

Analiza 2b Episode II: The mnogoterosti strike  
back

Predavanja

Nek študent FMF

18.2.2019

### **Povzetek**

Ta kreacija, ki jo trenutno berete, dragi bralec, je skupek prepisanih zapiskov študijskega predmeta Analiza 2b s perspektive nekega študenta 2. letnika matematike na FMF. Uporaba tega dokumenta za kakršnikoli namene je na lastno odgovornost.

# 1 Podmnogoterosti v $\mathbb{R}^n$

## 1.1 Uvod

**Opomba 1:** Pri tem predmetu ne bomo posebej definirali kaj so mnogoterosti, zanimale nas bodo samo podmnogoterosti, ki so gladke, torej so vsaj  $\mathcal{C}^1$ .

**Definicija 1:** Naj bo  $\Omega$  odprta podmnožica v  $\mathbb{R}^n$  in naj bo  $a \in \Omega$ . Naj bo  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava, ki je vsaj  $\mathcal{C}^1$ . **Rang** preslikave  $F$  v točki  $a$  je rang odvoda preslikave  $F$  v točki  $a$  oziroma:

$$\text{rang}(F)(a) = \text{rang}(DF)(a)$$

$F$  ima rang  $k$  na  $\Omega$ , če ima rang  $k$  v vsaki točki  $a \in \Omega$ .

**Definicija 2:** Naj bo  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  neprazna množica.  $M$  je (gladka) **podmnogoterost** razsežnosti/dimenzije  $k$  v  $\mathbb{R}^n$ , če za vsak  $x_0 \in M$  obstajajo taka odprta okolica  $U$  točke  $x_0$  in  $\mathcal{C}^1$  funkcije  $F_1, \dots, F_{n-k}$  ( $0 \leq k \leq n$ ) na  $U$ , da ima preslikava  $F = (F_1, \dots, F_{n-k}) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  maksimalen možen rang (torej  $n - k$ ) in da velja:

$$M \cap U = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$$

- $F_1, \dots, F_{n-k}$  so lokalne definicijske funkcije  $M$  v okolici točke  $x_0$
- $n - k$  je **kodimenzija** podmnogoterosti  $M$
- Če je  $k = n - 1$  ali  $n - k = 1$  je  $M$  **hiperploskev**
- Če je  $k = 1$  je  $M$  krivulja, če je  $k = 2$  pa je  $M$  ploskev
- Vsaka odprta množica v  $\mathbb{R}^n$  je podmnogoterost dimenzije  $n$ .

**Zgled 1:**

$$n = 3, k = 2, n - k = 1$$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Definiramo funkcijo  $F$ :

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$(x, y, z) \mapsto F(x, y, z)$$

tedaj velja:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$$

$$(DF)(x, y, z) = 0 \iff x = y = z = 0$$

Iz definicije množice  $A$  pa vemo, da  $(0, 0, 0) \notin A$ , torej je  $F$  (globalna) definicijska funkcija za  $A$ .

**Zgled 2:**

$$n = 3, k = 1, n - k = 2$$

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1; x + y + z = 0\}$$

Za  $N$  definirajmo definicijski funkciji  $F$  in  $G$ :

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \text{ in } G(x, y, z) = x + y + z = 0$$

Definirajmo novo funkcijo  $\Phi$ , ki ju obe poveže:

$$\Phi(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (F(x, y, z), G(x, y, z))$$

Poglejmo si odvod  $D\Phi$ :

$$D\Phi(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}(D\Phi)(x, y, z) \leq 1 :$$

Velja:

$$\text{rang}(D\Phi)(x, y, z) \neq 0$$

, zaradi neničelne druge vrste matrike.

$$\text{rang}(D\Phi)(x, y, z) \leq 1 \iff (2x, 2y, 2z) = \lambda \cdot (1, 1, 1)$$

za nek  $\lambda \in \mathbb{R}$ . To pa velja natanko tedaj, ko

$$x = y = z = \alpha$$

Ker  $x + y + z = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ . Poleg tega pa velja:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow 3 \cdot \alpha^2 = 1$$

Pridemo v protislovje, saj  $3 \cdot 0 \neq 1$ . Torej ima ta preslikava rang 2 v okolici  $N$  (saj je 2 edina preostala opcija).

