Domače naloge pri predmetu Izbrana poglavja iz topologije

Jimmy Zakeršnik

5. 2. 2024

Naloga 1: Na primeru $\prod_{t\in\mathbb{R}}(\{0,1\},\tau_d)$ pokaži, da poljuben produkt metrizabilnih prostorov ni nujno metrizabilen.

Rešitev: Pokazali bomo, da prostor $(\prod_{t\in\mathbb{R}}(\{0,1\},\tau_D)$, kjer je τ_D porojena produktna topologija, ni 1-števen, in posledično ni metrizabilen (saj velja, da metrizabilnost implicira 1-števnost). Naj bo $X=\prod_{t\in\mathbb{R}}(\{0,1\}$ in z $\bar{0}$ označimo element iz X, za katerega velja: $\forall t\in\mathbb{R}:\bar{0}_t=0$. Dodatno se spomnimo, da če je $\mathcal{P}$ baza produktne topologije τ_D, potem za $P\in\mathcal{P}$ velja, da obstaja končna družina indeksov $T=\{t_0,t_1,\dots,t_n\}\subset\mathbb{R}$ in $U_{t_0},U_{t_1},\dots,U_{t_n}\in\tau_d$, taki, da je (z določeno mero zlorabe notacije)

$$P=U_{t_0}\times U_{t_1}\times\ldots\times U_{t_n}\times\prod_{t\in(\mathbb{R}\setminus T)}\{0,1\}$$

Naj bo sedaj $\mathcal{U}=\{U_n;\mid n\in\mathbb{N}\}\subseteq\tau_D$ poljubna števna družina odprtih okolic od $\bar{0}$. Potem za $\forall n\in\mathbb{N}$ obstaja končna družina indeksov $I_n=\{\lambda_1^n,\dots,\lambda_{m_n}^n\}\subset\mathbb{R}$, in odprte množice $B_{\lambda_1^n},\dots,B_{\lambda_{m_n}^n}\in\tau_d$, da je (z določeno mero zlorabe notacije) $P_n=B_{\lambda_1^n}\times\ldots\times B_{\lambda_{m_n}^n}\times\prod_{t\in(\mathbb{R}\setminus I_n)}\subseteq U_n$ okolica $\bar{0}$ iz baze produktne topologije τ_D.
Sestavimo družino indeksov $J=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}I_n\subset\mathbb{R}$, ki je števna. Potem je $\mathbb{R}\setminus J\neq\emptyset$, torej obstaja nek $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus J$. Označimo $W=\prod_{t\in(\mathbb{R}\setminus\{\lambda_0\})}\times\{0\}$. Vidimo, da je W odprta v τ_D, ter da je okolica $\bar{0}$. Hkrati vidimo, da $\forall n\in\mathbb{N}:p_{\lambda_0}(P_n)=\{0,1\}\nsubseteq p_{\lambda_0}(W)=\{0\}$, in posledično sledi: $\forall n\in\mathbb{N}:U_n\nsubseteq W$. Ker je $\mathcal{U}$ bila poljubna števna družina odprtih okolic sledi, da (X,τ_D) ni 1-števna. $\square$

Naloga 2: Naj bo X kontinuum. Pravimo, da je X povezan z loki, če $\forall x,y\in X$ obstaja lok v X s krajišči v x in y. Pokaži, da je kontinuum X povezan z loki $\iff$ X je povezan s potmi.

Rešitev:

$\Rightarrow)$: Naj bosta $x,y\in X$ poljubni točki. Po predpostavki obstaja L lok v X s krajiščema v x in y. Vemo, da je vsak lok homeomorfen zaprtemu intervalu. Naj bo $I=[0,1]$ in $\varphi:I\to L$ nek homeomorfizem, tak da je $\varphi(0)=x$ in $\varphi(1)=y$. Potem je φ pot od x do y. Sledi, da je X povezan s potmi.

