Osnove programiranja v diskretni matematiki
Zapiski predavanj

2023/24

Povzetek

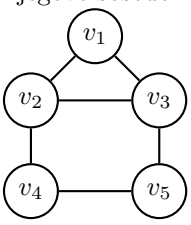
Dokument vsebuje zapiske predavanj predmeta Osnove programiranja v diskretni matematiki profesorja Vesela v okviru študija prvega letnika magistrskega študija matematike na FNM.

Kazalo

1 Predstavitve grafov in onsnovni algoritmi nad njimi

Definicija 1: Graf G je sestavljen iz množice ogljišč $V(G)$ in množice povezav $E(G)$. Pišemo: $G = (V, E)$. Pri tem pogosto označimo $|V| = n$ in $|E| = m$. Za $v \in V(G)$ definiramo $d(v) =$ *število sosed vozlišča v v grafu G*

Zgled 1: Poglejmo si naslednji graf in v tabeli določimo vsakemu vozlišču njegove sosede. G :



Vozlišče	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
Sosedi	v_2, v_3	v_1, v_3, v_4	v_1, v_2, v_5	v_2, v_5	v_3, v_4

Za predstavitev grafa imamo več možnosti. Prva možnost je matrika sosednosti, druga možnost (ki nas bo zanimala), pa so seznami sosedov. Seznami sosedov se izkažejo za bolj prostorsko varčne, saj matrika sosednosti tipično zavzame $O(n^2)$ mest, seznami sosedov pa manj. Koliko manj, je odvisno od načina implementacije.

1.1 Enostavni seznami sosedov

Sestavimo seznam S vozlišč, tipično urejenih in oštevilčenih (npr 1 predstavlja vozlišče v_1, 2 vozlišče v_2 itd.). Nato sestavimo seznam sosedov P tako, da po vrsti naštejemo sosede vozlišča 1, nato vozlišča 2, itd. Pri tem vsako vozlišče iz S opremimo s kazalcem, ki kaže v P na mesto, kjer se začnejo njegovi sosedi.

Zgled 2: Predstavimo graf G iz zgleda 1 s pomočjo enostavnega seznama sosedov.

S:

1	2	3	4	5

P:

2	3	1	3	4	1	2	5	2	5	3	4

Z S_i označimo seznam sosedov vozlišča v_i. Seznam S ima ravno n mest, seznam P pa $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$ mest. Prostorska zahtevnost enostavnih seznamov sosedov je torej $O(n + m)$, kar je po navadi res manj kot $O(n^2)$.

1.2 Razširjeni seznami sosedov

Najprej za vsako vozlišče v_i sestavimo seznam sosedov S_i, v katerem vsakega od sosedov v_i predstavimo s poljem p, ki je sestavljeno iz petih komponent: $p = (v_i, v_j, \&r, \&n, \&u)$. Pri tem je v_i vozlišče, katerega sosede obravnavamo, v_j ime soseda, $\&r$ kazalec, ki kaže na predhodnika p v S_i, $\&n$ kazalec, ki kaže na naslednika p v S_i in $\&u$ kazalec, ki kaže na polje v seznamu S_j, ki predstavlja povezavo v_iv_j. Če je p prvi v seznamu S_i je $\&r = 0$, če je pa zadnji, je pa $\&n = 0$.

Zgled 3:

Seznam	Ime polja	Polje
S_1	a	$(v_1, v_2, 0, \&c, \&b)$
	c	$(v_1, v_3, \&a, 0, \&d)$
S_2	b	$(v_2, v_1, 0, \&e, \&a)$
	e	$(v_2, v_3, \&b, \&g, \&f)$
	g	$(v_2, v_4, \&e, 0, \&h)$
S_3	d	$(v_3, v_1, 0, \&f, \&c)$
	f	$(v_3, v_2, \&d, \&i, \&e)$
	i	$(v_3, v_5, \&f, 0, \&j)$
S_4	h	$(v_4, v_2, 0, \&k, \&g)$
	k	$(v_4, v_5, \&h, 0, \&l)$
S_5	j	$(v_5, v_3, 0, \&l, \&i)$
	l	$(v_5, v_4, \&j, 0, \&k)$

Omenimo tukaj, da kadar grafu dodamo povezavo v_iv_j, to naredimo tako, da dodamo novo polje na začetek seznamov S_i in S_j.

