Teorija mere
Zapiski predavanj

2023/24

Povzetek

Dokument vsebuje zapiske predavanj predmeta Teorija mere v okviru študija prvega letnika magistrskega študija matematike na FNM.

Kazalo

1 Uvodna motivacija

Za motivacijo bomo obravnavali en primer, pred tem pa bomo na hitro povzeli definicijo Riemannovega integrala. Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ realna, zvezna in omejena funkcija ter naj bo $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ delitev intervala $[a, b]$. Označimo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ter z vsakega intervala $[x_{i-1}, x_i]$ izberemo neko poljubno točko $\acute{x}_i$. Vsoto $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\acute{x}_i)\Delta x_i$ imenujemo Riemannova vsota. Če obstaja limita $\lim_{|\Delta x_i| \to 0} \sigma_n$ in je neodvisna od izbire delitve D in testnih točk na podintervalih, ki jih določa D, ji pravimo Riemannov integral funkcije f na $[a, b]$. Riemannov integral lahko posplošimo za računanje integralov funkcij večih spremenljivk, pri tem pa uporabljamo t. i. Jordanovo mero. Motivacijski primer bo pokazal, da ima konstrukcija s to mero nekatere pomanjkljivosti.

Zgled 1: Naj bo $R = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \{r_1, r_2, \ldots\}$ in definiramo funkcije $f_k : [0, 1] \to [0, 1]$ s predpisi

$$f_1(x) = \begin{cases} 1; & x = r_1 \\ 0; & x \neq r_1 \end{cases}, \; f_2(x) = \begin{cases} 1; & x = r_1 \vee x = r_2 \\ 0; & x \in R \setminus \{r_1, r_2\} \end{cases}$$

itd. Vidimo, da zaporedje $\{f_k\}$ konvergira k Dirichletovi funkciji $f_D(x) = \begin{cases} 1; & x \in \mathbb{Q} \\ 0; & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ in dodatno opazimo, da je $\int_0^1 f_k(x)dx = 0 \forall k$, daj gre limita Riemannovih vrst za vsako funkcijo zaporedja proti 0. To pa ne drži za Dirichletovo funkcijo. Če vse $\acute{x}_i$ pripadajo $\mathbb{Q}$, bo $\sigma_n = 1$, če so izbrane točke $\acute{x}_i$ iracionalne, pa je $\sigma_n = 0$. Limita Riemannovih vsot torej ni neodvisna od izbire delitve in testnih točk, torej integral f_D ne obstaja.

Francoski matematik Lebesgue se je pa problema lotil drugače: Najprej razdelimo zalogo vrednosti omejene zvezne funkcije f z delitvijo $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ in sestavimo množice $E_k = \{x \in [a, b]; f(x)y_k\}$. Prepoznamo, da so $E_k \times \{y_k\}$ vodoravne daljice od $(f^{-1}(y_k), y_k)$ do (b, y_k). Posledično z $|E_k|$ označimo dolžino daljice E_k. Potem je ploščina pod grafom funkcije f približno enaka vsoti $\sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1})|E_k|$. Izkaže pa se, da so lahko v splošnem množice E_k takšne, da koncept dolžine in prostornine za obravnavo več ne zadošča. Zato uvedemo koncept mere.

2 Kolobar množic

Začnimo ta odsek z definicijo.

Definicija 1: Naj bo X poljubna neprazna množica. Množica K podmnožic množice X je kolobar, če:

- $\forall A, B \in K : A \cup B \in K$
- $\forall A, B \in K : A \setminus B \in K$

Trditev 1. *Če je K kolobar množic na X velja:*

1. $\forall A, B \in K : A \triangle B \in K$
2. $\forall A, B \in K : A \cap B \in K$
3. $\emptyset \in K$

Dokaz.
1. Ta trditev sledi neposredno iz definicije kolobarja množice
2. Upoštevamo, da lahko zapišemo $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \triangle B)$ in potem ta trditev sledi po prejšnji.
3. Upoštevamo, da je $\emptyset = a \setminus A$.

$\square$

Definicija 2:

1. Pravimo, da je množica E enota kolobarja K, če za $\forall A \in K$ velja $A \cap E = A$.
2. Kolobarju z enoto pravimo algebra.

Zgled 2:

1. Če je K kolobar nad X in je $X \in K$, potem je X enota kolobarja K.
2. Naj bo K kolobar vseh končnih podmnožic iz $\mathbb{R}$. Kolobar K nima enote. To lahko vidimo tako, da predpostavimo, da obstaja enota $E \in K$. Po definiciji K obstaja neko število $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|E| = n_0$. Sedaj vzamemo množico, $A \in K$ z močjo $n > n_0$. Ker je, po definiciji enote, $A \cap E = A$, sledi, da je $A \subseteq E$, torej je $|E| \geq n$. Sledi, da je $|E| > n_0$, kar nas pa privede v protislovje.

Definicija 3: Naj bo $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ poljubno zaporedje množic.

