Algeberska topologija
Zapiski predavanj

2023/24

Povzetek

Dokument vsebuje zapiske predavanj predmeta Algeberska topologija v okviru študija prvega letnika magistrskega študija matematike na FNM.

Kazalo

1 Uvodna motivacija

Tekom matematične izobrazbe se spoznamo z mnogimi t. i. strukturami, ki tipično zavzamejo obliko »množica + nekaj«. Med njimi imamo tipično tudi preslikave, ki jim pogosto damo posebno ime. Naštejmo nekaj primerov. Prej

Ime	Oznaka	ime preslikav
Množice	M	preslikave oz. funkcije
Grupe	$(G, \circ)$	homomorfizmi grup
Abelove grupe	$(G, +)$	homomorfizmi Ab. grup
Polja	$(F, +, \cdot)$	homomorfizmi polj
Vektorski prostori nad poljem F	$(V, +, \cdot)$	linearne preslikave
Delno urejene množice	$(P, \leqq)$	naraščajoče funkcije
Linearno urejene množice	$(L, \leqq)$	naraščajoče funkcije
Metrični prostori	(X, d)	zvezne funkcije
Topološki prostori	$(X, \mathcal{T})$	zvezne funkcije

omenjene preslikave (na neki strukturi) lahko seveda tudi komponiramo. Za komponiranje velja, da obstajata leva in desna enota ter da je asociativno za preslikave, ki se ustrezno ujemajo z domenami in kodomenami (npr. za preslikave f, g in h mora, če želimo formirati $h \circ (g \circ f)$ veljati, da je kodomena f hkrati domena g ter da je kodomena g hkrati domena h.) Posplošena obravnava lastnosti skupin določenih struktur nas privede do t. .i teorije kategorij.

2 Kategorije

Definicija 1: Razred $\mathcal{C}$ z delno binarno operacijo $\circ$ je kategorija, če velja:

- $\mathcal{C}$ je unija disjunktnih razredov $\mathcal{O}b(\mathcal{C})$ in $\mathcal{M}or(\mathcal{C})$. Elementom $\mathcal{O}b(\mathcal{C})$ pravimo objekti, elementom $\mathcal{M}or(\mathcal{C})$ pa morfizmi.
- Za vsak $f \in \mathcal{M}or(\mathcal{C})$ sta enolično določena »začetek« in »konec«, ki sta oba objekta kategorije $\mathcal{C}$. Pišemo $f : X \to Y$.
- Za poljubna objekta $X, Y \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$ je $\mathcal{M}or_{\mathcal{C}}((X, Y)) = \{f \in \mathcal{M}or(\mathcal{C}); f : X \to Y\}$ množica (ne samo razred).
- Za poljubna morfizma $f : X \to Y$ in $g : Y \to Z$ je enolično definiran morfizem $g \circ f : X \to Z$ in velja:
  1. Za poljubne morfizme $f : X \to Y, g : Y \to Z$ in $h : Z \to W$ je $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
  2. Za vsak $X \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$ obstaja enolično določen morfizem $1_X \in \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}((X, X))$, z lastnostjo: $\forall f : X \to Y \wedge \forall g : Z \to X$ je $f \circ 1_X = f$ in $1_X \circ g = g$ (Za poljubna $Y, Z \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$).