Pfaffova diferencialna enačba ter uporaba Fourierjeve in Laplaceove transformacije

Seminarska naloga pri predmetu Diferencialne enačbe

Jimmy Zakeršnik

5. 4. 2024

Kazalo

1 Uvod

Tekom študija diferencialnih enačb pogosto naletimo na posebne primere, ki od nas zahtevajo dodatno pozornost ali razvoj novega orodja in metod. Lahko se zgodi, da, kljub temu, da vemo, da rešitev obstaja, le te ne znamo eksplicitno izraziti z metodami, ki so nam na voljo. V teh situacijah pogosto posežemo po implicitnem podajanju rešitve. Prvi primer tega se skriva v iskanju prvega integrala dane linearne diferencialne enačbe prvega reda, izkaže pa se, da je to le poseben primer t. i. »Pfaffove diferencialne enačbe«. V drugih primerih nas lahko bolj zanima, da sploh najdemo kakšno rešitev, ki zadošča določenim pogojem, in na račun tega lahko uporabimo metode, ki nam v splošnem ne bi bile na voljo. Dva primera tega - uporabo Fourierjeve in Laplaceove transformacije - bosta obravnavana v tej seminarski nalogi, skupaj z obravnavo Pfaffovih diferencialnih enačb v dveh in treh spemenljivkah. Posebej, za motivacijo, navajamo naslednje probleme:

Primer 1: Najdi rešitev enačbe:
$(5x^3 + 2y^4 + 2y^2z + 2z^3)dx + (4xy^3 + 2xyz)dy + (xy^2 + 2xz)dz = 0$

Primer 2: Naj bo $c > 0$. Poišči rešitev valovne enačbe z eno prostorsko spremenljivko $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ na $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ pri začetnih pogojih:
$\forall x \in \mathbb{R} : u(x, 0) = f(x)$ & $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$. Pri tem predpostavi, da sta $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ in $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Primer 3: Denimo, da imamo navpično postavljeni žleb po katerem spustimo kroglico. Kakšne oblike mora biti žleb, da bo čas potovanja kroglice po njem do izbrane točke neodvisen od začetne točke, s katere smo kroglico spustili? Pri tem zanemarimo zračni upor in trenje.

Pri tem se bomo pri reševanju primera 1 zgledovali po [3], pri reševanju primera 3 pa po [2]. Primer 2 in njegova rešitev sta povzeta iz lastnih zapiskov.

2 Pfaffova diferencialna enačba

V tem poglavju si bomo ogledali t. i. Pfaffove diferencialne enačbe, posebej v primeru dveh in treh spremenljivk, ter nekatere metode reševanja. Pri tem se bomo v glavni meri naslanjali na vir [3], v manjši meri pa tudi na vir [1].

2.1 Osnovne definicije in rezultati

Poseben primer Pfaffove enačbe smo spoznali že pri reševanju navadnih linearnih diferencialnih enačb. Rešitev tega posebnega primera smo imenovali prvi integral enačbe. Preden definiramo splošno Pfaffovo enačbo, se spomnimo tega primera.

Definicija 1: Naj bo $y' = f(x, y)$ navadna linearna diferencialna enačba prvega reda. *Prvi integral* te diferencialne enačbe je funkcija $F(x, y)$, ki je konstantna vzdolž vsake rešitve.

Torej, če je F prvi integral enačbe $y' = f(x, y)$, za vsako njeno rešitev, $y = y(x)$ z definicijskim območjem D_y, obstaja $c \in \mathbb{R}$, da velja: $F(x, y(x)) = c \; \forall x \in D_y$. Ob predpostavki, da je F zvezno parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah in da je vsaj eden od teh parcialnih odvodov različen od 0, lahko iz enačbe $F(x, y) = c$ po izreku o implicitni funkciji na neki okolici izrazimo $y = y(x)$. Po dodatku k izreku o implicitni funkciji na prej omenjeni okolici velja: $y' = -\frac{F_x}{F_y}$, kjer sta $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$ in $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ parcialna odvoda po x in y. Ko upoštevamo zvezo $y' = \frac{dy}{dx}$ dobimo naslednjo enakost:

$$F_x dx + F_y dy = 0$$

Če dodatno vpeljemo oznaki $P = F_x$ in $Q = F_y$, enačba zavzame obliko $Pdx + Qdy = 0$. To je ravno Pfaffova enačba v dveh spremenljivkah. Če imamo podano Pfaffovo enačbo v dveh spremenljivkah $Pdx + Qdy = 0$, vemo že, da je iskanje rešitve ekvivalentno iskanju vektorskega polja F, za katerega velja: $\nabla F = (F_x, F_y) = (P, Q)$ in $< \nabla F, (dx, dy) >= 0$, kjer je $<, >$ standardni skalarni produkt. Če vpeljemo oznako $\vec{r} = (x, y)$, dobimo še krajši zapis:

$$< \nabla F, d\vec{r} >= 0$$

Definirajmo sedaj Pfaffovo diferencialno enačbo v večih spremenljivkah.

Definicija 2: Naj bodo $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zvezne funkcije neodvisnih spremenljivk $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Pfaffova diferencialna enačba* je enačba oblike

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_i = 0$$

.

Tudi tukaj vidimo, da lahko reševanje dane enačbe prevedemo na iskanje vektorskega polja F za katerega velja $grad(F) = \nabla F = [F_1, F_2, \ldots, F_n]^\top$ ter $< \nabla F, d\vec{r} >= 0$, kjer je $d\vec{r} = [dx_1, dx_2, \ldots, dx_n]^\top$. Vektorska oblika Pfaffove diferencialne enačbe se torej glasi $< \nabla F, d\vec{r} >= 0$. Naravna zahteva je seveda, da je F zvezno parcialno odvedljiv po vseh spremenljivkah. V nadaljevanju bomo za to uporabili krajši zapis - F je $\mathcal{C}^1$ funkcija.
Posebej, v primeru treh spremenljivk se Pfaffova diferencialna enačba glasi:

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0$$

Kadar obravnavamo Pfaffove diferencialne enačbe, nas tipično zanimajo rešitve oblike $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$, kjer je c neka poljubna, tipično realna, konstanta. V primeru treh spremenljivk, te rešitve tvorijo enoparametrično družino ploskev v prostoru ($\mathbb{R}^3$). Če je $R(x, y, z) \neq 0$ in iz enačbe $f(x, y, z) = c$ izrazimo $z = g(x, y)$ lahko preuredimo Pfaffovo diferencialno enačbo v treh spremenljivkah v obliko $dz = -\frac{P(x,y,z)}{R(x,y,z)}dx - \frac{Q(x,y,z)}{R(x,y,z)}dy$. Tako reševanje Pfaffove enačbe prevedemo na reševanje sistema parcialnih diferencialnih enačb prvega reda: $z_x = -\frac{P}{R}$ ter $z_y = -\frac{Q}{R}$. S tem se nam razkrije še ena uporabna vrednost reševanja Pfaffovih diferencialnih enačb v treh spremenljivkah.
Že iz iskanja prvega integrala vemo, da za nekatere funkcije P in Q, Pfaffova enačba $Pdx + Qdy = 0$ nima direktne rešitve. Potreben pogoj za obstoj direktne

rešitve (za točno to enačbo), torej funkcije u, da je $\nabla u = (P, Q)$, je, da velja $P_y = Q_x$. V primeru, ko to ne velja, tipično poiščemo t. i. integrirajoči množitelj $\mu(x, y)$, da velja: $(\mu \cdot P)_y = (\mu \cdot Q)_x$ in potem rešimo enačbo:

$$(\mu \cdot P)dx + (\mu \cdot Q)dy = 0$$

Rešitev te enačbe razglasimo za prvi integral originalne enačbe $Pdx + Qdy = 0$. Opišimo te lastnosti še za splošno Pfaffovo diferencialno enačbo.

Definicija 3: Naj bodo $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zvezne funkcije, ki določajo Pfaffovo diferencialno enačbo $\sum_{i=1}^{n} F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_i = 0$. Če obstaja taka funkcija $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{C}^1$, da za njen totalni diferencial du velja $du =< \nabla u, [dx_1, dx_2, \ldots, dx_n] >= \sum_{i=1}^{n} F_i dx_i$, potem pravimo, da je enačba *eksaktna*.

Definicija 4: Pravimo, da je Pfaffova diferencialna enačba $\sum_{i=1}^{n} F_i dx_i = 0$ *integrabilna*, če obstajata taki funkciji $\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{C}^1$ in $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{C}^1$, da je $< \nabla u, [dx_1, dx_2, \ldots, dx_n]^\top >= \sum_{i=1}^{n} (\mu F_i) dx_i$

To, da je enačba integrabilna, je ravno potreben in zadosten pogoj, da rešitev obstaja. V primeru dveh spremenljivk, je ta pogoj ekvivalenten pogoju $P_y = Q_x$, v primeru treh spremenljivk, pa temu, da velja

$$< [P, Q, R]^\top, rot([P, Q, R]^\top) >= 0$$

Če je enačba integrabilna, je ena od nam že znanih metod reševanja ta, da poiščemo integrirajoči množitelj. To se lahko zakomplicira, saj je že v primeru dveh spremenljivk iskanje integrirajočega množitelja ekvivalentno reševanju parcialne diferencialne enačbe prvega reda $\mu_y \cdot P + \mu \cdot P_y - \mu_x \cdot Q + \mu \cdot Q_x = 0$ za funkcijo μ. Na srečo obstajajo druge metode, ki jih bomo za primer treh spremenljivk obravnavali v naslednjem podpoglavju. Preden se lotimo le teh, navedimo še definicijo kvazi-homogenih funkcij in par rezultatov v zvezi z njimi, saj bo nam to prišlo prav kasneje.

Definicija 5: Pravimo, da je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *kvazi-homogena* stopnje (oz. reda) $m \in \mathbb{Z}$, če obstajajo taka neničelna števila $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, da velja:

$$f(x_1 t^{a_1}, x_2 t^{a_2}, \ldots, x_n t^{a_n}) = t^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

za vsak $t \in \mathbb{R}$. V tem primeru pravimo, da je število a_i *dimenzija* spremenljivke x_i.

Seveda velja, da so vse homogene funkcije reda m tudi kvazi-homogene reda m ($a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$). Poglejmo si primer funkcije, ki je kvazi-homogena, ni pa homogena.

Zgled 1: Poglejmo si polinomsko funkcijo s predpisom

$$f(x, y) = 4x^3y^3 - 3x^2y^6 + 2xy^9 - y^{12}$$

Vidimo, da velja $f(tx, ty) = 4t^6x^3y^3 - 3t^8x^2y^6 + 2t^{10}xy^9 - t^{12}y^{12} \neq t^k f(x, y)$, za noben k, torej f ni homogena. Če pa vzamemo $a_1 = 3$ in $a_2 = 1$ dobimo:

$$\begin{aligned} f(t^3x, ty) &= 4t^{12}x^3y^3 - 3t^{12}x^2y^6 + 2t^{12}xy^9 - t^{12}y^{12} \\ &= t^{12}(4x^3y^3 - 3x^2y^6 + 2xy^9 - y^{12}) = t^{12}f(x, y) \end{aligned}$$

Funkcija f je torej kvazi-homogena reda 12, ni pa homogena.

Seveda pri kvazi-homogenih funkcijah nismo omejeni samo na polinome.

Zgled 2: Preverimo, da je funkcija $f(x,y) = |y|\sqrt{x}$ kvazi-homogena funkcija reda 2 z dimenzijama 2 in 1.

$$f(t^2x, ty) = |ty|\sqrt{t^2x} = |t||y||t|\sqrt{x} = |t|^2|y|\sqrt{x} = t^2|y|\sqrt{x} = t^2 f(x,y)$$

Da se bolje seznanimo s konceptom kvazi-homogenih funkcij, bomo navedli in dokazali par trditev.

Trditev 1. *Naj bo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvazi-homogena funkcija reda m, z dimenzijami $a_1, a_2, \dots, a_n$. Za $x_1 \neq 0$ in vse $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ označimo: $b_i = \frac{a_i}{a_1}$ in $y_i = \frac{x_i}{x_1^{b_i}}$. Tedaj je*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{\frac{m}{a_1}} f(1, y_2, \dots, y_n)$$

Dokaz. Po definiciji vemo, da je $f(x_1 t^{a_1}, x_2 t^{a_2}, \dots, x_n t^{a_n}) = t^m f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ za vsak $t \in \mathbb{R}$. Naj bo $x_1 \neq 0$ in $t^{a_1} = \frac{1}{x_1}$ ter s pomočjo slednje enakosti dobimo:

$$t^{a_i} = t^{a_1 \frac{a_i}{a_1}} = t^{a_1 b_i} = (\frac{1}{x_1})^{b_i} = \frac{1}{x_1^{b_i}}$$

Ko to vstavimo v začetno enakost, dobimo:

$$f(1, x_2 x_1^{-b_2}, \dots, x_n x_1^{-b_n}) = x_1^{-\frac{m}{a_1}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Ko enačbo pomnožimo z $x_1^{\frac{m}{a_1}}$ in upoštevamo oznako $y_i = x_i x_1^{-b_i}$ dobimo ravno enakost iz trditve. □

Trditev 2. *Naj bo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvazi-homogena $\mathcal{C}^1$ funkcija reda m z dimenzijami $a_1, a_2, \dots, a_n$. Tedaj velja enakost:*

$$mf(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=2}^{n} a_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Dokaz. Po prejšnji trditvi vemo, da za $x_1 \neq 0$ velja: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{\frac{m}{a_1}} f(1, y_2, \dots, y_n)$. Poračunajmo parcialne odvode od f:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{m}{a_1} x_1^{\frac{m-a_1}{a_1}} f(1, y_2, \dots, y_n) + x_1^{\frac{m}{a_1}} \sum_{i=2}^{n} x_i(-\frac{a_i}{a_1}) x_1^{\frac{-(a_i+a_1)}{a_1}} \frac{\partial f}{\partial y_i}(1, y_2, \dots, y_n) \\
&= \frac{m}{a_1} x_1^{\frac{m-a_1}{a_1}} f(1, y_2, \dots, y_n) + \sum_{i=2}^{n} x_i(-\frac{a_i}{a_1}) x_1^{\frac{m-a_i-a_1}{a_1}} \frac{\partial f}{\partial y_i}(1, y_2, \dots, y_n)
\end{aligned}$$

In za $\forall i \in \{2, \dots, n\}$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\frac{m}{a_1}} x_1^{\frac{-a_i}{a_1}} \frac{\partial f}{\partial y_i}(1, y_2, \dots, y_n) = x_1^{\frac{m-a_i}{a_1}} \frac{\partial f}{\partial y_i}(1, y_2, \dots, y_n)$$

Potem je

$$\begin{aligned}
a_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) &= m x_1^{\frac{m}{a_1}} f(1, y_2, \ldots, y_n) + \sum_{i=2}^{n} (-a_i) x_i x_1^{\frac{m-a_i}{a_1}} \frac{\partial f}{\partial y_i}(1, y_2, \ldots, y_n) \\
&= m f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=2}^{n} (-1)(a_i x_i)(x_1^{\frac{m-a_i}{a_1}} \frac{\partial f}{\partial y_i}(1, y_2, \ldots, y_n)) \\
&= m f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=2}^{n} (a_i x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

Ko k enačbi prištejemo $\sum_{i=2}^{n} a_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$, dobimo ravno enakost iz trditve. $\square$

Definicija 6: Pravimo, da je Pfaffova diferencialna enačba $\sum_{i=1}^{n} F_i dx_i = 0$:

- *homogena* reda m, če so za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fukncije F_i homogene funkcije reda m.
- *kvazi-homogena* reda m, z dimenzijami $a_1, a_2, \ldots, a_n$, če so za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fukncije F_i kvazi-homogene funkcije reda $m - a_i$ (z dimenzijami a_i).

2.2 Metode reševanja

V tem podpoglavju bomo našteli in demonstrirali nekaj metod reševanja Pfaffovih enačb v treh spremenljivkah. Te metode ločimo gleda na to, če je enačba eksaktna, ali če vemo le, da je integrabilna (ne pa nujno tudi eksaktna). Metode za eksaktne enačbe med drugimi vsebujejo:

1. Metoda ostrega pogleda
2. Reševanje sistema parcialnih diferencialnih enačb prvega reda
3. Integracija potencialnega polja
4. Ločevanje spremenljivk

Če enačba ni eksaktna, je pa integrabilna, potem nam pogosto koristijo naslednje metode:

1. Enačbe z ločljivo spremenljivko
2. Homogene enačbe
3. Natanijeva metoda
4. Mayerjeva metoda
5. Bertrandova metoda
6. Kvazi-homogene enačbe

Začnimo z obravnavo metod za eksaktne enačbe:

2.2.1 Metode za eksaktne enačbe

Metoda ostrega pogleda Najprej si poglejmo najpreprostejšo metodo - metodo ostrega pogleda. Kot ime metode naimguje, tukaj rešitev »uganemo«, kar lahko storimo v nekaterih redkih primerih.

Zgled 3: Za Pfaffovo enačbo $xdx + ydy + zdz = 0$ lahko na podlagi simetrije in preprostosti funkcij, ki v njej nastopajo, uganemo, da je $u(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ iskana funkcija, ki nam da družino rešitev $u(x, y, z) = c$.

V nadaljevanju predpostavimo, da so funkcije P, Q in R vse $\mathcal{C}^1$ funkcije.

Reševanje sistema PDE prvega reda Že prej smo omenili, da je reševanje Pfaffove enačbe v treh spremenljivkah ekvivalentno reševanju sistema parcialnih diferencialnih enačb prvega reda. Posledično je naslednja metoda reševanje sistema PDE prvega reda. Denimo torej, da imamo eksaktno Pfaffovo DE v treh spremenljivkah: $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0$. Tedaj obstaja $\mathcal{C}^2$ funkcija u, za katero velja: $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ in $\frac{\partial u}{\partial z} = R$. To funkcijo u torej dobimo kot rešitev sistema:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= P(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) &= Q(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) &= R(x, y, z) \end{aligned}$$

Zgled 4: Reševanje Pfaffove diferencialne enačbe $yze^{xyz}dx + xze^{xyz}dy + xye^{xyz}dz = 0$ prevedemo na reševanje sistema PDE prvega reda:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= yze^{xyz} \\ u_y(x, y, z) &= xze^{xyz} \\ u_z(x, y, z) &= xye^{xyz} \end{aligned}$$

V vseh treh enačbah nastopa le en odvod po eni spremenljivki, torej lahko vsako posebej tretiramo kot navadno diferencialno enačbo s parametri. Tako hitro vidimo, da funkcija $u(x, y, z) = e^{xyz} + D(y, z)$ zadošča prvi enačbi, $u(x, y, z) = e^{xyz} + C(x, z)$ pa drugi enačbi. Ko slednjo parcialno odvajamo po x dobimo $yze^{xyz} + C_x(x, z) = yze^{xyz}$, torej je $C_x = 0$ oz. C je odvisna le od z. Podobno, če prvo enakost parcialno odvajamo po y dobimo enakost $D_y = 0$, torej je tudi D odvisna le od z. Ker mora veljati enakost, sledi $C(z) = D(z)$. Sedaj $u(x, y, z) = e^{xyz} + C(z)$ parcialno odvajamo po z in upoštevamo tretjo enačbo v sistemu in s tem vidimo, da je $C_z = 0$, torej je C konstanta. Posledično je $u(x, y, z) = e^{xyz} + C$ iskana funkcija, ki nam da rešitev.