- Pravimo, da je množica $\overline{A}$ zgornja limita zaporedja $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, če za $\forall x \in \overline{A} \exists \{k_i\}_{i=1}^{\infty} : x \in A_{k_i} \forall i \in \mathbb{N}$.
- Pravimo, da je $\underline{A}$ spodnja limita zaporedja $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, če za $\forall x \in \underline{A}\ \exists k_0 \in \mathbb{N} : x \in A_k \forall k \geq k_0$

Pišemo: $\overline{A} = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ in $\underline{A} = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$

Zgled 3: Poglejmo si zaporedje množic $a_n = \begin{cases} [0, 1 + \frac{1}{n}]; & n \text{ je sodo} \\ [1 - \frac{1}{n}, 2]; & n \text{ je liho} \end{cases}$.

Vidimo, da je $\overline{A} = [0, 2]$ in $\underline{A} = \{1\}$.

Opomba 1: Opazimo, da velja tudi $\underline{A} \subseteq \overline{A}$. Da se prepričamo, da je to res, vzamemo poljubno zaporedje množic $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ in nek poljuben $x \in \underline{A}$. Po definiciji te množice potem $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, da je $x \in A_n$ za vse $n \geq n_0$. Izmed teh $n \geq n_0$ izberemo poljubno neskončno podzaporedje $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$ in potem velja $x \in A_{l_k} \forall k \in \mathbb{N}$. Potem je pa $x \in \overline{A}$.

Trditev 2. *Za vsako zaporedje množic $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ velja:*

a) $\overline{A} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} A_m$

b) $\underline{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=k}^{\infty} A_m$

Dokaz. a) Najprej bomo pokazali inkluzijo v desno, nato pa še v levo:

$\subseteq$) : Naj bo $x \in \overline{A}$. Potem obstaja neko zaporedje indeksov $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$, da je $x \in A_{k_i} \forall i \in \mathbb{N}$. Potem bo pa $x \in \bigcup_{m=k}^{\infty} A_m$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Posledično, je $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} A_m$.

$\supseteq$) : Denimo, da je $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} A_m$ in izberimo poljuben indeks k_1. Potem je $x \in \bigcup_{m=k_1}^{\infty} A_m$, kar pa pomeni, da obstaja nek $l_1 \geq k_1$, da je $x \in A_{l_1}$. Sedaj izberemo nov indeks $k_2 \geq l_1$ in ponovimo prejšnji postopek ter tako pridobimo l_2. Postopek nadaljujemo in tako tvorimo zaporedje indeksov $\{l_i\}_{i=1}^{\infty}$, za katerega velja $x \in A_{l_i} \forall i \in \mathbb{N}$, torej je $x \in \overline{A}$.

b) Podobno kot pri prejšnji točki, bomo najprej bomo pokazali inkluzijo v desno, nato pa še v levo:

$\subseteq$) : Naj bo $x \in \underline{A}$. Potem obstaja nek indeks k_0, da je $x \in A_k \forall k \geq k_0$. Potem je pa $x \in \bigcap_{m=k_0}^{\infty} A_m$, torej je tudi $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=k}^{\infty} A_m$.

$\supseteq$) : Denimo, da je $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=k}^{\infty} A_m$. Potem obstaja indeks k_0, da je $x \in \bigcap_{m=k_0}^{\infty} A_m$, kar pa pomeni, da je $x \in A_k \forall k \geq k_0$, torej je $x \in \underline{A}$.

□

Definicija 4: Pravimo, da je zaporedje množic $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ <u>monotono</u>, če velja:

- $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ (naraščajoče)
- $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ (padajoče)

Definicija 5: Pravimo, da zaporedje množic $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ <u>konvergira</u> proti množici A, če je $\underline{A} = A = \overline{A}$.

Trditev 3. *Vsako monotono zaporedje $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergira, pri čemer velja:*

a) Če je $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ naraščajoče, je $\lim_{k\to\infty} A_k = A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

b) Če je $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ padajoče, je $\lim_{k\to\infty} A_k = A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

Dokaz. a) Naj bo $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ naraščajoče zaporedje množic in preverimo, da je $\underline{A} = \overline{A}$. Pri tem bomo uporabili trditev 2. Po eni strani vemo, da je $\overline{A} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} A_m$. Ko upoštevamo, da je $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ naraščajoče, vidimo, da je $\overline{A} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} A_m = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$. Zadnja enakost sledi iz tega, da so množice v preseku neodvisne od indeksov, po katerih delamo presek (v A_m ne nastopa indeks k). Ker $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ narašča, velja tudi $\bigcup_{m=k}^{\infty} A_m = A_k$, torej je $\underline{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=k}^{\infty} A_m = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Torej je $\underline{A} = \overline{A}$.

b) Pokažemo na podoben način.

