quad \text{pri } i \neq k. \end{aligned}$$

Tedaj lahko, na primer, pišemo

$$ds^2 \quad = \quad \sum_{i=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} g_{ik}dx^i dx^k.$$

Domenimo se še, da sumacijske znake opustimo in sprejmemo dogovor: če se isti (simbolični) indeks pojavi v istem členu dvakrat, enkrat kot zgornji indeks in enkrat kot spodnji indeks, je mišljena vsota od 0 do 3, torej pišemo

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k. \tag{3.100}$$

Komponente četverca z zgornjimi indeksi imenujemo *kontravariantne komponente*. Definiramo lahko tudi *kovariantne komponente*, pišemo jih s spodnjimi indeksi,

$$A_i = g_{ik}A^k. \tag{3.101}$$

Na primer,

$$\begin{aligned} dx_0 &= dx^0 = cdt, \\ dx_1 &= -dx^1 = -dx, \\ dx_2 &= -dx^2 = -dy, \\ dx_3 &= -dx^3 = -dz. \end{aligned}$$

[9] Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) je bil nemški fizik.

Tako dobimo

$$ds^2 = dx_i dx^i. \tag{3.102}$$

Če hočemo iz kovariantnih komponent izračunati kontravariantne komponente, moramo razrešiti linearen sistem enačb (3.101). Rešitev je v splošnem

$$A^k = g^{ki} A_i.$$

V našem primeru je matrika $[g_{ik}]$ kar diagonalna z elementi ± 1, zato je

$$g^{ik} = g_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poleg metričnega tenzorja g_{ik} je zanimiv še tenzor

$$\delta_i{}^k := g_{ij} g^{jk}.$$

Očitno je

$$\begin{aligned} \delta_0{}^0 &= 1, \\ \delta_1{}^1 &= 1, \\ \delta_2{}^2 &= 1, \\ \delta_3{}^3 &= 1, \\ \delta_i{}^k &= 0 \quad \text{pri } i \neq k. \end{aligned}$$

Tenzor $\delta_i{}^k$ ima lastnost, da je

$$\delta_i{}^k A_k = A_i,$$

zato tenzorju $\delta_i{}^k$ pravimo tudi *enotski tenzor* ali *substitucijski tenzor*.

Vektorje četverce pogosto pišemo v obliki

$$A^i = (A^0, \boldsymbol{A}),$$

kjer je $\boldsymbol{A}$ tridimenzionalen vektor

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix},$$

na primer

$$dx^i = (cdt, d\boldsymbol{x}).$$

Podobno kot kvadrat dolžine (3.102) lahko definiramo še *skalarni produkt* dveh četvercev

$$A_i B^i = g_{ik} A^i B^k.$$

Količine, ki se pri prehodu z enega v drug inercialni sistem transformirajo kot (zunanji) produkt dveh vektorjev, recimo $A^i B^k$, imenujemo *tenzorje* (drugega ranga).

Tenzorji g_{ik}, g^{ik} in $\delta_i{}^k$ so edini (pravi) tenzorji ranga 2, ki imajo v vseh inercialnih sistemih iste komponente.

Popolnoma antisimetrični tenzor v štirih dimenzijah

Zanimiv je še tenzor e^{iklm} četrtega ranga, ki ima tudi v vseh inercialnih sistemih iste komponente. Tenzor e^{iklm} je po definiciji *popolnoma antisimetričen tenzor*, normiran z zahtevo $e^{0123} = 1$. Zaradi popolne antisimetrije so vse komponente, kjer sta dva indeksa enaka, enake nič. Neničelne komponente imajo torej vse štiri indekse enake $(0,1,2,3)$, nekako permutirane. Če indekse (i,k,l,m) dobimo kot sodo permutacijo indeksov $(0,1,2,3)$, je $e^{iklm} = 1$,če je (i,k,l,m) liha permutacija indeksov $(0,1,2,3)$, je $e^{iklm} = -1$.

Velja še naslednje

$$\begin{aligned} e_{0123} &= g_{0i}g_{1k}g_{2l}g_{3m}e^{iklm} = \\ &= (-1)^3 e^{0123} = \\ &= -e^{0123} = \\ &= -1. \end{aligned}$$

Neničelnih komponent je toliko kot permutacij štirih elementov, torej $4! = 24$. Zato je

$$\begin{aligned} e_{iklm}e^{iklm} &= 24\, e_{0123}e^{0123} = \\ &= -24. \end{aligned}$$

Tenzor e^{iklm} se obnaša kot tenzor pri rotaciji štiridimenzionalnega prostora. Če pa prostor zrcalimo, recimo $x^i \longrightarrow -x^i$, bi morale nekatere komponente tenzorja e^{iklm} zamenjati znak, to pa se ne zgodi, ker ima e^{iklm} po definiciji v vseh inercialnih koordinatnih sistemih iste komponente. Tenzor e^{iklm} zato ni pravi tenzor. Kar pa se pri rotacijah obnaša kot pravi tenzor, mu pravimo *psevdo tenzor*.

Popolnoma antisimetrični tenzor v treh dimenzijah

Podobna zgodba velja v tridimenzionalnem (evklidskem) prostoru. Tu bomo za indekse uporabljali grške črke, grški indeksi tečejo po vrednostih x, y in z. Ker je $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, ni treba razlikovati med kovariantnimi in kontravariantnimi komponentami, pa tudi sumacijski dogovor sprostimo: seštevamo po vseh podvojenih indeksih, ne glede na lego.

Označimo z $e_{\alpha\beta\gamma}$ popolnoma antisimetrični tenzor normiran z zahtevo $e_{xyz} = 1$. Tenzor $e_{\alpha\beta\gamma}$ se spet pri rotacijah obnaša kot tenzor, pri zrcaljenjih pa ne; $e_{\alpha\beta\gamma}$ je psevdo tenzor.

Vzemimo dva prava vektorja $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{B}$, in tvorimo

$$C_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\gamma},$$

kjer je

$$C_{\beta\gamma} = A_\beta B_\gamma.$$

Računajmo

$$\begin{aligned} C_x &= \frac{1}{2}(C_{yz} - C_{zy}) = A_y B_z - A_z B_y, \\ C_y &= \frac{1}{2}(C_{zx} - C_{xz}) = A_z B_x - A_x B_z, \\ C_z &= \frac{1}{2}(C_{xy} - C_{yx}) = A_x B_y - A_y B_x. \end{aligned}$$

Očitno je

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}.$$

$\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{B}$ sta prava vektorja, $C_{\alpha\beta}$ je pravi tenzor, zato je C_α psevdo vektor.

Prave vektorje imenujemo *polarne vektorje*, psevdo vektorje pa *aksialne vektorje*. Vektorski produkt dveh polarnih vektorjev je na primer aksialni vektor.

Antisimetrični tenzor drugega ranga v štirih dimenzijah

Naj bo A^{ij} antisimetrični tenzor drugega ranga v (ct, x, y, z) prostoru

$$A^{ij} = -A^{ji}.$$

Komponente zložimo v matriko takole, indeks i šteje vrstice, indeks j pa stolpce:

$$A^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Izkaže se, da se pri Lorentzovi transformaciji trojica

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

obnaša kot pravi (polarni) vektor, trojica

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

pa kot aksialni vektor. Zato tak tenzor pišemo kot

$$A^{ij} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}),$$

od koder sledi

$$A_{ij} = (-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}).$$

3.5.4 Štiridimenzionalna hitrost

Oglejmo si vektor četverec

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}$$

kot analogijo *hitrosti*

$$\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}.$$

Iz enačbe (3.93) sledi

$$ds = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

in

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{dx^0}{ds} = \frac{cdt}{cdt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ u^1 &= \frac{dx^1}{ds} = \frac{dx}{cdt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ u^2 &= \frac{dx^2}{ds} = \frac{dy}{cdt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_y/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ u^3 &= \frac{dx^3}{ds} = \frac{dz}{cdt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_z/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

in končno

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\boldsymbol{v}/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right). \tag{3.103}$$

Količine u^i so brez dimenzije! Ker je

$$ds^2 = dx^i dx_i,$$

sledi

$$u^i u_i = 1. \tag{3.104}$$

Četverec hitrost je torej vektorska enota na tangenti na štiridimenzionalno tirnico.

3.5.5 Relativistična mehanika

D'Alembertov princip v klasični mehaniki trdi, da se sistem, ki ga opisujejo generalizirane koordinate $\boldsymbol{q}$, giblje tako, da je

$$\delta S = 0,$$

kjer je S *akcija*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\, dt$$

in

$$L = T - V,$$

kjer je

$$\begin{aligned} T &= \text{kinetična energija}, \\ V &= \text{potencialna energija}. \end{aligned}$$

Velikokrat pravimo d'Alembertovemu principu tudi *princip najmanše akcije*. Ta naziv ni čisto točen. Akcija je res minimalna le v limiti $t_2 \longrightarrow t_1$, sicer pa je akcija le stacionarna.

D'Alembertov princip velja tudi v relativnostni teoriji, le da še ne vemo, kaj je akcija S, oziroma , kaj je Lagrangeova funkcija L.

Vzemimo najprej prost delec (materialna točka). Tedaj ni nobenih zunanjih sil. Akcija S naj bo spet integral Lagrangeove funkcije. Akcija mora biti invariantna na Lorentzove transformacije, integrand mora biti prav tako invarianten, povrh vsega pa mora biti še diferencial prvega reda. Edini izraz, ki ustreza vsem tem zahtevam, je αds, kjer je α konstanta. Če pišemo

$$\begin{aligned} T_1 &= (ct_1, x_1, y_1, z_1), \\ T_2 &= (ct_2, x_2, y_2, z_2), \end{aligned}$$

dobimo

$$S = \int_{T_1}^{T_2} \alpha ds.$$

Količina α mora okarakterizirati delec, to pa je njegova masa. Vemo, da je

$$ds = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

torej je

$$S = \int_{T_1}^{T_2} \alpha c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt = \int_{T_1}^{T_2} L\, dt,$$

kjer je

$$\begin{aligned} L &= \alpha c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \\ &= \alpha c\left[1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots\right] = \\ &= \alpha c - \frac{\alpha v^2}{2c} + \cdots . \end{aligned}$$

Prvi člen je konstanta, ki ne vpliva na enačbe gibanja, drugi člen prepoznamo kot kinetično energijo, če izberemo

$$\alpha = -mc.$$

Tako dobimo

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{3.105}$$

in

$$S = -mc \int_{T_1}^{T_2} ds. \tag{3.106}$$

Gibalna količina (impulz) je definirana kot

$$\boldsymbol{p} \quad = \quad L_{\boldsymbol{v}}.$$

Iz enačbe (3.105) dobimo

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3.107}$$

Celotna energija, je v [24] definirana kot

$$\mathcal{E} \quad = \quad \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} - L.$$

Dobimo

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[v^2 + c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right] \end{aligned}$$

in

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3.108}$$

Izraz (3.108) razvijemo v vrsto

$$\mathcal{E} \quad = \quad mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \cdots.$$

Prvi člen je konstanta, drugi člen je klasična kinetična energija. Prvi člen, mc^2, imenujemo *mirovna energija*. V relativnostni mehaniki zakon o ohranitvi mase *ne* velja, velja pa zakon o ohranitvi energije (3.108).

Iz enačb (3.107) in (3.108) sedaj sledi

$$\begin{aligned} p^2 + m^2c^2 &= \frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + m^2c^2 = \\ &= \frac{m^2v^2 + m^2c^2 - m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \\ &= \frac{m^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

ali

$$p^2 + m^2c^2 \quad = \quad \frac{\mathcal{E}^2}{c^2}, \tag{3.109}$$

$$(pc)^2 + \left(mc^2\right)^2 \quad = \quad \mathcal{E}^2. \tag{3.110}$$

Energijo, izraženo z gibalno količino $\boldsymbol{p}$, imenujemo *Hamiltonova funkcija*:

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \tag{3.111}$$

Pri majhnih hitrostih, $p \ll mc$, spet dobimo

$$\begin{aligned} H &= mc^2\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}} = \\ &= mc^2\left[1 + \frac{p^2}{2m^2c^2} + \cdots\right] = \\ &= mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \cdots. \end{aligned}$$

Formuli (3.107) in (3.108) pri $v = c$ nimata smisla, pač pa še vedno iz (3.107) in (3.108) dobimo

$$\boldsymbol{p} = \mathcal{E}\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}. \tag{3.112}$$

Za *fotone* $(m = 0, v = c)$ dobimo iz (3.112)

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c}. \tag{3.113}$$

Enačbe gibanja za prost delec bomo poiskali v štiridimenzionalni obliki. Velja

$$\delta S = -mc\,\delta\int_{T_1}^{T_2} ds = 0.$$

Iz

$$ds^2 = dx_i dx^i$$

sledi

$$\begin{aligned} 2ds\,\delta ds &= dx_i\,\delta dx^i + \delta dx_i\,dx^i = \\ &= 2dx_i\,\delta dx^i \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{T_2} \delta ds &= \int_{T_1}^{T_2} \frac{dx_i\,\delta dx^i}{ds} = \\ &= \int_{T_1}^{T_2} u_i\,d\delta x^i = \\ &= u_i\,\delta x^i\big|_{T_1}^{T_2} - \int_{T_1}^{T_2} \delta x^i\,\frac{du_i}{ds}\,ds. \end{aligned}$$

Torej velja

$$\delta S = -mc\,u_i\,\delta x^i\big|_{T_1}^{T_2} + mc\int_{T_1}^{T_2} \delta x^i\,\frac{du_i}{ds}\,ds = 0.$$

Vemo, da od tod slede *enačbe gibanja*

$$\frac{du_i}{ds} = 0. \tag{3.114}$$

Če opazujemo δS vzdolž dejanske tirnice (3.114) pri nepomični točki T_1, dobimo

$$\delta S = -mc\,u_i\,\delta x^i\big|_{T_2}.$$

Namesto T_2 pišimo kar T in dobimo

$$\delta S = -mcu_i\,\delta x^i$$

ali

$$-\frac{\partial S}{\partial x^i} = mcu_i =: p_i. \tag{3.115}$$

Vektor četverec p_i je gibalna količina: iz enačb (3.115) in (3.103) dobimo

$$\begin{aligned} p^i &= mcu^i = \\ &= \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right), \\ p^i &= \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \boldsymbol{p}\right), \qquad (3.116) \\ p_i &= \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, -\boldsymbol{p}\right). \qquad (3.117) \end{aligned}$$

3.5.6 Naboj v elektromagnetnem polju

Interakcijo med delci lahko opisujemo s konceptom *polja sil*. Namesto da rečemo, da en delec deluje s silo na drugega, lahko rečemo, da delec širi okrog sebe polje sil, ki potem deluje na drug delec. V *klasični mehaniki* je polje sil zgolj računski pripomoček. V relativistični teoriji pa vemo, da ni trenutne interakcije na daljavo: delec širi okrog sebe polje. ki se širi s *končno hitrostjo*, in to polje ob kasnejšem času na drugem mestu vpliva na drug delec. Polje sil postane tako otipljiva fizikalna realnost.

Akcija delca v elektromagnetnem polju je sestavljena iz treh členov

$$S \quad = \quad S_m + S_{mf} + S_f ,$$

kjer je

S_m	–	akcija prostega delca (3.106),
S_{mf}	–	akcija, ki je odvisna od interakcije polja in delca in
S_f	–	akcija polja samega.

V tem razdelku bomo obravnavali *dana polja*, torej bomo opustili člen S_f.

Izkaže se, da so lastnosti delca v *elektromagnetnem polju* opisane z *enim samim parametrom*. To je *naboj delca e*. Naboj je lahko *pozitiven*, *negativen* ali pa nič.

Lastnosti elektromagnetnega polja lahko opišemo z enim vektorskim poljem (v štiridimenzionalnem prostoru). Ta vektor označimo z A_i (kovariantne komponente) in ga imenujemo *potencial*. Tako bomo akcijo S_{mf} zapisali kot

$$S_{mf} \quad = \quad -\int_{T_1}^{T_2} \frac{e}{c} A_i \, dx^i ,$$

kjer smo faktor c v imenovalcu pristavili zato, da bodo končne enačbe bolj podobne tistim, ki smo jih vajeni. Za delec v *danem polju* tako dobimo akcijo

$$S = -\int_{T_1}^{T_2} \left(mc \, ds + \frac{e}{c} A_i \, dx^i \right) . \tag{3.118}$$

Pišimo

$$\begin{aligned} A^i &=: (\phi, c\boldsymbol{A}) , \\ A_i &=: (\phi, -c\boldsymbol{A}) , \end{aligned} \tag{3.119}$$

kjer imenujemo ϕ *skalarni potencial*, $\boldsymbol{A}$ pa *vektorski potencial*. Sledi

$$\begin{aligned} S &= -\int_{T_1}^{T_2} (mc \, ds + e\phi \, dt - e\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{x}) = \\ &= -\int_{T_1}^{T_2} (mc \, ds + e\phi \, dt - e\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} \, dt) = \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} \left(mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e\phi - e\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} \right) dt =: \\ &=: \int_{t_1}^{t_2} L \, dt . \end{aligned}$$

Tako smo dobili Lagrangeovo funkcijo za delec v danem elektromagnetnem polju

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\phi + e\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} . \tag{3.120}$$

Izpišimo Euler–Lagrangeove enačbe

$$\frac{d}{dt} L_{\boldsymbol{v}} \quad = \quad L_{\boldsymbol{x}} .$$

Računajmo

$$\begin{aligned} L_{\boldsymbol{v}} &= \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\boldsymbol{A} = \\ &= \boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A}, \\ L_{\boldsymbol{x}} &= -e\,\mathrm{grad}\,\phi + e\,\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}). \end{aligned}$$

Po znani formuli iz vektorske analize

$$\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{grad}\,)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{grad}\,)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$$

dobimo ($\boldsymbol{v}$ smatramo za konstanto)

$$L_{\boldsymbol{x}} = -e\,\mathrm{grad}\,\phi + e(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,)\boldsymbol{A} + e\boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}.$$

Skupaj pisano

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A}) = -e\,\mathrm{grad}\,\phi + e(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,)\boldsymbol{A} + e\boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}.$$

Ker je

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,)\boldsymbol{A},$$

dobimo

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -e\,\mathrm{grad}\,\phi - e\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} + e\boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}.$$

Prva dva člena na desni sta neodvisna od hitrosti, zato pišemo

$$\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}, \tag{3.121}$$

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \tag{3.122}$$

ter sledi *Lorentzov zakon*

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}). \tag{3.123}$$

Povejmo še imena teh polj

$\boldsymbol{E}$	–	jakost električnega polja,
$\boldsymbol{B}$	–	gostota magnetnega polja,
$e(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$	–	Lorentzova sila.

Omenimo naj še, da je $\boldsymbol{E}$ polarni vektor, $\boldsymbol{B}$ pa aksialni vektor.

Enote za naboj e, polja $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ so še popolnoma nedefinirane. Pritrdili jih bomo kasneje.

3.5.7 Umeritev (gauge)

Potencialu A_i lahko prištejemo še gradient poljubne funkcije, ne da bi se enačbe gibanja kaj spremenile.

Res, v enačbi (3.118) pišemo

$$A_i = A'_i + f_{,i}, \tag{3.124}$$

kjer je f poljubna (gladka) funkcija koordinat x^j. Sledi

$$\begin{aligned} \frac{e}{c}A_i\,dx^i &= \frac{e}{c}A'_i\,dx^i + \frac{e}{c}f_{,i}\,dx^i = \\ &= \frac{e}{c}A'_i\,dx^i + d\left(\frac{e}{c}f\right), \end{aligned}$$

vemo pa, da smemo Lagrangeovi funkciji vedno prišteti popoln diferencial, ne da bi se enačbe gibanja kaj spremenile.

S substitucijo (3.124) dobimo

$$\begin{aligned} c\boldsymbol{A} &= c\boldsymbol{A}' - \operatorname{grad} f, \\ \phi &= \phi' + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

in polji $\boldsymbol{E}$ in $\boldsymbol{B}$ se res ne spremenita:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\operatorname{grad}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \\ &= -\operatorname{grad}\phi' - \frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad} f = \\ &= -\operatorname{grad}\phi' - \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} = \\ &= \boldsymbol{E}', \\ \boldsymbol{B} &= \operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \\ &= \operatorname{rot}\boldsymbol{A}' - \frac{1}{c}\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \\ &= \operatorname{rot}\boldsymbol{A}' = \\ &= \boldsymbol{B}'. \end{aligned}$$

To svobodo izkoriščamo, da se enačbe kar se dá poenostavijo. Izbiri funkcije f pravimo *umeritev (gauge)*.

3.5.8 Tenzor elektromagnetnega polja

V razdelku (3.5.6) smo enačbe gibanja (3.123) izpeljali v tridimenzionalni obliki. Ker nam bo izkušnja kasneje koristila, ponovimo izpeljavo v štiridimenzionalnem prostoru. Začnimo pri enačbi (3.118) in izračunajmo δS

$$\delta S = -\int_{T_1}^{T_2}\left(mc\frac{dx_i\,d\delta x^i}{ds} + \frac{e}{c}A_i\,d\delta x^i + \frac{e}{c}\delta A_i\,dx^i\right).$$

Upoštevajmo, kaj je u_i in integrirajmo prva dva člena po delih

$$\delta S = \int_{T_1}^{T_2}\left(mc\,du_i\,\delta x^i + \frac{e}{c}dA_i\,\delta x^i - \frac{e}{c}\delta A_i\,dx^i\right) - \left[mcu_i\,\delta x^i + \frac{e}{c}A_i\,\delta x^i\right]_{T_1}^{T_2}.$$

Upoštevajmo

$$\begin{aligned} \delta A_i &= A_{i,k}\,\delta x^k, \\ dA_i &= A_{i,k}\,dx^k \end{aligned}$$

in sledi

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{T_1}^{T_2}\left(mc\,du_i\,\delta x^i + \frac{e}{c}A_{i,k}dx^k\,\delta x^i - \frac{e}{c}A_{i,k}\delta x^k\,dx^i\right) - \\ &- \left[\left(mcu_i + \frac{e}{c}A_i\right)\delta x^i\right]_{T_1}^{T_2}. \end{aligned}$$

V tretjem členu pod integralom zamenjamo sumacijska indeksa i in k med seboj

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{T_1}^{T_2}\left(mc\,du_i\,\delta x^i + \frac{e}{c}A_{i,k}dx^k\,\delta x^i - \frac{e}{c}A_{k,i}\delta x^i\,dx^k\right) - \\ &- \left[\left(mcu_i + \frac{e}{c}A_i\right)\delta x^i\right]_{T_1}^{T_2} \end{aligned}$$

in dobimo

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{T_1}^{T_2}\left[mc\frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c}\left(A_{k,i} - A_{i,k}\right)u^k\right]\delta x^i\,ds - \\ &- \left[\left(mcu_i + \frac{e}{c}A_i\right)\delta x^i\right]_{T_1}^{T_2}. \end{aligned} \tag{3.125}$$

Od tod slede enačbe gibanja

$$mc\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c}\left(A_{k,i} - A_{i,k}\right)u^k. \tag{3.126}$$

Vpeljimo oznako

$$F_{ik} := A_{k,i} - A_{i,k}. \tag{3.127}$$

Antisimetrični tenzor F_{ik} imenujemo *tenzor elektromagnetnega polja* in enačbe gibanja (3.126) se glase

$$mc\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c}F_{ik}u^k$$

ali

$$mc\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k. \tag{3.128}$$

V enačbo (3.127) vstavimo

$$A_i = (\phi, -c\boldsymbol{A})$$

in upoštevamo enačbi (3.121) in (3.122) in dobimo

$$F_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.129}$$

$$F^{ik} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{bmatrix} \tag{3.130}$$

ali krajše

$$\begin{aligned} F_{ik} &= (\boldsymbol{E}, c\boldsymbol{B}), \\ F^{ik} &= (-\boldsymbol{E}, c\boldsymbol{B}). \end{aligned}$$

Vidimo, da sta jakost električnega polja $\boldsymbol{E}$ in gostota magnetnega polja $\boldsymbol{B}$ dela *istega* štiridimenzionalnega tenzorja F_{ik}.

3.5.9 Prvi par Maxwellowih enačb

Iz enačb (3.121) in (3.122) sedaj dobimo

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\mathrm{rot}\;\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$$

in

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{3.131}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0. \tag{3.132}$$

To sta prvi dve Maxwellovi enačbi. Napišemo ju lahko tudi v integralski obliki. Po Stokesovem[10] izreku

$$\int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_{\partial S}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{x}$$

iz enačbe (3.131) sledi

$$\oint_{\partial S}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{x} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}, \tag{3.133}$$

[10] George Gabriel Stokes (1819-1903) je bil angleški matematični fizik irskega rodu.

ali z besedami:

Cirkulacija jakosti električnega polja je enaka negativnemu časovnemu odvodu magnetnega fluksa skozi objeto ploskev.

Iz enačbe (3.132) pa dobimo

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0, \tag{3.134}$$

ali z besedami:

Magnetni fluks skozi zaključeno ploskev je enak nič.

Enačbi (3.131) in (3.132) lahko napišemo tudi v štiridimenzionalni obliki. Iz enačbe (3.127) sledi

$$F_{ik,l} + F_{kl,i} + F_{li,k} = 0,$$

ali

$$e^{iklm} F_{lm,k} = 0. \tag{3.135}$$

3.5.10 Drugi par Maxwellovih enačb

Skonstruirajmo še člen S_f, ki smo ga do sedaj opuščali. Eksperimenti kažejo, da velja *princip superpozicije*, to pa pomeni, da morajo biti enačbe elektromagnetnega polja *linearne*, zato pa mora biti akcija S_f kvadratna funkcija polja. Potencial A^i ne more nastopati v akciji, ker ni enolično določen. Potrebujemo torej skalarno kvadratno funkcijo tenzorja F_{ik}. Edina taka funkcija je $F_{ik}F^{ik}$, torej mora biti

$$S_f = -\frac{\varepsilon_0}{4c} \int F_{ik} F^{ik} \, d\Omega, \tag{3.136}$$

kjer je

$$d\Omega \quad = \quad dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = cdtdxdydz = cdtdV.$$

Influenčna konstanta ε_0 je določena z izbiro enot, ki so bile do sedaj neprecizirane. V SI sistemu izberemo

$$c^2 \varepsilon_0 := \frac{10^7}{4\pi} \, [\mathrm{Am/Vs}]. \tag{3.137}$$

Naboji naj bodo zvezno porazdeljeni. Funkcija $\rho = \rho(\boldsymbol{x}, t)$ naj bo gostota naboja, torej takšna funkcija, da je

$$\int_V \rho \, dV$$

naboj, vsebovan v volumnu V (ob času t).

Če enačbo

$$de \quad = \quad \rho \, dV$$

množimo z dx^i, dobimo

$$de \, dx^i \quad = \quad \rho \, dV \, dx^i = \rho \, dV \, dt \frac{dx^i}{dt}.$$

Količina de je skalar, dx^i je vektor četverec, $dV \, dt$ je spet skalar, torej je količina

$$j^i = \rho \frac{dx^i}{dt} \tag{3.138}$$

spet vektor četverec. Pišemo ga lahko kot

$$j^i = (c\rho, \rho \boldsymbol{v}) = (c\rho, \boldsymbol{j}), \tag{3.139}$$

kjer je $\boldsymbol{j}$ gostota električnega toka

$$\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v}. \tag{3.140}$$

Popoln izraz za akcijo se sedaj glasi

$$S = -\sum mc\int ds - \sum \frac{e}{c}\int A_k\,dx^k - \frac{\varepsilon_0}{4c}\int F_{ik}F^{ik}\,d\Omega$$

kjer se vsota nanaša na vse delce. V srednji člen uvedemo gostoto toka j^k

$$\begin{aligned}
\sum \frac{e}{c}\int A_k\,dx^k &\longrightarrow \frac{1}{c}\int A_k dx^k \rho\,dV = \\
&= \frac{1}{c}\int \rho\frac{dx^k}{dt}A_k\,dV\,dt = \\
&= \frac{1}{c^2}\int \rho\frac{dx^k}{dt}A_k\,d\Omega = \\
&= \frac{1}{c^2}\int j^k A_k\,d\Omega
\end{aligned}$$

po enačbi (3.138). Tako dobimo

$$S = -\sum mc\int ds - \frac{1}{c^2}\int j^i A_i\,d\Omega - \frac{\varepsilon_0}{4c}\int F_{ik}F^{ik}\,d\Omega.$$

To akcijo sedaj variiramo tako, da variiramo samo A_i (odnosno F_{ik})

$$\begin{aligned}
\delta S &= -\int\left(\frac{1}{c^2}j^i\delta A_i + \frac{\varepsilon_0}{4c}F_{ik}\delta F^{ik} + \frac{\varepsilon_0}{4c}\delta F_{ik}F^{ik}\right)d\Omega = \\
&= -\int\left(\frac{1}{c^2}j^i\delta A_i + \frac{\varepsilon_0}{2c}F^{ik}\delta F_{ik}\right)d\Omega = \\
&= -\int\left[\frac{1}{c^2}j^i\delta A_i + \frac{\varepsilon_0}{2c}F^{ik}\left(\delta A_{k,i} - \delta A_{i,k}\right)\right]d\Omega = \\
&= -\int\left(\frac{1}{c^2}j^i\delta A_i - \frac{\varepsilon_0}{c}F^{ik}\delta A_{i,k}\right)d\Omega = \\
&= -\int\left(\frac{1}{c^2}j^i\delta A_i + \frac{\varepsilon_0}{c}\delta A_i F^{ik}{}_{,k}\right)d\Omega - \oint\frac{\varepsilon_0}{c}F^{ik}\delta A_i\,dS_k = \\
&= -\int\left(\frac{1}{c^2}j^i + \frac{\varepsilon_0}{c}F^{ik}{}_{,k}\right)\delta A_i\,d\Omega - \oint\frac{\varepsilon_0}{c}F^{ik}\delta A_i\,dS_k.
\end{aligned}$$

Iz enačbe $\delta S = 0$ sedaj sledi

$$F^{ik}{}_{,k} = -\frac{1}{c\varepsilon_0}j^i. \tag{3.141}$$

Pri $i = 0$ dobimo

$$F^{01}{}_{,1} + F^{02}{}_{,2} + F^{03}{}_{,3} = -\frac{1}{c\varepsilon_0}c\rho,$$

ali

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{3.142}$$

Pri $i = 1$ dobimo

$$\begin{aligned}
F^{10}{}_{,0} + F^{12}{}_{,2} + F^{13}{}_{,3} &= -\frac{1}{c\varepsilon_0}j^1, \\
\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} - c\frac{\partial B_z}{\partial y} + c\frac{\partial B_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c\varepsilon_0}j_x, \\
c^2\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) &= \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0}j_x
\end{aligned}$$

in podobno za $i = 2$ in $i = 3$

$$\begin{aligned}
c^2\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0}j_y, \\
c^2\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) &= \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0}j_z.
\end{aligned}$$

Skupaj napisano dobimo

$$c^2 \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0}. \tag{3.143}$$

Enačbi (3.142) (3.143) sta preostali Maxwellovi enačbi, ki ju tudi lahko napišemo v integralski obliki

$$\oint_{\partial V} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV, \tag{3.144}$$

ali z besedami:

Fluks jakosti električnega polja skozi zaključeno ploskev je sorazmeren naboju, ki ga ploskev objema in

$$c^2 \oint_{\partial S} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_S \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S}, \tag{3.145}$$

ali z besedami:

Cirkulacija gostote magnetnega polja po robu ploskve, pomnožena s c^2, je enaka skupnemu toku skozi ploskev.

Iz enačbe (3.141) sledi še

$$\frac{\partial^2 F^{ik}}{\partial x^i \partial x^k} = -\frac{1}{c\varepsilon_0} \frac{\partial j^i}{\partial x^i}.$$

Ker je F^{ik} antisimetričen tenzor, sledi

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0. \tag{3.146}$$

Če ta pogoj prepišemo v tridimenzionalno obliko, dobimo

$$\frac{\partial (c\rho)}{\partial (ct)} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0$$

ali

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \tag{3.147}$$

To je *kontinuitetna enačba*, ki ji morata zadoščati ρ in $\boldsymbol{j}$, da Maxwellove enačbe ne bi bile protislovne.

3.6 Elektrotehnika

Vemo, da veljajo Maxwellove enačbe v integralski obliki (3.144) (3.133), (3.134), in (3.145),

$$\oint_{\partial V} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\boldsymbol{x},t) \, dV, \tag{3.148}$$

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) \cdot d\boldsymbol{x} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) \cdot d\boldsymbol{S}, \tag{3.149}$$

$$\oint_{\partial V} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) \cdot d\boldsymbol{S} = 0, \tag{3.150}$$

$$c^2 \oint_{\partial S} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) \cdot d\boldsymbol{x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) \cdot d\boldsymbol{S} + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) \cdot d\boldsymbol{S}, \tag{3.151}$$

kjer je c hitrost svetlobe v vakuumu in ε_0 *influenčna konstanta*. Enote

$$\begin{aligned} [\rho] &= \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^3}, \\ [\boldsymbol{j}] &= \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}, \\ [\boldsymbol{E}] &= \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}, \\ [\boldsymbol{B}] &= \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}, \end{aligned}$$

so izbrane tako, da je

$$c^2\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi}\frac{\mathrm{Am}}{\mathrm{Vs}}.$$

Maxwellove enačbe lahko s pomočjo Gaußovega in Stokesovega izreka napišemo tudi v diferencialni obliki kot diferencialne enačbe (3.142), (3.131), (3.132) in (3.143),

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) &= \frac{\rho(\boldsymbol{x},t)}{\varepsilon_0}, && (3.152) \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}, && (3.153) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) &= 0, && (3.154) \\ c^2 \operatorname{rot} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) &= \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)}{\varepsilon_0}. && (3.155) \end{aligned}$$

Da bi bil ta sistem rešljiv, mora veljati kontinuitetna enačba (3.147)

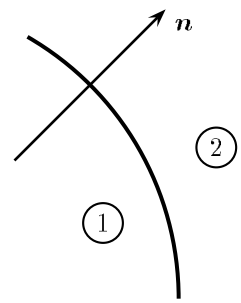
$$\frac{\partial \rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) = 0. \tag{3.156}$$

Iz enačb (3.148-3.151) dobimo še pogoje na meji med dvema sredstvima (glej sliko 3.13)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{x},t) + \frac{\rho_s(\boldsymbol{x},t)}{\varepsilon_0}, && (3.157) \\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{x},t), && (3.158) \\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{x},t), && (3.159) \\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{x},t) + \frac{\boldsymbol{j}_s(\boldsymbol{x},t)}{c^2\varepsilon_0}, && (3.160) \end{aligned}$$

kjer je

$\rho_s(\boldsymbol{x},t)$	–	površinska gostota naboja,
$\boldsymbol{j}_s(\boldsymbol{x},t)$	–	površinska gostota toka.



