# Diskretna matematika 1 Episode II: Attack of the binomials

Nek študent FMF

19.2.2019

**Povzetek**

Ta kreacija, ki jo trenutno berete, dragi bralec, je skupek prepisanih zapiskov študijskega predmeta Diskretna matematika 1 s perspektive nekega študenta 2. letnika matematike na FMF. Uporaba tega dokumenta za kakršnikoli namene je na lastno odgovornost.

# 1 Uvod

Vprašajmo se najprej, kaj sploh pomeni pridevnik »diskreten«. Ta beseda ima v slovenščini dva pomena, ki sta v angleščini ločeni besedi: *discreet* - obziren in *discrete* - jasno ločen oz. razločljiv. Za naše potrebe je (cca. očitno, dokaz prepuščen bralcu) relevanten drugi pomen. Diskretna matematika se torej ukvarja s (včasih tudi števnimi) končnimi strukturami, ki so ločljive (ne tega citirat, razen če želite v indeksu zbrati tri 6-ke in priklicati hudiča). Zanimivost: Obe besedi izhajata iz latinskega glagola *discernere*, iz katerega še najbolj očitno izhaja angleški glagol »*to discern*«, ki ima med drugimi tudi pomen »razločiti«.

**Opomba 1:** Preden začnemo, si oglejmo še kak praktičen primer diskretnosti: Množica $A$ v topološkem prostoru $X$ je diskretna, če $\forall x \in A$ $\exists \mathcal{O}_x$ okolica $x$ tako, da je $x$ edina točka iz A v $\mathcal{O}_x$.

Poglejmo si še kakšen zgled

**Zgled 1:** X = $\mathbb{R}$, A = $\mathbb{Z}$

## 1.1 Področja diskretne matematike:

- Kombinatorika,
- Teorija grafov,
- Matematična logika,
- Teorija množic (osnove),
- Računalniška matematika,
- Teorija kodiranja,
- itd.

## 1.2 Vsebina predmeta diskretna matematika 1:

1. Kombinatorika
    - Osnove preštevanja
    - Načelo vključitev in izključitev
    - Rekurzivne enačbe in rodovne vrste
2. Teorija grafov
    - Osnovno o grafih
    - Drevesa in cikli
    - Ravninski grafi
    - Barvanje grafov
    - Povezanost grafov

### 1.3 Literatura:

- Primož Potočnik: Zapiski predavanj iz Diskretne Matematike 1, dostopno na povezavi: `https://www.fmf.uni-lj.si/~potocnik/Ucbeniki/DM-Zapiski2010.pdf`
- M. Juvan in P. Potočnik: Teorija grafov in kombinatorika: Primeri in rešene naloge

## 2 Osnove Preštevanja

1. Oznake:
   - $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\} = \omega$
   - $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
   - $|A|$ = št. elementov oz. moč množice A (gledamo predvsem končne množice)
2. Načelo Enakosti:
   $$|A| = |B| \iff \exists f : A \to B \text{, ki je bijektivna}$$
3. Načelo vsote:
   $$A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$$
   Induktivno velja:
   $$A_i \cap A_j = \emptyset;\ i \neq j \Rightarrow |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$
4. Načelo produkta:
   $$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$
   Analogno zapišemo formulo za poljuben produkt:
   $$|\prod_{i=1}^{n} A_i| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$
5. Računovodsko pravilo: Naj bo $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Tedaj velja:
   $$\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}_{vrsti\check{c}navsota} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}}_{stolp\check{c}navsota}$$
   Povedano še z besedami: Kadar seštevamo vrednosti polj v neki tabeli, je vseeno, če najprej seštejemo po vrstah in nato seštejemo vsote vrst, ali pa najprej seštejemo po stolpcih in nato seštejemo vsote stolpcev.

**Definicija 1:** Naj bo $x \in \mathbb{C}$ in $n \in \mathbb{N}_0$.

1. $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots x}_{n} = \prod_{i=0}^{n} x$ je *n-ta potenca* števila $x$.

2. $x^{\underline{n}} = \underbrace{x \cdot (x-1) \cdot \ldots (x-(n-1))}_{n} = \prod_{i=0}^{n-1}(x-i)$ je $n$-*ta padajoča potenca* števila $x$.

3. $x^{\bar{n}} = \underbrace{x \cdot (x+1) \cdot \ldots (x+(n-1))}_{n} = \prod_{i=0}^{n-1}(x+i)$ je $n$-*ta rastoča potenca* števila $x$.

Hitro opazimo, da velja:

$$x^{\underline{n}} = (x-(n-1))^{\bar{n}} \text{ in } x^{\bar{n}} = (x+(n-1))^{\underline{n}}$$

Posledično velja:

$$1^{\bar{n}} = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n! = n^{\underline{n}}$$

**Opomba 2:** Vrednost praznega produkta je 1. Npr.:

$$x^0 = x^{\underline{0}} = x^{\bar{0}} = 0! = 1$$

V analizi izraz $0^0$ ni definiran, v diskretni matematiki pa ga enačimo z 1.

**Definicija 2:**
Naj bo $x \in \mathbb{C}$ in $k \in \mathbb{Z}$.

$$\binom{x}{k} = \begin{cases} \frac{x^{\underline{k}}}{k!}; & k \geq 0 \\ 0; & k < 0 \end{cases} \text{,se imenuje binomski koeficient.}$$

Naslednje trditve ne bomo dokazali (dokaz prepuščen bralcu za vajo).