$\square$

Definicija 6: Naj bo X poljubna množica. Množica $\mathcal{M}$ podmnožic X je <u>σ-algebra</u> na X, če velja:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{M}$
2. $\forall A \in \mathcal{M} : A^c \in \mathcal{M}$
3. $\forall \{A_k\}_{k=1}^{\infty}; A_k \in \mathcal{M}\ \forall i \in \mathbb{N} : \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$

Zgled 4:

1. Naj bo X neka množica in $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$. Vidimo, da je $\mathcal{M}$ σ-algebra .
2. Naj bo $X = \{a, b, c\}$. Ali je $\mathcal{P}(X)$ σ-algebra ? Da. V resnici je $\mathcal{P}(X)$ σ-algebra za poljubno množico X.
3. Naj bo X poljubna množica in $\mathcal{M} = \{A \subseteq X; A \text{ je kvečjemu števna ali pa je } A^c \text{ kvečjemu števna}\}$. Tudi ta $\mathcal{M}$ je σ-algebra . To bomo tudi na hitro premislili.
   - Očitno $\mathcal{M}$ vsebuje $\emptyset$ in X.
   - Denimo sedaj, da je $A \in \mathcal{M}$. Če je A kvečjemu števna, potem je $A^c \in \mathcal{M}$, saj je $A = (A^c)^c$ kvečjemu števna. Če pa A ni kvečjemu števna avtomatsko sledi, da je A^c kvečjemu števna, torej je $A^c \in \mathcal{M}$.
   - Naj bo $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ nek nabor množic, pri čemer je $A_k \in \mathcal{M}\ \forall k \in \mathbb{N}$. Če so vse množice A_k kvečjemu števne, je tudi $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ kvečjemu števna in torej pripada $\mathcal{M}$. Denimo torej, da $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, da A_{k_0} ni kvečjemu števna, je pa $A_{k_0}^c$. V tem primeru pogledamo $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c$. Ker vemo, da je A_{k_0} kvečjemu števna, je potem tudi presek $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c$ kvečjemu števna množica, torej je $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c \in \mathcal{M}$ in posledično je $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$.

Trditev 4. *Naj bo $\mathcal{M}$ σ-algebra na X. Potem velja:*

a) $\forall A, B \in \mathcal{M} : A \cup B \in \mathcal{M}$

b) $\forall \{A_k\}_{k=1}^{\infty}; A_K \in \mathcal{M}\ \forall i \in \mathbb{N} : \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$

c) $\forall A, B \in \mathcal{M} : A \cap B \in \mathcal{M}$

d) $\forall A, B \in \mathcal{M} : A \setminus B \in \mathcal{M}$

Dokaz. a) Naj bodo $A_1 = A, A_2 = B$ in $A_k = \emptyset \ \forall k \geq 3$. Potem je $A \cup B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$ po definiciji $\sigma-$algeber.

b) Uporabimo, da je σ-algebra po definiciji zaprta za komplimente. Torej, za vsak $A_k \in \mathcal{M}$ je tudi $A_k^c \in \mathcal{M}$. Potem pa sestavimo zaporedje $\{A_k^c\}_{k=1}^{\infty}$ in po definiciji σ-algebre je potem $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c \in \mathcal{M}$ ter posledično še $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} (A_k^c)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c \in \mathcal{M}$.

c) Vzamemo $A_1 = A, A_2 = B$ in $A_k = X \ \forall k \geq 3$. Potem je $A \cap B = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$, po prejšnji točki.

d) $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{M}$ po prejšnji trditvi, ker sta $A, B^c \in \mathcal{M}$.

□

Posledica 1. *σ-algebra je kolobar množic.*

Posledica 2. *σ-algebra je algebra množic.*

3 Mera

Definicija 7: Naj bo K kolobar množic na X. Funkcija $m : K \to [0, +\infty)$ je mera na X, če za njo velja:

$$\forall A, B \in K; A \cap B = \emptyset : m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

Trditev 5. *Za poljubno mero m na kolobarju K podmnožic množice X velja:*

1. $m(\emptyset) = 0$
2. $A \subseteq B \Rightarrow m(B) = m(A) + m(B \setminus A)$
3. $A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$
4. $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$
5. *Naj bodo $A_1, A_2, \ldots A_n \in K$ in $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$. Potem je $m(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n m(A_k)$.*
6. *Naj bodo $A_1, A_2, \ldots A_n \in K$. Potem je $m(\bigcup_{k=1}^n A_k) \leq \sum_{k=1}^n m(A_k)$.*
7. *Naj bodo $A, A_k \in K$ $\forall k \in \mathbb{N}$ in $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$. Dodatno, naj velja $\bigcup_{k=1}^n A_k \subseteq A$. Potem je $\sum_{k=1}^\infty m(A_k) \leq m(A)$.*

Dokaz.