Slika 3.13: Prehod na meji

3.6.1 Elektrostatika in magnetostatika

V *stacionarnem stanju* so vse količine neodvisne od časa. Tedaj sistem (3.152-3.155) razpade v dva ločena sistema

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\varepsilon_0}, && (3.161) \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) &= 0 && (3.162) \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) &= 0, && (3.163) \\ c^2 \operatorname{rot} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})}{\varepsilon_0} && (3.164) \end{aligned}$$

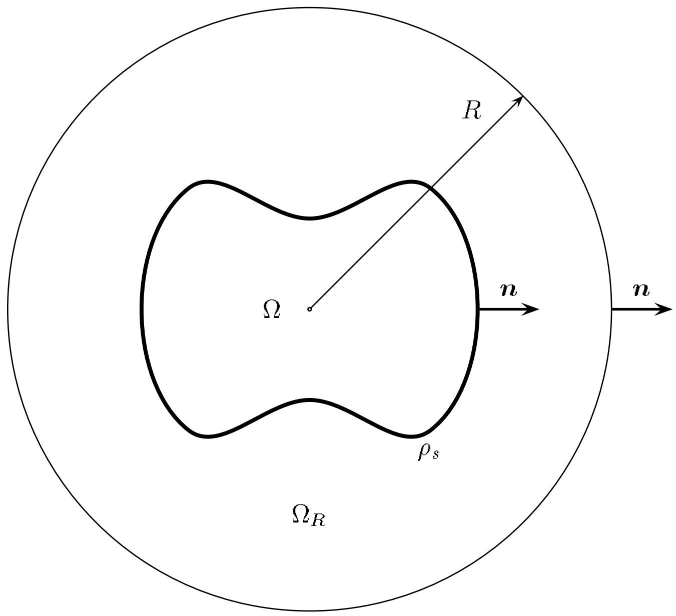
pri pogoju

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{3.165}$$

Elektrostatika obravnava enačbi (3.161) in (3.162), to so *elektrostatični pojavi*, *magnetostatika* pa enačbi (3.163) in (3.164), to so *magnetostatični pojavi.*

Elektrostatika

Privzemimo, da je ves naboj porazdeljen po končnem delu prostora, recimo v Ω. Okrog Ω očrtajmo veliko sfero s polmerom R, glej sliko 3.14.



Slika 3.14: Celoten naboj

Izračunajmo količino q

$$\begin{aligned}
\frac{q}{\varepsilon_0} &:= \oint_{|\boldsymbol{x}|=R} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{S} = \\
&= \oint_{\partial\Omega_R} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{S} + \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{S}]_{\text{zunaj}} = \\
&= \int_{\Omega_R} \operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\, dV + \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{S}]_{\text{zunaj}} = \\
&= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega_R} \rho(\boldsymbol{x})\, dV + \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{S}]_{\text{zunaj}} = \\
&= \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{S}]_{\text{zunaj}},
\end{aligned}$$

ker je $\rho(\boldsymbol{x}) = 0$ v Ω_R. Enačba (3.157) sedaj pove

$$[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}]_{\text{zunaj}} = [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}]_{\text{znotraj}} + \frac{\rho_s(\boldsymbol{x})}{\varepsilon_0}.$$

Zato je

$$\begin{aligned}\frac{q}{\varepsilon_0} &= \oint_{\partial\Omega} [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{S}]_{\text{znotraj}} + \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_{\partial\Omega} \rho_s(\boldsymbol{x})\, dS = \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\, dV + \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_{\partial\Omega} \rho_s(\boldsymbol{x})\, dS = \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\Omega} \rho(\boldsymbol{x})\, dV + \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_{\partial\Omega} \rho_s(\boldsymbol{x})\, dS,\end{aligned}$$

ali

$$q = \int_{\Omega} \rho(\boldsymbol{x})\, dV + \oint_{\partial\Omega} \rho_s(\boldsymbol{x})\, dS.$$

Količina q je torej *celoten naboj* in dobimo

$$\oint_{|\boldsymbol{x}|=R} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Zaradi simetrije je

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \sim E(|\boldsymbol{x}|)\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}, \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty,$$

torej

$$\frac{q}{\varepsilon_0} \sim E(R)\oint_{|\boldsymbol{x}|=R} dS = 4\pi R^2 E(R), \quad R \to \infty,$$

ali

$$E(R) \sim \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}, \quad R \to \infty,$$

ali

$$E(|\boldsymbol{x}|) \sim \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{x}|^2}, \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty$$

in

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \sim \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}, \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty. \tag{3.166}$$

Oglejmo si sedaj enačbi (3.161) in (3.162). Zaradi (3.162) obstaja funkcija ϕ, da je

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\operatorname{grad}\phi(\boldsymbol{x}).$$

Funkcijo ϕ imenujemo *elektrostatični potencial*. Iz enačbe (3.161) sedaj sledi *Poissonova enačba*

$$-\Delta\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\varepsilon_0} \tag{3.167}$$

in iz (3.166)

$$\phi(\boldsymbol{x}) \sim \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}, \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty, \tag{3.168}$$

kjer je q celotni naboj.

Polje točkastega naboja

Vzemimo točkast naboj q v izhodišču. To naj bo edini naboj v prostoru. Velja

$$\Delta\phi(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \neq 0.$$

Zaradi simetrije bo ϕ odvisen samo od $|\boldsymbol{x}| = r$. V sfernih koordinatah je torej

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\phi(r)}{dr} &= 0, \quad r \neq 0, \\
r^2\frac{d\phi(r)}{dr} &= -C_1, \\
\frac{d\phi(r)}{dr} &= -\frac{C_1}{r^2}, \\
\phi(r) &= \frac{C_1}{r} + C_2.
\end{aligned}$$

Pogoj (3.168) sedaj pove

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}, \\
C_2 &= 0
\end{aligned}$$

in tako dobimo *polje točkastega naboja* (*Coulombov*[11] *zakon*)

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}. \tag{3.169}$$

Polje prevodne krogle

Vzemimo *prevodno kroglo* s polmerom a, in v razdalji b od središča, $b > a$, postavimo točkast naboj q, glej sliko 3.15. Ta naboj bo *induciral* neko porazdelitev naboja po površini krogle.

Vsekakor velja, da je na površini krogle (in v notranjosti) potencial konstanten. Če ne bi bil konstanten, bi bil $\boldsymbol{E} \neq 0$ in bi po krogli tekel električni tok, saj je krogla prevodna.

Ločiti moramo dva primera

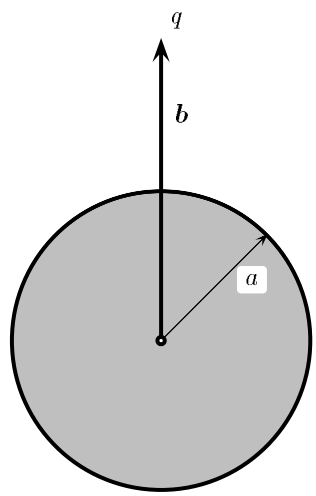
(i) Krogla je ozemljena. Tedaj je na krogli potencial V enak nič, skupni naboj Q na krogli, (ki je pritekel po ozemljitvi), pa nam ni znan vnaprej.

(ii) Krogla je izolirana in nosi nek naboj Q, za katerega ne vemo, kako je porazdeljen.

Vsekakor vemo, da je

$$\phi(\boldsymbol{x}) \sim \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{x}|}, \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty.$$

[11] Charles Augustin Coulomb (1736-1806) je bil francoski fizik.



Slika 3.15: Prevodna krogla

Potencial ϕ sestavimo iz dveh delov

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi_0(\boldsymbol{x}) + \psi(\boldsymbol{x}), \tag{3.170}$$

kjer je ϕ_0 polje naboja q (brez krogle)

$$\phi_0(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}|} \tag{3.171}$$

in ψ popravek.

Naj bo V (znani ali neznani) potencial na krogli. Zunaj krogle (in zunaj naboja q) velja sedaj

$$\Delta\psi(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{3.172}$$

na površini krogle je

$$\psi(\boldsymbol{x}) = V - \phi_0(\boldsymbol{x}) \tag{3.173}$$

ter v neskončnosti

$$\psi(\boldsymbol{x}) \sim \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{x}|}, \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty. \tag{3.174}$$

Vzemimo sferni koordinatni sistem z izhodiščem v središču krogle. Vemo, da nam nastavek

$$\psi(\boldsymbol{x}) = R(r)Y(\vartheta,\varphi) \tag{3.175}$$

v enačbi (3.172) dá

$$\begin{aligned} \left[r^2 R'(r)\right]' &= \lambda R(r), && (3.176) \\ -\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sin\vartheta\frac{\partial Y(\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta}\right] - \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 Y(\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi^2} &= \lambda Y(\vartheta,\varphi). && (3.177) \end{aligned}$$

Operator v enačbi (3.177) je Legendreov operator, ki ima diskreten spekter z lastnimi vrednostmi

$$\lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

in lastnimi funkcijami

$$Y_n^m(\vartheta,\varphi) = P_n^{|m|}(\cos\vartheta)e^{im\varphi}, \quad -n \leq m \leq n.$$

Obrnimo os z skozi točko $\boldsymbol{b}$. Zaradi simetrije bo rešitev neodvisna od φ, torej

$$\psi_n(\boldsymbol{x}) = R_n(r)P_n(\cos\vartheta),$$

kjer je

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n-1}.$$

Ker mora biti v vsakem primeru

$$\psi(\boldsymbol{x}) \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty,$$

dobimo

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} P_n(\cos\vartheta).$$

Na površini krogle je zaradi (3.173) in (3.171)

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{x})\big|_{|\boldsymbol{x}|=a} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-n-1} P_n(\cos\vartheta) = \\ &= V - \phi_0(\boldsymbol{x})\big|_{|\boldsymbol{x}|=a} = \\ &= V - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(a^2 - 2ab\cos\vartheta + b^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= V - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{b^{n+1}}P_n(\cos\vartheta) \end{aligned}$$

po enačbi

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\rho}|} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\vartheta), \qquad \rho < r. \tag{3.178}$$

Sledi

$$\frac{B_0}{a} = V - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}, \qquad (3.179)$$

$$\frac{B_n}{a^{n+1}} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^n}{b^{n+1}}, \quad n > 0. \qquad (3.180)$$

Zato velja

$$\begin{aligned}
\psi(\boldsymbol{x}) &= \frac{aV}{r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n+1}}{b^{n+1}r^{n+1}}P_n(\cos\vartheta) = \\
&= \frac{aV}{r} - \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0 br}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a^2}{br}\right)^n P_n(\cos\vartheta) = \\
&= \frac{aV}{r} - \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0 br}\left[1 - 2\frac{a^2}{br}\cos\vartheta + \frac{a^4}{b^2r^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \\
&= \frac{aV}{r} - \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0 b}\left[r^2 - 2\frac{a^2r}{b}\cos\vartheta + \frac{a^4}{b^2}\right]^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Pa naj bo

$$\begin{aligned}
b' &= \frac{a^2}{b}, \\
\boldsymbol{b}' &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b' \end{bmatrix}, \\
q' &= -q\frac{a}{b}
\end{aligned}$$

in sledi

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{aV}{|\boldsymbol{x}|} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}'|}$$

in

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{aV}{|\boldsymbol{x}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}|} + \frac{q'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}'|}\right].$$

To je že dokončen rezultat, če je predpisan potencial V. Če pa je predpisan naboj Q, mora biti zaradi (3.174)

$$B_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$$

in je po (3.179)

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b} = \frac{Q-q'}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

3.6.2 Elektromagnetno valovanje

To je najimenitnejši del teorije. Če je $\rho(\boldsymbol{x},t)=0$ in $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)=0$, iz enačb (3.152-3.155) sledi

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) &= 0, &(3.181)\\ \operatorname{div}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) &= 0, &(3.182)\\ \operatorname{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) &= -\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}, &(3.183)\\ c^2\operatorname{rot}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) &= \frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}. &(3.184)\end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)-\Delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\\ &= -\frac{\partial\operatorname{rot}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\\ &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^2},\end{aligned}$$

ali

$$\Delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^2}. \tag{3.185}$$

Podobno,

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)-\Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\\ &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial\operatorname{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\\ &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^2},\end{aligned}$$

ali

$$\Delta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^2}. \tag{3.186}$$

Kot bomo videli, sta enačbi (3.185) in (3.186) *valovni enačbi*, rešitve so valovanja, ki se širijo s hitrostjo c.

Opomba 3.1 *Vektorski Laplaceov operator je* definiran *z enačbo*

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} \quad =: \quad \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E}-\Delta\boldsymbol{E}.$$

Izkaže se, da v kartezičnem koordinatnem sistemu velja

$$\begin{aligned}\Delta E_x &= \frac{\partial^2E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2E_x}{\partial z^2},\\ \Delta E_y &= \frac{\partial^2E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2E_y}{\partial z^2},\\ \Delta E_z &= \frac{\partial^2E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2E_x}{\partial z^2},\end{aligned}$$

v splošnem krivočrtnem koordinatnem sistemu pa to ni *Laplaceov operator na posameznih komponentah.*

Naj bo

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

in naj bo E ena od komponent. Tedaj velja

$$\Delta E(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t^2}.$$

Ločimo spremenljivke:

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{x}, t) &= A(x)B(y)C(z)D(t), \\ \frac{A''(x)}{A(x)} + \frac{B''(y)}{B(y)} + \frac{C''(z)}{C(z)} &= \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{D}(t)}{D(t)}. \end{aligned}$$

Vsak člen zase mora biti konstanten, torej

$$\begin{aligned} A''(x) + k_x^2 A(x) &= 0, \\ B''(y) + k_y^2 B(y) &= 0, \\ C''(z) + k_z^2 C(z) &= 0, \\ \ddot{D}(t) + k^2 c^2 D(t) &= 0, \end{aligned}$$

kjer je

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2.$$

Sledi ena rešitev

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{x}, t) &= e^{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - kct)}, \\ \boldsymbol{k} &= \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vektor $\boldsymbol{k}$ imenujemo *valovni vektor*. Če napišemo vse tri komponente, dobimo tako eno možno rešitev enačbe (3.185)

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - kct)}. \tag{3.187}$$

Konstanti $\boldsymbol{E}_0$ in $\boldsymbol{k}$ *nista* neodvisni. Iz enačbe (3.181) sledi

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - kct)} = 0,$$

zato mora biti

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0 = 0. \tag{3.188}$$

Oglejmo si pojav, ki ga opisuje funkcija oblike $f(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-kct)$. Naj bo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_1 &= \boldsymbol{x}+l\frac{\boldsymbol{k}}{k},\\ t_1 &= t+\tau,\end{aligned}$$

to je, premaknemo se za l v smeri $\boldsymbol{k}$ in opazujemo pojav čez τ časa. Velja

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_1-kct_1 &= \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+kl-kct-kc\tau=\\ &= \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-kct,\end{aligned}$$

če je $l=c\tau$. Torej, pojav bo čez τ časa na kraju, ki je oddaljen za $l=c\tau$ v smeri $\boldsymbol{k}$, takšen, kot je sedaj tu. *Pojav se širi s hitrostjo c v smeri $\boldsymbol{k}$.*

V enačbi (3.187) je pojav gostota električnega polja, ki se v neki obliki širi v smeri $\boldsymbol{k}$. Pa opazujmo gostoto polja v stalni točki $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}e^{-ikct}.$$

To je nihanje s *krožno frekvenco*

$$\omega = kc.$$

Premikajoče se nihanje imenujemo *valovanje*.

Oglejmo si točke, za katere velja

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{k} = 0.$$

To je enačba ravnine skozi točko $\boldsymbol{x}_0$, pravokotne na vektor $\boldsymbol{k}$. Ker je

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_0,$$

je valovanje v vseh točkah ravnine enako. Pojav (3.187) je *ravni val*. Pogoj (3.188) pove, da električno polje niha v ravnini, pravokotni na smer širjenja.

Sipanje električnega polja na prevodnem cilindru

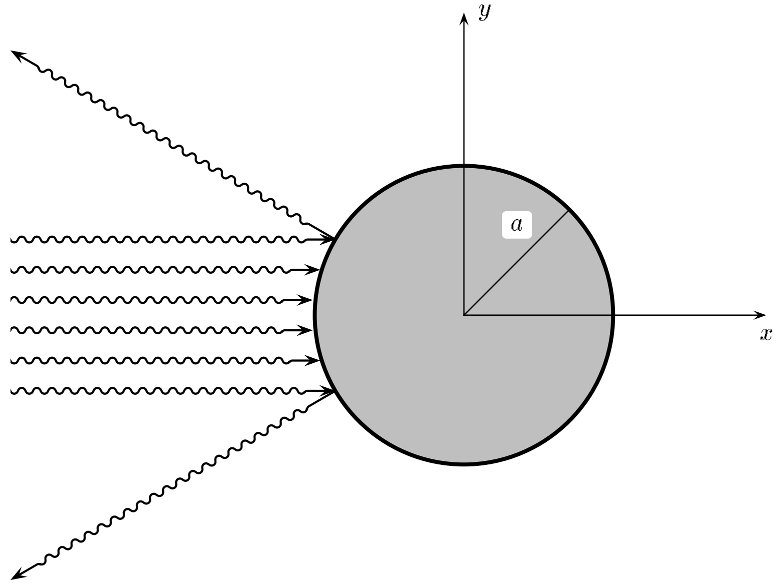
Vzemimo ravni val, ki se širi v smeri osi x

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k} &= \begin{bmatrix} k\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{E}_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-ikct}.\end{aligned}$$

V to polje postavimo neskončen *prevoden* cilinder, obrnjen pravokotno na smer širjenja, recimo z osjo v smeri osi z. Polje se na cilindru *sipa*, glej sliko 3.16. Kako?

Polje naj niha v smeri osi z

$$\boldsymbol{E}_0 = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ E_0\end{bmatrix}$$



Slika 3.16: Sipanje električnega polja

in pišimo

$$E_z(\boldsymbol{x},t) \quad =: \quad E(\boldsymbol{x},t) = E_0 e^{ikx-ikct} + \psi(r,\varphi)e^{-ikct}.$$

Drugi člen mora tudi zadoščati valovni enačbi, zato je (v polarnih koordinatah)

$$\Delta\psi(r,\varphi) + k^2\psi(r,\varphi) = 0. \tag{3.189}$$

Na površini prevodnega cilindra je $E = 0$, zato je

$$\psi(r,\varphi)|_{r=a} = -E_0 e^{ikx}\Big|_{r=a} = -E_0 e^{ika\cos\varphi}. \tag{3.190}$$

Kotno odvisnost kar uganemo

$$\psi(r,\varphi) \quad = \quad R(r)\cos n\varphi$$

in za radialni del dobimo Besselovo enačbo

$$r\frac{d}{dr}\left[r\frac{dR(r)}{dr}\right] + \left(k^2r^2 - n^2\right)R(r) \quad = \quad 0$$

z rešitvama

$$R(r) \quad = \quad \left\{ \begin{array}{l} H_n^{(1)}(kr) \\ H_n^{(2)}(kr) \end{array} \right. .$$

Enačbi (1.32) in (1.33) povesta, da je

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(kr) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp\left(+ikr - \frac{1}{2}n\pi i - \frac{\pi i}{4}\right), \\ H_n^{(2)}(kr) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp\left(-ikr + \frac{1}{2}n\pi i + \frac{\pi i}{4}\right). \end{aligned}$$

Vidimo, da ponazarja funkcija $r \longmapsto H_n^{(1)}(kr)$ val, ki se oddaljuje v neskončnost, funkcija $r \longmapsto H_n^{(2)}(kr)$ pa val, ki se približuje iz neskončnosti. Zato je

$$\psi(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n A_n H_n^{(1)}(kr) \cos n\varphi,$$

kjer je δ_n podan z enačbo (3.36).

Pogoj (3.190) pove, da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n A_n H_n^{(1)}(ka) \cos n\varphi = -E_0 e^{ika\cos\varphi}.$$

V rodovni funkciji za Besselove funkcije

$$e^{\frac{1}{2}z\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n$$

pišemo

$$\begin{aligned} z &= ka, \\ t &= ie^{i\varphi} \end{aligned}$$

in dobimo

$$\begin{aligned} e^{ika\cos\varphi} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(ka) i^n e^{in\varphi} = \\ &= J_0(ka) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ka) i^n e^{in\varphi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(ka) i^{-n} e^{-in\varphi} = \\ &= J_0(ka) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(ka) i^n \cos n\varphi \end{aligned}$$

in končno

$$e^{ika\cos\varphi} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n J_n(ka) i^n \cos n\varphi.$$

Zato je

$$A_n H_n^{(1)}(ka) = -2E_0 i^n J_n(ka)$$

in

$$\psi(r, \varphi) = -2E_0 \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n i^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(kr) \cos n\varphi.$$

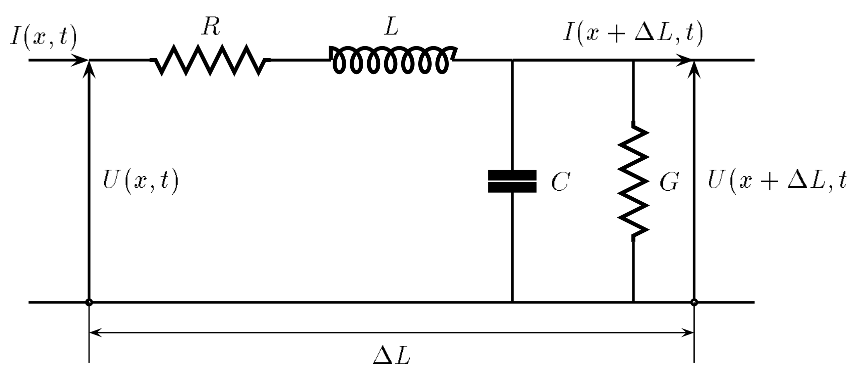
3.6.3 Telegrafska enačba

Temeljite elektrotehniške poenostavitve Maxwellovih enačb pripeljejo do koncepta *diskretnih elementov*. To so *upornost*, *induktivnost* in *kapaciteta*. Idealizirani diskretni element opišemo z učinkom, ki ga ima element na električni tok I, ki teče skozenj kot posledica električne napetosti U na sponkah elementa:

- *Upornost* R pozroči padec napetosti $U = RI$;
- *Induktivnost* L pozroči padec napetosti $U = L\frac{dI}{dt}$;
- *Kapaciteta* C pozroči padec napetosti podan z enačbo $I = C\frac{dU}{dt}$.

Zanima nas, kako se obnaša telegrafski kabel. To je seveda anahronizem, ampak isti model velja, do neke mere, za vsak *koaksialni kabel*, recimo kabel za televizijsko anteno ali kabel, ki vodi v BNC konektor na osebnem računalniku.

Koaksialni kabel si mislimo, da je sestavljen iz zaporedno vezanih elementarnih vezij, kakršna prikazuje slika 3.17.



Slika 3.17: Telegrafski kabel

Da bodo enačbe enostavnejše, si mislimo, da je upornost, označena z G, v resnici podana s prevodnostjo, ki je recipročna upornost. Vse vrednosti diskretnih elementov so v resnici sorazmerne dolžini ΔL, torej

$$\begin{aligned} R &= r\Delta L, \\ L &= l\Delta L, \\ C &= c\Delta L, \\ G &= g\Delta L, \end{aligned}$$

kjer so r, l, c[12] in g upornost, induktivnost, kapaciteta in prevodnost na dolžinsko enoto. Tok I in napetost U sta kajpada funkciji koordinate x, merjene vzdolž kabla,

[12] V tem podrazdelku ne bomo nikjer uporabljali oznake c za hitrost svetlobe v vakuumu.

in časa t. Elementarni zakoni, prvi in drugi Kirchhoffov[13] zakon, povedo

$$\begin{aligned} U(x,t) &= U(x+\Delta L,t) + r\Delta L I(x,t) + l\Delta L \frac{\partial I(x,t)}{\partial t}, \\ I(x,t) &= I(x+\Delta L,t) + g\Delta L U(x,t) + c\Delta L \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}, \end{aligned}$$

ali po Lagrangeovem izreku

$$\begin{aligned} \Delta L \left.\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x^*} + r\Delta L I(x,t) + l\Delta L \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} &= 0, \\ \Delta L \left.\frac{\partial I(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x^{**}} + g\Delta L U(x,t) + c\Delta L \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} &= 0, \end{aligned}$$

kjer je $x < x^* < x + \Delta L$ in $x < x^{**} < x + \Delta L$, ali v limiti $\Delta L \to 0$

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} + rI(x,t) + l\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} = 0, \tag{3.191}$$

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} + gU(x,t) + c\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = 0. \tag{3.192}$$

Enačbo (3.191) odvajamo na x

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + r\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} + l\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x \partial t} = 0, \tag{3.193}$$

enačbo (3.192) pa na t

$$\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x \partial t} + g\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = 0. \tag{3.194}$$

Iz enačb (3.192), (3.193) in (3.194) eliminiramo $\frac{\partial I(x,t)}{\partial x}$ in $\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x \partial t}$ in ugotovimo, da funkcija U zadošča enačbi

$$\frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} = lc\frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} + (rc + lg)\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + rg\phi(x,t), \tag{3.195}$$

če pa enačbo (3.191) odvajamo na t, enačbo (3.192) pa na x in iz dobljenih enačb in enačbe (3.191) eliminiramo $\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x \partial t}$ in $\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}$, ugotovimo, da tudi funkcija I zadošča enačbi (3.195).

Enačbo (3.195) imenujemo *telegrafska enačba*. Če lahko *prepuščanje* g in induktivnost l zanemarimo, dobimo spet *difuzijsko enačbo*

$$\frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{D}\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t},$$

kjer je $D = (rc)^{-1}$ difuzijska konstanta.

[13] Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) je bil nemški fizik.

Bolj pomemben je visokofrekvenčni primer, kjer člen z drugim časovnim odvodom prevladuje. (Do istega rezultata pridemo, če zanemarimo r in g.) Enačba (3.195) se v tem primeru reducira na *enodimenzionalno valovno enačbo*

$$\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2},$$

kjer je $v = (lc)^{-\frac{1}{2}}$ hitrost širjenja valovanja vzdolž kabla.

3.7 Schrödingerjeva enačba

Če zanemarimo relativistične učinke in spin, nam v *kvantni mehaniki* opisuje delec *valovna funkcija* $\psi = \psi(\boldsymbol{x},t)$. Valovna funkcija je rešitev Schrödingerjeve[14] enačbe

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\boldsymbol{x},t) + V\psi(\boldsymbol{x},t) &= i\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}, && (3.196)\\ \|\psi\|^2 &= \langle\psi,\psi\rangle = \int|\psi|^2\,d\boldsymbol{x} = 1. && (3.197)\end{aligned}$$

Pri tem je

$$\begin{aligned} \hbar := \frac{h}{2\pi},& \\ h \approx 6.62618\times10^{-34}\text{Js} &\qquad \text{Planckova konstanta,}\\ m &\qquad \text{masa delca,}\\ V &\qquad \text{potencialna energija.}\end{aligned}$$

Vsaki fizikalni količini pripada v kvantni mehaniki nek simetričen operator. Če je A tak operator, je

$$\langle A\rangle \quad := \quad \langle A\psi,\psi\rangle$$

povprečna vrednost te količine, in $\sigma(A)$,

$$\sigma^2(A) \quad := \quad \langle(A-\langle A\rangle)^2\rangle$$

njen standardni odklon, vse ob času t.

Če je ψ lastna funkcija operatorja A z lastno vrednostjo a,

$$A\psi \quad = \quad a\psi,$$

je

$$\langle A\rangle \quad = \quad \langle A\psi,\psi\rangle = a\,\langle\psi,\psi\rangle = a$$

in

$$\sigma^2(A) \quad = \quad \langle(A-a)^2\rangle = \left\langle(A-a)^2\psi,\psi\right\rangle = 0.$$

[14]Erwin Schrödinger (1887-1961) je bil avstrijski fizik.

V takem primeru ima fizikalna količina A točno določeno vrednost a.

Če enačbo (3.196) napišemo v obliki

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{3.198}$$

je H ravno *operator energije*. Z nastavkom

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \phi(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}$$

dobimo

$$\begin{aligned} H\phi = \hbar\omega\phi =: \mathcal{E}\phi, \\ \mathcal{E} = \hbar\omega = h\nu \end{aligned} \tag{3.199}$$

in seveda tudi

$$H\psi = \mathcal{E}\psi. \tag{3.200}$$

Taka rešitev je, po navadi, možna le pri posebnih energijah $\mathcal{E}$.

3.7.1 Harmonični oscilator

Izračunajmo energijske nivoje *harmoničnega oscilatorja* v eni dimenziji. Potencialna energija je enaka

$$V(x) = \frac{k}{2}x^2,$$

torej se enačba (3.199) glasi

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \frac{k}{2}x^2\phi(x) &= \mathcal{E}\phi(x), \\ \phi &\in L^2(-\infty,\infty) \cap C^2(-\infty,\infty). \end{aligned}$$

Uvedimo

$$\begin{aligned} x &= Lz, \\ \phi(x) &= \varphi(z), \end{aligned}$$

kjer je L neka dolžina, ki jo bomo še določili. Dobimo

$$-\frac{\hbar^2}{2mL^2}\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} + \frac{kL^2}{2}z^2\varphi(z) = \mathcal{E}\varphi(z),$$

ali

$$-\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} + \frac{kmL^4}{\hbar^2}z^2\varphi(z) = \frac{2mL^2\mathcal{E}}{\hbar^2}\varphi(z).$$

Enačbo skušamo poenostaviti z nastavkom

$$\varphi(z) = e^{-\beta z^2}u(z),$$

kjer bomo β, tako kot L, še določili. Sledi

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi(z)}{dz} &= e^{-\beta z^2}\left[u'(z) - 2\beta z u(z)\right],\\ \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} &= e^{-\beta z^2}\left[u''(z) - 2\beta z u'(z) - 2\beta u(z) - 2\beta z u'(z) + 4\beta^2 z^2 u(z)\right] = \\ &= e^{-\beta z^2}\left[u''(z) - 4\beta z u'(z) + \left(4\beta^2 z^2 - 2\beta\right) u(z)\right]\end{aligned}$$

in dobimo enačbo

$$-u''(z) + 4\beta z u'(z) + \left(\frac{kmL^4}{\hbar^2} z^2 - 4\beta^2 z^2 + 2\beta\right) u(z) = \frac{2mL^2\mathcal{E}}{\hbar^2} u(z).$$

Zahtevajmo

$$4\beta^2 = \frac{kmL^4}{\hbar^2},$$

torej,

$$2\beta = \frac{L^2}{\hbar}\sqrt{km}.$$

Če postavimo še

$$2\beta = 1,$$

sledi

$$L^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{km}} \tag{3.201}$$

in dobimo enačbo

$$-u''(z) + 2zu'(z) = \left(\frac{2mL^2\mathcal{E}}{\hbar^2} - 1\right) u(z).$$

Tu prepoznamo *Hermiteov operator* z lastnimi vrednostmi

$$\frac{2mL^2\mathcal{E}}{\hbar^2} - 1 = 2n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

ali

$$\mathcal{E}_n = \frac{\hbar^2}{mL^2}\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Iz enačbe (3.201) sledi

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n &= \frac{\hbar^2\sqrt{km}}{m\hbar}\left(n + \frac{1}{2}\right),\\ \mathcal{E}_n &= \hbar\sqrt{\frac{k}{m}}\left(n + \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

3.7.2 Vodikov atom

Delec naj bo sedaj elektron v vodikovem atomu. Potem je

$$V(\boldsymbol{x}) \quad = \quad -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r},$$

kjer je

$$\begin{aligned} -q &= \text{naboj elektrona}, \\ q &= \text{naboj protona} \end{aligned}$$

in enačba (3.200) se glasi

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi(\boldsymbol{x}) - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\phi(\boldsymbol{x}) = \mathcal{E}\phi(\boldsymbol{x}). \tag{3.202}$$

Pišimo, kot je navada v jedrski fiziki,

$$e^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \tag{3.203}$$

in dobimo enačbo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi(\boldsymbol{x}) - \frac{e^2}{r}\phi(\boldsymbol{x}) = \mathcal{E}\phi(\boldsymbol{x}). \tag{3.204}$$

Zanimajo nas *vezana stanja*, to je, negativne energije, zato uvedemo

$$\kappa^2 = \frac{2m(-\mathcal{E})}{\hbar^2}. \tag{3.205}$$

Sledi

$$\Delta\phi(\boldsymbol{x}) + \frac{2me^2}{\hbar^2}\frac{1}{r}\phi(\boldsymbol{x}) = \kappa^2\phi(\boldsymbol{x}). \tag{3.206}$$

Preidimo v sferne koordinate

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial\phi(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial\phi(r,\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta} + \\ + & \quad \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\phi(r,\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi^2} + \frac{2me^2}{\hbar^2}\frac{1}{r}\phi(r,\vartheta,\varphi) = \\ = & \quad \kappa^2\phi(r,\vartheta,\varphi) \end{aligned}$$

in ločimo spremenljivke

$$\phi(r,\vartheta,\varphi) \quad = \quad R(r)Y(\vartheta,\varphi),$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right] + \frac{2me^2}{\hbar^2}r + \\ + & \quad \frac{1}{Y(\vartheta,\varphi)}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial Y(\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y(\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right] = \\ = & \quad \kappa^2 r^2. \end{aligned}$$

Člen, odvisen od kotov, poznamo, glej [24], in vemo, da je enak

$$-l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

in

$$Y(\vartheta, \varphi) = P_l^m(\cos\vartheta) \begin{array}{c}\sin\\ \cos\end{array} m\varphi, \quad m = 0, 1, \ldots, l. \tag{3.207}$$

Preostane nam enačba

$$\frac{d}{dr}\left[r^2 \frac{dR(r)}{dr}\right] + \left[-\kappa^2 r^2 + \frac{2me^2}{\hbar^2} r - l(l+1)\right] R(r) = 0.$$

Pišimo

$$\begin{aligned} z &:= 2\kappa r, \\ u(z) &:= R(r) \end{aligned}$$

in dobimo

$$\frac{d}{dz}\left[z^2 \frac{du(z)}{dz}\right] + \left[-\frac{1}{4} z^2 + \frac{me^2}{\kappa\hbar^2} z - l(l+1)\right] u(z) \quad = \quad 0,$$

ali

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{du(z)}{dz} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{me^2}{\kappa\hbar^2}\frac{1}{z} - \frac{l(l+1)}{z^2}\right] u(z) = 0. \tag{3.208}$$

Enačba (3.208) je v sorodu z izrojeno hipergeometrično enačbo

$$w''(z) + \left(\frac{c}{z} - 1\right) w'(z) - \frac{a}{z} w(z) = 0,$$

ki ima rešitvi

$$\begin{aligned} z &\longmapsto F(a, c; z), \\ z &\longmapsto G(a, c; z). \end{aligned}$$

