Algeberska topologija
Zapiski predavanj

2023/24

Povzetek

Dokument vsebuje zapiske predavanj predmeta Algeberska topologija v okviru študija prvega letnika magistrskega študija matematike na FNM.

Kazalo

1 Uvodna motivacija

Tekom matematične izobrazbe se spoznamo z mnogimi t. i. strukturami, ki tipično zavzamejo obliko »množica + nekaj«. Med njimi imamo tipično tudi preslikave, ki jim pogosto damo posebno ime. Naštejmo nekaj primerov. Prej

Ime	Oznaka	ime preslikav
Množice	M	preslikave oz. funkcije
Grupe	$(G, \circ)$	homomorfizmi grup
Abelove grupe	$(G, +)$	homomorfizmi Ab. grup
Polja	$(F, +, \cdot)$	homomorfizmi polj
Vektorski prostori nad poljem F	$(V, +, \cdot)$	linearne preslikave
Delno urejene množice	$(P, \leq)$	naraščajoče funkcije
Linearno urejene množice	$(L, \leq)$	naraščajoče funkcije
Metrični prostori	(X, d)	zvezne funkcije
Topološki prostori	$(X, \mathcal{T})$	zvezne funkcije

omenjene preslikave (na neki strukturi) lahko seveda tudi komponiramo. Za komponiranje velja, da obstajata leva in desna enota ter da je asociativno za preslikave, ki se ustrezno ujemajo z domenami in kodomenami (npr. za preslikave f, g in h mora, če želimo formirati $h \circ (g \circ f)$ veljati, da je kodomena f hkrati domena g ter da je kodomena g hkrati domena h.) Posplošena obravnava lastnosti skupin določenih struktur nas privede do t. .i teorije kategorij.

2 Kategorije

Definicija 1: Razred $\mathcal{C}$ z delno binarno operacijo $\circ$ je kategorija, če velja:

- $\mathcal{C}$ je unija disjunktnih razredov $\mathcal{O}b(\mathcal{C})$ in $\mathcal{M}or(\mathcal{C})$. Elementom $\mathcal{O}b(\mathcal{C})$ pravimo objekti, elementom $\mathcal{M}or(\mathcal{C})$ pa morfizmi.
- Za vsak $f \in \mathcal{M}or(\mathcal{C})$ sta enolično določena »začetek« in »konec«, ki sta oba objekta kategorije $\mathcal{C}$. Pišemo $f : X \to Y$.
- Za poljubna objekta $X, Y \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$ je $\mathcal{M}or_{\mathcal{C}}((X, Y)) = \{f \in \mathcal{M}or(\mathcal{C}); f : X \to Y\}$ množica (ne samo razred).
- Za poljubna morfizma $f : X \to Y$ in $g : Y \to Z$ je enolično definiran morfizem $g \circ f : X \to Z$ in velja:
  1. Za poljubne morfizme $f : X \to Y, g : Y \to Z$ in $h : Z \to W$ je $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
  2. Za vsak $X \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$ obstaja enolično določen morfizem $1_X \in \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}((X, X))$, z lastnostjo: $\forall f : X \to Y \wedge \forall g : Z \to X$ je $f \circ 1_X = f$ in $1_X \circ g = g$ (Za poljubna $Y, Z \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$).

Zgled 1:

- Naj bo $(G, \circ)$ poljubna grupa in $\mathcal{O}b(\mathcal{C}) = \{*\}, \mathcal{M}or(\mathcal{C}) = G$. $\circ$ v $\mathcal{C}$ je kar $\circ$ v G. Očitno je (ker je to edina možnost), da vsak morfizem $a \in \mathcal{M}or(\mathbb{C})$ slika objekt $*$ v samega vase. Dodatno: $e = 1_*$.

- Naj bo $(L, \leq)$ poljubna linearno urejena množica in naj bo $\mathcal{O}b(\mathcal{C}) = L$. Morfizme določimo na naslednji način:
$\forall x, y \in L : |\mathcal{M}or_{\mathcal{C}}((x, y))| = \begin{cases} 1; & x \leq y \\ 0; & \neg(x \leq y) \end{cases}$ Tranzitivnost linearne urejenosti nam zagotovi enoličnost kompozituma in posledično tudi njegovo asociativnost.