1. $m(\emptyset) = m(\emptyset \cup \emptyset) = m(\emptyset) + m(\emptyset)$, torej je $2m(\emptyset) = m(\emptyset)$. To je možno le, ko je $m(\emptyset) = 0$.
2. Denimo, da je $A \subseteq B$. Potem je $B = A \cup (B \setminus A)$ in $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Po definiciji mere je potem $m(B) = m(A \cup (B \setminus A)) = m(A) + m(B \setminus A)$.
3. Sledi po prejšnji točki.
4. Pišemo: $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$. Ker je $A \cap (B \setminus (A \cap B)) = \emptyset$ je $m(A \cup B) = m(A) + m(B \setminus (A \cap B))$. Ker je $A \cap B \subseteq B$ lahko uporabimo formulo iz druge točke: $m(B) = m(A \cap B) + m(B \setminus (A \cap B))$ oz. $m(B \setminus (A \cap B)) = m(B) - m(A \cap B)$. Sledi, da je $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.
5. Točko bomo dokazali z indukcijo po številu množic. Za $= 2$ že vemo, saj to velja po definiciji mere. Denimo torej, da velja trditev za nek $k \in \mathbb{N}$ in dokažimo za $n = k + 1$. Denimo, da imamo paroma disjunktne množice $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$. Označimo $B = \bigcup_{i=1}^k A_i$. Potem je $\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i = B \cup A_{k+1}$ in $B \cap A_{k+1} = \emptyset$. Sledi, da je $m(B \cup A_{k+1}) = m(B) + m(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^k m(A_i) + m(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} m(A_i)$.
6. Za primer $n = 2$ že vemo, saj je to direktna posledica četrte trditve. Denimo torej, da trditev velja za nek $k \in \mathbb{N}$ in dokažimo, da potem velja tudi za $k+1$: Ponovno označimo $B = \bigcup_{i=1}^k A_i$ in potem je $\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i = B \cup A_{k+1}$. Po četrti točki sklepamo, da je $m(B \cup A_{k+1}) \leq m(B) + m(A_{k+1})$. Dodatno, upoštevamo indukcijsko predpostavko, da je $m(B) = m(\bigcup_{i=1}^k A_i) \leq \sum_{i=1}^k m(A_i)$. Potem je pa $m(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i) \leq \sum_{i=1}^{k+1} m(A_i)$

7. Naj bodo $A, A_k \in K$ $\forall k \in \mathbb{N}$ in $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$. Naj bo $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subseteq A$. Potem bo za $\forall l \in \mathbb{N}$ tudi $\bigcap_{k=1}^{l} A_k \subseteq A$ in po tretji točki potem velja $m(\bigcup_{k=1}^{l} A_k) \leq m(A)$. Ker so množice A_k paroma disjunktne, po peti točki sledi $m(\bigcup_{k=1}^{l} A_k) = \sum_{k=1}^{l} m(A_k)$. Ker to velja za $\forall l \in \mathbb{N}$, je $\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) = \lim_{l\to\infty} \sum_{k=1}^{l} m(A_k) \leq m(A)$.

$\square$

Definicija 8: Naj bo m mera na kolobarju množic K. Pravimo, da je mera m:

- σ-aditivna na K, če velja sklep: $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i; A, A_i \in K$ $\forall i \in \mathbb{N} \wedge A_i \cap A_j = \emptyset$,če je $i \neq j \Rightarrow m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$
- σ-poladitivna na K, če velja sklep: $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i; A, A_i \in K$ $\forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$
- zvezna na K, če za vsako monotono zaporedje množic $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}; A_i \in K$ z limito $\lim_{i\to\infty} A_i = A \in K$ velja: $\lim_{i\to\infty} m(A_i) = m(A)$

Izrek 1. *Naj bo K kolobar množic (na neki množici X) in m poljubna mera na njem. Lastnost σ-aditivnosti, σ-poladitivnosti in zveznosti so ekvivalentne.*

Dokaz. Najprej bomo dokazali ekvivalenco σ-aditivnosti in σ-poladitivnosti, nato pa bomo dokazali ekvivalenco σ-aditivnosti in zveznosti.

1. Dokazujemo, da je mera m je σ-aditivna $\iff$ mera m je σ-poladitivna:

   $\Rightarrow$) : Naj bodo $A, A_i \in K$ $\forall i \in \mathbb{N}$ in naj bo $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Označimo $B_1 = A \cap A_1, B_2 = (A \cap A_2) \setminus B_1, \ldots, B_k = (A \cap A_k) \setminus (\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i)$ in pokažimo, da velja $B_i \cap B_j = \emptyset$ za $i \neq j$. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je $i < j$ in denimo, da imamo nek $x \in B_i \cap B_j$. Po definiciji preseka sledi $x \in B_i$ & $x \in B_j$. Po drugi strani, pa je $B_j = (A \cap A_j) \setminus (\bigcup_{k=1}^{j-1} B_k)$. Ker je $i < j$ je $B_i \subseteq \bigcup_{k=1}^{j-1} B_k$. Ker je $x \in B_i$ potem sledi, da $x \notin B_j$. Prišli smo v protislovje, torej je res $B_i \cap B_j = \emptyset$ za $i \neq j$. Sedaj bomo pokazali, da je $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