**Zgled 3:** Poglejmo si še primer v množici  $\mathbb{R}^{n^2} = \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $n \times n$  realnih matrik.

$$X \in \mathbb{R}^{n \times n}, F(X) = \det(X) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n \times n})$$

$$\det(X) \neq 0$$

Množica

$$\{X \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det(X) > 0 \vee \det(X) < 0\} = F^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

je odprta v  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Poleg tega je tudi vredno omeniti, da je  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  odprta v  $\mathbb{R}$ . Poglejmo si splošno linearno grupo:

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(X) \neq 0\} = M$$

Ta grupa je podmnogoterost dimenzije  $n^2$ .

Poglejmo še posebno linearno grupo:

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(X) = 1\}$$

Ali je to podmnogoterost dimenzije  $n^2 - 1$ ?

Definirajmo definicijsko funkcijo  $F(X)$ :

$$F(X) - 1 = 0; F: \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$$

Naj bo  $X \in SL_n(\mathbb{R})$  matrika oblike

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

Kaj je  $\frac{\partial F}{\partial x_{ij}}$ ?

Poglejmo primer ko je  $n = 2$ :

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

$$F(X) = x_{11} \cdot x_{22} - x_{21} \cdot x_{12}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_{22}} = x_{11}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_{11}} = x_{22}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_{12}} = -x_{21}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_{21}} = -x_{12}$$

Velja:

$$\text{rang}(F) = 0 \vee X = 0$$

Razpišimo zdaj formulo za splošni  $X$  s pomočjo razvoja po prvi vrstici:

$$F(X) = x_{11} \cdot \tilde{X}_{11} - x_{12} \cdot \tilde{X}_{12} + \dots$$

Torej

$$\frac{\partial F}{\partial x_{ij}} = (-1)^{i+j} \cdot \tilde{X}_{ij}$$

Velja:

$$\text{rang}(F)(A) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow A \notin SL_n(\mathbb{R})$$

Dobimo protislovje iz katerega sledi:

$$\text{rang}(F) = 1 \text{ v okolici } SL_n(\mathbb{R})$$

**Trditev 1.** *Neprazna podmnožica  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  je podmnogoterost dimenzije  $k$  ( $0 < k < n$ ) natanko tedaj, ko za vsako točko  $x_0 \in M$  obstaja okolica  $U$  in permutacija koordinat  $\sigma : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ , ter odprta množica  $D \subseteq \mathbb{R}^k$ , ki je okolica točke  $(x_{\sigma(1)}^0, \dots, x_{\sigma(k)}^0)$ , ter  $\mathcal{C}^1$  preslikava  $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ , da je  $U = D \times \Omega$  in  $M \cap U = \{x \in U \mid (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}, \varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})) = (x_{\sigma(1)}^0, \dots, x_{\sigma(k)}^0, \varphi_1(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}), \varphi_2(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}), \dots, \varphi_{n-k}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}))\}$ .*

**Opomba 2:** Lokalno je  $M$  graf preslikave iz  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  v  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$

*Dokaz.* Najprej se bomo lotili dokazovanja z leve proti desni: V tem primeru dokazujemo posledico posledice izreka o implicitni preslikavi:

$$M \cap \tilde{U} = \{x \in \tilde{U} \mid F(x) = 0\}; F = (F_1, \dots, F_{n-k}); \text{rang}(F) = n-k \iff \text{rang}(DF) = n-k$$

To (baje) zadošča.

