UVOD V DIFERENCIALNE ENAČBE, KOMPLEKSNO IN FOURIEROVO ANALIZO

Bojan Magajna

UVOD V DIFERENCIALNE ENAČBE, KOMPLEKSNO IN FOURIEROVO ANALIZO

DMFA – založništvo
Ljubljana 2018

UVOD V DIFERENCIALNE ENAČBE, KOMPLEKSNO IN FOURIEROVO ANALIZO

Povzetek

Ta knjiga je namenjena tistim, ki že poznajo osnove diferencialnega in integralskega računa ter linearne algebre. Obravnava holomorfne in harmonične funkcije, osnove o diferencialnih enačbah in Fourierovi analizi, robne probleme povezane z linearnimi diferencialnimi enačbami drugega reda ter lastnosti funkcij, ki so rešitve teh problemov.

Ključne besede: diferencialna enačba, holomorfna funkcija, harmonična funkcija, Hilbertov prostor, Fourierove vrste, Fourierova in Laplaceova transformacija, Sturm-Liouvillov problem, ortogonalni polinomi, Besselove funkcije, hipergeometrijska enačba.

AN INTRODUCTION TO DIFFERENTIAL EQUATIONS, COMPLEX AND FOURIER ANALYSIS

Summary.

This is an introductory course in mathematical analysis for students already acquainted with basics of differential and integral calculus and linear algebra. It covers fundamentals of differential equations, holomorphic and harmonic functions, Fourier analysis, boundary value problems for linear differential equations of second order and some special functions arising from such problems.

Key words: differential equation, holomorphic function, harmonic function, Hilbert space, Fourier series, Fourier and Laplace transform, Sturm-Liouville problems, orthogonal polynomials, Bessel functions, hypergeometric equation.

Mathematics Subject Classification (2010): 30-01, 31-01, 33-01, 34-01, 34B24, 35-01, 42-01, 11M06.

CIP – Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

517.9(075.8)

MAGAJNA, Bojan
Uvod v diferencialne enačbe, kompleksno in Fourierovo analizo / Bojan Magajna. – Ljubljana: DMFA – založništvo, 2018. – (Matematika – fizika: zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij / DMFA – založništvo, ISSN 1408-1571; 55)

ISBN 978-961-212-292-8

294824192

V spomin na mojega očeta Franca Magajna

Contents

Predgovor

To delo obravnava holomorfne funkcije, Fourierove vrste in transformacijo, linearne diferencialne enačbe drugega reda ter funkcije, ki nastopajo kot njihove rešitve. Bistveni del vsebine je to, kar predvideva učni načrt matematike za študente fizike v drugem semestru drugega letnika, številni razdelki pa obravnavajo teme, ki so tudi v študijskih programih drugih smeri, npr. v (finančni) matematiki in računalništvu. Učne programe poskuša poglobiti in dopolniti. Pri predavanjih namreč ni na razpolago dovolj časa, da bi dokazali prav vse trditve, ki jih povemo, izpustiti pa moramo tudi precej spoznanj, ki bi bila sicer koristna in dostopna študentom drugega letnika. Vendar pa delo ni enciklopedično; obseg snovi smo želeli obdržati zmeren, da jo bo lahko obvladal dovolj prizadeven študent.

Prvo poglavje uvaja osnove o diferencialnih enačbah (kar sicer študentje fizike spoznajo že v prvem semestru drugega letnika). V nekoliko zgoščeni obliki predstavlja glavne elementarne metode reševanja ter osnovni izrek o eksistenci in enoličnosti rešitev. Poleg teh standardnih vsebin pa obravnavamo tudi odvedljivost rešitev na začetne pogoje in parametre, gradivo, ki se na osnovnih tečajih dostikrat opušča, čeprav se kasneje pogosto uporablja npr. v mnogih dokazih v geometriji in diferencialni topologiji. Poglavje zaključimo z obravnavo tokov vektorskih polj, bolj poglobljeni geometrični teoriji diferencialnih enačb pa smo se izognili, ker ni povezana z drugimi temami tega dela.

V drugem poglavju se posvetimo holomorfnim funkcijam. Osnovni rezultat, Cauchyevo formulo, izpeljemo iz splošnejše Cauchy-Greenove formule, katere poseben primer je tudi klasična Greenova formula. Kompleksna analiza je osnova za razumevanje drugih tem. Tako lahko na primer številne pomembne funkcije, ki izhajajo iz fizikalnih in drugih problemov, dobro razumemo le, če jih obravnavamo kot funkcije kompleksne spremenljivke. Brez neskončnih produktov ni mogoče dobro razumeti na primer funkcije Γ in njene povezave s trigonometrijskimi funkcijami, ali pa Riemannove funkcije ζ.

Elektrostatični potencial je zgled harmonične funkcije v prostoru. V ravnini so harmonične funkcije lokalno realni deli holomorfnih, zato je teorija harmoničnih funkcij v ravnini zelo tesno povezana s kompleksno analizo. Poleg ravninskih obravnavamo v tretjem poglavju tudi harmonične funkcije v prostoru, vendar le nekaj najosnovnejših rezultatov (obsežnejša obravnava tega je npr. v [33]).

Tudi linearne diferencialne enačbe drugega reda, ki se jim posvetimo v petem poglavju, je naravno študirati v kontekstu funkcij kompleksne spremenljivke. Bralca vpeljemo v osnovno teorijo specialnih funkcij (npr. Legendreovih in drugih ortogonalnih polinomov, Besselovih funkcij ter hipergeometrijske enačbe). V petem poglavju obravnavamo tudi (regularni) Sturm-Liouvillov problem. Dandanes najbolj razširjeni pristop k temu problemu je sicer prek teorije Hilbert-Scmidtovih (torej kompaktnih) operatorjev. Ker pa v tem delu ne moremo predpostaviti poznavanja te teorije in bi bila njena vpeljava časovno prezahtevna, smo raje ubrali bolj klasično pot: predstavimo namreč dokaz Sturm-Liouvillovega izreka, ki temelji na izreku o residuih. Prednost te metode je npr. tudi v opisu asimptotične razporeditve lastnih vrednosti. Metoda deluje sicer tudi pri singularnem Sturm-Liouvillovem problemu, vendar pa se pri obravnavi splošnih spektralnih problemov o diferencialnih operatorjih (katerih spekter ni nujno točkast) ni produktivno izogibati funkcionalni analizi in operatorski teoriji, ki pa ju tukaj ne moremo uporabljati. Zato polnost ortogonalnih sistemov funkcij v singularnem Sturm-Liouvillovem problemu proučimo le v posebnih primerih ortogonalnih polinomov (Lagrangeovih, Hermiteovih in Laguerrovih) ter Besselovih funkcij, pa še to večinoma le v nalogah (opremljenih z izčrpnimi navodili).

Sturm-Liouvillova teorija je pravzaprav posplošitev Fourierovih vrst, zato smo četrto poglavje namenili študiju Fourierovih vrst in Fourierove ter Laplaceove transformacije. To so tudi sicer zelo učinkovita orodja pri matematični obravnavi fizikalnih in drugih problemov. Kakršnekoli sistematične obravnave parcialnih diferencialnih enačb pa nismo poskusili podati. (Za kaj takega bi bilo skoraj nujno prej vpeljati teorijo distribucij.) Parcialne diferencialne enačbe, ki jih bomo reševali, bodo nastopale le kot zgledi za uporabo drugega obravnavanega gradiva.

To delo ni priročnik oziroma zbornik rezultatov in postopkov; za vse trditve, ki jih navajamo v tekstu, smo poskusili predstaviti čim enostavnejše dokaze. Da pa tekst ne bi bil predolg, smo morali nekatere tehnično zahtevnejše dokaze, ki sicer niso ključni za razumevanje glavne snovi, preložiti v naloge. V navodilih k takim nalogam smo natančno opisali ideje in glavne korake dokazov, zato upam, da jih bodo prizadevni bralci lahko rešili. Zgledi za take sklope nalog so npr. asimptotične ocene za Besselove in Webrove funkcije, povezava funkcije Γ z Riemannovo funkcijo ζ ter dokaz izreka o praštevilih. (Ta izrek pravi, da je število praštevil, ki so manjša od pozitivnega realnega števila x, asimptotično enako $x/\ln x$. Domneval ga je že Gauss okrog leta 1792, dokazala pa sta ga šele leta 1896 Hadamard in de la Vallee Poussin. Sedaj obstajajo tudi precej krajši dokazi; enega od njih bomo orisali, porazdeljenega med nalogami v več razdelkih, kot zgled uporabe Laplaceove in Fourierove transformacije ter kompleksne analize.) Mnoge naloge torej niso rutinske in so namenjene predvsem poglobitvi snovi, predstavljene v glavnem tekstu. Pri razlagi specialnih funkcij smo se izogibali preveliki splošnosti; zdi se nam namreč, da je npr. ortogonalne polinome bolje najprej obravnavati na konkretnem primeru Legendreovih polinomov, kot pa takoj vpeljati splošnejše (npr. Jacobijeve polinome), ki vsebujejo dodatne parametre. Druge pomembne zglede ortogonalnih polinomov (Hermiteove, Laguerrove, Čebiševe ...) lahko bralec obravnava v nalogah na podoben način kot Legendreove v glavnem delu teksta.

Kot predznanje pričakujemo le poznavanje osnov diferencialnega in integralskega računa (vključno s funkcijami več spremenljivk) ter linearne algebre. Najtežji razdelki in zahtevnejše naloge so označeni z znakom *. Knjiga vsebuje znatno več snovi, kot pa je je mogoče predelati v enosemestrskem tečaju. Razdelki in naloge, ki niso nujno del dodiplomskih tečajev iz splošne analize, čeprav morda niso zelo zahtevni, so označeni z znakom †.

Kolegoma Janezu Šteru in Marku Petkovšku se zahvaljujem za risanje nekaterih slik, Matiji Lokarju pa, da mi je povedal za obstoj geogebre, s katero sem lahko skiciral osnutke slik. Matjažu Zaveršniku gre zahvala, da je slike narisal bolje, delo oblikovno uredil in odpravil marsikatero tipografsko napako. Popravke so prispevali tudi kolega Janez Šter ter študenti in študentke Jaša Bensa, Jernej Finžgar, Iris Ulčakar, Urša Uršič, Matej Ocvirk, Marko Serafimović, Kristina Pahor, Urška Andrenšek, Eva Seme, ... Z veseljem sem upošteval tudi skoraj vse korekcije lektorja Grege Rihtarja. Za komentarje in popravke pa se želim še posebej zahvaliti Mirku Dobovišku, ki je posvetil veliko časa pregledovanju tega dela.

Opomba o označevanju. Oznaka $\mathbb{N}$ v tem delu pomeni množico naravnih števil vključno z 0.

Ljubljana, april 2018
Bojan Magajna

POGLAVJE 1

Osnovno o diferencialnih enačbah

Splošna *diferencialna enačba reda* n je enačba oblike

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

kjer je F dana funkcija $n+2$ spremenljivk (definirana na kakem območju v $\mathbb{R}^{n+1}$), y neznana funkcija spremenljivke x, $y^{(k)}$ pa njeni odvodi. (*Območje* pomeni odprto povezano množico.) *Red enačbe* je torej red najvišjega odvoda, ki nastopa v enačbi. Ker je tukaj y funkcija ene same spremenljivke, imenujemo take enačbe tudi *navadne* diferencialne enačbe, za razliko od parcialnih, v katerih nastopajo kot neznanke funkcije več spremenljivk. Niti enačbe 1. reda niso vedno rešljive; npr. enačbe $(y')^2 + 1 = 0$ ne more rešiti nobena funkcija y z realnimi vrednostmi, saj je vedno $(y')^2+1 \geq 1$. Ta razlog pa je povsem algebraičen; če se da enačbo napisati v obliki $y' = f(x, y)$, kjer je f zvezna funkcija, se da pokazati, da ima vedno rešitev (vsaj lokalno), vendar se bomo z obstojem rešitev na splošno ukvarjali kasneje. Najprej si bomo ogledali nekatere vrste enačb, ki jih je mogoče rešiti elementarno. Kot je razvidno že iz enačbe $y' = 1$ (katere rešitve so $y = x + C$, kjer je C poljubna konstanta), je rešitev diferencialne enačbe v splošnem družina funkcij (in ne zgolj ena sama funkcija). *Splošno rešitev* enačbe bomo imenovali rešitev, ki zajema (kot posebne primere) vse možne rešitve. Vsako funkcijo, ki zadošča enačbi, pa lahko potem imenujemo *delna ali partikularna rešitev.*

Do diferencialnih enačb privedejo mnogi problemi z drugih področij znanosti, kot bomo videli v zgledih in nalogah.

1.1. Nekatere enačbe 1. reda, ki nastopajo pogosto

Oglejmo si nekaj primerov enačb 1. reda, ki jih je mogoče rešiti elementarno.

1.1.1. Enačba z ločljivima spremenljivkama

Tako imenujemo enačbo, ki jo lahko zapišemo v obliki

$$g(y)y' = f(x),$$

kjer sta f in g dani zvezni funkciji. Tedaj lahko obe strani enačbe integriramo, da dobimo

$$\int g(y)\, dy = \int f(x)\, dx$$

oziroma
$$G(y) = F(x) + C, \tag{1.1.1}$$
kjer smo z G in F označili funkciji, ki ju dobimo po integriranju funkcij g in f, C pa je integracijska konstanta. (Zadošča pisati le eno integracijsko konstanto, saj se integracijski konstanti leve in desne strani odštejeta v eno konstanto.) Če se da iz (1.1.1) izraziti y kot funkcijo spremenljivke x, smo tako dobili rešitev, sicer pa štejemo, da predstavlja (1.1.1) rešitev v implicitni obliki.

Zgled 1.1.1. Enačbo
$$yy' = 2(xy + x)$$
lahko preoblikujemo (če $y \neq -1$) v
$$\frac{y}{y+1}\, dy = 2x\, dx,$$
kjer sta spremenljivki ločeni. To lahko napišemo tudi v obliki $(1 - \frac{1}{y+1})\, dy = 2x\, dx$ in po integriranju dobimo
$$y - \ln|y+1| = x^2 + C,$$
kar štejemo za implicitno podano rešitev. Toda tudi konstantna funkcija $y = -1$ je očitno rešitev enačbe, ki smo jo izgubili pri deljenju.

Opomba 1.1.2. Če želimo biti popolnoma dosledni, moramo zapisati, da je
$$\int \frac{1}{y+1}\, dy = \begin{cases} \ln(y+1) + C_1, & \text{če je } y+1 > 0, \\ \ln|y+1| + C_2, & \text{če je } y+1 < 0, \end{cases}$$
kjer konstanti C_1 in C_2 nista nujno enaki. Zato zgoraj zapisana rešitev enačbe ni povsem splošna, vendar bomo zaradi jedrnatosti v podobnih primerih tudi v prihodnje pisali, da je kar $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, čeprav to ni povsem korektno, ker konstanta C ni nujno ista za pozitivne in negativne x.

1.1.2. Enačba oblike $y' = f(\frac{y}{x})$

Tukaj je f zvezna funkcija. Z novo neznanko $v = \frac{y}{x}$, torej $y = xv$ in $y' = xv' + v$, tako enačbo preoblikujemo v enačbo
$$xv' = f(v) - v,$$
kjer sta spremenljivki x in v ločljivi.

Zgled 1.1.3. Enačbo
$$y' = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}$$
substitucija $v = \frac{y}{x}$ preoblikuje v
$$xv' = \frac{1+v}{1-v} - v = \frac{1+v^2}{1-v}.$$

Ko ločimo spremenljivki, dobimo

$$\frac{1-v}{1+v^2}\,dv = \frac{dx}{x}.$$

Z integriranjem dobimo

$$\operatorname{arctg} v - \frac{1}{2}\ln(1+v^2) = \ln|x| + C$$

oziroma

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2} + C,$$

kar štejemo za implicitno podano rešitev.