Integracija potencialnega polja Iz vektorske analize vemo, da, če trojica (P, Q, R) tvori $\mathcal{C}^1$ vektorsko polje F, nam eksaktnost enačbe $Pdx+Qdy+Rdz = 0$ pove, da obstaja tako $\mathcal{C}^2$ skalarno polje u, da je $\nabla u = F = (P, Q, R)$. Tako lahko uporabimo standardno metodo integriranja potencialnega vektorskega polja, da dobimo potencial u, ki določa rešitev dane Pfaffove diferencialne enačbe.

Zgled 5: Vrnimo se na zgled 4 in enačbo $yze^{xyz}dx + xze^{xyz}dy + xye^{xyz}dz = 0$ rešimo še s to metodo. $F(x, y, z) = (yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz})$ je očitno $\mathcal{C}^1$ vektorsko polje, rutinski račun pa nam pokaže tudi, da je potencialno. Integriramo P po spremenljivki x in dobimo $u(x, y, z) = \int yze^{xyz}dx = e^{xyz} + C(y, z)$. To sedaj parcialno odvajamo po y in dobimo $xze^{xyz} + C_y(y, z) = Q(x, y, z) = xze^{xyz}$, od tod pa sklepamo, da je $C_y = 0$. Sklepamo, da je potem C odvisna le od z in pišemo $C(y, z) = C(z)$. Sedaj enačbo $u(x, y, z) = e^{xyz} + C(z)$ parcialno odvajamo po z in dobimo enakost $xye^{xyz} + C_z(z) = R(x, y, z) = xye^{xyz}$. Od tod sklepamo, da je $C_z(z) = 0$, torej je C konstanta. Dobimo funkcijo $u(x, y, z) = e^{xyz} + C$.

Ločevanje spremenljivk Metodo ločevanja spremenljivk uporabimo, kadar lahko dano Pfaffovo diferencialno enačbo $P(x, y, z)dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz = 0$ zapišemo v obliki $\acute{P}(x)dx + \acute{Q}(y)dy + \acute{R}(z)dz = 0$. V tem primeru funkcijo u dobimo kot naslednjo vsoto integralov:

$$u(x, y, z) = \int \acute{P}(x)dx + \int \acute{Q}(y)dy + \int \acute{R}(z)dz$$

Zgled 6: Vrnimo se k zgledu 3, $xdx + ydy + zdz = 0$, in denimo, da nam ne uspe uganiti rešitve. Ker je to enačba z (že) ločenimi spremenljivkami, lahko uporabimo prejšnjo metodo in tako dobimo $u(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + C = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + C$

Opomba 1: Vse do sedaj omenjene metode, razen integriranja potencialnega vektorskega polja, lahko posplošimo tudi za reševanje eksaktnih Pfaffovih diferencialnih enačb v več spremenljivkah.

2.2.2 Metode za integrabilne enačbe, ki niso nujno eksaktne

Poglejmo si sedaj še metode za reševanje Pfaffovih diferencialnih enačb v treh spremenljivkah, ki so integrabilne, ne pa nujno tudi eksaktne.

Enačbe z ločljivo spremenljivko Najprej si poglejmo t. i. enačbe z ločljivo spremenljivko, torej enačbe v katerih lahko eno spremenljivko ločimo od vseh drugih (na primer $f(x, y, z) = g(x, y) + h(z)$). Denimo, da je spremenljivka z ločljiva spremenljivka v enačbi $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0$. Tedaj lahko to enačbo preoblikujemo v obliko $\acute{P}(x, y)dx+\acute{Q}(x, y)dy+\acute{R}(z)dz = 0$. Integrabilnost enačbe nam tukaj da pogoj $\frac{\partial \acute{P}}{\partial y} = \frac{\partial \acute{Q}}{\partial x}$, to pa nam pove, da je $\acute{P}(x, y)dx+\acute{Q}(x, y)dy$ totalni diferencial neke funkcije. Označimo to funkcijo z v. Torej, $dv = \acute{P}(x, y)dx+\acute{Q}(x, y)dy$ in naša enačba sedaj dobi obliko $dv+\acute{R}(z)dz = 0$. Funkcija $u(x, y, z)$, ki jo iščemo, je potem dobljena kot vsota funkcije v in integrala $\int \acute{R}(z)dz$: $u(x, y, z) = v(x, y) + \int \acute{R}(z)dz$.

Zgled 7: Rešujemo enačbo $\frac{(x+y)}{z}dx + \frac{xy+1}{yz}dy + (z^2 + 1)dz = 0$. Enostavno je videti, da $P_z(x, y, z) = \frac{1}{z} \neq 0 = R_x(x, y, z)$, torej naša enačba ni eksaktna.

Preverimo pa lahko, da je integrabilna:

$$\begin{aligned}P(Q_z-R_y)&+Q(R_x-P_z)+R(P_y-Q_x)=\\&=\frac{x+y}{z}(\frac{xy+1}{yz^2}-0)+\frac{xy+1}{yz}(0-\frac{x+y}{z^2})+(z^2+1)(\frac{1}{z}-\frac{1}{z})\\&=\frac{(x+y)(xy+1)}{yz^3}-\frac{(xy+1)(x+y)}{yz^3}+0=0\end{aligned}$$

Dodatno opazimo, da lahko ločimo spremenljivko z od ostalih s tem, da enačbo pomnožimo z z. Preoblikovana enačba se glasi:

$$(x+y)dx+\frac{xy+1}{y}dy+z(z^2+1)dz=0$$

Pri tem vemo, da je $(x+y)dx+\frac{xy+1}{y}dy$ totalni diferencial neke funkcije v. Iz enakosti $v_x=(x+y)$ z integriranjem dobimo $v(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+D(y)$, ko to odvajamo po y, pa dobimo $x+D_y(y)=x+\frac{1}{y}$. Od tod sklepamo, da je $D_y(y)=\frac{1}{y}$ oz. $D(y)=\ln|y|$. Funkcija v se torej glasi $v(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+\ln|y|$. Poračunajmo še $\int z(z^2+1)dz$:

$$\int z(z^2+1)dz=\int z^3+zdz=\frac{z^4}{4}+\frac{z^2}{2}+C$$

Sledi torej, da ima iskana funkcija u, ki nam da rešitev Pfaffove enačbe, naslednji predpis:

$$u(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+xy+\ln|y|+\frac{z^4}{4}+\frac{z^2}{2}+C$$

Homogene enačbe Denimo, da je Pfaffova diferencialna enačba $P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=0$ homogena reda m. Sedaj vpeljemo novi spremenljivki u in v, da velja $y=xv$ ter $z=xw$. Tedaj dobi naša enačba obliko $x^m(P(1,v,w)dx+xQ(1,v,w)dv+xR(1,v,w)dw)=0$ oziroma $P(1,v,w)dx+xQ(1,v,w)dv+xR(1,v,w)dw=0$. Dobljena enačba je enačba z ločljivo spremenljivko (specifično, x je ločljiva), ki jo rešimo po prejšnji metodi.

Zgled 8: Rešujemo Pfaffovo diferencialno enačbo $x^2yzdx+xy^2zdy+xyz^2dz=0$. Najprej vidimo, da so funkcije x^2yz, xy^2z in xyz^2 vse homogene funkcije reda 4, torej je dana Pfaffova diferencialna enačba homogena reda 4. Prepričamo se še, da je integrabilna:

$$\begin{aligned}P(Q_z-R_y)&+Q(R_x-P_z)+R(P_y-Q_x)=\\&=x^2yz(xy^2-xz^2)+xy^2z(yz^2-x^2y)+xyz^2(x^2z-y^2z)\\&=x^3y^3z-x^3yz^3+xy^3z^3-x^3y^3z+x^3yz^3-xy^3z^3\\&=0\end{aligned}$$

Sedaj v Pfaffovo diferencialno enačbo vpeljemo $y=xv$ in $z=xw$ (ter posledično $dy=xdv$ in $dz=xdw$) in tako dobimo:

$$P(x,xv,xw)dx+xQ(x,xv,xw)dv+xR(x,xv,xw)dw=0$$

oziroma

$$x^4vwdx + x^5v^2wdv + x^5vw^2dw = 0$$

Enačbo delimo z x^4vw ter tako dobimo:

$$dx + xvdv + xwdw = 0$$

Sedaj delimo enačbo še z x in tako to spremenljivko ločimo od ostalih dveh. Končna oblika preoblikovane enačbe je torej:

$$\frac{dx}{x} + vdv + wdw = 0$$

Sedaj se te enačbe lotimo po metodi za enačbe z ločljivo spremenljivko in prepoznamo, da je $vdv + wdw$ totalni diferencial funkcije $f(v, w) = \frac{1}{2}(v^2 + w^2)$. Ko to upoštevamo v naši enačbi dobimo $\frac{dx}{x} + df = 0$, kar nam pa da iskano funkcijo $u(x, v, w) = \ln|x| + \frac{1}{2}(v^2 + w^2)$. Ko se vrnemo na začetne spremenljivke, ima u naslednji predpis: $u(x, y, z) = \ln|x| + \frac{(y^2+z^2)}{2x^2}$.

Natanijeva metoda Natanijeva metoda se Pfaffove diferencialne enačbe loti na naslednji način: Najprej se obnašamo, kot da je ena od spremenljivk konstanta in rešimo pripadajočo Pfaffovo diferencialno enačbo. Torej, če vzamemo z za neko fiksno konstanto, potem rešujemo $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy = 0$. Denimo, da je $\Phi_1(x, y, z) = c_1$ rešitev te enačbe (kjer je c_1 neka konstanta). Tedaj je rešitev originalne enačbe oblike $\Phi(\Phi_1, z) = c_2$ (kjer je c_2 neka konstanta). To rešitev lahko preoblikujemo v obliko $\Phi_1(x, y, z) = \psi(z)$. To storimo tako, da najprej fiksiramo eno od spremenljivk (v tem primeru x ali y) v enakosti $\Phi_1(x, y, z) = \psi(z)$. Denimo, da smo fiksirali x in to fiksno vrednost označimo z x_0. Tedaj nam enakost $\Phi_1(x_0, y, z) = \psi(z)$ da rešitev Pfaffove diferencialne enačbe $Q(x_0, y, z)dy + R(x_0, y, z)dz = 0$ (saj nam enakost $\Phi_1(x, y, z) = \psi(z)$ predstavlja rešitev Pfaffove DE $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0$). Enačba $Q(x_0, y, z)dy + R(x_0, y, z)dz = 0$ pa je ravno Pfaffova DE v dveh spremenljivkah in njena rešitev je prvi integral neke navadne diferencialne enačbe prvega reda. Naj bo $K(y, z) = c$ prvi integral te enačbe. Tako $\Phi_1(x_0, y, z) = \psi(z)$ kot tudi $K(y, z) = c$ sta rešitvi pripadajoče navadne diferencialne enačbe prvega reda in po enoličnosti rešitve navadne diferencialne enačbe prvega reda sledi, da sta ti rešitvi Pfaffove diferencialne enačbe ekvivalentni. Tako lahko eliminiramo spremenljivko y in končno dobimo naš iskani $\psi(z)$. Rešitev enačbe dobimo, ko pridobljeni $\psi(z)$ vstavimo v enakost $\Phi_1(x, y, z) = \psi(z)$.

Zgled 9: Vrnimo se k enačbi v zgledu 7 in jo rešimo z Natanijevo metodo. V prvem koraku obravnavamo spremenljivko z kot konstanto in rešujemo enačbo $\frac{(x+y)}{z}dx + \frac{xy+1}{yz}dy = 0$. Ta enačba je eksaktna in pripadajoča funkcija Φ_1 se glasi: $\Phi_1(x, y, z) = \frac{1}{z}(\frac{x^2}{2} + xy + \ln|y|)$. Rešitev te enačbe je torej $\Phi_1(x, y, z) = c_1$. Vrnimo se sedaj v začetno enačbo in tokrat fiksirajmo $x = 0$. Tedaj je $\Phi_1(0, y, z) = \frac{\ln|y|}{z}$ rešitev enačbe $\frac{1}{yz}dy + (z^2 + 1)dz = 0$. Ta enačba je integrabilna z integrirajočim množiteljem $\mu(x, z) = z$, njena rešitev pa je podana s funkcijo $K(y, z) = \ln|y| + \frac{z^2(z^2+2)}{4}$. Rešitev se torej glasi $K(y, z) = c$.

in iz te enakosti izrazimo y: $y(z) = e^{\frac{4c-z^2(z^2+2)}{4}}$ Sedaj upoštevamo enakovrednost $K(y,z) = c$ in $\Phi_1(0,y,z) = \psi(z)$ ter s tem dobimo:

$$\frac{4c - z^2(z^2+2)}{4z} = \psi(z)$$

Sedaj, ko imamo $\psi(z)$, ga vstavimo v enakost $\Phi_1(x,y,z) = \psi(z)$ in s tem dobimo iskano rešitev, ki jo pa lahko preoblikujemo v standardno obliko $\Phi(x,y,z) = c_2$.
Storimo še to:

$$\frac{1}{z}(\frac{x^2}{2} + xy + \ln|y|) = \frac{4c - z^2(z^2+2)}{4z}$$

Vpeljemo oznako $c_2 = 4c$, enačbo pomnožimo z z ter vse nekonstantne člene premaknemo na levo stran. Tako dobimo:

$$\frac{x^2}{2} + xy + \ln|y| + \frac{z^4 + 2z^2}{4} = c_2$$

Mayerjeva metoda Z Mayerjevo metodo reduciramo iskanje rešitve Pfaffove diferencialne enačbe v treh spremenljivkah ($P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$) na iskanje prvega integrala neke navadne diferencialne enačbe prvega reda. Denimo, da je dana Pfaffova DE v treh spremenljivkah integrabilna. Tedaj ima rešitev oblike $f(x,y,z) = c$ za neko primerno funkcijo f. Ta rešitev tvori enoparametrično družino ploskev v $\mathbb{R}^3$, presečišča teh ploskve z ravnino $x + ky - z = 0$ pa bodo tvorile neskončno družino krivulj, ki pa bodo rešitve neke Pfaffove diferencialne enačbe v dveh spremenljivkah: $p(x,y,k)dx + q(x,y,k)dy = 0$. To enačbo tipično pridobimo tako, da vstavimo $z = x + ky$ v našo prvotno enačbo in s tem eliminiramo spremenljivko z. Denimo sedaj, da je $\Phi(x,y,k) = \acute{c}$ splošna rešitev Pfaffove enačbe $p(x,y,k)dx + q(x,y,k)dy = 0$. Vsako točko na presečišču med z-osjo in dano družino ravnin $x + ky = z$ lahko dobimo tako, da nastavimo $y = 0$ in $x = c(= z)$ in če integralska krivulja $\Phi(x,y,k)$ vsebuje to točko, mora veljati $\Phi(x,y,k) = \Phi(c,0,k)$ (saj je Φ vzdolž te krivulje konstantna). Če k variiramo, dobimo torej enoparametrično družino krivulj, ki vsebujejo točko $(c,0)$, če pa variiramo c s tem dobimo družino krivulj, ki tečejo skozi vsako točko na preseku z-osi z ravnino $z = x + ky$. Ko iz slednje enačbe izrazimo $k = \frac{z-x}{y}$ in to vstavimo v $\Phi(x,y,k) = \Phi(c,0,k)$, se znebimo parametra k in tako dobimo družino ploskev $\Phi(x,y,\frac{z-x}{y}) = \Phi(c,0,\frac{z-x}{y})$, ki je pa ravno naša iskana rešitev Pfaffove DE v treh spremenljivkah z začetka.

Zgled 10: Rešimo Pfaffovo diferencialno enačbo $xdx + ydy + zdz = 0$. Najprej vidimo, da je enačba res integrabilna, saj njene funkcije P, Q in R določajo potencialno vektorsko polje. V enačbo vstavimo enakost $z = x + ky$ in $dz = dx + kdy$ ter s tem dobimo:

$$(2x + ky)dx + (kx + (k^2+1)y)dy = 0$$

Označimo $p(x,y,k) = 2x + ky$ in $q(x,y,k) = kx + (k^2+1)y$. Ker je $p_y = kq_x$, je pdx + qdy totalni diferencial neke funkcije u. Poračunajmo u:

$$u(x,y,k) = x^2 + kxy + \frac{(k^2+1)y^2}{2}$$

Zanima nas ravno $u(x,y,k) = u(c,0,k) = c^2$ oz. $x^2 + kxy + \frac{(k^2+1)y^2}{2} = c^2$. V enačbo sedaj vstavimo $k = \frac{z-x}{y}$ in tako dobimo:

$$x^2 + \frac{xyz - x^2y}{y} + \frac{\frac{(x^2-2xz+z^2)+y^2}{y^2}y^2}{2} = c^2$$

To enačbo malo uredimo in dobimo $x^2 + xz - x^2 + \frac{x^2-2xz+y^2+z^2}{2} = c^2$ oziroma $\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) = c^2$. To je ravno rešitev naše orginalne enačbe, kar nas seveda ne preseneča.

Bertrandova metoda Pri Bertrandovi metodi se Pfaffove diferencialne enačbe $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, ki ni eksaktna (torej $rot[P,Q,R]^\top \neq 0$), je pa integrabilna, lotimo tako, da najprej rešimo linearno parcialno diferencialno enačbo $(Q_z - R_y)u_x + (R_x - P_z)u_y + (P_y - Q_x)u_z = 0$. Če sta v in w dve neodvisna prva integrala te enačbe, potem seveda velja $(Q_z - R_y)v_x + (R_x - P_z)v_y + (P_y - Q_x)v_z = 0$ in $(Q_z - R_y)w_x + (R_x - P_z)w_y + (P_y - Q_x)w_z = 0$. Ko poleg teh dveh enakosti upoštevamo še pogoj integrabilnosti $P(Q_z - R_y) + Q(R_x - P_z) + R(P_y - Q_x) = 0$ tako dobimo sistem treh enačb. Označimo $A = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \\ P & Q & R \end{bmatrix}$. Tedaj se naš sistem enačb glasi:

$$\begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \\ P & Q & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_z - R_y \\ R_x - P_z \\ P_y - Q_z \end{bmatrix} = 0$$

Ker po predpostavki velja $rot[P,Q,R]^\top \neq 0$, sledi, da ima dana matrika netrivialno jedro, torej ni obrnljiva. Posledično velja: $\begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0$, in ker so vrstice linearno odvisne, lahko najdemo dve funkciji, $\lambda(v,w)$ in $\mu(v,w)$, da velja:

$$\begin{aligned} P &= \lambda v_x + \mu w_x \\ Q &= \lambda v_y + \mu w_y \\ R &= \lambda v_z + \mu w_z \end{aligned}$$

Ko to vstavimo v našo začetno Pfaffovo diferencialno enačbo, se ta reducira na obliko $\lambda dv + \mu dw = 0$, ki pa je rešljiva Pfaffova diferencialna enačba v dveh spremenljivkah, saj sta λ in μ odvisni le od v in w.

