Diskretna matematika 1 Episode II: Attack of the binomials

Nek študent FMF

19.2.2019

Povzetek

Ta kreacija, ki jo trenutno berete, dragi bralec, je skupek prepisanih zapiskov študijskega predmeta Diskretna matematika 1 s perspektive nekega študenta 2. letnika matematike na FMF. Uporaba tega dokumenta za kakršnikoli namene je na lastno odgovornost.

1 Uvod

Vprašajmo se najprej, kaj sploh pomeni pridevnik »diskreten«. Ta beseda ima v slovenščini dva pomena, ki sta v angleščini ločeni besedi: *discreet* - obziren in *discrete* - jasno ločen oz. razločljiv. Za naše potrebe je (cca. očitno, dokaz prepuščen bralcu) relevanten drugi pomen. Diskretna matematika se torej ukvarja s (včasih tudi števnimi) končnimi strukturami, ki so ločljive (ne tega citirat, razen če želite v indeksu zbrati tri 6-ke in priklicati hudiča). Zanimivost: Obe besedi izhajata iz latinskega glagola *discernere*, iz katerega še najbolj očitno izhaja angleški glagol »*to discern*«, ki ima med drugimi tudi pomen »razločiti«.

Opomba 1: Preden začnemo, si oglejmo še kak praktičen primer diskretnosti: Množica A v topološkem prostoru X je diskretna, če $\forall x \in A\ \exists \mathcal{O}_x$ okolica x tako, da je x edina točka iz A v $\mathcal{O}_x$.

Poglejmo si še kakšen zgled

Zgled 1: X = $\mathbb{R}$, A = $\mathbb{Z}$

1.1 Področja diskretne matematike:

- Kombinatorika,
- Teorija grafov,
- Matematična logika,
- Teorija množic (osnove),
- Računalniška matematika,
- Teorija kodiranja,
- itd.

1.2 Vsebina predmeta diskretna matematika 1:

1. Kombinatorika
    - Osnove preštevanja
    - Načelo vključitev in izključitev
    - Rekurzivne enačbe in rodovne vrste
2. Teorija grafov
    - Osnovno o grafih
    - Drevesa in cikli
    - Ravninski grafi
    - Barvanje grafov
    - Povezanost grafov

1.3 Literatura:

- Primož Potočnik: Zapiski predavanj iz Diskretne Matematike 1, dostopno na povezavi: `https://www.fmf.uni-lj.si/~potocnik/Ucbeniki/DM-Zapiski2010.pdf`
- M. Juvan in P. Potočnik: Teorija grafov in kombinatorika: Primeri in rešene naloge

2 Osnove Preštevanja

1. <u>Oznake</u>:
   - $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\} = \omega$
   - $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
   - $|A|$ = št. elementov oz. moč množice A (gledamo predvsem končne množice)
2. <u>Načelo Enakosti</u>:
$$|A| = |B| \iff \exists f : A \to B, \text{ ki je bijektivna}$$
3. <u>Načelo vsote</u>:
$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$$
   Induktivno velja:
$$A_i \cap A_j = \emptyset;\ i \neq j \Rightarrow |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$
4. <u>Načelo produkta</u>:
$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$
   Analogno zapišemo formulo za poljuben produkt:
$$|\prod_{i=1}^{n} A_i| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$
5. <u>Računovodsko pravilo</u>: Naj bo $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Tedaj velja:
$$\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}_{vrstičnavsota} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}}_{stolpčnavsota}$$
   Povedano še z besedami: Kadar seštevamo vrednosti polj v neki tabeli, je vseeno, če najprej seštejemo po vrstah in nato seštejemo vsote vrst, ali pa najprej seštejemo po stolpcih in nato seštejemo vsote stolpcev.

Definicija 1: Naj bo $x \in \mathbb{C}$ in $n \in \mathbb{N}_0$.

1. $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots x}_{n} = \prod_{i=0}^{n} x$ je *n-ta potenca* števila x.

2. $x^{\underline{n}} = \underbrace{x \cdot (x-1) \cdot \ldots (x-(n-1))}_{n} = \prod_{i=0}^{n-1} (x-i)$ je n-*ta padajoča potenca* števila x.

3. $x^{\bar{n}} = \underbrace{x \cdot (x+1) \cdot \ldots (x+(n-1))}_{n} = \prod_{i=0}^{n-1} (x+i)$ je n-*ta rastoča potenca* števila x.

Hitro opazimo, da velja:

$$x^{\underline{n}} = (x-(n-1))^{\bar{n}} \text{ in } x^{\bar{n}} = (x+(n-1))^{\underline{n}}$$

Posledično velja:

$$1^{\bar{n}} = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n! = n^{\underline{n}}$$

Opomba 2: Vrednost praznega produkta je 1. Npr.:

$$x^0 = x^{\underline{0}} = x^{\bar{0}} = 0! = 1$$

V analizi izraz 0^0 ni definiran, v diskretni matematiki pa ga enačimo z 1.