   $\subseteq$) : Naj bo $x \in A$. Ker je $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ obstaja neko število $k_0 \in \mathbb{N}$ in neko zaporedje indeksov $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}; k_i > k_0$ $\forall i \in \mathbb{N}$, da je $x \in A_{k_1}, x \in A_{k_2}, \ldots$. Potem posledično velja $x \notin B_k$ za $k < k_0$, od tod pa sledi, da je $x \in B_{k_0} = (A \cap A_{k_0}) \setminus (\bigcup_{k=1}^{k_0-1} B_k)$. Ker smo za poljubni $x \in A$ našli neko množico B_k, da je $x \in B_k$, potem očitno velja $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

   $\supseteq$) : Naj bo sedaj $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ in naj bo k_0 najmanjši indeks, taki, da je $x \in B_{k_0} = (A \cap A_{k_0}) \setminus (\bigcup_{k=1}^{k_0-1} B_k)$. Iz tega, da je izbrani k_0 najmanjši izmed vseh, ki zadoščajo prejšnjemu pogoju, sledi $x \notin \bigcup_{k=1}^{k_0-1} B_k$, torej je $x \in A \cap A_{k_0}$. Sledi, da je $x \in A$ Ker to velja za vsak $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ sledi $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \subseteq A$

   Pokazali smo torej, da je $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Sedaj lahko uporabimo σ-aditivnost:

$$m(A = m(A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k)$$

Ker je $m(B_k) \leq m(A_k)\ \forall k \in \mathbb{N}$ je potem $m(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$ in s tem je pokazana σ-poladitivnost.

$\Leftarrow$:) Naj bo sedaj $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$; $A, A_k \in K\ \forall k \in \mathbb{N}$, in $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$. Ker je $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, je po σ-poladitivnosti $m(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$. Po drugi strani je pa $A \supseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ in posledično je $m(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$. Sledi, da je $m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$, torej je m σ-aditivna.

2. Dokazujemo, da je mera m σ-aditivna $\iff$ mera m je zvezna:

$\Rightarrow$) : Denimo, da imamo monotono zaporedje množic $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ z limito $A = \lim_{k\to\infty} A_k$.

- Če $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ narašča je $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Določimo $A_0 = \emptyset$ in opazimo, da je, za $i \leq j$, $m(A_i) \leq m(A_j)$, ker je $A_i \subseteq A_j$. Označimo $B_1 = A_1 \setminus A_0, B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ in vidimo, da je $B_i \cap B_j = \emptyset$ za $i \neq j$, ter da je $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Potem je

$$
\begin{aligned}
m(A) = m(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m(B_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} (m(B_1) + m(B_2) + \ldots + m(B_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} (m(A_1 \setminus A_0) + m(A_2 \setminus A_1) + \ldots + m(A_n \setminus A_{n-1})) \\
&= \lim_{n\to\infty} (m(A_1) - m(A_0) + m(A_2) - m(A_1) + \ldots + m(A_n) - m(A_{n-1})) \\
&= \lim_{n\to\infty} (m(\emptyset) + m(A_n)) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)
\end{aligned}
$$

- Če $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ pada je $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Označimo $B_1 = A_1 \setminus A_2, B_2 = A_1 \setminus A_3, \ldots, B_k = A_1 \setminus A_{k+1}$. Opazimo, da je zaporedje $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ naraščajoče, torej je $\lim_{k\to\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_{k+1}) = A_1 \setminus \bigcap_{k=2}^{\infty} A_k$. Ko upoštevamo, da $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ pada, vidimo, da je $\bigcap_{k=2}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A$, torej je $\lim_{k\to\infty} B_k = A_1 \setminus A$. Sledi, da je $m(\lim_{k\to\infty} B_k) = m(A_1 \setminus A) = m(A_1) - m(A)$. Ker zaporedje $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ narašča, se pa lahko skličemo na prejšnjo točko in vidimo, da je

$$
\begin{aligned}
m(\lim_{k\to\infty} B_k) &= \lim_{k\to\infty} m(B_k) = \lim_{k\to\infty} m(A_1 \setminus A_{k+1}) \\
&= \lim_{k\to\infty} (m(A_1) - m(A_{k+1})) \\
&= m(A_1) - \lim_{k\to\infty} m(A_{k+1})
\end{aligned}
$$

  Posledično je $m(A) = \lim_{k\to\infty} m(A_k)$, torej je m zvezna.

$\Leftarrow$) : Denimo, da je m zvezna mera in naj bo $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, kjer so $A, A_k \in K\ \forall k \in \mathbb{N}$ in $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$. Naj bo $B_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Vidimo, da je zaporedje $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ naraščajoče in potem je $\lim_{k\to\infty} B_k =$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A$ in posledično sklepamo, da je

$$m(A) = m(\lim_{k\to\infty} B_k) = \lim_{k\to\infty} m(B_k) = \lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{i=1}^{k} A_i)$$
$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} m(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

Torej je m σ-aditivna.

$\square$

Trditev 6. *Naj bo $\{\mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ družina σ-algeber na poljubno množico X. Tedaj je $\mathcal{M} = \bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{M}_\alpha$ tudi σ-algebra na X.*

Dokaz. Preverimo, da $\mathcal{M}$ ustreza vsem aksiomom σ-algebre.