Zgled 11: S pomočjo Bertrandove metode rešimo Pfaffovo diferencialno enačbo iz zgleda 7: $\frac{(x+y)}{z}dx + \frac{xy+1}{yz}dy + (z^2+1)dz = 0$. Zapišimo komponente od $rot[xy, xy, xy]^\top$:

$$\begin{aligned} a(x,y,z,u) &= Q_x - R_y = \frac{xy+1}{yz^2} \\ b(x,y,z,u) &= R_x - P_z = -\frac{x+y}{z^2} \\ c(x,y,z,u) &= P_y - Q_x = 0 \\ d(x,y,z,u) &= 0 \end{aligned}$$

Sedaj s pomočjo funkcij a, b, c in d določimo homogeno linearno PDE prvega reda: $au_x + bu_y + cu_z = d$ Posebej: $yu_y + (x - y)u_z = 0$. Enačbo bomo rešili s pomočjo metode karakteristik. Zato najprej parametriziramo spremenljivke $x = x(t), y = y(t), z = z(t), u = u(t) = u(x(t), y(t), z(t))$. Karakteristični sistem za njo se glasi:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= a(x, y, z, u) = \frac{xy + 1}{yz^2} \\
\dot{y} &= b(x, y, z, u) = -\frac{x + y}{z^2} \\
\dot{z} &= c(x, y, z, u) = 0 \\
\dot{u} &= d(x, y, z, u) = 0
\end{aligned}$$

Ker sta z in u neodvisna od t, v resnici rešujemo sistem v prvih dveh vrsticah, kar pa lahko lahko rešimo z iskanjem prvega integrala, kar pa je enakovredno reševanju Pfaffove Diferencialne enačbe $(x + y)dx + \frac{xy+1}{y}dy = 0$. Rešitev te enačbe je pa ravno $w(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xy + \ln|y|$.
Določimo še en, od w neodvisen prvi integral: $v(x, y, z) = c_3(z)$ za neko $\mathcal{C}^1$ funkcijo c_3. Sledi, da je rešitev začetne parcialne diferencialne enačbe funkcija pripadajočih prvih integralov. Posebej, izkaže se, da je rešitev oblike $u(x, y, z) = c_3(z) + (\frac{x^2}{2} + xy + \ln|y|)$, kjer je c_3 lahko poljubna $\mathcal{C}^1$ funkcija.

$$\begin{aligned}
det(A) = \begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & c_3'(z) \\ x + y & \frac{xy+1}{y} & 0 \\ \frac{x+y}{z} & \frac{xy+1}{yz} & (z^2 + 1) \end{vmatrix} \\
&= c_3'(z)((x + y)\frac{xy + 1}{yz} - \frac{xy + 1}{y}\frac{x + y}{z}) = 0
\end{aligned}$$

Sedaj poiščimo taki funkciji λ in μ, da bo:

$$\begin{aligned}
P &= \mu(x + y) \\
Q &= \mu\frac{xy + 1}{y} \\
R &= \lambda c_3'(z)
\end{aligned}$$

Prva enačba nam pove, da je $\mu(x, y, z) = \frac{1}{z}$, kar nam pove tudi druga enačba. Tretja enačba nam določi $\lambda(x, y, z) = \frac{(z^2+1)}{c_3'(z)}$. Preostane samo še, da s pomočjo v in w izrazimo λ in μ, nato pa rešimo enačbo $\lambda(v, w)dv + \mu(v, w)dw = 0$. Opazimo, da sta tako λ kot μ obe v resnici odvisni zgolj od z, zato bo parametrizacija neodvisna od w, saj je ta neodvisna od z. Za parametrizacijo se torej obrnemo na $v(z) = c_3(z)$. Dodatno se omejimo na funkcije $c_3(z)$, ki so bijektivne in $\mathcal{C}^2$, ter tako lahko zapišemo $z = c_3^{-1}(v) = f(v)$. Potem je $\lambda(v) = \frac{1}{f(v)}$ in $\mu(v) = \frac{f^2(v)+1}{c_3'(f(v))}$. S tem smo originalno enačbo prevedli na reševanje enačbe $\frac{dv}{f(v)} + \frac{f^2(v)+1}{c_3'(f(v))}dw = 0$. Ta enačba ni nujno eksaktna, je pa integrabilna za integrirajoči množitelj $\mu(v, w) = \frac{c_3'(f(v))}{(f^2(v)+1)}$. Tedaj je rešitev enačbe podana s funkcijo $g(v, w) = w + \int \frac{c_3'(f(v))}{f(v)(f^2(v)+1)}dv$. Nadaljno reševanje problema je odvisno od izbire funkcije c_3. Poglejmo si poseben primer, ko je

$c_3(z) = \frac{z^7}{7} + \frac{2z^5}{5} + \frac{z^3}{3} = v$. Tedaj je $c_3'(z) = z^6 + 2z^4 + z^2$. Potem je $\int \frac{c_3'(f(v))}{f(v)(f^2(v)+1)}dv = \int \frac{z^6+2z^4+z^2}{z(z^2+1)}dz = \int \frac{(z^3+z)^2dz}{(z^3+z)} = \int z^3 + zdz = \frac{z^4}{4} + \frac{z^2}{2} + \acute{C}$. Ko to vstavimo v funkcijo g in razpišemo $w(x,y,z)$, dobimo ravno rešitev, ki smo jo dobili v zgledih 7 in 9.

Opomba 2: Razlog, da je dobljena rešitev enaka kot v ostalih zgledih z isto enačbo, se skriva v tem, kako smo izbrali funkcijo $c_3(z)$. Če bi izbrali kako drugo c_3, bi dobili drugo rešitev. ki bi se od te razlikovala le v členih, ki so odvisni od z.

Kvazi-homogene enačbe Za konec tega poglavja si poglejmo še reševanje kvazi-homogenih Pfaffovih diferencialnih enačb v treh spremenljivkah. Za začetek premislimo potrebne pogoje, da je Pfaffova diferencialna enačba $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ kvazi-homogena. Denimo, da so P, Q in R naslednje oblike:

$$P(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n_1} a_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i} z^{\gamma_i}$$
$$Q(x,y,z) = \sum_{i=j}^{n_2} b_j x^{\lambda_j} y^{\mu_j} z^{\nu_j}$$
$$R(x,y,z) = \sum_{k=1}^{n_3} c_k x^{\varepsilon_k} y^{\eta_k} z^{\zeta_k}$$

Kjer so a_i, b_j in c_k koeficienti in $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \lambda_j, \mu_j, \nu_j, \varepsilon_k, \eta_k, \zeta_k \in \mathbb{Q}$, $\forall i \in \{1, \ldots, n_1\}, \forall j \in \{1, \ldots, n_2\}, \forall k \in \{1, \ldots, n_3\}$. Tedaj ima naša Pfaffova enačba obliko

$$(\sum_{i=1}^{n_1} a_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i} z^{\gamma_i})dx + (\sum_{i=j}^{n_2} b_j x^{\lambda_j} y^{\mu_j} z^{\nu_j})dy + (\sum_{k=1}^{n_3} c_k x^{\varepsilon_k} y^{\eta_k} z^{\zeta_k})dz = 0$$

Če sedaj v enačbi x zamenjamo z xt^p, y zamenjamo z yt^q ter z zamenjamo z zt^r, potem je potenca števila t v vsakem členu naše Pfaffove enačbe določena z:

$$\begin{aligned} p\alpha_i + q\beta_i + r\gamma_i \ &; \ i \in \{1, \ldots, n_1\} \\ p\lambda_j + q\mu_j + r\nu_j \ &; \ j \in \{1, \ldots, n_2\} \\ p\varepsilon_k + q\eta_k + r\zeta_k \ &; \ k \in \{1, \ldots, n_3\} \end{aligned}$$

To nam da $n_1 + n_2 + n_3$ linearnih izrazov, ki so odvisni od p, q in r. Da bi bila naša Pfaffova enačba kvazi-homogena reda m, bi potem morala biti P kvazi-homogena reda $m - p$, Q kvazi-homogena reda $m - q$ in R kvazi-homogena reda $m - r$. To pa pomeni, da bi morala biti potenca števila t v vsakem členu funkcije P enaka $m - p$, potenca t v vsakem členu Q bi morala biti $m - q$, potenca t v vsakem členu R pa natanko $m - r$. Tako dobimo $n_1 + n_2 + n_3$ linearnih enačb v p, q, r in m, ki se glasijo:

$$\begin{aligned} p(\alpha_i + 1) + q\beta_i + r\gamma_i - m = 0 \ &; \ i \in \{1, \ldots, n_1\} \\ p\lambda_j + q(\mu_j + 1) + r\nu_j - m = 0 \ &; \ j \in \{1, \ldots, n_2\} \\ p\varepsilon_k + q\eta_k + r(\zeta_k + 1) - m = 0 \ &; \ k \in \{1, \ldots, n_3\} \end{aligned}$$

Če je Pfaffova enačba, ki jo obravnavamo, kvazi-homogena, morajo biti zgornje enačbe medseboj konsistentne, da obstaja enolična rešitev p, q, r, m. Potreben pogoj za to, da je dana Pfaffova enačba kvazi-homogena je torej konsistentnost zgornjih enačb. Premislimo sedaj, kako rešujemo kvazi-homogene Pfaffove diferencialne enačbe.
Naj bo $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0$ kvazi-linearna Pfaffova enačba reda m z dimenzijami spremenljivk p, q in r (po vrsti za x, y in z). Tedaj, po definiciji 6 velja, da so P, Q in R kvazihomogene funkcije redov $m - p, m - q$ in $m - r$. Če upoštevamo trditev 1, lahko te funkcije zapišemo na naslednji način:

$$\begin{aligned}
P(x, y, z) &= x^{\frac{m-p}{p}} P(1, yx^{-\frac{q}{p}}, zx^{-\frac{r}{p}}) \\
Q(x, y, z) &= x^{\frac{m-q}{p}} Q(1, yx^{-\frac{q}{p}}, zx^{-\frac{r}{p}}) \\
R(x, y, z) &= x^{\frac{m-r}{p}} R(1, yx^{-\frac{q}{p}}, zx^{-\frac{r}{p}})
\end{aligned}$$

Če uvedemo novi spremenljivki $u = yx^{-\frac{q}{p}}$ in $v = zx^{-\frac{r}{p}}$, potem velja $dy = x^{\frac{q}{p}}du + \frac{q}{p}ux^{\frac{q-p}{p}}dx$ in $dz = x^{\frac{r}{p}}dv + \frac{r}{p}vx^{\frac{r-p}{p}}dx$. Ko to vstavimo v našo začetno enačbo dobimo:

$$\begin{aligned}
x^{\frac{m-p}{p}} P(1, u, v)dx + x^{\frac{m-q}{p}} Q(1, u, v)(x^{\frac{q}{p}}du + \frac{q}{p}ux^{\frac{q-p}{p}}dx) \\
+ x^{\frac{m-r}{p}} R(1, u, v)(x^{\frac{r}{p}}dv + \frac{r}{p}vx^{\frac{r-p}{p}}dx) = 0
\end{aligned}$$

Ko združimo člene, ki vsebujejo dx, se enačba preoblikuje v obliko:

$$\begin{aligned}
&x^{\frac{m-p}{p}}(pP(1, u, v) + quQ(1, u, v) + rvR(1, u, v))dx \\
&+ px^{\frac{m}{p}}Q(1, u, v)du + px^{\frac{m}{p}}R(1, u, v)dv = 0
\end{aligned}$$

Sedaj delimo enačbo s faktorjem $x^{\frac{m}{p}}(pP(1, u, v) + quQ(1, u, v) + rvR(1, u, v))$ in s tem ločimo spremenljivko x od u in v. Tako pridobljena enačba se glasi:

$$\begin{aligned}
\frac{x^{\frac{m-p}{p}}}{x^{\frac{m}{p}}}dx + \frac{pQ(1, u, v)du}{pP(1, u, v) + quQ(1, u, v) + rvR(1, u, v)} \\
+ \frac{pR(1, u, v)dv}{pP(1, u, v) + quQ(1, u, v) + rvR(1, u, v)} = 0
\end{aligned}$$

Ko uvedemo oznaki

$$A(u, v) = \frac{pQ(1, u, v)}{pP(1, u, v) + quQ(1, u, v) + rvR(1, u, v)}$$

ter

$$B(u, v) = \frac{pR(1, u, v)}{pP(1, u, v) + quQ(1, u, v) + rvR(1, u, v)}$$

se zgornja enačba glasi:

$$\frac{dx}{x} + A(u, v)du + B(u, v)dv = 0$$

Tako enačbo je pa enostavno rešiti z metodo za enačbe z ločljivo spremenljivko.

Zgled 12: Poskusimo rešit primer 1. Imamo torej enačbo $(5x^3 + 2y^4 + 2y^2z + 2z^3)dx + (4xy^3 + 2xyz)dy + (xy^2 + 2xz)dz = 0$. Najprej preverimo, da je enačba sploh integrabilna.

$$
\begin{aligned}
&P(Q_z - R_y) + Q(R_x - P_z) + R(P_y - Q_x) = \\
&= (5x^3 + 2y^4 + 2y^2z + 2z^3)(2xy - 2xy) + (4xy^3 + 2xyz)(y^2 + 2z - 2y^2 - 4z) \\
&+ (xy^2 + 2xz)(8y^3 + 4yz - 4y^3 - 2yz) = \\
&= 0 - (4xy^5 + 2xy^3z + 8xy^3z + 4xyz^2) + (4xy^5 + 8xy^3z + 2xy^3z + 4xyz^2) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Enačba torej res je integrabilna. Opazimo tudi, da so naše funkcije P, Q in R ravno oblike iz premisleka o potrebnem pogoju za kvazi-homogenost. Preverimo torej, če je naša Pfaffova diferencialna enačba kvazi-homogena. Pripadajoči sistem enačb se glasi:

$$
\begin{aligned}
&4p - m = 0 \\
&p + 4q - m = 0 \\
&p + 2q + r - m = 0 \\
&p + 3r - m = 0 \\
&p + 4q - m = 0 \\
&p + 2q + r - m = 0 \\
&p + 2r - m = 0
\end{aligned}
$$

Če upoštevamo prve 4 enačbe, ki vse izhajajo iz potenc t v P, pogoj konsistentnosti zahteva, da velja: $4p = p + 4q = p + 2q + r = p + 3r$. Prvi dve enakosti nam data $3p = 4q$, druga in tretja pa $2q = r$. Če izberemo $p = 1$ potem dobimo $q = \frac{3}{4}$ in $r = \frac{3}{2}$, dodatno pa je $m = 4$. Ker smo našli rešitev so enačbe konsistentne in Pfaffova diferencialna enačba je res kvazi-homogena reda 4.
Po metodi reševanja, ki smo jo prej opisali, sedaj vpeljemo novi spremenljivki u in v, za kateri velja $y = ux^{\frac{3}{4}}$ in $z = vx^{\frac{3}{2}}$. Potem je $dy = x^{\frac{3}{4}}du + \frac{3}{4}ux^{-\frac{1}{4}}dx$ in $dz = x^{\frac{3}{2}}dv + \frac{3}{2}vx^{\frac{1}{2}}$. Naša enačba se tako spremeni v

$$
\begin{aligned}
&(5x^3 + 2y^4 + 2y^2z + 2z^3)dx + (4xy^3 + 2xyz)(x^{\frac{3}{4}}du + \frac{3}{4}ux^{-\frac{1}{4}}dx) \\
&+ (xy^2 + 2xz)(x^{\frac{3}{2}}dv + \frac{3}{2}vx^{\frac{1}{2}}) = 0
\end{aligned}
$$

in poenostavi v

$$
x^3(5 + 5u^4 + 5u^2v + 5v^2)dx + x^4(4u^3 + 2uv)du + x^4(u^2 + 2v)dv = 0
$$

Sedaj delimo enačbo z $x^4(5 + 5u^4 + 5u^2v + 5v^2)$ in jo tako transformiramo v obliko:

$$
\frac{dx}{x} + \frac{(4u^3 + 2uv)du}{(5 + 5u^4 + 5u^2v + 5v^2)} + \frac{(u^2 + 2v)dv}{(5 + 5u^4 + 5u^2v + 5v^2)} = 0
$$

Tukaj opazimo, da zadnja dva člena v resnici tvorita totalni diferencial. Naj bo $w = 1 + u^4 + u^2v + v^2$. Tedaj je $dw = (4u^3 + 2uv)du + (u^2 + 2v)dv$. Tedaj se naša enačba glasi:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dw}{5w} = 0$$

Enostavno je videti, da je potem $\ln|x| + \frac{1}{5}\ln|w| = C$ rešitev naše Pfaffove diferencialne enačbe. To rešitev se da napisati z bolj elementarnimi funkcijami.

$$\begin{aligned}\ln|x| + \frac{1}{5}\ln|w| &= \ln|x| + \ln(|1 + u^4 + u^2v + v^2|^{\frac{1}{5}}) \\ &= \ln(|x(1 + u^4 + u^2v + v^2)|^{\frac{1}{5}}) = C\end{aligned}$$

To bo veljalo natanko tedaj, ko bo $|x(1 + u^4 + u^2v + v^2)|^{\frac{1}{5}} = D$ oz. $|x|^5(1 + u^4 + u^2v + v^2) = E$. Sedaj vstavimo še spremenljivki y in z ter tako dobimo $x^5(1 + \frac{y^4}{x^3} + \frac{y^2z}{x^3} + \frac{z^2}{x^3}) = E$ oziroma

$$x^5 + x^2y^4 + x^2y^2z + x^2z^2 = E$$

Le to je končna oblika rešitve naše začetne enačbe.

3 Fourierjeva transformacija

Sedaj se lotimo drugega pristopa k reševanju diferencialnih enačb. V tem poglavju bomo obravnavali, kako lahko uporabimo t. i. Fourierjeve transformacije, da reševanje neke diferencialne enačbe prevedemo na običajno lažji problem reševanja navadnih enačb ali navadnih diferencialnih enačb nižjega reda. Za začetek spoznajmo, kaj sploh je Fourierjeva transformacija, skupaj z nekaj koristne teoretične osnove, nato pa se lotimo opisa metode in z njo rešimo nekaj zgledov. V tem poglavju se bomo pretežno sklicevali na učbenik [4].

3.1 Osnovne definicije in rezultati

Najprej se spomnimo, kaj je Hilbertov prostor.

Definicija 7: Vektorski prostor X, opremnljen z normo $||.||$ je *Banachov prostor*, če je za metriko, porojeno iz norme, $d(x, y) = ||x - y||$ poln metrični prostor.

Opomba 3:

- Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ skupaj s standardnim skalarnim produktom, ki porodi Evklidsko normo, je Banachov prostor.

- Naj bo $[a, b]$ poljuben zaprti interval in naj bo $\mathcal{C}([a, b])$ prostor vseh zveznih realnih (ali kompleksnih) funkcij nad $[a, b]$. Definiramo normo s predpisom $||f|| = (\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ $\forall f \in \mathcal{C}([a, b])$. Ta prostor ni poln metrični prostor za porojeno metriko. Da se o tem prepričamo, je dovolj obravnavati funkcijsko zaporedje $f_n(x) = \begin{cases} 0 & ;\ x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ \frac{n}{2}x - \frac{n-2}{4} & ;\ x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 1 & ;\ x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$ na intervalu $[0, 1]$. To

zaporedje je Cauchyjevo, kandidat za limito f pa je funkcija
$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & ; \ x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$, ki pa ni element $\mathcal{C}([0,1])$.