V izrojeni hipergeometrični enačbi pišimo

$$\begin{aligned} w(z) &= z^b e^{\frac{1}{2}z} u(z), \\ w'(z) &= z^b e^{\frac{1}{2}z}\left[u'(z) + \frac{1}{2}u(z) + \frac{b}{z}u(z)\right], \\ w''(z) &= z^b e^{\frac{1}{2}z}\left[u''(z) + \frac{1}{2}u'(z) + \frac{b}{z}u'(z) - \frac{b}{z^2}u(z) + \frac{1}{2}u'(z) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4}u(z) + \frac{b}{2z}u(z) + \frac{b}{z}u'(z) + \frac{b}{2z}u(z) + \frac{b^2}{z^2}u(z)\right] = \\ &= z^b e^{\frac{1}{2}z}\left[u''(z) + u'(z) + \frac{2b}{z}u'(z) + \frac{1}{4}u(z) + \frac{b}{z}u(z) + \frac{b(b-1)}{z^2}u(z)\right]. \end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned} & u''(z)+u'(z)+\frac{2b}{z}u'(z)+\frac{1}{4}u(z)+\frac{b}{z}u(z)+\frac{b(b-1)}{z^2}u(z)+ \\ + \quad & \frac{c}{z}u'(z)+\frac{c}{2z}u(z)+\frac{bc}{z^2}u(z)-u'(z)-\frac{1}{2}u(z)-\frac{b}{z}u(z)-\frac{a}{z}u(z)=0, \end{aligned}$$

ali

$$u''(z)+\frac{2b+c}{z}u'(z)+\left[-\frac{1}{4}+\frac{c-2a}{2z}+\frac{b(b+c-1)}{z^2}\right]u(z)=0.$$

Poslednjo enačbo primerjamo z enačbo (3.208) in preberemo

$$\begin{aligned} 2b+c &= 2, \\ c-2a &= \frac{2me^2}{\kappa\hbar^2}, \\ b(b+c-1) &= -l(l+1). \end{aligned}$$

Ker je

$$b+c = 2-b,$$

zadnja enačba pove

$$b(1-b) = -l(l+1)$$

in dobimo dve rešitvi

(i)

$$\begin{aligned} b &= l+1, \\ c &= -2l, \\ a &= -l-\frac{me^2}{\kappa\hbar^2}, \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} b &= -l, \\ c &= 2l+2, \\ a &= l+1-\frac{me^2}{\kappa\hbar^2}. \end{aligned}$$

Tako dobimo dve rešitvi enačbe (3.208)

$$u(z) = z^{-l-1}e^{-\frac{1}{2}z}F\left(-l-\frac{me^2}{\kappa\hbar^2},-2l;z\right), \tag{3.209}$$

$$u(z) = z^{l}e^{-\frac{1}{2}z}F\left(l+1-\frac{me^2}{\kappa\hbar^2},2l+2;z\right). \tag{3.210}$$

Funkcija $z \longmapsto G(a,c;z)$ kot rešitev ne pride v poštev, ker lahko pokažemo, da je v obeh primerih v točki $z=0$ neomejena. Rešitev (3.209) je pravtako neomejena pri $z=0$, ker je $l=0,1,\ldots$. Tako nam preostane rešitev (3.210). Tudi ta ni vedno dobra. Iz Watsonove leme (1.3) sledi

$$\begin{aligned}
F(a,c;z) &= e^z F(c-a,c;-z) = \\
&= \frac{\Gamma(c)e^z}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)}\int_0^1 e^{-zt}t^{c-a-1}(1-t)^{a-1}\,dt \sim \\
&\sim \frac{\Gamma(c)e^z z^{a-c}\Gamma(c-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)} = \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} z^{a-c}e^z, \quad z\to\infty, \quad |\arg z| \le \frac{1}{2}\pi-\delta, \quad \delta>0,
\end{aligned}$$

ta funkcija pa ni element $L^2(0,\infty)$. Ta sklep ne velja, če je $z \longmapsto F(a,c;z)$ polinom, če je

$$l+1-\frac{me^2}{\kappa\hbar^2} = 0,-1,-2,\ldots,$$

oziroma

$$\frac{me^2}{\kappa\hbar^2} = n = l+1, l+2,\ldots.$$

Od tod

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{me^2}{\hbar^2 n}, \\
\kappa^2 &= \frac{m^2e^4}{\hbar^4 n^2} = \\
&= \frac{2m(-\mathcal{E})}{\hbar^2}
\end{aligned}$$

po enačbi (3.205). Tako dobimo možne negativne energije elektrona

$$\begin{aligned}
-\mathcal{E} &= \mathcal{E}_n, \\
\mathcal{E}_n &= \frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} = \\
&= \frac{mq^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2 n^2} = \\
&= \frac{mq^4}{8h^2\varepsilon_0^2 n^2} = \\
&= \frac{W}{n^2}, \\
W &= \frac{mq^4}{8h^2\varepsilon_0^2}.
\end{aligned}$$

Če elektron preide iz stanja n_1 v stanje n_2, tedaj odda (sprejme) razliko energij kot sevanje (*foton*) z energijo $h\nu$. Frekvenca tega sevanja je torej

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{W}{h}\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right),$$

ali

$$\frac{1}{\lambda} = Ry\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right),$$

kjer je

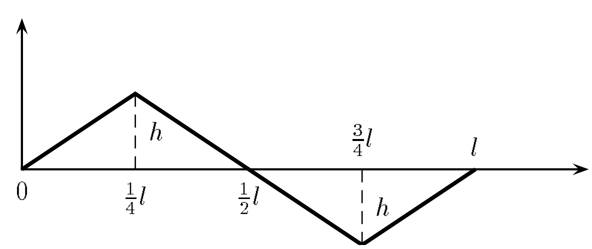
$$\begin{aligned} Ry &= \frac{W}{hc} = \\ &= \frac{mq^4}{8h^3 c\varepsilon_0^2} = \\ &= 1.0967758 \times 10^7 \mathrm{m}^{-1} \end{aligned}$$

Rydbergova[15] *konstanta*. Ta je izmerjena zelo natančno in predstavlja ključni podatek za izračun drugih fizikalnih konstant.

3.8 Naloge

3.1 Z uporabo d'Alembertove rešitve (3.20) skiciraj gibanje napete strune, če je začetna lega takšna, kot jo prikauje slika 3.2, začetna hitrost pa nič.

3.2 Ista naloga kot naloga 3.1, le začetni položaj je tak, kot ga prikazuje slika 3.18.

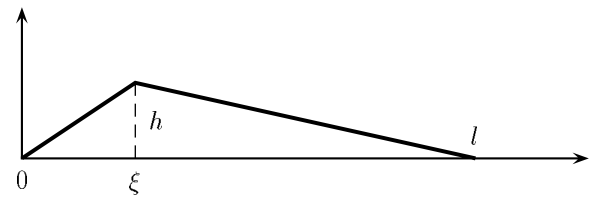


Slika 3.18: Začetni položaj napete strune k nalogi 3.2

3.3 Ista naloga kot naloga 3.1, le začetni položaj je tak, kot ga prikazuje slika 3.19.

3.4 Poišči analitično rešitev (Fourierjevo vrsto) nihanja vpete strune, če je začetna lega taka kot jo prikazuje slika 3.19 in struna v začetku miruje.

[15] Johannes Robert Rydberg (1854-1919) je bil švedski fizik.



Slika 3.19: Začetni položaj napete strune k nalogi 3.3

3.5 Klavirsko struno dolžine l ob času $t = 0$ v točki $x = \xi$ udari kladivce in je zato ob času $t = 0$ struna v mirovni legi, začetna hitrost pa je podana z

$$g(x) = \begin{cases} \frac{p}{d}\cos\frac{\pi(x-\xi)}{d}, & |x-\xi| < \frac{1}{2}d, \\ 0, & |x-\xi| > \frac{1}{2}d \end{cases}.$$

Izračunaj odmik $u(x,t)$! Kakšno rešitev dobimo v limiti $d \to 0$?

3.6 Struna je na vrhu, pri $x = l$, pritrjena, spodaj, pri $x = 0$, pa prosto visi, glej sliko 3.3. Začetna hitrost je nič, začetni odmik pa je

$$u(x,0) = f(x) = h\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2.$$

Izračunaj odmik strune ob času t.

3.7 Struna dolžine l kroži s konstantno kotno hitrostjo ω_0. Ob času $t = 0$ struna (v vrtečem se koordinatnem sistemu) miruje v legi

$$u(x,0) = f(x) = h\frac{x(l-x)}{l^2}.$$

Izračunaj odmik strune ob času t!

3.8 (Pisni izpit Analiza IV, september 1997) Napeta struna $(0 < x < l)$ nosi v točki $x = c, \quad 0 < c < l$, točkasto maso m_0. Struna ima linearno gostoto ρ in jo napenja sila T. Struna je v krajiščih vpeta.

1. Dokaži, da je nihanje strune opisano z

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \qquad v^2 = \frac{T}{\rho}, \\ u(.,t) &\in \mathcal{C}[0,l], \quad u_x, u_{xx} \quad \text{odsekoma zvezni}, \\ u(0,t) &= 0, \\ u(l,t) &= 0, \\ u_x(c+0,t) - u_x(c-0,t) &= \frac{m_0}{T}u_{tt}(c,t). \end{aligned}$$

2. Poišči enačbo, ki ji zadoščajo lastne frekvence takšne strune.

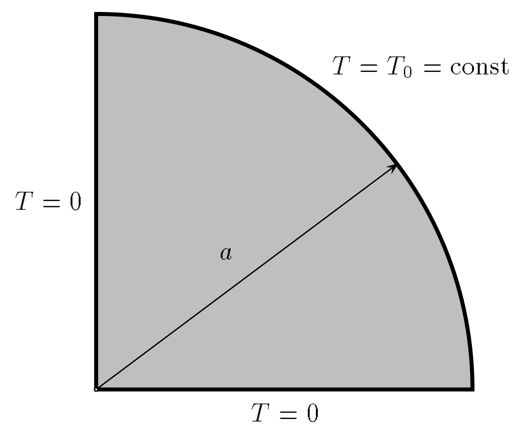
3.9 Pokaži, da operator podrazdelka 3.2.1

$$\begin{aligned} Au &= -u'', \\ \mathcal{D}_A &= \{u; \quad u \in C^2[0,l], \quad u'(0) = u'(l) = 0\}, \end{aligned}$$

ni injektiven, postane pa injektiven, če spremenimo $\mathcal{D}_A$ v

$$\mathcal{D}_A = \{u; \quad u \in C^2[0,l], \quad \int_0^l u\,dx = 0, \quad u'(0) = u'(l) = 0\}.$$

3.10 (Pisni izpit Analiza IV, julij 1997) Dolga palica ima presek oblike, kot ga prikazuje slika 3.20. Površino vzdržujemo na temperaturah, kot jih kaže slika. Izračunaj stacionarno porazdelitev temperature.



Slika 3.20: Presek dolge palice v nalogi 3.10

3.11 Dokaži, da je deformacijski tenzor $\boldsymbol{e}$, definiran z enačbo (3.56) enak nič natanko takrat, ko je vektor $\boldsymbol{u}$ oblike $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{x}$!

3.12 Izpelji Navierjeve ravnotežne enačbe (3.65)!

3.13 (Pisni izpit Analiza IV, april 1998) Za kakšen faktor se zmanjša torzijska konstanta pokončnega krožnega valja, če je v valju razpoka, ki sega do središča valja?

Namig. Razpoka naj (v kartezičnih koordinatah) sega od izhodišča do točke $(a, 0)$, če je a polmer valja. Poissonovo enačbo reši tako, da od rešitve odštevaš partikularno rešitev, ki reši Poissonovo enačbo in ki zadošča robnemu pogoju na razpoki.

3.14 Pri kakšnih robnih pogojih je operator

$$\boldsymbol{Au} = -(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} + \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$$

pozitiven? Pozitivno definiten?

3.15 Izračunaj torzijsko konstanto valja z eliptičnim presekom!

3.16 Kako se pod Lorentzovo transformacijo transormirajo komponente simetričnega tenzorja četverca A^{ik}?

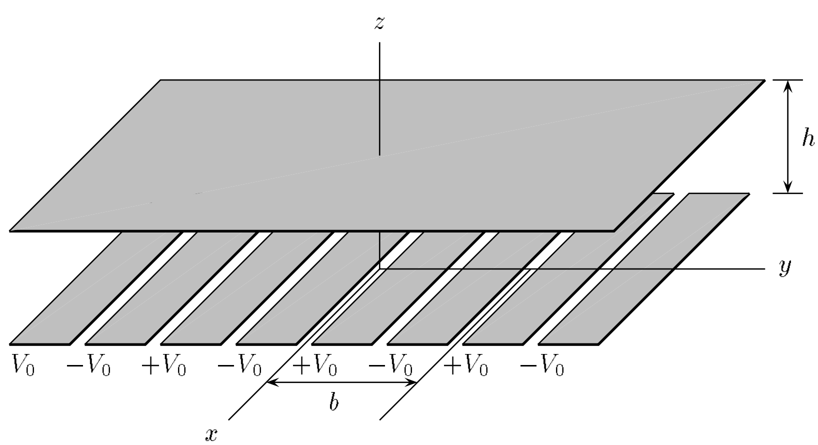
3.17 Kako se pod Lorentzovo transformacijo transormirajo komponente antisimetričnega tenzorja četverca A^{ik}?

3.18 Analiziraj relativistično enakomerno pospešeno gibanje, to je, premočrtno gibanje, kjer je pospešek a v lastnem koordinatnem sistemu (ob vsakem trenutku) konstanten!

3.19 Analiziraj gibanje naboja v konstantnem enakomernem električnem polju!

3.20 Izračunaj elektrostatični potencial v notranjosti prazne kocke z robom a, če je ena stranska ploskev na potencialu V_0, ostale pa na potencialu 0!

3.21 Dve veliki paralelni plošči sta razmaknjeni za h. Spodnja plošča je razrezana na pasove širine $b/2$, ki so izmenično na potencialih $+V_0$ in $-V_0$, zgornja plošča je na potencialu nič, glej sliko 3.21. Izračunaj elektrostatični potencial!

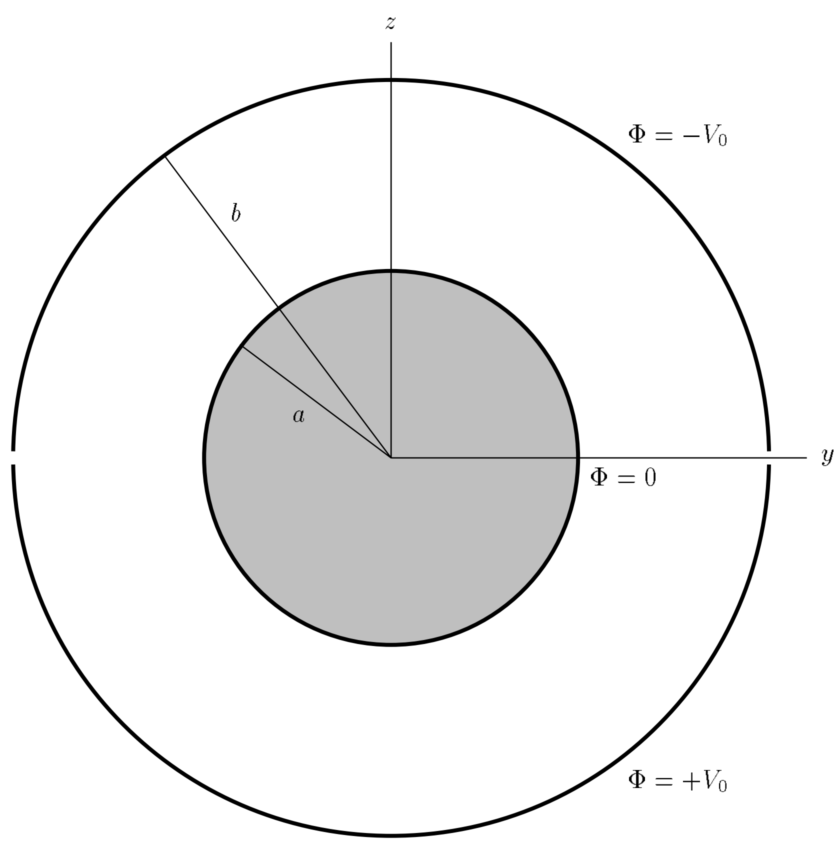


Slika 3.21: Dve veliki paralelni plošči v nalogi 3.21

3.22 V homogeneno električno polje postavimo neskončen prevoden cilinder z osjo pravokotno na polje. Izračunaj električno polje v prostoru okrog cilindra!

3.23 V homogeneno električno polje postavimo prevodno zaprto okroglo konzervo z osjo pravokotno na polje. Izračunaj električno polje v prostoru okrog konzerve!

3.24 Izračunaj elektrostatični potencial v prostoru med dvema koncentričnima sferičnima lupinama, glej sliko 3.22. Notranja lupina, s polmerom a, je na potencialu nič, zunanja lupina, s polmerom b, je razrezana na dve polsferi, ki sta na potencialih $+V_0$ in $-V_0$.

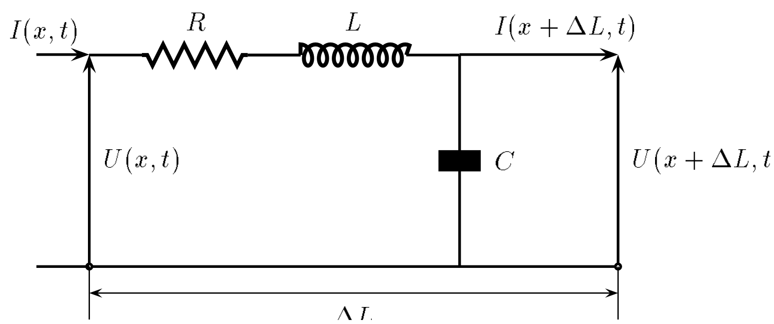


Slika 3.22: Dve koncentrični sferi v nalogi 3.24

3.25 Izračunaj sipanje električnega polja na prevodni krogli!

3.26 (Pisni izpit Analiza IV, april 1998) Koaksialni kabel dolžine d ima, na enoto dolžine, upornost r, induktivnost l in kapaciteto c. Na enem koncu, pri $x = d$, je kratko sklenjen, na drugem koncu, pri $x = 0$, je spojen na konstanten izvor napetosti E. Izračunaj porazdelitev napetosti vzdolž kabla, če so začetni tok in začetna napetost enaki nič. Glej sliko 3.23.

Namig. Robne pogoje napraviš homogene tako, da odšteješ tisto partikularno rešitev enačbe, ki je odvisna samo od x.



Slika 3.23: Koaksialni kabel v nalogi 3.26

Rešitev:

$$U(x,t) = E\left(1 - \frac{x}{d}\right) - \frac{2E}{\pi} e^{-\frac{rt}{2l}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{n\pi v^* t}{d} + \frac{rd}{2n\pi Z^*} \sin\frac{n\pi v^* t}{d}\right) \frac{\sin\frac{n\pi x}{d}}{n},$$

kjer je

$$v^* = \sqrt{\frac{1}{lc}}\sqrt{\left(1 - \frac{d^2 r^2 c}{4n^2\pi^2 l}\right)}.$$

in

$$Z^* = L v^*.$$

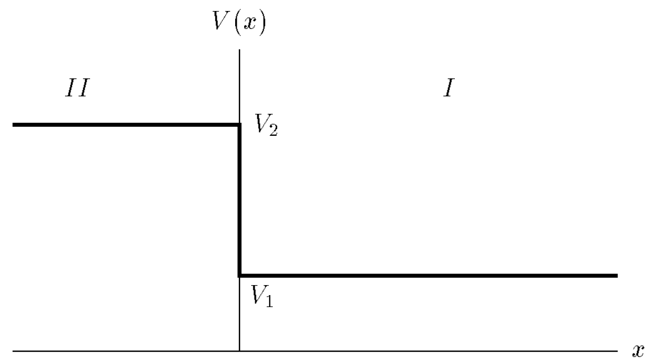
3.27 Analiziraj obnašanje kvantnega delca v enodimenzionalnem potencialnem polju, ki je prikazano na sliki 3.24.

3.28 Analiziraj obnašanje kvantnega delca v enodimenzionalnem potencialnem polju, ki je prikazano na sliki 3.25.

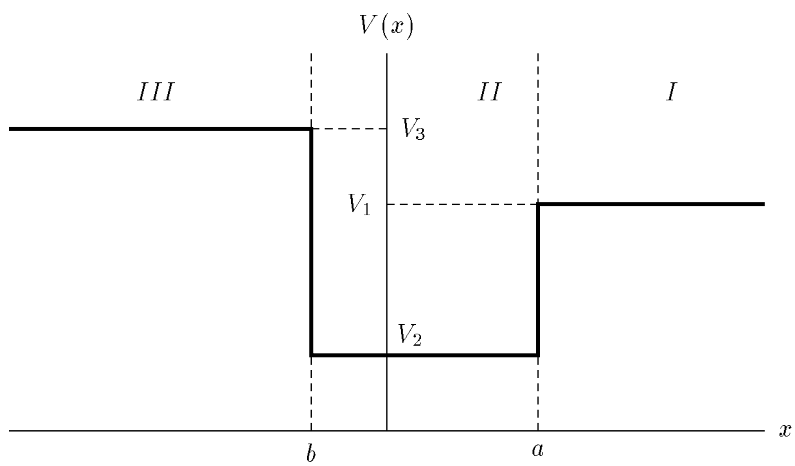
3.29 Analiziraj obnašanje kvantnega delca v enodimenzionalnem potencialnem polju, ki je prikazano na sliki 3.26. To je *tunelski pojav*, ko delec prodre skozi potencialno bariero, skozi katero po klasični teoriji ne more.

3.30 (Pisni izpit Analiza IV, julij 1997) Izračunajte kapacitivnost *razpotegnjenega sferoida*, to je, rotacijskega elipsoida s polosmi $a = b > c > 0$.

Zbirka namigov.

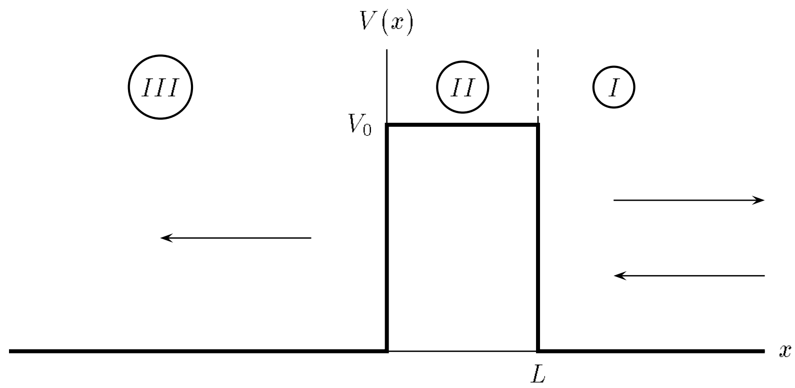


Slika 3.24: Enodimenzionalna potencialna stopnica v nalogi 3.27



Slika 3.25: Enodimenzionalna potencialna jama v nalogi 3.28

1. Kapacitivnost (enega samega omejenega) telesa Ω izračunamo tako, da rešimo nalogo
$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \boldsymbol{x} \notin \Omega, \qquad u(\boldsymbol{x})|_{\partial\Omega} = V.$$
Po formuli
$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \epsilon_0 \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega},$$
kjer je n zunanja normala, izračunamo površinsko gostoto naboja in končno



Slika 3.26: Enodimenzionalna potencialna bariera v nalogi 3.29

kapacitivnost $C = \frac{Q}{V}$, kjer je Q površinski naboj $Q = \oint_{\partial\Omega} \sigma(\boldsymbol{x})\, dS$.

2. Nalogo rešujemo v *razpotegnjenih sferoidalnih koordinatah*

$$\begin{aligned} x &= e \sinh\alpha \sin\beta \cos\phi, \\ y &= e \sinh\alpha \sin\beta \sin\phi, \\ z &= e \cosh\alpha \cos\beta, \end{aligned}$$

kjer je e ekscentričnost sferoida, $e^2 = a^2 - c^2$.

3. Ker bo rešitev osno simetrična, bo neodvisna od kota ϕ.

4. V ortogonalnih krivočrtnih koordinatah (ξ_1, ξ_2, ξ_3) velja

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} u &= \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial \xi_2}, \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right), \\ \operatorname{div} \boldsymbol{A} &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}(H_2 H_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}(H_3 H_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial \xi_3}(H_1 H_2 A_3) \right], \end{aligned}$$

kjer so H_k Laméjevi koeficienti

$$H_k^2 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_k}.$$

5. Legendreova diferencialna enačba

$$(1 - z^2)\frac{d^2 w(z)}{dz^2} - 2z\frac{dw(z)}{dz} + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{e - z^2} \right] w(z) = 0$$

ima linearno neodvisni rešitvi $w(z) = P_\nu^\mu(z)$ in $w(z) = Q_\nu^\mu(z)$.

6. Legendreova funkcija druge vrste reda nič je

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} \log \frac{z+1}{z-1}$$

Poglavje 4

Parcialne diferencialne enačbe 1. reda

4.1 Odvisnost funkcij

Definicija 4.1 *Imejmo m funkcij $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, ki so definirane in zvezno odvedljive na območju*

$$\Omega \quad \subset \quad \mathbb{R}^n.$$

Pravimo, da so te funkcije v Ω odvisne, *če eksistira netrivialna zvezno odvedljiva funkcija $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, taka, da je za $\boldsymbol{x} \in \Omega$*

$$F\left[\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \ldots, \varphi_m(\boldsymbol{x})\right] = 0. \tag{4.1}$$

Primer 4.1 Funkcije φ_1, φ_2 in $\varphi 3$,

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, y) &= x^2 + y^2, \\
\varphi_2(x, y) &= xy, \\
\varphi_3(x, y) &= x + y
\end{aligned}$$

so v $\mathbb{R}^2$ odvisne, ker je

$$\varphi_1(x, y) + 2\varphi_2(x, y) - \varphi_3^2(x, y) \quad = \quad 0.$$

▲

Izrek 4.1 *Funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ so v Ω odvisne natanko takrat, ko je rang* Jacobijeve matrike

$$\left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}\right]_{k=j=1}^{k=m, j=n}$$

v Ω manjši od m.

Dokaz. Naj bodo funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ odvisne v $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in

$$F\left[\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \ldots, \varphi_m(\boldsymbol{x})\right] = 0$$

za $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Tedaj je

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_m\right)}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Ker je $F \not\equiv 0$, je vsaj en odvod $\frac{\partial F(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\partial \varphi_k}$ različen od nič, sistem (4.2) za odvode $\frac{\partial F(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\partial \varphi_k}$ ima netrivialno rešitev, rang Jacobijeve matrike mora biti manjši od m.

Obratno, če je rang Jacobijeve matrike enak r, $0 < r < m$, po potrebi preuredimo odvisne in neodvisne spremenljivke tako, da bo

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)}{\partial(x_1, \ldots, x_r)} \neq 0, \tag{4.3}$$

vse večje poddeterminante pa so enake nič. Zaradi (4.3) lahko po eksistenčnem izreku za implicitne funkcije iz enačb

$$y_k = \varphi_k\left(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n\right), \quad k = 1, 2, \ldots, r$$

izračunamo

$$x_j = \psi_j\left(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n\right), \quad j = 1, 2, \ldots, r$$

in to vstavimo v φ_{r+p}, $p > 0$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{r+p}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) &= \varphi_{r+p}\left[\psi_1\left(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n\right), \ldots,\right. \\
&\qquad \left.\psi_r\left(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n\right), x_{r+1}, \ldots, x_n\right] =: \\
&=: \psi_{r+p}\left(y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_n\right).
\end{aligned}$$

Pokažimo, da so funkcije ψ_{r+p} neodvisne od spremenljivk x_{r+q}, $q > 0$! Determinanto

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \varphi_{r+p})}{\partial(x_1, \ldots, x_r, x_{r+q})} = 0$$

razvijemo v obliko

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} & \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \psi_{r+p}}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r} & \cdots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} & \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \psi_{r+p}}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r} \\
\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{r+q}} & \cdots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_{r+q}} & \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \psi_{r+p}}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_{r+q}} + \frac{\partial \psi_{r+p}}{\partial x_{r+q}}
\end{vmatrix} = 0.$$

Od zadnjega stolpca odštejemo stolpce j, $j = 1, \ldots, r$, pomnožene z

$$\frac{\partial \psi_{r+p}}{\partial y_j}$$

in rezultat razvijemo po zadnjem stolpcu, da dobimo

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)}{\partial(x_1, \ldots, x_r)} \frac{\partial \psi_{r+p}}{\partial x_{r+q}} = 0.$$

Ker prvi faktor ni nič, je

$$\frac{\partial \psi_{r+p}}{\partial x_{r+q}} = 0, \quad p, q > 0,$$

torej so funkcije ψ_{r+p} odvisne le od $y_1, \ldots, y_r$. ∎

4.2 Parcialne diferencialne enačbe

Kadar imamo diferencialno enačbo za iskano funkcijo večih spremenljivk, tedaj v enačbi nastopajo parcialni odvodi. Tako enačbo imenujemo *parcialna diferencialna enačba* (*PDE*). Kot običajno, red najvišjega odvoda imenujemo *red PDE.*

Splošna PDE prvega reda za funkcijo u treh spremenljivk, x, y in z, ima obliko

$$F\left[x, y, z, u(x,y,z), \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\right] = 0.$$

Splošna PDE drugega reda za funkcijo u dveh spremenljivk, x in y, ima obliko

$$F\left[x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\right] = 0.$$

Do navadne diferencialne enačbe (NDE) *lahko* pridemo tako, da iz enačbe za družino funkcij eliminiramo poljubne elemente – konstante. Podobno *lahko* teče pot pri PDE.

Primer 4.2 Poiščimo PDE, ki ji zadoščajo enačbe vseh sfer v (x, y, z) prostoru in ki imajo središče na osi z:

$$x^2 + y^2 + (z-a)^2 = r^2, \quad a = \text{const}, \quad r = \text{const}.$$

Če to enačbo razrešimo na z, $z = u(x, y)$, sledi

$$x + [u(x,y) - a]\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0,$$
$$y + [u(x,y) - a]\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$$

in od tod

$$y\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - x\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0. \tag{4.4}$$

▲

Primer 4.3 Poiščimo PDE, ki ji zadoščajo enačbe vseh stožcev v (x, y, z) prostoru, ki se jim rotacijska os ujema z osjo z:

$$x^2 + y^2 = a^2(z-b)^2, \quad a = \text{const}, \quad b = \text{const}.$$

Če to enačbo razrešimo na z, $z = u(x, y)$, sledi

$$\begin{aligned} x &= a^2[u(x,y) - b]\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \\ y &= a^2[u(x,y) - b]\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \end{aligned}$$

in od tod

$$y\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - x\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0,$$

torej spet enačba (4.4).

▲

Rešitve enačbe (4.4) so, med drugim, enačbe vseh sfer s središčem na osi z, in vseh stožcev z osjo z. Kaj imajo skupnega? Oboji so *rotacijske ploskve*. Splošna rotacijska ploskev, ki ima os z za simetrijsko os, ima enačbo

$$z = u(x,y) = w\left(x^2 + y^2\right),$$

kjer je $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *poljubna (gladka) funkcija*. Sledi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &= 2xw'\left(x^2 + y^2\right), \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} &= 2yw'\left(x^2 + y^2\right) \end{aligned}$$

in

$$y\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - x\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0.$$

torej spet ista PDE (4.4). Njena rešitev je torej enačba vseh *rotacijskih ploskev*, ki imajo os z za rotacijsko os.

To nam dá misliti, da tudi rešitve PDE vsebujejo poljubne elemente, le da to niso *konstante* ampak *funkcije*.

Domnevo podprimo še z nekaj primeri!

Primer 4.4 Naj bo $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poljubna gladka funkcija. Potem sledi

$$\begin{aligned} u(x,y) &= w(xy), \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &= yw'(xy), \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} &= xw'(xy), \\ x\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - y\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

▲

Primer 4.5 Vzemimo splošno *enoparametrično družino* ravnin

$$z = u(x, y) \quad = \quad \alpha x + w(\alpha)y + v(\alpha),$$

kjer sta w in v poljubni gladki funkciji in α poljubna kostanta. *Ogrinjačo* take družine ravnin imenujemo *razvojna ploskev*.

Ogrinjačo družine

$$F(x, y, z, \alpha) \quad = \quad 0$$

dobimo, kot vemo, tako, da iz te enačbe in iz enačbe

$$\frac{\partial F(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} \quad = \quad 0$$

eliminiramo α. V našem primeru je treba α eliminirati iz enačb

$$z = u(x, y) \quad = \quad \alpha x + w(\alpha)y + v(\alpha), \tag{4.5}$$

$$0 \quad = \quad x + w'(\alpha)y + v'(\alpha). \tag{4.6}$$

Če od tu eliminiramo α, dobimo enačbo razvojne ploskve, ki vsebuje funkciji w in v na zelo zamotan način.

Namesto tega najprej eleminirajmo funkcijo v tako, da enačbo (4.5) odvajamo na x in na y

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \alpha, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= w(\alpha). \end{aligned}$$

Iz teh dveh enačb eliminirajmo α

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \quad = \quad w\left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\right].$$

Z dodatnim odvajanjem eliminiramo še funkcijo w

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} &= w'\left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} &= w'\left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

ali

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \quad = \quad \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}\right]^2.$$

Tej enačbi zadoščajo vse razvojne ploskve.

▲

Primer 4.6 Funkcija $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se imenuje *homogena funkcija* stopnje α, če za vsak $t \in \mathbb{R}$ velja

$$u(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^\alpha u(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Izberimo $t = \frac{1}{x_n}$ in dobimo

$$\begin{aligned} w\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) &:= u\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right) = \\ &= x_n^{-\alpha} u(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Homogene funkcije n spremenljivk se torej izražjo s poljubno (gladko) funkcijo $n-1$ kvocientov x_1/x_n, x_2/x_n, ... x_{n-1}/x_n.

Imejmo torej družino

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n^\alpha w\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

kjer je α parameter in $w : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ poljubna gladka funkcija. Eliminirajmo jo! Označimo

$$z_k = \frac{x_k}{x_n}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

in sledi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} &= x_n^\alpha \frac{\partial w(z_1, \dots, z_{n-1})}{\partial z_k} \frac{1}{x_n}, \quad k = 1, \dots, n-1, \\ \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} &= \alpha x_n^{\alpha-1} w(z_1, \dots, z_{n-1}) - x_n^\alpha \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial w(z_1, \dots, z_{n-1})}{\partial z_k} \frac{x_k}{x_n^2} = \\ &= \alpha x_n^{\alpha-1} w(z_1, \dots, z_{n-1}) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{x_n} \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

ali

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} = \alpha u(x_1, \dots, x_n). \tag{4.7}$$

Enačbo (4.7) imenujemo *Eulerjev homogenitetni pogoj.*

▲

V vseh primerih je družina z n poljubnimi gladkimi funkcijami $m-1$ spremenljivk privedla do PDE reda n za funkcijo m spremenljivk. Domnevamo, da velja tudi obratno:

Domneva 4.1 *PDE reda n v m spremenljivkah ima za splošno rešitev funkcijo, ki vsebuje n poljubnih gladkih funkcij $m-1$ spremenljivk.*

Primer 4.7 Navadno diferencialno enačbo reda n

$$F\left[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right] \quad = \quad 0$$

lahko tolmačimo kot PDE za $m = 1$ spremenljivko. Vemo, da ima taka enačba splošno rešitev, ki je odvisna od n poljubnih konstant, to je od n poljubnih funkcij $m - 1 = 0$ spremenljivk.