- Ker sta $\emptyset, X \in \mathcal{M}_\alpha\ \forall\alpha \in I$, očitno velja $\emptyset, X \in \mathcal{M} = \bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{M}_\alpha$.
- Naj bo $A \in \mathcal{M}$. Potem je $A \in \mathcal{M}_\alpha\ \forall\alpha \in I$, torej je $A^c \in \mathcal{M}_\alpha\ \forall\alpha \in I$, torej je $A^c \in \bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}$.
- Naj bo $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ zaporedje množic vsebovano v $\mathcal{M}$. Potem je to zaporedje vsebovano tudi v $\mathcal{M}_\alpha\ \forall\alpha \in I$. Od tod sledi, da je $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}_\alpha\ \forall\alpha \in I$, torej je $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$.

$\square$

Definicija 9: Naj bo $\mathbb{A}$ družina podmnožic X. Najmanjšo σ-algebro, ki vsebuje $\mathbb{A}$, označimo z $\mathcal{M}_{\mathbb{A}}$ in jo imenujemo $\underline{\sigma\text{-algebra generirana z } \mathbb{A}}$.

Trditev 7. *Za $\mathcal{A}$ obstaja najmanjša σ-algebra, ki vsebuje $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Vemo, da obstaja vsaj ena σ-algebra, ki vsebuje $\mathcal{A}$. Naj bo $\{\mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ družina vseh σ-algeber, ki vsebujejo $\mathcal{A}$. Tedaj je $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{M}_\alpha$ najmanjša taka σ-algebra, ki vsebuje $\mathcal{A}$. $\square$

Zgled 5: Vzemimo $X = \mathbb{R}$ in $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}\}$. Potem je
$\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \mathbb{R} \setminus \{1\}, \mathbb{R} \setminus \{2\}, \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}, \mathbb{R}\}$

Definicija 10: Naj bo (X, d) metrični prostor. Najmanjšo σ-algebro, ki vsebuje vse odprte množice (X, d) imenujemo Borelova σ-algebra in jo označimo z $\mathcal{B}_X$. Elemente Borelove σ-algebre imenujemo Borelove množice.

Zgled 6:

- Odprte, zaprte množice
- Končne množice
- polzaprti intervali $[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$

Definicija 11: Mera na σ-algebri M je funkcija $\mu : M \to [0, \infty]$, za katero velja:

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. Za vsako zaporedje$\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq M$ disjunktnih množic je $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

Opomba 2: Spomnimo se, da je σ-algebra poseben primer kolobarja, torej so na M σ-aditivnost, σ-poladitivnost in zveznost mere ekvivalentne.

Izrek 2. *Naj bo $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor z mero in $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ zaporedje v M. Velja:*

1. $\mu(\overline{\lim}_{i\to\infty} A_i) \geq \overline{\lim}_{i\to\infty} \mu(A_i) = \limsup_{i\to\infty} \mu(A_i) = \inf_{1\leq i} \sup_{i\leq m} A_m.$

2. $\mu(\underline{\lim}_{i\to\infty} A_i) \leq \underline{\lim}_{i\to\infty} \mu(A_i) = \liminf_{i\to\infty} \mu(A_i) = \sup_{1\leq i} \inf_{i\leq m} A_m.$

3. $\lim_{i\to\infty} A_i = A \Rightarrow \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu(A).$

Dokaz. Naj bo $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ zaporedje v M

1. Vemo, da je $\overline{\lim}_{i\to\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=i}^{\infty} A_k$ in za vsak $i \in \mathbb{N}$ označimo $B_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} A_k$. Potem je $\overline{\lim}_{i\to\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$, kjer je $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ padajoče zaporedje. Sledi, da je $\lim_{i\to\infty} B_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \overline{\lim}_{i\to\infty} A_i$. Ker je μ zvezna in je zaporedje $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ padajoče, je $\mu(\overline{\lim}_{i\to\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(B_i)$. Sledi, da je $\{\mu(A_i)\}_{i=1}^{\infty}$ zaporedje števil in obstaja $\overline{\lim}_{i\to\infty} \mu(A_i) = \overline{a}$. Posledično obstaja neko podzaporedje $\{A_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$, da je $\lim_{k\to\infty} \mu(A_{i_k}) = \overline{a} = \overline{\lim}_{i\to\infty} \mu(A_i)$. Ker je μ monotona in $\forall k \in \mathbb{N} A_k \subseteq B_k$, je tudi $\mu(A_k) \leq \mu(B_k)$ in potem je $\mu(\overline{\lim}_{i\to\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(B_i) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_{i_k}) \leq \lim_{k\to\infty} \mu(A_{i_k}) = \overline{\lim}_{i\to\infty} \mu(A_i)$.