1.1.3. Linearna enačba 1. reda

To je vsaka enačba, ki se jo da preoblikovati v

$$y' = py + q, \tag{1.1.2}$$

kjer sta p in q dani (zvezni) funkciji na kakem intervalu I, ki je lahko tudi poltrak ali cela realna os. Če je $q \equiv 0$, imenujemo enačbo *homogena*. Tedaj sta spremenljivki ločljivi, $\frac{dy}{y} = p\,dx$, in z integriranjem dobimo $\ln y = P + \ln C$, kjer je $P(x) := \int_a^x p(t)\,dt$ (za kako poljubno izbrano začetno točko $a \in I$), integracijsko konstanto pa smo imenovali $\ln C$ (namesto C). Potem je

$$y = Ce^P. \tag{1.1.3}$$

Korektnost tega postopka je sicer vprašljiva, ker smo delili s funkcijo y, ki ima morda ničle, pa tudi integral $\int \frac{dy}{y}$ je $\ln|y|$ (ne le $\ln y$). Vendar pa lahko z enostavnim računom preverimo, da je enačba $y' = py$ ekvivalentna enačbi $(ye^{-P})' = 0$, torej mora biti ye^{-P} konstanta, imenujmo jo C, zato $y = Ce^P$.

Da bi rešili prvotno enačbo (1.1.2), ko q ni identično 0, pa bomo sedaj vstavili vanjo izraz (1.1.3), kjer pa C ne bo več konstanta, temveč nova neznanka. Postopek imenujemo zato *variacija konstante*. Torej je $y' = C'e^P + Ce^Pp$ (kjer smo upoštevali, da je $P' = p$). Enačbo (1.1.2) tako preoblikujemo v

$$C'e^P = q.$$

Od tod je $C = \int_a^x e^{-P(t)}q(t)\,dt + K$, kjer je K konstanta, in potem

$$y(x) = Ce^{P(x)} = e^{P(x)}\int_a^x e^{-P(t)}q(t)\,dt + Ke^{P(x)}.$$

Zgled 1.1.4. Rešimo enačbo

$$xy' - 3y = x^4. \tag{1.1.4}$$

Ko v homogeni enačbi $xy' - 3y = 0$ ločimo spremenljivki, dobimo $\frac{dy}{y} = 3\frac{dx}{x}$, torej $\ln y = 3\ln x + \ln C$ oziroma $y = Cx^3$. Ko vstavimo ta izraz v prvotno enačbo (1.1.4) (pri čemer pa C ni več konstanta) in uredimo, dobimo

$$C'x^4 = x^4.$$

Od tod je $C = x + K$, kjer je K konstanta, in končno $y = Cx^3 = (x+K)x^3$.

1.1.4. Bernoullijeva enačba

To je enačba oblike

$$y' = py + qy^n, \tag{1.1.5}$$

kjer sta p in q dani zvezni funkciji, n pa (realna) konstanta, $n \neq 0, 1$. Kadar je $n > 0$, je ena rešitev te enačbe $y \equiv 0$. Če enačbo delimo z y^n, opazimo, da jo vpeljava nove neznanke $v = y^{1-n}$ spremeni v linearno. Tedaj je namreč $y = v^{\frac{1}{1-n}}$, $y' = \frac{1}{1-n} v^{\frac{1}{1-n}-1} v'$ in s kratkim računom preoblikujemo Bernoullijevo enačbo v

$$\frac{1}{1-n}\, v' = pv + q, \tag{1.1.6}$$

ki je linearna. Pri tem smo delili z $v^{\frac{n}{1-n}}$ in tako »izgubili« rešitve v, ki so identično 0 na kakem intervalu, če je $n > 0$. V vsaki ničli x_0 funkcije v je tudi $y(x_0) = 0$ in $y'(x_0) = \frac{1}{1-n} v(x_0)^{\frac{n}{1-n}} v'(x_0) = 0$, če je $n \in (0, 1)$, zato lahko v točki $(x_0, 0)$ »zlepimo« rešitvi $y \equiv 0$ in $y = v^{\frac{1}{1-n}}$. Npr. funkcija, enaka 0 za $x \leq x_0$ in enaka $v(x)^{\frac{1}{1-n}}$ za $x > x_0$, je tudi rešitev.

Zgled 1.1.5. (i) Enačbo

$$xy' + y = x^4 y^3$$

preoblikuje substitucija $v = y^{-2}$ (ki pa pozablja na morebitne ničle funkcije y) v

$$-\frac{1}{2}\, v' = -\frac{1}{x}\, v + x^3. \tag{1.1.7}$$

Homogeni del te linearne enačbe, $\frac{1}{2} v' = \frac{1}{x} v$, napišemo kot $\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}$ in integriramo, kar privede do $\ln v = 2 \ln x + \ln C$ oziroma $v = Cx^2$. Ko po metodi variacije konstante vstavimo to v linearno enačbo (1.1.7) in uredimo, dobimo $-\frac{1}{2} C' = x$, torej je $C = -x^2 + K$, kjer je K konstanta. Zato je $v = Cx^2 = -x^4 + Kx^2$ in končno $y = \pm v^{-\frac{1}{2}} = \pm (Kx^2 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$. Rešitev pa je tudi $y \equiv 0$.

(ii) Enačba

$$y' = 2y^{1/2} \tag{1.1.8}$$

je Bernoullijeva (in z ločljivima spremenljivkama). Če za hip spregledamo možnost ničel rešitev, jo lahko napišemo kot $\frac{1}{2} y^{-1/2} y' = 1$ oziroma $(y^{1/2})' = 1$. Torej je $y = (x + c)^2$, kjer je c poljubna konstanta, rešitev enačbe (1.1.8). Tudi funkcija $y \equiv 0$ je očitno rešitev enačbe (1.1.8). Za vsak c sta potem tudi funkciji

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq -c, \\ (x+c)^2, & x > c \end{cases} \qquad \text{in} \qquad y = \begin{cases} (x+c)^2, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

rešitvi enačbe (1.1.8). Vse te štiri rešitve zadoščajo istemu začetnemu pogoju $y(-c) = 0$. Nadaljnje rešitve dobimo, če v točki $(c, 0)$ zlepimo del parabole $y = (x - c)^2$, $x \leq c$, z daljico $y = 0$, $c \leq x \leq d$, v točki $(d, 0)$ pa to daljico z delom parabole $y = (x - d)^2$, $x \geq d$, kjer sta c in d poljubni realni konstanti in $c \leq d$.

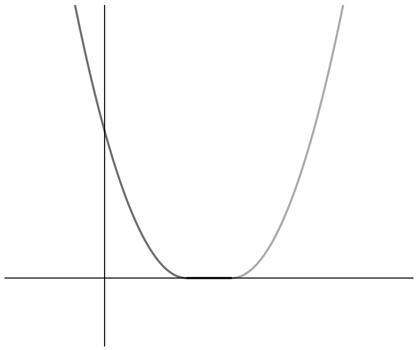

FIGURE 1.1. V točki $C = (c, 0)$ je mogoče zlepiti del parabole $y = (x - c)^2$ $(x \leq c)$ z daljico $y = 0$ $(c \leq x \leq d)$, to pa nato z delom parabole $y = (x - d)^2$ $(x \geq d)$ v novo rešitev.

1.1.5. Eksaktna enačba

Diferencialno enačbo $y' = f(x, y)$ lahko zapišemo tudi kot $f(x, y)\,dx - dy = 0$. Splošnejšo enačbo take oblike

$$\omega := f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy = 0 \tag{1.1.9}$$

znamo rešiti, če je izraz ω totalni diferencial kake funkcije u, torej $\omega = du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$. Tedaj namreč enačba $\omega = du = 0$ pomeni le (na povezanem območju v ravnini), da je funkcija u konstantna, torej $u(x, y) = C$, kar imamo lahko za implicitno podano rešitev. Pogoj za to, da je ω totalni diferencial, se pravi, da je $f = \frac{\partial u}{\partial x}$ in $g = \frac{\partial u}{\partial y}$ za kako (predpostavimo, da dvakrat zvezno odvedljivo) funkcijo u, je enakost

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

(Da se pokazati, kot posledico Greenove formule, da je na območjih »brez lukenj« ta pogoj tudi zadosten.) Na splošno, ko ω ni totalni diferencial, nam morda uspe najti kako tako funkcijo μ brez ničel, da je $\mu\omega$ totalni diferencial kake funkcije u; tako funkcijo μ imenujemo *integrirajoči množitelj*. Ker je tedaj enačba $\omega = 0$ ekvivalentna enačbi $du = \mu\omega = 0$, je spet $u(x, y) = C$ implicitno podana rešitev. Potreben pogoj, da je $\mu\omega$ totalni diferencial kake funkcije, je $\frac{\partial(\mu f)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu g)}{\partial x}$, se pravi

$$\frac{1}{\mu}\left(g\,\frac{\partial \mu}{\partial x} - f\,\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}. \tag{1.1.10}$$

Ta pogoj za funkcijo μ je na splošno zapleten, z njim si lahko pomagamo le v posebnih primerih. Poglejmo na primer, kdaj obstaja integrirajoči množitelj μ, ki je odvisen le od spremenljivke x (torej $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$). V tem primeru se enakost (1.1.10) poenostavi v $\frac{1}{\mu} g \frac{d\mu}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}$, kar lahko napišemo (tam, kjer g ni 0) kot

$$\frac{d(\ln \mu)}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{g}. \tag{1.1.11}$$

Če je izraz na desni strani v (1.1.11) odvisen le od x, potem je (vsaj na območjih »brez lukenj«)

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{g}\, dx}$$

ustrezni integrirajoči množitelj.

Zgled 1.1.6. V enačbi

$$y\, dx + (x^2 y - x)\, dy = 0 \tag{1.1.12}$$

je $f(x,y) = y$, $g(x,y) = x^2y - x$ in

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{g} = \frac{2 - 2xy}{x(xy-1)} = -\frac{2}{x}.$$

Torej je $\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x}\, dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2}$. Ko pomnožimo enačbo (1.1.12) z x^{-2}, dobimo

$$\frac{y}{x^2}\, dx + \left(y - \frac{1}{x}\right) dy = 0.$$

Sedaj je lahko preveriti, da je izraz na levi strani te enačbe totalni diferencial. Poiskati moramo tako funkcijo u, da bo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2} \qquad \text{in} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = y - \frac{1}{x}. \tag{1.1.13}$$

Iz prve enakosti v (1.1.13) sledi (z integriranjem po x), da je $u(x,y) = -\frac{y}{x} + C(y)$, kjer je C še neznana funkcija, ki jo določimo tako, da vstavimo ta izraz za u v drugo enakost (1.1.13). Tako dobimo

$$-\frac{1}{x} + C'(y) = y - \frac{1}{x},$$

se pravi $C'(y) = y$ in $C(y) = \frac{y^2}{2} + K$, kjer je K konstanta. Torej je $u(x,y) = -\frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} + K$ in tako

$$-\frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = \text{konst.}$$

implicitno podana rešitev enačbe (1.1.12).

V nalogah bomo obravnavali še nekatere druge vrste enačb prvega reda, ki jih je mogoče rešiti eksplicitno, vendar pa te enačbe ne bodo nastopale kasneje v delu.

Naloge

1. Poiščite splošno rešitev enačbe $xe^{x^2+y} = yy'$.

2. (*Radioaktivni razpad*) Masa dm radioaktivnega elementa, ki razpade v času dt, je sorazmerna s trenutno maso m elementa, torej $dm = -\kappa m\, dt$, kjer je κ konstanta, odvisna od elementa. Pokažite, da je rešitev te enačbe $m = m_0 e^{-\kappa t}$, kjer je m_0 začetna masa (torej $m_0 = m(0)$). Kako se izraža konstanta κ z razpolovnim časom elementa? (Razpolovni čas je čas, v katerem se masa elementa zmanjša na polovico.)

3. (*Kemijske reakcije drugega reda*) Pri kemijski reakciji iz po ene molekule snovi A in B nastane ena molekula snovi X (in morda še drugi stranski produkti). Označimo količine teh snovi, merjene v molih, z $a(t)$, $b(t)$ in $x(t)$. Pri reakcijah *drugega reda* je hitrost $\frac{dx}{dt}$ nastajanja snovi x sorazmerna s produktom trenutnih količin snovi a in b, torej

$$\frac{dx}{dt} = \kappa ab = \kappa(a_0 - x)(b_0 - x), \tag{1.1.14}$$

kjer sta a_0 in b_0 začetni količini snovi A in B, izraženi v molih. (Zgled take reakcije je $NaOH + HCl \to NaCl + H_2O$.) Rešite enačbo (1.1.14) pri danih začetnih pogojih $a(0) = a_0$, $b(0) = b_0$, $x(0) = 0$. (Rezultat: če je $a_0 \neq b_0$, je $x(t) = \frac{a_0 b_0 (e^{\kappa(b_0 - a_0)t} - 1)}{b_0 e^{\kappa(b_0 - a_0)t} - a_0}$. Če pa je $b_0 = a_0$, je $x(t) = a_0 - \frac{a_0}{a_0 \kappa t + 1}$. Skicirajte graf zadnje funkcije, imenovane *logistična krivulja*. Pokažite tudi, da prva rešitev konvergira proti drugi, ko gre b_0 proti a_0.)

4. Z vpeljavo nove spremenljivke rešite diferencialno enačbo $y' = (y - x)^2$.

5. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $y' = \dfrac{2x + 3y}{3x - 2y}$.

6. Rešite diferencialno enačbo $y' = \dfrac{x + y + 4}{x - y - 6}$.
(Namig: vpeljite novi spremenljivki $\xi = x + a$ in $\eta = y + b$, kjer sta konstanti a in b tako določeni, da se v novih spremenljivkah enačba glasi $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + \eta}{\xi - \eta}$.)

7. Poiščite splošno rešitev enačbe $y' = \dfrac{2x + 2y + 1}{3x + y - 2}$.

8. Poiščite splošno rešitev diferencialnih enačb:

(i) $xy' - y = x^2 \cos x$;

(ii) $y' + y = x^2 + 2xe^{-x}$;

(iii) $(e^y - 2xy)y' = y^2$ (namig: zamenjajte vlogi spremenljivk x in y).

9. Med rešitvami enačbe $y' = y + x$ določite tiste, ki so naraščajoče na poltraku $[0, \infty)$.

10. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe $y' = x(y^2 + 1)$, ki zadošča pogoju $y(0) = 1$.

11. Napišite tisto rešitev enačbe $y' = y + f(x)$, ki zadošča pogoju $y(0) = 0$. Ali je lahko kaka rešitev te enačbe omejena, če je f pozitivna zvezna funkcija na $\mathbb{R}$?

12. Napišite splošno rešitev diferencialne enačbe $y' = -y + f(x)$. Če je f na vsej realni osi omejena in zvezna funkcija, pokažite, da so vse rešitve omejene na poltraku $[0, \infty)$.

13. (*Idealno zrcalo*) Od katere ravninske krivulje se vsi žarki, izhajajoči iz koordinatnega izhodišča, odbijejo vzporedno z abscisno osjo? (Rešitev: Naj žarek, izhajajoč iz izhodišča, oklepa s pozitivnim poltrakom abscisne osi kot φ in naj zadene krivuljo $y = y(x)$, ki predstavlja obliko zrcala, v točki $T(x, y(x))$. Naj bo α kot, ki ga ta žarek oklepa s tangento t na krivuljo v točki $T(x, y(x))$ in naj bo S presečišče te tangente z abscisno osjo. Ker je odbiti žarek vzporeden z abscisno osjo in oklepa enak kot α s tangento t, sledi, da je φ (zunanji kot trikotnika $0TS$) enak 2α (vsota nasprotnoležnih notranjih kotov). Ker je $\operatorname{tg}\alpha = y'(x)$ in $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y(x)}{x}$, dobimo iz trigonometrijske formule $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ diferencialno enačbo

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1-(y')^2}.$$

Od tod izrazimo

$$y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y}.$$

To enačbo bi lahko rešili z vpeljavo nove neznanke $v = \frac{y}{x}$, vendar je nekoliko krajša drugačna pot. Pišimo $y' = \frac{dy}{dx}$ in preoblikujmo enačbo v $x\,dx + y\,dy = \pm\sqrt{x^2+y^2}\,dx$ oziroma v

$$\pm\frac{1}{2}\,\frac{d(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = dx.$$

Z integriranjem dobimo od tod $\pm\sqrt{x^2+y^2} = x + C$, kjer je C konstanta. To lahko preuredimo v $y^2 = 2Cx + C^2$, kar predstavlja družino parabol, s skupno osjo (sovpadajočo z abscisno osjo) in skupnim goriščem 0.)