- prostor $\mathcal{C}([a,b])$ skupaj z normo s predpisom
  $||f|| = \max\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\} \ \forall f \in \mathcal{C}([a,b])$ je Banachov prostor.

Definicija 8: Naj bo $K = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ kvader v $\mathbb{R}^n$. Za njegovo prostornino razglasimo $V(K) = \prod_{i=1}^n |b_i - a_i|$. Naj bo sedaj A poljubna množica v $\mathbb{R}^n$. Pravimo, da ima A *mero* 0, če $\forall \varepsilon > 0$ obstaja kvečjemu števno pokritje množice A s kvadri, $K_1, K_2, \ldots$, da velja $\sum_{i=1}^{\infty} V(K_i) < \varepsilon$

Opomba 4: Vse števne in končne množice v $\mathbb{R}^n$ imajo mero 0.

Definicija 9: Naj bo A poljubna podmnožica v $\mathbb{R}$ in f ter g realni ali kompleksni funkciji na A. Pravimo, da sta f in g *enaki skoraj povsod* na A, če ima množica točk, v katerih se funkcijske vrednosti razlikujejo
$\{x \in A \mid f(x) \neq g(x)\}$ mero 0. Tedaj pišemo $f = g \ s.p.$

Opomba 5: Relacija enakosti skoraj povsod je ekvivalenčna relacija

Definicija 10: Naj bo A poljuben interval ali kar cel $\mathbb{R}$ in naj bo $p \in [1, \infty)$. Tedaj definiramo množico, ki vsebuje ekvivalenčne razrede realnih ali kompleksnih funkcij nad A, glede na enakost skoraj povsod, za katere velja, da je $\int_A |f(x)|^p dx < \infty$. To množico označimo z $L^p(A)$. Torej:
$L^p(A) = \{[f]_{= \ s.p.} \mid f \ \textit{funkcija na } A \ \wedge \int_A |f(x)|^p dx$ obstaja in je končen$\}$.
Posebej, množico $L^1(A)$ imenujemo *množica absolutno integrabilnih funkcij* na A, množico $L^2(A)$ pa *množica kvadratno integrabilnih funkcij* na A.

Opomba 6: Naj bo A poljuben interval ali kar cel $\mathbb{R}$ in naj bo $p \in [1, \infty)$. Tedaj je $L^p(A)$, za seštevanje in množenje s skalarjem definirano po točkah, vektorski prostor in preslikava $||.||_p : L^p(A) \to [0, \infty)$ s predpisom
$||f||_p = \left(\int_A |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \ \forall f \in L^p(A)$ je norma na njem. Še več, $(L^p(A), ||.||_p)$ je Banachov prostor.

Nas bodo posebej zanimale absolutno integrabilne funkcije na celi realni osi: $L^1(\mathbb{R}) = \{[f]_{= \ s.p.} \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ (\textit{ali } \mathbb{C}) \wedge \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty\}$. Tudi ta prostor je, za po točkah definirani operaciji $+$ in $\cdot$ ter normo s predpisom $||f||_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \ \forall f \in L^1(\mathbb{R})$ Banachov prostor.

Definicija 11: Naj bo A poljuben interval kar cel $\mathbb{R}$. Množico zveznih in omejenih funkcij funkcij na A označimo z $\mathcal{C}_b(A)$.

Posebej nas bo zanimala množica $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, ki skupaj s po točkah definiranima $+$ in $\cdot$, ter normo s predpisom $||f||_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \ \forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ tvori Banachov prostor.

Definicija 12: Preslikavo $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, s predpisom

$$\mathcal{F}(f)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} f(t) dt \ \forall y \in \mathbb{R}$$

imenujemo *Fourierjeva transformacija.* Za vsak $f \in L^1(\mathbb{R})$ pravimo $\mathcal{F}(f)$ *Fourierjeva transformiranka funkcije* f, in jo tipično označimo kar z $\hat{f}$.

Opomba 7: Fourierjevo transformacijo lahko definiramo tudi s predpisom:

$$\mathcal{F}(f)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi ity}dt$$

. Vse lastnosti, ki jih bomo navedli v nadaljevanju, veljajo tudi za to definicijo, ko upoštevamo, da je razlika v resnici le v uvedbo nove spremenljivke. V različnih situacijah nam lahko bolj pride prav ena ali druga definicija.

Zgled 13: Določimo Fourierjevo transformiranko funkcije $\chi_{[-a,a]}(t) = \begin{cases} 1 & ;\ t \in [-a,a] \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\chi_{[-a,a]})(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-a,a]}(t)e^{ity}dt = \int_{-a}^{a} e^{ity}dt = \frac{1}{iy}e^{ity}\Big|_{-a}^{a} \\
&= \frac{-i}{y}(\cos(ty) + i\sin(ty))\Big|_{-a}^{a} = \frac{1}{y}(\sin(ty) - i\cos(ty))\Big|_{-a}^{a} \\
&= \frac{2\sin(ay)}{y}
\end{aligned}$$

Zgled 14: Poračunajmo Fourierjevo transformiranko funkcije $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}e^{ity}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2-2ity}{2}}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-iy)^2-(iy)^2}{2}}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-iy)^2+y^2}{2}}dt = e^{-\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-iy)^2}{2}}dt
\end{aligned}$$

Sedaj v presotali integral vpeljemo zamenjavo spremenljivke $u = t - iy, du = dt$ in s tem dobimo integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du$. Na tej točki se spomnimo znanega rezultata iz analize:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$$

Sledi, da je $\mathcal{F}(f)(y) = \mathcal{F}(e^{-\frac{t^2}{2}})(y) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{y^2}{2}} = \sqrt{2\pi}f(y)$.
Drugače povedano, funkcija $e^{-\frac{t^2}{2}}$ je lastna funkcija Fourierjeve transformacije za lastno vrednost $\sqrt{2\pi}$.

Preden se lotimo obravnave lastnosti Fourierjeve transformacije, se spomnimo dveh rezultatov, ki nam bosta pri tem pomagala.

Definicija 13: Funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je *odsekoma zvezno odvedljiva*, če je odsekoma zvezna na $[a,b]$ in je zvezno odvedljiva na $[a,b]$, razen v končno mnogo točkah, v katerih obstajata leva in desna limita odvoda.

Lema 1 (Riemman-Lebesguova lema)**.** *Naj bo f absolutno integrabilna (L^1) funkcija na nekem končnem ali neskončnem intervalu I Potem velja:*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_I f(t)cos(\lambda t)dt = 0, \lim_{\lambda\to\infty} \int_I f(t)sin(\lambda t)dt = 0$$

in posledično tudi

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_I f(t)e^{i\lambda t}dt = 0$$

Izrek 1. *Naj bosta X in Y realna ali kompleksna normirana vektorska prostora ter naj bo $A : X \to Y$ linearni operator. Tedaj velja: A je omejen $\iff$ A je zvezen.*

Sedaj se lotimo lastnosti Fourierjeve transformacije.

Trditev 3. *Naj bosta $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ poljubni. Za fourierjevo transformacijo veljajo naslednje trditve:*

1. *$\mathcal{F}$ je zvezni linearni operator.*
2. *Za vsak $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je $\mathcal{F}(f(at))(y) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f(t))(\frac{y}{a})$ $\forall y \in \mathbb{R}$.*
3. *$\mathcal{F}(\bar{f})(y) = \overline{\mathcal{F}(f)(-y)}$ $\forall y \in \mathbb{R}$.*
4. *Za vsak $a \in \mathbb{R}$ je $\mathcal{F}(f(t-a))(y) = e^{iay}\mathcal{F}(f(t))(y)$ $\forall y \in \mathbb{R}$.*
5. *Za vsak $a \in \mathbb{R}$ je $\mathcal{F}(e^{iat}f(t))(y) = \mathcal{F}(f(t))(y+a)$ $\forall y \in \mathbb{R}$.*
6. *$\forall f \in L^1(\mathbb{R})$ je funkcija $\mathcal{F}(f)$ enakomerno zvezna na $\mathbb{R}$.*
7. *$\lim_{y\to\infty} \mathcal{F}(f)(y) = 0$*

Dokaz.

1. To, da je $\mathcal{F}$ linearni operator sledi direktno iz linearnosti določenega integrala. Dokažimo torej, da je $\mathcal{F}$ zvezen. Upoštevajoč, da sta $L^1(\mathbb{R})$ in $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ normirana vektorska prostora nad $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$, se skličemo na izrek 1 in vidimo, da je dovolj pokazati, da je $\mathcal{F}$ omejen. Naj bosta torej $f \in L^1(\mathbb{R})$ in $y \in \mathbb{R}$ poljubna elementa ter računamo $|\mathcal{F}(f)(y)| = |\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iyt}dt| \le \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)||e^{iyt}|dt = \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt = ||f||_1$. Torej, pokazali smo, da poljubna $f \in L^1(\mathbb{R})$ in $y \in \mathbb{R}$ velja $|\mathcal{F}(f)(y)| \le ||f||_1$, to pa pomeni, da neenakost velja tudi, če bi na levi strani vzeli supremum po vseh $y \in \mathbb{R}$. Torej: $||\mathcal{F}(f)||_\infty = \sup_{y\in\mathbb{R}}|\mathcal{F}(f)(y)| \le 1 \cdot ||f||_1$. Ker to velja za poljuben $f \in L^1(\mathbb{R})$, sledi, da je $\mathcal{F}$ omejen linearni operator, torej je po izreku 1 $\mathcal{F}$ zvezen.

2. Naj bo a poljubno neničelno realno število. Tedaj je $\mathcal{F}(f(at))(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{iyt}dt$. Denimo, da je $a > 0$ in vpeljemo novo spremenljivko $u = at, du = adt$ ter tako dobimo:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(at))(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{iy\frac{u}{a}}\frac{1}{a}du = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\frac{y}{a}u}du \\ &= \frac{1}{a}\mathcal{F}(f(t))(\frac{y}{a})\end{aligned}$$

   Za $a < 0$ je dokaz simetričen.

3. Naj bo $y \in \mathbb{R}$ poljuben.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\bar{f})(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}e^{iyt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} \cdot \overline{e^{-iyt}}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)e^{i(-y)t}}dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i(-y)t}dt} = \overline{\mathcal{F}(f)(-y)}\end{aligned}$$

4. Naj bosta a in y poljubni realni števili. Tedaj je

$$\mathcal{F}(f(t-a))(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{ity}dt$$

Sedaj vpeljemo novo spremenljivko $u = t - a, du = dt$, ter tako dobimo:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(t-a))(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i(u+a)y}du = e^{iay}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{iuy}du \\ &= e^{iay}\mathcal{F}(f(t))(y)\end{aligned}$$

5. Naj bosta $a, y \in \mathbb{R}$ poljubna. Tedaj velja:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{iat}f(t))(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iat}f(t)e^{ity}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{it(y+a)}dt \\ &= \mathcal{F}(f(t))(y+a)\end{aligned}$$

6. Naj bo $f \in L^1(\mathbb{R})$ poljubna funkcija. Tedaj $\forall y, h \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned}|\hat{f}(y+h) - \hat{f}(y)| &= |\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(e^{it(y+h)} - e^{ity})dt| \\ &= |\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}f(t)(e^{ith} - 1)dt| = (*)\end{aligned}$$

Sedaj se spomnimo, da je $\forall x \in \mathbb{R}|e^{ix}| = 1$ in $|e^{ix} - 1| \leq 2$. Dodatno, ker je $f \in L^1(\mathbb{R})$, Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $M > 0$, da je $\int_{-\infty}^{-M}|f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{6}$ in da je $\int_{M}^{\infty}|f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{6}$. Naj bo torej $\varepsilon > 0$ in izberemo tak $M > 0$, da bosta veljali prejšnji oceni. Tedaj velja:

$$\begin{aligned}(*) &= |\int_{-\infty}^{-M} e^{ity}f(t)(e^{ith} - 1)dt + \int_{-M}^{M} e^{ity}f(t)(e^{ith} - 1)dt \\ &+ \int_{M}^{\infty} e^{ity}f(t)(e^{ith} - 1)dt| \\ &\leq |\int_{-\infty}^{-M} e^{ity}f(t)(e^{ith} - 1)dt| + |\int_{-M}^{M} e^{ity}f(t)(e^{ith} - 1)dt| \\ &+ |\int_{M}^{\infty} e^{ity}f(t)(e^{ith} - 1)dt| \\ &\leq \int_{-\infty}^{-M} |e^{ity}f(t)(e^{ith} - 1)|dt + \int_{-M}^{M} |e^{ity}f(t)(e^{ith} - 1)|dt \\ &+ \int_{M}^{\infty} |e^{ity}f(t)(e^{ith} - 1)|dt \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + \int_{-M}^{M} |f(t)||(e^{ith} - 1)|dt\end{aligned}$$

Ker je funkcija $th \mapsto e^{ith}$ zvezna, obstaja tak $\delta_0 > 0$, da velja sklep:

$$|th| < \delta_0 \Rightarrow |e^{ith} - 1| < \frac{\varepsilon}{3||f||_1}$$

Vzemimo $\delta = \frac{\delta_0}{M}$. Potem velja: Če je $|h| < \delta$, je $|t||h| \leq M|h| < \delta_0$ in posledično lahko ocenimo:

$$\int_{-M}^{M} |f(t)||(e^{ith} - 1)|dt < \int_{-M}^{M} |f(t)| \frac{\varepsilon}{3||f||_1} dt = \frac{\varepsilon}{3||f||_1} \int_{-M}^{M} |f(t)|dt$$
$$< \frac{\varepsilon}{3||f||_1} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{3||f||_1} ||f||_1 = \frac{\varepsilon}{3}$$

Povzemimo: Za dani ε smo našli tak $\delta > 0$, da $\forall y \in \mathbb{R}$ velja:

$$|h| < \delta \Rightarrow |\bar{f}(y+h) - \bar{f}(y)| < \varepsilon$$

Sledi, da je $\bar{f}$ enakomerno zvezna na $\mathbb{R}$.

7. To je direktna posledica (Riemman-Lebesgueve) leme 1.

□

Sedaj, ko poznamo nekaj bolj osnovnih lastnosti Fourierjeve transformacije, si oglejmo glavno lastnost, ki nas bo zanimala v zvezi z reševanjem diferencialnih enačb. Preden navedemo glavni rezultat, dokažimo še eno lemo.

Lema 2. *Naj bo $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ odvedljiva povsod, razen morda v končno mnogo točkah in naj bo njen odvod, f', integrabilna funkcija. Naj velja tudi $\int_0^\infty f(x)dx < \infty$ in $\int_0^\infty f'(x)dx < \infty$. Dodatno predpostavimo:*

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt + f(0) \ \forall x \in [0, \infty)$$

Tedaj je $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

Dokaz. Ker je f' integrabilna, je $\forall x \in [0, \infty) : |f(x)| = |\int_0^x f'(t)dt + f(0)| \leq \int_0^\infty |f'(t)|dt + |f(0)| < \infty$. Posledično sklepamo, da $\lim_{x\to\infty} f(x)$ obstaja. Denimo sedaj, da je $\lim_{x\to\infty} f(x) = c > 0$. Potem obstaja tak $x_0 \in [0, \infty)$, da je za vsak $x \geq x_0 f(x) \geq \frac{c}{2}$. Sledi potem, da je $\int_{x_0}^{x_0+2n} f(x)dx \geq 2n\frac{c}{2} = nc$. Ko pošljemo n proti ∞ pa gre ta izraz proti ∞, torej je $\int_{x_0}^\infty f(x)dx > \infty$, to pa je protislovno s predpostavko, da je f integrabilna na $[0, \infty)$. Sledi potem, da je $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. □

Izrek 2. *Naj bo f poljubna absolutno integrabilna funkcija na $\mathbb{R}$ z lastnostjo, da njen odvod, f', obstaja povsod, razen morda v končno mnogo točkah, ter je tudi sama absolutno integrabilna funkcija na $\mathbb{R}$. Denimo še, da $\forall x \in \mathbb{R}$ velja $f(x) = \int_0^x f'(t)dt + f(0)$. Tedaj je $\mathcal{F}(f')(y) = (-iy)\mathcal{F}(f)(y)$.*

Dokaz. Denimo torej, da je $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$, kjer f' obstaja povsod na $\mathbb{R}$, razen morda v končno točkah in naj velja $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = \int_0^x f'(t)dt + f(0)$. Potem je:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f')(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{iyt}dt = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{0} f'(t)e^{iyt}dt + \lim_{B\to\infty}\int_{0}^{B} f'(t)e^{iyt}dt \\
&= \lim_{A\to\infty}(f(t)e^{ity}|_{-A}^{0} - iy\int_{-A}^{0} f(t)e^{iyt}dt)+ \\
&+ \lim_{B\to\infty}(f(t)e^{ity} - iy|_0^B\int_0^B f(t)e^{iyt}dt) \\
&= \lim_{A\to\infty}(f(t)e^{ity}|_{-A}^{0}) - iy\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{iyt}dt + \lim_{B\to\infty}(f(t)e^{ity}|_0^B) \\
&- iy\int_0^{\infty} f(t)e^{iyt}dt \\
&= \lim_{A\to\infty}(f(t)e^{ity}|_{-A}^{0}) + \lim_{B\to\infty}(f(t)e^{ity}|_0^B) - iy\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iyt}dt
\end{aligned}$$

Vidimo, da smo blizu končnega rezultata. Preostane nam le še obravnava limit.

$$\begin{aligned}
&\lim_{A\to\infty}(f(t)e^{ity}|_{-A}^{0}) + \lim_{B\to\infty}(f(t)e^{ity}|_0^B) \\
&\qquad = f(0) - \lim_{A\to\infty}(f(-A)e^{-iAy}) + \lim_{B\to\infty}(f(B)e^{iBy}) - f(0)
\end{aligned}$$

Sedaj upoštevamo prejšnjo lemo 2 in vidimo, da je potem

$$\lim_{A\to\infty}(f(-A)e^{-iAy}) = 0 = \lim_{B\to\infty}(f(B)e^{iBy})$$

Sledi, da je $\mathcal{F}(f')(y) = (-iy)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ity}dt = (-iy)\mathcal{F}(f)(y)$. □

Opomba 8: Če je funkcija f iz izreka 2 zvezno odvedljiva, potem avtomatsko zadošča pogoju, da je integral lastnega odvoda.

