Izbrana poglavja iz topologije
Zapiski vaj

2023/24

Povzetek

Dokument vsebuje zapiske vaj predmeta Izbrana poglavja iz topologije v okviru študija prvega letnika magistrskega študija matematike na FNM.

Kazalo

1 Ponovitev stare snovi

1.1 Povezanost

Definicija 1: Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor in $U, V \subseteq X$. Pravimo, da U in V tvorita separacijo X, če velja:

- $U, V \in \mathcal{T}$
- $U, V \neq \emptyset$
- $U \cap V = \emptyset$
- $U \cup V = X$

Dodatno, pravimo, da je prostor $(X, \mathcal{T})$ nepovezan, če ima kako separacijo in povezan sicer.

Naloga 1. *Naj bo $\mathcal{T} = \{U \subseteq \mathbb{R};\ \mathbb{R} \setminus U \text{ je končna}\} \cup \{\emptyset\}$. Ali je $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ povezan prostor?*

Rešitev: Denimo, da $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ni povezan. Naj $U, V \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ tvorita separacijo $\mathbb{R}$. Potem obstajajo $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}$, taki, da so $u_i \neq v_j \forall i, j$, in sta $U = \mathbb{R} \setminus \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ter $V = \mathbb{R} \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$. Naj bo $z \in \mathbb{R} \setminus \{u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_m\}$. Potem je tudi $z \in U$ in $z \in V$, torej je $z \in U \cap V \neq \emptyset$. To je pa protislovno s tretjim aksiomom separacije U, V. Torej je $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ povezan.

Naloga 2. *Ali obstaja topološki prostor $(X, \mathcal{T})$, za katerega velja:*

- $\forall A \subseteq X : |A| = 2 \Rightarrow (A, \mathcal{T}_A)$ *je povezan*
- $\exists B \subseteq X : (B, \mathcal{T}_B)$ *ni povezan.*

Rešitev: Najpraj opazimo, da če tak prostor obstaja, bo $|X| \geq 3$. Naj bo $(X, \mathcal{T})$ prostor, za katerega velja prva zahteva in naj bo $B \subseteq X, B \neq \emptyset$. Denimo, da je $|X| \geq 3$:

i) Če je $|B| = 1$ je $(B, \mathcal{T}_B)$ očitno povezan.

ii) Če je $|B| = 2$ je $(B, \mathcal{T}_B)$ povezan po predpostavki.

iii) Denimo, da je $|B| > 2$. Naj bodo $x_1, x_2, x_3 \in X$ paroma različni in naj bo $\{x_1, x_2, x_3\} \subseteq B$, za katero velja, da je $(B, \mathcal{T}_B)$ nepovezan. Potem obstaja separacija U, V in brez škode za splošnost denimo $\{x_1, x_2\} \subseteq U$ in $\{x_3\} \in V$. Po predpostavki je $\{x_1, x_2\}$ povezan, po drugi pa je $\{x_1, x_2\} = \{x_1\} \cup \{x_2\}$, torej je $\{x_1\}, \{x_2\}$ separacija od $\{x_1, x_2\}$. Pridemo v protislovje s predpostavko, da so vsi prodprostori moči 2 povezani.

Posledično ni takega topološkega prostora $(X, \mathcal{T})$, ki bi ustrezal obema pogojema.

Definicija 2: Naj bo $(x, \mathcal{T})$ topološki prostor in $x, y \in X$. Pravimo, da je $f : [0, 1] \to X$ pot od x, do y, če je f zvezna in $f(0) = x$ ter $f(1) = y$. Pravimo, da je $(X, \mathcal{T})$ povezan s potmi, če za vsak par $x, y \in X$ obstaja pot od x do y.

Naloga 3. *Naj bo X neprazna množica in $a \in X$. Naj bo $\mathcal{T}$ topologija na X, za katero velja: $\forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\} : a \in U$. Ali je $(X, \mathcal{T})$ povezan s potmi?*

Rešitev: Naj bosta $x, y \in X$ poljubna. Iščemo pot $f : [0,1] \to X$ od x do a. Določimo predpis $f(t) = \begin{cases} x & ;\ t = 0 \\ a & ;\ t \in (0,1] \end{cases}$ in preverimo, ali je f zvezna:

- $U = \emptyset : f^{-1}(U) = \emptyset$
- Denimo, da $U \neq \emptyset$:
  - Če je $a \in U in x \notin U$, potem je $f^{-1}(U) = (0,1]$, to pa je odprta v $[0,1]$ (opremljen z evklidsko topologijo).
  - Če je $a, x \in U$, potem je $f^{-1}(U) = [0,1]$, kar pa je vedno odprto v $[0,1]$

Sledi, da je f zvezna. S podobnim argumentom vidimo, da je tudi $g : [0,1] \to X$ s predpisom $g(t) = \begin{cases} a & ;\ t \in [0,1) \\ y & ;\ t = 1 \end{cases}$ pot od a do y. Ti dve poti združimo v pot h od x do y s predpisom $h(t) = \begin{cases} f(2t) & ;\ t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t-1) & ;\ t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$.