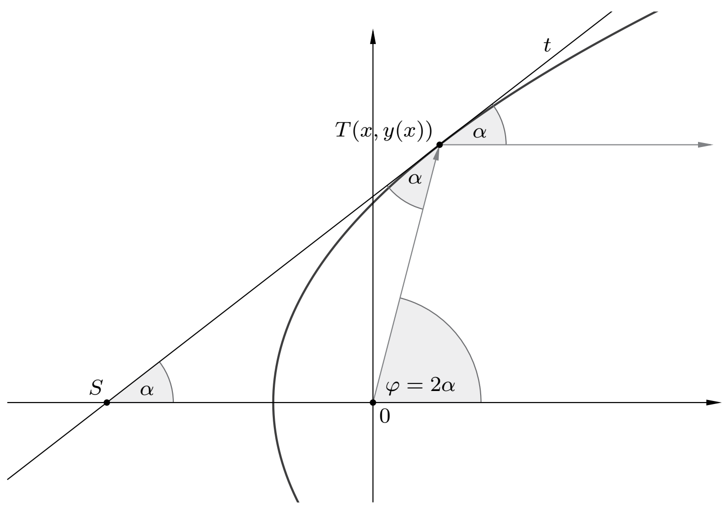

FIGURE 1.2. Idealno zrcalo.

14. Rešite enačbe:

(i) $x\,dy - y\,dx = (1 + y^2)\,dy$;

(ii) $(3x^2 - y^2)\,dy - 2xy\,dx = 0$;

(iii) $y\,dx + (x^2y - x)\,dy = 0$.

(Navodilo: enačbo lahko preoblikujemo najprej v $y\,dx - x\,dy + x^2y\,dy = 0$, nato v $-x^2d(\frac{y}{x}) + x^2y\,dy = 0$ oziroma $d(\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x}) = 0$.)

15. (*Družine krivulj*) Pri fiksni vrednosti parametra c predstavlja enačba

$$f(x, y, c) = 0 \tag{1.1.15}$$

ravninsko krivuljo (vsaj, kadar vektor $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ ni nikjer 0). V celoti predstavlja torej taka enačba (1.1.15) družino krivulj. Pri konstantnem c pomeni zveza (1.1.15), da je (vsaj lokalno, kadar je $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$) y funkcija spremenljivke x in z odvajanjem na x dobimo iz (1.1.15)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, c) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, c)y' = 0. \tag{1.1.16}$$

Če nam uspe enačbi (1.1.15) in (1.1.16) tako skombinirati, da dobimo iz njiju neko povezavo oblike $F(x, y, y') = 0$, v kateri ni več parametra c, smo s tem dobili diferencialno enačbo dane družine krivulj (1.1.15).

(i) Poiščite na pravkar opisani način diferencialno enačbo družine koncentričnih krožnic $x^2 + y^2 = c^2$. (Rešitev: z odvajanjem na x (pri konstantnem c) dobimo $2x + 2yy' = 0$ oziroma $x + yy' = 0$, kar je že iskana enačba.)

(ii) Poiščite diferencialno enačbo družine krožnic $x^2 + y^2 = 2cx$ (katerih značilnost je, da imajo vse središča na abscisni osi in gredo skozi koordinatno izhodišče). (Rešitev: z odvajanjem na x in deljenjem z 2 dobimo $x + yy' = c$, iz enačbe same pa $c = \frac{x^2+y^2}{2x}$, torej je $x + yy' = \frac{x^2+y^2}{2x}$ oziroma $2xyy' = y^2 - x^2$.)

16. (*Ortogonalne trajektorije*) Ortogonalna trajektorija na dano družino krivulj $f(x, y, c) = 0$ je vsaka krivulja, ki seka vse krivulje dane družine pravokotno. Pokažite: če je $F(x, y, y') = 0$ diferencialna enačba dane družine krivulj, potem je $F(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0$ diferencialna enačba ortogonalnih trajektorij. Poiščite tudi ortogonalne trajektorije na družini krivulj iz prejšnje naloge. (Rezultat: (i) Ortogonalne trajektorije so poltraki s krajiščem v 0. (ii) Diferencialno enačbo ortogonalnih trajektorij lahko napišemo kot $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$ (če je $y \neq \pm x$) in jo torej lahko rešujemo z novo spremenljivko $v = \frac{y}{x}$. Rešitev te enačbe je družina krožnic $x^2 + y^2 = cy$, ki imajo središča na ordinatni osi in potekajo skozi 0.)

* **17.** (*Riccatijeva enačba*)

(i) Naj bodo p, q, r, s dane zvezno odvedljive funkcije na $\mathbb{R}$ (ali na kakem intervalu ali pa poltraku) in predpostavimo, da je funkcija $ps - qr$ brez ničel. Pokažite, da družina krivulj

$$y = \frac{p + dq}{r + ds} \quad (d \in \mathbb{R}) \tag{1.1.17}$$

zadošča Riccatijevi diferencialni enačbi oblike

$$y' = ay^2 + by + c, \tag{1.1.18}$$

kjer so a, b, c funkcije. (Namig: najprej odvajajte na x enakost $y(r + cs) = p + dq$.)

(ii) Naj bo y_0 kaka partikularna rešitev enačbe (1.1.18), y pa poljubna nadaljnja rešitev te enačbe. Pokažite, da funkcija $v := y - y_0$ zadošča Bernoullijevi enačbi $v' = (2ay_0 + b)v + av^2$. Napišite splošno rešitev te Bernoullijeve enačbe in pokažite, da ima vsaka rešitev y Riccatijeve enačbe obliko (1.1.17) za kake funkcije p, q, r, s in kako konstanto d.

† **18.** (*Ovojnica družine ravninskih krivulj*) Ovojnica družine krivulj

$$f(x, y, c) = 0 \tag{1.1.19}$$

je krivulja (če obstaja), ki se v vsaki svoji točki dotika kake krivulje družine (1.1.19). Predpostavimo, da ovojnica obstaja in da gre skozi vsako njeno točko le ena krivulja družine. Radi bi izpeljali enačbo ovojnice. Poljubna točka (x_0, y_0) na ovojnici leži na kaki od krivulj družine; naj bo $c(x_0, y_0)$ vrednost parametra c na tej krivulji. Torej velja identiteta

$$f(x_0, y_0, c(x_0, y_0)) \equiv 0,$$

od koder sledi s totalnim diferenciranjem

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&(x_0, y_0, c(x_0, y_0))\, dx + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, c(x_0, y_0))\, dy + \frac{\partial f}{\partial c}(x_0, y_0, c(x_0, y_0))\, dc = 0.\end{aligned} \tag{1.1.20}$$

V točki (x_0, y_0) se ovojnica dotika krivulje $f(x, y, c(x_0, y_0)) = 0$, zato tam tangenta ovojnice sovpada s tangento na to krivuljo. Smerni koeficient y' tangente na krivuljo $f(x, y, c(x_0, y_0)) = 0$ (in s tem tudi tangente na ovojnico) v točki (x_0, y_0) zadošča pogoju

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, c(x_0, y_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, c(x_0, y_0))y'(x_0) = 0.$$

Ko zadnjo enakost pomnožimo z dx, dobimo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, c(x_0, y_0))\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, c(x_0, y_0))\,dy = 0. \tag{1.1.21}$$

Iz (1.1.20) in (1.1.21) takoj sledi $\frac{\partial f}{\partial c}(x_0, y_0, c(x_0, y_0)) = 0$. Če sedaj označimo splošno točko na ovojnici kar (x, y) (namesto (x_0, y_0)), lahko zapišemo

$$\frac{\partial f}{\partial c}(x, y, c(x, y)) = 0. \tag{1.1.22}$$

Ker leži točka tudi na krivulji z vrednostjo parametra $c(x, y)$, velja tudi

$$f(x, y, c(x, y)) = 0. \tag{1.1.23}$$

Sedaj iz (1.1.23) in (1.1.22) izpeljemo enačbo, v kateri ne bo več parametra c. Tako dobimo enačbo ovojnice.

Določite enačbo ovojnice družine premic $\frac{x}{\cos c} + \frac{y}{\sin c} = 1$. (Rešitev: Enačbo te družine najprej napišemo kot

$$x \sin c + y \cos c - \frac{1}{2} \sin 2c = 0 \tag{1.1.24}$$

in jo nato odvajamo na c, da dobimo

$$x \cos c - y \sin c - \cos 2c = 0. \tag{1.1.25}$$

Iz sistema enačb (1.1.24) in (1.1.25) izrazimo (po kratkem računu)

$$x = \cos^3 c \qquad \text{in} \qquad y = \sin^3 c,$$

torej je ovojnica *asteroida* $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$.)

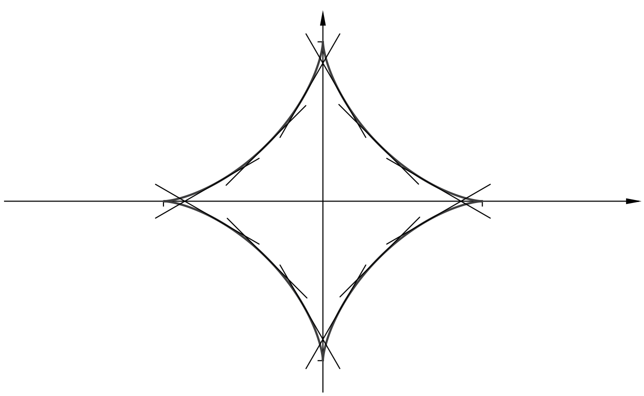

FIGURE 1.3. Asteroida $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$ kot ovojnica družine premic $\frac{x}{\cos c} + \frac{y}{\sin c} = 1$.

† **19.** Naj bo $f(x, y, c)$ družina rešitev enačbe $F(x, y, y') = 0$. Utemeljite, zakaj je tedaj tudi ovojnica te družine (če obstaja) rešitev iste diferencialne enačbe.

† **20.** (*Clairotova enačba*) Naj bo f poljubna zvezno odvedljiva funkcija. Pokažite, da je tedaj vsaka premica $y = cx + f(c)$ rešitev Clairotove enačbe

$$y = xy' + f(y').$$

Po nalogi 19 je tedaj rešitev tudi ovojnica te družine premic. Poiščite npr. rešitve enačbe

$$y = xy' + (y')^2.$$

(Rezultat: ovojnica družine premic $y = cx + c^2$ je $y = -\frac{x^2}{4}$.)

† **21.** *Lagrangeova enačba* je oblike

$$y = xf(y') + g(y'), \tag{1.1.26}$$

kjer sta f in g dani zvezno odvedljivi funkciji.

(i) Kdaj je premica $y = kx + n$ rešitev enačbe (1.1.26)? (Odgovor: natanko tedaj, ko je $k = f(k)$ in $n = g(k)$.)

(ii) Vpeljimo v enačbo (1.1.26) parameter $t := y'$, tako da je $y = xf(t) + g(t)$, torej $dy = f(t)\,dx + (xf'(t) + g'(t))\,dt$. Potem z uporabo zveze $dy = y'\,dx = t\,dx$ dobimo $f(t)\,dx + (xf'(t) + g'(t))\,dt = t\,dx$, od koder sledi

$$(f(t) - t)\,\frac{dx}{dt} + f'(t)x + g'(t) = 0,$$

kar je linearna diferencialna enačba za x kot funkcijo spremenljivke t. Njena rešitev $x = x(t, K)$ (kjer je K konstanta) predstavlja skupaj s formulo $y = xf(t) + g(t)$ parametrično enačbo krivulje, katere eksplicitna oblika bi bila rešitev Lagrangeove enačbe (1.1.26). Rešite na ta način enačbo

$$y = x(y')^2 + 2y'.$$

(Rezultat: $x = \frac{-2(t - \ln t) + K}{(t-1)^2}$, $y = \frac{-2(t - \ln t) + K}{(t-1)^2}t^2 + 2t$, kjer je K konstanta. Poleg teh krivulj sta rešitvi tudi premici $y = 0$ in $y = x + 2$.)

† **22.** Predpostavimo, da ima enoparametrična družina $y = f(x, c)$ rešitev diferencialne enačbe $F(x, y, y') = 0$ ovojnico (naloga 18). Pokažite, da lahko (v primeru, ko je funkcija $\frac{\partial^2 f}{\partial c \partial x}$ povsod neničelna) enačbo ovojnice te družine dobimo tako, da iz sistema

$$F(x, y, y') = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') = 0$$

izločimo y' (s tem dobimo formulo oblike $g(x, y) = 0$). (Namig: identiteto

$$F(x, f(x, c), \frac{\partial f}{\partial x}(x, c)) = 0$$

odvajajte na c in upoštevajte, da je na ovojnici $\frac{\partial f}{\partial c} = 0$ po nalogi 18, tako da dobite $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$.)

† **23.** Točka (x_0, y_0) je *izjemna* za enačbo $F(x, y, y') = 0$, če skoznjo v isti smeri potekata vsaj dve rešitvi enačbe. Množico vseh izjemnih točk imenujemo *diskriminantna množica* enačbe. Določite diskriminantno množico in vse rešitve diferencialne enačbe

$$(y')^2 - (x+y)y' + xy = 0. \tag{1.1.27}$$

(Rešitev: Ker lahko enačbo zapišemo kot $(y'-x)(y'-y) = 0$, je vsaka rešitev enačb $y' = x$ in $y' = y$ tudi rešitev enačbe (1.1.27). Torej so krivulje $y = \frac{x^2}{2} + C$ in $y = De^x$ rešitve enačbe (1.1.27). Ker sta oba smerna koeficienta, namreč $y' = x$ in $y' = y$, enaka natanko na premici $y = x$, potekata skozi vsako točko (a, a) na tej premici v isti smeri vsaj dve rešitvi; namreč parabola $y = \frac{x^2}{2} + (a - \frac{a^2}{2})$ in krivulja $y = ae^{x-a}$. Torej je diskriminantna množica te enačbe premica $y = x$. V vsaki točki (a, a) lahko zlepimo npr. del parabole $y = \frac{x^2}{2} + (a - \frac{a^2}{2})$ $(x \le a)$ z delom krivulje $y = ae^{x-a}$ $(x \ge a)$ in dobimo tako novo rešitev enačbe skozi (a, a).)

1.2. Homogena linearna diferencialna enačba 2. reda

Splošna *linearna diferencialna enačba 2. reda* se glasi

$$f(x)y'' + g(x)y' + h(x)y = d(x),$$

kjer so f, g, h in d dane (privzeli bomo, da zvezne) funkcije na kakem intervalu I (ki je lahko tudi poltrak ali pa cela realna os), y pa je neznana, dvakrat zvezno odvedljiva funkcija. Na podoben način kot enačbe drugega reda bi lahko obravnavali tudi linearne enačbe višjih redov. Vendar pa v uporabi, npr. pri proučevanju nihanj, najpogosteje nastopajo le enačbe drugega reda; zato in zaradi računske enostavnosti se bomo pri obravnavi linearnih enačb osredotočili v glavnem na enačbe drugega reda. Če je desna stran d identično enaka 0, imenujemo enačbo *homogena*. Kadar f nima ničel, dobimo po deljenju z f ekvivalentno enačbo oblike

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \tag{1.2.1}$$

kjer so p, q in r zvezne funkcije. Vse funkcije tukaj imajo lahko vrednosti v $\mathbb{C}$. Za boljše razumevanje pa bomo morali kasneje take enačbe obravnavati tudi za funkcije kompleksne spremenljivke. Tedaj bomo, namesto x, spremenljivko imenovali z, odvodi bodo kompleksni, funkcije $p, q, r \ldots$ pa holomorfne na območjih v $\mathbb{C}$.

Ker enačb oblike (1.2.1) običajno ne moremo rešiti eksplicitno z znanimi funkcijami, je ugodno vedeti vsaj, da rešitve vedno obstajajo in so enolične pri danih začetnih pogojih, kar pove naslednji izrek.

Izrek 1.2.1. *Če so p, q in r zvezne funkcije na intervalu I, potem za vsak $x_0 \in I$ in poljubni konstanti $y_0, \tilde{y}_0 \in \mathbb{C}$ obstaja natanko ena dvakrat zvezno odvedljiva funkcija $y : I \to \mathbb{C}$, ki zadošča enačbi* (1.2.1) *in začetnima pogojema*

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = \tilde{y}_0.$$

Če so pri tem p, q, r realne funkcije in $y_0, \tilde{y}_0 \in \mathbb{R}$, potem je tudi rešitev y realna funkcija.