Posledica 2.1. *Denimo, da je f k-krat odvedljiva na $\mathbb{R}$ ter, da so f in vsi njeni odvodi absolutno integrabilni na $\mathbb{R}$ ter da je vsak od teh (razen k-tega odvoda) integral svojega odvoda $\big(\forall x \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1,\ldots,k\} : f^{(i-1)}(x) = \int_0^x f^{(i)}(t)dt + f^{(i-1)}(0)\big)$. Potem je $\mathcal{F}(f^{(k)})(y) = (-iy)^k\mathcal{F}(f)(y)$.*

Dokaz. Zaporedna uporaba izreka 2. □

Trditev 4. *Za Fourierjevo transformacijo velja naslednje:*

1. *Naj bo f poljubna $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ funkcija, za katero velja, da sta $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$. Tedaj je $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R})$.*

2. *Naj bo f poljubna $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ funkcija, za katero velja, da so $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$. Tedaj je $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$.*

Dokaz. 1. Označimo $F(y) = \mathcal{F}(f)(y)$. Ker je $f \in L^1(\mathbb{R})$, po šesti točki trditve 3 velja, da je F zvezna funkcija na $\mathbb{R}$, kar pomeni, da je integrabilna na vsakem končnem intervalu. Ker je f zvezno odvedljiva na $\mathbb{R}$ in sta

$f, f' \in L^1(\mathbb{R})$, po izreku 2 velja enakost $F(y) = -\frac{\mathcal{F}(f')(y)}{iy}$. Od tod pa sledi, da je

$$\begin{aligned}
|F(y)| &= |\frac{-1}{iy}||\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{ity}dt| \\
&\leq \frac{1}{|y|}\int_{-\infty}^{\infty}|f'(t)||e^{ity}|dt \leq \frac{1}{|y|}\int_{-\infty}^{\infty}|f'(t)|dt \\
&= \frac{1}{|y|}||f'||_1
\end{aligned}$$

Označimo $M = ||f'||_1$. Tedaj velja ocena:

$$|F(y)|^2 \leq \frac{M^2}{y^2}$$

Izberimo sedaj poljuben $N > 0$ Ker je zvezna, je $|F|^2$ integrabilna na intervalu $[-N, N]$. Z uporabo prejšnje ocene preverimo, da je integrabilna na $[N, \infty)$:

$$\int_N^{\infty}|F(y)|^2dy \leq \int_N^{\infty}\frac{M^2}{y^2}dy = M^2[\frac{-1}{y}|_N^{\infty}] = \frac{M^2}{N} < \infty$$

Na enak način pokažemo konvergenco integrala na $(-\infty, -N]$, torej je F kvadratno integrabilna na $\mathbb{R}$.

2. Kot prej označimo $F(y) = \mathcal{F}(f)(y)$. Ker je $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ in $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$, po posledici 2.1 velja: $F(y) = -\frac{\mathcal{F}(f'')(y)}{y^2}$ in posledično (na enak način kot v prvi točki dokaza) vidimo, da je $|F(y)| \leq \frac{||f''||_1}{y^2}$. Vpeljemo oznako $M = ||f''||_1$. Tedaj se prejšnja ocena glasi: $|F(y)| \leq \frac{M}{y^2}$. Sedaj izberemo poljuben $N > 0$. Ker je F zvezna funkcija na $\mathbb{R}$, je tudi $|F|$, torej je $|F|$ integrabilna na intervalu $[-N, N]$. Izven tega intervala uporabimo prejšnjo oceno in tako vidimo:

$$\int_N^{\infty}|F(y)|dy \leq \int_N^{\infty}\frac{M}{y^2}dy = M[\frac{-1}{y}|_N^{\infty}] = \frac{M}{N} < \infty$$

Za $(-\infty, -N]$ pokažemo integrabilnost na enak način. Sledi, da je $F \in L^1(\mathbb{R})$.

□

Izrek 3. *Naj bosta funkciji $f(t)$ in $tf(t)$ obe absolutno integrabilni na $\mathbb{R}$. Tedaj je $\frac{d}{dy}\mathcal{F}(f)(y) = \mathcal{F}(itf)(y)$ $\forall y \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Naj bo $y \in \mathbb{R}$ poljuben. Direktno izračunajmo odvod $\bar{f}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}(\frac{\bar{f}(y+h) - \bar{f}(y)}{h}) &= \lim_{h\to 0}(\frac{1}{h}\mathcal{F}(e^{iht}f(t))(y) - \mathcal{F}(f(t)(y))) \\
&= \lim_{h\to 0}(\mathcal{F}(f(t)\frac{(e^{ith}-1)}{h})(y)) = (*)
\end{aligned}$$

Sedaj opazimo, da je $\lim_{h\to 0}\frac{e^{ith}-1}{h} = \frac{d}{dx}(e^{itx})(x=0) = ite^0 = it$. To pomeni, da je $\lim_{h\to 0} f(t)\frac{e^{ith}-1}{h} = itf(t)$ in ker je po predpostavki $tf(t)$ absolutno integrabilna, integral $\int_{-\infty}^{\infty}(\lim_{h\to 0} f(t)\frac{(e^{ith}-1)}{h})dt$ obstaja in posledično obstaja tudi integral $\int_{-\infty}^{\infty}(\lim_{h\to 0} f(t)\frac{(e^{ith}-1)}{h})e^{ity}dt$. To pa pomeni, da lahko zamenjamo limito in integral. Ko to storimo, dobimo ravno $(*)$. Po drugi strani, pa je $\int_{-\infty}^{\infty}(\lim_{h\to 0} f(t)\frac{(e^{ith}-1)}{h})e^{ity}dt = \int_{-\infty}^{\infty} itf(t)e^{ity}dt = \mathcal{F}(itf(t))(y)$. Sledi, da je $\frac{d}{dy}\mathcal{F}(f)(y) = \mathcal{F}(itf)(y)$. □

Posledica 3.1. *Naj bodo funkcije $f(t), tf(t), t^2f(t), \ldots, t^nf(t)$ vse absolutno integrabilne na $\mathbb{R}$. Tedaj je $\frac{d^n}{dy^n}\mathcal{F}(f(t))(y) = \mathcal{F}((it)^n f(t))(y) \forall y \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Rezultat dobimo z zaporedno uporabo izreka 3. □

Sedaj, ko razmeroma dobro poznamo lastnosti Fourierjeve transformacije, se lahko vprašamo naslednje:

1. Ali obstaja inverzna transformacija? Če da, kdaj oz. pod katerimi pogoji?
2. Ali obstaja kakšna zveza med produktom funkcij in fourierjevo transformacijo?

Definicija 14: Za $f \in L^1(\mathbb{R})$ pravimo, da v točki $t \in \mathbb{R}$ zadošča *Dinijevem pogoju*, če obstaja tak $a > 0$, da obstaja integral $\int_0^a |\frac{f(t+u)+f(t-u)-2f(t)}{u}|du$.

Opomba 9: Opazimo, da če je funkcija f zvezna in v točki t obstajata levi ter desni odvod, je Dinijev pogoj izpolnjen. Posebej, zvezno odvedljive funkcije zadoščajo Dinijevem pogoju na celem $\mathbb{R}$.

Izrek 4. *Če $f \in L^1(\mathbb{R})$ v točki $t \in \mathbb{R}$ zadošča Dinijevem pogoju (za nek $a > 0$), potem velja:*

$$f(t) = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\mathcal{F}(f)(x)e^{-itx}dx$$

Dokaz. Naj bo f poljubna funkcija iz $L^1(\mathbb{R})$, ki zadošča Dinijevem pogoju za izbrana fiksna $t \in \mathbb{R}$ in $a > 0$ Označimo $F(x) = \mathcal{F}(f)(x)$ in upoštevamo, da je $F(x)$ zvezna in omejena funkcija na $\mathbb{R}$. Posledično, za vsak $R > 0$ integral $\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} F(x)e^{-itx}dx = S(R,t)$ obstaja. Pa ga poračunajmo:

$$S(R,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} F(x)e^{-itx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{ixu}du)e^{-itx}dx = (*)$$

Zaradi enakomerne konvergence integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)(\int_{-R}^{R} e^{i(u-t)x}dx)du$ lahko vrstni uporabimo Fubinijev izrek in zamenjamo vrstni red integriranja. Sledi:

$$(*) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)(\int_{-R}^{R}\cos((u-t)x) + i\sin((u-t)x)dx)du$$

tukaj upoštevamo, da je sin liha funkcija ter da jo integriramo po simetričnem območju $[-R, R]$. Njen integral bo potem enak 0, kar pomeni, da je:

$$\begin{aligned}(*) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\Big(\int_{-R}^{R}\cos((u-t)x)dx\Big)du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\Big[\frac{\sin((u-t)x)}{u-t}\Big|_{-R}^{R}\Big]du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{2\sin((u-t)R)}{u-t}du = \\ &= \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\infty}^{t} f(u)\frac{\sin((u-t)R)}{u-t}du + \int_{t}^{\infty} f(u)\frac{\sin((u-t)R)}{u-t}du\Big) = (\boxdot)\end{aligned}$$

V levi integral sedaj uvedemo novo spremenljivko $x = t-u, dx = -du$, v desnega pa $x = u - t, dx = du$. Tako dobimo:

$$(\boxdot) = \frac{1}{\pi}\Big(\int_{0}^{\infty} f(t-x)\frac{\sin(Rx)}{x}dx + \int_{0}^{\infty} f(t+x)\frac{\sin(Rx)}{x}dx\Big)$$

Sedaj upoštevamo znan rezultat iz analize: Vemo, da je $\int_0^\infty \frac{\sin(z)}{z}dz = \frac{\pi}{2}$. Z uvedbo nove spremenljivke $z = Rx, dz = Rdx$, je potem tudi $\int_0^\infty \frac{\sin(Rx)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$. Posledično lahko zapišemo $f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\frac{\sin(Rx)}{x}dx$.
Sedaj, upoštevajoč prejšnjo enakost in $(\boxdot) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(t-x)+f(t+x)}{2}\frac{\sin(Rx)}{x}dx$, poračunajmo $S(R,t) - f(t)$:

$$\begin{aligned}S(R,t) - f(t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Big(\frac{f(t-x)+f(t+x)}{2} - f(t)\Big)\frac{\sin(Rx)}{x}dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Big(\frac{f(t-x)+f(t+x)-2f(t)}{2}\Big)\frac{\sin(Rx)}{x}dx\end{aligned}$$

Označimo $g(t,x) = \frac{f(t-x)+f(t+x)-2f(t)}{2}$ in se spomnimo, da f za naša fiksirana t in $a > 0$ zadošča Dinijevem pogoju, torej obstaja integral $\int_0^a |\frac{g(t,x)}{x}|dx$. Sledi, da je za ta izbrani $a > 0$ $S(R,t) - f(t) = \int_0^a \frac{g(t,x)}{x}\sin(Rx)dx + \int_a^\infty \frac{g(t,x)}{x}\sin(Rx)dx$. Izberimo sedaj poljuben $\varepsilon > 0$. Po (Riemman-Lebesguevi) lemi 1 obstaja tak $R_1 > 0$, da bo za vse $R > R_1$ veljalo $|\frac{g(t,x)}{x}\sin(Rx)| < \frac{\varepsilon\pi}{4a}$. Posledično za vse $R > R_0$ velja:

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^a \frac{g(t,x)}{x}\sin(Rx)dx\Big| &\leq \int_0^a \Big|\frac{g(t,x)}{x}\sin(Rx)\Big|dx \\ &< \int_0^a \frac{\varepsilon\pi}{4a}dx = \frac{\varepsilon\pi}{4}\end{aligned}$$

Velja tudi:

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^\infty \frac{g(t,x)}{x}\sin(Rx)dx\Big| &= \Big|\int_a^\infty \frac{f(t+x)+f(t-x)}{2x}\sin(Rx)dx - \int_a^\infty f(t)\frac{\sin(Rx)}{x}dx\Big| \\ &\leq \Big|\int_a^\infty \frac{f(t+x)+f(t-x)}{2x}\sin(Rx)dx\Big| + \Big|\int_a^\infty f(t)\frac{\sin(Rx)}{x}dx\Big|\end{aligned}$$

Ker je funkcija $x \mapsto f(t+x)$ absolutno integrabilna na $\mathbb{R}$, je funkcija $x \mapsto \frac{f(t+x)}{x}$ absolutno integrabilna na $[a,\infty)$ in posledično enak sklep (ker je $L^1([a,\infty)$ vektorski prostor) velja tudi za funkcijo $x \mapsto \frac{f(t+x)+f(t-x)}{2x}$. Po lemi 1 je

$$\begin{aligned}
&\lim_{R\to\infty}\Big(\int_a^\infty \frac{f(t+x)+f(t-x)}{2x}\sin(Rx)dx\Big) \\
&= \int_a^\infty \Big(\lim_{R\to\infty}\frac{f(t+x)+f(t-x)}{2x}\sin(Rx)dx\Big) = 0
\end{aligned}$$

Posledično obstaja tak $R_2 > 0$, da za vsak $R > R_2$ velja:

$$|\int_a^\infty \frac{f(t+x)+f(t-x)}{2x}\sin(Rx)dx| < \frac{\varepsilon\pi}{8}$$

Na koncu opazimo še, da je $|\int_a^\infty f(t)\frac{\sin(Rx)}{x}dx| = |f(t)||\int_a^\infty \frac{\sin(Rx)}{x}dx|$. V integral vpeljemo novo spremenljivko: $y = Rx, dy = Rdx$. Tedaj velja:

$$|f(t)||\int_a^\infty \frac{\sin(Rx)}{x}dx| = |f(t)||\int_{Ra}^\infty \frac{\sin(y)}{y}dy|$$

Ker je $a > 0$ fiksno število in vemo, da je funkcija $y \mapsto \frac{\sin(y)}{y}$ absolutno integrabilna na $[a,\infty)$, obstaja tak $R_3 > 0$, da za vsak $R > R_3$ velja:

$$|\int_{Ra}^\infty \frac{\sin(y)}{y}dy| < \frac{\varepsilon\pi}{8|f(t)|}$$

Označimo $R_0 = \max\{R_1, R_2, R_3\}$. Tedaj za vsak $R > R_0$ velja:

$$\begin{aligned}
|S(R,t) - f(t)| &= \frac{2}{\pi}|\int_0^a \frac{g(t,x)}{x}\sin(Rx)dx + \int_a^\infty \frac{g(t,x)}{x}\sin(Rx)dx| \\
&\leq \frac{2}{\pi}\Big(|\int_0^a \frac{g(t,x)}{x}\sin(Rx)dx| + |\int_a^\infty \frac{g(t,x)}{x}\sin(Rx)dx|\Big) \\
&< \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\varepsilon\pi}{4} + |\int_a^\infty \frac{f(t+x)+f(t-x)}{2x}\sin(Rx)dx|\Big) \\
&+ \frac{2}{\pi}|\int_a^\infty f(t)\frac{\sin(Rx)}{x}dx| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{\pi}\frac{\varepsilon\pi}{8} + \frac{2}{\pi}|f(t)|\frac{\varepsilon\pi}{8|f(t)|} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Velja torej: $f(t) = \lim_{R\to\infty} S(R,t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^R F(x)e^{-itx}dx$. □

Opomba 10: Že prej smo opazili, da zvezno odvedljive funkcije zadoščajo Dinijevem pogoju. Po izreku 4 potem velja, da je Fourierjeva transformacija obrnljiva na $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$. Velja tudi, da če je $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ in so $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$, potem je $\forall t \in \mathbb{R} : f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(x)e^{-itx}dx$. To lastnost bomo uporabili malo kasneje.

S tem smo odgovorili na prvo vprašanje. Odgovorimo sedaj še na drugo.

Definicija 15: Naj bosta $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Funkcijo $(f * g)$ s predpisom $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^\infty f(t)g(x-t)dt \ \forall x \in \mathbb{R}$ imenujemo *konvolucija* f in g.

Trditev 5. *Naj bodo $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$ poljubne. Velja:*

1. $f * g \in L^1(\mathbb{R})$
2. $\forall a \in \mathbb{R} : (af) * g = a(f * g)$
3. $(f + g) * h = f * h + g * h$
4. $(f * g) * h = f * (g * h)$
5. $f * g = g * f$

Dokaz.

1. Velja: $\int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(x)|dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \big(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)||g(x - t)|dt \big) dx$. Sedaj upoštevamo, da je funkcija $x \mapsto g(x - t)$ absolutno integrabilna za vsak $t \in \mathbb{R}$. Potem lahko zamenjamo vrstni red integriranja in velja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)||g(x-t)|dt \big) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \big(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-t)|dx \big) dt = ||f||_1 ||g||_1$$

Velja torej: $\int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(x)|dx \leq ||f||_1 ||g||_1 < \infty$, torej je $(f * g) \in L^1(\mathbb{R})$.

2. Naj bo $a \in \mathbb{R}$. Tedaj je

$$((af) * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} af(t)g(x - t)dt = a \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x - t)dt = a(f * g)(x)$$

3. Kratek račun pokaže:

$$\begin{aligned} ((f + g) * h)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) + g(t))h(x - t)dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(x - t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(t)h(x - t)dt \\ &= (f * h)(x) + (g * h)(x) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} (f * (g * h))(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(g * h)(x - t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \big(\int_{-\infty}^{\infty} g(s)h(x - t - s)ds \big) dt = (*) \end{aligned}$$

Če uvedemo novo spremenljivko $y = t + s, dy = ds$, potem se integral $(*)$ spremeni v

$$(*) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(y - t)h(x - y)dy \big) dt$$

Ker je $f * g \in L^1(\mathbb{R})$, lahko zamenjamo vrstni red integriranja. Potem je

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(y - t)h(x - y)dt \big) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(y - t)dt \big) h(x - y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(y)h(x - y)dy = ((f * g) * h)(x) \end{aligned}$$

5. V $(f * g)(x)$ vpeljemo novo spremenljivko $u = x - t, du = -dt$. Tedaj je

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = -\int_{\infty}^{-\infty} f(x-u)g(u)du$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(x-u)du = (g * f)(x)$$

□

Izrek 5. *Naj bosta f in g absolutno integrabilni funkciji na $\mathbb{R}$. Tedaj velja:*

$$\mathcal{F}(f * g)(y) = \mathcal{F}(f)(y) \cdot \mathcal{F}(g)(y)$$

Dokaz. Po definiciji je

$$\mathcal{F}(f * g)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}(f * g)(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt\Big)dx$$

Ker integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}g(x-t)dx$ enakomerno konvergira, lahko po Fubinijevem izreku zamenjamo vrstni red integracije in tako dobimo:

$$\mathcal{F}(f * g)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}g(x-t)dx\Big)dt$$

Sedaj vpeljemo novo spremenljivko: $s = x - t, ds = dx$ in tako dobimo:

$$\mathcal{F}(f * g)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s+t)y}g(s)ds\Big)dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}f(t)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{isy}g(s)ds\Big)dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}f(t)dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{isy}g(s)ds$$
$$= \mathcal{F}(f)(y) \cdot \mathcal{F}(g)(y)$$

□

S tem smo pa tudi odgovorili na drugo zastavljeno vprašanje. Sedaj, ko smo spoznali Fourierjevo transformacijo, dokažimo še t.i. Parsevalovo enakost, nato pa se lahko lotimo premisleka o uporabi Fourierjeve transformacije pri reševanju diferencialnih enačb.