▲

Primer 4.8

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \quad = \quad 0.$$

Očitna rešitev je

$$u(x,y) \quad = \quad w(y), \quad w \text{ poljubna gladka funkcija.}$$

▲

Primer 4.9

$$\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} \quad = \quad 0.$$

Očitna rešitev je

$$u(x,y,z) \quad = \quad w(y,z), \quad w \text{ poljubna gladka funkcija.}$$

▲

Primer 4.10

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} \quad = \quad 0.$$

Sledi

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \quad = \quad w_0(x), \quad w_0 \quad \text{poljubna gladka funkcija.}$$

Dalje sledi

$$u(x,y) \quad = \quad \int w_0(x)\, dx + v(y),$$

ali

$$u(x,y) \quad = \quad w(x) + v(y), \quad w, v \text{ poljubni gladki funkciji.}$$

▲

Primer 4.11

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \tag{4.8}$$

Uvedemo novi neodvisni spremenljivki

$$\begin{aligned} x+y &= \xi, \\ x-y &= \eta, \\ u(x,y) &= v(\xi,\eta). \end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Torej enačba (4.8) preide v enačbo

$$2\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} = 0$$

in od tod

$$u(x,y) = v(\xi,\eta) = w(\xi) = w(x+y), \quad w \text{ poljubna gladka funkcija.}$$

▲

Primer 4.12 Naj bo g dana funkcija in u iskana funkcija v enačbi

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0,$$

ali

$$\frac{\partial(g,u)}{\partial(x,y)} = 0.$$

Po izreku 4.1 sta funkciji g in u odvisni, torej je

$$u(x,y) = w[g(x,y)],$$

kjer je $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poljubna gladka funkcija.

▲

4.2.1 Homogena linearna PDE prvega reda

Dane naj bodo primerne funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ali na kratko, *vektorsko polje* $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. *Homogeno linearno PDE prvega reda*

$$f_1(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial u(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1} + \cdots + f_n(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial u(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_n} = 0$$

za funkcijo u lahko zapišemo tudi v obliki

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \operatorname{grad} u(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{4.9}$$

Če je funkcija u rešitev enačbe (4.9) in če vzamemo ploskev z enačbo

$$u(\boldsymbol{x}) = \text{const}, \tag{4.10}$$

ima normala na ploskev smer $\operatorname{grad} u(\boldsymbol{x})$, enačba (4.9) pa pove, da je normala na ploskev (4.10) pravokotna na polje $\boldsymbol{f}$, kar pomeni, da se ploskev (4.10) v vsaki točki dotika polja $\boldsymbol{f}$.

Poiščimo *tirnice*, (tudi *trajektorije*), vektorskega polja $\boldsymbol{f}$, to je, krivulje, ki se v vsaki točki dotikajo polja $\boldsymbol{f}$. Če je

$$\boldsymbol{x} \quad = \quad \boldsymbol{x}(t)$$

parametrična enačba tirnice, mora veljati

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t)]. \tag{4.11}$$

Enačba[1] (4.11), napisana po komponentah, se glasi

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1\left[x_1(t), \ldots, x_n(t)\right], \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n\left[x_1(t), \ldots, x_n(t)\right].
\end{aligned}$$

To je *avtonomen sistem* NDE, ki ga lahko napišemo brez parametra

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n}. \tag{4.12}$$

Če izberemo, na primer, x_n za neodvisno spremenljivko, dobimo sistem $n-1$ navadnih diferencialnih enačb

$$\frac{dx_k\left(x_n\right)}{dx_n} = \frac{f_k\left(x_1, \ldots, x_n\right)}{f_n\left(x_1, \ldots, x_n\right)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4.13}$$

Izrek 4.2 *Naj bo vektorsko polje* $\boldsymbol{f}$ *gladko in ne enako nič. Avtonomni sistem (4.11) ima tedaj* $n-1$ *neodvisnih integralov* φ_1, φ_2, ..., φ_{n-1}.

Dokaz. Po pogojih izreka obstaja točka $\boldsymbol{x}_0$, da je v neki njeni okolici $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq 0$. Po potrebi premešamo komponente, da bo v tej okolici $f_n(\boldsymbol{x}) \neq 0$. Po eksistenčnem izreku za sistem navadnih diferencialnih enačb, glej [24], ima potem sistem (4.13) pri začetnih pogojih

$$x_k\left(x_n^{(0)}\right) = x_k^{(0)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

[1] V resnici bi morali pisati, da je vektor $\dot{\boldsymbol{x}}$ sorazmeren vektorju $\boldsymbol{f}$, vendar se sorazmernostne konstante lahko znebimo s primerno izbiro parametra t.

natanko eno rešitev

$$x_k = g_k\left(x_n, x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{4.14}$$

v okolici točke $x_n^{(0)}$. Sistem (4.14) sedaj razrešimo na $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, …, $x_{n-1}^{(0)}$. To gre, če je

$$J(x_n) := \frac{\partial\left(g_1, \ldots, g_{n-1}\right)}{\partial\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}\right)} \neq 0$$

v okolici točke $x_n^{(0)}$. To pa zagotovo drži, saj je rešitev (4.14) zvezno odvisna od začetnih pogojev in je

$$J\left(x_n^{(0)}\right) \;=\; 1.$$

Iz enačb (4.14) torej dobimo

$$x_k^{(0)} = \varphi_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4.15}$$

Avtonomni sistem (4.11) ima tako zagotovo $n-1$ integralov φ_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Ti integrali so neodvisni. Če bi bili odvisni, bi za neko netrivialno funkcijo F veljalo

$$F\left[\varphi_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \varphi_{n-1}(\boldsymbol{x})\right] \;=\; F\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}\right) = 0,$$

to pa zagotovo ni res, saj je točka $\boldsymbol{x}_0$ poljubna. ■

Definicija 4.2 *Sistem (4.11) imenujemo* karakteristični sistem *enačbe (4.9), tirnice pa imenujemo* karakteristike*.*

Izrek 4.3 *Skalarno polje $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je integral sistema (4.11)*

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t)]$$

natanko takrat, ko reši enačbo (4.9).

Dokaz. Naj bo u poljuben integral sistema (4.11). Na njem velja

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \frac{d}{dt}u[\boldsymbol{x}(t)] = \\ &=\; \operatorname{grad} u(\boldsymbol{x}) \cdot \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \\ &=\; \operatorname{grad} u(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

in vidimo, da vsak integral sistema (4.11) reši enačbo (4.9).

Obratno, če funkcija u reši enačbo (4.9), je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u[\boldsymbol{x}(t)] \;&=\; \operatorname{grad} u(\boldsymbol{x}) \cdot \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \\ &=\; \operatorname{grad} u(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0 \end{aligned}$$

in je u integral sistema (4.11). ■

Izrek 4.4 *Funkcija u je rešitev enačbe (4.9) natanko takrat, ko je*

$$u = w(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}), \tag{4.16}$$

kjer so φ_1, φ_2, ..., φ_{n-1} neodvisni integrali karakterističnega sistema (4.11).

Dokaz. Naj bo $w : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ poljubna gladka funkcija in $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ neodvisni integrali sistema (4.11). Tedaj je tudi φ

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = w[\varphi_1(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_{n-1}(\boldsymbol{x})]$$

integral sistema (4.11), saj na tiru velja

$$\frac{d}{dt}\varphi[\boldsymbol{x}(t)] = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial w(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}{\partial \varphi_k} \frac{d}{dt}\varphi_k[\boldsymbol{x}(t)] = 0.$$

Če so φ_1, φ_2, ..., φ_{n-1} neodvisni integrali karakterističnega sistema, je po ravnokar dokazanem funkcija u v enačbi (4.16) tudi, po izreku 4.3 pa potem funkcija u reši enačbo (4.9). Obratno, če je funkcija u rešitev enačbe (4.9), tedaj je tudi integral karakterističnega sistema po izreku 4.3 in imamo n integralov

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, u.$$

Zanje velja

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} \cdot \operatorname{grad} \varphi_k &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ \boldsymbol{f} \cdot \operatorname{grad} u &= 0. \end{aligned}$$

To je homogen sistem linearnih (algebraičnih) enačb za netrivialen vektor $\boldsymbol{f}$, zato mora biti

$$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, u)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = 0.$$

Po izreku 4.1 so potem funkcije φ_1, φ_2, ..., φ_{n-1}, u odvisne, in ker so funkcije φ_1, φ_2, ..., φ_{n-1} neodvisne, velja (4.16). ■

Primer 4.13 Enačba

$$x u_x(x, y) - y u_y(x, y) = 0. \tag{4.17}$$

Karakteristični sistem je

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t), \\ \dot{y}(t) &= -y(t), \end{aligned}$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)y(t) + x(t)\dot{y}(t) &= 0, \\ [x(t)y(t)]^{\cdot} &= 0, \\ x(t)y(t) &= \text{const.} \end{aligned}$$

Rešitev enačbe (4.17) je

$$u(x, y) = w(xy), \quad w \text{ poljubna gladka funkcija.}$$

▲

Primer 4.14 Enačba

$$y u_x(x,y) - x u_y(x,y) = 0. \tag{4.18}$$

Karakteristični sistem je

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t), \\ \dot{y}(t) &= -x(t), \end{aligned}$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) &= 0, \\ x^2(t) + y^2(t) &= \text{const}. \end{aligned}$$

Rešitev enačbe (4.18) je

$$u(x,y) = w\left(x^2 + y^2\right), \quad w \text{ poljubna gladka funkcija.}$$

▲

Primer 4.15 Naj bo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \cdot \operatorname{grad} u(\boldsymbol{x}) &= 0, \\ \boldsymbol{x} &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Karakteristični sistem je

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t)$$

in rešitev

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{C} e^t,$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} \frac{x(t)}{z(t)} &= \text{const}, \\ \frac{y(t)}{z(t)} &= \text{const}. \end{aligned}$$

Rešitev enačbe (4.19) je

$$u(x,y) = w\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \quad w \text{ poljubna gladka funkcija.}$$

▲

Primer 4.16 Naj bo

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, \operatorname{grad} u(\boldsymbol{x})] \quad = \quad 0, \quad \boldsymbol{a} = \text{const.} \tag{4.20}$$

Karakteristični sistem je

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) \quad = \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}(t),$$

kjer je $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ mešani produkt vektorjev $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ in $\boldsymbol{c}$, od koder sledi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) \cdot \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= 0, \\ \boldsymbol{a} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= 0, \end{aligned}$$

ali

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{x}(t)|^2 &= \text{const}, \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}(t) &= \text{const}. \end{aligned}$$

Rešitev enačbe (4.20) je

$$u(x, y) \quad = \quad w\left(|\boldsymbol{x}|^2, \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}\right), \quad w \text{ poljubna gladka funkcija.}$$

▲

4.2.2 Kvazilinearna enačba prvega reda

Kvazilinearna enačba je enačba, ki je linearna v najvišjih odvodih, ne pa nujno v nižjih odvodih. Kvazilinearna enačba prvega reda za funkcijo

$$x_{n+1} = u\left(x_1, x_2, ldots, x_n\right)$$

ima torej obliko

$$\sum_{k=1}^{n} f_k\left(x_1, \ldots, x_{n+1}\right) \frac{\partial u\left(x_1, \ldots, x_n\right)}{\partial x_k} \quad = \quad f_{n+1}\left(x_1, \ldots, x_{n+1}\right). \tag{4.21}$$

Denimo, da imamo rešitev enačbe (4.21) v implicitni obliki

$$v\left(x_1, \ldots, x_{n+1}\right) = 0, \quad \frac{\partial v\left(x_1, \ldots, x_{n+1}\right)}{\partial u} \neq 0. \tag{4.22}$$

Z odvajanjem dobimo

$$\frac{\partial v\left(x_1, \ldots, x_{n+1}\right)}{\partial x_k} + \frac{\partial v\left(x_1, \ldots, x_{n+1}\right)}{\partial x_{n+1}} \frac{\partial u\left(x_1, \ldots, x_n\right)}{\partial x_k} \quad = \quad 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Če sedaj enačbo (4.21) pomnožimo z $-\frac{\partial v(x_1, \ldots, x_{n+1})}{\partial x_{n+1}}$, dobimo

$$\sum_{k=1}^{n+1} f_k\left(x_1, \ldots, x_{n+1}\right) \frac{\partial v\left(x_1, \ldots, x_{n+1}\right)}{\partial x_k} = 0. \tag{4.23}$$

To je homogena linearna enačba za funkcijo $v : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

Obratno, če je v rešitev enačbe (4.23), *odvisna od* x_{n+1}, lahko iz enačbe

$$v\left(x_1, \ldots, x_{n+1}\right) = 0 \tag{4.24}$$

izračunamo

$$x_{n+1} = u\left(x_1, \ldots, x_n\right). \tag{4.25}$$

Hitro se lahko prepričamo, da funkcija u iz enačbe (4.25) reši enačbo (4.21).

V nadaljevanju bomo uporabljali oznake

$$\begin{aligned} p &= u_x, \\ q &= u_y, \end{aligned}$$

kjer je implicitno privzeto, da je $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Primer 4.17 Enačbi

$$x^2 p + y^2 q = (x+y)z$$

za funkcijo $z = u(x, y)$ pripada karakteristični sistem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x^2(t), \\ \dot{y}(t) &= y^2(t), \\ \dot{z}(t) &= [x(t) + y(t)]z(t). \end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}(t)}{x^2(t)} - \frac{\dot{y}(t)}{y^2(t)} &= 0, \\ \frac{1}{x(t)} - \frac{1}{y(t)} &= \text{const}, \\ \varphi_1(x, y, z) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - \dot{y}(t) &= x^2(t) - y^2(t) = \\ &= [x(t) - y(t)][x(t) + y(t)] = \\ &= [x(t) - y(t)]\frac{\dot{z}(t)}{z(t)}, \\ \frac{[x(t) - y(t)]^{\cdot}}{x(t) - y(t)} - \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} &= 0, \\ \frac{z(t)}{x(t) - y(t)} &= \text{const}, \\ \varphi_2(x, y, z) &= \frac{z}{x - y}. \end{aligned}$$

Rešitev v implicitni obliki je

$$v\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y},\frac{z}{x-y}\right) \quad = \quad 0,$$

ali

$$z = u(x,y) \quad = \quad (x-y)w\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right),$$

kjer je w poljubna gladka funkcija.

▲

Primer 4.18 Enačbi

$$z(xp-yq) \quad = \quad y^2-x^2$$

za funkcijo $z=u(x,y)$ pripada karakteristični sistem

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= z(t)x(t), \\
\dot{y}(t) &= -z(t)y(t), \\
\dot{z}(t) &= y^2(t)-x^2(t).
\end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{x}(t)}{x(t)}+\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} &= 0, \\
x(t)y(t) &= \text{const}, \\
\varphi_1(x,y,z) &= xy
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t)+\dot{y}(t) &= z(t)[x(t)-y(t)], \\
[x(t)+y(t)]\left[\dot{x}(t)+\dot{y}(t)\right] &= z(t)\left[x^2(t)-y^2(t)\right], \\
[x(t)+y(t)]\left[\dot{x}(t)+\dot{y}(t)\right] &= -z(t)\dot{z}(t), \\
[x(t)+y(t)]^2+z^2(t) &= \text{const}, \\
\varphi_2(x,y,z) &= (x+y)^2+z^2.
\end{aligned}$$

Rešitev v implicitni obliki je

$$v\left[xy,(x+y)^2+z^2\right] \quad = \quad 0,$$

ali

$$z=u(x,y)=\sqrt{w(xy)-(x+y)^2},$$

kjer w poljubna gladka funkcija.

▲

Primer 4.19 (Ortogonalne ploskve.) Imejmo enoparametrično družino ploskev

$$f(x, y, z) = \text{const.} \tag{4.26}$$

Poiščimo ploskve, ki pravokotno sekajo ploskve družine (4.26).

Naj bo enačba iskanih ploskev $z = u(x, y)$. Normali na obe družini morati biti pravokotni druga na drugo:

$$p\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + q\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}. \tag{4.27}$$

To je kvazilinerna enačba prvega reda.

Za vzorec družine (4.26) vzemimo družino

$$\frac{z(x+y)}{3z+1} = \text{const.}$$

Enačba (4.27) se glasi

$$\frac{z}{3z+1}p + \frac{z}{3z+1}q = (x+y)\frac{3z+1-3z}{(3z+1)^2},$$

ali

$$zp + zq = \frac{x+y}{3z+1}.$$

Karakteristični sistem je

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= z(t), \\
\dot{y}(t) &= z(t), \\
\dot{z}(t) &= \frac{x(t)+y(t)}{3z(t)+1}.
\end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) - \dot{y}(t) &= 0, \\
x(t) - y(t) &= \text{const}, \\
\varphi_1(x, y, z) &= x - y
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) &= z(t)\left[x(t) + y(t)\right], \\
x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) &= z(t)\left[3z(t) + 1\right]\dot{z}(t), \\
x^2(t) + y^2(t) - 2z^3(t) - z^2(t) &= \text{const}, \\
\varphi_2(x, y, z) &= x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2.
\end{aligned}$$

Splošna rešitev v implicitni obliki je

$$x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2 = w(x - y),$$

kjer je w poljubna gladka funkcija.

▲

4.3 Cauchyjeva naloga

Cauchyjeva naloga sprašuje po tisti rešitvi parcialne diferencialne enačbe, ki gre skozi dano krivuljo. Podrobneje si oglejmo tridimenzionalni primer. Iščemo tako rešitev $z = u(x, y)$ kvazilinearne enačbe prvega reda, ki poteka skozi krivuljo

$$F(x, y, z) = 0, \tag{4.28}$$
$$G(x, y, z) = 0. \tag{4.29}$$

Vemo, da dobimo splošno rešitev iz enačbe

$$w(\varphi, \psi) = 0, \tag{4.30}$$

kjer je w poljubna gladka funkcija, φ in ψ pa dva neodvisna integrala karakterističnega sistema

$$\varphi = \varphi(x, y, z), \tag{4.31}$$
$$\psi = \psi(x, y, z). \tag{4.32}$$

Sklepamo takole. Količine x, y, z, φ in ψ so povsod povezane z enačbama (4.31) in (4.32), na začetni krivulji pa še z enačbama (4.28) in (4.29). Iz teh štirih enačb eliminiramo x, y in z pa nam ostane zveza med φ in ψ. To je iskana funkcija w.

Primer 4.20 Poiščimo enačbo ploskve, ki seka ploskve z enačbo

$$\frac{z(x+y)}{3z+1} = \text{const}$$

pravokotno, in gre skozi krožnico

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ z &= 1. \end{aligned}$$

Neodvisna integrala smo našli v primeru 4.19 na strani 152.

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= x - y, \\ \psi(x, y, z) &= x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2. \end{aligned}$$

Eliminacija nam dá

$$\psi = -2,$$

torej je rešitev v implicitni obliki

$$x^2 + y^2 - 2z^3 - z^2 + 2 = 0.$$

▲

Primer 4.21 (Model telefonske centrale.) Napravimo naslednje predpostavke o modelu telefonske centrale.

(i) V času $(t, t+\delta t)$ se pojavi nov pogovor z verjetnostjo $\lambda\delta t + o(\delta t)$.

(ii) Pogovor na zasedeni liniji se v času $(t, t+\delta t)$ konča z verjetnostjo $n\mu\delta t + o(\delta t)$, če je zasedenih n linij.

(iii) Verjetnost za dva taka dogodka v času $(t, t+\delta t)$ je $o(\delta t)$.

Naj bo $P_n(t)$ verjetnost, da je ob času t zasedenih n linij. Pri $n \geq 1$ velja

$$P_n(t+\delta t) = \lambda\delta t P_{n-1}(t) + \mu(n+1)\delta t P_{n+1}(t) + (1 - \lambda\delta t - \mu n\delta t)P_n(t) + o(\delta t),$$

ali

$$\frac{P_n(t+\delta t) - P_n(t)}{\delta t} = \lambda P_{n-1}(t) + \mu(n+1)P_{n+1}(t) - (\lambda + \mu n)P_n(t) + \frac{o(\delta t)}{\delta t}.$$

Pri $n = 0$ na isti način dobimo

$$\frac{P_0(t+\delta t) - P_0(t)}{\delta t} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) + \frac{o(\delta t)}{\delta t}.$$

V limiti $\delta t \longrightarrow 0$ sledi

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(t)}{dt} &= \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + \mu n)P_n(t) + \mu(n+1)P_{n+1}(t), \quad n \geq 0, \qquad (4.33) \\ P_{-1}(t) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Sistem diferencialnih enačb (4.33) bomo rešili z uporabo *rodovne funkcije*. Naj bo

$$u(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n.$$

Enačbe (4.33) pomnožimo z z^n in jih seštejemo. Dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)z^n &= \lambda\sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(t)z^n - \lambda\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)z^n - \\ &- \mu\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(t)z^n + \mu\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(t)z^n, \\ \frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)z^n &= \lambda z\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)z^n - \lambda\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)z^n - \\ &- \mu z\frac{\partial}{\partial z}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)z^n + \mu\frac{\partial}{\partial z}\sum_{n=1}^{\infty} P_n(t)z^n, \\ \frac{\partial u(t,z)}{\partial t} &= \lambda z u(t,z) - \lambda u(t,z) - \mu z\frac{\partial u(t,z)}{\partial z} + \mu\frac{\partial u(t,z)}{\partial z}, \end{aligned}$$

ali

$$\frac{\partial u(t,z)}{\partial t} + \mu(z-1)\frac{\partial u(t,z)}{\partial z} = \lambda(z-1)u(t,z).$$

Ker se naši neodvisni spremenljivki imenujeta t in z, bomo parameter karakterističnega sistema imenovali τ. Karakteristični sistem se potem glasi

$$\begin{aligned}
\frac{dt(\tau)}{d\tau} &= 1, & (4.34)\\
\frac{dz(\tau)}{d\tau} &= \mu\left[z(\tau)-1\right], & (4.35)\\
\frac{du(\tau)}{d\tau} &= \lambda\left[z(\tau)-1\right]u(\tau). & (4.36)
\end{aligned}$$

Z deljenjem enačb (4.35) in (4.34) dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{z-1} &= \mu dt,\\
\log(z-1) &= \log C_1 + \mu t,\\
z-1 &= C_1 e^{\mu t},\\
(z-1)e^{-\mu t} &= C_1,\\
\varphi(t,z,u) &= (z-1)e^{-\mu t},
\end{aligned}$$

z deljenjem enačb (4.36) in (4.34) pa

$$\begin{aligned}
\frac{du}{u} &= \lambda(z-1)\,dt =\\
&= \lambda C_1 e^{\mu t}\,dt,\\
\log u &= \frac{\lambda}{\mu}C_1 e^{\mu t} + \log C_2 =\\
&= \frac{\lambda}{\mu}(z-1) + \log C_2,\\
u &= C_2 \exp\left[\frac{\lambda}{\mu}(z-1)\right],\\
\psi(t,z,u) &= u\exp\left[-\frac{\lambda}{\mu}(z-1)\right]
\end{aligned}$$

in od tod

$$u(t,z) = \exp\left[\frac{\lambda}{\mu}(z-1)\right] w\left[(z-1)e^{-\mu t}\right],$$

kjer je w poljubna gladka funkcija.

Denimo, da imamo ob času $t=0$ zasedenih m linij:

$$P_k(0) = \begin{cases} 1 & k=m \\ 0 & k\neq m \end{cases}.$$

Zato velja

$$u(0,z) = z^m.$$

Iz enačb

$$\begin{aligned}
\varphi &= (z-1)e^{-\mu t}, \\
\psi &= u \exp\left[-\frac{\lambda}{\mu}(z-1)\right], \\
t &= 0, \\
u &= z^m
\end{aligned}$$

moramo eliminirati t, z in u Najprej upoštevamo zadnji dve enačbi in dobimo

$$\begin{aligned}
\varphi &= z-1, \\
\psi &= z^m \exp\left(-\frac{\lambda\varphi}{\mu}\right) = \\
&= (1+\varphi)^m \exp\left(-\frac{\lambda\varphi}{\mu}\right)
\end{aligned}$$

ter

$$u \exp\left[-\frac{\lambda}{\mu}(z-1)\right] = \left[1+(z-1)e^{-\mu t}\right]^m \exp\left[-\frac{\lambda}{\mu}(z-1)e^{-\mu t}\right]$$

in končno

$$u(t,z) = \left[1+(z-1)e^{-\mu t}\right]^m \exp\left[\frac{\lambda}{\mu}(z-1)\left(1-e^{-\mu t}\right)\right].$$

Izračunajmo povprečno število pogovorov ob času t!

$$\begin{aligned}
E(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t) = \\
&= \left[\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t) z^{n-1}\right]_{z=1} = \\
&= \left[\frac{\partial u(t,z)}{\partial z}\right]_{z=1} = \\
&= me^{-\mu t} + \frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{-\mu t}\right).
\end{aligned}$$

▲

4.4 Cauchyjev pristop

Cauchy je reševal nalogo, ki nosi po njem ime, drugače. Njegova pot ima to prednost, da meče luč na rešljivost te naloge.

Izrek 4.5 *Vsaka rešitev kvazilinearne PDE (4.21) je sestavljena iz karakteristik.*

Dokaz. Denimo, da ima karakteristika, rešitev karakterističnega sistema,

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \\ u &= u(t), \end{aligned}$$

eno točko skupno z rešitvijo

$$u = v\,(x_1, \ldots, x_n)$$

in si oglejmo funkcijo g

$$g(t) = v\,[x_1(t), \ldots, x_n(t)] - u(t).$$

Ker je funkcija v rešitev enačbe (4.21), velja

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k} \dot{x}_k - \dot{u} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k} f_k - f_{n+1} = 0, \end{aligned}$$

torej je $g(t) = \text{const}$. Tam, kjer karakteristika prebode rešitev, je $g(t) = 0$, torej je $g(t) \equiv 0$ in karakteristika leži vsa na ploskvi. Izrek je dokazan, ker lahko skozi vsako točko rešitve potegnemo karakteristiko. ■

Vzemimo enačbo

$$Pp + Qq = R, \tag{4.37}$$

kjer so P, Q in R dane funkcije spremenljivk x, y in u. Rešitev naj poteka skozi krivuljo, podano z enačbami

$$\begin{aligned} x &= \xi(s), \\ y &= \eta(s), \\ u &= \zeta(s). \end{aligned} \tag{4.38}$$

Skozi vsako točko krivulje (4.38) potegnemo karakteristiko, to je, enačbe (4.38) vzamemo za začetne pogoje karakterističnega sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P, \\ \dot{y} &= Q, \\ \dot{u} &= R. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Dobimo

$$\begin{aligned} x &= x(t, s), \\ y &= y(t, s), \\ u &= u(t, s). \end{aligned} \tag{4.40}$$

To je parametrična izražava neke ploskve. Enačbo te ploskve dobimo v eksplicitni obliki, če lahko iz prvih dveh enačb (4.40) izrazimo

$$\begin{aligned} t &= t(x, y), \\ s &= s(x, y) \end{aligned} \tag{4.41}$$

in to vstavimo v tretjo enačbo (4.40).

Izražava (4.41) se zagotovo posreči, če je

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)} &= \dot{x}\frac{\partial y}{\partial s} - \dot{y}\frac{\partial x}{\partial s} = \\ &= P\frac{\partial y}{\partial s} - Q\frac{\partial x}{\partial s} \neq 0. \end{aligned}$$

Ta pogoj mora biti izpolnjen tudi na začetni krivulji (4.38)

$$\Delta := P\frac{d\eta}{ds} - Q\frac{d\xi}{ds} \neq 0. \tag{4.42}$$

Če je vzdolž začetne krivulje (4.38) pogoj (4.42) izpolnjen, je Cauchyjeva naloga enolično rešljiva.

Denimo, da je vzdolž začetne krivulje $\Delta = 0$. Tedaj je

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{ds} &= \lambda P, \\ \frac{d\eta}{ds} &= \lambda Q. \end{aligned}$$

Če je še

$$\frac{d\zeta}{ds} = \lambda R,$$

je začetna krivulja že kar karakteristika. V takem primeru si izberemo poljubno krivuljo, ki ni karakteristika, a seka dano krivuljo, in poiščemo rešitev, ki poteka skozi novo krivuljo. Ta rešitev poteka tudi skozi prvotno krivuljo, saj poteka skozi eno njeno točko, (presečišče), krivulja pa je karakteristika. Tako smo dokazali

Izrek 4.6 *Če je vzdolž začetne krivulje $\Delta \neq 0$, je Cauchyjeva naloga enolično rešljiva. Če je vzdolž začetne krivulje $\Delta = 0$, naloga nima rešitve, ali pa je rešitev brez števila. (Če je $\Delta = 0$ v posameznih točkah, so težave z zveznostjo).*

Mimogrede smo ugotovili, da se vzdolž karakteristike različne rešitve sekajo.

Izrek 4.7 *Krivulja, vzdolž katere se dve rešitvi kvazilinearne parcialne diferencialne enačbe sekata, je karakteristika.*

Dokaz. Tu je dokaz za tri dimenzije. Enačba $Pp + Qq = R$ pove, da je normala na rešitev,

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ -1 \end{bmatrix},$$

pravokotna na polje

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}.$$

Tam, kjer se dve rešitvi sekata, sta obe pravokotni na polje $\boldsymbol{F}$, zato je polje $\boldsymbol{F}$ usmerjeno vzdolž tangente na presečno krivuljo, ki zato zadošča enačbi

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}.$$

To pa je ravno karakteristični sistem in presečna krivulja je karakteristika. ■

Primer 4.22 Enačbi

$$pu + q = 1$$

pripada karakteristični sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{y} &= 1, \\ \dot{u} &= 1 \end{aligned}$$

z rešitvijo

$$\begin{aligned} y &= y_0 + t, \\ u &= u_0 + t, \\ x &= x_0 + u_0 t + \frac{1}{2} t^2, \end{aligned}$$

ali

$$\begin{aligned} x(t,s) &= \xi(s) + \zeta(s)t + \frac{1}{2}t^2, \\ y(t,s) &= \eta(s) + t, \\ u(t,s) &= \zeta(s) + t \end{aligned}$$

in je

$$\Delta(s) = \zeta(s)\frac{d\eta(s)}{ds} - \frac{d\xi(s)}{ds}.$$

Oglejmo si štiri primere.

(i)

$$\begin{aligned} \xi(s) &= s, \\ \eta(s) &= 1, \\ \zeta(s) &= 0. \end{aligned}$$

Sledi

$$\Delta(s) = -1$$

in

$$\begin{aligned} x &= s+\frac{1}{2}t^2, \\ y &= 1+t, \\ u &= t. \end{aligned}$$

Če eliminiramo s in t, dobimo

$$u = y-1.$$

(ii)

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \frac{1}{2}s^2, \\ \eta(s) &= s, \\ \zeta(s) &= s. \end{aligned}$$

Sledi

$$\Delta(s) = 0$$

in začetna krivulja je karakteristika:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}s^2+st+\frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}(s+t)^2, \\ y &= s+t, \\ u &= s+t. \end{aligned}$$

Sledi

$$u = y+w\left(x-\frac{1}{2}y^2\right),$$

kjer je w poljubna gladka funkcija, ki zadošča pogoju

$$w(0) = 0.$$

(iii)

$$\begin{aligned} \xi(s) &= 1, \\ \eta(s) &= s, \\ \zeta(s) &= 0. \end{aligned}$$

Sledi

$$\Delta(s) = 0$$

in začetna krivulja ni karakteristika:

$$\begin{aligned} x &= 1 + \frac{1}{2}t^2, \\ y &= s + t, \\ u &= t. \end{aligned}$$

Če eliminiramo s in t, dobimo

$$u = \pm\sqrt{2(x-1)}.$$

To ni dobra rešitev, ker $\frac{\partial u}{\partial x}$ v oklici začetne krivulje ni omejen.

(iv)

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \frac{1}{2}s^2, \\ \eta(s) &= 2s, \\ \zeta(s) &= s. \end{aligned}$$

Sledi

$$\Delta(s) = s.$$

V točki $s = 0$ je $\Delta = 0$, zato pričakujemo težave z zveznostjo. Sledi

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}s^2 + st + \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}(s+t)^2, \\ y &= 2s + t, \\ u &= s + t. \end{aligned}$$

Če eliminiramo s in t, dobimo

$$u = \pm\sqrt{2x}.$$

To ni dobra rešitev, ker so odvodi v okolici ravnine $x = 0$ spet neomejeni.

▲

4.5 Splošna PDE prvega reda

Naj bo $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ primerna gladka funkcija. Obravnavamo enačbo

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{4.43}$$

ki naj ima rešitev $z = u(x, y)$, kjer je

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ q &= \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

Za lažje pisanje se dogovorimo za oznake, kjer velika črka pomeni odvod funkcije F po ustrezni mali črki

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial F}{\partial x}, \\ \cdots && \cdots \\ Q &= \frac{\partial F}{\partial q}. \end{aligned}$$

Če naj bo (4.43) res PDE, mora biti $P^2 + Q^2 \neq 0$.

Izberimo si neko točko

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Enačbo (4.43) parametrično (s parametrom λ) razrešimo na p in q in dobimo

$$\begin{aligned} p &= p(\lambda), \\ q &= q(\lambda) \end{aligned} \tag{4.44}$$

in s tem enoparametrično družino normal

$$\boldsymbol{n}(\lambda) = \begin{bmatrix} p(\lambda) \\ q(\lambda) \\ -1 \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

in enoparametrično družino tangentnih ravnin

$$(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\lambda) = 0, \tag{4.46}$$

kjer so

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

tekoče koordinate v tangentni ravnini.

V vsaki točki $\boldsymbol{x}$ imamo tako šop tangentnih ravnin. Njihova *ogrinjača* se imenuje *Mongeov*[2] *stožec*. Poiščimo enačbo Mongeovega stožca!

Mongeov stožec je ogrinjača ravnin (4.46).

Enačbo ogrinjače dobimo, če iz enačbe (4.46) in iz enačbe

$$(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}'(\lambda) = 0 \tag{4.47}$$

eliminiramo parameter λ.