Izrek bomo dokazali kasneje v splošnejši obliki.

Rešitev homogene linearne diferencialne enačbe drugega reda

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1.2.2}$$

na splošno ne moremo izraziti z elementarnimi funkcijami in ne obstaja nobena analitična metoda, ki bi prevedla reševanje takih enačb na računanje integralov. Videli pa bomo, da je zgradba množice vseh rešitev dokaj enostavna.

Funkciji y_1 in y_2 imenujemo linearno neodvisni, če nobena njuna netrivialna linearna kombinacija $c_1y_1 + c_2y_2$ (kjer sta c_1 in c_2 kompleksni konstanti, ki nista obe enaki 0) ni identično enaka 0. To pomeni, da nobena od obeh funkcij ni konstanten večkratnik druge.

Definicija 1.2.2. *Determinanta Wronskega* funkcij y_1, y_2 je funkcija, definirana kot

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

Trditev 1.2.3. *Za determinanto Wronskega $W = W_{y_1,y_2}$ dveh rešitev y_1, y_2 enačbe* (1.2.2) *velja Liouvillova formula*

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\, dt} \tag{1.2.3}$$

za vse $x \in I$, kjer je x_0 poljubna točka iz intervala I, nad katerim opazujemo enačbo. Torej je W bodisi identično enaka 0 *bodisi nima nobene ničle na I.*

Proof. Opazimo, da je

$$W' = y_1y_2'' - y_1''y_2$$

in vstavimo v ta izraz to, kar sledi iz dejstva, da y_1 in y_2 zadoščata enačbi (1.2.2), torej $y_j'' = -py_j' - qy_j$ $(j = 1, 2)$. Tako dobimo

$$W' = -pW, \tag{1.2.4}$$

kar lahko napišemo kot $(W(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\, dt})' = 0$. To pove, da je funkcija $W(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\, dt}$ konstantna. Ker je njena vrednost v točki x_0 enaka $W(x_0)$, imamo sedaj

$$W(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\, dt} = W(x_0),$$

od koder takoj razberemo formulo (1.2.3). □

Trditev 1.2.4. *Rešitvi y_1, y_2 enačbe* (1.2.2) *sta na intervalu I linearno neodvisni natanko tedaj, ko njuna determinanta Wronskega W ni identično enaka* 0 *na I, kar je natanko takrat, ko W nima nobene ničle na I.*

Proof. Če sta dve funkciji linearno odvisni, recimo $y_2 = cy_1$ za kako konstanto c, potem je $W = y_1y_2' - y_1'y_2 = cy_1y_1' - cy_1'y_1 = 0$. Ta sklep velja za splošni funkciji, čeprav morda nista rešitvi nobene enačbe oblike (1.2.2).

Predpostavimo sedaj, da sta y_1 in y_2 rešitvi enačbe (1.2.2) in da je njuna determinanta Wronskega W enaka 0 v kaki točki $x_0 \in I$. (Potem je po Liouvillovi formuli povsod enaka 0.) Tedaj sta stolpca matrike

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix}$$

linearno odvisna; privzeti smemo torej, da je npr. $(y_2(x_0), y_2'(x_0) = c(y_1(x_0), y_1'(x_0))$ za kako konstanto c. Toda potem funkcija $v := y_2 - cy_1$ zadošča enačbi (1.2.2) (kar lahko bralec preveri z enostavnim računom) in začetnima pogojema $v(x_0) = 0$, $v'(x_0) = 0$. Ker istim pogojem zadošča tudi trivialna rešitev 0, sledi iz osnovnega izreka o enoličnosti (izrek 1.2.1), da je $v = 0$, torej $y_2 = cy_1$. □

Izrek 1.2.5. *Množica vseh rešitev enačbe* (1.2.2) *je dvorazsežen vektorski prostor. Če sta torej y_1 in y_2 linearno neodvisni rešitvi, potem lahko vsako rešitev y izrazimo kot njuno linearno kombinacijo, $y = c_1y_1 + c_2y_2$, kjer sta c_1 in c_2 primerni konstanti (v splošnem kompleksni, sicer pa realni, če nas zanimajo le realne rešitve in sta y_1 in y_2 realni funkciji).*

Proof. Da je linearna kombinacija dveh rešitev spet rešitev, bo bralec lahko preveril sam. Privzemimo, da sta y_1 in y_2 linearno neodvisni rešitvi in y poljubna rešitev. Naj bo x_0 poljubna točka na intervalu I, nad katerim opazujemo enačbo. Ker sta rešitvi y_1 in y_2 linearno neodvisni, po trditvi 1.2.4 njuna determinanta Wronskega nima ničel, zato sta vektorja

$$(y_1(x_0), y_1'(x_0)) \qquad \text{in} \qquad (y_2(x_0), y_2'(x_0))$$

linearno neodvisna. Torej lahko vsak dvorazsežen vektor izrazimo kot njuno linearno kombinacijo, se pravi, da obstajata taki konstanti c_1, c_2, da je

$$(y(x_0), y'(x_0)) = c_1(y_1(x_0), y_1'(x_0)) + c_2(y_2(x_0), y_2'(x_0)).$$

Funkcija $v := c_1y_1 + c_2y_2 - y$ tedaj zadošča pogojema $v(x_0) = 0$ in $v'(x_0) = 0$ in je tudi rešitev enačbe (1.2.2). Po osnovnem izreku o eksistenci in enoličnosti 1.2.1 mora zato biti v identično enaka 0. Torej je $c_1y_1 + c_2y_2 - y = 0$, zato $y = c_1y_1 + c_2y_2$. □

Liouvillova formula nam omogoča poiskati vse rešitve enačbe (1.2.2), če poznamo kako neničelno rešitev y_1. Za kako drugo (še neznano) rešitev y_2 je determinanta Wronskega W funkcij y_1 in y_2 enaka $y_1y_2' - y_2y_1' = W$. To enakost lahko napišemo kot $(\frac{y_2}{y_1})' = \frac{W}{y_1^2}$ oziroma, ko uporabimo še (1.2.3), integriramo in pomnožimo z y_1,

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\, dt}}{y_1^2(x)}\, dx.$$

Ker se po integraciji v tej formuli pojavi še ena splošna konstanta, dobimo na ta način pravzaprav celo družino rešitev. Med njimi lahko izberemo eno npr. tako, da postavimo $W(x_0) = 1$ in v gornji formuli napišemo določeni integral, namesto nedoločenega; tako dobimo

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-\int_{x_0}^{s} p(t)\,dt}}{y_1^2(s)}\, ds. \tag{1.2.5}$$

ZGLED 1.2.6. Poiščimo vse rešitve enačbe

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0,$$

če smo uganili, da je ena rešitev $y_1 = x$. Enačbo moramo najprej napisati v obliki (1.2.2), od koder potem preberemo, da je $p(x) = \frac{2x}{x^2-1}$, torej $\int p(x)\,dx = \ln|x^2 - 1|$. Po formuli (1.2.5) (zapisani z nedoločenima integraloma) dobimo

$$y_2(x) = x \int \frac{e^{-\ln|x^2-1|}}{x^2}\, dx = x \int \frac{dx}{|x^2 - 1|x^2}.$$

Za $|x| < 1$ je torej

$$y_2(x) = x \int \frac{dx}{(1 - x)(1 + x)x^2} = x \int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1 - x)} + \frac{1}{2(1 + x)}\right] dx.$$

Partikularna rešitev je tako $y_2 = -1 + \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, splošna rešitev pa potem po izreku 1.2.5 $y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1x + c_2(-1 + \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x})$. Podobno bi lahko določili tudi rešitve za $|x| > 1$.

Naloge

1. Nekaterim (ne nujno linearnim) enačbam drugega reda je mogoče znižati red. Tako npr. vsako enačbo oblike $F(x, y', y'') = 0$ (kjer je F dana funkcija treh spremenljivk) spremenimo v enačbo prvega reda, če vpeljemo novo neznako $v := y'$. Rešite na ta način npr. enačbe:

(i) $xy'' - y' = 3x^2$;

(ii) $xy'' + 4y' = 1$,
poiščite tisto rešitev, ki zadošča pogojema $y(1) = 0$ in $y'(1) = 0$;

(iii) $y'' + 2xy' = x^3$, pri pogoju $y'(0) = -\frac{1}{2}$.

(iv) $y'' - xy' = x$, pri pogojih $y(0) = 2$ in $y'(0) = -1$.

2. (*Oblika obešene niti*) Opazujmo nit, obešeno v dveh točkah. Izberimo koordinatni sistem tako, da bo os y potekala skozi najnižjo točko niti, imenujmo jo A, pravokotno na nit, os x pa naj bo vzporedna tangenti na nit v točki A. Opazujmo del niti med točko A in kako drugo točko X, torej lok $\overset{\frown}{AX}$. Bodita $\vec{F}_0$ in $\vec{F}$ sili, s katero preostala dela niti delujeta na ta lok v točkah A in X zaporedoma. Naj bo ϕ kot, ki ga tangenta na nit v točki X oklepa z vzporednico pozitivnega poltraka abscisne osi, g težni pospešek, ρ linearna gostota niti (to je masa na enoto dolžine), ki naj bo konstantna, s pa dolžina loka $\overset{\frown}{AX}$.

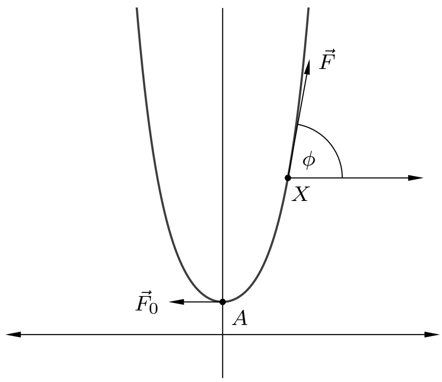

FIGURE 1.4. Obešena nit.

Pogoja ravnovesja sil na lok $\widehat{AX}$ v smeri osi y in x se glasita

$$F \sin\phi = \rho g s, \qquad F\cos\phi = F_0.$$

Ko delimo prvo enačbo z drugo in upoštevamo, da je $\operatorname{tg}\phi = y'(x)$, kjer je $y = y(x)$ (za zdaj še neznana) enačba krivulje, ki jo oblikuje nit, in x abscisa točke X, dobimo

$$y' = as,$$

kjer je a konstanta $\frac{\rho g}{F_0}$. Ko to enačbo odvajamo na x in upoštevamo, da je $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+(y')^2}$, dobimo diferencialno enačbo niti

$$y'' = a\sqrt{1+(y')^2}.$$

Rešite to enačbo! (Rešitev je $y = \frac{1}{a}\operatorname{ch} ax + C$, kjer je C konstanta.)

3. Tudi enačbam oblike

$$F(y, y', y'') = 0$$

lahko znižamo red z vpeljavo nove spremenljivke $v = y'$. Pri tem pa bomo obravnavali v kot funkcijo spremenljivke y, tako da je po pravilu za posredno odvajanje $y'' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy}$. Enačba se potem glasi

$$F\left(y, v, v\frac{dv}{dy}\right) = 0,$$

kar je diferencialna enačba prvega reda za v kot funkcijo spremenljivke y. Ko jo rešimo, dobimo v v obliki $v = g(y, C)$, kjer je g neka funkcija, v kateri nastopa še integracijska konstanta C, ki se je pojavila pri reševanju enačbe prvega reda. Končno lahko iz zveze $y' = v = g(y, C)$, ki je diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama (tj. $\frac{dy}{g(y,C)} = dx$), izračunamo y kot funkcijo spremenljivke x.

Poiščite na zgoraj opisani način tisto rešitev enačbe

$$yy'' = y^2y' + (y')^2,$$

ki zadošča pogojema $y(0) = -\frac{1}{2}$, $y'(0) = 1$.

4. Poiščite enačbo oblike (1.2.2), katere rešitvi sta funkciji $y_1 = e^{2x}$ in $y_2 = xe^{2x}$.

5. Dokažite, da funkciji $y_1(x) = x^3$ in $y_2(x) = x^2|x|$ ne moreta biti rešitvi iste diferencialne enačbe oblike (1.2.2). (Namig: opazujte njuno determinanto Wronskega v točki 0 in še kaki drugi točki.)

6. Preverite, ali je $y_1(x) := x^{-\frac{1}{2}} \sin x$ rešitev enačbe

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0,$$

in nato poiščite vse rešitve te enačbe.

7. Vsota dveh partikularnih rešitev enačbe $y'' + xy' + q(x)y = 0$ je 1. Določite q in vse rešitve te enačbe.

8. Določite funkciji p in q v enačbi $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, če je ena rešitev $y_1 = e^{x^2}$, determinanta Wronskega vsakih dveh rešitev pa je konstantna.

9. Pokažite: če so vse rešitve enačbe $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (p, q zvezni funkciji na $\mathbb{R}$) periodične s periodo ω, potem sta p in q periodični s periodo ω in $\int_0^\omega p(x)\,dx = 0$. (Namig: Liouvillova formula.)

10. Pokažite: determinanta Wronskega dveh linearno neodvisnih rešitev enačbe $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ je konstantna natanko tedaj, ko je $p(x) = 0$ za vse x na intervalu, na katerem opazujemo enačbo.

11. Naj rešitvi y_1, y_2 diferencialne enačbe $y'' + x^2y' + x^4y = 0$ zadoščata pogojem $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 1$, $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$. Izračunajte njuno determinanto Wronskega. Ali sta rešitvi linearno odvisni? Kako se z njima izraža rešitev, ki zadošča pogojema $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$?

12. Pokažite, da sta na kakem intervalu zvezno odvedljivi funkciji y_1 in y_2, ki nimata skupne ničle in katerih ničle nimajo stekališč, rešitvi iste diferencialne enačbe oblike (1.2.2) natanko tedaj, ko je njuna determinanta Wronskega bodisi identično enaka 0 bodisi nima nobene ničle.

13. Ali ima lahko netrivialna rešitev (to je rešitev, ki ni identično 0) enačbe (1.2.2) ekstrem in ničlo v isti točki?

14. Ali imata lahko dve linearno neodvisni rešitvi enačbe $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ekstrem v isti točki?

15. Dokažite: če imata linearno neodvisni rešitvi y_1 in y_2 enačbe $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ prevoj v isti točki x_0, potem je $p(x_0) = 0 = q(x_0)$. (Namig: vektorja $(y_1(x_0), y_1'(x_0))$ in $(y_2(x_0), y_2'(x_0))$ sta linearno neodvisna.)

1.3. Prevedba reševanja na homogeno enačbo

V tem razdelku si bomo ogledali, kako rešiti enačbo

$$y'' + py' + qy = r, \tag{1.3.1}$$

kjer so p, q, r dane zvezne funkcije na kakem intervalu I, v primeru, da znamo rešiti ustrezno homogeno enačbo (1.2.2). Najprej pa poglejmo, kakšna je zgradba množice vseh rešitev enačbe (1.3.1).

TRDITEV 1.3.1. *Naj bo y_p partikularna rešitev enačbe* (1.3.1) *(torej neka konkretna rešitev), y pa poljubna nadaljnja rešitev. Potem je funkcija $y_h := y - y_p$ rešitev ustrezne homogene enačbe* (1.2.2). *Velja tudi obratno: za vsako rešitev y_h homogene enačbe* (1.2.2) *je vsota $y_p + y_h$ rešitev enačbe* (1.3.1).