Definicija 2: Pravimo, da je kategorija $\mathcal{C}$ majhna, če je $\mathcal{O}b(\mathcal{C})$ množica.

Izrek 1. *V majhni kategoriji je $\mathcal{M}or(\mathcal{C})$ množica (in posledično tudi $\mathcal{O}b(\mathcal{C}) \cup \mathcal{M}or(\mathcal{C})$)*

Dokaz. Velja:

$$\mathcal{M}or(\mathcal{C}) = \bigcup_{(X,Y) \in \mathcal{O}b(\mathcal{C}) \times \mathcal{O}b(\mathcal{C})} \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}((X, Y))$$

Unija družine množic je tudi sama množica. □

Zgled 2: Naj bo $\mathcal{O}b(\mathcal{C}) = \mathbb{N}$ in F izbrano polje. Naj bo $\mathcal{M}or(\mathcal{C}) = \bigcup_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} M_{n \times m}(F) =$ množica vseh matrik z elementi iz F. Dodatno, omenimo, da je $M_{n \times m}(F) = \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}((m, n))$. Za $\circ$ vzamemo množenje matrik.

3 Funktorji

Definicija 3: Naj bosta $\mathcal{C}$ in $\mathcal{D}$ poljubni kategoriji. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ je kovariantni funktor, če:

- F slika $\mathcal{O}b(\mathcal{C})$ v $\mathcal{O}b(\mathcal{D})$ in $\mathcal{M}or(\mathcal{C})$ v $\mathcal{M}or(\mathcal{D})$.
- $\forall X, Y \in \mathcal{O}b(\mathcal{C}),\ \forall f : X \to Y$ je $F(f) : F(X) \to F(Y)$
- $\forall f, g \in \mathcal{M}or(\mathcal{C})$: če $\exists g \circ f$, potem je $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$
- $\forall X \in \mathcal{O}b(\mathcal{C}) : F(1_X) = 1_{F(X)}$

Pravimo, da je $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ je kontravariantni funktor, če:

- F slika $\mathcal{O}b(\mathcal{C})$ v $\mathcal{O}b(\mathcal{D})$ in $\mathcal{M}or(\mathcal{C})$ v $\mathcal{M}or(\mathcal{D})$.
- $\forall X, Y \in \mathcal{O}b(\mathcal{C}),\ \forall f : X \to Y$ je $F(f) : F(Y) \to F(X)$
- $\forall f, g \in \mathcal{M}or(\mathcal{C})$: če $\exists g \circ f$, potem je $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$
- $\forall X \in \mathcal{O}b(\mathcal{C}) : F(1_X) = 1_{F(X)}$

Definicija 4: Naj bo $\mathcal{C}$ poljubna kategorija in $f : X \to Y$ element $\mathcal{M}or(\mathcal{C})$. Pravimo, da je f izomorfizem, če $\exists g : Y \to X$, da je $g \circ f = 1_X$ in $f \circ g = 1_Y$.

Izrek 2. *Naj bo $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ poljubni funktor poljubnih kategorij $\mathcal{C}$ in $\mathcal{D}$. Naj bosta $X, Y \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$ in $f : X \to Y$ izomorfizem v $\mathcal{C}$. Potem je $F(f)$ izomorfizem v $\mathcal{D}$.*

Dokaz. Denimo, da je F kovariantni funktor. Naj bo $g : Y \to X$ takšen, da je $g \circ f = 1_X$ in $f \circ g = 1_Y$. Potem je $1_{F(X)} = F(1_X) = F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ in $1_{F(Y)} = F(1_Y) = F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$, torej je $F(f)$ izomorfizem. Še več, če označimo $g = f^{-1}$ je $F(f^{-1}) = (F(f))^{-1}$. Če je F kontravariantni funktor poteka dokaz na enak način, zato ga opustimo. $\square$