Ogrinjačo družine ravnin bomo raje poiskali v parametrični obliki. Namesto enačbe (4.46) bomo izraze (4.44) vstavili v (4.43) in dobili, da je

$$F[x, y, z, p(\lambda), q(\lambda)] = 0 \tag{4.48}$$

[2] Gaspard Monge (1746-1818) je bil francoski matematik.

in to identično po λ, vse pri konstantnih x, y in z. Ker velja (4.48) za vse λ, odvajamo (4.48) po λ

$$Pp'(\lambda) + Qq'(\lambda) = 0. \tag{4.49}$$

Enačba (4.47) se glasi

$$(\xi - x)p'(\lambda) + (\eta - y)q'(\lambda) = 0. \tag{4.50}$$

Kadar je Mongeov stožec res stožec in ne *Mongeova os* (kvazilinearna enačba), $p'(\lambda)$ in $q'(\lambda)$ nista oba nič, ima sistem (4.49,4.50) rešitev le, če je

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ \xi - x & \eta - y \end{vmatrix} = 0,$$

ali

$$\begin{aligned} \xi - x &= \mu P, \\ \eta - y &= \mu Q. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Iz enačbe (4.46) ali

$$(\xi - x)p(\lambda) + (\eta - y)q(\lambda) - (\zeta - z) = 0$$

pa sledi še

$$\zeta - z = \mu[Pp(\lambda) + Qq(\lambda)]. \tag{4.52}$$

Tako smo dobili parametrično izražavo (parametra sta λ in μ) Mongeovega stožca

$$\begin{aligned} \xi - x &= \mu P(\lambda), \\ \eta - y &= \mu Q(\lambda), \\ \zeta - z &= \mu\left[P(\lambda)p(\lambda) + Q(\lambda)q(\lambda)\right]. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Pri konstantnem λ je to enačba *tvorilke stožca*.

Enačba (4.43) nam v vsaki točki določa Mongeov stožec (4.53). Imamo torej *polje Mongeovih stožcev*. Mongeov stožec je ogrinjača možnih tangentnih ravnin, zato se mora rešitev v vsaki točki dotikati ustreznega Mongeovega stožca.

Če se rešitev

$$z = u(x, y) \tag{4.54}$$

dotika Mongeovega stožca v točki

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

se ga dotika vzdolž tvorilke, zato imamo na vsaki rešitvi neko polje smeri, ki nam določa družino krivulj. Tangente na te krivulje imajo isto smer kot tvorilke, zato

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P, \\ \dot{y} &= Q, \\ \dot{z} &= Pp + Qq. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Vzdolž krivulj (4.55) je

$$\begin{aligned} p &= p[x,y], \\ q &= q[x,y] \end{aligned}$$

in zato

$$\begin{aligned} \dot{p} &= p_x\dot{x} + p_y\dot{y} = Pp_x + Qp_y, \\ \dot{q} &= q_x\dot{x} + q_y\dot{y} = Pq_x + Qq_y. \end{aligned} \tag{4.56}$$

V enačbah (4.55) sta p in q definirana z rešitvijo (4.54). Rešitev (4.54) mora zadoščati enačbi (4.43), zato je

$$F[x,y,u(x,y),p(x,y),q(x,y)] = 0$$

identično za vse x in y in zato velja tudi

$$\begin{aligned} X + Zp + Pp_x + Qq_x &= 0, \\ Y + Zq + Pp_y + Qq_y &= 0. \end{aligned}$$

Funkcija u naj bo dvakrat zvezno odvedljiva. Potem je

$$p_y = u_{xy} = u_{yx} = q_x$$

in velja tudi

$$\begin{aligned} X + Zp + Pp_x + Qp_y &= 0, \\ Y + Zq + Pq_x + Qq_y &= 0. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Iz enačb (4.56) in (4.57) sledi sedaj

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -(X + Zp), \\ \dot{q} &= -(Y + Zq). \end{aligned} \tag{4.58}$$

Tako dobimo sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P, \\ \dot{y} &= Q, \\ \dot{z} &= Pp + Qq, \\ \dot{p} &= -(X + Zp), \\ \dot{q} &= -(Y + Zq), \end{aligned} \tag{4.59}$$

ki ga imenujemo *karakteristični sistem* enačbe (4.43). Pri izbranih začetnih pogojih nam karakteristični sistem ne določa samo krivulje

$$t \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

ampak v vsaki točki te krivulje še neko ravnino z normalo

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Pravimo, da nam sistem (4.59) določa *karakteristični pas*.

Izrek 4.8 *Izhodna funkcija F je integral karakterističnega sistema (4.59).*

Dokaz. Vzdolž karakterističnega pasu je

$$\begin{aligned} \dot{F} &= X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z} + P\dot{p} + Q\dot{q} = \\ &= XP + YQ + Z(Pp + Qq) - P(X + Zp) - Q(Y + Zq) = 0. \end{aligned}$$

■

Od tod sledi osnovna lastnost karakterističnega pasu: če se začetni pas dotika Mongeovega stožca, to je, če je

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0,$$

tedaj se ves karakteristični pas dotika Mongeovega polja.

Poiščimo tisto rešitev enačbe (4.43), ki gre skozi krivuljo

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0(s). \tag{4.60}$$

Takole napravimo. Skozi vsako točko krivulje (4.60) potegnemo karakteristični pas. Tri pogoje za to že imamo:

$$\begin{aligned} x\,(t_0) &= x_0(s), \\ y\,(t_0) &= y_0(s), \\ z\,(t_0) &= z_0(s). \end{aligned}$$

Določiti moramo še $p\,(t_0) = p_0(s)$ in $q\,(t_0) = q_0(s)$. Dva pogoja potrebujemo za to

(i) Začetni pas naj se dotika ustreznega Mongeovega stožca, torej

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0. \tag{4.61}$$

(ii) Normala na rešitev mora biti pravokotna na začetno krivuljo, zato mora biti tudi začetna ravnina tangentna na začetno krivuljo

$$z_0' = p_0 x_0' + q_0 y_0'. \tag{4.62}$$

Iz enačb (4.61) in (4.62) izračunamo p_0 in q_0, rešimo karakteristični sistem (4.59) in dobimo

$$\begin{aligned} x &= x(s,t), \\ y &= y(s,t), \\ z &= z(s,t), \\ p &= p(s,t), \\ q &= q(s,t). \end{aligned} \tag{4.63}$$

Iz prvih dveh enačb (4.63) izračunamo s in t in dobimo

$$z = u(x,y).$$

Oglejmo si primer.

Primer 4.23 Enačbi

$$p^2 - q^2 - z = 0$$

pripada karakteristični sistem

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= 2p, \\
\dot{y} &= -2p, \\
\dot{z} &= 2p^2 - 2q^2 = 2z, \\
\dot{p} &= p, \\
\dot{q} &= q.
\end{aligned}$$

Poiščimo rešitev, ki poteka skozi premico

$$\begin{aligned}
x &= z, \\
y &= z,
\end{aligned}$$

to je,

$$\begin{aligned}
x_0 &= s, \\
y_0 &= s, \\
z_0 &= s,
\end{aligned}$$

veljati pa mora še (4.61) in (4.62)

$$\begin{aligned}
p_0^2 - q_0^2 &= z_0 = s, \\
1 &= p_0 + q_0.
\end{aligned}$$

Sledi

$$p_0 - q_0 = s$$

in od tod

$$\begin{aligned}
p_0 &= \frac{1+s}{2}, \\
q_0 &= \frac{1-s}{2}.
\end{aligned}$$

Rešimo karakteristični sistem

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1+s}{2} e^t, \\
q &= \frac{1-s}{2} e^t, \\
z &= s e^{2t}, \\
\\
\dot{x} &= (s+1)e^t \quad \therefore \\
x &= (s+1)e^t - 1, \\
\\
\dot{y} &= (s-1)e^t \quad \therefore \\
y &= (s-1)e^t + 1.
\end{aligned}$$

Eliminiramo s in t

$$\left.\begin{array}{rcl}(s+1)e^t &=& x+1\\ (s-1)e^t &=& y-1\end{array}\right\} \implies \begin{array}{rcl} se^t &=& (x+y)/2,\\ e^t &=& (x-y+2)/2,\end{array}$$

$$z \;=\; u(x,y) := se^t \cdot e^t = \frac{1}{4}(x+y)(x-y+2),$$

ali

$$u(x,y) = \frac{(1+x)^2}{4} - \frac{(1-y)^2}{4}. \tag{4.64}$$

Očitno poteka (4.64) skozi premico $x = y = z$, res pa tudi reši enačbo

$$p^2 - q^2 \;=\; z.$$

▲

Izrek 4.9 *Opisani postopek nam vedno dá rešitev Cauchyjeve naloge, če je*

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \;\neq\; 0.$$

Dokaz. Preveriti je treba, da je

$$F[x,y,u(x,y),p(x,y),q(x,y)] \;=\; 0,$$

kar že vemo, in da je

$$du(x,y) = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy, \tag{4.65}$$

to je, da sta funkciji p in q res parcialna odvoda rešitve u na x in y. Če enačbo (4.65) izrazimo z s in t, dobimo

$$u_s\,ds + u_t\,dt \;=\; p(x_s\,ds + x_t\,dt) + q(y_s\,ds + y_t\,dt).$$

Parametra s in t sta neodvisna, zato sledi

$$u_s \;=\; p(x,y)x_s + q(x,y)y_s, \tag{4.66}$$
$$u_t \;=\; p(x,y)x_t + q(x,y)y_t. \tag{4.67}$$

Enačba (4.67) je posledica karakterističnega sistema

$$\dot z \;=\; Pp + Qq = p\dot x + q\dot y.$$

Dokazati moramo še (4.66) V ta namen označimo

$$w := u_s - px_s - qy_s$$

in sledi

$$w_t = u_{st} - px_{st} - qy_{st} - p_t x_s - q_t y_s. \tag{4.68}$$

Iz enačbe (4.67), za katero že vemo, da velja, pa sledi

$$0 = u_{ts} - px_{ts} - qy_{ts} - p_s x_t - q_s y_t. \tag{4.69}$$

Enačbi (4.68) in (4.69) odštejemo in dobimo

$$\begin{aligned} w_t &= -p_t x_s - q_t y_s + p_s x_t + q_s y_t = \\ &= (X + Zp)x_s + (Y + Zq)y_s + Pp_s + Qq_s = \\ &= (Xx_s + Yy_s + Pp_s + Qq_s + Zu_s) - Z\left(u_s - px_s - qy_s\right) = \\ &= F_s - Zw = \\ &= -Zw, \end{aligned}$$

saj velja $F = 0$ na vsej ploskvi. Preostane nam

$$\dot{w} + Zw = 0,$$

ali

$$w(t) = w_0 e^{-\int Z\,dt}.$$

Ker je

$$w_0 = 0,$$

sledi

$$w(t) = 0.$$

■

Kaj se zgodi, če je

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = 0,$$

to je,

$$\dot{x}y_s = \dot{y}x_s,$$

ali

$$Py_s = Qx_s,$$

ali

$$\begin{aligned} x_s &= \lambda P, \\ y_s &= \lambda Q. \end{aligned}$$

Če je naloga rešljiva, velja

$$u_s = px_s + qy_s = \lambda(Pp + Qq), \tag{4.70}$$

od tod pa sledi še

$$\begin{aligned} p_s &= -\lambda(X + pZ), \\ q_s &= -\lambda(Y + qZ) \end{aligned}$$

in je začetna krivulja kar karakteristika. Rešitev ni enolična. Če pa (4.70) ne velja, naloga nima rešitve.

4.6 Popolni, splošni in singularni integrali

Rešitev $z = u(x, y)$ enačbe

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{4.71}$$

ki vsebuje poljubno gladko funkcijo (ene spremenljivke), se imenuje *splošni integral*. Rešitev, ki vsebuje dve *bistveni konstanti*, se imenuje *popolni integral*. Pri tem se konstanti a in b v integralu $\Phi(x, y, a, b)$ imenujeta bistveni, če ima matrika

$$M = \begin{bmatrix} \Phi_a & \Phi_{xa} & \Phi_{ya} \\ \Phi_b & \Phi_{xb} & \Phi_{yb} \end{bmatrix}$$

rang 2.

Ta pogoj jamči, da sta konstanti res dve. Če bi namreč lahko pisali

$$\Phi(x, y, a, b) = \Psi(x, y, c),$$

kjer je

$$c = g(a, b),$$

bi veljalo

$$M = \begin{bmatrix} \Psi_c g_a & \Psi_{xc} g_a & \Psi_{yc} g_a \\ \Psi_c g_b & \Psi_{xc} g_b & \Psi_{yc} g_b \end{bmatrix},$$

ta matrika pa ima rang manjši od 2.

Po drugi strani, če je Φ popolni integral in si ogledamo enačbe

$$\begin{aligned} z &= \Phi(x, y, a, b), \\ p &= \Phi_x(x, y, a, b), \\ q &= \Phi_y(x, y, a, b), \end{aligned} \tag{4.72}$$

je vsaj ena od determinant

$$\frac{\partial(p, q)}{\partial(a, b)}, \quad \frac{\partial(z, p)}{\partial(a, b)}, \quad \frac{\partial(z, q)}{\partial(a, b)}$$

od nič različna in lahko iz enačb (4.72) eliminiramo a in b ter dobimo enačbo oblike (4.71), ki ima funkcijo Φ za rešitev.

Primer 4.24 Vzemimo popolni integral

$$z = ax + a^2 y + b.$$

Sledi

$$\begin{aligned} p &= a, \\ q &= a^2 \end{aligned}$$

in dobimo enačbo, katere integral je prvotna funkcija z:

$$q = p^2.$$

▲

Popolni integral je na videz manj splošna rešitev kot splošni integral. Pa temu ni tako. Če imamo enoparametrično družino rešitev, je njena ovojnica, če obstaja, spet rešitev. Iz dvoparametrične družine rešitev pa lahko napravimo mnogo enoparametričnih družin: izberemo si poljubno gladko funkcijo w in postavimo

$$b = w(a)$$

ter zgradimo ogrinjačo. Le-ta je (netrivialno) odvisna od funkcije w.

Primer 4.25 V popolni integral

$$z = ax + a^2 y + b$$

enačbe

$$q = p^2$$

postavimo

$$b = a$$

in poiščemo ogrinjačo družine.

$$\begin{aligned} z &= ax + a^2 y + a, \\ 0 &= x + 2ay + 1, \\ a &= -\frac{1+x}{2y} \end{aligned}$$

in dobimo *partikularno rešitev*

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1+x}{2y}\left(x - \frac{1+x}{2} + 1\right), \\ z &= -\frac{(x+1)^2}{4y}. \end{aligned}$$

▲

Enačba pa utegne imeti še *singularni integral.* Tega dobimo, če sestavimo ogrinjačo dvoparametrične družine, ki jo predstavlja popolni integral: iz enačb

$$\begin{aligned} z &= \Phi(x, y, a, b), \\ 0 &= \Phi_a(x, y, a, b), \\ 0 &= \Phi_b(x, y, a, b), \end{aligned}$$

eliminiramo a in b. To je mogoče, ker je Φ popoln integral. Zanimivo je, da lahko singularni integral poiščemo direktno iz enačbe, ne da bi poznali popolni integral. Enačba

$$F(x, y, \Phi, \Phi_x, \Phi_y) = 0$$

velja identično v a in b, zato jo lahko odvajamo

$$\begin{aligned} Z\Phi_a + P\Phi_{xa} + Q\Phi_{ya} &= 0, \\ Z\Phi_b + P\Phi_{xb} + Q\Phi_{yb} &= 0. \end{aligned}$$

Na singularnem integralu je $\Phi_a = \Phi_b = 0$. Če je

$$\begin{vmatrix} \Phi_{xa} & \Phi_{ya} \\ \Phi_{xb} & \Phi_{yb} \end{vmatrix} = \frac{\partial(p,q)}{\partial(a,b)} \neq 0, \tag{4.73}$$

mora biti

$$P = Q = 0.$$

Iz treh enačb

$$F = P = Q = 0 \tag{4.74}$$

lahko sedaj eliminiramo p in q ter dobimo singularni integral. Ker ne moremo vedeti, če je pogoj (4.73) izpolnjen, moramo preveriti, če funkcija, dobljena z eliminacijo iz (4.74), res zadošča enačbi (4.71).

Popolni integral nam zadošča, da rešimo Cauchyjevo nalogo: poiskati rešitev, ki poteka skozi dano krivuljo. Tri možnosti so

(i) Rešitev je poseben primer popolnega integrala.

(ii) Rešitev je ogrinjača enoparametrične poddružine.

(iii) Rešitev je ogrinjača dvoparametrične družine – singularni integral.

Primera (i) in (iii) sta izjemi. Raziščimo primer (ii). Poiskati moramo ogrinjačo enoparametrične poddružine, ki poteka skozi krivuljo

$$\begin{aligned} x &= \xi(s), \\ y &= \eta(s), \\ z &= \zeta(s). \end{aligned} \tag{4.75}$$

Ogrinjača se v vsaki točki dotika ene od ploskev enoparametrične poddružine; specialno to velja za vsako točko krivulje (4.75). Toda, če gre ogrinjača skozi krivuljo (4.75), se krivulje (4.75) v vsaki točki dotika, glej dokaz izrek 4.8, torej se tudi člani enoparametrične poddružine (vsak v svoji točki) dotikajo krivulje (4.75). S tem je poddružina določena: v vsaki točki krivulje (4.75) se en član poddružine dotika krivulje (4.75). Napišimo ta pogoj! Enačba

$$\zeta(s) = \Phi[\xi(s), \eta(s), a, b] \tag{4.76}$$

mora imeta same dvojne korene, torej velja še

$$\frac{d\zeta(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\Phi[\xi(s), \eta(s), a, b]. \tag{4.77}$$

Iz enačb (4.76) in (4.77) eliminiramo s in dobimo zvezo med a in b, recimo

$$\psi(a,b) = 0.$$

Od tod lahko, na več načinov morda, izračunamo

$$b = \psi_k(a)$$

in dobimo nekaj enoparameteričnih poddružin. Ogrinjače so iskane rešitve.

Primer 4.26 Enačba $q = p^2$ ima popolni integral

$$z = ax + a^2 y + b.$$

Poiščimo rešitev, ki poteka skozi parabolo

$$y = x^2, \quad z = 0,$$

ali

$$\begin{aligned} \xi(s) &= s, \\ \eta(s) &= s^2, \\ \zeta(s) &= 0. \end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned} 0 &= as + a^2 s^2 + b, \\ 0 &= a + 2a^2 s, \end{aligned} \tag{4.78}$$

ali

$$as = -\frac{1}{2},$$

od koder sledi

$$b = \frac{1}{4}.$$

Enoparametrična poddružina je

$$z = ax + a^2 y + \frac{1}{4}.$$

Za ogrinjačo privzamemo še enačbo

$$0 = x + 2ay,$$

od koder sledi

$$a = -\frac{x}{2y}$$

in

$$z = -\frac{x^2}{2y} + \frac{x^2}{4y} + \frac{1}{4} = \frac{y - x^2}{4y}.$$

Ker je

$$p = -\frac{x}{2y},$$
$$q = \frac{x^2}{4y^2},$$

ta funkcija res reši enačbo

$$p^2 = q.$$

Enačba (4.78) ima še drugo rešitev, $a = 0$, ki pripelje do $b = 0$ in $z = 0$.

▲

4.7 Lagrange–Charpitjeva metoda

Za praktično reševanje je popolni integral preprostejši od Cauchyjeve metode. *Lagrange–Charpitjeva*[3] *metoda* nam daje splošno pot do popolnega integrala.

Hkrati z dano enačbo

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{4.79}$$

postavimo še eno enačbo

$$G(x, y, z, p, q) = 0, \tag{4.80}$$

ki ima tudi funkcijo u za rešitev. Funkcija G naj bo taka, da lahko iz enačb (4.79) in (4.80) izračunamo

$$\begin{aligned} p &= p(x, y, z), \\ q &= q(x, y, z), \end{aligned} \tag{4.81}$$

torej

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(p, q)} \neq 0. \tag{4.82}$$

Za funkciji (4.81) mora seveda veljati

$$dz = p\,dx + q\,dy, \tag{4.83}$$

če naj bosta p in q parcialna odvoda funkcije u, kar pri poljubni gladki funkciji G ne bo res. Pogoj splošnejše oblike kot je (4.83), namreč

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0 \tag{4.84}$$

na neki ploskvi v splošnem ne more biti izpolnjen. Velja

[3]Paul Charpit de Ville Coer (?–1784) je bil francoski matematik.

Izrek 4.10 *Potreben in zadosten pogoj, da ima enačba (4.84) dvorazsežno rešitev, je*

$$\boldsymbol{F}\cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{F}=0, \tag{4.85}$$

kjer je

$$\boldsymbol{F}=\left[\begin{array}{c} P \\ Q \\ R \end{array}\right]. \tag{4.86}$$

Izrek 4.10 bomo dokazali kasneje, glej razdelek 4.8. V našem primeru je

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \left[\begin{array}{c} p \\ q \\ -1 \end{array}\right], \\
\operatorname{rot}\boldsymbol{F} &= \left|\begin{array}{ccc} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p & q & -1 \end{array}\right| = \\
&= -q_z\boldsymbol{i}+p_z\boldsymbol{j}+(q_x-p_y)\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

in pogoj (4.85) se glasi

$$-pq_z+qp_z-(q_x-p_y) \quad = \quad 0,$$

ali

$$p_y+qp_z=q_x+pq_z. \tag{4.87}$$

Če sedaj odvajamo enačbi (4.79) in (4.80) na z, dobimo

$$\begin{aligned}
F_z+F_pp_z+F_qq_z &= 0, \\
G_z+G_pp_z+G_qq_z &= 0
\end{aligned}$$

in od tod

$$\begin{aligned}
p_z &= -\frac{\left|\begin{array}{cc} F_z & F_q \\ G_z & G_q \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{cc} F_p & F_q \\ G_p & G_q \end{array}\right|}, \\
q_z &= -\frac{\left|\begin{array}{cc} F_p & F_z \\ G_p & G_z \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{cc} F_p & F_q \\ G_p & G_q \end{array}\right|}.
\end{aligned}$$

Odvajanje na x nam dá

$$\begin{aligned}
F_x+F_pp_x+F_qq_x &= 0, \\
G_x+G_pp_x+G_qq_x &= 0
\end{aligned}$$

in od tod

$$q_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_p & F_x \\ G_p & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ G_p & G_q \end{vmatrix}}.$$

Odvajanje na y nam dá

$$\begin{aligned} F_y + F_p p_y + F_q q_y &= 0, \\ G_y + G_p p_y + G_q q_y &= 0 \end{aligned}$$

in od tod

$$p_y = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_q \\ G_y & G_q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ G_p & G_q \end{vmatrix}}.$$

Končno se pogoj (4.87) glasi

$$-\begin{vmatrix} F_y & F_q \\ G_y & G_q \end{vmatrix} - q\begin{vmatrix} F_z & F_q \\ G_z & G_q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_p & F_x \\ G_p & G_x \end{vmatrix} + p\begin{vmatrix} F_p & F_z \\ G_p & G_z \end{vmatrix} = 0,$$

ali

$$\begin{vmatrix} F_p & F_x + pF_z \\ G_p & G_x + pG_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_q & F_y + qF_z \\ G_q & G_y + qG_z \end{vmatrix} = 0.$$

Razvijmo determinante in uporabimo standardne oznake (velike črke so odvodi funkcije F po malih črkah)

$$PG_x + QG_y + (Pp + Qq)G_z - (X + Zp)G_p - (Y + Zq)G_q = 0.$$

To je homogena kvazilinearna enačba za funkcijo G s karakterističnim sistemom (4.59). En integral že poznamo, to je F. Če dobimo še enega, $G = a$, neodvisnega od F, lahko iz enačb

$$\begin{aligned} F(x, y, z, p, q) &= 0, \\ G(x, y, z, p, q) &= a \end{aligned}$$

izračunamo p in q

$$\begin{aligned} p &= p(x, y, z, a), \\ q &= q(x, y, z, a). \end{aligned}$$

Vemo, da bo enačba (4.83)

$$dz = pdx + qdy$$

integrabilna in če jo integriramo, dobimo še drugo konstanto.

Primer 4.27 Enačba

$$p^2 - 3xyz^2q = 0 \tag{4.88}$$

ima karakteristični sistem

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= 2p, \\
\dot{y} &= -3xyz^2, \\
\dot{z} &= 2p^2 - 3xyz^2q, \\
\dot{p} &= 3yz^2q + 6xyzpq, \\
\dot{q} &= 3xz^2q + 6xyzq^2.
\end{aligned}$$

Upoštevamo enačbo (4.88) in dobimo

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= 2p, \\
\dot{y} &= -\frac{p^2}{q}, \\
\dot{z} &= p^2, \\
\dot{p} &= \frac{p^2}{x} + 2\frac{p^3}{z}, \\
\dot{q} &= \frac{p^2}{y} + 2\frac{p^2q}{z}.
\end{aligned}$$

Potrebujemo le en integral, neodvisen od (4.88).

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{p}}{p} - \frac{\dot{q}}{q} &= \frac{p}{x} - \frac{p^2}{qy} = \\
&= \frac{\dot{x}}{2x} + \frac{\dot{y}}{y}, \\
\frac{p}{q} &= ay\sqrt{x}.
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Enačbi (4.88) in (4.89) razrešimo na p in q:

$$\begin{aligned}
\frac{p^2}{q} &= apy\sqrt{x} = \\
&= 3xyz^2, \\
p &= \frac{3xyz^2}{ay\sqrt{x}} = \\
&= \frac{3z^2\sqrt{x}}{a}, \\
q &= \frac{p}{ay\sqrt{x}} = \\
&= \frac{3z^2\sqrt{x}}{a^2y\sqrt{x}} = \\
&= \frac{3z^2}{a^2y}.
\end{aligned}$$

Enačba

$$dz = \frac{3z^2\sqrt{x}}{a}\,dx + \frac{3z^2}{a^2y}\,dy$$

je zagotovo integrabilna in sicer takole:

$$\begin{aligned} a^2\frac{dz}{z^2} &= 3a\sqrt{x}\,dx + \frac{3\,dy}{y}, \\ b - \frac{a^2}{z} &= 2ax\sqrt{x} + 3\log y. \end{aligned}$$

To je popolni integral.

▲

Zelo preprosto uženemo poenostavljene primere.

(i)

$$F(p,q) = 0.$$

Sledi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_p, \\ \dot{y} &= F_q, \\ \dot{z} &= pF_p + qF_q, \\ \dot{p} &= 0, \\ \dot{q} &= 0. \end{aligned}$$

En integral je

$$p = a,$$

ali pa

$$q = a,$$

še bolje pa je, če enačbo

$$F(p,q) = 0$$

razrešimo parametrično s parametrom a:

$$\begin{aligned} p = \varphi(a), \\ q = \psi(a). \end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned} dz &= \varphi(a)\,dx + \psi(a)\,dy, \\ z &= \varphi(a)x + \psi(a)y + b. \end{aligned}$$

Primer 4.28

$$\begin{aligned} p^2+q^2 &= 1, \\ p &= \cos a, \\ q &= \sin a, \\ dz &= \cos a\, dx + \sin a\, dy, \\ z &= x\cos a + y\sin a + b. \end{aligned}$$

▲

(ii)

$$f(x,p) = g(y,q).$$

Sledi karakteristični sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_p, \\ \dot{y} &= -g_q, \\ \dot{z} &= pf_p - qg_q, \\ \dot{p} &= -f_x, \\ \dot{q} &= g_y \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \dot{x}f_x + \dot{p}f_p &= 0, \\ \frac{d}{dt}f(x,p) &= 0, \\ f(x,p) &= a, \\ g(y,q) &= a. \end{aligned}$$

Zadnji dve enačbi razrešimo na p in q

$$\begin{aligned} p &= \varphi(x,a), \\ q &= \psi(y,a) \end{aligned}$$

in sledi

$$\begin{aligned} dz &= \varphi(x,a)\, dx + \psi(y,a)\, dy, \\ z &= \int \varphi(x,a)\, dx + \int \psi(y,a)\, dy + b. \end{aligned}$$

Primer 4.29

$$\begin{aligned} xq &= yp, \\ \frac{p}{x} &= \frac{q}{y} = 2a, \\ p &= 2ax, \\ q &= 2ay, \\ dz &= 2ax\, dx + 2ay\, dy, \\ z &= a\left(x^2+y^2\right) + b. \end{aligned}$$

▲

(iii)

$$F(z,p,q) = 0.$$

Sledi karakteristični sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F_p,\\ \dot{y} &= F_q,\\ \dot{z} &= pF_p + qF_q,\\ \dot{p} &= -pF_z,\\ \dot{q} &= -qF_z\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\frac{\dot{p}}{p} &= \frac{\dot{q}}{q},\\ p &= aq.\end{aligned}$$

Iz enačbe

$$F(z,aq,q) = 0$$

izračunamo

$$q = \varphi(z)$$

in sledi

$$dz = a\varphi(z)\,dx + \varphi(z)\,dy,$$

ali

$$\frac{dz}{\varphi(z)} = d(ax+y),$$

ali

$$ax + y = \psi(z).$$

To enačbo obrnemo

$$z = w(ax+y)$$

in tukaj začnemo.

$$\begin{aligned}z &= w(ax+y),\\ p &= aw',\\ q &= w'.\end{aligned}$$

Dobimo navadno diferencialno enačbo prvega reda za funkcijo w

$$F(w, aw', w') = 0.$$

Primer 4.30

$$\begin{aligned}
z^2(p^2+q^2+1) &= 1,\\
z &= w(ax+y),\\
w^2\left[\left(a^2+1\right)w'^2+1\right] &= 1,\\
w' &= \sqrt{\frac{1-w^2}{w^2\left(1+a^2\right)}},\\
\frac{w\,dw}{\sqrt{1-w^2}} &= \frac{d(ax+y)}{\sqrt{1+a^2}},\\
-\sqrt{1-w^2} &= \frac{ax+y+b}{\sqrt{1+a^2}},\\
1-w^2 &= \frac{(ax+y+b)^2}{1+a^2}.
\end{aligned}$$

Če pišemo

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} &= \cos\alpha,\\
\frac{b}{\sqrt{1+a^2}} &= \beta,
\end{aligned}$$

dobimo

$$(x\cos\alpha+y\sin\alpha+\beta)^2+z^2=1.$$

▲

(iv) (Clairaut)

$$z = px+qy+f(p,q),$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= x+f_p,\\
\dot{y} &= y+f_q,\\
\dot{z} &= px+qy+pf_p+qf_q,\\
\dot{p} &= 0,\\
\dot{q} &= 0.
\end{aligned}$$

Dobimo kar dva integrala

$$\begin{aligned}
p &= a,\\
q &= b
\end{aligned}$$

in

$$z = ax+by+f(a,b).$$

To je res popolni integral Clairautove enačbe.

4.8 Pfaffova enačba

Imejmo vektorsko polje $\boldsymbol{F}$ in vprašajmo po mnogoterosti, pravokotni na to polje. Če je $d\boldsymbol{x}$ diferencial na tej mnogoterosti, zahtevamo torej

$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x} = 0. \tag{4.90}$$

Izraz $\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x}$ imenujemo *Pfaffova*[4] *forma (Pfaffian)*, enačbo (4.90) pa *Pfaffova enačba.*

Vzemimo najprej ravninsko polje

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} M(x,y) \\ N(x,y) \end{bmatrix}.$$

Enačba (4.90) se glasi

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0. \tag{4.91}$$

To je navadna diferencialna enačba, ki je praviloma rešljiva. Sklep: dvorazsežna Pfaffova enačba ima (skoraj) vedno enorazsežno rešitev.

Oglejmo si, kaj o tej rešitvi še lahko povemo. Rešitev, krivuljo, pravokotno na polje, napišemo v implicitni obliki

$$u(x,y) \quad = \quad C.$$

Na tej krivulji je

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy \quad = \quad 0. \tag{4.92}$$

Iz enačb (4.91) in (4.92) sledi, da obstaja taka funkcija μ, da velja

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \mu M, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \mu N. \end{aligned}$$

Funkcijo μ imenujemo *integrirajoči faktor*. Če je funkcija u dvakrat zvezno odvedljiva, sledi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y}(\mu M) &= \frac{\partial}{\partial x}(\mu N), \\ N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y} &= (M_y - N_x)\,\mu. \end{aligned}$$

To je kvazilinearna enačba za μ. Če najdemo rešitev, je

$$\mu(M\,dx + N\,dy) \quad = \quad du$$

[4] Johann Friedrich Pfaff (1765-1825) je bil nemški matematik.

popolni diferencial.

Poglejmo v tri dimenzije

$$P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = 0. \tag{4.93}$$

Iščemo mnogoterost, na kateri bo enačba izpolnjena.

Razsežnost 0 je točka, $d\boldsymbol{x} = 0$, enačba je trivialno izpolnjena.

Pri razsežnosti 3 je $d\boldsymbol{x}$ poljuben, enačba je rešljiva le v trivialnem primeru $\boldsymbol{F} = 0$.

Enorazsežnih rešitev, krivulj, je veliko. Res, izberimo poljubno gladko ploskev

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u,v). \tag{4.94}$$

Na tej ploskvi iščemo rešitev, to je krivuljo $u = u(t)$, $v = v(t)$, ki reši Pfaffovo enačbo (4.93). Na ploskvi (4.94) je

$$d\boldsymbol{x} \;=\; \boldsymbol{x}_u\,du + \boldsymbol{x}_v\,dv,$$

torej

$$(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{x}_u)\;du + (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{x}_v)\;dv \;=\; 0.$$

To je Pfaffova enačba v ravnini, ki ima (praktično) vedno enorazsežno rešitev.

Najbolj zanimive so dvorazsežne rešitve, ploskve. Iščemo jih kot *nivojnice*

$$u(\boldsymbol{x}) = \mathrm{const}. \tag{4.95}$$

Če velja

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F} = 0, \tag{4.96}$$

je naloga preprosta. Integral

$$u(\boldsymbol{x}) \;=\; \int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x}$$

je neodvisen od poti, torej je le funkcija zgornje (in spodnje) meje, zato velja

$$\mathrm{grad}\,u \;=\; \boldsymbol{F}.$$

Enačba (4.90) pomeni

$$\mathrm{grad}\,u\cdot d\boldsymbol{x} = du(\boldsymbol{x}) = 0$$

in je

$$u(\boldsymbol{x}) = \mathrm{const}$$

rešitev Pfaffove enačbe (4.90).

Izrek 4.11 *Trorazsežna Pfaffova enačba ima dvorazsežno rešitev* $u(\boldsymbol{x}) = \mathrm{const}$ *natanko takrat, ko obstaja funkcija* μ*, taka, da je polje* $\mu\boldsymbol{F}$ *potencialno.*

Dokaz. Za splošni primer velja

(i) Na ploskvi $u(\boldsymbol{x}) = \text{const}$ je

$$\text{grad}\, u \cdot d\boldsymbol{x} = 0,$$

poleg tega pa še zahtevamo (4.90). Pri tem je $d\boldsymbol{x}$ poljuben vektor v tangentni ravnini, zato sta vektorja $\boldsymbol{F}$ in $\text{grad}\, u$ kolinearna

$$\text{grad}\, u = \mu \boldsymbol{F}. \tag{4.97}$$

(ii) Obratno, če je pogoj (4.97) izpolnjen, pomnožimo enačbo (4.90) z μ

$$\mu \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x} = \text{grad}\, u \cdot d\boldsymbol{x} = du(\boldsymbol{x}) = 0$$

in je

$$u(\boldsymbol{x}) = \text{const}$$

spet rešitev.