PROOF. Dokaz sestoji iz naslednjega preprostega računa:

$$\begin{aligned} y_h'' + py_h' + qy_h &= (y'' - y_p'') + p(y' - y_p') + q(y - y_p) \\ &= (y'' + py' + qy) - (y_p'' + py_p' + qy_p) = r - r = 0. \end{aligned}$$

Tudi dokaz v obratno smer je podoben preprost račun, ki ga bomo tukaj opustili. □

Bodita y_1 in y_2 linearno neodvisni rešitvi enačbe $y'' + py' + qy = 0$. Do kake rešitve enačbe (1.3.1) bomo poskusili priti z nastavkom $y = c_1y_1 + c_2y_2$, kjer sta c_1 in c_2 novi neznani funkciji. Če sta c_1 in c_2 konstanti, je tako definirana funkcija y le rešitev homogene enačbe (1.2.2); v nastavku pa c_1 in c_2 nista več konstanti, zato bomo postopek, ki ga bomo opisali, imenovali *metoda variacije konstant*. Imamo

$$y' = (c_1'y_1 + c_2'y_2) + (c_1y_1' + c_2y_2').$$

Pri računanju drugega odvoda y'' bi se pojavili drugi odvodi funkcij c_1 in c_2. Zaradi enostavnosti pa se želimo temu izogniti, zato bomo privzeli, da je izraz v prvem oklepaju gornje formule enak 0, torej

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0. \tag{1.3.2}$$

To se zdi precej samovoljen privzetek, toda videli bomo, da vodi do cilja. Zaradi zahteve (1.3.2) je sedaj $y' = c_1y_1' + c_2y_2'$ in zato $y'' = c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1'y_1' + c_2'y_2'$. Ko vstavimo to v enačbo (1.3.1) in uredimo, dobimo

$$c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + c_1'y_1' + c_2'y_2' = r.$$

Ker sta y_1 in y_2 rešitvi homogene enačbe, sta izraza v oklepajih enaka 0, torej je

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = r. \tag{1.3.3}$$

Skupaj z (1.3.2) predstavlja (1.3.3) sistem dveh linearnih algebraičnih enačb za neznanki c_1' in c_2'; njegova rešitev je

$$c_1' = -\frac{y_2r}{W}, \qquad c_2' = \frac{y_1r}{W}, \tag{1.3.4}$$

kjer je W determinanta Wronskega, $W = y_1y_2' - y_2y_1'$. Od tod lahko z integriranjem izračunamo c_1 in c_2 in s tem tudi rešitev $y = c_1y_1 + c_2y_2$.

Zgled 1.3.2. Lahko se je prepričati, da sta $y_1 = \sin 2x$ in $y_2 = \cos 2x$ linearno neodvisni rešitvi enačbe $y'' + 4y = 0$. Enačbo

$$y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$$

bomo zato reševali z nastavkom $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$. Ker je determinanta Wronskega W funkcij y_1 in y_2 enaka -2 (kot bo bralec zlahka izračunal), je po (1.3.4)

$$c_1 = \frac{1}{2}\int \cos 2x\ \operatorname{tg} 2x\, dx = \int \sin 2x\, dx = -\frac{\cos 2x}{4} \qquad \text{in}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{1}{2}\int \sin 2x\ \operatorname{tg} 2x\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1-\cos^2 2x}{\cos 2x}\, dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos 2x}\, dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{\cos 2x}{1-\sin^2 2x}\, dx + \frac{\sin 2x}{4} \\ &= -\frac{1}{4}\int \frac{d(\sin 2x)}{1-\sin^2 2x} + \frac{\sin 2x}{4}. \end{aligned}$$

Ko v zadnji integral vpeljemo novo spremenljivko $t = \sin 2x$, ga zlahka izračunamo in dobimo, da je enak $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos 2(\frac{\pi}{4}-x)}{1-\cos 2(\frac{\pi}{4}-x)} = \frac{1}{2}\ln\frac{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-x)}{2\sin^2(\frac{\pi}{4}-x)} = -\ln|\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-x)| = \ln|\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{4})|$. Torej je

$$c_2 = -\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{1}{4}\sin 2x.$$

Pri tem smo opustili pisanje integracijskih konstant, ker zadošča poiskati partikularno rešitev enačbe. Le-ta je

$$\begin{aligned} y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 &= -\frac{1}{4}\cos 2x\ \sin 2x + \left(-\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\cos 2x \\ &= -\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\cos 2x. \end{aligned}$$

Splošna rešitev pa je seveda $y = y_p + a_1 y_1 + a_2 y_2$, kjer sta a_1 in a_2 poljubni konstanti.

Naloge

1. Vsota dveh partikularnih rešitev enačbe $y'' + p(x)y' + y = 0$ je e^x. Določite p in vse rešitve enačbe

$$y'' + p(x)y' + y = e^x.$$

2. Naj bosta $\operatorname{ch} x$ in $\operatorname{sh} x$ rešitvi enačbe $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Določite p, q in vse rešitve enačbe $y'' + p(x)y' + q(x)y = e^{-x}$.

3. Poiščite splošno rešitev enačbe $(x-x^2)y''+2y = 2x$. (Namig: najprej preverite, ali sta funkciji x in x^2 partikularni rešitvi te enačbe.)

4. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $(1-x)x^2y''-2y=-2$, kjer sta partikularni rešitvi 1 in $\frac{1}{x}$.

5. Linearno neodvisni rešitvi enačbe $y''+\omega^2y=0$, kjer je ω konstanta, sta $y_1=\cos\omega x$ in $y_2=\sin\omega x$. Izpeljite iz (1.3.4) formulo za tisto rešitev enačbe

$$y''+\omega^2y=r,$$

ki zadošča začetnima pogojema $y(a)=0$ in $y'(a)=0$, kjer je a izbrana točka iz intervala, na katerem obravnavamo enačbo. (Rešitev:

$$y(x)=\frac{1}{\omega}\int_a^x r(t)\sin\omega(x-t)\,dt. \tag{1.3.5}$$

Preverite, da ta funkcija y res zadošča enačbi in začetnima pogojema.)

6. Pokažite: če sta u in v rešitvi enačb $u''+pu'+qu=f$ in $v''+pv'+qv=g$, potem je za poljubni konstanti a in b funkcija $y:=au+bv$ rešitev enačbe $y''+py'+qy=af+bg$.

1.4. Enačba s konstantnimi koeficienti in Eulerjeva enačba

Če sta p in q konstanti, je mogoče vsaj eno rešitev enačbe

$$y''+py'+qy=0 \tag{1.4.1}$$

poiskati z nastavkom $y=e^{\lambda x}$, kjer je λ konstanta. Ko vstavimo ta nastavek v enačbo (1.4.1) in jo nato delimo z $e^{\lambda x}$, dobimo namreč kvadratno enačbo

$$\lambda^2+p\lambda+q=0, \tag{1.4.2}$$

ki ima rešitvi

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-p\pm\sqrt{p^2-4q}\right).$$

Če je pri tem $\lambda_2\neq\lambda_1$, dobimo tako dve linearno neodvisni rešitvi: $y_1=e^{\lambda_1 x}$ in $y_2=e^{\lambda_2 x}$.

Kadar sta p in q realni konstanti, nas običajno zanimajo realne rešitve, funkciji y_1 in y_2 pa sta kompleksni, če je $p^2-4q<0$. Tedaj označimo $a=-\frac{p}{2}$ in $b:=\frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}$, tako da je $\lambda_1=a+ib$, $\lambda_2=a-ib=\bar{\lambda}_1$, $y_1=e^{(a+ib)x}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$ in $y_2=e^{(a-ib)x}=e^{ax}(\cos bx-i\sin bx)=\bar{y}_1$. Potem sta funkciji

$$\tilde{y}_1=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\operatorname{Re}y_1=e^{ax}\cos bx \qquad \text{in} \qquad \tilde{y}_2=\frac{1}{2i}(y_1-y_2)=\operatorname{Im}y_1=e^{ax}\sin bx$$

realni rešitvi enačbe (1.4.1).

Kadar je $p^2=4q$, je $\lambda_2=\lambda_1=:\lambda$ in gornji postopek da le eno rešitev, $y_1=e^{\lambda x}$. Drugo rešitev lahko dobimo s pomočjo Liouvillove formule (1.2.5); preprost račun pove, da je vedno oblike $y_2=xe^{\lambda x}$.

Zgled 1.4.1. (i) Pri enačbi

$$y'' + y' - 6y = 0$$

pripelje nastavek $y = e^{\lambda x}$ do kvadratne enačbe $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, katere rešitvi sta $\lambda_1 = -3$ in $\lambda_2 = 2$. Torej sta $y_1 = e^{-3x}$ in $y_2 = e^{2x}$ linearno neodvisni, $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$ pa splošna rešitev, pri čemer sta c_1 in c_2 konstanti.

(ii) Enačbi

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

odgovarjajoča kvadratna enačba $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ ima eno samo dvojno ničlo $\lambda = 2$. Zato je $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$ in $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ splošna rešitev te diferencialne enačbe.

(iii) Pri enačbi

$$y'' - 2y' + 4y = 0$$

pa ima ustrezna kvadratna enačba $\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$ kompleksni ničli $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$. Kompleksni rešitvi te enačbe sta torej $y_{1,2} = e^x(\cos(\sqrt{3}x) \pm i \sin(\sqrt{3}x))$, realni pa $\tilde{y}_1 = e^x \cos(\sqrt{3}x)$ in $\tilde{y}_2 = e^x \sin(\sqrt{3}x)$. Splošna rešitev je $y = e^x(c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \sin(\sqrt{3}x))$, kjer sta c_1 in c_2 konstanti.

Z metodo variacije konstant lahko sedaj načeloma rešimo vsako enačbo oblike

$$y'' + py' + qy = r,$$

kjer sta p in q konstanti, r pa dana zvezna funkcija. Vendar pa obstaja v primeru, ko je desna stran oblike $r(x) = f(x)e^{\mu x}$, kjer je μ konstanta, f pa polinom, hitrejša pot. V tem primeru namreč lahko, če μ ni ničla kvadratne enačbe $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, vedno najdemo partikularno rešitev enačbe

$$y'' + py' + qy = f(x)e^{\mu x} \qquad (f \text{ polinom, } \mu \text{ konstanta}) \tag{1.4.3}$$

kar z nastavkom $y = g(x)e^{\mu x}$, kjer je g polinom enake stopnje kot f. Njegove neznane koeficiente izračunamo iz enačbe, ki jo dobimo, ko vstavimo nastavek v (1.4.3). Če pa je μ enostavna (ali pa dvojna) ničla kvadratne enačbe $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, potem moramo nastavek spremeniti v $y = xg(x)e^{\mu x}$ (oziroma v $y = x^2 g(x)e^{\mu x}$), kjer je g spet polinom enake stopnje kot f. Da ti nastavki (in podobni za enačbe višjih redov) vedno delujejo, bomo videli v 15. nalogi.

Zgled 1.4.2. Da bi rešili enačbo

$$y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}, \tag{1.4.4}$$

poiščimo najprej rešitvi ustrezne homogene enačbe $y'' + 3y' - 10y = 0$, ki sta $y_1 = e^{2x}$ in $y_2 = e^{-5x}$. Ker je v enačbi (1.4.4) $\mu = 4 \neq \lambda_1 = 2$ in $\mu \neq \lambda_2 = -5$ in je polinom na desni strani enačbe kar konstanta 6, iščemo partikularno rešitev enačbe z nastavkom $y = Ae^{4x}$. Ko vstavimo to v enačbo in jo nato delimo z e^{4x}, dobimo $16A + 12A - 10A = 6$, torej $A = \frac{1}{3}$. Partikularna rešitev je tako $y_p = \frac{1}{3}e^{4x}$, splošna pa (po trditvi 1.3.1 in izreku 1.2.5) $y = \frac{1}{3}e^{4x} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x}$, kjer sta c_1 in c_2 konstanti.

Zgled 1.4.3. Tudi pri enačbi

$$y'' - 2y' + y = (x-1)e^x \tag{1.4.5}$$

rešimo najprej njen homogeni del

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

in sicer z nastavkom $y = e^{\lambda x}$. Ustrezna kvadratna enačba $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ ima dvojno ničlo $\lambda = 1$, ki se ujema s koeficientom $\mu = 1$, ki nastopa v eksponentu na desni strani enačbe (1.4.5). Ker je polinom na desni strani v (1.4.5) stopnje 1, iščemo partikularno rešitev z nastavkom $y = x^2(Ax+B)e^x = (Ax^3 + Bx^2)e^x$. To vstavimo v (1.4.5), delimo z e^x in uredimo, da dobimo

$$6Ax + 2B = x - 1.$$

Torej je $A = \frac{1}{6}$ in $B = -\frac{1}{2}$. Partikularna rešitev je tako $y_p = x^2(\frac{1}{6}x - \frac{1}{2})e^x$, splošna pa $y = y_p + c_1 e^x + c_2 x e^x$.

Zgled 1.4.4. V enačbi

$$y'' + y = 3\cos x \tag{1.4.6}$$

je desna stran $\operatorname{Re} 3e^{ix} = \frac{3}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$. Iz 6. naloge prejšnjega razdelka sledi (ker so koeficienti v enačbi realni), da je njena rešitev enaka realnemu delu rešitve enačbe

$$y'' + y = 3e^{ix}. \tag{1.4.7}$$

Ustrezna homogena enačba $y''+y=0$ ima rešitvi e^{ix} in e^{-ix} (torej $\lambda_1 = i$ in $\lambda_2 = -i$). Ker se tokrat koeficient $\mu = i$ v eksponentu na desni v (1.4.7) ujema z λ_1 in je $\lambda_2 \neq \lambda_1$, polinom na desni v (1.4.7) pa je konstanta, je nastavek za partikularno rešitev enačbe (1.4.7) oblike $y = xAe^{ix}$. Ko vstavimo to v (1.4.7), dobimo po krajšem računu, da je $A = -\frac{3}{2}i$. Partikularna rešitev enačbe (1.4.7) je tako $-\frac{3}{2}ixe^{ix}$, enačbe (1.4.6) pa njen realni del, torej

$$y_p = \operatorname{Re}\left(-\frac{3}{2}\,ix(\cos x + i\sin x)\right) = \frac{3}{2}\,x\sin x.$$

Ker sta realni rešitvi homogene enačbe $y''+y=0$ kar $\cos x$ in $\sin x$, je splošna rešitev enačbe (1.4.6)

$$y = \frac{3}{2}x\sin x + c_1\cos x + c_2\sin x.$$

Definicija 1.4.5. Enačbo oblike

$$x^2y'' + pxy' + qy = 0, \qquad (x > 0) \tag{1.4.8}$$

kjer sta p in q konstanti, imenujemo (homogena) *Eulerjeva enačba.*

Z vpeljavo nove neodvisne spremenljivke prek zveze $x = e^t$ lahko Eulerjevo enačbo preoblikujemo v enačbo s konstantnimi koeficienti. Po pravilu za posredno odvajanje velja namreč

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = e^{-t}\frac{dy}{dt} = e^{-t}\dot{y},$$

kjer smo s piko označili odvod na t. Ko uporabimo pravkar izpeljano pravilo $y' = e^{-t}\dot{y}$ na funkciji y' (namesto y), dobimo

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = e^{-t}\frac{d}{dt}(y') = e^{-t}\frac{d}{dt}(e^{-t}\dot{y}) = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}).$$

Ko sedaj vstavimo pravkar izpeljana izraza $y' = e^{-t}\dot{y}$ in $y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$ v enačbo (1.4.8) in upoštevamo še, da je $x = e^t$, dobimo

$$\ddot{y} + (p-1)\dot{y} + qy = 0.$$

To enačbo s konstantnimi koeficienti bi reševali z nastavkom $y = e^{\lambda t}$, kar izrazimo s spremenljivko x kot $y = x^\lambda$. Torej bomo reševali Eulerjevo enačbo (1.4.8) z nastavkom $y = x^\lambda$. Kadar bo pri tem $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$, bo druga rešitev $te^{\lambda t} = x^\lambda \ln x$.

Zgled 1.4.6. Ko v enačbo

$$x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$$

vstavimo $y = x^\lambda$, dobimo za λ pogoj

$$\lambda(\lambda - 1) + 5\lambda + 4 = 0,$$

se pravi $\lambda_{1,2} = -2$. Dve linearno neodvisni rešitvi sta torej $y_1 = x^{-2}$ in $y_2 = x^{-2}\ln x$, splošna rešitev pa $y = x^{-2}(c_1 + c_2 \ln x)$.

Zgled 1.4.7. Pri enačbi

$$x^2y'' + 3xy' + 10y = 0 \qquad (x > 0)$$

pripelje nastavek $y = x^\lambda$ do pogoja $\lambda(\lambda-1) + 3\lambda + 10 = 0$, od koder dobimo $\lambda_1 = -1 + 3i$ in $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -1 - 3i$. Dve kompleksni rešitvi sta torej $y_1 = x^{-1+3i} = x^{-1}e^{3i\ln x} = \frac{1}{x}(\cos(3\ln x) + i\sin(3\ln x))$ in $y_2 = \bar{y}_1$. Realni rešitvi pa sta potem $\tilde{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + \bar{y}_1) = \operatorname{Re} y_1 = \frac{1}{x}\cos(3\ln x)$ in $\tilde{y}_2 = \operatorname{Im} y_1 = \frac{1}{x}\sin(3\ln x)$.