1.3 Časovna zahtevnost nekaterih operacij na grafih

Sedaj, ko smo uvedli različne sezname sosedov, lahko primerjamo časovno zahtevnost nekaterih klasičnih operacij na grafih.

Operacija	Enostavni sez.	Razširjeni sez.
Preveri, če G vsebuje povezavo v_iv_j	$O(d(v_i))$	$O(d(v_i))$
Označi vse sosede vozlišča v_i	$O(d(v_i))$	$O(d(v_i))$
Označi vse povezave	$O(m)$	$O(m)$
Dodaj povezavo v_iv_j	$O(m)$	$O(1)$
Odstrani povezavo v_iv_j	$O(m)$	$O(d(v_i))$
Odstrani vse povezave s krajiščem v v_i	$O(m)$	$O(d(v_i))$

Izkaže se torej, da četudi imamo malenkost več dela z reprezentacijo grafov v razširjenih seznamih sosedov, s tem pridobimo na časovni zahtevnosti.

1.4 Urejanje seznamov sosedov

Za urejanje lahko, v splošnem, uporabimo algoritem z zahtevnostjo $O(k\log(k)$, kjer je k število elementov seznama. Če to naredimo za vsak seznam dobimo:

$$\sum_{i=1}^{n} O(d(v_i)\log(d(v_i))) \leq \sum_{i=1}^{n} O(d(v_i)\log(n)) = O(\log(n)\sum_{i=1}^{n} d(v_i)) \\ = O(m\log(n))$$

To hitrost lahko torej pričakujemo pri enostavnih seznamih sosedov. Obstaja pa še hitrejši način, če si pomagamo z razširjenimi seznami sosedov. To naredimo tako, da upoštevamo, da je v vsakem polju seznama S_i na v komponenti vozlišče v_i. Nove sezname gradimo tako, da se sprehajamo od seznama S_n, do S_1 in na vsakem koraku odstranimo polje $(v_i, v_j, \ldots)$ iz S_i. Nato odstranjenemu polju zamenjamo prvo in drugo komponento, da dobimo polje oblike $(v_j, v_i, \ldots)$ in to novo polje vstavimo na začetek novega seznama, ki ustreza vozlišču v_j. Algoritem še zapišemo bolj pregledno:

Data: Razširjeni seznami sosedov $S_1, \ldots, S_n$
Result: Urejeni razširjeni seznami sosedov $B_1, \ldots, B_n$
Ustvari prazne razširjene sezname sosedov $B_1, \ldots, B_n$
for i = n downto 1 **do**
  while $S_i \neq \emptyset$ **do**
    begin
      Odstrani prvo polje $p = (v_i, v_j, \ldots)$iz S_i
      Dodaj $\acute{p} = (v_j, v_i, \ldots)$ na začetek B_j
    end
  end
end
return $B_1, B_2, \ldots, B_n$

Algoritem 1: Algoritem za urejanje razširjenih seznamov sosedov

Ta algoritem ima časovno zahtevnost $O(m)$, torej je hitrejši od algoritma na enostavnih seznamih sosedov, katerih urejanje je imelo časovno zahtevnost $O(m\log(n))$.

Definicija 2: Naj bosta G in H grafa. Bijekcija $f : V(G) \to V(H)$ je izomorfizem grafov, če za poljuben par $u, v \in V(G)$ velja:
$uv \in E(G) \iff f(u)f(v) \in E(H)$

Trenutno še ne poznamo algoritma, ki bi preveril, če sta dva grafa izomorfna, v polinomskem času. Lahko pa učinkovito preverimo, ali je dana bijekcija $f : V(G) \to V(H)$ izomorfizem grafov, ali ne. Slednje nam pokaže naslednji izrek.

Izrek 1. *Za dana grafa G in H ter bijekcijo $f : V(G) \to V(H)$ lahko v linearnem času preverimo, ali je f izomorfizem.*

Dokaz. Naj bodo $S_1, S_2, \ldots, S_n$ razširjeni seznami sosedov grafa G in $C_1, C_2, \ldots, C_n$ razširjeni seznami sosedov grafa H. Najprej oblikujemo nove razširjene sezname sosedov $\acute{C}_1, \acute{C}_2, \ldots, \acute{C}_n$, kjer je $\acute{C}_i$ seznam, ki pripada $f(v_i); v_i \in V(G)$. Torej, $(f(v_i), f(v_j), \ldots) \in \acute{C}_i$. Sedaj z algoritmom 1 za urejanje razširjenih seznamov sosedov uredimo $S_1, S_2, \ldots, S_n$ in $\acute{C}_1, \acute{C}_2, \ldots, \acute{C}_n$. Nato elemente seznamov