■

Iz izreka 4.11 dobimo takoj potrebni pogoj za obstoj dvorazsežne rešitve. Če je enačba (4.90) rešljiva, je po izreku (4.11)

$$\text{rot}\,(\mu \boldsymbol{F}) \quad = \quad 0,$$

ali

$$\mu\, \text{rot}\, \boldsymbol{F} + \text{grad}\, \mu \times \boldsymbol{F} \quad = \quad 0.$$

To enačbo pomnožimo skalarno z $\boldsymbol{F}$ in upoštevamo, da je

$$\boldsymbol{F} \cdot (\,\text{grad}\, \mu \times \boldsymbol{F}) = \text{grad}\, \mu \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{F}) = 0$$

in dobimo

$$\mu \boldsymbol{F} \cdot \text{rot}\, \boldsymbol{F} \quad = \quad 0,$$

ali

$$\boldsymbol{F} \cdot \text{rot}\, \boldsymbol{F} = 0. \tag{4.98}$$

Izrek 4.12 *Pogoj (4.98) je tudi zadosten za obstoj dvorazsežne rešitve Pfaffove enačbe (4.90).*

Dokaz. Vzemimo ploskev

$$z = \text{const} \tag{4.99}$$

in na njej poiščimo enorazsežno rešitev. Na ploskvi (4.99) je $dz = 0$ in Pfaffova enačba se glasi

$$P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy \quad = \quad 0,$$

kjer je z parameter. Taka enačba je vedno rešljiva, recimo

$$U(x, y, z) \quad = \quad c(z).$$

Pokažimo, da funkcijo c lahko določimo tako, da bo

$$u(x, y, z) \quad = \quad U(x, y, z) - c(z)$$

rešitev trorazsežne enačbe (4.90). Če je enačba (4.90) rešljiva, mora biti

$$\operatorname{grad} u = \mu \boldsymbol{F}, \tag{4.100}$$

ali

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} \quad &= \quad \mu P, \\ \frac{\partial U}{\partial y} \quad &= \quad \mu Q, \\ \frac{\partial U}{\partial z} - c'(z) \quad &= \quad \mu R. \end{aligned}$$

Tak μ, da sta prvi dve enačbi izpolnjeni, zagotovo obstaja. Iz tretje enačbe potem izračunamo $c(z)$:

$$c'(z) \quad = \quad \frac{\partial U}{\partial z} - \mu R := K.$$

Če dokažemo, da je K odvisen le od z in c, $K = K(z, c)$, je

$$c'(z) \quad = \quad K(z, c)$$

navadna diferencialna enačba, ki jo lahko v načelu rešimo.

Sedaj računamo:

$$
\begin{aligned}
(\mu \boldsymbol{F}) \cdot \operatorname{rot}(\mu \boldsymbol{F}) &= \mu \boldsymbol{F} \cdot (\mu \operatorname{rot} \boldsymbol{F} + \operatorname{grad} \mu \times \boldsymbol{F}) = \\
&= \mu^2 \boldsymbol{F} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \\
&= 0, \\
\mu \boldsymbol{F} &= \operatorname{grad} u = \operatorname{grad} U - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c' \end{bmatrix} = \\
&= \operatorname{grad} U - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}, \\
\operatorname{rot} \mu \boldsymbol{F} &= -\operatorname{rot} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\partial K}{\partial y} \\ \frac{\partial K}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix}, \\
(\mu \boldsymbol{F}) \cdot \operatorname{rot}(\mu \boldsymbol{F}) &= -\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial K}{\partial x} = \\
&= \frac{\partial(U,K)}{\partial(x,y)} = \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Poslednja enačba pove, da sta funkciji K in U odvisni:

$$
K = K(z, U) = K(z, c).
$$

■

Primer 4.31

$$
2yz\,dx + 2zx\,dy + 3xy\,dz = 0.
$$

Vzemimo $dz = 0$. Sledi

$$
\begin{aligned}
y\,dx + x\,dy &= 0, \\
xy &= c(z), \\
u(x,y,z) &= xy - c(z).
\end{aligned}
$$

Enačbe (4.100) se glase

$$
\begin{aligned}
y &= 2\mu yz, \\
x &= 2\mu zx, \\
-c'(x) &= 3\mu xy.
\end{aligned}
$$

Prvi dve enačbi povesta

$$\mu = \frac{1}{2z}$$

in nato tretja enačba pove

$$-c'(z) = \frac{3xy}{2z} = \frac{3c(z)}{2z},$$

ali

$$\begin{aligned} \frac{dc(z)}{c(z)} + \frac{3}{2}\frac{dz}{z} &= 0, \\ c(z)z^{3/2} &= \sqrt{C}, \\ c^2z^3 &= C, \\ x^2y^2z^3 &= C. \end{aligned}$$

▲

Primer 4.32

$$2xz\,dx + z\,dy - dz = 0.$$

Najpreprosteje bo, če vzamemo $dx = 0$. Sledi

$$\begin{aligned} z\,dy - dz &= 0, \\ -dy + \frac{dz}{z} &= 0, \\ -y + \log z &= c(x) \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} -c'(x) &= 2\mu xz, \\ -1 &= \mu z, \\ \frac{1}{z} &= -\mu. \end{aligned}$$

Iz zadnjih dveh enačb sledi

$$\mu = -\frac{1}{z}$$

in

$$\begin{aligned} -c'(x) &= -2x, \\ c(x) &= x^2 + C, \\ \log z - y - x^2 &= C. \end{aligned}$$

▲

4.9 Naloge

4.1 Eliminiraj konstanti a in b iz naslednjih enačb:

(a) $u = (x + a)(y + b)$.

(b) $2u = (ax + y)^2 + b$.

(c) $ax^2 + by^2 + u^2 = 1$.

4.2 Eliminiraj funkcijo w iz naslednjih enačb:

(a) $u = xy + w\left(x^2 + y^2\right)$.

(b) $u = x + y + w(xy)$.

(c) $u = w\left(\frac{xy}{u}\right)$.

(d) $u = w(x - y)$.

4.3 V naslednjih enačbah je $p = \frac{\partial u}{\partial x}$ in $q = \frac{\partial u}{\partial y}$. Poišči splošni integral naslednjih diferencialnih enačb:

(a) $x^2p + y^2q = (x + y)u$.

(b) $u(xp - yq) = y^2 - x^2$.

(c) $px\left(u - 2y^2\right) = (u - qy)\left(u - y^2 - 2x^3\right)$.

(d) $px(x + y) = qy(x + y) - (x - y)(2x + 2y - u)$.

(e) $y^2p - xyq = x(u - 2y)$.

(f) $(y + ux)p - (x + yu)q = x^2 - y^2$.

(g) $x\left(x^2 + 3y^2\right)p - y\left(3x^2 + y^2\right)q = 2u\left(y^2 - x^2\right)$.

4.4 Poišči enačbo družine ploskev, ki sekajo družino stožcev

$$x^2 + y^2 + u^2 = cxy$$

pravokotno.

4.5 Poišči rešitev enačbe

$$(x + u)p + (y + u)q + u = 0,$$

ki gre skozi krožnico $x^2 + y^2 = a^2, \quad u = a$.

4.6 Poišči rešitev enačbe

$$x^3p + y\left(3x^2 + y\right)q = u\left(2x^2 + u\right),$$

ki gre skozi parabolo $x = 1, \quad y^2 = u - y$.

4.7 Poišči rešitev enačbe
$$(p-q)(x+y)=u,$$
ki gre skozi krivuljo $x+y+u=0, \quad x=u^2$.

4.8 Poišči rešitev enačbe
$$x\left(y^2+u\right)p-y\left(x^2+u\right)q=\left(x^2-y^2\right)u,$$
ki gre skozi premico $x+y=0, \quad u=1$.

4.9 Poišči rešitev enačbe
$$2y(u-3)p+(2x-u)q=y(2x-3),$$
ki gre skozi krožnico $x^2+y^2=2x, \quad u=0$.

4.10 Poišči rešitev enačbe
$$(2xy-1)p+\left(u-2x^2\right)q=2(x-yu),$$
ki gre skozi premico $x=1, \quad y=0$.

4.11 Poišči rešitev enačbe
$$(x-y)y^2p+(y-x)x^2q=\left(x^2+y^2\right)u,$$
ki gre skozi krivuljo $xu=a^3, \quad y=0$.

4.12 Poišči rešitev enačbe
$$(x-y)p+(y-x-u)q=u,$$
ki gre skozi krožnico $x^2+y^2=1, \quad u=1$.

4.13 Poišči rešitev enačbe
$$x(u+2a)p+(xu+2yu+2ay)q=u(u+a),$$
ki gre skozi krivuljo $y=0, \quad u^2=4ax$.

4.14 Poišči rešitev enačbe
$$x(u+2a)p+(xu+2yu+2ay)q=u(u+a),$$
ki gre skozi krivuljo $y=0, \quad u^3+x(u+a)^2=0$.

4.15 Primerki v kanibalskem okolju se plodijo in umirajo pa naslednjih zakonih:

(a) Vsak primerek z verjetnostjo $\lambda\delta t+o(\delta t)$ v času $(t,t+\delta t)$ porodi nov primerek;

(b) če je trenutno pri življenju n primerkov, bodo vsak primerek tekmeci v času $(t, t+\delta t)$ z verjetnostjo $\beta(n-1)\delta t + o(\delta t)$ požrli, z verjetnostjo $\alpha\delta t + o(\delta t)$ pa bo v času $(t, t+\delta t)$ poginil;

(c) verjetnost za dva taka dogodka v času $(t, t+\delta t)$ je $o(\delta t)$.

Pokaži, da je verjetnostna porazdelitev v času stabilna, če je $\alpha = 0$ in sta λ in β pozitivna. Za ta primer izračunaj verjetnost, da je v času t živih n primerkov in pokaži, da je povprečno število živih primerkov

$$\frac{\lambda/\beta}{1-\exp(-\lambda/\beta)}.$$

4.16 Poišči rešitev enačbe

$$u = \frac{1}{2}\left(p^2+q^2\right) + (p-x)(q-y),$$

ki poteka skozi os x.

4.17 Poišči rešitev enačbe

$$pq = u,$$

ki poteka skozi parabolo $x = 0, \quad y^2 = u$.

4.18 Zapiši karakteristični sistem enačbe

$$\left(1+q^2\right)u = px,$$

reši ga do kraja, in poišči rešitev, ki poteka skozi krivuljo $x^2 = 2u, \quad y = 0$.

4.19 Poišči popolne integrale naslednjih enačb:

(a) $\left(p^2+q^2\right)y = qu$.

(b) $p = (u+qy)^2$.

(c) $u^2 = pqxy$.

(d) $xp + 3yq = 2\left(u - x^2q^2\right)$.

(e) $px^5 - 4q^3x^2 + 6x^2u - 2 = 0$.

(f) $2(y+uq) = q(xp+yq)$.

(g) $2(u+xp+yq) = yp^2$.

(h) $pq = 1$.

(i) $p^2u^2 + q^2 = 1$.

(j) $p^2y\left(1+x^2\right) = qx^2$.

(k) $(p+q)(u-xp-yq) = 1$.

(l) $p + q = pq$.

(m) $u = p^2 - q^2$.

(n) $upq = p + q$.

(o) $p^2 q\left(x^2 + y^2\right) = p^2 + q$.

(p) $p^2 q^2 + x^2 y^2 = x^2 q^2\left(x^2 + y^2\right)$.

(q) $pqu = p^2\left(xq + p^2\right) + q^2\left(yp + q^2\right)$.

4.20 Za naslednje Pfaffove enačbe preveri, ali imajo dvorazsežno rešitev in tiste enačbe, ki dvorazsežno rešitev res imajo, reši.

(a) $y\,dx + x\,dy + 2z\,dz = 0$.

(b) $z(z+y)\,dx + z(z+x)\,dy - 2xy\,dz = 0$.

(c) $yz\,dx + 2xz\,dy - 3xy\,dz = 0$.

(d) $\left(y^2 + xz\right)\,dx + \left(x^2 + yz\right)\,dy + 3z^2\,dz = 0$.

(e) $2y(a-x)\,dx + \left[z - y^2 + (a-x)^2\right]\,dy - y\,dz = 0$.

(f) $y\left(1 + z^2\right)\,dx - x\left(1 + z^2\right)\,dy + \left(x^2 + y^2\right)\,dz = 0$.

(g) $\left(y^2 + yz + z^2\right)\,dx + \left(z^2 + zx + x^2\right)\,dy + \left(x^2 + xy + y^2\right)\,dz = 0$.

(h) $yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0$.

(i) $(1 + yz)\,dx + x(z - x)\,dy - (1 + xy)\,dz = 0$.

(j) $y(x+4)(y+z)\,dx - x(y+3z)\,dy + 2xy\,dz = 0$.

(k) $yz\,dx + \left(x^2 y - zx\right)\,dy + \left(x^2 z - xy\right)\,dz = 0$.

(l) $2yz\,dx - 2xz\,dy - \left(x^2 - y^2\right)(z-1)\,dz = 0$.

4.21 (Pisni izpit Analiza IV, julij 1997) Poišči tisto rešitev enačbe

$$(x-y)y^2\frac{\partial u}{\partial x} + (y-x)x^2\frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^2 + y^2\right)u,$$

ki poteka skozi krivuljo $xu = a^3, \quad y = 0$.

4.22 (Pisni izpit Analiza IV, september 1997) Dokaži, da je

$$u^2 = a^2 x^2 + (ay + b)^2$$

popolni integral enačbe

$$\left(p^2 + q^2\right)x = pu$$

in poišči tisto rešitev enačbe, ki poteka skozi krivuljo $x = 0, \quad u^2 = 4y$.

Poglavje 5

Parcialne diferencialne enačbe 2. reda

5.1 Kvazilinearna enačba 2. reda

Študiramo kvazilinearno parcialno diferencialno enačbo 2. reda za funkcijo

$$u = u(x, y).$$

Dogovorimo se za oznake

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ q &= \frac{\partial u}{\partial y}, \\ r &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ s &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \\ t &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Študiramo torej enačbo

$$Rr + 2Ss + Tt = F, \tag{5.1}$$

kjer so R, S, T in F dane funkcije spremenljivk x, y, u, p in q.

Z uvedbo novih neodvisnih spremenljivk

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y), \\ \eta &= \psi(x, y), \end{aligned} \tag{5.2}$$

pri pogoju

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \neq 0,$$

skušamo enačbo (5.1) poenostaviti.

Vpeljimo oznake

$$\begin{aligned}
\overline{p} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}, \\
\overline{q} &= \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\
\overline{r} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \\
\overline{s} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \\
\overline{t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

in računamo

$$\begin{aligned}
p &= \frac{\partial u}{\partial x} = \\
&= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial x} = \\
&= \overline{p}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \overline{q}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \\
q &= \frac{\partial u}{\partial y} = \\
&= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial y} = \\
&= \overline{p}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \overline{q}\frac{\partial \psi}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Dalje dobimo

$$\begin{aligned}
r &= \frac{\partial p}{\partial x} = \\
&= \left(\overline{r}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \overline{s}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(\overline{s}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \overline{t}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x} + \cdots = \\
&= \overline{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2\overline{s}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \overline{t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \cdots, \\
s &= \frac{\partial p}{\partial y} = \\
&= \left(\overline{r}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \overline{s}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(\overline{s}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \overline{t}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x} + \cdots = \\
&= \overline{r}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \overline{s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \overline{t}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \cdots, \\
t &= \frac{\partial q}{\partial y} = \\
&= \left(\overline{r}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \overline{s}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \left(\overline{s}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \overline{t}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi}{\partial y} + \cdots = \\
&= \overline{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + 2\overline{s}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \overline{t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \cdots,
\end{aligned}$$

kjer smo s tremi pikami označili člene brez drugih odvodov na ξ in η.

Enačba (5.1) preide v enačbo

$$\overline{R}\overline{r} + 2\overline{S}\overline{s} + \overline{T}\overline{t} = \overline{F}, \tag{5.3}$$

kjer je

$$\begin{aligned}
\overline{R} &= R\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2S\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2, \\
\overline{S} &= R\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + S\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + T\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \\
\overline{T} &= R\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + 2S\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} + T\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Enačbe (5.4) lahko napišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} \overline{R} & \overline{S} \\ \overline{S} & \overline{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R & S \\ S & T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Če označimo

$$\Delta = \begin{vmatrix} R & S \\ S & T \end{vmatrix} = RT - S^2, \tag{5.5}$$

sledi

$$\overline{\Delta} = \overline{RT} - \overline{S}^2 = \Delta \cdot \left[\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}\right]^2, \tag{5.6}$$

kjer je

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \neq 0.$$

Zaradi (5.6) se pri transformaciji neodvisnih spremenljivk predznak količine Δ ohranja, zato lahko govorimo o *tipu enačbe* (5.1) v točki.

Definicija 5.1 *Kvazilinearna enačba drugega reda (5.1) v spremenljivkah x in y je v točki (x, y)*

- eliptična*, če je $\Delta > 0$,*
- hiperbolična*, če je $\Delta < 0$,*
- parabolična*, če je $\Delta = 0$.*

Če so funkcije R, S in T odvisne od u, p ali q, je funkcija Δ odvisna od rešitve in s tem tudi tip. Če pa se omejimo na slučaj, da so funkcije R, S in T odvisne kvečjemu od x in y, je tip enačbe odvisen le od točke.

Tip enačbe se v splošnem od točke do točke spreminja. Pravimo, da je enačba (5.1) na območju Ω eliptična (hiperbolična, parabolična), če je taka v vsaki točki območja Ω.

Primer 5.1 Za *Poissonovo enačbo*

$$-\Delta u := -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

velja

$$\begin{aligned} R &= -1, \\ S &= 0, \\ T &= -1, \end{aligned}$$

zato je

$$\Delta = 1$$

in enačba je eliptična na vsakem območju.

▲

Primer 5.2 Za *valovno enačbo*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t)$$

velja

$$\begin{aligned} R &= 1, \\ S &= 0, \\ T &= -\frac{1}{c^2}, \end{aligned}$$

zato je

$$\Delta = -\frac{1}{c^2} < 0$$

in enačba je hiperbolična na vsakem območju.

▲

Primer 5.3 Za *difuzijsko enačbo*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{D}\frac{\partial u}{\partial t}$$

velja

$$\begin{aligned} R &= 1, \\ S &= 0, \\ T &= 0, \end{aligned}$$

zato je

$$\Delta = 0$$

in enačba je parabolična na vsakem območju.

▲

Primer 5.4 (Tricomi) Za enačbo

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

velja

$$\begin{aligned} R &= y, \\ S &= 0, \\ T &= 1, \end{aligned}$$

zato je

$$\Delta = y$$

in enačba je

- eliptična pri $y > 0$,
- hiperbolična pri $y < 0$,
- parabolična pri $y = 0$.

▲

5.2 Kanonska oblika hiperbolične enačbe

Funkciji φ in ψ v transfomaciji (5.2) lahko izberemo tako, da se enačba poenostavi.

Izrek 5.1 *Če je enačba (5.1) hiperbolična, obstaja nesingularna transformacija (5.2), ki enačbo (5.1) prevede v enačbo*

$$2\overline{S}\overline{s} = \overline{F}.$$

Ker je

$$\overline{\Delta} = -\overline{S}^2 < 0,$$

je $\overline{S}$ različen od nič in enačbo lahko zapišemo v obliki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \tag{5.7}$$

Dokaz. Določimo funkciji φ in ψ v transformaciji

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y), \\ \eta &= \psi(x, y) \end{aligned}$$

tako, da bo $\overline{R} = 0$ in $\overline{T} = 0$, če je to mogoče. Funkciji φ in ψ morata tedaj zadoščati (isti) enačbi

$$R\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)^2 + 2S\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial y} + T\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2 = 0. \tag{5.8}$$

Če je $R = T = 0$, tedaj je že izhodiščna enačba zahtevane oblike. V nasprotnem primeru je vsaj eden od R in T od nič različen in po potrebi zamenjamo x in y (in s tem R in T), da bo $R \neq 0$.

Kvadratno enačbo (5.8) razrešimo (vemo, da je $\Delta < 0$)

$$\frac{\partial\chi}{\partial x} = \frac{1}{R}\left(-S \pm \sqrt{-\Delta}\right)\frac{\partial\chi}{\partial y}$$

ali

$$R\frac{\partial\chi}{\partial x} + \left(S \mp \sqrt{-\Delta}\right)\frac{\partial\chi}{\partial y} = 0. \tag{5.9}$$

To sta dve homogeni linearni enačbi prvega reda za funkciji φ in ψ. Karakteristična sistema sta

$$\begin{aligned} \dot{x} &= R, \\ \dot{y} &= S \mp \sqrt{-\Delta}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Vsak od sistemov (5.10) nam dá po en integral. Pokažimo, da sta integrala φ in ψ neodvisna!

Vzdolž karakteristike za integrala φ in ψ velja

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi(x,y) &= \varphi_x\dot{x}+\varphi_y\dot{y}=\varphi_x R+\varphi_y(S-\sqrt{-\Delta})=0, \qquad (5.11)\\ \frac{d}{dt}\psi(x,y) &= \psi_x\dot{x}+\psi_y\dot{y}=\psi_x R+\psi_y(S+\sqrt{-\Delta})=0. \qquad (5.12)\end{aligned}$$

Enačbo (5.11) pomnožimo z ψ_y, enačbo (5.12) z $(-\varphi_y)$ in dobljeni enačbi seštejemo,

$$R\left(\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x\right)=2\sqrt{-\Delta}\varphi_y\psi_y,$$

ali, ker je $R\neq 0$,

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}=2\frac{\sqrt{-\Delta}}{R}\varphi_y\psi_y.$$

Vemo, da je $-\Delta>0$, dokazati moramo še, da je $\varphi_y\psi_y\neq 0$. Če bi bilo na primer $\varphi_y=0$, bi iz (5.9) sledilo $R\varphi_x=0$, torej $\varphi=\text{const}$, to pa ni dober integral. Podobno velja v primeru, če bi bil $\psi_y=0$. ∎

Primer 5.5

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

V tem primeru je

$$\begin{aligned} R &= 1,\\ S &= 0,\\ T &= -x^2,\\ \Delta &= -x^2.\end{aligned}$$

Enačba je pri $x\neq 0$ hiperbolična, pri $x=0$ pa parabolična. Omejimo se na slučaj $x\neq 0$. Karakteristična sistema (5.10) se glasita

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1,\\ \dot{y} &= \mp x,\end{aligned}$$

ali

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\mp x,\\ y &= \mp\frac{1}{2}x^2+\text{const}.\end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(x,y)=y+\frac{1}{2}x^2,\\ \eta &= \psi(x,y)=y-\frac{1}{2}x^2.\end{aligned}$$

Računamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}x + \frac{\partial u}{\partial \eta}(-x) = \\
&= x\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} + x^2\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \\
&= \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} + (\xi - \eta)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right), \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}$$

Izhodiščna enačba preide v enačbo

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} + (\xi - \eta)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) = \\
&= (\xi - \eta)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)
\end{aligned}$$

ali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4(\xi - \eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

▲

Hiperbolično diferencialno enačbo pogosto prepišemo v drugačno *kanonsko* obliko. Pišemo

$$\begin{aligned}
\alpha &= \xi + \eta, \\
\beta &= \xi - \eta
\end{aligned}$$

in sledi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}, \\
\frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} &= \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta}\right) = \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}
\end{aligned}$$

in dobimo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}\right). \tag{5.13}$$

Primer 5.6 Rezultat primera 5.5 prepišimo v novo kanonsko obliko:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \frac{1}{2\beta}\frac{\partial u}{\partial \beta}.$$

▲

Če je bila enačba (5.1) linearna, je linearna tudi enačba (5.7) in dobimo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a\frac{\partial u}{\partial \xi} + b\frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = f(\xi, \eta). \tag{5.14}$$

Če so povrh vsega koeficienti a, b in c konstantni, lahko enačbo (5.14) poenostavimo naprej. Uvedemo

$$\begin{aligned}
u(\xi,\eta) &= e^{-b\xi - a\eta} v(\xi,\eta), \\
\frac{\partial u}{\partial \xi} &= e^{-b\xi - a\eta}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - bv\right), \\
\frac{\partial u}{\partial \eta} &= e^{-b\xi - a\eta}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} - av\right), \\
\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} &= e^{-b\xi - a\eta}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - a\frac{\partial v}{\partial \xi} - b\frac{\partial v}{\partial \eta} + abv\right).
\end{aligned}$$

Sledi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - a\frac{\partial v}{\partial \xi} - b\frac{\partial v}{\partial \eta} + abv + a\frac{\partial v}{\partial \xi} - abv + b\frac{\partial v}{\partial \eta} - abv + cv = fe^{a\xi + b\eta}$$

ali

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + c_1 v = f_1(\xi, \eta),$$

kjer je

$$\begin{aligned}
c_1 &= c - ab, \\
f_1(\xi,\eta) &= e^{a\xi + b\eta} f(\xi,\eta).
\end{aligned}$$

5.3 Kanonska oblika eliptične enačbe

V eliptičnem primeru je $\Delta > 0$ in postopek, ki smo ga uporabili pri hiperbolični enačbi, nam dá kompleksne karakteristike. Isti formalni postopek, kot velja za hiperbolično enačbo, nas privede seveda do enačbe (5.7), vendar sta spremenljivki ξ in η sedaj konjugirano kompleksni količini. Zato uvedemo še eno transformacijo

$$\begin{aligned}
\alpha &= \tfrac{1}{2}(\xi + \eta), \\
\beta &= \tfrac{1}{2i}(\xi - \eta).
\end{aligned} \tag{5.15}$$

in takoj uvidimo, da je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right)$$

in dobimo *kanonsko obliko eliptične enačbe*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}\right). \tag{5.16}$$

Primer 5.7

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

V tem primeru je

$$\begin{aligned} R &= 1, \\ S &= 0, \\ T &= x^2, \\ \Delta &= x^2. \end{aligned}$$

Enačba je pri $x \neq 0$ eliptična, pri $x = 0$ pa parabolična. Omejimo se na slučaj $x \neq 0$. Karakteristične enačbe (5.10) so

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1, \\ \dot{y} &= \mp ix \end{aligned}$$

ali

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \mp ix, \\ y \pm \frac{1}{2} ix^2 &= \text{const.} \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y) = y + \frac{1}{2} ix^2, \\ \eta &= \psi(x, y) = y - \frac{1}{2} ix^2. \end{aligned}$$

Upoštevamo še (5.15) in dobimo

$$\begin{aligned} \alpha &= y, \\ \beta &= \frac{1}{2} x^2, \end{aligned}$$

tako da sledi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= x \frac{\partial u}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial u}{\partial \beta} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}. \end{aligned}$$

Sledi
$$\frac{\partial u}{\partial \beta} + 2\beta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right) = 0$$
ali
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = -\frac{1}{2\beta}\frac{\partial u}{\partial \beta}.$$

▲

5.4 Kanonska oblika parabolične enačbe

V paraboličnem primeru je
$$\Delta = RT - S^2 = 0, \tag{5.17}$$
zato parabolično enačbo lahko prevedemo v obliko (5.3), kjer je $\overline{R} = \overline{S} = 0$. Res, če je $R = 0$, enačba (5.17) pove, da je tudi $S = 0$ in enačba že ima željeno obliko. Študiramo torej slučaj $R \neq 0$. Pogoj $\overline{R} = 0$ pove, da mora biti funkcija φ integral karakterističnega sistema
$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & R, \\ \dot{y} & = & S. \end{array}, \tag{5.18}$$
za funkcijo ψ pa lahko izberemo poljubno funkcijo, neodvisno od funkcije φ.

Res, ker je φ integral karakterističnega sistema (5.18), je na karakteristiki
$$\frac{d\varphi}{dt} \quad = \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\dot{y} = R\frac{\partial \varphi}{\partial x} + S\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \tag{5.19}$$
Enačbo (5.19) pomnožimo z S, upoštevamo enačbo (5.17) in sledi
$$\begin{array}{rcl} RS\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + RT\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} & = & 0, \\ S\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + T\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} & = & 0, \end{array} \tag{5.20}$$
ker je $R \neq 0$.

Tudi funkcija $\overline{S}$ je sedaj enaka nič. Iz enačbe (5.4) in po enačbah (5.19) in (5.20) namreč sledi
$$\overline{S} = \left(R\frac{\partial \varphi}{\partial x} + S\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(S\frac{\partial \varphi}{\partial x} + T\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$
Enačba (5.3) se sedaj glasi
$$\overline{T}\overline{t} = \overline{F}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Koeficient $\overline{T}$ ne more biti enak nič. Če bi bil $\overline{T} = 0$, bi morala biti funkcija ψ tudi integral karakterističnega sistema (5.18), to pa ni mogoče, ker ima sistem

(5.18) en sam integral, funkcija ψ pa mora biti od njega neodvisna. Zato je $\overline{T} \neq 0$ in lahko pišemo

$$\bar{t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{5.21}$$

Primer 5.8

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

V tem primeru je

$$\begin{aligned} R &= 1, \\ S &= 1, \\ T &= 1, \\ \Delta &= 0. \end{aligned}$$

Enačba je v vsaki točki parabolična. Karakteristični sistem je

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1, \\ \dot{y} &= 1, \end{aligned}$$

torej

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 1, \\ y &= x + \mathrm{const}, \\ \varphi(x, y) &= x - y. \end{aligned}$$

Če si za ψ izberemo

$$\psi(x, y) = x + y,$$

dobimo

$$\begin{aligned} \xi &= x - y, \\ \eta &= x + y \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

in končno

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

ali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

▲

Če je enačba linearna, dobimo namesto enačbe (5.21) enačbo oblike

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = a\frac{\partial u}{\partial \xi} + b\frac{\partial u}{\partial \eta} + cu + f,$$

kjer so a, b, c in f funkcije spremenljivk ξ in η. Pišimo

$$u = hw,$$

kjer je h funkcija, ki jo bomo še določili. Sledi

$$\begin{aligned} & h\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial h}{\partial \eta}\frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}w = \\ = \quad & a\left(\frac{\partial h}{\partial \xi}w + h\frac{\partial w}{\partial \xi}\right) + b\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}w + h\frac{\partial w}{\partial \eta}\right) + chw + f. \end{aligned}$$

Določimo h tako, da bo koeficient pri $\frac{\partial w}{\partial \eta}$ enak nič:

$$2\frac{\partial h}{\partial \eta} = bh,$$

torej

$$h = e^{\frac{1}{2}\int b\,d\eta}.$$

Sledi

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \xi} &= \frac{1}{2}h\int \frac{\partial b}{\partial \xi}\,d\eta, \\ \frac{\partial h}{\partial \eta} &= \frac{1}{2}hb, \\ \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{2}h\frac{\partial b}{\partial \eta} + \frac{1}{2}b\frac{\partial h}{\partial \eta} = \\ &= \left(\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial \eta} + \frac{b^2}{4}\right)h \end{aligned}$$

in po deljenju s h

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + b\frac{\partial w}{\partial \eta} + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial \eta} + \frac{b^2}{4}\right)w = \\ = \quad & a\left(\frac{1}{2}w\int \frac{\partial b}{\partial \xi}\,d\eta + \frac{\partial w}{\partial \xi}\right) + b\left(\frac{1}{2}bw + \frac{\partial w}{\partial \eta}\right) + cw + fe^{-\frac{1}{2}\int b\,d\eta} \end{aligned}$$

ali

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = a\frac{\partial w}{\partial \xi} + c_1 w + f_1,$$

kjer je

$$\begin{aligned} c_1 &= c + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}a\int \frac{\partial b}{\partial \xi}\,d\eta - \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial \eta}, \\ f_1 &= f\exp\left(-\frac{1}{2}\int b\,d\eta\right). \end{aligned}$$

5.5 Linearna enačba v več spremenljivkah

Vzemimo linearno parcialno diferencialno enačbo

$$Lu := a_{ik}(\boldsymbol{x})u_{x_i x_k} + \cdots = 0 \tag{5.22}$$

v n spremenljivkah

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

kjer smo spet privzeli sumacijski dogovor in kjer tri pike označujejo člene, ki ne vsebujejo drugih odvodov, in kjer za koeficiente $a_{ij}(\boldsymbol{x})$ lahko privzamemo, da velja

$$a_{ik}(\boldsymbol{x}) = a_{ki}(\boldsymbol{x}),$$

ker predpostavljamo, da je rešitev u na nekem območju G zvezno odvedljiva funkcija spremenljivk $\boldsymbol{x}$.

Klasifikacija diferencialnega operatorja L je odvisna od učinka, ki ga ima transformacija

$$\xi_i = t_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.23}$$

ali

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}),$$

v izbrani točki $\boldsymbol{x}$ na obliko operatorja L.

Označimo

$$\frac{\partial t_l}{\partial x_i} = t_{li}$$

in dobimo

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= t_{li}u_{\xi_l}, \\ u_{x_i x_k} &= t_{li}t_{sk}u_{\xi_l \xi_s} + \cdots, \end{aligned}$$

kjer pike spet označujejo člene brez drugih odvodov funkcije u. Transformacija (5.23) prevede operator (5.22) v obliko

$$\Lambda u = \alpha_{ls}(\boldsymbol{\xi})u_{\xi_l \xi_s} + \cdots, \tag{5.24}$$

kjer so koeficienti α_{ls} določeni s transformacijo

$$\alpha_{ls} = t_{li} t_{sk} a_{ik}. \tag{5.25}$$

V točki $\boldsymbol{x}$ se koeficienti glavnega dela operatorja L transformirajo kot koeficienti kvadratne forme

$$Q = a_{ik} y_i y_k$$

pod vplivom *afine transformacije*

$$y_i = t_{li} \eta_l. \tag{5.26}$$

Kvadratno formo te oblike pa z afino transformacijo (5.26) lahko vedno prevedemo v *kanonsko obliko*

$$Q = \sum_{l=1}^{n} \kappa_l \eta_l^2,$$

kjer imajo koeficenti κ_l vrednosti $+1$, -1 ali 0. Števila negativnih, ničelnih in pozitivnih koeficientov, imenovana *inercija* so *afine invariante*, zato imajo pomen za diferencialni operator v točki $\boldsymbol{x}$.

Definicija 5.2 *Diferencialni operator se v točki $\boldsymbol{x}$ imenuje*

- eliptičen, *če so vsi κ_i istega znaka,*
- hiperboličen, *če so vsi κ_i razen enega, istega znaka, recimo pozitivni, preostali κ_i pa je negativen,*
- ultrahiperboličen, *če sta vsaj dva κ_i pozitivna in vsaj dva κ_i negativna,*
- paraboličen, *če je en ali več κ_i enakih nič.*

Če je $n > 2$, je takšna transformacija možna le v posameznih točkah, ne pa na celem območju kot v primeru dveh spremenljivk, saj bi za karakteristike morali rešiti predoločen sistem parcialnih diferencialnih enačb prvega reda.

Kot primere takih enačb lahko navedemo

Eliptične enačbe

$$\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{(Laplace)} \\ \Delta u = f(\boldsymbol{x}) & \text{(Poisson)} \\ \Delta u + k^2 u = 0 & \text{(Helmholz)} \end{array}$$

Hiperbolične enačbe

$$\Delta u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(t, \boldsymbol{x}) \quad \text{(Valovna enačba)}$$

Parabolične enačbe

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} + f(t, \boldsymbol{x}) \quad \text{(Prevajanje toplote, difuzija)}$$

5.6 Laplaceova enačba

Laplaceova enačba

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0, \tag{5.27}$$

je najpomembnejša enačba matematične fizike, služi pa tudi kot model za eliptično enačbo.