Naloge

1. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $y'' + 16y = \sin(4x)$.

2. Poiščite tisto rešitev diferencialnih enačb

(i) $y'' - 9y' + 20y = e^{4x}$,

(ii) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$,

ki zadošča pogojema $y(0) = 0$ in $y'(0) = 0$.

3. Rešite enačbo $y'' - 2ay' + a^2y = e^{ax}$.

4. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe $y'' - 8y' + 16y = e^{\alpha x}$, ki zadošča pogojema $y(0) = 0$ in $y'(0) = 0$. (Obravnavajte različni možnosti glede na vrednost parametra $\alpha \in \mathbb{R}$.)

5. Rešite naslednji enačbi:

(i) $y'' - 3y' + 2y = 7\sin 2x + 8\cos 2x$;

(ii) $y'' + 4y = 2\cos 2x + 4x^2$. (Namig: 6. naloga iz prejšnjega razdelka.)

6. Zapišite splošno rešitev diferencialne enačbe $y'' + a^2y = \sin bx$, kjer sta a in b pozitivni konstanti. Če je $y = y(x, b)$ kaka rešitev, ugotovite, kako je z limito $z(x) = \lim_{b\to a} y(x, b)$ in kateri diferencialni enačbi zadošča.

7. Pokažite, da za splošno rešitev enačbe $y'' + py' + qy = 0$, kjer sta p in q realni konstanti, velja $\lim_{x\to\infty} y = 0$ natanko tedaj, ko je $p > 0$ in $q > 0$.

8. Napišite splošno rešitev diferencialne enačbe $y'' + \omega^2y = f(x)$, kjer je ω pozitivna konstanta, f pa zvezna funkcija na $\mathbb{R}$. Ali je vsaka rešitev nujno periodična, če je f periodična s periodo ω? (Namig: obravnavajte primer $f(x) = \cos\omega x$.)

9. Rešite Eulerjeve enačbe:

(i) $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$;

(ii) $x^2y'' + 7y' + 10y = 0$;

(iii) $x^2y'' + 7y' + 9y = 0$;

(iv) $x^2y'' + 8xy' + 10y = 0$, $y(1) = 1$ in $y'(1) = 0$.

10. S kakšnim nastavkom bi reševali enačbo

$$x^2y'' + pxy' + qy = f(\ln x)x^\mu \qquad (x > 0),$$

kjer so p, q in μ konstante, f pa polinom?

11. Kdaj imajo vse rešitve enačbe $y'' + py' + qy = 0$, kjer sta p in q realni konstanti, neskončno mnogo ničel? Kdaj pa velja to za rešitve Eulerjeve enačbe (1.4.8)?

12. S pomočjo substitucije $t = x^2$ prevedite diferencialno enačbo $xy'' + (4x^2 - 1)y' + 8x^3y = 0$ na enačbo s konstantnimi koeficienti in jo rešite.

***13.** Pokažite, da je mogoče prevesti diferencialno enačbo $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (kjer sta p in $q > 0$ zvezni funkciji) na enačbo s konstantnimi koeficienti s substitucijo oblike $t = t(x)$ natanko tedaj, ko je $\frac{2pq + q'}{q^{\frac{3}{2}}}$ konstanta.

***14.** Označimo z D operator odvajanja, torej $Dy = y'$ za vsako odvedljivo funkcijo y na intervalu I. Enačbo (1.4.1) lahko napišemo kot

$$g(D)y = 0, \tag{1.4.9}$$

kjer je g kvadratni polinom, $g(x) = x^2 + px + q$. Če g razstavimo na linearna faktorja $g(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$, lahko enačbo (1.4.9) napišemo kot

$$(D - \lambda_1 I)(D - \lambda_2 I)y = 0, \tag{1.4.10}$$

kjer je I identični operator. Če je $\lambda_2 \neq \lambda_1$, potem iz (1.4.10) sledi, da se da y izraziti kot $y = y_1 + y_2$, kjer je $(D - \lambda_j)y_j = 0$. (To je poseben primer znanega dejstva iz linearne algebre, glejte npr. [26, 3.4.8].) Tako enačba (1.4.1) razpade na dve enačbi prvega reda, namreč na enačbi $y_j' = \lambda_j y_j$. Če pa je $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$, označimo $v := (D - \lambda I)y$; potem se (1.4.10) glasi $(D - \lambda I)v = 0$ oziroma $v' = \lambda v$. Od tod izračunajte najprej, da je $v = ce^{\lambda x}$, kjer je c konstanta, nato pa še y iz enačbe $(D - \lambda I)y = v$. To pojasni nastavek za reševanje homogene linearne enačbe 2. reda s konstantnimi koeficienti. Podoben argument velja tudi za enačbe višjih redov. Kaj je npr. splošna rešitev enačbe $(D - \lambda I)^n y = 0$, kjer je $n = 1, 2, 3, \ldots$?

***15.** Naj bo E_μ funkcija na $\mathbb{R}$, definirana z $E_\mu(x) = e^{\mu x}$, kjer je μ konstanta, in bodi f polinom stopnje n. Z oznakami iz prejšnje naloge lahko enačbo (1.4.3) zapišemo kot

$$g(D)y = fE_\mu. \tag{1.4.11}$$

(i) Pokažite, da za poljubna polinoma g in F velja

$$g(D)(FE_\mu) = g(D + \mu I)(F)E_\mu.$$

(Namig: indukcija na število linearnih faktorjev, ki nastopajo v razcepu polinoma g.)

(ii) Sklepajte iz (i), da nastavek $y = FE_\mu$ spremeni enačbo (1.4.11) v

$$g(D + \mu I)F = f. \tag{1.4.12}$$

(iii) Dokažite: če μ ni ničla polinoma g, je operator $g(D + \mu I)$ na prostoru polinomov stopnje do n injektiven, torej obrnljiv, zato ima tedaj enačba (1.4.12) rešitev F, ki je polinom stopnje največ n. (Namig: razcepite g na linearne faktorje in upoštevajte, da je D nilpotenten operator na prostoru polinomov stopnje do n.)

(iv) Pokažite, da za vsak $k \in \mathbb{N}$ obstaja tak polinom F_0 stopnje največ n, da je $D^k F = f$, kjer je $F(x) = x^k F_0(x)$. Sklepajte sedaj podobno kot v (iii), da ima enačba (1.4.12) rešitev oblike $F(x) = x^k F_0(x)$, če je μ k-kratna ničla polinoma g.

16. (*Nihanje*) Opazujmo npr. kvader mase m, na vodoravni podlagi, pripet z vzmetjo koeficienta k na navpično steno. Sila vzmeti na kvader je tedaj $F = -kx$, kjer je x odmik težišča kvadra od ravnovesne lege. Iz Newtonovega zakona $F = ma$ sledi, da se diferencialna enačba za odmik x glasi $m\ddot{x} = -kx$ oziroma

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \text{kjer je } \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Pokažite, da lahko splošno rešitev te enačbe zapišemo kot $x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t = A \cos(\omega t - \varphi_0)$ za primerni konstanti A (*amplituda*) in φ_0 (*faza*). Pokažite tudi, da je *nihajni čas* (to je čas, ki je potreben, da se argument v cos spremeni za 2π) enak $\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

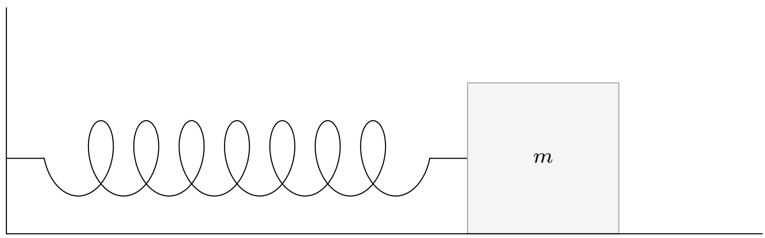

FIGURE 1.5. Nihanje kvadra.

17. (*Vsiljeno nihanje*) Če na kvader iz prejšnje naloge deluje še dodatna zunanja sila $F = F_0 \cos \omega_0 t$ (v vodoravni smeri), potem je diferencialna enačba za odmik x težišča od ravnovesne lege

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t.$$

Napišite rešitev te enačbe pri začetnih pogojih $x(0) = A$ in $\dot{x}(0) = 0$. Primer $\omega = \omega_0$ obravnavajte posebej in opazite, da tedaj maksimalni odmiki od ravnovesne lege naraščajo s časom. (Ta pojav imenujemo *resonanca.*)

18. (*Dušeno nihanje*) Predpostavimo, da na kvader iz 16. naloge deluje še sila, ki zavira gibanje in je sorazmerna s hitrostjo, torej $F = -c\dot{x}$, kjer je c pozitivna konstanta. Potem je enačba gibanja

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \text{kjer je } \; b = \frac{c}{2m} \; \text{ in } \; \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Napišite tisto rešitev te enačbe, ki zadošča začetnima pogojema $x(0) = A$ in $\dot{x}(0) = 0$. Pokažite, da v primerih $b > \omega$ in $b = \omega$ ne pride do nihanja, temveč se kvader le vrne v ravnovesno lego. Če pa je $b < \omega$, potem pokažite, da lahko rešitev napišemo v obliki

$$x = \frac{A\sqrt{\Omega^2 + b^2}}{\Omega} e^{-bt} \cos(\Omega t - \varphi_0), \quad \text{kjer je } \; \Omega = \sqrt{\omega^2 - b^2} \; \text{ in } \; \varphi_0 \text{ konstanta.}$$

Opazite, da maksimalni odmiki od ravnovesne lege padajo eksponentno.

19. Z oznakami iz prejšnjih dveh nalog se diferencialna enačba vsiljenega dušenega nihanja kvadra glasi

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t.$$

Pokažite, da je v primeru, ko je $\omega > b$, splošna rešitev te enačbe

$$x = e^{-bt}(c_1 \cos \Omega t + c_2 \sin \Omega t) + \frac{F_0}{\sqrt{(k - \omega_0^2 m)^2 + \omega_0^2 c^2}} \cos(\omega_0 t - \varphi_0).$$

Sklepajte, da po zelo dolgem času prvi del rešitve izzveni (gre proti 0, ko $t \to \infty$) in je zato rešitev približno enaka $\frac{F_0}{\sqrt{(k-\omega_0^2 m)^2+\omega_0^2 c^2}} \cos(\omega_0 t - \varphi_0)$. Sklepajte, da navsezadnje, po dolgem času, kvader niha s tako frekvenco, kot jo vsiljuje zunanja sila. Opazite, da je pri šibkem dušenju (tj. $c \approx 0$) amplituda tega nihanja zelo velika, če je ω_0 zelo blizu $\sqrt{\frac{k}{m}}$. (Takrat lahko spet govorimo o resonanci.)

1.5. Ničle rešitev homogenih linearnih enačb 2. reda

Splošne homogene enačbe (1.2.2) ne moremo vedno rešiti na elementaren način, vseeno pa lahko poskusimo opisati kvalitativne lastnosti rešitev. Zanima nas, kdaj se rešitve obnašajo podobno kot rešitve najpreprostejše med takimi enačbami $y'' + \omega^2 y = 0$ (torej funkciji $\cos \omega x$ in $\sin \omega x$). Če si mislimo, da pomeni x čas, potem nas zanima, kdaj taka enačba pomeni nihanje, torej, kdaj imajo rešitve neskončno mnogo ničel (tj. prehodov skozi ravnovesno lego).

V celotnem razdelku bosta p in q zvezni funkciji na I, kjer bo I realna os ali pa kak poltrak ali interval.

TRDITEV 1.5.1. *Ničle netrivialne rešitve y enačbe $y'' + py' + qy = 0$ ne morejo imeti (končnih) stekališč. Vsaka ničla take rešitve je enostavna: če je $y(x_0) = 0$, je $y'(x_0) \neq 0$.*

PROOF. Predpostavimo, da bi bila kaka točka $a \in I$ stekališče ničel kake netrivialne rešitve y. Torej, da bi obstajalo kako zaporedje $(x_n) \subset I$ ničel, ki bi konvergiralo proti a. Ker je y zvezna funkcija in $y(x_n) = 0$, bi bilo $y(a) = 0$. Nadalje bi imeli

$$y'(a) = \lim_{x_n \to a} \frac{y(x_n) - y(a)}{x_n - a} = 0.$$

Toda po izreku 1.2.1 iz pogoja $y(a) = 0 = y'(a)$ sledi, da je $y \equiv 0$ (saj istemu pogoju zadošča funkcija 0), kar je v nasprotju s predpostavko, da je y netrivialna rešitev. □

LEMA 1.5.2. *Če imata rešitvi y_1 in y_2 enačbe* (1.2.2) *kako skupno ničlo x_0, potem sta linearno odvisni.*

PROOF. Če sta rešitvi trivialni, ni kaj dokazovati, zato vzemimo, da npr. y_1 ni trivialna in torej po prejšnji trditvi $y_1'(x_0) \neq 0$. Naj bo $c = \frac{y_2'(x_0)}{y_1'(x_0)}$. Potem rešitev $v := y_2 - cy_1$ enačbe (1.2.2) zadošča pogojema $v(x_0) = 0 = v'(x_0)$, torej mora biti po izreku 1.2.1 identično enaka 0. Tedaj pa je $y_2 = cy_1$. □

TRDITEV 1.5.3. *Če sta y_1 in y_2 linearno neodvisni rešitvi enačbe* (1.2.2)*, je v intervalu (x_1, x_2) med dvema zaporednima ničlama x_1, x_2 funkcije y_1 natanko ena ničla funkcije y_2.*

PROOF. Brez izgube splošnosti lahko privzamemo, da je $y_1(x) > 0$ za vse $x \in (x_1, x_2)$ (sicer bi nadomestili y_1 z $-y_1$). Privzemimo, da y_2 nima nobene ničle na (x_1, x_2); spet lahko privzamemo, da je y_2 pozitivna na tem intervalu (sicer jo nadomestimo z $-y_2$). Po prejšnji lemi je potem $y_2(x) > 0$ za vse $x \in [x_1, x_2]$. Ker je $y_1(x_1) = 0$ in $y_1(x) > 0$ za $x \in (x_1, x_2)$, je $y_1'(x_1) > 0$ (sicer bi bila funkcija v bližini točke x_1 padajoča in zato negativna desno od x_1). Torej za determinanto Wronskega funkcij y_1, y_2 velja

$$W(x_1) = y_1(x_1)y_2'(x_1) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = -y_1'(x_1)y_2(x_1) < 0.$$

Podobno lahko sklenemo, da je $W(x_2) > 0$. Zaradi zveznosti mora potem funkcija W imeti na intervalu (x_1, x_2) vsaj eno ničlo, toda to nasprotuje Liouvillovi formuli (1.2.3). □

Včasih je koristno primerjati rešitve enačbe (1.2.2) z rešitvami enačbe $y'' + ay = 0$, kjer je a konstanta. Pri tem nam bo pomagala naslednja trditev.

TRDITEV 1.5.4. *Vsako enačbo $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, kjer je p zvezno odvedljiva, q pa zvezna funkcija, lahko prevedemo na normalno obliko*

$$u'' + Q(x)u = 0, \tag{1.5.1}$$

in sicer s substitucijo $y = uv$, kjer je $v = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx}$. Pri tem je $Q(x) = q(x) - \frac{p(x)^2}{4} - \frac{p'(x)}{2}$.