Dokažimo zdaj še v drugo smer:

Naj bo  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-k})$  in  $M \cap U = \{(x, \varphi(x)) \mid x = (x_1, \dots, x_k) \in D \subseteq \mathbb{R}^k, \varphi : D \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-k}\}$

$$F_1(x_1, \dots, x_n) = x_{k+1} - \varphi_1(x_1, \dots, x_k)$$

$$F_2(x_1, \dots, x_n) = x_{k+2} - \varphi_2(x_1, \dots, x_k)$$

$$\vdots$$

$$F_{n-k}(x_1, \dots, x_n) = x_n - \varphi_{n-k}(x_1, \dots, x_k)$$

Iz tega sledi:

$$M \cap U = \{x \in U \mid F_1 = \dots = F_{n-k} = 0\}$$

$$(DF)(x) = [-D\varphi(x_1, \dots, x_k) \quad I]$$

$$\text{rang}(DF) = n - k$$

□

$F = 0$ : implicitno podajanje podmnogoterosti kot graf: eksplicitno podajanje podmnogoterosti

**Trditev 2.** *Naj bo  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  neprazna množica.  $M$  je podmnogoterost dimenzije  $k$  ( $0 < k < n$ ) natanko tedaj, ko za vsak  $x_0 \in M$  obstaja taka odprta okolica  $U$  točke  $x_0$  v  $\mathbb{R}^n$  in difeomorfizem  $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ , da velja, da je  $\Phi(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k})$ . Pravimo tudi, da smo  $M$  lokalno izravnali.*

*Dokaz.* Najprej dokažimo iz leve proti desni: Naj bo  $M$  podmnogoterost v  $\mathbb{R}^n$ . Potem je lokarno graf nad  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  in  $M \cap U = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ . Naj bo

$$\Phi(x, y) = (x, y - \varphi(x)) = (x_1, \dots, x_k, y_1 - \varphi_1(x), \dots, y_{n-k} - \varphi_{n-k}(x))$$

potem je inverz:

$$\Phi^{-1}(x, z) = (x, z + \varphi(x))$$

Poglejmo odvod:

$$D\Phi(x, y) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D\varphi & I \end{bmatrix}, \det(D\Phi) \neq 0$$

velja:

$$\Phi(M \cap U) = \{(x, 0) \mid x \in D \subseteq \mathbb{R}^k\}$$

To (baje) zadošča. Dokažimo zdaj še v drugo smer:

$\Phi : U \rightarrow V$  je difeomorfizem.

$$\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n); \text{rang}(D\Phi) = n \text{ v vsaki točki.}$$

Velja:

$$\Phi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) \iff \Phi_{k+1} = \dots = \Phi_n = 0 \text{ na } M \cap U$$

Imamo torej  $n - k$  funkcij, kjer je  $\text{rang}(\Phi_{k+1}, \dots, \Phi_n) = n - k$ , saj je  $\Phi$  difeomorfizem.  $\square$

**Trditev 3.** Parametrično podajanje podmnogoterosti:

Naj bo  $M \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $M$  je gladka podmnogoterost dimenzije  $k$  ( $0 \leq k \leq n$ ), če za vsako točko  $x_0 \in M$  obstaja taka okolica  $U$  točke  $x_0$ , ter odprta množica  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$  in injekcija  $\Psi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}^n$  ranga  $k$ , da velja:

$$\Psi_*(\Omega) = M \cap U$$

*Dokaz.* Najprej bomo dokazali implikacijo v desno ( $\Rightarrow$ ):

$M$  je lokalno graf, torej  $M \cap U = \{(x', \varphi(x')) \mid x' \in D \subseteq \mathbb{R}^k; \varphi : D \xrightarrow{\mathcal{C}^1} V\}$ . Določimo preslikavo  $\Psi(x') = (x', \varphi(x'))$ ;  $\Psi : D \rightarrow M \cap U$  in pogledimo njen rang:

$$D\Psi = \begin{bmatrix} I \\ D\varphi \end{bmatrix}, \text{rang}(D\Psi) = \text{rang}(\Psi) = k$$

S tem se konča dokaz desne implikacije.