5.6.1 Osnovna rešitev Laplaceove enačbe

Definicija 5.3 *Rešitev Laplaceove enačbe (5.27), odvisno samo od $r = |\boldsymbol{x}|$, imenujemo osnovna rešitev Laplaceove enačbe.*

Poiščimo osnovno rešitev enačbe (5.27) v obliki

$$u(\boldsymbol{x}) = f(r).$$

Upoštevamo, da za skalarno polje f in za vektorsko polje $\boldsymbol{A}$ velja

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{A}) = \operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{A} + f \operatorname{div} \boldsymbol{A}$$

in sledi

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} u &= f'(r) \operatorname{grad} r = \\
&= f'(r)\frac{\boldsymbol{x}}{r}, \\
\Delta u &= \operatorname{div}(r^{-1} f' \boldsymbol{x}) = \\
&= \operatorname{grad}(r^{-1} f') \cdot \boldsymbol{x} + r^{-1} f' \operatorname{div} \boldsymbol{x} = \\
&= (r^{-1} f')' \operatorname{grad} r \cdot \boldsymbol{x} + r^{-1} f' \operatorname{div} \boldsymbol{x} = \\
&= r(r^{-1} f')' + n r^{-1} f'.
\end{aligned}$$

Označimo

$$v = r^{-1} f'$$

in iz enačbe (5.27) sledi

$$rv' + nv = 0.$$

To je Euler-Cauchyjeva enačba z rešitvijo

$$\begin{aligned}
v &= A r^{-n}, \\
f' &= A r^{1-n}.
\end{aligned}$$

Če primerno izberemo konstanto A, v primeru $n = 3$ dobimo

$$f(r) = \frac{1}{r},$$

v primeru $n = 2$ pa

$$f(r) = \log \frac{1}{r}.$$

Če postavimo koordinatni začetek v točko $\boldsymbol{x}_0$, dobimo splošnejšo rešitev in sicer v trorazsežnem prostoru

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|}, \tag{5.28}$$

v ravnini pa

$$u(\boldsymbol{x}) = \log \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|}. \tag{5.29}$$

To je rešitev Laplaceove enačbe povsod razen pri $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$.

5.6.2 Greenove formule

Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ neko omejeno povezano območje, katerega rob $\partial\Omega$ je odsekoma gladek. Vemo, da velja *Gaußov izrek*: če je $\boldsymbol{F}$ zvezno odvedljivo vektorsko polje v $\overline{\Omega}$, velja Gaußova formula

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F} \, dV = \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, dS, \tag{5.30}$$

kjer je $\boldsymbol{n}$ enotska *zunanja* normala.

Naj bosta sedaj u in v dve funkciji, dvakrat zvezno odvedljivi v $\overline{\Omega}$ in vzemimo v Gaußovi formuli (5.30)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= u \operatorname{grad} v, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{F} &= \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = \\ &= \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + u\Delta v, \end{aligned}$$

pa dobimo *prvo Greenovo formulo*

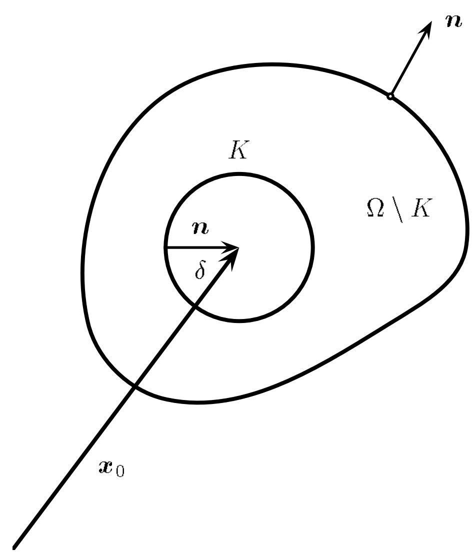
$$\int_\Omega (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + u\Delta v) \, dV = \oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} \, dS. \tag{5.31}$$

Če v prvi Greenovi formuli (5.31) zamenjamo funkciji u in v med seboj ter dobljeni enačbi odštejemo, dobimo *drugo Greenovo formulo*

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) \, dV = \oint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \tag{5.32}$$

Tretjo Greenovo formulo bomo izpeljali samo za primer $n = 3$. Izberimo točko $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ in očrtajmo okrog točke $\boldsymbol{x}_0$ kroglo K s tako majhnim polmerom δ, da velja $K \subset \Omega$, glej sliko 5.1. Dalje izberimo funkcijo v

$$v(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|}$$



Slika 5.1: Tretja Greenova formula

in napišimo drugo Greenovo formulo za (nesovisno) območje $\Omega \setminus K$, kjer je funkcija v gladka. V $\Omega \setminus K$ je $\Delta v = 0$, zato velja

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega\setminus K} v\Delta u \, dV &= \oint_{\partial(\Omega\setminus K)} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \\ &= \oint_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS - \oint_{\partial K} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \end{aligned}$$

Predznak minus pred poslednjim integralom je zato, ker na K spet vzamemo zunanjo normalo.

Tako dobimo

$$-\int_{\Omega\setminus K} v\Delta u \, dV = \oint_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + I_1 + I_2,$$

kjer je

$$\begin{aligned} I_1 &= -\oint_{\partial K} u\frac{\partial v}{\partial n} \, dS, \\ I_2 &= \oint_{\partial K} v\frac{\partial u}{\partial n} \, dS. \end{aligned}$$

Na ∂K je

$$\begin{aligned}
v &= \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|} = \\
&= \frac{1}{\delta}, \\
\boldsymbol{n} &= \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{\delta}, \\
\frac{\partial v}{\partial n} &= \boldsymbol{n}\cdot \operatorname{grad} v = \\
&= \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{\delta}\left[-\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^3}\right] = \\
&= -\frac{1}{\delta^2},
\end{aligned}$$

torej

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\delta^2}\oint_{\partial K} u\,dS, \\
I_2 &= \frac{1}{\delta}\oint_{\partial K}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS.
\end{aligned}$$

Sedaj računamo

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial K} u(\boldsymbol{x})\,dS &= \oint_{\partial K}\left[u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x}_0)\right]\,dS + u(\boldsymbol{x}_0)\oint_{\partial K} dS = \\
&= \oint_{\partial K}\left[u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x}_0)\right]\,dS + 4\pi\delta^2 u\left(\boldsymbol{x}_0\right),
\end{aligned}$$

torej,

$$I_1 = 4\pi u\left(\boldsymbol{x}_0\right) + \frac{1}{\delta^2}\oint_{\partial K}\left[u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x}_0)\right]\,dS.$$

Funkcija u je enakomerno zvezna na $\overline{\Omega}$. Predpišimo poljuben $\varepsilon > 0$ in po potrebi zmanjšajmo δ, da bo veljalo

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0| \leq \delta \implies \left|u\left(\boldsymbol{x}\right)-u\left(\boldsymbol{x}_0\right)\right| \leq \varepsilon.$$

Tedaj je

$$\left|I_1 - 4\pi u\left(\boldsymbol{x}_0\right)\right| \leq 4\pi\varepsilon.$$

Po drugi strani je v $\overline{\Omega}$ $\operatorname{grad} u$ omejen:

$$|\operatorname{grad} u| \leq M$$

in zato

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| \leq M$$

in

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{M}{\delta}\oint_{\partial K} dS = \\ &= 4\pi M\delta. \end{aligned}$$

Po potrebi δ še zmanjšamo, da bo $M\delta \leq \varepsilon$, pa velja

$$\begin{aligned} |I_1 - 4\pi u(\boldsymbol{x}_0)| &\leq 4\pi\varepsilon, \\ |I_2| &\leq 4\pi\varepsilon. \end{aligned}$$

Sedaj je

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= [I_1 - 4\pi u(\boldsymbol{x}_0)] + I_2 + 4\pi u(\boldsymbol{x}_0) = \\ &= B + 4\pi u(\boldsymbol{x}_0), \end{aligned}$$

kjer je

$$\begin{aligned} B &= [I_1 - 4\pi u(\boldsymbol{x}_0)] + I_2, \\ |B| &\leq 4\pi\varepsilon + 4\pi\varepsilon = \\ &= 8\pi\varepsilon, \end{aligned}$$

pa velja

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega\setminus K} v\Delta u\, dV &= \oint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS + 4\pi u(\boldsymbol{x}_0) + B, \\ |B| &\leq 8\pi\varepsilon. \end{aligned}$$

Ker je ε poljubno majhen, sledi *tretja Greenova formula*

$$u(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\right] dS - \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{\Delta u}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\, dV \tag{5.33}$$

in izlimitirani integral, tretji člen, obstaja. Tretja Greenova formula velja za vsako funkcijo, ki je v $\overline{\Omega}$ dvakrat zvezno odvedljiva, če je $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$.

V ravninskem primeru, $n = 2$, se tretja Greenova formula glasi

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}_0) &= \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\Omega}\left[\log\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\right] ds - \\ &- \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \Delta u \log\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\, dS \end{aligned} \tag{5.34}$$

5.6.3 Harmonične funkcije

Definicija 5.4 *Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ odprta povezana množica, zaenkrat omejena. Dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo u, ki v Ω zadošča Laplaceovi enačbi*

$$\Delta u = 0, \tag{5.35}$$

imenujemo harmonična funkcija.

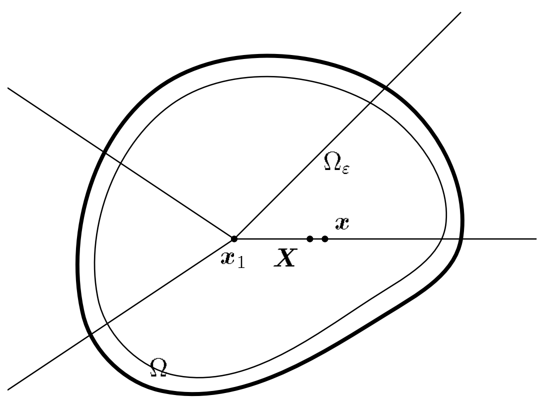
Z uporabo Greenovih formul bomo sedaj analizirali lastnosti harmoničnih funkcij.

(i) Naj bo funkcija u harmonična v Ω in dvakrat zvezno odvedljiva v $\overline{\Omega}$. Če vzamemo še harmonično funkcijo v,

$$v(\boldsymbol{x}) \quad = \quad 1,$$

nam druga Greenova formula (5.32) pove

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0. \tag{5.36}$$



Slika 5.2: Zvezdasto območje

(ii) Naj bo funkcija u harmonična v Ω in dvakrat zvezno odvedljiva v $\overline{\Omega}$. Tretja Greenova formula (5.33) pove

$$u(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|} \right] dS. \tag{5.37}$$

Enačbi (5.36) in (5.37) smo izpeljali pod pogojem, da je funkcija u dvakrat zvezno odvedljiva v $\overline{\Omega}$. Ker pa drugi odvodi v formulah (5.36) in (5.37) ne nastopajo, pričakujemo, da zadošča, da je funkcija u samo enkrat zvezno odvedljiva v $\overline{\Omega}$. Ta domneva drži, če je le rob $\partial\Omega$ dovolj pohleven.

Denimo, da je območje Ω *zvezdasto* glede na točko $\boldsymbol{x}_1 \in \Omega$, glej sliko 5.2, to je, da vsak poltrak

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{s}, \qquad t \geq 0, \qquad |\boldsymbol{s}| = 1$$

natanko enkrat prebode rob $\partial\Omega$. Rob $\partial\Omega$ naj bo pri tem odsekoma gladek.

Naj bo $0 < \varepsilon < 1$ in definirajmo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{x}_1 + (1-\varepsilon)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1) = \\ &= \varepsilon\boldsymbol{x}_1 + (1-\varepsilon)\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

Če je $\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}$, je $\boldsymbol{X} \in \Omega$. Ker je Ω zvezdasto glede na točko $\boldsymbol{x}_1$, je

$$\overline{\Omega_\varepsilon} \subset \Omega,$$

kjer je

$$\Omega_\varepsilon = \{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x} \in \Omega\}.$$

Vzemimo funkcijo u_ε,

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(\boldsymbol{x}) &= u[\varepsilon\boldsymbol{x}_1 + (1-\varepsilon)\boldsymbol{x}] = \\ &= u(\boldsymbol{X}). \end{aligned}$$

Funkcija u_ε je dvakrat zvezno odvedljiva v $\overline{\Omega}$, ker je u dvakrat zvezno odvedljiva v $\overline{\Omega_\varepsilon} \subset \Omega$, je pa tudi harmonična v Ω:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} u_\varepsilon &= (1-\varepsilon)\operatorname{grad} u \\ \Delta u_\varepsilon &= (1-\varepsilon)^2 \Delta u = 0 \end{aligned}$$

Za funkcije u_ε formuli (5.36) in (5.37) veljata, v limiti $\varepsilon \longrightarrow 0$ pa dobimo (5.36) in (5.37) za funkcijo u, saj je u zvezno odvedljiva v Ω.

Formuli (5.36) in (5.37) lahko posplošimo na območja, ki jih lahko zapišemo kot končne unije območij, od katerih je vsako zvezdasto glede na (svojo) točko, na primer na torus.

(iii) Formula (5.37) pove, da se vrednost harmonične funkcije v notranji točki izraža z vrednostjo in z normalnim odvodom funkcije na robu. Formulo (5.37) pa lahko včasih še poenostavimo.

Naj bo funkcija u harmonična v Ω, $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$, K krogla s polmerom a in središčem $\boldsymbol{x}_0$, krogla K naj leži vsa v Ω: $\overline{K} \subset \Omega$. Formulo (5.37) lahko zato uporabimo na K

$$u(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial K} \left[\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|} \right] dS.$$

Vendar, za $\boldsymbol{x} \in \partial K$, velja

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|} &= \frac{1}{a}, \\ \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|} &= -\frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

in dobimo

$$u(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{4\pi a}\oint_{\partial K}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS + \frac{1}{4\pi a^2}\oint_{\partial K} u\,dS.$$

Prvi člen je zaradi (5.36) enak nič in ostane

$$u(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{4\pi a^2}\oint_{\partial K} u(\boldsymbol{x})\,dS. \tag{5.38}$$

(iv) Naj bo funkcija u harmonična v Ω, zvezna v $\overline{\Omega}$. Če funkcija u ni konstanta, ne more doseči maksimalne vrednosti v Ω ampak le na robu $\partial\Omega$.

Predpostavimo nasprotno, da funkcija u doseže maksimalno vrednost v notranji točki $\boldsymbol{x}_0$. Naj bo

$$M = \max_{\boldsymbol{x}\in\overline{\Omega}} u(\boldsymbol{x})$$

in $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ tak, da je $u(\boldsymbol{x}_0) = M$. Ker je $\boldsymbol{x}_0$ notranja točka, lahko okrog $\boldsymbol{x}_0$ očrtamo dovolj majhno kroglo K, ki leži vsa v Ω. Potem je zaradi (5.38)

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}_0) &= M = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2}\oint_{\partial K} u(\boldsymbol{x})\,dS \le \\ &\le \frac{M}{4\pi a^2}\oint_{\partial K} dS = \\ &= M, \end{aligned}$$

to pa je lahko res le, če je $u|_{\partial K} = M$. Isti sklep velja za vsako manjšo kroglo, torej je $u|_K = M$.

Če je sedaj $\boldsymbol{x}_1$ poljubna druga notranja točka, lahko točki $\boldsymbol{x}_0$ in $\boldsymbol{x}_1$ povežemo s tako krivuljo končne dolžine, recimo s poligonsko črto, da je razdalja od krivulje do roba pozitivna. Po tej krivulji posejemo krogle s konstantnim polmerom, ki je manjši od razdalje krivulje do roba območja. Izberemo točko na krivulji, kjer že vemo, da je u enaka M; okrog te točke očrtamo novo kroglo, in tako dalje. V vsaki krogli ima u konstantno vrednost M. Končno pridemo do točke $\boldsymbol{x}_1$, kjer je vrednost funkcije u spet enaka M. Tak sklep velja za vsako notranjo točko, zato je $\boldsymbol{x} \in \Omega \Longrightarrow u(\boldsymbol{x}) = M$. Ker je funkcija u zvezna v $\overline{\Omega}$, $\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega} \Longrightarrow u(\boldsymbol{x}) = M$.

(v) Če je funkcija u harmonična v Ω, zvezna v $\overline{\Omega}$, enaka nič na $\partial\Omega$, potem je $u = 0$ v $\overline{\Omega}$.

Res, minimalno in maksimalno vrednost doseže funkcija u na robu, tam pa je $u = 0$.

(vi) Če je funkcija u harmonična v Ω, zvezna v $\overline{\Omega}$, na $\partial\Omega$ pa pozitivna, potem je pozitivna tudi v notranjosti Ω.

Res, minimalno vrednost doseže funkcija u na robu, tam pa je $u > 0$.

(vii) Če sta funkciji u in v harmonični v Ω, zvezni v $\overline{\Omega}$ in se ujemata na $\partial\Omega$, potem se ujemata povsod v Ω.

Res, razlika je harmonična funkcija v Ω, zvezna na $\overline{\Omega}$, enaka nič na $\partial\Omega$, torej je enaka nič tudi v notranjosti.

(viii) Če sta funkciji u in v harmonični v Ω, zvezni v $\overline{\Omega}$, na robu pa velja $u < v$, potem velja to tudi v Ω.

(ix) Če sta funkciji u in v harmonični v Ω, zvezni v $\overline{\Omega}$, na robu pa velja $|u| < v$, potem velja to tudi v Ω.

5.6.4 Dirichletova naloga

Dirichletova[1] *naloga* sprašuje po harmonični funkciji, ki zavzame na robu predpisane vrednosti:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ u(\boldsymbol{x})|_{\partial\Omega} &= f(\boldsymbol{x}), \end{aligned}$$

kjer je f zvezna funkcija.

Izrek 5.2 *Dirichletova naloga ima kvečjemu eno rešitev.*

Dokaz. Če imamo dve rešitvi, je njuna razlika na robu enaka nič, potem pa je enaka nič tudi v notranjosti. ∎

Izrek 5.3 *Rešitev Dirichletove naloge je zvezno odvisna od robnih pogojev.*

Dokaz. Naj bo

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= 0 \quad \text{v} \quad \Omega, \\ u_1(\boldsymbol{x})|_{\partial\Omega} &= f_1(\boldsymbol{x}), \\ \Delta u_2 &= 0 \quad \text{v} \quad \Omega, \\ u_2(\boldsymbol{x})|_{\partial\Omega} &= f_2(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Če je na $\partial\Omega$ $|f_1(\boldsymbol{x}) - f_2(\boldsymbol{x})| < \varepsilon$, je v notranjosti

$$|u_1(\boldsymbol{x}) - u_2(\boldsymbol{x})| < \varepsilon,$$

saj je $v = u_1 - u_2$ harmonična funkcija. ∎

Eksistenco rešitve je mnogo težje dokazati. To bomo v tem poglavju storili le za kroglo.

[1] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) je bil nemški matematik.

5.6.5 Neumannova naloga

Neumannova naloga sprašuje po harmonični funkciji, ki ima na robu predpisan normalni odvod:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{v} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= f \quad \text{na} \quad \partial\Omega. \end{aligned}$$

Neumannova naloga v splošnem ni rešljiva, saj mora po enačbi (5.36) veljati

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} f\, dS &= \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Izrek 5.4 *Če je Neumannova naloga rešljiva, ni* enolično *rešljiva, saj lahko k rešitvi prištejemo poljubno konstanto. Rešljiva Neumannova naloga postane enolično rešljiva, če pristavimo še dodaten pogoj*

$$\int_\Omega u\, dV = 0. \tag{5.39}$$

Dokaz. Če sta funkciji u_1 in u_2 dve rešitvi Neumannove naloge, in je $v = u_1 - u_2$, za funkcijo v velja

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \quad \text{v} \quad \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial n} &= 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega, \\ \int_\Omega v\, dV &= 0. \end{aligned}$$

V prvo Greenovo formulo (5.31) postavimo $u = v = u_1 - u_2$:

$$\int_\Omega \left[(\operatorname{grad} v)^2 + v\Delta v\right] dV = \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial v}{\partial n}\, dS$$

ali

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\operatorname{grad} v)^2\, dV &= 0, \\ \operatorname{grad} v &= 0, \\ v &= \text{const.} \end{aligned}$$

Ker velja še $\int_\Omega v\, dV = 0$, sledi $v = 0$. ∎

5.6.6 Robinova naloga

Robinova naloga sprašuje po harmonični funkciji u, ki zadošča pogoju:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = f \quad \text{na} \quad \partial\Omega, \tag{5.40}$$

kjer je σ merljiva funkcija in

$$\sigma \geq 0 \quad \text{a.e.} \quad \text{na} \quad \partial\Omega, \qquad \oint_{\partial\Omega} \sigma \, dS > 0.$$

Izrek 5.5 *Robinova naloga ima kvečjemu eno rešitev.*

Dokaz. Če sta funkciji u_1 in u_2 dve rešitvi Robinove naloge, za funkcijo $v = u_1 - u_2$ velja, po prvi Greenovi formuli (5.31),

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\operatorname{grad} v)^2 \, dV &= \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial v}{\partial n} \, dS = \\ &= -\oint_{\partial\Omega} \sigma v^2 \, dS, \\ \int_\Omega (\operatorname{grad} v)^2 \, dV + \oint_{\partial\Omega} \sigma v^2 \, dS &= 0, \\ v &= 0. \end{aligned}$$

■

5.6.7 Greenova funkcija

Poiskati hočemo funkcijo $G : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, ki ima lastnost, da je

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) f(\boldsymbol{X}) \, dS_{\boldsymbol{X}}$$

rešitev Dirichletove naloge

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ u|_{\partial\Omega} &= f \end{aligned}$$

Če je funkcija u harmonična v Ω, zvezno odvedljiva v $\overline{\Omega}$, nam tretja Greenova formula (5.33) za $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ pove vrednost funkcije u v točki $\boldsymbol{x}_0$. Če je v še neka druga funkcija, harmonična v Ω, nam druga Greenova formula (5.32) pove

$$0 = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS. \tag{5.41}$$

razlika med tretjo Greenovo formulo (5.33) in (5.41) pa

$$u(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \left[\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|} - v \right) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|} - v \right) \right] dS. \tag{5.42}$$

Za krajše pisanje definirajmo

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|} - v(\boldsymbol{x}) \tag{5.43}$$

in enačbo (5.42) sedaj prepišemo v

$$u(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \left[G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)}{\partial n} \right] dS. \tag{5.44}$$

Funkcija v je pri tem še poljubna funkcija, harmonična v Ω in zvezno odvedljiva v $\overline{\Omega}$.

Definicija 5.5 *Predpostavimo, da lahko poiščemo tako harmonično funkcijo v, ki je na $\partial\Omega$ enaka*

$$v(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega} = \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|}.$$

Funkcijo G tedaj imenujemo Greenova funkcija *območja Ω.*

Izrek 5.6 *Greeenova funkcija G je povsod v Ω z izjemo točke $\boldsymbol{x}_0$ harmonična, na robu $\partial\Omega$ je enaka nič in*

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \, G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = 1. \tag{5.45}$$

Dokaz. Dokaz je direktna posledica definicij. ■

Ker je G na $\partial\Omega$ enaka nič, dobimo iz (5.44)

$$u(\boldsymbol{x}_0) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)}{\partial n} f(\boldsymbol{x}) \, dS. \tag{5.46}$$

Če Greenovo funkcijo poznamo, nam formula (5.46) reši Dirichletovo nalogo.

Izrek 5.7 *Greenova funkcija je simetrična funkcija svojih argumentov:*

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = G(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}).$$

Dokaz. V Ω izberimo poljubni točki $\boldsymbol{x}_0$ in $\boldsymbol{x}_1$ ter definirajmo

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}) &= G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) \\ v(\boldsymbol{x}) &= G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1) \end{aligned}$$

Iz Ω izrežimo kroglici K_0 okrog $\boldsymbol{x}_0$ in K_1 okrog $\boldsymbol{x}_1$. V nastalem območju sta funkciji u in v harmonični, zato nam druga Greenova formula (5.32) pove

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS - \\ &- \oint_{\partial K_0} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS - \oint_{\partial K_1} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS, \end{aligned}$$

kjer smo vzeli na ∂K_0 in ∂K_1 spet zunanjo normalo.

Prvi integral je nič, saj sta funkciji u in v enaki nič na $\partial\Omega$, za druga dva integrala pa po (5.44) velja

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial K_0}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS &= \oint_{\partial K_0}\left[G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)}{\partial n}\right]dS = \\
&= 4\pi v(\boldsymbol{x}_0), \\
\oint_{\partial K_1}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS &= -\oint_{\partial K_1}\left[G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1)\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1)}{\partial n}\right]dS = \\
&= -4\pi u(\boldsymbol{x}_1),
\end{aligned}$$

torej

$$\begin{aligned}
v(\boldsymbol{x}_0) &= u(\boldsymbol{x}_1), \\
G(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1) &= G(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_0).
\end{aligned}$$

■

5.6.8 Greenova funkcija za kroglo

Poiščimo Greenovo funkcijo za notranjost krogle K_R s polmerom R. Izberimo točko $\boldsymbol{x}_1$ zunaj krogle K_R. Funkcija w

$$w(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1|}$$

je potem v notranjosti krogle K_R harmonična. Če naj bo

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}-v(\boldsymbol{x})$$

Greenova funkcija za kroglo K_R, mora biti funkcija v harmonična v notranjosti krogle K_R in na robu ∂K_R

$$v(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}, \quad \boldsymbol{x}\in\partial K_R.$$

Poizkusimo z nastavkom

$$v(\boldsymbol{x}) = \alpha w(\boldsymbol{x}).$$

Pri $|\boldsymbol{X}|=R$ mora veljati

$$\frac{\alpha}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}_1|} = \frac{1}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}_0|}, \tag{5.47}$$

to je,

$$\begin{aligned}
\alpha^2(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}_0)^2 &= (\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}_1)^2, \\
\alpha^2\left(R^2-2\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{x}_0+r_0^2\right) &= R^2-2\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{x}_1+r_1^2,
\end{aligned}$$

kjer je

$$\begin{aligned} r_0 &= |\boldsymbol{x}_0|, \\ r_1 &= |\boldsymbol{x}_1|. \end{aligned}$$

Izberimo $\boldsymbol{x}_1$:

$$\boldsymbol{x}_1 = \lambda \boldsymbol{x}_0$$

in sledi

$$\alpha^2 \left(R^2 - 2\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{x}_0 + r_0^2\right) = R^2 - 2\lambda \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{x}_0 + \lambda^2 r_0^2.$$

Da bi to veljalo za vsak $\boldsymbol{x}$, kjer je $|\boldsymbol{x}| = R$, mora biti najprej

$$\lambda = \alpha^2,$$

potem pa preostane še pogoj

$$\lambda R^2 + \lambda r_0^2 = R^2 + \lambda^2 r_0^2.$$

Ta kvadratna enačba za λ nam dá dve rešitvi

$$\begin{aligned} \lambda &= 1, \\ \lambda &= \frac{R^2}{r_0^2}. \end{aligned}$$

Rešitev $\lambda = 1$ ni zanimiva, ker nam dá

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0$$

in bi veljalo $\boldsymbol{x}_1 \in K_R$, druga rešitev pa nam dá

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= \frac{R^2}{r_0^2} \boldsymbol{x}_0, \qquad (5.48) \\ r_0 r_1 &= R^2. \end{aligned}$$

Preslikavi $\boldsymbol{x_0} \mapsto \boldsymbol{x_1}$ po formuli (5.48) pravimo *inverzija na kroglo*. Točko $\boldsymbol{x}_1$ dobimo torej z inverzijo točke $\boldsymbol{x}_0$ na krogli K_R.

Dalje velja

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\lambda} = \\ &= \frac{R}{r_0}, \\ v(\boldsymbol{x}) &= \frac{R}{r_0} \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1|} \end{aligned}$$

in končno

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|} - \frac{R}{r_0} \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1|}. \qquad (5.49)$$

Izračunajmo $\frac{\partial G}{\partial n}$! Najprej je

$$\operatorname{grad} G = -\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^3} + \frac{R}{r_0}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1|^3}.$$

Na ∂K_R je $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}$ in

$$\operatorname{grad} G|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}} = -\frac{\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}_0|^3} + \frac{R}{r_0}\frac{\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}_1}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}_1|^3}.$$

Upoštevamo (5.47) in je

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}_1|} &= \frac{1}{\alpha}\frac{1}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}_0|} = \\ &= \frac{r_0}{R}\frac{1}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}_0|}\end{aligned}$$

in sledi

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} G|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}} &= -\frac{1}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}_0|^3}\left[\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}_0-\frac{r_0^2}{R^2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}_1)\right] = \\ &= -\frac{1}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}_0|^3}\left[\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}_0-\frac{r_0^2}{R^2}\left(\boldsymbol{X}-\frac{R^2}{r_0^2}\boldsymbol{x}_0\right)\right] = \\ &= -\frac{R^2-r_0^2}{R^2}\frac{\boldsymbol{X}}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}_0|^3}.\end{aligned}$$

Velja še

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{X}}{R}$$

in če namesto $\boldsymbol{x}_0$ pišemo $\boldsymbol{x}$, sledi

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{R^2-r^2}{R}\frac{1}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}|^3}$$

in *Poissonova formula*

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi R}\oint_{\partial K_R} u(\boldsymbol{X})\frac{R^2-r^2}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}|^3}\,dS_{\boldsymbol{X}}. \tag{5.50}$$

Izrek 5.8 *Če je funkcija f zvezna na sferi ∂K_R, nam dá Poissonova formula rešitev Dirichletove naloge*

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0,\\ u|_{\partial K_R} &= f.\end{aligned}$$

Dokaz. Pišemo lahko

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi R} \oint_{\partial K_R} P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) f(\boldsymbol{X})\, dS_{\boldsymbol{X}} \tag{5.51}$$

kjer je

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) &= v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}), \\ v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) &= R^2 - r^2, \\ w(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) &= |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}|^{-3}. \end{aligned}$$

V notranjosti krogle K_R je P gladka funkcija $\boldsymbol{x}$, zato je

$$\Delta u = \frac{1}{4\pi R} \oint_{\partial K_R} \Delta P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) f(\boldsymbol{X})\, dS_{\boldsymbol{X}}.$$

Velja

$$\begin{aligned} \Delta P &= v \Delta w + 2 \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} w + w \Delta v, \\ \operatorname{grad} v &= -2\boldsymbol{x}, \\ \Delta v &= -6, \\ \operatorname{grad} w &= -3 |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}|^{-5} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}), \\ \Delta w &= -3 \operatorname{grad} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}|^{-5} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}) - 3 |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}|^{-5} \operatorname{div} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}) = \\ &= 15 |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}|^{-7} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X})^2 - 9 |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}|^{-5} = \\ &= 6 |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}|^{-5}. \end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned} \Delta P &= 6 |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}|^{-5} \left(R^2 - r^2\right) + 12 |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}|^{-5} \left(r^2 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{X}\right) - 6 |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}|^{-3} = \\ &= 6 |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}|^{-5} \left[R^2 - r^2 + 2r^2 - 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{X} - r^2 + 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{X} - R^2\right] = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Funkcija (5.51) je torej harmonična v K_R. Dokazati moramo še, da velja

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{X}} u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{X}).$$

Takole sklepamo: če je Dirichletova naloga rešljiva, Poissonova formula (5.51) velja. Dirichletova naloga pa je zagotovo rešljiva, če je $f(\boldsymbol{X}) = 1$, saj ima rešitev $u(\boldsymbol{x}) = 1$. Velja torej

$$1 = \frac{1}{4\pi R} \oint_{\partial K_R} P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X})\, dS_{\boldsymbol{X}}.$$

Izberimo $\boldsymbol{X}_0 \in \partial K_R$ in z odštevanjem dobimo

$$u(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{X}_0) = \frac{1}{4\pi R} \oint_{\partial K_R} P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \left[f(\boldsymbol{X}) - f(\boldsymbol{X}_0)\right] dS_{\boldsymbol{X}}.$$

Funkcija f je po predpostavki zvezna: za vsak $\varepsilon > 0$ lahko najdemo $\delta > 0$, da bo

$$|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(\boldsymbol{X}) - f(\boldsymbol{X}_0)| < \varepsilon.$$

Sfero ∂K_R razdelimo na dva dela

$$\begin{aligned} \partial_1 K_R &= \{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \in \partial K_R, |\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0| < \delta\}, \\ \partial_2 K_R &= \partial K_R \setminus \partial_1 K_R \end{aligned}$$

in je

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{X}_0) &= I_1 + I_2, \\ I_1 &= \frac{1}{4\pi R} \int_{\partial_1 K_R} P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \left[f(\boldsymbol{X}) - f(\boldsymbol{X}_0) \right] dS_{\boldsymbol{X}}, \\ I_2 &= \frac{1}{4\pi R} \int_{\partial_2 K_R} P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \left[f(\boldsymbol{X}) - f(\boldsymbol{X}_0) \right] dS_{\boldsymbol{X}}. \end{aligned}$$

Poissonovo jedro je pozitivno, zato je

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{4\pi R} \int_{\partial_1 K_R} P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \left| f(\boldsymbol{X}) - f(\boldsymbol{X}_0) \right| dS_{\boldsymbol{X}} < \\ &< \frac{\varepsilon}{4\pi R} \int_{\partial_1 K_R} P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \, dS_{\boldsymbol{X}} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4\pi R} \int_{\partial K_R} P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \, dS_{\boldsymbol{X}} = \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Za Integral I_2 ocenimo Poissonovo jedro. Ker študiramo slučaj $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{X}_0$, vzemimo, da velja

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{x}| &< \delta^4, \\ R^2 - r^2 &= (\boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{x}) \leq \\ &\leq |\boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{x}| \, |\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{x}| \leq \\ &\leq 2R \, |\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{x}| < \\ &< 2R\delta^4. \end{aligned}$$

Dalje, za $\boldsymbol{X} \in \partial_2 K_R$ je

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{X} - \boldsymbol{x}| &= |(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0) - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_0)| \geq \\ &\geq |\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0| - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_0| \geq \\ &\geq \delta - \delta^4 > \\ &> \frac{1}{2}\delta, \end{aligned}$$

če je δ dovolj majhen. Zato je

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) &< \frac{2R\delta^4}{\left(\frac{1}{2}\delta\right)^3} = \\ &= 16R\delta. \end{aligned}$$

Ker je funkcija f zvezna, je na ∂K_R omejena

$$|f(\boldsymbol{X})| \leq M$$

in

$$\begin{aligned} |I_2| &< \frac{16R\delta}{4\pi R}\int_{\partial_2 K_R} |f(\boldsymbol{X}) - f(\boldsymbol{X}_0)|\, dS_{\boldsymbol{X}} < \\ &< \frac{32\delta M}{4\pi}\int_{\partial_2 K_R} dS_{\boldsymbol{X}} \leq \\ &\leq 32MR^2\delta. \end{aligned}$$

Če vzamemo dovolj majhen δ, bo

$$|I_2| < \varepsilon,$$

torej

$$|u(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{X}_0)| < 2\varepsilon.$$

■

5.6.9 Kelvinova transformacija

Kelvinova transformacija nam pove, kaj moramo zahtevati od funkcije, ki je harmonična na komplementu kompaktne množice.