PROOF. Substitucija $y = uv$, kjer bo u nova neznanka, v pa primerna funkcija brez ničel, prevede prvotno enačbo v obliko $vu'' + (2v' + pv)u' + (v'' + pv' + qv)u = 0$ oziroma v

$$u'' + \left(2\,\frac{v'}{v} + p\right)u' + \left(\frac{v''}{v} + p\,\frac{v'}{v} + q\right)u = 0.$$

Da bo koeficient pred u' enak 0, mora biti $\frac{v'}{v} = -\frac{1}{2}p$, torej $v(x) = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx}$. Izračunajmo še $Q := \frac{v''}{v} + p\frac{v'}{v} + q$. Z odvajanjem enakosti $\frac{v'}{v} = -\frac{p}{2}$ dobimo $\frac{v''}{v} - (\frac{v'}{v})^2 = -\frac{p'}{2}$, torej je $\frac{v''}{v} = -\frac{p'}{2} + \frac{p^2}{4}$ in $Q = -\frac{p'}{2} - \frac{p^2}{4} + q$. □

IZREK 1.5.5. *(Sturmov primerjalni kriterij) Če je $q(x) > r(x)$ za vsak $x \in I$ (kjer sta q in r zvezni funkciji na I), je med poljubnima dvema ničlama vsake netrivialne rešitve u enačbe*

$$u'' + ru = 0$$

vsaj ena ničla katerekoli rešitve y enačbe

$$y'' + qy = 0.$$

Proof. Bodita x_1 in x_2 zaporedni ničli funkcije u; potem lahko privzamemo, da je u pozitivna na intervalu (x_1, x_2) (sicer jo nadomestimo z $-u$) in zato $u'(x_1) > 0$ ter $u'(x_2) < 0$ (kot v dokazu trditve 1.5.3). Če y nima nobene ničle v intervalu (x_1, x_2), lahko privzamemo, da je na tem intervalu pozitivna. Za determinanto Wronskega $W := yu' - y'u$ potem velja

$$W(x_1) = y(x_1)u'(x_1) \geq 0 \quad \text{in} \quad W(x_2) = y(x_2)u'(x_2) \leq 0, \quad \text{torej} \quad W(x_2) \leq W(x_1).$$

Toda po drugi strani je

$$W(x_2) - W(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} W'(x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} (yu'' - y''u)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} (q - r)yu\, dx > 0,$$

kar je protislovje. □

Posledica 1.5.6. *Če je $q(x) < 0$ za vsak $x \in I$, potem ima netrivialna rešitev y enačbe $y'' + qy = 0$ kvečjemu eno ničlo v I.*

Proof. Če bi imela funkcija y dve ničli, bi morala biti po Sturmovem primerjalnem kriteriju med njima vsaj ena ničla katerekoli rešitve u enačbe $u'' = 0$, torej katerekoli linearne funkcije u, kar pa ni mogoče. □

Če je funkcija q strogo pozitivna, ni nujno, da imajo rešitve enačbe $y'' + qy = 0$ neskončno mnogo ničel (naloga 1).

Zgled 1.5.7. Naj bo y netrivialna rešitev *Besselove enačbe*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \qquad (x > 0,\, \nu \geq 0).$$

Če je $\nu \in [0, \frac{1}{2})$, potem vsak interval širine π vsebuje vsaj eno ničlo funkcije y. Če je $\nu = \frac{1}{2}$, je razdalja med poljubnima zaporednima ničlama funkcije y natanko π. Če pa je $\nu > \frac{1}{2}$, potem vsak interval dolžine π vsebuje kvečjemu eno ničlo funkcije y. Vedno pa ima y neskončno mnogo ničel na poltraku $(0, \infty)$.

Proof. Po trditvi 1.5.4 dobimo normalno obliko Besselove enačbe

$$u'' + \left(1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4x^2}\right)u,$$

kjer je $y = ue^{-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}} = \frac{u}{\sqrt{x}}$ (torej imata y in u iste ničle na $(0, \infty)$). To enačbo bomo sedaj primerjali z enačbo

$$w'' + w = 0,$$

katere rešitve so večkratniki funkcije $w = \sin(x - c)$ za poljubno konstanto c. Če je $\nu \in [0, \frac{1}{2})$, je $q(x) := 1 + \frac{1-4\nu^2}{4x^2} > 1$, zato mora biti po izreku 1.5.5 med ničlama c in $c + \pi$ funkcije w vsaj ena ničla funkcije u. Če je $\nu = \frac{1}{2}$, je normalna oblika Besselove enačbe $u'' + u = 0$ in razdalja med zaporednima ničlama poljubne netrivialne rešitve $C \sin(x - c)$ te enačbe je π. Če pa je $\nu > \frac{1}{2}$, je $q(x) < 1$ za vsak $x > 0$, zato mora biti po izreku 1.5.5 med poljubnima dvema ničlama x_1, x_2 za u vsaj ena ničla funkcije $\sin(x - c)$, in sicer za vsak $c \in \mathbb{R}$. To je mogoče le, če je $|x_2 - x_1| > \pi$ (vzamemo npr. $c = x_1$).

Ker je $q(x) > \frac{1}{2}$ za vse dovolj velike x, recimo za vse $x \geq x_0 > 0$, sledi (iz primerjave z rešitvami enačbe $w'' + \frac{1}{2}w = 0$), da ima y neskončno ničel na poltraku (x_0, ∞), torej tudi na poltraku $(0, \infty)$. $\square$

Naloge

1. Napišite splošno rešitev Eulerjeve enačbe

$$y'' + \frac{c}{x^2}\, y = 0 \qquad (x > 0),$$

kjer je c konstanta, in se prepričajte, da ima le končno mnogo ničel, če je $c \leq \frac{1}{4}$.

2. Dokažite: če zvezna funkcija q zadošča pogoju $m^2 < q < M^2$, kjer sta m in M pozitivni konstanti, potem lahko razdaljo med zaporednima ničlama katerekoli netrivialne rešitve y enačbe $y'' + qy = 0$ ocenimo kot

$$\frac{\pi}{M} < |x_2 - x_1| < \frac{\pi}{m}.$$

Sklepajte od tod naslednje: če sta $a < b$ realni ničli funkcije y in je $n - 1$ število realnih ničel funkcije y na intervalu (a, b), potem je $\frac{m}{\pi}(b - a) < n < \frac{M}{\pi}(b - a)$.

3. Pokažite, da ima vsaka netrivialna rešitev enačbe $y'' + (1 + x^2)y = 0$ neskončno mnogo ekstremov. (Namig: med dvema zaporednima ničlama mora biti ekstrem.)

***4.** Naj bo $q : [0, \infty) \to (0, \infty)$ taka zvezna funkcija, da je $\int_0^\infty q(x)\, dx = \infty$. Dokažite, da ima tedaj vsaka rešitev y enačbe $y'' + qy = 0$ neskončno ničel na poltraku $(0, \infty)$. (Rešitev: Privzemimo nasprotno, da obstaja kak tak x_0, da y nima nobene ničle na poltraku (x_0, ∞). Vzeti smemo, da je tedaj $y(x) > 0$ za vse $x > x_0$ (sicer bi obravnavali $-y$) in zato $y''(x) = -q(x)y(x) < 0$. To pove, da je y' padajoča funkcija na poltraku (x_0, ∞). Če pokažemo, da mora biti $y'(x_1) < 0$ za kak $x_1 > x_0$, potem bo $y'(x) \leq y'(x_1)$ za vse $x > x_1$, zato bo moral biti za $x > x_1$ graf funkcije y pod tangento na graf v točki $(x_1, y(x_1))$ in bo tako moral sekati abscisno os. To bo pomenilo, da ima y ničlo, večjo od x_0, kar bo protislovje. Za dokaz obstoja točke x_1 opazimo, da funkcija $v := -\frac{y'}{y}$ zadošča enakosti $v' = -\frac{y''}{y} + (\frac{y'}{y})^2 = q + v^2$, torej je

$$v(x) - v(x_0) = \int_{x_0}^{x} q(t)\, dt + \int_{x_0}^{x} v(t)^2\, dt \geq \int_{x_0}^{x} q(t)\, dt.$$

Ker je po predpostavki $\int_0^\infty q(t)\, dt = \infty$, sledi, da je $v(x) > 0$ za vse dovolj velike x, torej $y'(x) < 0$, ker je $y(x) > 0$.)

5. Legendreovo diferencialno enačbo $(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n + 1)y = 0$ prevedite na obliko $u'' + q(x)u = 0$ (s pomočjo substitucije $y = uv$, kjer je funkcija v primerno izbrana). Koliko ničel imajo netrivialne rešitve te enačbe na poltraku $x > 2$, končno ali neskončno?

1.6. Sistemi linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti

Sistem linearnih diferencialnih enačb prvega reda

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(t)x_j + f_i(t) \qquad (i = 1, \dots, n),$$

kjer so $a_{i,j}$ in f_i dane zvezne funkcije spremenljivke t, x_i pa neznanke, lahko zapišemo kot

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t), \tag{1.6.1}$$

kjer smo vpeljali matrično funkcijo $A(t) := [a_{i,j}(t)]$ ter vektorski funkciji $\vec{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$ in $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ (vektorji so tukaj stolpci). Vse te funkcije so definirane na kakem intervalu (a, b), ki je lahko tudi poltrak ali pa vsa realna os. Kadar je $\vec{f} \equiv 0$, imenujemo sistem *homogen*. V primerih, ko je matrika A konstantna, lahko homogen sistem

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x} \tag{1.6.2}$$

rešimo elementarno. Tedaj namreč za matrično funkcijo $e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$ (vrsta konvergira za vsak $t \in \mathbb{R}$, glejte npr. [26, zgled 4.6.12]) velja enakost

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n\,\frac{t^{n-1}}{n!}\,A^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,A^{n-1}A = e^{tA}A = Ae^{tA}.$$

Zato (in ker je matrika e^{tA} obrnljiva z inverzom e^{-tA}) je enačba (1.6.2) ekvivalentna z

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-tA}\vec{x}\right) = \vec{0}.$$

To pove, da je vektorska funkcija $t \mapsto e^{-tA}\vec{x}$ konstantna, recimo enaka $\vec{c}$, torej

$$\vec{x} = e^{tA}\vec{c}. \tag{1.6.3}$$

Za vsak konstantni vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ je z (1.6.3) določena rešitev sistema enačb (1.6.2).

Za izračun matrike e^{tA} je najbolje najprej poiskati matriki A podobno Jordanovo kanonično formo J [26, razdelka 4.7 in 3.5], to je tako matriko J, ki ima po diagonali lastne vrednosti matrike A, tik nad diagonalo elemente 1 ali 0, drugod pa ničle, da je $A = PJP^{-1}$ za kako obrnljivo matriko P. Podrobneje si oglejmo le primer $n = 2$, kjer bomo opisali postopek, ki se bo izognil računanju Jordanove forme. Za večje n pa je več računanja, ki ga lahko prepustimo računalnikom, saj obstajajo učinkoviti programi za tovrstne naloge. V primeru, ko je matrika A podobna kaki diagonalni matriki D, torej $A = PDP^{-1}$ za kako obrnljivo matriko P, je $A^n = PD^nP^{-1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, zato tudi

$$e^{tA} = e^{PtDP^{-1}} = Pe^{tD}P^{-1}.$$

Za diagonalno matriko

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{je} \quad e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}.$$

Po (1.6.3) je tedaj splošna rešitev homogenega sistema (1.6.2)

$$\vec{x} = e^{tA}\vec{c} = Pe^{tD}P^{-1}\vec{c} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} d_1 e^{\lambda_1 t} \\ d_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}, \tag{1.6.4}$$

kjer smo označili $P^{-1}\vec{c} = (d_1, d_2)^T$. Iz linearne algebre vemo, da sta stolpca $\vec{a}_1$ in $\vec{a}_2$ matrike P lastna vektorja matrike A, torej $A\vec{a}_1 = \lambda_1\vec{a}_1$ in $A\vec{a}_2 = \lambda_2\vec{a}_2$. Ko pomnožimo matriko P s kakim stolpcem, dobimo stolpec, ki je linearna kombinacija stolpcev matrike P, torej iz (1.6.4) sledi, da je $\vec{x}$ oblike

$$\vec{x} = e^{\lambda_1 t}\vec{a} + e^{\lambda_2 t}\vec{b} \tag{1.6.5}$$

za kaka lastna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ matrike A, ki pripadata lastnima vrednostma λ_1 in λ_2 zaporedoma. Lahko je preveriti, da je vsak $\vec{x}$ oblike (1.6.5) res rešitev sistema (1.6.2). Kadar je matrika A realna, ima lahko vseeno kompleksni lastni vrednosti (ki sta si konjugirani). Opisani postopek nam da tedaj kompleksne rešitve, toda realni in imaginarni del teh rešitev so realne rešitve sistema (1.6.2).

V primeru, ko se 2×2 matrika A ne da diagonalizirati, kar se lahko zgodi le, ko ima eno samo lastno vrednost λ, je podobna matriki

$$J = \lambda I + N, \quad \text{kjer je} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I \text{ pa identična matrika.}$$

Torej $A = PJP^{-1}$ za kako obrnljivo matriko P in zato $e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}$. Ker je $N^2 = 0$, je

$$e^{tJ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\lambda I + N)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\lambda^n I + n\lambda^{n-1} N) = e^{\lambda t} I + te^{\lambda t} N = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tako dobimo sedaj za rešitev po (1.6.3)

$$\vec{x} = Pe^{tJ}P^{-1}\vec{c} = e^{\lambda t} P \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = e^{\lambda t} P \begin{bmatrix} d_1 + td_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \left(\vec{a} + t\vec{b}\right)$$

za kaka stolpca $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Ko vstavimo izraz $\vec{x} = e^{\lambda t}(\vec{a} + t\vec{b})$ v enačbo (1.6.2), dobimo

$$e^{\lambda t} \left[\lambda \left(\vec{a} + t\vec{b}\right) + \vec{b}\right] = e^{\lambda t} A \left(\vec{a} + t\vec{b}\right),$$

se pravi $A\vec{a} = \lambda\vec{a} + \vec{b}$ in $A\vec{b} = \lambda\vec{b}$. Torej je $\vec{b}$ lastni, $\vec{a}$ pa ustrezni korenski vektor matrike A (kar pomeni, da je $(A - \lambda I)\vec{a} = \vec{b}$). Tako smo dokazali:

TRDITEV 1.6.1. *Naj bo A matrika reda 2×2. Če se da A diagonalizirati in sta λ_1, λ_2 njeni lastni vrednosti, je splošna rešitev sistema* (1.6.2) *oblike $\vec{x} = e^{\lambda_1 t}\vec{a} + e^{\lambda_2 t}\vec{b}$, kjer sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ lastna vektorja matrike A, ki pripadata lastnima vrednostma λ_1 in λ_2 (zaporedoma). Če pa se A ne da diagonalizirati, potem je splošna rešitev sistema* (1.6.2) *oblike $\vec{x} = e^{\lambda t}(\vec{a} + t\vec{b})$, kjer je λ lastna vrednost matrike A, $\vec{b}$ pripadajoči lastni vektor, $\vec{a}$ pa tak vektor, da je $(A - \lambda I)\vec{a} = \vec{b}$.*

ZGLED 1.6.2. Rešimo sistem

$$\dot{x} = -4x - y, \qquad \dot{y} = x - 2y.$$

Matrika tega sistema je

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

njen karakteristični polinom je $(-\lambda - 4)(-\lambda - 2) + 1$, edina njegova ničla pa $\lambda = -3$. Lahko je izračunati, da so vsi lastni vektorji za edino lastno vrednost $\lambda = -3$ oblike

$$\vec{b} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (\beta \in \mathbb{R}).$$

Poiskati moramo še vse take vektorje $\vec{a}$, da bo $(A + 3I)\vec{a} = \vec{b}$, se pravi

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ -\beta \end{bmatrix}.$$

Če označimo $\alpha = a_2$, vidimo, da je $a_1 = -\alpha - \beta$ in

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Torej je rešitev

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{-3t}\left(\vec{a} + t\vec{b}\right) = e^{-3t}\left(\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right),$$

se pravi $x = e^{-3t}(-\alpha - \beta + \beta t)$ in $y = e^{-3t}(\alpha - \beta t)$. V rešitvi nastopata dve poljubni konstanti α in β.

Nehomogen sistem

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x} + \vec{f}(t) \tag{1.6.6}$$

lahko poskusimo rešiti z *variacijo konstant*. Ker je rešitev homogenega sistema $\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x}$ oblike $\vec{x} = e^{tA}\vec{c}$ (kjer je $\vec{c}$ konstanten vektor), iščemo rešitev sistema (1.6.6) v obliki $\vec{x} = e^{tA}\vec{c}$, kjer je $\vec{c}$ nova neznana vektorska funkcija. Ko vstavimo ta nastavek v enačbo (1.6.6), dobimo za $\vec{c}$ enačbo

$$e^{tA}\frac{d}{dt}\vec{c} = \vec{f}(t),$$

torej je

$$\vec{c}(t) = \int_a^t e^{-\tau A} \vec{f}(\tau)\, d\tau + \vec{K},$$

kjer je $\vec{K}$ konstanten vektor, $a \in \mathbb{R}$ pa konstanta. (V tej formuli nastopa integral vektorske funkcije, ki je definiran na očiten način, tj. po komponentah; glejte opombo 1.7.2.)