$\Leftarrow)$: Naj bosta x in y poljubni točki iz X in naj bo $p:I\to X$ poljubna pot od x do y $(p(0)=x,p(1)=y)$. Če je p injektivna, potem je zvezna bijekcija iz kompakta $(I=[0,1])$ na svojo zalogo vrednosti, ki je Hausdorfov prostor. Po znanem rezultatu iz splošne topologije je potem p homeomorfizem, torej je $p(I)$ lok v X s krajiščema v x in y. Denimo, da p ni injektivna in označimo:

$$P(z)=\{t\in I|\ p(t)=p(z)\},\ P=\bigcup_{\substack{t\in I\\|P(t)|>1}}P(t)$$

Za $\forall z_1,z_2\in I$ opazimo naslednje:

- $z_1\neq z_2\Rightarrow P(z_1)\cap P(z_2)=\emptyset$

– $P(z_1)$ je zaprta v I, torej je tudi kompakt v I

Še več, opazimo, da je P ravno množica vseh točk iz I, ki ne ustrezajo pogoju injektivnosti. Z neprazno indeksno množico Λ označimo vse tiste $P(z)$, katerih moč je večja od 1 in zanj izberemo predstavnika z_λ. Tako je $P = \bigcup_{\lambda \in \lambda} P(z_\lambda)$.

Preverimo, da je P tudi kompaktna množica: Naj bo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ poljubno konvergentno zaporedje v P in naj bo $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Potem $\exists \lambda_0 \in \lambda$ in $N \in \mathbb{N}$, taka, da je $\forall n \in \mathbb{N} n \geq N : x_n \in P(z_{\lambda_0})$, in ker je $P(z_{\lambda_0})$ kompakt, je $x \in P(z_{\lambda_0})$. Sledi, da je $x \in P$, torej je P kompaktna. Sedaj bomo skonstruirali lok od x do y.

Vemo, da je I linearno urejena množica in posledično se ta urejenost podeduje na P oz. na vsak $P(z_\lambda)$. Ker so tako P kot $P(z_\lambda) \forall \lambda \in \Lambda$ kompakti (kot zaprte podmnožice kompakta I), vsebujejo svoje zgornje in spodnje meje. Začnemo v 0 in določimo $x_0^0 = minP$. Označimo $x_0^1 = maxP(x_0^0)$ ter tvorimo interval $I_{n_0} = [x_0^0, x_0^1]$. Nadaljujemo tako, da potujemo desno od x_0^1, dokler ne naletimo na naslednji element iz P. Označimo ga z x_1^0, poiščemo pripadajoči x_1^1 $(= maxP(x_1^0))$ ter tvorimo interval $I_{n_1} = [x_1^0, x_1^1]$. Postopek ponavljamo, dokler lahko, in tako dobimo družino intervalov $\mathcal{I} = \{I_n |\ n \in \nu\}$ za katero velja:

$$\forall n_i, n_j \in \nu : n_i \neq n_j \Rightarrow I_{n_i} \cap I_{n_j} = \emptyset$$

Preverimo, da je $\mathcal{I}$ končna ali števna družina intervalov: Naj bo $n \in \nu$ poljuben indeks in I_n interval iz $\mathcal{I}$. Potem obstaja $q_n \in \mathbb{Q}$, da je $q_n \in I_n$. Za vsak $n \in \nu$ izberemo en tak q_n in potem sledi, da je preslikava $f : \mathcal{I} \to \mathbb{Q} \cap I$ s predpisom $f(I_n) = q_n$ injektivna. Sledi, da je $\mathcal{I}$ kvečjemu števna družina, torej smemo vzeti $\nu = \mathbb{N}_0$.

Sedaj označimo $J_0 = [0, x_0^1] = [0, x_0^0] \cup [x_0^0, x_0^1] = [0, x_0^0] \cup I_0$ in za $\forall n \in N : J_n = [x_{n-1}^1, x_n^1] = [x_{n-1}^1, x_n^0] \cup I_n$. Dodatno označimo $\mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} J_n$. Opazimo naslednje: $\mathcal{J}$ ni nujno zaprta. Posebej, limita zaporedja $\{x_n^1\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ni nujno vsebovana v $\mathcal{J}$. Naj bo $x_P = \lim_{n\to\infty} x_n^1$ in označimo $J_P = [x_P, 1]$.

Sedaj $\forall n \in \mathbb{N}$ definiramo linearne funkcije $f_n : J_n \to [x_{n-1}^1, x_n^0]$; $f_n(x_{n-1}^1) = x_{n-1}^1, f_n(x_n^1) = x_n^0$. Te so seveda zvezne bijekcije. Dodatno definiramo linearno funkcijo $f_0 : J_0 \to [0, x_0^0]$; $f_0(0) = 0$ in $f_0(x_0^1) = x_0^0$ ter linearno funkcijo $f_P : J_P \to [x_P, 1]$; $f_P(x_P)$, obe očitno zvezni bijekciji.