Poglejmo zdaj še dokaz implikacije v levo ( $\Leftarrow$ ):

Naj bo  $\Psi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}^n$  preslikava ranga  $k$  in naj bo  $\Psi(t_0) = x_0$  ter  $\Psi_*(\Omega) = M \cap U$ .  $\Psi(t) = (\Psi_1(t), \dots, \Psi_n(t))$  in  $\text{rang}(D\Psi) = k$ .

Poglejmo si  $D\Psi$ :

$$D\Psi = \begin{bmatrix} D\Psi_1 \\ \vdots \\ D\Psi_n \end{bmatrix} \text{ } k \times n \text{ matrika}$$

Naredimo permutacijo koordinat v  $\mathbb{R}^n$ , da v okolici točke  $t_0$  velja:

$$D\Psi = \begin{bmatrix} D\Psi_1 \\ \vdots \\ D\Psi_k \\ D\Psi_{k+1} \\ \vdots \\ D\Psi_n \end{bmatrix} (t), \text{ da je matrika } \begin{bmatrix} D\Psi_1 \\ \vdots \\ D\Psi_k \end{bmatrix} (t) \text{ obrnljiva.}$$

Zapišemo  $\Psi(t) = (\tilde{\Psi}_1(t), \tilde{\Psi}_2(t)) = ((\Psi_1, \dots, \Psi_k), (\Psi_{k+1}, \dots, \Psi_n))(t)$

$$t \mapsto \tilde{\Psi}_1(t) \text{ v okolici } t_0$$

Odvod je obrnljiv, torej je v okolici točke  $t_0$  difeomorfizem na sliko  $(Im(\tilde{\Psi}_1))$ .  $\tilde{\Psi}_1(t_0) = {}^1x_0$  ima  $\mathcal{C}^1$  inverz. Torej:

$$\tilde{\Psi}_1(t) = {}^1x \Rightarrow t = \tilde{\Psi}_1^{-1}({}^1x)$$

$\Psi$  v okolici  $t_0$  je torej:

$$\Psi(t) = (\tilde{\Psi}_1(t), \tilde{\Psi}_2(t)) = ({}^1x, \tilde{\Psi}_2(\tilde{\Psi}_1^{-1}({}^1x)) = ({}^1x, \varphi({}^1x))$$

$\varphi$  je  $\mathcal{C}^1$  preslikava. Lokalno gledano je  $M$  graf preslikave  $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  □

## 1.2 Tangentni prostori na podmnogoterosti

Če gledamo  $\gamma : (\alpha, \beta) = I^{interval} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n; \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  je to  $\mathcal{C}^1$  preslikava.  $\gamma$  je »pot« v  $\mathbb{R}^n$

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dots, \dot{\gamma}_n(t)); \text{ pri čemer je } \dot{\gamma}(t) = \frac{\partial \gamma}{\partial t} \text{ odvod po času}$$

### Definicija 3:

Naj bo  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  podmnogoterost in naj bo  $x_0 \in M$ . **Tangentni prostor** na  $M$  v točko  $x_0$  je:

$$T_{x_0}(M) = \{\dot{\gamma}(t_0) \mid \gamma : I \xrightarrow{\mathcal{C}^1} M \subseteq \mathbb{R}^n \text{ je pot in } \gamma(t_0) = x_0\}$$

**Trditev 4.** Naj bo  $M$  podmnogoterost dimenzije  $k$  v  $\mathbb{R}^n$  in naj bo  $x_0 \in M$  ter naj bodo  $F = (F_1, \dots, F_{n-k})$  definicijske funkcije  $M$  v okolici  $x_0$  (Pomnimo:  $M \cap U = \{x_0 \in U \mid F(x_0) = 0\}, rang(F) = n - k$ ) Tedaj  $T_{x_0}(M) = Ker(DF(x_0))$

*Dokaz.* Lokalno je  $M \cap U = \{(x, \varphi(x)) \mid \varphi : D \subseteq \mathbb{R}^k \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}^{n-k}\}$ , torej je  $F((x, \varphi(x))) = 0$  za vsak  $x \in D$ .

