Teorija mere
Zapiski predavanj

2023/24

Povzetek

Dokument vsebuje zapiske predavanj predmeta Teorija mere v okviru študija prvega letnika magistrskega študija matematike na FNM.

Kazalo

1 Uvodna motivacija **4**

2 Kolobar množic **4**

1 Uvodna motivacija

Za motivacijo bomo obravnavali en primer, pred tem pa bomo na hitro povzeli definicijo Riemannovega integrala. Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ realna, zvezna in omejena funkcija ter naj bo $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ delitev intervala $[a, b]$. Označimo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ter z vsakega intervala $[x_{i-1}, x_i]$ izberemo neko poljubno točko $\acute{x}_i$. Vsoto $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\acute{x}_i)\Delta x_i$ imenujemo Riemannova vsota. Če obstaja limita $\lim_{|\Delta x_i| \to 0} \sigma_n$ in je neodvisna od izbire delitve D in testnih točk na podintervalih, ki jih določa D, ji pravimo Riemannov integral funkcije f na $[a, b]$. Riemannov integral lahko posplošimo za računanje integralov funkcij večih spremenljivk, pri tem pa uporabljamo t. i. Jordanovo mero. Motivacijski primer bo pokazal, da ima konstrukcija s to mero nekatere pomanjkljivosti.

Zgled 1: Naj bo $R = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \{r_1, r_2, \ldots\}$ in definiramo funkcije
$f_k : [0, 1] \to [0, 1]$ s predpisi

$$f_1(x) = \begin{cases} 1; & x = r_1 \\ 0; & x \neq r_1 \end{cases}, \ f_2(x) = \begin{cases} 1; & x = r_1 \vee x = r_2 \\ 0; & x \in R \setminus \{r_1, r_2\} \end{cases}$$

itd. Vidimo, da zaporedje $\{f_k\}$ konvergira k Dirichletovi funkciji
$f_D(x) = \begin{cases} 1; & x \in \mathbb{Q} \\ 0; & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ in dodatno opazimo, da je $\int_0^1 f_k(x)dx = 0 \forall k$, daj gre limita Riemannovih vrst za vsako funkcijo zaporedja proti 0. To pa ne drži za Dirichletovo funkcijo. Če vse $\acute{x}_i$ pripadajo $\mathbb{Q}$, bo $\sigma_n = 1$, če so izbrane točke $\acute{x}_i$ iracionalne, pa je $\sigma_n = 0$. Limita Riemannovih vsot torej ni neodvisna od izbire delitve in testnih točk, torej integral f_D ne obstaja.

Francoski matematik Lebesgue se je pa problema lotil drugače: Najprej razdelimo zalogo vrednosti omejene zvezne funkcije f z delitvijo $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ in sestavimo množice $E_k = \{x \in [a, b]; f(x)y_k\}$. Prepoznamo, da so $E_k \times \{y_k\}$ vodoravne daljice od $(f^{-1}(y_k), y_k)$ do (b, y_k). Posledično z $|E_k|$ označimo dolžino daljice E_k. Potem je ploščina pod grafom funkcije f približno enaka vsoti $\sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1})|E_k|$. Izkaže pa se, da so lahko v splošnem množice E_k takšne, da koncept dolžine in prostornine za obravnavo več ne zadošča. Zato uvedemo koncept mere.

2 Kolobar množic

Začnimo ta odsek z definicijo.

Definicija 1: Naj bo X poljubna neprazna množica. Množica K podmnožic množice X je *kolobar*, če:

- $\forall A, B \in K : A \cup B \in K$
- $\forall A, B \in K : A \setminus B \in K$

Trditev 1. *Če je K kolobar množic na X velja:*

1. $\forall A, B \in K : A \triangle B \in K$

2. $\forall A, B \in K : A \cap B \in K$

3. $\emptyset \in K$

Dokaz. 1. Ta trditev sledi neposredno iz definicije kolobarja množice

2. Upoštevamo, da lahko zapišemo $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \triangle B)$ in potem ta trditev sledi po prejšnji.

3. Upoštevamo, da je $\emptyset = a \setminus A$.

$\square$

Definicija 2:

1. Pravimo, da je množica E *enota kolobarja* K, če za $\forall A \in K$ velja $A \cap E = A$.

2. Kolobarju z enoto pravimo *algebra*

Zgled 2:

1. Če je K kolobar nad X in je $X \in K$, potem je X enota kolobarja K.

2. Naj bo K kolobar vseh končnih podmnožic iz $\mathbb{R}$. Kolobar K nima enote. To lahko vidimo tako, da predpostavimo, da obstaja enota E in vzamemo dve množici, $A \in K$ z močjo n in $B \in K$ z močjo $n + 1$ za nek poljuben $n \in \mathbb{N}$. Ker je, po definiciji enote, $A \cap E = A$, sledi, da je $A \subseteq E$, torej je $|E| \geq n$. Po drugi strani, ker je $B \cap E = B$, sklepamo, da je $|E| \geq n + 1$. To velja za poljuben n, torej moč E presega kardinalnost vsake množice iz K, torej je E neskončna. To nas pa privede v protislovje s tem, da $E \in K$.

Definicija 3: Naj bo $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ poljubno zaporedje množic.

- Pravimo, da je množica $\overline{A}$ *zgornja limita* zaporedja $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, če za $\forall x \in \overline{A} \exists \{k_i\}_{i=1}^{\infty} : x \in A_{k_i} \forall i \in \mathbb{N}$.

- Pravimo, da je $\underline{A}$ *spodnja limita* zaporedja $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, če za $\forall x \in \underline{A} \exists k_0 \in \mathbb{N} : x \in A_k \forall k \geq k_0$

Pišemo: $\overline{A} = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ in $\underline{A} = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$