Opazimo, da je pot p injektivna na kodomenah teh funkcij. Dodatno, opazimo da je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} J_n \cup J_P = I$ in $\forall k, l \in \mathbb{N}_0 : J_k \cap J_l \neq \emptyset \iff |k - l| \leq 1$. Sedaj definiramo funkcijo $\psi : Cl(\mathcal{J}) \to X$ s predpisom: $\psi(t) = \begin{cases} (p \circ f_n)(t) & ;\ t \in J_n \\ p(x_P) & ;\ t = x_P \end{cases}$

Funkcija ψ je (po konstrukciji) injektivna ter zvezna po lemi o lepljenju.

Sedaj definiramo $\varphi : I \to X$ s predpisom: $\varphi(t) = \begin{cases} \psi(t) & ;\ t \in Cl(\mathcal{J}) \\ p(t) & ;\ t \in J_P \end{cases}$

Vidimo, da je $Cl(\mathcal{J}) \cap J_P = \{x_P\}$ in da je p injektivna na J_P. Po lemi o lepljenju je potem tudi φ zvezna. Dodatno, φ je injektivna ter surjektivna na svojo sliko $\varphi(I)$. Ker je φ torej zvezna bijekcija iz kompakta v Hausdorfov prostor, je po znanem rezultatu homeomorfizem. Sledi, da je $\varphi(I) \equiv I$ lok v X in $\varphi(1) = p(1) = y$ ter $\varphi(0) = p(0) = x$. Sledi torej, da sta $x, y \in X$ krajišči tega loka. Ker sta bila $x, y \in X$ poljubna, je X povezan z loki.

$\square$

Naloga 3: Naj bo (X, d) poljuben kompakten metričen prostor. Naj bo $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ števna družina odprtih pokritij oblike $\mathcal{U}_n = \{K(x, \frac{1}{n})| \ x \in X\}$. Ker je (X, d) kompakt za $\forall n \in \mathbb{N}$ obstaja končno podpokritje $\mathcal{V}_n = \{K(x_1^n, \frac{1}{n}), \dots, K(x_{m_n}^n, \frac{1}{n})\}$. Naj bo $A = \{x_i^n| \ n \in \mathbb{N} \land i \in \{1, \dots, m_n\}\}$ Pokaži, da je A gosta v (X, d).

Rešitev: Očitno je, da je A števno neskončna. Naj bo τ_d topologija, porojena z metriko d ter naj bo $U \in \tau_d$ poljubna odprta množica v (X, d). Za odprto pokritje $\mathcal{U}_n$ obstaja končno podpokritje $\mathcal{V}_n$ ter indeksi $k_1, \dots, k_l$, da je $U \subseteq \bigcup_{i=1}^l K(x_{k_i}^n, \frac{1}{n})$. Če je kak od teh x_{k_i} v U, potem smo končali. Denimo, da za vsak $i \in \{1, \dots, l\} x_{k_i} \notin U$. Naj bo $x_0 \in U$ poljuben. Pokritju $\mathcal{V}_n$ dodamo $K(x_0, \frac{1}{n})$ in dobimo novo končno pokritje X. Posledično je $x \in A$ in $A \cap U \neq \emptyset$. Ker je bila $U \in \tau_d$ poljubna, sledi, da je A gosta v (X, d). $\square$

Naloga 4: Pokaži, da je $\sin \frac{1}{x}$-kontinuum uverižljiv.

Rešitev: Spomnimo se, da je $\sin \frac{1}{x}$-kontinuum homeomorfen $\{0\} \times [-1, 1] \cup \{\sin \frac{1}{x}| \ x \in (0, 1]\} = X$. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Vemo, da je $\sin \frac{1}{x} = 1 \iff x = \frac{2}{\pi(1+4k)}; k \in \mathbb{Z}$ in obstaja nek $k \in \mathbb{Z}$, da je $x_k < \frac{\varepsilon}{4}$. Naj bo $\mathcal{U}$ pokritje $\{0\} \times [-1, 1]$ z odprtimi kvadrati $K_{x_k}(a) = (-x_k, x_k) \times (a - x_k, a + x_k)$. Ker je pokrit prostor kompakt, obstaja končno podpokritje $V_1 = (-x_k, x_k) \times (-1 - x_k, -1 + x_k), \dots, V_{n-1} = (-x_k, x_k) \times (a_{n-1} - x_k, a_{n-1} + x_k), V_n = (-x_k, x_k) \times (1 - x_k, 1 + x_k)$, za katerega velja $|a_{n-1} - 1| < \frac{3x_k}{2}$. Označimo: $B = \{(x, \sin \frac{1}{x})| \ x \geq x_k\}$ in vidimo, da je $d(Cl(V_{n-1}), B) \geq 0$. Označimo $d(Cl(V_{n-1}), B) = q$ in vemo, da obstaja $\min\{\varepsilon, q\}$-veriga od $(x_k, \sin \frac{1}{x_k})$ do $(1, \sin 1)$, katere člene označimo z $V_{n+1}, \dots, V_m$. Potem je pa $\{V_1, \dots, V_n, V_{n+1}, \dots, V_m\}$-veriga, ki pokrije ves X in katere členi imajo diameter pod ε. $\square$

Naloga 5: Pokaži, da trioda ni uverižljiv kontinuum.