2. Vemo, da je $\underline{\lim}_{i\to\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{k=i}^{\infty} A_k$ in za vsak $i \in \mathbb{N}$ označimo $B_i = \bigcap_{k=i}^{\infty} A_k$. Opazimo, da je $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ naraščajoče zaporedje in potem je $\lim_{i\to\infty} B_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} B_i = \underline{\lim}_{i\to\infty} A_i$. Ker je μ zvezna je potem $\mu(\underline{\lim}_{i\to\infty} A_i) = \mu(\lim_{i\to\infty} B_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(B_i)$. Ker je $\{\mu(A_i)\}_{i=1}^{\infty}$ zaporedje števil, obstaja $\underline{\lim}_{i\to\infty} \mu(A_i) = \overline{b}$ in potem obstaja podzaporedje $\{A_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$, da je $\lim_{k\to\infty} \mu(A_{i_k}) = \overline{b} = \underline{\lim}_{i\to\infty} \mu(A_i)$. Ker je $\forall i \in \mathbb{N} B_i \subseteq A_i$ je tudi $\mu(B_i) \leq \mu(A_i) \forall i \in \mathbb{N}$ in posledično $\mu(B_{i_k}) \leq \mu(A_[i_k]) \forall k \in \mathbb{N}$. Sledi, da je

$$\mu(\underline{\lim}_{i\to\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(B_i) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_{i_k}) \leq \lim_{k\to\infty} \mu(A_{i_k}) = \underline{\lim}_{i\to\infty} \mu(A_i)$$

.

3. Denimo, da je $A = \lim_{i\to\infty} A_i$. Potem je $\overline{\lim}_{i\to\infty} A_i = \underline{\lim}_{i\to\infty} A_i = \lim_{i\to\infty} A_i = A$. Po prvi točki izreka je $\mu(A) = \mu(\overline{\lim}_{i\to\infty} A_i) \geq \overline{\lim}_{i\to\infty} \mu(A_i)$, hkrati pa je vedno res, da je $\underline{\lim}_{i\to\infty} \mu(A_i) \leq \overline{\lim}_{i\to\infty} \mu(A_i)$. Sledi, da je

$$\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \overline{\lim}_{i\to\infty} \mu(A_i) = \underline{\lim}_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu(A) = \mu(\lim_{i\to\infty} A_i)$$

□

4 Kompletna mera

Naj bo $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor z mero.

Definicija 12: Mera μ je polna oz. kompletna, če $\forall A \in \mathcal{M}$ in $\forall B \subseteq A$ velja: $\mu(A) = 0 \Rightarrow B \in \mathcal{M}$.

Izrek 3. *Naj bo* $\Omega = \{N \in \mathcal{M};\ \mu(N) = 0\}$ *in* $\overline{\mathcal{M}} = \{A \subseteq X;\ A = E \cup F; E \in \mathcal{M}\ \&\ F \subseteq N \in \Omega\}$. *Tedaj je* $\overline{\mathcal{M}}$ σ*-algebra.*

Dokaz.

1. Ker je $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ in $\emptyset \in \mathcal{M} \cap \Omega$, je $\emptyset \in \overline{\mathcal{M}}$
2. Naj bo $A \in \overline{\mathcal{M}}$ in $A = E \cup F$ za $E \in \mathcal{M}$ in $F \subseteq N \in \Omega$. Potem je $A^c = (E \cup F)^c$ in upoštevamo, da je $F^c = N^c \cup (N \backslash F) = N^c \cup (F^c \cap N)$.Posledično je $A^c = E^c \cap F^c = (E^c \cap N^c) \cup (E^c \cap (F^c \cap N))$. Pri tem je $(E^c \cap N^c) \in \mathcal{M}$ in $(E^c \cap (F^c \cap N)) \subseteq N \in \Omega$. Posledično je $A^c \in \overline{\mathcal{M}}$.
3. Naj bo $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ zaporedje v $\overline{\mathcal{M}}$. Potem $\forall i \in \mathbb{N} A_i = E_i \cup F_i$ za $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ zaporedje v $\mathcal{M}$ in $F_i \subseteq N_i \in \Omega \forall i \in \mathbb{N}$. Posledično je $\bigcup_{i=1}^\infty \bigcup_{i=1}^\infty (E_i \cup F_i) = \bigcup_{i=1}^\infty E_i \cup \bigcup_{i=1}^\infty F_i$. Najprej upoštevamo, da je $\mathcal{M}$ σ-algebra , torej je $\bigcup_{i=1}^\infty E_i \in \mathcal{M}$. Poleg tega, ker je $F_i \subseteq N_i \forall i \in \mathbb{N}$, je $\bigcup_{i=1}^\infty F_i \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty N_i$ in ker je $N_i \in \Omega \forall i \in \mathbb{N}$, je $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty N_i) \subseteq \sum_{i=1}^\infty \mu(N_i) = 0$, torej je $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty N_i) = 0$ oz. $\bigcup_{i=1}^\infty N_i \in \Omega$. Sledi, da je $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \overline{\mathcal{M}}$.