Izrek 6 (Parsevalova enakost)**.** *Naj bo f poljubna $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$funkcija, za katero velja, da so $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$. Tedaj je*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f)(y)|^2 dy$$

Dokaz. Po trditvi 4 vemo, da je F kvadratno integrabilna na $\mathbb{R}$. Dodatno vemo, glede na predpostavke, da velja inverzna formula $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{-ixy}dy$. Potem velja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{f(x)}dx = (*)$$

in upoštevajoč inverzno formulo je potem

$$(*) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{-ixy}dy\Big)dx$$

Zaradi konvergence integrala $\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}e^{-ixy}dx$ lahko uporabimo Fubinijev izrek in zamenjamo vrstni red integracije. Tako je

$$\begin{aligned}(*) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}e^{-ixy}dx\Big)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\overline{\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixy}dx\Big)}dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\overline{F(y)}dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(y)|^2dy\end{aligned}$$

□

Opomba 11: V resnici bi lahko pri izreku 6 zahtevali še manj. Dovolj bi bilo, da sta $f, \mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$ in da f zadošča Dinijevem pogoju na celem $\mathbb{R}$. Dokaz se ob teh predpostavkah bistveno ne spremeni.

Zgled 15: Funkcija $\chi_{[-a,a]}$ je dvakrat zvezno odvedljiva in absolutno integrabilna na $\mathbb{R}$. Njena odvoda sta oba ničelni funkciji, torej tudi absolutno integrabilna na $\mathbb{R}$. Potem lahko s pomočjo Fourierjeve transformacije in Parsevalove enakosti določimo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(y)}{y^2}dy$. Po zgledu 13 namreč vemo, da je $\mathcal{F}(\chi_{[-a,a]})(y) = \frac{2\sin(ay)}{y}$. Ko za $a = 1$ upoštevamo Parsevalovo enakost, na desni strani dobimo $4\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(y)}{y^2}dy$, na levi pa $\int_{-1}^{1} 1^2dt = 2$. Sledi rezultat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(y)}{y^2}dy = \frac{1}{2}$$

Kot zanimivost omenimo še, da se da Fourierjevo transformacijo definirati tudi na $L^1(\mathbb{R}^n)$ (za poljuben $n \in \mathbb{N}$). Lastnosti te transformacije so večinoma naravne analogije lastnosti transformacije za $n = 1$. Te posplošene transformacije v tej nalogi ne bomo obravnavali, več o njej pa lahko bralec najde v [2].

3.2 Metoda uporabe

Ideja uporabe Fourierjeve transformacije pri reševanju diferencialnih enačb je naslednja: Naj bo dana Cauchyjeva naloga, kjer ob danih začetnih (ali robnih) pogojih iščemo funkcijo $y(x)$, ki zadošča enačbi $f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)(x)}) = 0$ in naj ta enačba vsebuje koeficiente, ki so glede na x konstantni, eksponentni, ali pa polinomski. Tedaj lahko rešitev, $y(x)$, te enačbe poiščemo tako, da enačbo transformiramo (glede na x). Naj bo $Y(\eta) = \mathcal{F}(y(x))(\eta)$. Tedaj se, s pomočjo lastnosti Fourierjeve transformacije, enačba $f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ spremeni v enačbo, ki je bodisi navadna, bodisi navadna diferencialna enačba, za funkcijo $Y(\eta)$. Pri transformiranju seveda tudi upoštevamo začetne (ali robne)

pogoje originalne enačbe. Ko dobimo rešitev $Y(\eta)$ te (tipično) preprostejše enačbe, z inverzno Fourierjevo transformacijo dobimo rešitev originalne Cauchyjeve naloge. Ta metoda je posebej uporabna pri linearnih navadnih diferencialnih enačbah s konstantnimi koeficienti.
Kadar rešujemo parcialne diferencialne enačbe lahko še vedno uporabimo Fourierjevo transformacijo, a moramo pri tem biti pazljivi: Klasična Fourierjeva transformacija sprejme le funkcije ene spremenljivke. Torej, če v enačbi nastopa funkcija večih spremenljivk, izberemo eno, ostale pa »fiksiramo«. S pomočjo Fourierjeve transformacije se nam tudi tukaj rešitev prenese na problem, ki je tipično lažje rešljiv, inverzna Fourierjeva transformacija pa nam da rešitev originalne naloge. Kot bomo videli na primeru toplotne enačbe na neskončnem nosilcu, nam ta pristop še vedno lahko, seveda ob določenih predpostavkah, da rešitev.
Tipična omejitev pri uporabi Fourierjeve transformacije je ta, da bodo dobljene rešitve L^1 ali L^2 funkcije, kar pomeni, da lahko spregledamo kako bolj »skromno« rešitev. Dodatna omejitev je tudi ta, da je to, ali dobimo rešitev originalne enačbe, odvisna od tega, ali lahko najdemo funkcijo, katere transformiranka je enaka $Y(\eta)$. Ta problem je lahko včasih kar zahteven.
Oglejmo si nekaj primerov uporabe.

3.3 Primeri uporabe

Zgled 16: S pomočjo Fourierjeve transformacije rešimo diferencialno enačbo $xy'' + 2y' + xy = 0$. Enačbo transformiramo in tako dobimo:

$$\mathcal{F}(xy''(x) + 2y'(x) + xy(x)) = 0$$

oziroma

$$\mathcal{F}(xy''(x))(\eta) + 2\mathcal{F}(y'(x))(\eta) + \mathcal{F}(xy(x))(\eta) = 0$$

Upoštevamo lastnosti Fourierjeve transformacije ter poračunajmo člene v enačbi:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(xy''(x))(\eta) &= (-i)\frac{d}{d\eta}(\mathcal{F}(y''(x))(\eta)) = (-i)\frac{d}{d\eta}((-i\eta)^2 Y(\eta))\\ &= i\frac{d}{d\eta}(\eta^2 Y(\eta)) = i(2\eta Y(\eta) + \eta^2 Y'(\eta))\end{aligned}$$

Podobno vidimo, da je $\mathcal{F}(xy(x))(\eta) = (-i)Y'(\eta)$ in $\mathcal{F}(y'(x))(\eta) = (-i)\eta Y(\eta)$. Naša enačba se torej glasi:

$$2i\eta Y(\eta) + i\eta^2 Y'(\eta) - 2i\eta Y(\eta) - iY'(\eta) = 0$$

oziroma

$$(\eta^2 - 1)Y'(\eta) = 0$$

To je pa homogena navadna diferencialna enačba prvega reda. Določimo še njeno rešitev:

$$\begin{aligned} dY &= (\eta^2 - 1)d\eta\\ Y &= \frac{\eta^3}{3} - \eta + C\end{aligned}$$

Denimo sedaj, da $y(x)$ zadošča pogojem, da obstaja inverzna Fourierjeva transformacija. Pojavi se vprašanje, kaj točno je Fourierjev inverz konstante. Če bi vedeli to, bi lahko potenčne funkcije, in s tem poljuben polinom, izrazili s pomočjo odvodov te funkcije. Na našo srečo odgovor obstaja - t. i. *Diracova delta funkcija s polom v* 0. Le ta je definirana kot limita $\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon(x)$, kjer so δ_ε gladke ($\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) nenegativne funkcije z nosilcem $[-\varepsilon, \varepsilon]$, za katere velja: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)dx = 1$. Za te funkcije namreč velja, da je za poljubno zvezno funkcijo f (definirano na nekem intervalu, ki vsebuje 0, ali celem $\mathbb{R}$), $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\varepsilon(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\delta_\varepsilon(x)dx$. Sedaj upoštevamo izrek o povprečni vrednosti: $\exists x_\varepsilon \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, da je
$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\delta_\varepsilon(x)dx = f(x_\varepsilon)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)dx = f(x_\varepsilon)$. Potem pa za $\delta_0(x)$ velja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_0(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\delta_\varepsilon(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} f(x_\varepsilon) = 0$$

Posledično je $\mathcal{F}(\delta_0)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t)e^{ity}dt = e^0 = 1$. Upoštevajoč lastnosti Fourierjeve transformacije je potem rešitev naše naloge:

$$y(x) = C\delta_0(x) - i\delta_0'(x) - \frac{i}{3}\delta_0^{(3)}(x)$$

Ta zgled nam služi v poduk: S Fourierjevo transformacijo si poenostavimo en del problema, lahko pa si s tem otežimo drugi del - povratek preko inverzne transformacije. V tem primeru, je na srečo nekdo že našel rešitev.

Opomba 12: Diracova delta funkcija lahko ima pol v poljubni točki na realni osi. Z δ_a označimo Diracovo delta funkcijo s polom v $a \in \mathbb{R}$. Diracova delta funkcija v resnici ni funkcija v pravem pomenu besede, lahko pa jo razumemo kot linearen funkcional, ki funkciji f priredi njeno vrednost v polu a, torej: $\delta_a : f \mapsto f(a)$. Diracov delta s polom v 0 ima tudi pomembno vlogo pri določanju integralskega jedra toplotne enačbe.

Lotimo se sedaj primera reševanja linearne parcialne diferencialne enačbe prvega reda:

Zgled 17: S pomočjo Fourierjeve transformacije rešimo enačbo
$tu_x(x,t) + u_t(x,t) = 0$, pri začetnem pogoju $u(x,0) = f(x)$.
Najprej enačbo transformiramo po spremenljivki x. Označimo:
$U(y,t) = \mathcal{F}(u(x,t))(y)$. Premislimo na tej točki, kako s pomočjo U izraziti transformiranko od $u_t(x,t)$. $\mathcal{F}(u_t)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{ixy}dx$. To lahko obravnavamo kot integral s parametrom t in, ob predpostavki da rešitev zadošča pogojem, lahko zamenjamo integriranje in parcialno odvajanje po t. Torej pišemo: $\mathcal{F}(u_t(x,t))(y) = \frac{\partial}{\partial t}U(y,t) = U_t(y,t)$. Velja še:
$\mathcal{F}(tu_x(x,t))(y) = t\mathcal{F}(u_x(x,t))(y) = -iytU(y,t)$. Sedaj zapišimo transformirano enačbo:

$$U_t(y,t) - iytU(y,t) = 0$$

Tukaj pa gre, v resnici, za navadno diferencialno enačbo prvega reda. Poračunajmo rešitev.

$$
\begin{aligned}
U_t(y,t) &= iytU(y,t) \\
\frac{dU}{U} &= iytdt \\
\ln|U| &= \frac{iyt^2}{2} + C(y) \\
U(y,t) &= D(y)e^{\frac{iyt^2}{2}}
\end{aligned}
$$

Sedaj upoštevamo začetni pogoj: $U(y,0) = \mathcal{F}(u(x,0))(y) = \mathcal{F}(f(x))(y)$. Velja torej: $U(y,t) = \mathcal{F}(f(x))(y) \cdot e^{iy\frac{t^2}{2}}$. Sedaj se spomnimo lastnosti 4 iz trditve 3, ki nam pove: $\mathcal{F}(f(x-a))(y) = e^{iay}\mathcal{F}(f(x))(y)$. Ko to upoštevamo v naši enačbi za $a = \frac{t^2}{2}$, dobimo: $\mathcal{F}(u(x,t))(y) = \mathcal{F}(f(x - \frac{t^2}{2}))(y)$. Sklepamo potem, da je rešitev ravno: $u(x,t) = f(x - \frac{t^2}{2})$.

V tem zgledu smo v resnici rešili celo družino enačb, ki jo določa izbira začetnega pogoja, saj nikoli dejansko nismo potrebovali vedeti predpisa funkcije f. Poglejmo si sedaj še toplotno enačbo na neskončnem nosilcu.

Zgled 18: S pomočjo Fourierjeve transformacije reši toplotno enačbo

$$u_t = ku_{xx}$$

na $\mathbb{R} \times [0,\infty)$ pri začetnem pogoju $u(x,0) = f(x)$.
Najprej predpostavimo, da delamo s funkcijami, nad katerimi je Fourierjeva transformacija bijektivna (s tem se rešimo skrbi, da inverzna fourierjeva transformacija morda ne bi obstajala). Ko enačbo transformiramo, dobimo:

$$U_t(y,t) = k(-iy)^2U(y,t)$$

oziroma

$$U_t = -ky^2U$$

Rešimo to enačbo:

$$
\begin{aligned}
U_t &= -ky^2U \\
\frac{dU}{U} &= -ky^2dt \\
\ln(U) &= -ky^2t + C(y) \\
U(y,t) &= D(y)e^{-ky^2t}
\end{aligned}
$$

Ponovno upoštevamo začetni pogoj:
$\mathcal{F}(f(x))(y) = \mathcal{F}(u(x,0))(y) = U(y,0) = D(y)$ Sledi torej, da je $U(y,t) = \mathcal{F}(f(x))(y)e^{-ky^2t}$. Če nam uspe poračunati inverzno Fourierjevo transformacijo funkcije e^{-ky^2t}, ki jo označimo z $E(x,t)$ potem lahko funkcijo $u(x,t)$ zapišemo kot konvolucijo E in f. Poskusimo:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}(e^{-ky^2t})(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ky^2t-ixy}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt(y^2+\frac{ixy}{kt})}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt((y+\frac{ix}{2kt})^2+\frac{x^2}{4k^2t^2})}dy \\
&= \frac{e^{\frac{-x^2}{4kt}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt(y+\frac{ix}{2kt})^2}dy = (*)
\end{aligned}
$$

Sedaj vpeljemo novo spremenljivko $u = y + \frac{ix}{2kt}, du = dy$ in tako dobimo:

$$
(*) = \frac{e^{\frac{-x^2}{4kt}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ktu^2}du
$$

Tukaj upoštevamo znan rezultat iz analize: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2}du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Potem, ob predpostavki, da je $k \geq 0$, dobimo:

$$
(*) = \frac{e^{\frac{-x^2}{4kt}}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{kt}} = \frac{e^{\frac{-x^2}{4kt}}}{\sqrt{2kt}} = E(x,t)
$$

Ker je $U(y,t) = \mathcal{F}(f)(y) \cdot \mathcal{F}(E(x,t))(y)$, trdimo, da je:

$$
u(x,t) = (f * E)(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2kt}}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{\frac{-(x-s)^2}{4kt}}ds
$$

. Kratek račun nam pokaže, da imamo tudi prav:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k}u_t(x,t) &= \frac{-1}{2kt}u(x,t) + \frac{1}{\sqrt{2kt}^5}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)(x-s)^2e^{-\frac{(x-s)^2}{4kt}}ds \\
u_x(x,t) &= \frac{-1}{\sqrt{2kt}^3}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)(x-s)e^{-\frac{(x-s)^2}{4kt}}ds \\
u_{xx}(x,t) &= \frac{-1}{2kt}u(x,t) + \frac{1}{\sqrt{2kt}^5}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)(x-s)^2e^{-\frac{(x-s)^2}{4kt}}ds
\end{aligned}
$$

Torej je $\frac{1}{k}u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$ oziroma $u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t)$.

Za konec tega poglavja si oglejmo še, kako se s pomočjo Fourierjeve transformacije reši primer 2.

Zgled 19: Naloga se glasi: Naj bo $c > 0$. Poišči rešitev valovne enačbe z eno prostorsko spremenljivko $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ na $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ pri začetnih pogojih:
$\forall x \in \mathbb{R} : u(x,0) = f(x)$ & $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$. Pri tem predpostavi, da sta $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ in $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
V tej nalogi bomo uporabili ekvivalentno definicijo Fourierjeve transformacije, ki smo jo navedli v opombi 7.

Najprej enačbo transformiramo in tako dobimo:

$$U_{tt}(y,t) = c^2(2\pi iy)^2U(y,t)$$

pri pogojih $U(y,0) = \mathcal{F}(f(x))(y)$ in $U_t(y,0) = \mathcal{F}(g(x))(y)$. Tej enačbi priredimo karakteristični polinom $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\pi^2c^2y^2$, katerega ničli sta $\lambda_{1,2} = \pm 2i\pi cy$. Potem je rešitev te NDE drugega reda kar

$$U(y,t) = A(y)e^{2\pi icyt} + B(y)e^{-2\pi icyt}$$

Sedaj upoštevamo prvi začetni pogoj:
$U(y,0) = A(y) + B(y) = \mathcal{F}(f(x))(y) = \bar{f}(y)$. Drugi začetni pogoj nam da:
$U_t(y,0) = 2\pi icy(A(y) - B(y)) = \mathcal{F}(g(x))(y) = \bar{g}(y)$. Sedaj izrazimo funkciji A in B na naslednji način:

$$A(y) = \frac{2\pi icy\bar{f}(y) + \bar{g}(y)}{4\pi icy}, B(y) = \frac{2\pi icy\bar{f}(y) - \bar{g}(y)}{4\pi icy}$$

Potem ima funkcija U obliko:

$$\begin{aligned} U(y,t) &= \frac{2\pi icy\bar{f}(y) + \bar{g}(y)}{4\pi icy}e^{2\pi icyt} + \frac{2\pi icy\bar{f}(y) - \bar{g}(y)}{4\pi icy}e^{-2\pi icyt} \\ &= \frac{1}{4\pi icy}\big(2\pi icy\bar{f}(y)(e^{2\pi icty} + e^{-2\pi icty}) + \bar{g}(y)(e^{2\pi icty} - e^{-2\pi icty})\big) \end{aligned}$$

V prvem členu upoštevamo ekvivalentno formulacijo lastnosti 4 iz trditve 3 za verzijo Fourierjeve transformacije, ki jo trenutno uporabljamo:

$$\mathcal{F}(f(t-a))(y) = e^{2\pi iay}\mathcal{F}(f(t))(y)\ \forall a \in \mathbb{R}$$

V drugem členu upoštevamo analog rezultata iz zgleda 13, ki bi ga dobili z alternativno definicijo:

$$\mathcal{F}(\chi_{[-a,a]})(y) = \frac{\sin(2\pi ay)}{\pi y}$$

Potem se prvi člen preoblikuje v $\frac{1}{2}(\mathcal{F}(f(x-ct))(y) + \mathcal{F}(f(x+ct))(y))$, drugi člen pa se preoblikuje v $\frac{1}{2c}\bar{g}(y) \cdot \mathcal{F}(\chi_{[-ct,ct]})$. Izračunajmo $(g * \chi_{[-ct,ct]})(x)$:

$$\begin{aligned} (g * \chi_{[-ct,ct]})(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\chi_{[-ct,ct]}(x-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\chi_{[x-ct,x+ct]}(u)du \\ &= \int_{x-xt}^{x+ct} g(u)du \end{aligned}$$

Potem lahko zapišemo $\mathcal{F}(g * \chi_{[-ct,ct]})(y) = \bar{g} \cdot \mathcal{F}(\chi_{[-ct,ct]})(y)$. Naša funkcija U se sedaj glasi:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u(x,t))(y) = U(y,t) &= \mathcal{F}(\frac{(f(x-ct) + f(x+ct))}{2})(y) + \mathcal{F}(\frac{(g * \chi_{[-ct,ct]}(x))}{2c})(y) \\ &= \mathcal{F}(\frac{(f(x-ct) + f(x+ct))}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-xt}^{x+ct} g(u)du)(y) \end{aligned}$$

Od tod sledi:

$$u(x,t) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-xt}^{x+ct} g(u)du$$

Ta rešitev je znana kot D'Alembertova formula.

Sedaj, ko smo končali z obravnavo Fourierjeve transformacije, se lotimo Laplaceove, ki ji je po predpisu sorodna.