**Trditev 1.** *Naj bo $|A| = n$ in $|B| = k$.*

1. *Število vseh podmnožic množice $A$ je $2^n$.*
2. *Število podmnožic moči $k$ množice $A$ je $\binom{n}{k}$.*
3. *Število vseh preslikav $A \to B$ je $k^n$.*
4. *število injektivnih preslikav $A \to B$ je $k^{\underline{n}}$.*
5. *število bijektivnih preslikav $A \to B$ je $\begin{cases} n!; & k = n \\ 0; & k \neq n \end{cases}$. Posledično je število permutacij množice $A$ (torej število bijekcij $A \to A$) enako $n!$*

## 2.1 Razdelitve množice:

**Definicija 3:** *Razdelitev/particija* množice $A$ je družina množic $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ za katero velja:

1. $\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\} : B_i \neq \emptyset$,
2. $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, k\} : (i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset)$,
3. $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = A$

Če imamo podano razdelitev množice, lahko z njeno pomočjo definiramo tako ekvivalenčno relacijo, da porojeni ekvivalenčni razredi sovpadajo s particijo. Takšna ekvivalenčna relacija se (v splošnem) glasi:
$a \sim b \iff \exists i \in \{1, 2, \ldots, k\}; a, b \in B_i$

**Definicija 4:** Naj bosta $k, n \in \mathbb{N}_0$. Število razdelitev množice z $n$ elementi na $k$ blokov imenujemo *Sterlingovo število druge vrste* in ga označimo s $S(n, k)$.

**Zgled 2:** $n = 4, k = 2; S(4, 2) =?$

$A = \{a, b, c, d\}; |A| = 4$(ta pogoj zagotovi, da so si a, b, c in d medseboj različni)

Poglejmo si vse razdelitve množice $A$ na 2 bloka:
$a, bcd \quad b, acd \quad c, abd \quad d, abc$
$ab, cd \quad ac, bd \quad ad, bc$
Skupaj je to 7 različnih možnosti. Torej $S(4, 2) = 7$.
V splošnem tudi velja: $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1; n \geq 1$

**Trditev 2.** *Število surjekcij* $A \to B; |A| = n \wedge |B| = k$ *je enako* $S(n, k) \cdot k!$ *za* $n \geq k$ *in* $0$ *sicer.*

*Dokaz.* Opazimo: praslike elementov množice $B$ tvorijo particijo v $A$, kjer velja $x \sim y \iff f(x) = f(y)$

1. Najprej $A$ razdelimo na k nepraznih blokov na S(n, k) načinov
2. Za vsak blok izberemo slike v $B$ na $k!$ načinov

Torej če je $n \geq k$ je število surjekcij enako $S(n, k) \cdot k!$. Če je $n < k$ potem med $A$ in $B$ ne obstaja nobena surjekcija. □

**Trditev 3.** *Za* $n, k \geq 1$ *velja:*

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + k \cdot S(n - 1, k)$$

*Dokaz.* Naj bo $|A| = n$ in naj bo $a \in A$ izbrana točka. Naj bo $f : A \to A \setminus \{a\}$. Ločimo 2 primera:

1. Razdelitve, v katerih je izbrani $a$ sam v svojem bloku:

   Dobljena slika množice $A$ je torej množica, ki ima en element manj in hkrati tudi en blok manj. Njeno Sterlingovo število je torej $S(n-1, k-1)$. Opazimo tudi (baje), da je v tem primeru $f$ bijekcija, saj $A \setminus \{a\}$ »dodamo še en blok, ki vsebuje $a$, pa je vredu.«

2. Razdelitve, v katerih izbrani $a$ ni sam v svojem bloku:

   V tem primeru se zmanjša samo moč množice $A$ (število blokov ostane enako), torej je Sterlingovo število enako $S(n-1, k)$. Ker imamo $k$ blokov imamo $k$ možnosti, kam vtakniti ta $a$. Torej je takih razdelitev $k \cdot S(n - 1, k)$.

Opciji 1 in 2 sta (očitno) disjunktni. Po načelu vsote je torej $S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + k \cdot S(n - 1, k)$ □

Zdaj, ko smo dokazali prejšnjo rekurzivno zvezo, moramo za njo izračunati začetne pogoje:

- $S(0,0) = 1$
- $S(n,0) = 0$ ,če je$n > 1$
- $S(n,n) = 1$
- $S(n,1) = 1; n \geq 1$
- $S(n,k) = 0$ ,če je$n < k$

**Definicija 5:** Število vseh razdelitev množice z $n$ elementi imenujemo *Bellovo število* in ga označimo z $B_n$

Tabelirajmo $S(n,k)$:

| $n \diagdown^{k}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $B_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| 4 | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 | 0 | 15 |
| 5 | 0 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | 52 |

Naj bodo $a_{ij}$ elementi zgornje tabele (brez zadnjega stolpca), kjer indeks $i$ predstavlja zaporedno število vrste k kateri pripada $a_{ij}$, šteto od zgoraj navzdol, in $j$ predstavlja zaporedno število stolpca v katerem je $a_{ij}$, šteto od leve proti desni.
Opazimo sledeče:
Za $i, j > 0$ velja, da je $a_{ij} = a_{(i-1)(j-1)} + j * a_{(i-1)j}$
To pa sovpada s prej dokazano trditvijo.