Izrek 5.9 (Kelvin) *Naj bo $u = u(\boldsymbol{x})$ v nekem območju $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ki ne vsebuje točke $\boldsymbol{x} = 0$, harmonična funkcija. Funkcija v,*

$$v(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^{2-n} u\left(|\boldsymbol{x}|^{-2}\boldsymbol{x}\right)$$

je harmonična v $\Omega' = \left\{\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{x}|^{-2}\boldsymbol{x} \in \Omega\right\}$.

Dokaz. Označimo

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{x}) &= |\boldsymbol{x}|^{2-n}, \\ q(\boldsymbol{x}) &= u\left(|\boldsymbol{x}|^{-2}\boldsymbol{x}\right), \end{aligned}$$

torej

$$v(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{x}).$$

Sledi

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} v &= p \operatorname{grad} q + q \operatorname{grad} p, \\ \Delta v &= p\Delta q + 2 \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad} q + q\Delta p. \end{aligned}$$

Označimo

$$\boldsymbol{\xi} = |\boldsymbol{x}|^{-2}\boldsymbol{x},$$

torej,

$$q(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{\xi}).$$

Sledi, spet uporabljamo sumacijski dogovor,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial x_i} &= \frac{\partial u}{\partial \xi_j}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}, \\
\frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_i} &= \frac{\partial u}{\partial \xi_j}\frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_j \partial \xi_k}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i},
\end{aligned}$$

pri tem pa je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\boldsymbol{x}|^{-2}x_j\right) = \\
&= |\boldsymbol{x}|^{-2}\delta_{ij} - 2|\boldsymbol{x}|^{-4}x_i x_j, \\
\frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x_i \partial x_i} &= -2|\boldsymbol{x}|^{-4}x_i\delta_{ij} + 8|\boldsymbol{x}|^{-6}x_i x_i x_j - 2|\boldsymbol{x}|^{-4}\delta_{ii}x_j - 2|\boldsymbol{x}|^{-4}x_i\delta_{ij} = \\
&= -2|\boldsymbol{x}|^{-4}x_j + 8|\boldsymbol{x}|^{-4}x_j - 2n|\boldsymbol{x}|^{-4}x_j - 2|\boldsymbol{x}|^{-4}x_j = \\
&= (4-2n)|\boldsymbol{x}|^{-4}x_j, \\
\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} &= \left(|\boldsymbol{x}|^{-2}\delta_{ij} - 2|\boldsymbol{x}|^{-4}x_i x_j\right)\left(|\boldsymbol{x}|^{-2}\delta_{ik} - 2|\boldsymbol{x}|^{-4}x_i x_k\right) = \\
&= |\boldsymbol{x}|^{-4}\delta_{ij}\delta_{ik} - 2|\boldsymbol{x}|^{-6}x_i x_j\delta_{ik} - 2|\boldsymbol{x}|^{-6}x_i x_k\delta_{ij} + 4|\boldsymbol{x}|^{-8}x_i x_j x_i x_k = \\
&= |\boldsymbol{x}|^{-4}\delta_{jk},
\end{aligned}$$

torej

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial x_i} &= |\boldsymbol{x}|^{-2}\delta_{ij}\frac{\partial u}{\partial \xi_j} - 2|\boldsymbol{x}|^{-4}x_i x_j\frac{\partial u}{\partial \xi_j} = \\
&= |\boldsymbol{x}|^{-2}\frac{\partial u}{\partial \xi_i} - 2|\boldsymbol{x}|^{-4}x_i x_j\frac{\partial u}{\partial \xi_j}, \\
\frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_i} &= (4-2n)|\boldsymbol{x}|^{-4}x_j\frac{\partial u}{\partial \xi_j} + |\boldsymbol{x}|^{-4}\delta_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_j \partial \xi_k} = \\
&= (4-2n)|\boldsymbol{x}|^{-4}x_j\frac{\partial u}{\partial \xi_j} + |\boldsymbol{x}|^{-4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_j \partial \xi_j} = \\
&= (4-2n)|\boldsymbol{x}|^{-4}x_j\frac{\partial u}{\partial \xi_j},
\end{aligned}$$

ker je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_j \partial \xi_j} = 0.$$

Če označimo

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_n} \end{bmatrix},$$

sledi

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} q &= |\boldsymbol{x}|^{-2}\boldsymbol{A} - 2|\boldsymbol{x}|^{-4}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}, \\ \Delta q &= (4-2n)|\boldsymbol{x}|^{-4}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}. \end{aligned}$$

Upoštevajmo

$$\begin{aligned} p &= |\boldsymbol{x}|^{2-n}, \\ \operatorname{grad} p &= (2-n)|\boldsymbol{x}|^{-n}\boldsymbol{x}, \\ \Delta p &= 0 \end{aligned}$$

in sledi

$$\begin{aligned} \Delta v &= (4-2n)|\boldsymbol{x}|^{-2-n}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A} + \\ &+ 2(2-n)|\boldsymbol{x}|^{-n}\left[|\boldsymbol{x}|^{-2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} - 2|\boldsymbol{x}|^{-4}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}|^2\right] = \\ &= (4-2n)|\boldsymbol{x}|^{-2-n}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A} - 2(2-n)|\boldsymbol{x}|^{-2-n}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A} = \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Vzemimo sedaj funkcijo u, harmonično v okolici točke $\boldsymbol{x} = 0$. Po Kelvinovem izreku je funkcija

$$v(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^{2-n} u\left(|\boldsymbol{x}|^{-2}\boldsymbol{x}\right) \tag{5.52}$$

potem harmonična pri velikih $\boldsymbol{x}$. Sklep obrnemo v

Definicija 5.6 *Funkcija v je harmonična v okolici točke $\boldsymbol{x} = \infty$, če je funkcija u, definirana s (5.52), harmonična v okolici točke $\boldsymbol{x} = 0$.*

Če označimo spet

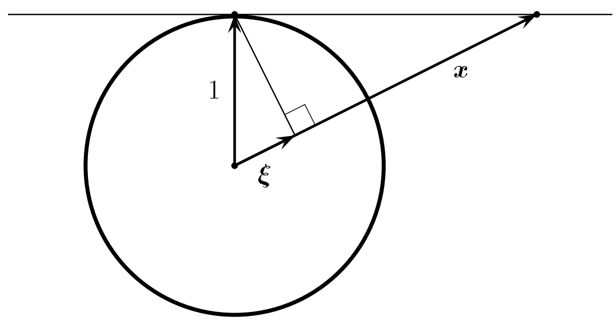
$$\boldsymbol{\xi} = |\boldsymbol{x}|^{-2}\boldsymbol{x},$$

sledi

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\xi}| &= \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}, \\ \boldsymbol{x} &= |\boldsymbol{x}|^2\boldsymbol{\xi} = \\ &= |\boldsymbol{\xi}|^{-2}\boldsymbol{\xi}, \\ u(\boldsymbol{\xi}) &= |\boldsymbol{x}|^{-2+n}v(\boldsymbol{x}) = \\ &= |\boldsymbol{\xi}|^{2-n}v(|\boldsymbol{\xi}|^{-2}\boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

Geometrijski pomen Kelvinove transformacije nam pove Evklidov izrek, glej sliko 5.3,

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\xi}| : 1 &= 1 : |\boldsymbol{x}|, \\ |\boldsymbol{\xi}||\boldsymbol{x}| &= 1. \end{aligned}$$



Slika 5.3: Kelvinova transformacija

Kelvinov izrek pove, kako se obnaša harmonična funkcija v neskončnosti. Vzemimo najprej primer $n = 3$. Če je u harmoničma funkcija pri $\boldsymbol{x} = \infty$, je

$$v(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} u \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2} \boldsymbol{x} \right)$$

harmonična funkcija pri $\boldsymbol{x} = 0$. Sledi

$$u(\boldsymbol{\xi}) = |\boldsymbol{x}| v(\boldsymbol{x})$$

ali

$$|\boldsymbol{\xi}| u(\boldsymbol{\xi}) = v(\boldsymbol{x})$$

Ker je harmonična funkcija omejena, obstaja konstanta M, da je $|v(\boldsymbol{x})| \leq M$ pri $|\boldsymbol{x}| \leq \delta$. To pomeni, da je omejena tudi funkcija

$$|\boldsymbol{\xi}| u(\boldsymbol{\xi})$$

ali

$$|u(\boldsymbol{\xi})| \leq \frac{M}{|\boldsymbol{\xi}|}, \quad |\boldsymbol{\xi}| \longrightarrow \infty. \tag{5.53}$$

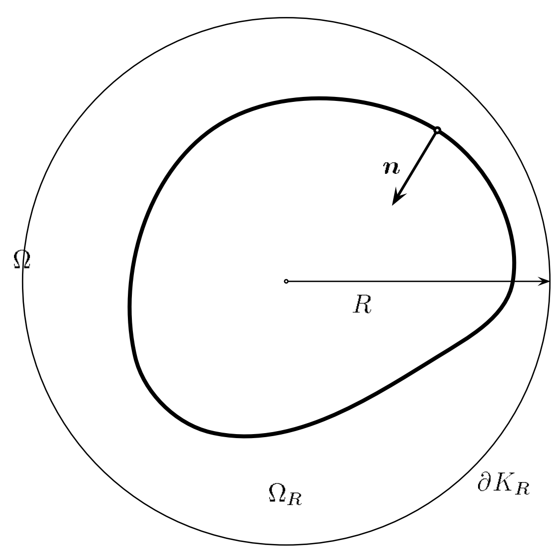
Če torej rešujemo Dirichletovo nalogo za zunanjost kompaktne množice v $\mathbb{R}^3$, moramo pristaviti pogoj (5.53).

Izrek 5.10 *Če k Dirichletovi nalogi za zunanjost take kompaktne množice v $\mathbb{R}^3$, da je komplement povezan, dodamo pogoj (5.53), ima Dirichletova naloga kvečjemu eno rešitev.*

Dokaz. Če sta u_1 in u_2 dve rešitvi Dirichletove naloge za zunanjost kompaktne množice v $\mathbb{R}^3$ s povezanim komplementom, za razliko $v = u_1 - u_2$ velja

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0, \\ v|_{\partial\Omega} &= 0, \\ |v| &\leq \frac{2M}{|\boldsymbol{x}|}, \quad |\boldsymbol{x}| \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Naj bo K_R krogla s tako velikim polmerom R, da vsebuje $\partial\Omega$ in naj bo $\Omega_R \subset \Omega$ območje med sfero ∂K_R in med $\partial\Omega$, glej sliko 5.4.



Slika 5.4: Enoličnost zunanje Dirichletove naloge

Tedaj velja

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_R} (\operatorname{grad} v)^2\, dV &= \int_{\Omega_R} [\operatorname{div}(v \operatorname{grad} v) - v\Delta v]\, dV = \\
&= \int_{\Omega_R} \operatorname{div}(v \operatorname{grad} v)\, dV = \\
&= \oint_{\partial\Omega_R} v\frac{\partial v}{\partial n}\, dS = \\
&= \oint_{\partial\Omega} v\frac{\partial v}{\partial n}\, dS + \oint_{\partial K_R} v\frac{\partial v}{\partial n}\, dS = \\
&= \oint_{\partial K_R} v\frac{\partial v}{\partial n}\, dS \leq \\
&= \oint_{\partial K_R} |v| \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right| dS \leq \\
&= \frac{M}{R}\frac{M}{R^2} \oint_{\partial K_R} dS = \\
&= \frac{4\pi M^2}{R}
\end{aligned}
$$

in je

$$
\lim_{R\longrightarrow\infty} \int_{\Omega_R} (\operatorname{grad} v)^2\, dV = 0.
$$

Sledi $\operatorname{grad} v = 0 \Longrightarrow v = \text{const}$. Ker je $v|_{\partial\Omega} = 0$, je $v = 0$. ■

Pri $n = 2$ so razmere drugačne. Kelvinov izrek pove, da mora biti funkcija

$$
v(\boldsymbol{x}) = u\left(|\boldsymbol{x}|^{-2}\boldsymbol{x}\right)
$$

harmonična pri $\boldsymbol{x} = 0$, zato je funkcija u pri $|\boldsymbol{x}| = \infty$ le omejena. Enoličnost rešitve Dirichletove naloge dokažemo na enak način.

5.7 Valovna enačba

Valovno enačbo

$$
\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + f(\boldsymbol{x}, t)
$$

pravtako srečamo zelo pogosto v uporabni matematiki.

5.7.1 Valovna enačba na premici

Oglejmo si najprej homogeno valovno enačbo na premici, to je nalogo

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.
$$

Vemo, da substitucija

$$\begin{aligned} \xi &= x - ct, \\ \eta &= x + ct \end{aligned}$$

prevede valovno enačbo v obliko

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Ta enačba ima splošno rešitev

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \Phi(\xi) + \Psi(\eta) = \\ &= \Phi(x - ct) + \Psi(x + ct), \end{aligned}$$

kjer sta Φ in Ψ poljubni funkciji.

K valovni enačbi moramo predpisati še začetne in morda robne pogoje. V začetku robnih pogojev ne bo, ker bomo reševali enačbo za celo realno os, $x \in \mathbb{R}$. Začetne pogoje pa vsekakor potrebujemo in sicer dva, ker je enačba v spremeljivki t drugega reda. Denimo, da imamo predpisano

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ u_t(x,0) &= g(x). \end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned} \Phi(x) + \Psi(x) &= f(x) \\ -c\Phi'(x) + c\Psi'(x) &= g(x). \end{aligned}$$

Iz druge enačbe sledi

$$-\Phi(x) + \Psi(x) = \frac{1}{c}\int_a^x g(\xi)\, d\xi + 2C,$$

kjer sta a in C konstanti. Zato je

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_a^x g(\xi)\, d\xi - C, \\ \Psi(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_a^x g(\xi)\, d\xi + C, \end{aligned}$$

ali

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi. \tag{5.54}$$

To je *d'Alembertova rešitev* za neskončno struno. Člen $\Phi(x - ct)$ predstavlja val, ki beži v $+\infty$, člen $\Psi(x + ct)$ pa val, ki beži v $-\infty$. Oba vala imata *ostro čelo* in se širita s hitrostjo c.

Denimo, da imata funkciji f in g kompaktna nosilca:

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}(f) &\subset [-a, a], \\ \operatorname{supp}(g) &\subset [-a, a]. \end{aligned}$$

Pri $t > \frac{|x|+a}{c}$ je

$$\begin{aligned} x - ct &< x - (|x| + a) \leq -a, \\ x + ct &> x + (|x| + a) \geq a \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} f(x+ct) &= 0, \\ f(x-ct) &= 0, \\ u(x,t) &= \frac{1}{2c} \int_{-a}^{a} g(\xi)\, d\xi = \text{const.} \end{aligned}$$

Rešitev ima torej tudi *oster zadek*.

5.7.2 Valovna enačba v prostoru

Oglejmo si nalogo

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad t > 0, \tag{5.55}$$

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = f(\boldsymbol{x}), \tag{5.56}$$

$$u_t(\boldsymbol{x}, 0) = g(\boldsymbol{x}). \tag{5.57}$$

Izberimo točko $\boldsymbol{x}_0$, očrtajmo kroglo K_r s polmerom r okrog nje, in izračunajmo povprečno vrednost $v(r,t)$ na sferi ∂K_r ob času t:

$$v(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{\partial K_r} u\, dS = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial K_r} u\, dV, \tag{5.58}$$

kjer je dV prostorski kot, pod katerim vidimo $dS = r^2\, dV$. Predpostavimo, da je funkcija u zvezna. Tedaj je

$$v(0,t) = u(\boldsymbol{x}_0, t). \tag{5.59}$$

Integrirajmo enačbo (5.55) po krogli K_r!

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{K_r} u\, dV &= \int_{K_r} \Delta u\, dV = \\ &= \oint_{\partial K_r} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS, \end{aligned}$$

ali

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^r \rho^2 \left(\oint_{\partial K_\rho} u\,dV\right) d\rho \quad = \quad r^2 \frac{\partial}{\partial r}\oint_{\partial K_r} u\,dV,$$

ker je integral po prostorskem kotu neodvisen od polmera sfere, in končno

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^r \rho^2 v(\rho,t)\,d\rho \quad = \quad r^2\frac{\partial}{\partial r}v(r,t).$$

To enačbo še odvajamo na r in dobimo

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(r^2 v\right) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

ali

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right) \quad = \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Pišimo

$$w(r,t) := rv(r,t),$$

ali

$$v(r,t) = \frac{w(r,t)}{r},$$

in sledi

$$\begin{aligned}
r^2\frac{\partial v}{\partial r} &= r\frac{\partial w}{\partial r} - w,\\
\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r} - w\right) =\\
&= r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial r}
\end{aligned}$$

in

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad = \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Vemo, da je splošna rešitev poslednje enačbe enaka

$$\begin{aligned}
w(r,t) &= rv(r,t) =\\
&= \Phi(r-ct) + \Psi(r+ct),
\end{aligned}$$

kjer sta Φ in Ψ poljubni funkciji. Po predpostavki o zveznosti je funkcija u omejena, zato je omejena tudi funkcija v in pri $r = 0$ dobimo

$$\begin{aligned}
0 &= \Phi(-ct) + \Psi(ct) \Longrightarrow\\
\Phi(\xi) &= -\Psi(-\xi),
\end{aligned}$$

torej

$$
\begin{aligned}
rv(r,t) &= \Psi(r+ct)-\Psi(ct-r), &(5.60)\\
v(r,t) &= \frac{1}{r}\left[\Psi(ct+r)-\Psi(ct-r)\right]. &(5.61)
\end{aligned}
$$

Funkcijo Ψ moramo določiti iz začetnih pogojev. Enačbo (5.60) odvajamo na r in ct:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}(rv) &= \Psi'(ct+r)+\Psi'(ct-r), &(5.62)\\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(rv) &= \Psi'(ct+r)-\Psi'(ct-r). &(5.63)
\end{aligned}
$$

Od tod sledi

$$
\frac{\partial}{\partial r}(rv)+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(rv) = 2\Psi'(ct+r). \tag{5.64}
$$

V enačbo (5.61) postavimo $r=0$ in dobimo, po l'Hospitalovem pravilu,

$$
v(0,t) = 2\Psi'(ct),
$$

v enačbo (5.64) pa $t=0$

$$
2\Psi'(r) = \left[\frac{\partial}{\partial r}(rv)+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(rv)\right]_{t=0}
$$

in dobimo

$$
v(0,t) = \left[\frac{\partial}{\partial r}(rv)+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(rv)\right]_{t=0,r=ct}. \tag{5.65}
$$

Naj bo $K=K(\boldsymbol{x},ct)$ krogla s središčem $\boldsymbol{x}$ in polmerom ct. Upoštevamo (5.59), pišemo $\boldsymbol{x}$ namesto $\boldsymbol{x}_0$, in dobimo

$$
\begin{aligned}
u(\boldsymbol{x},t) &= \left[\frac{\partial}{\partial r}(rv)+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(rv)\right]_{t=0,r=ct} =\\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\oint_{\partial K} ru\,dV+\frac{1}{c}\oint_{\partial K} r\frac{\partial u}{\partial t}\,dV\right]_{t=0,r=ct} =\\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\oint_{\partial K} rf(\boldsymbol{X})\,dV+\frac{1}{c}\oint_{\partial K} rg(\boldsymbol{X})\,dV\right]_{r=ct}.
\end{aligned}
$$

To formulo lahko zapišemo v več zanimivih oblikah. Če upoštevamo, da je $dS = r^2\,dV$, $r=|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}|=ct$, sledi

$$
u(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi c}\left[\frac{\partial}{\partial t}\oint_{\partial K}\frac{f(\boldsymbol{X})}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}|}\,dS_{\boldsymbol{X}}+\oint_{\partial K}\frac{g(\boldsymbol{X})}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}|}\,dS_{\boldsymbol{X}}\right], \tag{5.66}
$$

ali pa

$$
u(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}t\oint_{\partial K} f(\boldsymbol{X})\,dV+t\oint_{\partial K} g(\boldsymbol{X})\,dV\right], \tag{5.67}
$$

če pa pišemo $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} + ct\boldsymbol{\xi}$, $|\boldsymbol{\xi}| = 1$, dobimo *Poissonovo formulo*

$$u(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[t\oint_{|\boldsymbol{\xi}|=1} f(\boldsymbol{x}+ct\boldsymbol{\xi})\,dS\right] + \frac{t}{4\pi}\oint_{|\boldsymbol{\xi}|=1} g(\boldsymbol{x}+ct\boldsymbol{\xi})\,dS \tag{5.68}$$

Poissonova formula nam izda *Huygensovo*[2] *načelo*: na vrednost v točki $\boldsymbol{x}$ vplivajo samo tiste vrednosti začetnih pogojev, ki so od $\boldsymbol{x}$ oddaljene natanko za ct.

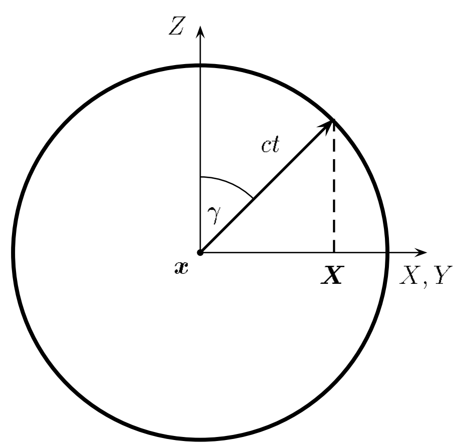
Naj bodo začetni pogoji lokalizirani: funkciji f in g naj imata kompaktna nosilca, njuna unija naj bo S, in

$$\begin{aligned} a &= \min_{\boldsymbol{X}\in S} |\boldsymbol{X} - \boldsymbol{x}|, \\ A &= \max_{\boldsymbol{X}\in S} |\boldsymbol{X} - \boldsymbol{x}|. \end{aligned}$$

Pri $t < \frac{a}{c}$ sta f in g v (5.68) enaki 0, zato funkcija u tudi. Ob času $t = \frac{a}{c}$ se približa čelo vala – *čelo vala* je ostro. Pri $t > \frac{A}{c}$ sta f in g spet enaki 0, funkcija u tudi, *zadek vala* je spet oster.

5.7.3 Valovna enačba v ravnini

Do *Poissonove formule za ravninsko polje* pridemo tako, da vzamemo, da so funkcije f, g in u neodvisne od koordinate z, integriranje pa prevedemo na integriranje po krogu, *ne po krožnici*. Velja, glej sliko 5.5,



Slika 5.5: Integriranje po sferi

[2] Christian Huygens (1629-1695) je bil nizozemski fizik.

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dX\,dY}{\cos\gamma}, \\ ct\cos\gamma &= \sqrt{c^2t^2 - |\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}|^2}, \\ \boldsymbol{X} &\in K_0 = \{(X,Y), \quad (X-x)^2 + (Y-y)^2 < c^2t^2\} \end{aligned} \tag{5.69}$$

V enačbi (5.67) pišemo

$$dV = \frac{dS}{c^2t^2}$$

in dobimo

$$u(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi c}\left[\frac{\partial}{\partial t}\oint_{\partial K} f(\boldsymbol{X})\frac{dS}{ct} + \oint_{\partial K} g(\boldsymbol{X})\frac{dS}{ct}\right].$$

Upoštevamo (5.69), da dobimo

$$\begin{aligned} \frac{dS}{ct} &= \frac{dX\,dY}{ct\cos\gamma} = \\ &= \frac{dX\,dY}{\sqrt{c^2t^2-(X-x)^2-(Y-y)^2}} \end{aligned}$$

in da integriramo po dveh polkroglah – od tu faktor 2 –

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x},t) &= \frac{1}{2\pi c}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_{K_0}\frac{f(X,Y)\,dX\,dY}{\sqrt{c^2t^2-(X-x)^2-(Y-y)^2}} + \right. \\ &+ \left.\int_{K_0}\frac{g(X,Y)\,dX\,dY}{\sqrt{c^2t^2-(X-x)^2-(Y-y)^2}}\right]. \end{aligned} \tag{5.70}$$

Kako se obnaša ta rešitev? Če je a razdalja do nosilca f in g, pri $t < \frac{a}{c}$ celja $u = 0$, pojav ima *ostro čelo*. Ko pa je $t > \frac{A}{c}$, integriramo le po nosilcu funkcij f in g, spreminja se samo imenovalec. Rešitev ni enaka 0, pač pa teži k 0 kot $\frac{1}{t}$. Pojav *izzvanja*.

5.7.4 Valovna enačba na premici

Naj bosta funkciji f in g še neodvisni od Y. Tedaj lahko enačbo (5.70) integriramo po Y:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi c}\int_{K_0}\frac{f(X)\,dX\,dY}{\sqrt{c^2t^2-(X-x)^2-(Y-y)^2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi c}\int_{x-ct}^{x+ct} f(X)\,dX\int_{y-\sqrt{c^2t^2-(X-x)^2}}^{y+\sqrt{c^2t^2-(X-x)^2}}\frac{dY}{\sqrt{c^2t^2-(X-x)^2-(Y-y)^2}}. \end{aligned}$$

V notranjem integralu namesto spremenljivke Y uvedemo spremenljivko ξ po formuli

$$Y = y + \sqrt{c^2t^2-(X-x)^2}\sin\xi$$

in dobimo

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi c}\int_{K_0}\frac{f(X)\,dX\,dY}{\sqrt{c^2t^2-(X-x)^2-(Y-y)^2}} = \\
&= \frac{1}{2\pi c}\int_{x-ct}^{x+ct} f(X)\,dX\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} d\xi = \\
&= \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} f(X)\,dX.
\end{aligned}
$$

Isti račun velja za funkcijo g. Dobimo

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2c}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-ct}^{x+ct} f(X)\,dX + \int_{x-ct}^{x+ct} g(X)\,dX\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[f(x-ct)+f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(X)\,dX,
\end{aligned}
$$

torej spet d'Alembertova formula. Pojav ima ostro čelo zadka pa ne, vendar niti ne *izzvanja*.

5.8 Difuzijska enačba

Difuzijsko enačbo (3.31) smo že videli. Mi si bomo ogledali enodimenzionalen primer

$$
\begin{aligned}
u &= u(x,t), \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad x\in\mathbb{R}, \quad t>0 \qquad (5.71)
\end{aligned}
$$

pri začetnem pogoju

$$
u(x,0) = f(x), \qquad f\in L^2(\mathbb{R}). \qquad (5.72)
$$

Začnimo s Fourierjem:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= X(x)T(t), \\
\frac{X''}{X} &= \frac{T'}{a^2T} = \\
&= -\lambda := -4\pi^2y^2 = \\
&= \text{const.}
\end{aligned}
$$

Sledi

$$
\begin{aligned}
X(x) &= A(y)e^{2\pi ixy}, \quad y\in\mathbb{R}, \\
T(t) &= e^{-4\pi^2a^2y^2t}.
\end{aligned}
$$

Robnih pogojev, ki bi omejevali y, ni, zato dobimo družino rešitev

$$
u_y(x,t) = F(y)e^{2\pi ixy}e^{-4\pi^2a^2y^2t}, \quad y\in\mathbb{R}.
$$

Če je funkcija F dovolj pohlevna, bo tudi

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi i x y} e^{-a^2 y^2 t}\, dy$$

rešitev. Funkcijo F je zato treba določiti tako, da bo

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi i x y}\, dy. \end{aligned}$$

Funkcija F je torej Fourierjeva transformiranka funkcije f, zato je

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-2\pi i y \xi}\, d\xi.$$

Po Fubinijevem izreku sledi

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 a^2 y^2 t} e^{2\pi i x y} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-2\pi i y \xi}\, d\xi \right) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 a^2 y^2 t} e^{2\pi i y (x-\xi)}\, dy \right) d\xi \end{aligned}$$

ali

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi, t) f(\xi)\, d\xi, \qquad (5.73)$$

kjer je

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 a^2 y^2 t + 2\pi i x y}\, dy = \\ &= 2\int_{0}^{\infty} e^{-4\pi^2 a^2 y^2 t} \cos 2\pi x y\, dy. \end{aligned}$$

Poslednji integral znamo izračunati. Pišimo

$$\begin{aligned} 4\pi^2 a^2 y^2 t &= \xi^2, \\ y &= \frac{\xi}{2\pi a \sqrt{t}}, \\ dy &= \frac{d\xi}{2\pi a \sqrt{t}} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} xy &= \frac{x\xi}{2\pi a \sqrt{t}} = \\ &= \beta \xi, \\ \beta &= \frac{x}{2\pi a \sqrt{t}}, \end{aligned}$$

da dobimo

$$G(x,t) = \frac{1}{\pi a\sqrt{t}} I\left(\frac{x}{a\sqrt{t}}\right), \tag{5.74}$$

$$I(\beta) = \int_0^\infty e^{-\xi^2} \cos\beta\xi \, d\xi. \tag{5.75}$$

Dokažimo, da je

$$I(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{-\beta^2}{4}}. \tag{5.76}$$

Res, odvajanje integrala po parametru nam dá

$$\begin{aligned} I'(\beta) &= -\int_0^\infty e^{-\xi^2}\xi \sin\beta\xi \, d\xi = \qquad \text{(per partes)} \\ &= \frac{1}{2}\, e^{-\xi^2} \sin\beta\xi\Big|_{\xi=0}^{\infty} - \frac{\beta}{2}\int_0^\infty e^{-\xi^2}\cos\beta\xi\, d\xi = \\ &= -\frac{\beta}{2} I(\beta), \end{aligned}$$

zato je

$$I(\beta) = I(0) e^{\frac{-\beta^2}{4}}.$$

Dalje,

$$\begin{aligned} I(0) &= \int_0^\infty e^{-\xi^2}\, d\xi = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

s čimer je enačba (5.76) dokazana.

Iz (5.74), (5.75) in (5.76) sedaj sledi

$$G(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \tag{5.77}$$

in enačba (5.73) nam da rešitev difuzijske enačbe (5.71).

Funkcija (5.77) se imenuje *osnovna rešitev* difuzijske enačbe (5.77) in že sama zase reši enačbo, če je $t > 0$. Pri $t = 0$ seveda ni definirana.

Pri $x \neq 0$ je

$$\lim_{t\to 0} G(x,t) = 0.$$

Pri $x = 0$ ta limita ne obstaja, velja

$$\lim_{t\to 0} G(0,t) = +\infty.$$

Izračunajmo energijo Q, ki jo nosi palica, segreta na temperaturo $G(x,t)$:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x,t)\,dx = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\,dx. \end{aligned}$$

Uvedemo integracijsko spremenljivko ξ

$$x = 2a\xi\sqrt{t}$$

in dobimo

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi = \\ &= 1. \end{aligned}$$

$G(x,t)$ je torej temperatura palice, kjer točkast izvor v točki $x=0$ v trenutku $t=0$ izbruha energijo 1. Ta toplota se v trenutku razleze po celi palici.

5.9 Naloge

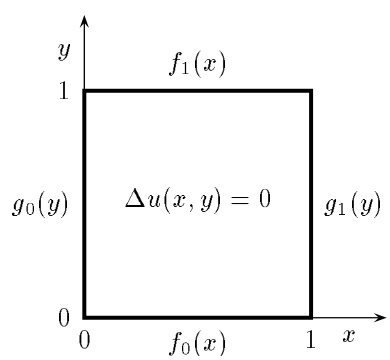
5.1 (Pisni izpit Analiza IV, september 1997) Poišči rešitev Dirichletove naloge

$$\Delta u(x,y) = 0$$

v notranjosti kvadrata $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$, če funkcija u zadošča robnim pogojem

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_0(x), \\ u(x,1) &= f_1(x), \\ u(0,y) &= g_0(y), \\ u(1,y) &= g_1(y), \end{aligned}$$

kjer so f_0, f_1, g_0, g_1 dane dovolj gladke funkcije. Rešitev zapiši kar se da daleč, ne da bi predpisal te funkcije. Glej sliko.


y
$f_1(x)$
1
$g_0(y)$
$\Delta u(x,y)=0$
$g_1(y)$
0
0
$f_0(x)$
1
x

Literatura

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions.* Dover Publications, Inc., New York, 1972.

[2] R. Courant, D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics.* Volume 2. Interscience Publishers, John Wiley, New York, 1962.

[3] Philip J. Davis. *Interpolation and Approximation.* Dover Publication Inc., New York, 1975.

[4] L. C. Evans. *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics, Volume 19. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.

[5] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics.* Addison-Wesley Publishing Company. Reading, Massachusets, 1989.

[6] B. Friedman. *Lectures on Applications-Oriented Mathematics.* Wiley Classic Library, John Wiley & Sons. New York 1991.

[7] P. Henrici. *Applied and Computational Complex Analysis.* Wiley Classic Library, John Wiley & Sons. New York, 1988.

[8] L. V. Kantorovich, G. P. Akilov. *Functional Analysis, Second Edition.* Pergamon Press, Oxford, 1982.

[9] W. Kaplan. *Advanced Calculus, Fourth Edition.* Addisson-Wesley Publishing Company, Redwood City, California, 1991.

[10] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin. *Introductory Real Analysis.* Dover Publications Inc., New York, 1975.

[11] F. Križanič. *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun.* Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1974.

[12] F. Križanič. *Linearna algebra in linearna analiza.* Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1993.

[13] L. D. Landau, E. M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields.* Course of Theoretical Physics, Volume 2. Pergamon Press, Oxford, 1975.

[14] L. D. Landau, E. M. Lifshitz. *Theory of Elasticity.* Course of Theoretical Physics, Volume 7. Pergamon Press, Oxford, 1986.

[15] A. Messiah. *Quantum mechanics.* Volume 1. A North-Holland Publishing Company – Amsterdam, John Wiley, New York, 1958.

[16] Ph. M. Morse, H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics.* McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.

[17] A. Suhadolc. *Robni problemi za linearne diferencialne enačbe drugega reda.* DMFA, Ljubljana, 1993.

[18] G. Strang, G. J. Fix. *An Analysis of the Finite Element Method.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1973.

[19] E. C. Titchmarsh. *Introduction to the Theory of Fourier Integrals.* Third Edition, Chelsea Publishing Company, New York, NY, 1986.

[20] C. Truesdell. *A First Course in Rational Continuum Mechanics.* Volume 1, General Concepts. Academic Press, New York, 1977.

[21] J. Vrabec. *Metrični prostori.* DMFA, Ljubljana, 1993.

[22] G. N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions.* Cambridge University Press, Cambridge, 1944.

[23] E. T. Whittaker, G. N. Watson. *A Course of Modern Analysis, Fourth Edition.* Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

[24] E. Zakrajšek. *Analiza III.* DMFA, Ljubljana, 1998.

Stvarno kazalo