Naloga 4. *Naj bo $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Ali je $(X, \mathcal{T}_e)$ povezan s potmi?*

Rešitev: Naj bosta $(x,y), (a,b) \in X$ različni točki in spremenimo pogled v polarne koordinate: $(x,y) = (r,\varphi), (a,b) = (q,\alpha)$. Potem je $f : [0,1] \to X$ s predpisom $f(t) = ((1-t)r + tq, (1-t)\varphi + t\alpha)$ dobro definirana in zvezna ter velja $f(0) = (r,\varphi)$ in $f(1) = (q,\alpha)$. Torej je f pot med (r,φ) in (q,α). Ker sta bili obravnavani točki poljubni sledi, da je $(X, \mathcal{T}_e)$ povezan s potmi.

Naloga 5. *Naj bosta $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ in $([0,1], \{\emptyset, [0,1]\})$ topološka prostora. Naj bo $X = \mathbb{R} \times [0,1]$ in ga opremimo s produktno topologijo $\mathcal{T}$. Pokaži, da je $(X, \mathcal{T})$ povezan s potmi.*

Rešitev: Naj bosta $(x,y), (a,b) \in X$ poljubni točki in naj bosta $f_1(t) = (1-t)x + ta$ ter $f_2(t) = (1-t)y + tb$. Naj bo $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$. Ker sta f_1 in f_2 zvezni, je tudi f zvezna. Poleg tega je $f(0) = (x,y)$ in $f(1) = (a,b)$. Sledi, da je f pot med (x,y) in (a,b).

1.2 Lokalna povezanost

Definicija 3: Naj bo $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Pravimo, da je lokalno povezan v točki $x \in X$, če $\forall U \in \mathcal{T}$ velja: $x \in U \Rightarrow \exists V \in \mathcal{T}; x \in V \subseteq U$ in $(V, \mathcal{T}_V)$ je povezan. Če ta pogoj velja $\forall x \in X$, pravimo, da je $(X, \mathcal{T})$ lokalno povezan.

Naloga 6. *Ali so naslednji prostori lokalno povezani?*

a) $X_1 = ((0,1] \times \{0\}) \cup \left(\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\} \times [0,1]\right)$

b) $X_2 = \{(x, \sin(\frac{1}{x}));\ x \in (0,1]\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$

c) $X_3 = X_1 \cup (\{0\} \times [0,1])$

d) $X_4 = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_n; L_n = \{(x, \frac{x}{n});\ x \in [0, \frac{1}{n}]\} \forall n \in \mathbb{N}$.

Rešitev:

a) Sumimo, da X_1 je lokalno povezan. Naj bo $(x,y) \in X_1$ poljubna točka.

- Če je $y > 0$, potem obstaja nek $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $x = \frac{1}{n_0}$. Naj bo $(x,y) \in U \in \mathcal{T}$. Potem je $K_r(x,y) \cap U = V$ za $r = \frac{1}{2n(n+1)}$. Velja, da je $V \in \mathcal{T}$ in $(x,y) \in V \subseteq U$. Pri tem je, odvisno od y, V homeomorfen bodisi odprti daljici ali pa odprti daljici iz katere gre pravokoten poltrak (podobno obliki črke T). Oba od teh prostorov pa sta očitno povezana (s potmi), torej je tudi V.
- Denimo, da je $y = 0$. Potem, če se x nahaja med $\frac{1}{n+1}$ in $\frac{1}{n}$ za nek $n \in \mathbb{N}$, določimo $r = \frac{1}{2}\min\{|x - \frac{1}{n}|, |x - \frac{1}{n+1}|\}$. Sicer, če je $x = \frac{1}{n}$ za nek $n \in \mathbb{N}$, potem določimo $r = \frac{1}{2}\min\{|x - \frac{1}{n+1}|, |x - \frac{1}{n-1}|\}$. V vsakem primeru določimo $V = K_r(x,0) \cap U$ in velja $(x,y) \in V \subseteq U$ ter $V \in \mathcal{T}$. Tudi tukaj je V homeomorfen prej omenjenima oblikama (odprta daljica ali odprti »T«), torej je povezan (s potmi).