□

Izrek 4. *Naj bo* $\overline{\mathcal{M}}$ *razširitev* σ*-algebre* $\mathcal{M}$. *Definiramo* $\bar{\mu} : \overline{\mathcal{M}} \to [0, \infty]$, *za katero velja* $\forall A \in \overline{\mathcal{M}}; A = E \cup F$ *za neka* $E \in \mathcal{M}, F \subseteq N \in \Omega$: $\bar{\mu}(A) = \mu(E)$. *Tedaj je* $\bar{\mu}$ *mera na* $\overline{\mathcal{M}}$ *in jo imenujemo razširitev mere* μ.

Dokaz. Najprej preverimo, da je $\bar{\mu}$ dobro definirana, nato pa še, da je mera. Naj bo $A = E \cup F = E_1 \cup F_1$ za $E, E_1 \in \mathcal{M}$ in $F \subseteq N, F_1 \subseteq N_1, N, N_1 \in \Omega$. $E_1 \subseteq E \cup F \subseteq E \cup N$, torej je $\mu(E_1) \leq \mu(E \cup N) \leq \mu(E) + \mu(N) = \mu(E)$. Po drugi strani pa je $E \subseteq E_1 \cup F_1 \subseteq E_1 \cup N_1$ ter zato velja $\mu(E) \leq \mu(E_1 \cup N_1) \leq \mu(E_1) + \mu(N_1) = \mu(E_1)$. Posledično je $\mu(E) = \mu(E_1)$, torej je $\bar{\mu}$ dobro definirana. Preverimo še, da je mera.

- $\bar{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$
- Naj bo $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ zaporedje v $\overline{\mathcal{M}}$ in $\forall i \in \mathbb{N} : A_i = E_i \cup F_i$, da je $\{E_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{M}$ in $F_i \subseteq N_i \in \Omega \forall i \in \mathbb{N}$. Potem je $\bigcap_{i=1}^\infty A_i = \bigcap_{i=1}^\infty E_i \cup \bigcap_{i=1}^\infty F_i$ za $\bigcap_{i=1}^\infty E_i \in \mathcal{M}$ in $\bigcap_{i=1}^\infty F_i \subseteq \bigcap_{i=1}^\infty N_i \in \Omega$. Posledično je $\bar{\mu}(\bigcap_{i=1}^\infty A_i) = \mu(\bigcap_{i=1}^\infty E_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(E_i) = \sum_{i=1}^\infty \bar{\mu}(A_i)$.

□

Izrek 5. *Mera* $\bar{\mu}$ *je enolična razširitev mere* μ *do polne mere na* $\overline{\mathcal{M}}$.

Dokaz. Najprej bomo pokazali polnost, nato pa še enoličnost. Naj bo $A \in \overline{\mathcal{M}}$ taka, da je $\bar{\mu}(A) = 0$ in naj bo $B \subseteq A$. Pišemo $A = E \cup F$ za neka $E \in \mathcal{M}$ in $F \subseteq N \in \Omega$. Velja, da je $\bar{\mu}(A) = \mu(E) = 0$. Hkrati je tudi $B \subseteq A = E \cup F \subseteq E \cup N$, torej je $\mu(E \cup N) \leq \mu(E) + \mu(N) = 0$, torej je $\mu(E \cup N) = 0$ oz. $E \cup N \in \Omega$. Posledično lahko zapišemo B kot unijo $\emptyset \in \mathcal{M}$ in $B \subseteq (E \cup N) \in \Omega$, torej je $B \in \overline{\mathcal{M}}$. Sledi, da je $\bar{\mu}$ polna mera.
Denimo sedaj, da je ν polna mera na $\overline{\mathcal{M}}$ in $\nu(H) = \mu(H) \forall H \in \mathcal{M}$. Naj bo $A = E \cup F$ za $E \in \mathcal{M}$ in $F \subseteq N \in \Omega$. Potem je $\nu(A) = \nu(E \cup F) = \nu(E \cup (F \backslash E))$.

Ker je $(F \setminus E) \subseteq N \in \Omega$ in $F \setminus E = \emptyset \cup (F \setminus E)$, je $F \setminus E \in \overline{\mathcal{M}}$. Potem je pa $\nu(A) = \nu(E \cup (F \setminus E)) = \nu(E) + \nu(F \setminus E)$ in ker je $F \setminus E \subseteq N \in \Omega$ je $\nu(F \setminus E) = 0$, torej je $\nu(A) = \nu(E) + 0 = \nu(E) = \mu(E) = \bar{\mu}(A)$. $\square$

Izrek 6. *Naj bo $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor z mero. Potem obstaja enolična razširitev mere μ do polne mere $\bar{\mu}$ na $\overline{\mathcal{M}}$. Prostor $(X, \overline{\mathcal{M}}, \bar{\mu})$ imenujemo napolnitev prostora $(X, \mathcal{M}, \mu)$.*

Zgled 7: Naj bo $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$ in $\mu(A) = \begin{cases} 0 & ;\ A = \emptyset \\ 1 & ;\ A = X \end{cases}$. Potem je $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$.
Če vzamemo enak $\mathcal{M}$ in $\acute{\mu}(A) = 0 \forall A \in \mathcal{M}$, je potem $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{P}(X)$.