Rešitev: Naj bo $T = [-1, 1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0, 1]$ ter označimo $L_1 = [-1, 0] \times \{0\}, L_2 = [0, 1] \times \{0\}$ in $L_3 = \{0\} \times [0, 1]$. Denimo, da obstaja $\frac{1}{8}$-veriga, ki pokrije $T : \{V_1, \dots, V_n\}; diam(V_i) < \frac{1}{8}$. Potem obstajajo indeksi m_1, m_2, m_3, da je $(-1, 0) \in V_{m_1}, (1, 0) \in V_{m_2}$ in $(0, 1) \in V_{m_3}$. Obstaja tudi indeks m, da je $(0, 0) \in V_m$. Brez škode za splošnost naj bo $m < m_1 < m_2 < m_3$. Velja, da je $L_1 \cap (Cl(V_m) \setminus V_m) \neq \emptyset$ in enako za L_2 in L_3. Brez škode za splošnost denimo, da je $L_1 \cap V_{m+1} \neq \emptyset$ in $L_3 \cap V_{m+1} \neq \emptyset$. Potem je $L_1 \cap CL(V_{m+1}) \setminus (V_{m+1} \cup V_m) \neq \emptyset$ in enako za L_3. Posledično velja tudi $L_1 \cap V_{m+2} \neq \emptyset$ in podobno za L_3. Postopek nadaljujemo dokler ne pridemo do m_1. Velja torej: $L_1 \cap V_{m_1} \neq \emptyset$ in $L_3 \cap V_{m_1} \neq \emptyset$. Velja, da je $(-1, 0) \in L_1 \cap V_{m_1}$. Naj bo $y \in L_3 \cap V_{m_1}$ poljuben. Tedaj je $d((-1, 0), y) \geq 1$, torej je $diam(V_{m_1}) \geq 1 > \frac{1}{8}$, to pa nas privede v protislovje s predpostavko, da je $diam(V_{m_1}) < \frac{1}{8}$. Sledi, da T ni uverižljiv. $\square$

Naloga 6: Dokaži, da krožnica S^1 ni uverižljiva.

Rešitev: Zapišemo S^1 v polarnih koordinatah: $S^1 = \{(1,\varphi)|\ \varphi \in [0,2\pi)\}$. Denimo, da obstaja veriga $\mathcal{V} = \{V_1,\ldots,V_m\}$, ki pokrije S^1. Brez škode za splošnost naj bo $(1,\pi) \in V_1$. Potem obstajata $\varphi_1 \in (0,\pi)$ in $\alpha_1 \in (\pi, 2\pi)$, da je $(1,\varphi_1),(1,\alpha_1) \in Cl(V_1) \setminus V_1$. Posledično je $(1,\varphi_1),(1,\alpha_1) \in V_2$ in obstajata $\varphi_2 \in (0,\varphi_1)$ in $\alpha_2 \in (\alpha_1, 2\pi)$, da je $(1,\varphi_2),(1,\alpha_2) \in Cl(V_2) \setminus V_2$. Proces nadaljujemo in naj bo i tisti indeks, da je V_i prvi člen v $\mathcal{V}$, ki vsebuje $(1,\frac{\pi}{2})$. Naj bo j tisti indeks, da je V_j prvi člen v $\mathcal{V}$, ki vsebuje $(1,\frac{3\pi}{2})$. Brez škode za splošnost naj bo $i \leq j$. Tedaj obstaja tak $\alpha_i < 2\pi$, da je $(1,\alpha_i) \in V_i$. Potem je $d((1,\frac{\pi}{2}),(1,\alpha_i)) \geq 1$, torej je $diam(V_i) \geq 1$. Potem za $\varepsilon < 1$ ne obstaja ε-veriga, torej S^1 ni uverižljiv kontinuum. $\square$

Naloga 7: Naj bo X kontinuum in $f: X \to X$ zvezna funkcija brez fiksne točke. Tedaj je $\inf\{d(x,f(x))|\ x \in X\} = \min\{d(x,f(x))|\ x \in X\} > 0$.