Definicija 2:
Naj bo $x \in \mathbb{C}$ in $k \in \mathbb{Z}$.

$$\binom{x}{k} = \begin{cases} \frac{x^{\underline{k}}}{k!}; & k \geq 0 \\ 0; & k < 0 \end{cases} \text{,se imenuje binomski koeficient.}$$

Naslednje trditve ne bomo dokazali (dokaz prepuščen bralcu za vajo).

Trditev 1. *Naj bo $|A| = n$ in $|B| = k$.*

1. *Število vseh podmnožic množice A je 2^n.*
2. *Število podmnožic moči k množice A je $\binom{n}{k}$.*
3. *Število vseh preslikav $A \to B$ je k^n.*
4. *število injektivnih preslikav $A \to B$ je $k^{\underline{n}}$.*
5. *število bijektivnih preslikav $A \to B$ je* $\begin{cases} n!; & k = n \\ 0; & k \neq n \end{cases}$. *Posledično je število permutacij množice A (torej število bijekcij $A \to A$) enako $n!$*

2.1 Razdelitve množice:

Definicija 3: *Razdelitev/particija* množice A je družina množic $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ za katero velja:

1. $\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\} : B_i \neq \emptyset$,
2. $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, k\} : (i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset)$,
3. $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = A$

Če imamo podano razdelitev množice, lahko z njeno pomočjo definiramo tako ekvivalenčno relacijo, da porojeni ekvivalenčni razredi sovpadajo s particijo. Takšna ekvivalenčna relacija se (v splošnem) glasi:
$a \sim b \iff \exists i \in \{1, 2, \ldots, k\}; a, b \in B_i$

Definicija 4: Naj bosta $k, n \in \mathbb{N}_0$. Število razdelitev množice z n elementi na k blokov imenujemo *Stirlingovo število druge vrste* in ga označimo s $S(n, k)$.

Zgled 2: $n = 4, k = 2; S(4, 2) =?$

$A = \{a, b, c, d\}; |A| = 4$(ta pogoj zagotovi, da so si a, b, c in d medseboj različni)

Poglejmo si vse razdelitve množice A na 2 bloka:
$a, bcd \quad b, acd \quad c, abd \quad d, abc$
$ab, cd \quad ac, bd \quad ad, bc$
Skupaj je to 7 različnih možnosti. Torej $S(4, 2) = 7$.
V splošnem tudi velja: $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1; n \geq 1$

Trditev 2. *Število surjekcij $A \to B; |A| = n \wedge |B| = k$ je enako $S(n, k) \cdot k!$ za $n \geq k$ in 0 sicer.*

Dokaz. Opazimo: praslike elementov množice B tvorijo particijo v A, kjer velja $x \sim y \iff f(x) = f(y)$

1. Najprej A razdelimo na k nepraznih blokov na S(n, k) načinov
2. Za vsak blok izberemo slike v B na $k!$ načinov

Torej če je $n \geq k$ je število surjekcij enako $S(n, k) \cdot k!$. Če je $n < k$ potem med A in B ne obstaja nobena surjekcija. □

Izrek 1. *Za $n, k \geq 1$ velja:*

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + k \cdot S(n - 1, k)$$

Dokaz. Naj bo $|A| = n$ in naj bo $a \in A$ izbrana točka. Naj bo $f : A \to A \setminus \{a\}$. Ločimo 2 primera:

1. Razdelitve, v katerih je izbrani a sam v svojem bloku:

   Dobljena slika množice A je torej množica, ki ima en element manj in hkrati tudi en blok manj. Njeno Stirlingovo število je torej $S(n-1, k-1)$. Opazimo tudi (baje), da je v tem primeru f bijekcija, saj $A \setminus \{a\}$ »dodamo še en blok, ki vsebuje a, pa je vredu.«

2. Razdelitve, v katerih izbrani a ni sam v svojem bloku:

   V tem primeru se zmanjša samo moč množice A (število blokov ostane enako), torej je Stirlingovo število enako $S(n - 1, k)$. Ker imamo k blokov imamo k možnosti, kam vtakniti ta a. Torej je takih razdelitev $k \cdot S(n - 1, k)$.