$S_1, S_2, \ldots, S_n$ po vrsti zložimo v seznam L_G, elemente seznamov $\acute{C}_1, \acute{C}_2, \ldots, \acute{C}_n$ pa po vrsti v seznam L_H. Če je f izomorfizem grafov, morata biti L_G in L_H identična v smislu, da za $\forall v_i \in L_G$ na enakem mestu v L_H najdemo $f(v_i)$. Oba seznama uredimo v linearnem času $O(m)$), sestavljanje L_G in L_H tudi potrebuje $O(m)$ časa, torej časovna zahtevnost celotnega postopka $O(m)$. □

2 Pregled grafa v širino

Definicija 3: Pot v grafu G je zaporedje paroma različnih vozlišč $v_1 v_2 \ldots v_k$, kjer za poljuben par zaporednih vozlišč iz poti velja $v_i v_{i+1} \in E(G) \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Za vozlišči $u, v \in V(G)$ je u,v-pot pot, ki se začne v u in konča v v. Razdalja med vozlišči u in v je definirana s predpisom $d_G(u, v) = \min(|p|;\ p \text{ je } u,v\text{-pot})$. Pri tem je, za dano pot p, $|p|$ dolžina poti p, torej število povezav v poti p.

Zapišimo sedaj algoritem za pregled grafa v širino.

Data: Vozlišče $v \in V(G)$, razširjeni seznami sosedov $S_1, \ldots, S_n$ grafa G
Result: Označitev l množice vozlišč $V(G)$, kjer je $l(u) = d_G(v, u)$
Pripravi vrsto (queue) $V = \{v\}$
$l(v) = 0$
while $V \neq \emptyset$ **do**
  begin
    Odstrani u iz začetka V
    for $w \in S_u$ **do**
      if $l(w)$ ni določen **then**
        begin
          $l(w) = l(u) + 1$
          Vstavi w na konec vrste V
        end
      end
    end
  end
end
return Označitev l

Algoritem 2: Algoritem BFS za pregled grafa v širino

Izrek 2. *Naj bo C povezana komponenta grafa G in naj bo $v \in V(C)$. Algoritem BFS za vsako vozlišče $u \in V(C)$ določi $l(u) = d_G(v, u) = d_C(v, u)$ v času $O(|E(C)|)$*

Dokaz. Najprej bomo dokazali pravilnost, nato pa še časovno zahtevnost.

Pravilnost: Pravilnost bomo dokazali z indukcijo po $d(v, w) = i$.

$i = 0$: v tem primeru je $d(v, w) = 0$, kar je možno le, ko je $w = v$. Sledi, da je $l(w) = 0 = l(v)$. V vrsto V algoritma prihajajo vozlišča na eni strani in odhajajo na drugi. Ker l povečujemo, dobimo naraščajoče zaporedje in sosednji vozlišči se razlikujeta za največ 1.

$i > 0$: Denimo, da izrek velja za vsa vozlišča $v, u \in V(C)$, za katera je $d(v,u) \leq i$. Opazujemo $w \in V$ za katerega je $d(v,w) = i+1$. Za tak w obstaja nek $u_0 \in V(C)$, da je $d(v,u_0) = i$ in $u_0w \in E(C)$. Po indukcijski predpostavki je potem $l(u_0) = i$, to oznako pa smo dobili od nekega vozlišča, ki je od v oddaljeno za $i-1$. Oznake vozlišč na razdalji i dobimo tako, da najprej sprocesiramo vozlišča, ki so na razdalji $i-1$, teh vozlišč pa na tej točki ni več v V. V vrsti V so torej samo vozlišča, ki so od v oddaljene i. Potem je pa $l(w) = i+1$.

Čas. zaht.: Telo for zanke se izvede $2|E(C)|$-krat z zahtevnostjo $O(1)$, torej je skupna zahtevnost $(|E(C)|)$.

□

Definicija 4: Matrika razdalj D grafa G je matrika dimenzije $|V(G)| \times |V(G)|$ za katero velja $d_{i,j} = d_G(v_i, v_j) \forall i,j \in \{1,2,\ldots,|V(G)|\}$.