Sledi, da je X_1 lokalno povezan (s potmi).

b) Sumimo, da X_2 ni lokalno povezan. Naj bo $U = K_{\frac{1}{2}}(0,0) \cap X_2$ in $V \in \mathcal{T}$ tak, da je $(0,0) \in V \subseteq U$. Pokazati moramo, da $(V, \mathcal{T}_V)$ ni povezan. Ker je $V \in \mathcal{T}$ obstaja nek $r > 0$, da je $K_r(0,0) \subseteq V$. Hkrati upoštevamo, da so ničle funkcije $\sin \frac{1}{x}$ ravno $x = \frac{1}{k\pi};\ k \in \mathbb{Z}$. Brez škode za splošnost obstaja nek $k_0 \in \mathbb{Z}$, da je $\frac{1}{k_0\pi} < r$. Potem je pa $(\frac{1}{k_0\pi}, 0) \in V$. Potem obstaja $\max\{\frac{1}{k\pi};\ k \in \mathbb{Z}\ \&\ (\frac{1}{k\pi}, 0) \in V\} = \frac{1}{k_1\pi}$. Drugače povedano, določili smo skrajno desno ničlo $\sin\frac{1}{x}$ v V. Potem bo pa $\sin(\frac{1}{k_1\pi + \frac{\pi}{2}}) \in \{-1, 1\}$. Označimo $k_2 = \frac{1}{k_1\pi + \frac{\pi}{2}}$ in vidimo, da $(k_2, 0) \notin V$. Sedaj doloćimo $U_S = ((k_2, \infty) \times \mathbb{R}) \cap V$ in $V_S = ((-\infty, k_2) \times \mathbb{R}) \cap V$. U_S in V_S tvorita separacijo V, torej je $(V, \mathcal{T}_V)$ nepovezan.

c) Naj bo $x = 0$ in $y > 0$ ter naj bo $(x,y) \in U \in \mathcal{T}$. Obstaja nek $r > 0$, da bo $V = K_r(x,y) \cap X_3 \subseteq U$. Za V_S določimo skrajno desno odprto daljico, ki jo vsebuje V, za U_S pa vzamemo $V \setminus V_S$. Očitno je U_S, V_S separacija, torej $(V, \mathcal{T}_V)$ ni povezan in posledično X_3 ni lokalno povezan.

d) Hitro vidimo, da bo vsaka odprta okolica neke točke v X_4 vsebovala V, ki bo homeomorfen odprti daljici ali pa nekemu šopu poltrakov s skupnim vrhom. Te množice so povezane, torej je X_4 lokalno povezana.

Naloga 7. *Dokaži:* $(X, \mathcal{T})$ *je lokalno povezan* $\iff$ *obstaja baza* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$*, da* $\forall B \in \mathcal{B} : (B, \mathcal{T}_B)$ *je povezan.*

Rešitev:

$\Rightarrow)$: Naj bo $(X, \mathcal{T})$ lokalno povezan in $U \in \mathcal{T}$. Po definicij potem $\forall x \in U \exists V_{x,U} \in \mathcal{T}$, da je $x \in V_{x,U} \subseteq U$ in da je $(V_{x,U}, \mathcal{T}_{V_{x,U}})$ povezan. Potem je $\mathcal{B} = \{V_{x,U}; U \in \mathcal{T}, x \in U\}$ baza za $\mathcal{T}$, v kateri je vsak element povezan.

$\Leftarrow)$: Naj bosta $x \in X$ in $U \in \mathcal{T}$ ter $x \in U$. Ker je $\mathcal{B}$ baza potem obstaja $V \in \mathcal{B}$, da je $x \in V \subseteq U$ in je $(V, \mathcal{T}_V)$ povezan. Potem je pa $(X, \mathcal{T})$ lokalno povezan.

$\square$

Navedimo še nekaj zanimivih primerov. Kantorjeva množica C je primer prostora, ki ni lokalno povezan v nobeni točki. Kantorjeva pahljača je primer povezanega prostora (celo s potmi), ki pa ni lokalno povezan v nobeni točki, razen v vrhu pahljače. Če v enega izmed skranjih robov Kantorjeve pahljače pripnemo vrh ene druge Kantorjeve pahljače, tako da je vrh prve tudi skranji konec druge (dobimo obliko »paralelograma«), dobimo primer prostora, ki je povsod povezan s potmi, ni pa lokalno povezan v nobeni točki.