Opciji 1 in 2 sta (očitno) disjunktni. Po načelu vsote je torej $S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + k \cdot S(n - 1, k)$ □

Zdaj, ko smo dokazali prejšnjo rekurzivno zvezo, moramo za njo izračunati začetne pogoje:

- $S(0,0) = 1$
- $S(n,0) = 0$,če je$n > 1$
- $S(n,n) = 1$
- $S(n,1) = 1; n \geq 1$
- $S(n,k) = 0$,če je$n < k$

Definicija 5: Število vseh razdelitev množice z n elementi imenujemo *Bellovo število* in ga označimo z B_n

Tabelirajmo $S(n,k)$:

$n \diagdown^k$	0	1	2	3	4	5	B_n
0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
2	0	1	1	0	0	0	2
3	0	1	3	1	0	0	5
4	0	1	7	6	1	0	15
5	0	1	15	25	10	1	52

Naj bodo a_{ij} elementi zgornje tabele (brez zadnjega stolpca), kjer indeks i predstavlja zaporedno število vrste k kateri pripada a_{ij}, šteto od zgoraj navzdol, in j predstavlja zaporedno število stolpca v katerem je a_{ij}, šteto od leve proti desni.
Opazimo sledeče:
Za $i,j > 0$ velja, da je $a_{ij} = a_{(i-1)(j-1)} + j * a_{(i-1)j}$
To pa sovpada s prej dokazano trditvijo (v bistvu je tabela bila izpolnjena s pomoćjo prej izračunanih začetnih pogojev in dokazane formule).

Izrek 2. *Za* $n \geq 0$ *je* $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$

Dokaz. Naj bo A množica moči $n+1$ in P množica vseh particij A. Naj bo $a \in A$ izbrani element. Velja:

$$B_{n+1} = |P|$$

Za $k = 1, 2, \ldots, n$ naj bo $P_k = \{R \in P \mid |R[a]| = n - k + 1\}$, pri čemer je $R[a]$ blok particije R, ki vsebuje a. Torej je izven $R[a]$ natanko k elementov.

Konstrukcija razdelitve R iz P_k:

- Izberemo k elementov iz $A \setminus \{a\}$ na $\binom{n}{k}$ načinov. Ta izbor poimenujemo kot množico C; $|C| = k \wedge C \subseteq A \setminus \{a\}$
- Izberemo poljubno razdelitev C na B_k načinov.
- obe vrednosti zmnožimo po pravilu produkta
- Ker velja $P_i \cap P_j = \emptyset; i \neq j$, vse produkte seštejemo po pravilu vsote (sledi iz dejstva, da je $B_{n+1} = |P| = |\bigcap_{k=0}^{n} P_k|$).

Torej je $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} |P_k| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$

$\square$

Zgled 3: Izračunajmo B_5:

n	0	1	2	3	4	5
B_n	1	1	2	5	15	???

$$
\begin{aligned}
B_5 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} B_k \; &= \\
&= 1 * B_0 + 4 * B_1 + 6 * B_2 + 4 * B_3 + 1 * B_4 \; = \\
&= 1 * 1 + 4 * 1 + 6 * 2 + 4 * 5 + 1 * 15 \; = \\
&= 52
\end{aligned}
$$

2.2 Algebraičen pomen Stirlingovih števil:

Trditev 3. *Za vse $n \in \mathbb{N}_0$ in vse $x \in \mathbb{C}$ je $x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^{\underline{k}}$.*

Dokaz. Trditev lahko dokažemo bodisi z indukcijo po n (prepuščeno bralcu za vajo) bodisi kombinatorično. Tukaj bomo trditev dokazali kombinatorično.

Naj bo $x \in \mathbb{N}_0$ in naj bota A in X množici, pri čimer velja $|A| = n$ in $|X| = x$.

Potem velja:

$$x^n = |X^A| = |\{f : A \to X\}| = |\bigcup_{B \subseteq X} \{f : A \to X \mid f*(A) = B\}| = |\bigcup_{B \subseteq X} \{\bar{f} : A \to B \mid f*(A) = B\}|$$

Z naslednjim korakom »združimo« tiste B, ki imajo enako število elementov.

$$\begin{aligned}
|\bigcup_{B \subseteq X} \{\bar{f} : A \to B \mid f*(A) = B\}| &= |\bigcup_{k=0}^{n} \left(\bigcup_{B \subseteq X \wedge |B|=k} \{\bar{f} : A \to B \mid \bar{f} \text{ je surjekcija}\} \right)| \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{B \subseteq X \wedge |B|=k} |\{\bar{f} : A \to B \mid \bar{f} \text{ je surjekcija}\}| \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{B \subseteq X \wedge |B|=k} S(n,k) * k! \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} S(n,k) * k! = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) * x^{\underline{k}}
\end{aligned}$$

Dokaz bi lahko tudi argumentirali na sledeči način:

Naj bosta $x^n = p(x) \in \mathbb{C}[x]$ in $\sum_{k=0}^{n} S(n,k) * x^{\underline{k}} = q(x) \in \mathbb{C}[x]$ kompleksna polinoma. Velja:

$$\begin{aligned}
p(x) = q(x) \text{za vsak} x \in \mathbb{N}_0 &\Rightarrow p(x) - q(x) = 0 \text{ za vsak } x \in \mathbb{N}_0 \\
&\Rightarrow p - q \in \mathbb{C}[x] \text{ ima neskončno mnogo ničel} \\
&\Rightarrow p - q \equiv 0 \Rightarrow p(x) = q(x) \text{ za vsak } x \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

□