Odvajamo:

$$\begin{aligned} DF_x((x, \varphi(x))) \cdot I + DF_y((x, \varphi(x))) \cdot D\varphi &= 0 \\ \underbrace{\begin{bmatrix} DF_x & DF_y \end{bmatrix}}_{=DF} \cdot \begin{bmatrix} I \\ D\varphi \end{bmatrix} &= 0, \text{ torej } DF \cdot \begin{bmatrix} I \\ D\varphi \end{bmatrix} = 0 \text{ (v točki } (x, \varphi(x))) \\ DF(x_0, y_0) \cdot \begin{bmatrix} I \\ D\varphi(x_0) \end{bmatrix} = 0 &\Rightarrow \underbrace{Im\left(\begin{bmatrix} I \\ D\varphi(x_0) \end{bmatrix}\right)}_{T_{(x_0, y_0)}(M)} \subseteq Ker(DF(x_0, y_0)) \end{aligned}$$

Sledi:

$$Dim(Im\left(\begin{bmatrix} I \\ D\varphi(x_0) \end{bmatrix}\right)) = k = Dim(Ker(DF(x_0, y_0))) \Rightarrow \text{sta enaka}$$

□

$M$  podana implicitno:

$$T_{x_0}(M) = Ker(DF(x_0))$$

**Trditev 5.** Naj bo  $\Psi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  lokalna parametrizacija  $M$  v okolici  $x_0 \in M$ , ranga  $k$  in naj velja  $\Psi_*(\Omega) = M \cap U$ . Tedaj je  $T_{x_0}(M) = Im(D\Psi(t_0))$ , kjer je  $\Psi(t_0) = x_0$ .



*Dokaz.* Lahko predpostavimo, da je  $\Psi = (\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2)$ , kjer je  $D\tilde{\Psi}_1(t_0)$  v okolici  $t_0$  obrnljiva (Linearna sprememba koordinat). Tedaj je  $M \cap U$  graf preslikave  $\varphi = \tilde{\Psi}_2(\tilde{\Psi}_1^{-1})$ . Torej je:

$$\begin{aligned} T_{(x_0, y_0)}(M) &= T_{(1x_0)}(M) = \text{Im} \left( \begin{bmatrix} I \\ D(\tilde{\Psi}_2 \circ \tilde{\Psi}_1^{-1})(1x_0) \end{bmatrix} \right) = \text{Im} \left( \begin{bmatrix} I \\ D\tilde{\Psi}_2(t_0) \cdot (D\tilde{\Psi}_1^{-1})(1x_0) \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{Im} \left( \begin{bmatrix} I \\ D\tilde{\Psi}_2(t_0) \cdot (D\tilde{\Psi}_1^{-1})(t_0) \end{bmatrix} \right) = \text{Im} \left( \begin{bmatrix} (D\tilde{\Psi}_1)(t_0) \\ (D\tilde{\Psi}_2)(t_0) \end{bmatrix} \right) \cdot (D\tilde{\Psi}_1^{-1})(t_0) \\ &= \text{Im} \left( \begin{bmatrix} (D\tilde{\Psi}_1)(t_0) \\ (D\tilde{\Psi}_2)(t_0) \end{bmatrix} \right) = \text{Im}(D\Phi(t_0)) \end{aligned}$$

□

**Zgled 4:**

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}; F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$DF(x, y, z) = [2x \quad 2y \quad 2z]$$

$$T_{(x, y, z)}(M) = \{(X, Y, Z) \mid \langle (X, Y, Z), (x, y, z) \rangle = 0\} = \{(X, Y, Z) \mid x \cdot X + y \cdot Y + z \cdot Z = 0\}$$

$$\text{Za } x = y = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ in } z = -\frac{2}{\sqrt{6}}:$$

$$T_{(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})}(M) = \{(X, Y, Z) \mid \frac{(X + Y - 2Z)}{\sqrt{6}} = 0\} = \{(X, Y, \frac{X + Y}{2}) \mid X, Y \in \mathbb{R}^2\}$$