Posledica 1. *Naj bo G graf in $|V(G)| = n$ ter $|E(G)| = m$. Tedaj velja:*

i) Povezane komponente G lahko poiščemo v času $O(n+m)$

ii) Matriko razdalj grafa G lahko poiščemo v času $O(mn)$

Dokaz. i) Sprehodimo se po vseh vozliščih grafa in za vsako vozlišče z nedoločenim l poženemo algoritem 2. Za vsako povezano komponento C grafa G nas to stane $O(|E(C)|)$, torej je skupna časovna zahtevnost za cel graf G enaka $O(m)$. Če ima graf manj od n povezav, je vseeno treba obiskati vsa vozlišča. Skupen čas celotnega postopka je torej $O(m+n)$.

ii) Za vsako izmed n vozlišč poženemo algoritem 2. Vsaka izvedba tega algoritma ima zahtevnost $O(m)$, izvedb pa je n, torej je zahtevnost celotnega postopka $O(mn)$

□

Zgled 4: Vrnimo se k grafu G iz zgleda 1 in mu določimo tabelo označitev za začetno točko $v = 1$.

u	v	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
	1	0				
1	2, 3		1	1		
2	3, 4				2	
3	1, 5					2
4	2, 5					
5	3, 4					

Če poženemo BFS algoritem za neko začetno vozlišče $v \in V(G)$ lahko $V(G)$ razbijemo na množice $L_0, L_1, \ldots$, kjer je $L_i = \{u \in V(G);\ d(v,u) = i\}$.

Definicija 5: Naj bo G graf in $v \in V(G)$. Če je $u \in L_i$ in $uw \in E(G)$ in

- Če je $w \in L_{i-1}$, pravimo, da je uw povezava navzgor
- Če je $w \in L_{i+1}$, pravimo, da je uw povezava navzdol

- Če je $w \in L_i$, pravimo, da je uw povezava povprek

Za povezan graf G lahko skonstruiramo t. i. BFS-drevo s korenom v $v \in V(G)$. Za BFS-drevo T s korenom $v \in V(G)$ velja: $D_T(v,u) = d_G(v,u)\ \forall u \in V(T) \subseteq V(G)$. Če je $V(T) = V(G)$ se spomnimo, da pravimo, da je T vpeti podgraf grafa G.

Definicija 6: Graf G je dvodelni graf, če obstaja razbitje $V(G) = (X, Y)$, tako da za vsako povezavo iz $E(G)$ velja, da ima eno krajišče v X in drugo krajišče v Y

Trditev 1. *Graf G je dvodelen $\iff$ G ne vsebuje lihega cikla*

Trditev 2. *Graf G je dvodelen $\iff$ G ne vsebuje povezave povprek za BFS označitev, ki se začne v poljubnem $v \in V(G)$*

Dokaz. $\Rightarrow$:) Denimo, da obstaja neka povezava povprek $uw \in E(G)$ za neki vozlišči $u \in X$ in $w \in Y$, kjer je (X, Y) razbitje G. Potem obstaja tak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, da je $d(v,u) = i = d(v,w)$. Ker sta X in Y povezani, graf G potem vsebuje en cikel dolžine $2i + 1$, to je pa protislovno s tem, da je G dvodelen po trditvi 1.

$\Leftarrow$:) Za vozlišče $v \in V(G)$ izvedemo BFS algoritem in definiramo $X = \bigcup_{i=0} L_{2i}$ ter $Y = \bigcup_{i=0} L_{2i+1}$. Očitno je $X \cup Y = G$ in $X \cap Y = \emptyset$, torej je (X, Y) razbitje G. Ker G nima povezav povprek za $u \in L_i in uw \in E(G)$ velja, da je $w \in L_{i-1}$ ali pa je $w \in L_{i+1}$. Torej, če je $u \in L_i \subseteq X$, je potem $w \in Y$ in obratno, če je $u \in L_i \subseteq Y$, je $w \in X$. Za vsako povezavo $uw \in E(G)$ je potem eno krajišče iz X in drugo iz Y. Potem je pa G dvodelni graf.

□

Trditev 3. *Dvodelne grafe lahko prepoznamo v linearnem času.*

Dokaz. Vemo, da lahko za vsak $v \in V(G)$ algoritem BFS izvedemo v linearnem času. Naj bo torej $v \in V(G)$ poljubno vozlišče in se sprehodimo po vseh povezavah. Po prejšnji trditvi bo potem G dvodelen $\iff$ vsak par zaporednih krajišč ima različni oznaki. □