4 Laplaceova transformacija

Kot smo prej napovedali, se bomo sedaj spoznali z t. i. Laplaceovo transformacijo. Le to uporabljamo pri reševanju diferencialnih enačb iz enakih razlogov kot Fourierjevo - Običajno transformiranje enačbe problem poenostavi na navadno enačbo ali pa na diferencialno enačbo nižjega reda. Tudi tukaj je uporabnost omejena s tem, ali znamo poračunati Laplacev inverz rešitve transformiranega problema. Ena izmed prednosti Laplaceove transformacije je ta, da slika v kompleksne funkcije, kar pomeni, da lahko uporabimo pristope iz kompleksne analize in reševanja diferencialnih enačb v $\mathbb{C}$. Kot v prejšnjem poglavju, bomo tudi v tem najprej navedli osnovno teorijo v zvezi z Laplaceovo transformacijo, nato pa se bomo lotili metode in primerov uporabe. Pri tem bomo levji delež črpali iz [2].

4.1 Osnovne definicije in rezultati

Definicija 16: Naj bo $a \geq 0$. Za odsekoma zvezno funkcijo $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, za katero obstajata taka $k \in \mathbb{R}$ in $M > 0$, da je $|f(t)| \leq Me^{kt}$ $\forall t \in [a, \infty)$, pravimo, da je *funkcija eksponentnega naraščanja* za M in k na $[a, \infty)$.

Definicija 17: Naj bo $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ poljubna funkcija. *Laplaceova transformiranka F*, funkcije f je definirana s predpisom:

$$F(z) = \mathcal{L}(f(t))(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt$$

tam, kjer integral obstaja.

Opomba 13: Vzemimo poljubno $L^1(\mathbb{R})$ funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katero je $f(t) = 0$ $\forall t < 0$. Tedaj ima njena Fourierjeva transformiranka predpis:

$$\mathcal{F}(f)(z) = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{itz}dt = \mathcal{F}(f)(z) = \int_0^\infty f(t)e^{itz}dt$$

Če pišemo z=x + iy je potem $|f(t)e^{itz}| = |f(t)e^{itx}e^{-ty}| \leq |f(t)|e^{-ty} \leq |f(t)|$, če je $y \geq 0$. Fourierjeva transformacija bo torej obstajala za vse z z nenegativnim imaginarnim delom. Še več, če je $Im(z) > a \geq 0$, bo Fourierjeva transformacija obstajala tudi za vse funkcije eksponentnega naraščanja za M in a. Namreč, če je funkcija f funkcija eksponentnega naraščanja za neka $M > 0$ in $a \in \mathbb{R}$, potem je $|f(t)e^{itz}| \leq |f(t)|e^{-ty} \leq Me^{t(a-y)}$. Da bi vrsta konvergirala, mora biti $a - y < 0$ oz. $a < y = Im(z)$. Če namesto z vstavimo v $\bar{f}$ spremenljivko iz, dobimo: $\bar{f}(iz) = \int_0^\infty f(t)e^{-tz}dt$, kar je ravno Laplaceova transformiranka funkcije $f_{|[0,\infty)}$.
Sklep: Laplaceovo transformacijo lahko izpeljemo iz Fourierjeve. Pogoji, ki smo jih obravnavali v tej opombi, bodo ravno pogoji, za obstoj Laplaceove transformacije, v naslednjem izreku.

Dopolnimo definicijo z izrekom, ki nam pove, kdaj bo transformiranka obstajala:

Izrek 7. *Denimo, da za funkcijo $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ obstajajo taka števila $M, N > 0, k \in \mathbb{R}$, da velja:*

1. *Funkcija f je integrabilna na $[0, N]$ (posledično je tudi $f(t)e^{-zt}$).*
2. *Funkcija f je funkcija eksponentnega naraščanja za M in k na $[N, \infty)$ (torej $|f(t)| \leq Me^{kt}$ $\forall t \geq N$).*

Potem $\mathcal{L}(f(t))(z)$ obstaja za vse $z \in \mathbb{C}$ za katere je $Re(z) > k$.

Dokaz. Naj bo funkcija f kot v formulaciji izreka in naj bodo M, N, k omenjene konstante. Potem je $\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt = \int_0^N f(t)e^{-zt}dt + \int_N^\infty f(t)e^{-zt}dt$. Prvi integral obstaja za vse $z \in \mathbb{C}$ po prvi predpostavki. Pokažimo sedaj, da drugi integral konvergira za $Re(z) > k$.

$$
\begin{aligned}
|\int_N^\infty f(t)e^{-zt}dt| &\leq \int_N^\infty |f(t)||e^{-zt}|dt \leq \int_N^\infty Me^{kt}|e^{-(x+iy)t}|dt \\
&\leq M\int_N^\infty e^{(k-x)t}dt = M\int_N^\infty e^{-t(x-k)}dt
\end{aligned}
$$

Slednji integral pa obstaja, če je $k < x = Re(z)$. □

Preden nadaljujemo, omenimo pomembno definicijo in izrek v zvezi z njo iz kompleksne analize.

Definicija 18: Naj bo $D \subset \mathbb{C}$ neprazna odprta množica in $f : D \to \mathbb{C}$ funkcija. Naj bo $a \in D$ neka točka. Če obstaja limita $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, jo imenujemo *kompleksen odvod* funkcije f v točki a in jo označimo z $f'(a)$. Če kompleksen odvod funkcije f obstaja $\forall a \in D$ pravimo, da je f *holomorfna* na D.

Izrek 8 (Goursat)**.** *Naj bo D neprazna odprta množica v $\mathbb{C}$ in $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija na D. Tedaj je f analitična na D.*

Ker še nismo spoznali kompleksne analize, bomo dokaz tega izreka izpustili.

Izrek 9. *Naj bo f kosoma zvezna funkcija na $[0, \infty)$ in naj za nek $z_0 \in \mathbb{C}$ obstaja $\mathcal{L}(f)(z_0)$. Potem $\mathcal{L}(f)(z)$ obstaja za vse $z \in \mathbb{C}$ za katere je $Re(z) \geq Re(z_0)$*

Dokaz. Denimo, da je f zvezna na $[0, \infty)$ (sicer lahko enak argument uporabimo na tistem kosu njenega definicijskega območja, ki je neskončen) ter naj bo $z_0 \in \mathbb{C}$ taki, da obstaja $\mathcal{L}(f)(z_0)$. Definiramo funkcijo $g(t) = \int_0^t f(s)e^{-z_0 s}ds$. Ker je f zvezna, je integrabilna na vsakem končnem intervalu, torej je tudi g zvezna in velja $\lim_{t\to\infty} g(t) = \mathcal{L}(f)(z_0)$. Sledi, da je g omejena na $[0, \infty)$ in po osnovnem izreku analize velja: $g'(t) = f(t)e^{-z_0 t}$ $\forall t \in [0, \infty)$. Potem je:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(z) &= \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt = \int_0^\infty e^{-(z-z_0)t}\underline{f(t)e^{-z_0 t}}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(z-z_0)t}g'(t)dt = (*)
\end{aligned}
$$

Na tej točki integriramo per partes in tako dobimo:

$$(*) = \underbrace{e^{-(z-z_0)t}g(t)\Big|_0^\infty}_{=0} + (z-z_0)\int_0^\infty e^{-(z-z_0)t}g(t)dt$$
$$= (z-z_0)\int_0^\infty e^{-(z-z_0)t}g(t)dt = (z-z_0)G(z)$$

Ker je g zvezna in omejena na $[0,\infty)$, integral $G(z)$ obstaja, če je $Re(z-z_0) > 0$ oziroma, če je $Re(z) > Re(z_0)$.
Sedaj poračunajmo $\frac{d}{dz}G(z)$. Vemo: Če integral $\int_0^\infty \frac{d}{dz}(g(t)e^{-(z-z_0)t})dt$ konvergira enakomerno, potem lahko zamenjamo vrstni red integracije in odvajanja in tako dobimo: $\frac{d}{dz}G(z) = \int_0^\infty \frac{d}{dz}(g(t)e^{-(z-z_0)t})dt = \int_0^\infty g(t)(-t)e^{-(z-z_0)t}dt$.
Spomnimo se: Ker je g omejena na $[0,\infty)$ obstaja tak $M > 0$, da je $|g(t)| \leq M \; \forall t \in [0,\infty)$.
Dodatno, funkcija te^{-at} je tudi omejena na $[0,\infty)$ za vsak $a > 0$. Izberimo $\varepsilon > 0$ in denimo, da je $Re(z) - Re(z_0) < \varepsilon$. Tedaj je:

$$|\int_0^\infty g(t)(-t)e^{-(z-z_0)t}dt| \leq \int_0^\infty |t||g(t)|e^{-\varepsilon t}dt \leq M\int_0^\infty \underbrace{|t|e^{-\frac{\varepsilon}{2}t}}_{\leq N} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{2}t}dt$$
$$\leq MN\int_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{2}t}dt = \frac{2MN}{\varepsilon}$$

Zgornja ocena je neodvisna od z, torej integral enakomerno konvergira in G je holomorfna na območju $D = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > RE(z_0)\}$. Ker je produkt holomorfnih funkcij z isto domeno tudi sama holomorfna funkcija, je potem tudi $\mathcal{L}(f)(z) = (z-z_0)G(z)$ holomorfna na D. Po Goursatovem izreku 8, je pa potem na D tudi analitična. □

Definicija 19: Številu $\sigma(f) = \inf\{Re(z) \mid \mathcal{L}(f)(z) \text{ obstaja}\}$ pravimo *abscisa konvergence.*

Zgled 20: Poračunajmo Laplaceovo transformiranko funkcije s predpisom $1(x) = 1 \forall x \in [0,\infty)$.

$$\mathcal{L}(1)(z) = \int_0^\infty e^{-zt}dt = \frac{1}{z}$$

za vse $z \in \mathbb{C}$ za katere je $Re(z) > 0$. Še več, če transformiramo funkcijo $f(t) = e^{t\alpha}$ hitro vidimo, da je $\mathcal{L}(e^{t\alpha})(z) = \frac{1}{z-\alpha}$ za vse $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > \alpha\}$.

Opomba 14: Od zdaj naprej (po potrebi) razširimo vsako funkcijo $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ na $\mathbb{R}$ tako, da ji v negativnih t določimo vrednost 0.

Trditev 6. *Za Laplaceovo transformacijo veljajo naslednje lastnosti:*

1. *Laplaceova transformacija je linearna transformacija*
2. *Naj za funkcijo f obstaja Laplaceova transformacija. Tedaj je:*

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} : \; \mathcal{L}(f(t)e^{\alpha t})(z) = \mathcal{L}(f)(z-\alpha)$$

3. *Naj za funkcijo f obstaja Laplaceova transformacija. Tedaj (ob razširitvi f iz opombe 14) je $\mathcal{L}(f(t-k))(z) = e^{-kz}\mathcal{L}(f(t))(z)$ $\forall k > 0$.*

4. *Naj za funkcijo f obstaja Laplaceova transformacija. Tedaj za vsak $k > 0$ velja:*

$$\mathcal{F}(f(tk))(z) = \frac{1}{k}\mathcal{L}(f(t))(\frac{z}{k})$$

5. *Če $\mathcal{L}(tf(t))(z)$ in $\mathcal{L}(f(t))(z)$ obstajata za nek $z_0 \in \mathbb{C}$, potem je $\frac{d}{dz}(\mathcal{L}(f(t))(z)) = -\mathcal{L}(tf(t))(z)$. Dodatno, če obstajajo $\mathcal{L}(t^k f(t))(z)$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$, velja:*

$$\frac{d^k}{dz^k}(\mathcal{L}(f(t))(z)) = (-1)^k\mathcal{L}(t^k f(t))(z)$$

Dokaz.

1. Naj bosta f in g poljubni funkciji, za kateri obstajata Laplaceovi transformiranki, z abcisama konvergence $\sigma(f)$ in $\sigma(g)$. Naj bosta α in β poljubni števili iz $\mathbb{C}$. Tedaj je:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t))(z) &= \int_0^\infty (\alpha f(t) + \beta g(t))e^{-zt}dt \\ &= \alpha\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt + \beta\int_0^\infty g(t)e^{-zt}dt \\ &= \alpha\mathcal{L}(f(t))(z) + \beta\mathcal{L}(g(t))(z)\end{aligned}$$

   Ta vrsta konvergira za $\forall z \in \{w \in \mathbb{C} \mid Re(w) > \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}\}$.

2. Naj bo $\alpha \in \mathbb{C}$ poljuben in naj za funkcijo f obstaja Laplaceova transformiranka. Tedaj je:

$$\mathcal{L}(f(t)e^{\alpha t})(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-(z-\alpha)t}dt = \mathcal{L}(f(t))(z-\alpha)$$

   Zgornja vrsta konvergira za $z \in \mathbb{C}$, za katere je $Re(z) > \sigma(f) + Re(\alpha)$.

3. Naj bo $k > 0$ in f poljubna funkcija, za katero obstaja Laplaceova transformiranka. Tedaj ob vpeljavi nove spremenljivke $u = t - k, du = dt$ velja:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t-k))(z) &= \int_0^\infty f(t-k)e^{-zt}dt = \int_0^\infty f(u)e^{-z(u+k)}du \\ &= e^{-zk}\mathcal{L}(f(t))(z)\end{aligned}$$

   Ta vrsta konvergira za vse $z \in \mathbb{C}$ za katere je $Re(z) > \sigma(f)$.

4. Naj bo $k > 0$ poljubno izbran in f poljubna funkcija, za katero obstaja Laplaceova transformacija. Tedaj, ob vpeljavi nove spremenljivke $u = kt, du = kdt$ velja:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(tk))(z) &= \int_0^\infty f(kt)e^{-zt}dt = \frac{1}{k}\int_0^\infty f(u)e^{-z\frac{u}{k}}du = \frac{1}{k}\int_0^\infty f(u)e^{-\frac{z}{k}u}du \\ &= \frac{1}{k}\mathcal{L}(f(u))(\frac{z}{k})\end{aligned}$$

   Ta vrsta konvergira za vse $z \in \mathbb{C}$ za katere je $Re(z) > k\sigma(f)$.

5. Vemo: Če $\mathcal{L}(tf(t))(z)$ in $\mathcal{L}(f(t))(z)$ obstajata, potem velja:

$$\begin{aligned}-\mathcal{L}(tf(t))(z) &= \int_0^\infty (-t)f(t)e^{-tz}dt = \int_0^\infty \frac{d}{dz}(f(t)e^{-tz})dt \\ &= \frac{d}{dz}(\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt) = \frac{d}{dz}(\mathcal{L}(f(t))(z))\end{aligned}$$

Dokaz za višje odvode je zaporedna uporaba tega rezultata. Vrsta konvergira za vse $z \in \mathbb{C}$ za katere je $Re(z) > \max\{\sigma(f), \sigma(tf), \ldots, \sigma(t^k f)\}$. □

Zgled 21: Poračunajmo Laplaceovo transformiranko potenčne funkcije t^n, za poljuben $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{L}(t^n)(z) = \int_0^\infty t^n e^{-zt}dt = (*)$$

Vpeljemo spremenljivko $tz = u, zdt = du$ in tako dobimo:

$$(*) = \int_0^\infty \frac{u^n}{z^n}e^{-u}\frac{1}{z}dt = z^{-(n+1)}\int_0^\infty u^n e^{-u}du = z^{-(n+1)}\Gamma(n+1)$$

Kjer je Γ ravno Eulerjeva Γ-funkcija. Še več, ta enakost velja za vsa kompleksna števila n, za katera je $Re(n) > -1$. Tak integral konverira za vse $z \in \mathbb{C}$, za katere je $Re(z) > 0$.

Opomba 15: Upoštevajoč rezultat iz zgleda 21 sedaj znamo določiti Laplaceovo transformiranko poljubne polinomske funkcije. Opazimo tudi, da je $\mathcal{L}(t^{-\frac{1}{2}})(z) = \sqrt{\pi}z^{-\frac{1}{2}}$, kar pomeni, da je $t^{-\frac{1}{2}}$ lastna funkcija Laplaceove transformacije.

Izrek 10. *Naj bo f zvezno odvedljiva in naj za nek $z_0 \in \mathbb{C}$ obstajata $\mathcal{L}(f(t))(z_0)$ in $\mathcal{L}(f'(t))(z_0)$. Tedaj za vse $z \in \mathbb{C}$, ki zadoščajo pogoju $Re(z) > Re(z_0)$, velja:*

$$\mathcal{L}(f'(t))(z) = z\mathcal{L}(f(t))(z) - f(0)$$

Dodatno, če je f n-krat zvezno odvedljiva in za nek $z_0 \in \mathbb{C}$ obstajajo $\mathcal{L}(f^{(k)}(t))(z_0)$ za vsak $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, tedaj velja:

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(z) = z^n\mathcal{L}(f(t))(z) - z^{n-1}f(0) - \ldots - zf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Dokaz. Izrek bomo pokazali samo za primer s prvim odvodom, saj izrek za višje odvode dokažemo z zaporedno uporabo tega rezultata. Naj bo $z \in \mathbb{C}$ poljuben tak, da je $Re(z) > Re(z_0)$. Uporabili bomo integracijo per partes:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'(t))(z) &= \int_0^\infty f'(t)e^{-zt}dt = [f(t)e^{-zt}\big|_0^\infty] + z\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt \\ &= (0 - f(0)) + z\mathcal{L}(f(t))(z) = z\mathcal{L}(f(t))(z) - f(0)\end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali, da je $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-zt} = 0$, ker sicer $\mathcal{L}(f)(z)$. □

Sedaj bomo navedli in dokazali še inverzno formulo, ter analog lastnosti Fourierjeve transformacije konvolucije dveh funkcij.

Izrek 11. *Naj bo f zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva funkcija eksponentnega naraščanja na $[0, \infty)$. Denimo tudi, da za nek $z_0 \in \mathbb{C}$ obstaja $\mathcal{L}(f)(z_0)$. Tedaj za poljuben $a > Re(z_0)$ v točkah $t \in [0, \infty)$ v katerih je f zvezna in zvezno odvedljiva velja formula:*

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iR}^{a+iR} e^{zt} \mathcal{L}(f)(z) dz = \begin{cases} f(t) & ;\ t \geq 0 \\ 0 & ;\ t < 0 \end{cases}$$

Dokaz. Označimo $F(z) = \mathcal{L}(f)(z)$ in naj bo $z_0 \in \mathbb{C}$ tak, da $F(z_0)$ obstaja. Sedaj definiramo še $f_a(t) = \begin{cases} e^{-at} f(t) & ;\ t \geq 0 \\ 0 & ;\ t < 0 \end{cases}$. Naj bo $a > Re(z_0)$ poljuben. Tedaj je:

$$F(a + iy) = \int_0^\infty f(t) e^{-(a+iy)t} dt = \int_{-\infty}^\infty f_a(t) e^{i(-y)t} dt = \mathcal{F}(f_a(t))(-y)$$

Zadnja enakost velja, ker je funkcija $f_a(t)$, kot že vemo, absolutno integrabilna na $\mathbb{R}$. Opazimo tudi, da funkcija f_a zadošča pogojem za uporabo inverzne Fourierjeve transformacije. Velja torej:

$$\begin{aligned} f_a(t) &= \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-R}^{R} F(a - iy) e^{-ity} dy}_{u=-y} \\ &= \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-R}^{R} F(a + iu) e^{itu} du}_{z=a+iu, dz=idu} \\ &= \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iR}^{a+iR} F(z) e^{t(z-a)} dz \end{aligned}$$

Sedaj enačbo pomnožimo na obeh straneh z e^{at} in tako dobimo:

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iR}^{a+iR} F(z) e^{tz} dz = f_a(t) e^{at} = \begin{cases} f(t) & ;\ t \geq 0 \\ 0 & ;\ t < 0 \end{cases}$$

□

Definicija 20: Konvolucija funkcij $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ in $g : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ je funkcija $(f * g)$ s predpisom

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t) g(x - t) dt$$

Opomba 16: Če upoštevamo razširitev funkcij iz opombe 14, opazimo, da bi lahko konvolucijo $(f * g)$ razširjenih funkcij $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ in $g : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ računali kot v prejšnjem poglavju, Tedaj bi dobili:
$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x - t) dt = \begin{cases} \int_0^x f(t) g(x - t) dt\ ; & x \geq 0 \\ 0\ ; & x < 0 \end{cases}$.