Rešitev: Označimo $A = \{d(x,f(x))|\ x \in X\}$. Če je $\inf(A) = 0$ potem obstaja tako konvergentno zaporedje $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kjer je $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, da je $\lim_{n\to\infty} d(x_n, f(x_n)) = 0$. Sledi, da je $d(x,f(x)) = 0$, torej je $f(x) = x$. To je pa protislovno s tem, da f nima fiksne točke. Posledično je $\inf(A) > 0$ in označimo $r = \inf(A)$. Tedaj obstaja konvergentno zaporedje $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}; x = \lim_{n\to\infty} x_n$, da je $\lim_{n\to\infty} d(x_n, f(x_n)) = r$. Tedaj je $d(x,f(x)) = r$ in potem je $\inf(A) = \min(A)$. $\square$

Naloga 8: Naj bo X nedegeneriran nerazcepen kontinuum. Tedaj X ni povezan s potmi.

Rešitev: Denimo, da je X povezan s potmi. Ker je X nerazcepen kontinuum ima $card(\mathbb{R})$ paroma disjunktnih kompozantov. Naj bosta C_1 in C_2 poljubna različna kompozanta od X. Potem je $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Naj bota $x \in C_1$ in $y \in C_2$ poljubna elementa. Ker je po predpostavki X povezan s potmi obstaja zvezna funkcija $f: [0,1] \to X$, za katero je $f(0) = x$ in $f(1) = y$. Izberemo tako funkcijo f in označimo $A = f([0,1])$. Tedaj je A kontinuum v X in enako velja za $A \cup C_1$. Dodatno velja: $x, y \in A \cup C_1$. Velja tudi, da je $A \cup C_1$ pravi podkontinuum v X, ker ima X neštevno neskončno paroma disjunktnih kompozantov. Po eni strani je potem $y \in A \cup C_1 \subseteq comp(x) = C_1$, po drugi strani pa je $y \in C_2$. Sledi, da je $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. To je pa protislovno s tem, da sta C_1 in C_2 disjunktna. Sledi, da X ni povezan s potmi. $\square$

Naloga 9: Naj bo X kontinuum in C podkontinuum v X. Naj bo A, B separacija $X \setminus C$. Dokaži, da sta potem $A \cup C$ in $B \cup C$ podkontinuuma X.

Rešitev: Pokazali bomo, da je $A \cup C$ kontinuum, za $B \cup C$ je dokaz simetričen.Naj bo (A,B) separacija $X \setminus C$ iz predpostavke. Denimo, da sta A in B odprti v $X \setminus C$. Ker je C zaprta v X je $X \setminus C$ odprta v X in postledično sta A in B odprti v X. Očitno je tudi $A \cap C = \emptyset$ in $B \cap C = \emptyset$. Preverimo sedaj, da $A \cup C$ ustreza pogojem kontinuuma.

Metričnost: $A \cup C$ je očitno metrični prostor - to lastnost podeduje od X.

Kompaktnost: Vemo, da je B odprta v X ter da je $X = (X \setminus C) \cup C = A \cup B \cup C$. Posledično, je $A \cup C = X \setminus B$ zaprta v X. Ker je zaprta podmnožica v kompaktu, je potem $A \cup C$ tudi sama kompaktna.

Povezanost: Denimo, da $A \cup C$ ni povezana. Tedaj obstajata $E, F \subseteq A \cup C$ odprti v $A \cup C$, da je $E \cap F = \emptyset$ in $E \cup F = A \cup C$. Ker je C povezana, je nujno v celoti vsebovana v E ali F. Brez škode za splošnost denimo, da je $C \subset F$. Potem je $E \subset A$ in posledično je E odprta v X. Naj bo sedaj $y \in F \cup B$ poljubna točka. Če je $y \in B$, potem ni problemov, saj je B odprta. Denimo torej, da je $y \in F$. Znotraj $A \cup C$ sta E in F zaprti, torej lahko dobro definiramo razdaljo $r = d(y, E)$. V $F \cup B$ potem vzamemo $K(y, \frac{r}{3})$. Velja: $K(y, \frac{r}{3}) \subseteq F \cup B$, torej je $F \cup B$ odprta v X. Potem je pa $(E, F \cup B)$ separacija X, kar pa nas privede v protislovje, saj je X povezan. Sledi torej, da je $A \cup C$ povezan.

Sklep: $A \cup C$ je kontinuum. $\square$