Definicija 5: V poljubni kategoriji $\mathcal{C}$ za poljubna objekta $X, Y \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$ definiramo relacijo:

$$X \approx Y \iff \exists f : X \to Y, \textit{ ki je izomorfizem}$$

Izrek 3. *Relacija $\approx$ je ekvivalenčna relacija na $\mathcal{O}b(\mathcal{C})$.*

Dokaz. Preverimo, ali $\approx$ zadošča vsem pogojem za ekvivalenčne relacije.

refleksivnost: Vemo, da $\forall X \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$ obstaja morfizem $1_X : X \to X$, ki je izomorfizem.

simetričnost: Naj bosta $X, Y \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$ poljubna objekta in $f : X \to Y$ izomorfizem. Po definiciji izomorfizma potem obstaja morfizem $f^{-1} : Y \to X$, ki je tudi sam izomorfizem. Če je $X \approx Y$ je potem tudi $Y \approx X$

tranzitivnost: Naj bodo $X, Y, Z \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$ za katere velja $X \approx Y$ in $Y \approx Z$. Potem obstajata izomorfizma $f : X \to Y$ in $g : Y \to Z$ in trdimo, da je tudi $g \circ f : X \to Z$ je izomorfizem. Vidimo namreč, da za $f^{-1} \circ g^{-1}$ velja $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ 1_X \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = 1_Y$. Podobno vidimo tudi, da velja $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = 1_X$. Sledi, da je $(g \circ f)$ izomorfizem in $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Posledično je $\approx$ tranzitivna.

$\square$

Posledica 1. *Naj bo $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ poljuben funktor (kovariantni ali kontravariantni) poljubnih kategorij $\mathcal{C}$ in $\mathcal{D}$. Potem za poljubna objekta $X, Y \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$ velja:*

- $X \approx Y \Rightarrow F(X) \approx F(Y)$
- $F(X) \not\approx F(Y) \Rightarrow X \not\approx Y$

Omenimo še nekaj oznak za znane kategorije.

Oznaka	kategorija
$\mathcal{S}et$	množice
$\mathcal{G}r$	grupe
$\mathcal{A}b$	Ab. grupe
$\mathcal{M}et$	metrični prostori
$\mathcal{V}ect_F$	vektorski prostori nad poljem F
$\mathcal{T}op$	topološki prostori

Zgled 3: Definiramo t. i. pozabljivi funktor, ki slika iz neke kategorije struktur v kategorijo množic. Na primer funktor $F : \mathcal{G}r \to \mathcal{S}et; F((G, \circ)) = G$. Vidimo tudi, da F slika homomorfizme grup v preslikave (istih množic). Funktor F je kovariantni. Če tukaj uporabimo prejšnjo posledico opazimo naslednje: Za $X, Y \in \mathcal{S}et : X \approx Y \iff |X| = |Y|$. Drugače povedano, dve grupi različnih moči ne moreta biti izomorfni.

Zgled 4: Pokažimo, da $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{evk}) \not\approx (\mathbb{R}^2, \acute{\mathcal{T}}_{evk})$. Denimo, da obstaja nek homeomorfizem f med $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$. Potem bo za $\forall a \in \mathbb{R}$ tudi $f_{|\mathbb{R}\setminus\{a\}}$ homeomorfizem iz $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ v $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a,0)\}$. Ti množici pa imata različno število povezanih komponent: $C(\mathbb{R} \setminus \{a\}) = 2, C(\mathbb{R}^2 \setminus \{(a,0)\}) = 1$. Prišli smo v protislovje, saj homeomorfizmi ohranjajo število povezanih komponent. Zgoraj povedano lahko izrazimo tudi s funktorji. Naj bo $F : \mathcal{T}op \to \mathcal{S}et$ in $F((X,\mathcal{T})) = C((X,\mathcal{T}))$. Potem velja
$|C((X,\mathcal{T}))| \neq |C((Y,\acute{\mathcal{T}}))| \Rightarrow (X,\mathcal{T}) \not\approx (Y,\acute{\mathcal{T}})$