Izrek 12. *Naj bosta funkciji $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ in $g : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ funkciji eksponentnega naraščanja za M in k (od obeh vzamemo večjo konstanto, da zadošča obema). Potem za vsak $z \in \mathbb{C}$, ki zadošča pogoju $Re(z) > k$, velja:*

$$\mathcal{L}(f * g)(z) = \mathcal{L}(f)(z) \cdot \mathcal{L}(g)(z)$$

Dokaz. Dokaz sloni na uporabi Fubinijevega izreka.

$$\mathcal{L}(f * g)(z) = \int_0^\infty (f * g)(t) e^{-zt} dt = \int_0^\infty e^{-zt} (\int_0^t f(s) g(t-s) ds) dt = (*)$$

Na tej točki uporabimo Fubinijev izrek in zamenjamo vrstni red integracije. Pazimo, da se nam pri tem območje integracije po s iz $[0,t]$ spremeni v $[0,\infty)$, območje integracije po t pa iz $[0,\infty)$ v $[s,\infty)$. Dobimo torej:

$$\begin{aligned}
(*) &= \int_0^\infty (\int_s^\infty f(s) g(t-s) e^{-zt} dt) ds = \int_0^\infty (\int_s^\infty f(s) g(t-s) e^{-z(t-s)-zs} dt) ds \\
&= \int_0^\infty f(s) e^{-zs} \underbrace{(\int_s^\infty g(t-s) e^{-z(t-s)} dt)}_{=\mathcal{L}(g)(z)} ds = \mathcal{L}(g)(z) \cdot \int_0^\infty f(s) e^{-zs} ds \\
&= \mathcal{L}(f)(z) \cdot \mathcal{L}(g)(z)
\end{aligned}$$

□

Zgled 22: Naj bo c poljubna nenegativna konstanta. Določi Laplaceovo transformiranko funkcije $f(t) = \sin(ct)$. Uporabili bomo integracijo per partes.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\sin(ct))(z) &= \underbrace{\int_0^\infty \sin(ct) e^{-zt} dt}_{u=\sin(ct), dv=e^{-zt}} = \underbrace{\frac{-\sin(ct)e^{-zt}}{z}\Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty \frac{c\cos(ct)e^{-zt}}{z} dt \\
&= c \underbrace{\int_0^\infty \frac{\cos(ct)e^{-zt}}{z} dt}_{u=\frac{\cos(ct)}{z}, dv=e^{-zt}} = c\Big[\underbrace{\frac{-\cos(ct)e^{-zt}}{z^2}\Big|_0^\infty}_{=\frac{1}{z^2}} - \int_0^\infty \frac{c\sin(ct)e^{-zt}}{z^2} dt\Big] \\
&= \frac{c}{z^2}(1 - c\mathcal{L}(\sin(ct))(z))
\end{aligned}$$

Sedaj iz te enačbe izrazimo $\mathcal{L}(\sin(ct))(z)$ in dobimo:

$$\mathcal{L}(\sin(ct))(z) = \frac{c}{z^2 + c^2}$$

Na enak način pokažemo tudi, da je $\mathcal{L}(\cos(ct))(z) = \frac{z}{z^2+c^2}$

Zgled 23: Za Diracovo funkcijo δ_0 velja, enako kot pri Fourierjevi transformaciji, da je njena Laplaceova transformiranka enaka konstantni funkciji 1. To lahko pokažemo tako, da poračunamo Laplaceovo transformacijo funkcije $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & ; \ x \in [0,\varepsilon] \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases}$. Velja namreč, da je $\mathcal{L}(f_\varepsilon)(z) = \frac{1-e^{-\varepsilon z}}{\varepsilon z}$. Ko pošljemo ε proti 0, konvergirajo funkcije f_ε proti δ_0, transformiranke pa proti konstanti 1. Zato za Diracov δ_0 razglasimo: $\mathcal{L}(\delta_0)(z) = 1$.

Sedaj, ko poznamo tudi Laplaceovo transformacijo, se lotimo še tega, kako jo uporabljamo za reševanje diferencialnih enačb.

4.2 Metoda uporabe

Pri reševanju diferencialnih enačb z Laplaceovo transformacijo bomo uporabili enako strategijo, kot pri Fourierjevi: Dano enačbo bomo najprej transformirali glede na (eno izbrano) neodvisno spremenljivko. To nam bo načeloma problem poenostavilo do te mere, da lahko iz transformirane enačbe izrazimo transformiranko rešitve. Nato bomo rešitev začetne naloge poiskali bodisi tako, da najdemo funkcijo, katere Laplaceova transformiranka je enaka transformiranki rešitve, bodisi bomo uporabili inverzno transformacijo.
Prednost pri uporabi te transformacije je ta, da je transformiranka $\mathcal{L}(f)$ kompleksna funkcija, torej si lahko pri njeni obravnavi pomagamo z obsežnim orodjem iz kompleksne analize. Na primer, zaradi Goursatovega izreka 8 vemo, da je transformiranka $\mathcal{L}(f)$ analitična funkcija. Problem, ki se tukaj pojavi je ta, da trenutno še nismo dobro seznanjeni s kompleksno analizo, torej trenutno ne znamo konkretno izkoristiti te prednosti Laplaceove transformacije. Kljub temu lahko rešimo nekaj problemov:

4.3 Primeri uporabe

Za uvod si poglejmo primer uporabe na navadni diferencialni enačbi drugega reda.

Zgled 24: S pomočjo Laplaceove transformacije reši enačbo $y'' + y' + y = 0$ pri pogojih $y(0) = 0$ in $y'(0) = 1$.
Najprej enačbo transformiramo ter, upoštevajoč oznako $Y(z) = \mathcal{L}(y(x))(z)$, tako dobimo:

$$z^2Y(z) - zy(0) - y'(0) + zY(z) - y(0) + Y(z) = 0$$

Sedaj upoštevamo začetna pogoja in tako dobimo enačbo
$Y(z)(z^2 + z + 1) - 1 = 0$ oziroma $Y(z) = \frac{1}{(z^2+z+1)} = \frac{1}{(z+\frac{1-i\sqrt{3}}{2})(z+\frac{1+i\sqrt{3}}{2})}$. Na tej točki lahko ta ulomek bodisi razbijemo na vsoto ulomkov, ter nato poskusimo uporabiti inverzno transformacijo na vsakem členu posebej, ali pa prepoznamo, da je $Y(z)$ produkt dveh Laplaceovih transformirank:
$\mathcal{L}(e^{-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x})(z) = \frac{1}{(z+\frac{1-i\sqrt{3}}{2})}$ in $\mathcal{L}(e^{-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x})(z) = \frac{1}{(z+\frac{1+i\sqrt{3}}{2})}$. Poračunajmo

konvolucijo funkcij $e^{-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x}$ in $e^{-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x}$ za $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
y(x) = (e^{-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}t} * e^{-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}t})(x) &= \int_0^x e^{-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}t} e^{-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(x-t)} dt \\
&= e^{-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x} \int_0^x e^{(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{1-i\sqrt{3}}{2})t} dt \\
&= e^{-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x} \int_0^x e^{i\sqrt{3}t} dt \\
&= e^{-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x} [\frac{1}{i\sqrt{3}} e^{i\sqrt{3}t}]\Big|_0^x \\
&= \frac{1}{i\sqrt{3}} e^{-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x} (e^{i\sqrt{3}x} - 1) \\
&= \frac{1}{i\sqrt{3}} (e^{(i\sqrt{3} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2})x} - e^{-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x}) \\
&= \frac{1}{i\sqrt{3}} e^{-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x} - \frac{1}{i\sqrt{3}} e^{-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x}
\end{aligned}$$

Preverimo, če je ta funkcija y res rešitev naše diferencialne enačbe. Velja:

$$\begin{aligned}
y(0) &= \frac{1}{i\sqrt{3}}(1-1) = 0 \\
y'(x) &= \frac{1}{i\sqrt{3}}(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x} + \frac{1+i\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x}) \\
y'(0) &= \frac{1}{i\sqrt{3}}(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}) = \frac{i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}} = 1 \\
y''(x) &= \frac{1}{i\sqrt{3}}((\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})^2 e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x} - (\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^2 e^{-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x})
\end{aligned}$$

Tedaj je

$$\begin{aligned}
y'' + y' + y &= \frac{1}{i\sqrt{3}}(e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x}(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + 1)) \\
&- \frac{1}{i\sqrt{3}}(e^{-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x}(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} + 1)) \\
&= \frac{1}{i\sqrt{3}}(e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x}(\frac{-2}{2} + 1)) - \frac{1}{i\sqrt{3}}(e^{-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x}(\frac{-2}{2} + 1)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Torej je $y(x) = \frac{1}{i\sqrt{3}} e^{-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x} - \frac{1}{i\sqrt{3}} e^{-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x}$ res rešitev dane Cauchyjeve naloge.

Izkaže se, da je Laplaceova transformacija izjemno uporabna za reševanje navadnih diferencialnih enačb drugega reda s konstantnimi koeficienti. Naj bo $y'' + ay' + by = f(x)$ Cauchyjeva naloga z začetnima pogojema $y(0) = y_0, y'(0) = v_0$. Ko enačbo transformiramo, dobimo: $\mathcal{L}(y)(z)(z^2 + az + b) - y_0(a+z) - v_0 = \mathcal{L}(f)(z)$. Nato izrazimo $\mathcal{L}(y)(z)$ in dobimo:

$$\mathcal{L}(y)(z) = \frac{\mathcal{L}(f)(z) + (z+a)y_0 + v_0}{(z^2 + az + b)} \tag{1}$$

Torej lahko v resnici samo poračunamo transformiranko $\mathcal{L}(f)$, jo vstavimo v zgornjo enačbo in, upoštevajoč začetna pogoja, dobimo transformiranko naše rešitve. Na tej točki se nam pogosto splača dobljeni ulomek razbiti na parcialne ulomke. Poglejmo si en tak primer.

Zgled 25: S pomočjo Laplaceove transformacije reši Cauchyjevo nalogo
$y'' + 2y' + 5y = 3e^{-x}\sin(x)$ pri pogojih $y(0) = 0, y'(0) = 3$.
Najprej upoštevamo lastnost 2 v trditvi 6 in rezultat iz zgleda 22, ter tako dobimo, da je $\mathcal{L}(3e^{-x}\sin(x)) = \frac{3}{(z+1)^2+1}$. Sedaj to vstavimo v formulo 1 in tako dobimo:

$$\mathcal{L}(y(x))(z) = \frac{\frac{3}{(z+1)^2+1} + 3}{z^2+2z+5} = 3\frac{z^2+2z+3}{(z^2+2z+5)(z^2+2z+2)}$$

Dobljeni ulomek bomo razbili na parcialne ulomke:

$$\frac{z^2+2z+3}{(z^2+2z+5)(z^2+2z+2)} = \frac{Az+B}{z^2+2z+2} + \frac{Cz+D}{z^2+2z+5}$$

Za neke A, B, C in D, ki jih določimo na standarden način. Izkaže se:
$A = C = 0$ in $B = \frac{1}{3}$ ter $D = \frac{2}{3}$. Potem je:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y(x))(z) &= \frac{1}{z^2+2z+2} + \frac{2}{z^2+2z+5} \\ &= \underbrace{\frac{1}{(z+1)^2+1}}_{c=1} + \underbrace{\frac{2}{(z+1)^2+4}}_{c=2} \\ &= \mathcal{L}(e^{-x}\sin(x))(z) + \mathcal{L}(e^{-x}\sin(2x))(z)\end{aligned}$$

Sledi: $y(x) = e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\sin(2x)$ je rešitev naše Cauchyjeve naloge.

Laplaceovo transformacijo lahko uporabimo tudi za integralske enačbe. Naj bosta dani funkciji f in h (obe na $[0,\infty)$). Iščemo funkcijo y na $[0,\infty)$, tako, da bo $\forall x \in [0,\infty)$ veljalo:

$$f(x) = y(x) + \int_0^x y(t)h(x-t)dt$$

V tej enačbi v integralu prepoznamo konvolucijo $y * h$, kar nam da idejo, da bi uporabili Laplaceovo transformacijo. V primeru, ko enačbo transformiramo, lahko izrazimo $\mathcal{L}(y)$ kot:

$$\mathcal{L}(y(x))(z) = \frac{\mathcal{L}(f(x))(z)}{1 + \mathcal{L}(h(x))(z)}$$

Izkaže se, da je primer 3 ravno primer, kjer nam bo ta pogled prišel prav. Pa ga rešimo.

Zgled 26: Kot piše v primeru 3, želimo določiti obliko žleba da bo čas potovanja kroglice po njem do izbrane končne točke neodvisen od izbire začetne točke. Pri tem zanemarimo trenje in zračni upor.
Prvi korak rešitve je, da si postavimo koordinatni sistem, recimo (u, v).
Najlažje nam bo, če ga postavimo tako, da bo izbrana končna točka ravno v

njegovem izhodišču. Dodatno si olajšamo delo tako, da zahtevamo, da žleb leži v odseku koordinatne ravnine, ki jo določa prvi kvadrant tega koordinatnega sistema. Sedaj označimo koordinati začetne točke z (x, y), ločni element naše krivulje(žleba) pa z ds. Ko se kroglica spusti po žlebu od točke (x, y) do (u, v), se ji višina spremeni za $y - v$. Na hitrost bomo gledali kot na spremembo ločne razdalje kroglice od izhodišča. Torej, če kroglico spustimo po žlebu, se ta s časom (ko se t veča) približuje izhodišču (ločna razdalja pada). Hitrost bo torej imela negativen predznak. Po zakonu o ohranitvi energije je potem njena hitrost enaka: $\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(y-v)}$. Ta izraz razumemo kot diferencialno enačbo in jo rešimo za t in pri tem razumemo $u = u(v)$ kot parametrizacijo naše krivulje:

$$
\begin{aligned}
dt &= \frac{-ds}{\sqrt{2g(y-v)}} \\
t &= \underbrace{\int_0^y \frac{ds}{\sqrt{2g(y-v)}}}_{s \text{ je odvisna od } u \text{ in } v} = \underbrace{\int_0^y \frac{\frac{ds}{dv}}{\sqrt{2g(y-v)}} dv}_{\frac{ds}{dv}=\sqrt{1+(\frac{du}{dv})^2}} \\
&= \int_0^y \frac{\sqrt{1+(\frac{du}{dv}(v))^2}}{\sqrt{2g(y-v)}} dv
\end{aligned}
$$

Slednji integral lahko razumemo kot konvolucijo funkcij

$$h(v) = \frac{1}{\sqrt{v}} \text{ in } e(v) = \sqrt{\frac{1+(\frac{du}{dv}(v))^2}{2g}}$$

Na trenutni enačbi, $t = (h * e)(v)$, uporabimo Laplaceovo transformacijo. Ob predpostavki, da je t konstanta, dobimo:

$$t\mathcal{L}(1)(z) = \mathcal{L}(h)(z) \cdot \mathcal{L}(e)(z)$$

Po opombi 15 velja, da je $\mathcal{L}(h)(z) = \sqrt{\frac{\pi}{z}}$. Hkrati vemo iz zgleda 20, da je $\mathcal{L}(1)(z) = \frac{1}{z}$. Posledično sklepamo, da je:

$$\mathcal{L}(e)(z) = \frac{t}{\sqrt{\pi z}}$$

Po opombi 15 je potem $e(v) = \frac{t}{\pi\sqrt{v}}$. Od tod dobimo enačbo $\sqrt{1+(\frac{du}{dv}(v))^2} = \frac{t}{\pi}\sqrt{\frac{2g}{v}}$, iz nje pa:

$$\frac{du}{dv} = \sqrt{\frac{2gt^2}{\pi^2 v} - 1} \tag{2}$$

Sedaj bomo naredili dvoje: Najprej bomo zapisali konstante v ulomku pod korenom v enačbi 2 v eno konstanto, da si olajšamo delo - $b = \frac{2gt^2}{\pi^2}$ -, nato pa bomo vpeljali parameter φ preko zveze $v = b\sin^2(\varphi)$. Potem je $dv = 2b\sin(\varphi)\cos(\varphi)d\varphi$ in enačba 2 se poenostavi v obliko:

$$du = \sqrt{\frac{b}{v} - 1}dv = 2b\sqrt{\frac{1}{\sin^2(\varphi)} - 1}\sin(\varphi)\cos(\varphi)d\varphi = 2b\cos^2(\varphi)d\varphi$$

Sedaj to integriramo in tako dobimo parametrizacijo $u(\varphi)$ naše iskane krivulje:

$$u(\varphi) = 2b \int \cos^2(\varphi) d\varphi = \frac{b}{2}(2\varphi + \sin(2\varphi)) + C$$

Pri $\varphi = 0$ je $v(\varphi) = b \sin^2(\varphi)$ enak 0. Ker želimo, da gre krivulja skozi izhodišče izberimo $C = 0$ (da bo potem tudi $u(0) = 0$). Parametrizacijo $v(\varphi)$ lahko izrazimo tudi s kosinusom dvojnega kota: $v(\varphi) = \frac{b}{2}(1 - \cos(2\varphi))$. Ker se nam v tej situaciji v obeh parametrizacijah pojavljajo sami dvakratniki φ, uvedemo novi oznaki: $\theta = 2\varphi$ in $a = \frac{b}{2}$. Tedaj se parametrizaciji u in v glasita:

$$u(\theta) = a(\theta + \sin(\theta)), v(\theta) = a(1 - \cos(\theta))$$

Opazimo: To je ravno parametrizacija cikloide.
Rešitev našega problema je torej kar cikloida.

Literatura

[1] C. K. Fong, *Equations involving differentials: Pfaffian equations*, [ogled 10. 3. 2024], dostopno na `https://people.math.carleton.ca/~ckfong/S12.pdf`.

[2] B. Magajna, *Uvod v diferencialne enačbe, kompleksno in Fourierjevo analizo*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2018.

[3] K. R. Unni, *Pfaffian differential expressions and equations*, diplomsko delo, v: All graduate theses and dissertations, [ogled 10. 3. 2024], dostopno na `https://core.ac.uk/download/pdf/127676355.pdf`.

[4] E. Zakrajšek, *Analiza IV*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1999.