Naloge

1. Poiščite realne rešitve naslednjih sistemov enačb:

(i) $\dot{x} = x + 2y, \;\; \dot{y} = 3x;$

(ii) $\dot{x} = x + y, \;\; \dot{y} = -x + 3y;$

(iii) $\dot{x} = 4x - 2y, \;\; \dot{y} = 5x + 2y;$

(iv) $\dot{x} = -y, \;\; \dot{y} = x.$

2. V prvo posodo, v kateri je 200 litrov slane vode, ki vsebuje 2 kg soli, priteka čista voda, in sicer 2 litra na minuto. Iz nje odteka v drugo posodo slana voda, in sicer spet 2 litra na minuto. Iz druge posode, ki vsebuje na začetku 100 litrov čiste vode, odteka 2 litra tekočine na minuto. Kako se spreminja količina soli v obeh posodah? Kdaj je količina soli v drugi posodi največja?

3. Rešite sistem $\dot{x} = y + \sin t, \;\; \dot{y} = x + \cos t.$

4. Kdaj so vse rešitve homogenega sistema $\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x}$, kjer je A konstantna realna 2×2 matrika, omejene za $t \geq 0$? Kdaj pa so omejene za vse $t \in \mathbb{R}$? (Namig: pomemben je predznak realnih delov lastnih vrednosti.)

5. Naj ima realna 2×2 matrika A lastni vrednosti $\lambda = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ in $\bar{\lambda}$. Pokažite, da lahko vsako realno rešitev sistema $\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x}$ izrazimo kot $\vec{x} = e^{at}(\vec{e}\cos bt + \vec{f}\sin bt)$ za kaka vektorja $\vec{e}$ in $\vec{f}$ iz $\mathbb{R}^2$.

6. Kdaj natančno so vse rešitve sistema $\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x}$, kjer je A realna 2×2 matrika, sklenjene krivulje? Kakšne krivulje so to?

7. (*Lotka-Volterrov model plenilca in plena*) V populaciji plenilcev (npr. lisic) in plena (npr. zajcev) naj bo x količina plena, y pa plenilcev. Predpostavimo, da ima plen neomejeno količino hrane, tako da bi v odsotnosti plenilcev imeli diferencialno enačbo $\frac{dx}{dt} = ax$, kjer je a pozitivna konstanta. Zaradi prisotnosti plenilcev pa se x zmanjšuje premosorazmerno s številom srečanj med plenilci in plenom. Za število srečanj lahko predpostavimo, da je premosorazmerno produktu xy. Torej se diferencialna enačba za x glasi $\frac{dx}{dt} = ax - bxy$. Podobno dobimo diferencialno enačbo za y in s tem sistem

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy, \qquad \frac{dy}{dt} = -cy + dxy, \tag{1.6.7}$$

kjer so a, b, c, d pozitivne konstante. Tega sistema se ne da rešiti z elementarnimi funkcijami, lahko pa izračunamo tirnice, to je ravninske krivulje (podane implicitno), ki predstavljajo rešitev. Če namreč delimo drugo enačbo s prvo, dobimo enačbo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cy + dxy}{ax - bxy} \tag{1.6.8}$$

z ločljivima spremenljivkama.

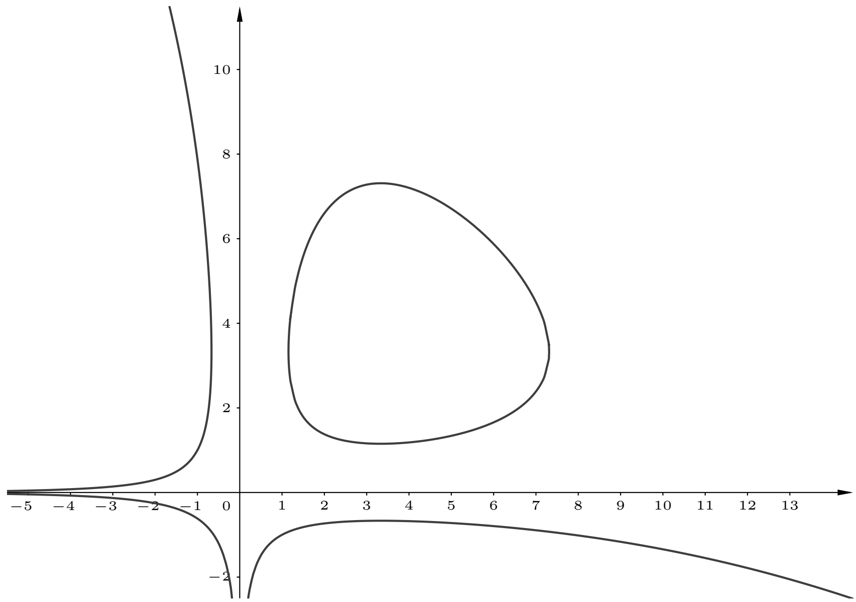

FIGURE 1.6. Krivulja $e^{0,6\,x+0,6\,y}x^{-2}y^{-2} = 1$; le del v prvem kvadrantu je relevanten za problem o plenilcih in plenu.

(i) Rešite enačbo (1.6.8). (Rezultat: $x^c y^a e^{-(dx+by)} = C$, kjer je C konstanta.)

(ii) Skicirajte graf ploskve $z = x^c y^a e^{-(dx+by)}$ in sklepajte iz dejstva, da so rešitve v (i) nivojnice te ploskve, da morajo biti rešitve sklenjene krivulje.

(iii) Pokažite, da je $(x_0, y_0) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ ravnovesna (oziroma stacionarna) točka sistema (1.6.7), tj., da je (x_0, y_0) konstantna rešitev sistema (1.6.7). Nato z vpeljavo novih spremenljivk $\xi = x - x_0$ in $\eta = y - y_0$ preoblikujte sistem v

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{bc}{d}\eta - b\xi\eta, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \frac{ad}{b}\xi + d\xi\eta.$$

Za majhne odmike ξ in η od ravnovesne lege je ta sistem približno linearen:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{bc}{d}\eta, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \frac{ad}{b}\xi. \tag{1.6.9}$$

Rešite sistem (1.6.9) in izračunajte njegove tirnice.

1.7. Obstoj in enoličnost rešitev

Čeprav splošne diferencialne enačbe prvega reda

$$y' = f(x, y),$$

kjer je f zvezna funkcija na območju $U \subseteq \mathbb{R}^2$, ne moremo rešiti z elementarnimi funkcijami, lahko domnevamo, da rešitev obstaja. V vsaki točki $(x, y) \in U$ si namreč lahko zamislimo zelo kratko daljico s smernim koeficientom $f(x, y)$; tako dobimo *polje smeri*, ki ga določa f. Iz poljubne začetne točke $(x_0, y_0) \in U$ lahko po taki daljici pridemo do točke $(x_1, y_1) := (x_0 + h, y_0 + f(x_0, y_0)h)$, ki je tudi v U, če je h dovolj majhen. Na enak način imamo daljico med točkama (x_1, y_1) in $(x_2, y_2) := (x_1 + h, y_1 + f(x_1, y_1)h)$. Ko tako nadaljujemo, dobimo poligonsko črto. Ko zmanjšujemo h proti 0, bi morda lahko domnevali, da bodo take polinomske črte konvergirale proti odvedljivi funkciji $y = y(x)$, ki zadošča enačbi $y' = f(x, y)$ in začetnemu pogoju $y(x_0) = y_0$. Pravzaprav lahko iz fizikalnega razloga pričakujemo, da bo imel rešitev vsak sistem enačb $\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y})$, kjer je $\vec{f}$ zvezna funkcija z vrednostmi v $\mathbb{R}^n$, definirana na kakem območju v $\mathbb{R}^{n+1}$. Če si namreč zamislimo, da spremenljivka x pomeni čas, $\vec{f}(x, \vec{y})$ pa vektor hitrosti tekočine v točki $\vec{y}$ v času x, potem enačba $\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = \vec{f}(x, \vec{y}(x))$ pri začetnem pogoju $\vec{y}(x_0)$ določa pot delca tekočine, ki je v začetnem trenutku x_0 v točki $\vec{y}_0$. (Matematični dokaz obstoja rešitev pri tako splošni predpostavki je v rešitvi naloge 9.) Vektorsko funkcijo $\vec{f}$ bomo imenovali tudi *vektorsko polje*, rešitve diferencialne enačbe $\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y}(x))$ pa njegove *tokovnice*.

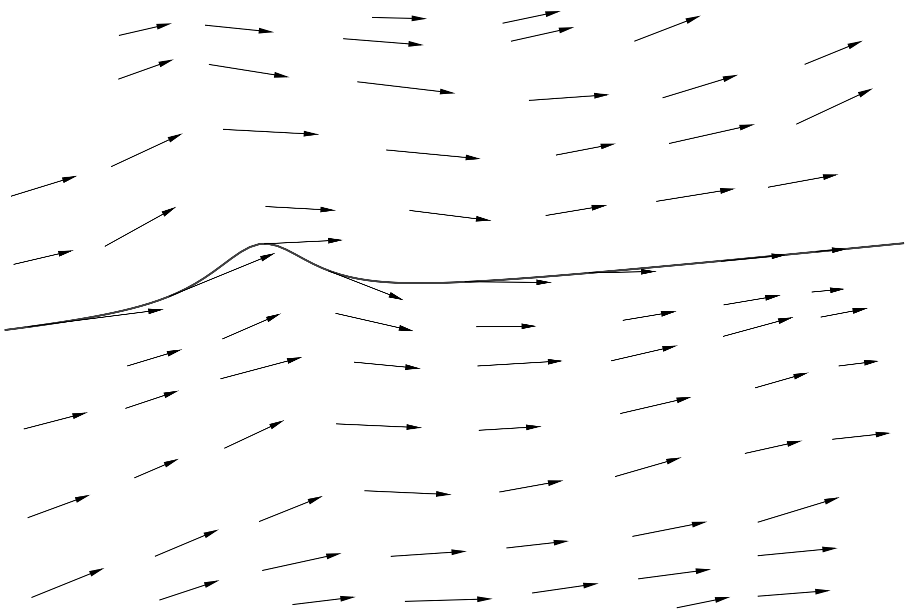

FIGURE 1.7. Vektorsko polje in tokovnica.

Vendar pa niti v primeru, ko je $U = \mathbb{R}^2$, ne moremo pričakovati, da bo rešitev $y = y(x)$ definirana na celi realni osi.

Zgled 1.7.1. Enačba
$$y' = y^2 + a^2,$$
kjer je $a > 0$ konstanta, ima ločljivi spremenljivki in njene rešitve so
$$y = a\,\mathrm{tg}(ax + c), \tag{1.7.1}$$
kjer c konstanta. Čeprav je funkcija $f(x, y) = y^2 + a^2$ definirana povsod na $\mathbb{R}^2$, rešitve (1.7.1) niso definirane povsod; definirane so na intervalih dolžine $\frac{\pi}{a}$, ki so zelo majhni, če je a zelo velik.

Kot kaže zgled 1.1.5(ii), zveznost funkcije f še ne zagotavlja enoličnosti rešitve enačbe $y' = f(x, y)$ pri danem začetnem pogoju $y(x_0) = y_0$. Enoličnost bomo lahko dokazali pri pogoju, ki je nekoliko šibkejši od zvezne odvedljivosti funkcije f na spremenljivko y. Ker deluje metoda, ki jo bomo uporabili, na enak način tudi za sisteme diferencialnih enačb, bomo nadaljevali obravnavo kar s sistemi diferencialnih enačb
$$\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y}), \tag{1.7.2}$$
kjer je $\vec{f} : I \times D \to \mathbb{R}^n$ zvezna funkcija, $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ pa odprta podmnožica. Pri tem je $\vec{y}$ neznana funkcija z vrednostmi v D, definirana na kakem podintervalu J intervala I, na katerem reši enačbo (1.7.2), torej $\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = \vec{f}(x, \vec{y}(x))$ za $x \in J$. Preden nadaljujemo z obravnavo diferencialnih enačb, opozorimo na nekaj splošnih pomožnih dejstev.

Opomba 1.7.2. (i) Integral vektorske funkcije $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, kjer so $g_j : (a, b) \to \mathbb{R}$ skalarne funkcije, je definiran kot
$$\int_a^b \vec{g}(t)\,dt = \left(\int_a^b g_1(t)\,dt, \ldots, \int_a^b g_n(t)\,dt\right).$$
Lahko pa bi ga definirali tudi kot limito Riemannovih vsot, podobno kot za skalarne funkcije, od koder bi takoj sledila neenakost
$$\left\|\int_a^b \vec{g}(t)\,dt\right\| \le \int_a^b \|\vec{g}(t)\|\,dt \qquad (a \le b).$$

(ii) Normo $m \times n$ (realne) matrike $A = [a_{i,j}]$ lahko definiramo kot
$$\|A\| = \sup_{\|\vec{x}\| \le 1} \|A\vec{x}\|,$$
kjer teče supremum po vseh stolpcih $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ z normo pod 1. Lahko je videti, da je ta supremum končen (je pod $\sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}$), da res definira normo in da je
$$\|A\vec{x}\| \le \|A\|\|\vec{x}\|$$
za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ [26, razdelek 4.5].

Definicija 1.7.3. Funkcija $\vec{f} : I \times D \to \mathbb{R}^n$ zadošča *Lipschitzovemu pogoju v spremenljivki* $\vec{y}$, če obstaja taka konstanta L, da velja

$$\|\vec{f}(x, \vec{y}_2) - \vec{f}(x, \vec{y}_1)\| \leq L\|\vec{y}_2 - \vec{y}_1\| \tag{1.7.3}$$

za poljubna $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in D$ in vsak $x \in I$.

Trditev 1.7.4. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica, I odprt interval in $\vec{f} : I \times D \to \mathbb{R}^n$ zvezna funkcija z zveznimi odvodi $\frac{\partial \vec{f}}{\partial y_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Potem za vsak zaprt omejen interval $J \subset I$ in vsako kompaktno podmnožico $K \subset D$ zožitev funkcije $\vec{f}$ na $J \times K$ zadošča Lipschitzovemu pogoju.*

Proof. V primeru, ko je K krogla, lahko katerikoli točki $\vec{y}_1$ in $\vec{y}_2$ iz K povežemo z daljico v K in za vsak $x \in I$ izrazimo

$$\begin{aligned}
\vec{f}(x, \vec{y}_2) - \vec{f}(x, \vec{y}_1) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\vec{f}(x, \vec{y}_1 + t(\vec{y}_2 - \vec{y}_1))\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}(x, \vec{y}_1 + t(\vec{y}_2 - \vec{y}_1)) \cdot (\vec{y}_2 - \vec{y}_1)\, dt,
\end{aligned}$$

kjer smo v zadnji enakosti uporabili posredno odvajanje in označili z $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}$ Jacobijevo matriko preslikave $\vec{f}$ v spremenljivki $\vec{y}$, to je matriko $[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}]$, pri čemer so $f_i : I \times D \to \mathbb{R}$ komponente preslikave $\vec{f}$. Ker so po predpostavki odvodi $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ zvezni, je zvezna funkcija $(x, \vec{y}) \mapsto \|\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}\|$ na kompaktni množici $J \times K$ omejena, recimo s konstanto M, in sledi, da je

$$\|\vec{f}(x, \vec{y}_2) - \vec{f}(x, \vec{y}_1)\| \leq \int_0^1 \left\|\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}(x, \vec{y}_1 + t(\vec{y}_2 - \vec{y}_1))\right\| \|\vec{y}_2 - \vec{y}_1\|\, dt \leq M\|\vec{y}_2 - \vec{y}_1\|.$$

Na splošno, ko K ni krogla, pa lahko K pokrijemo s končno mnogo zaprtimi kroglami K_k $(k = 1, \ldots, m)$, na katerih lahko uporabimo sklep iz prejšnjega odstavka. Za vsako od krogel dobimo tako konstanto M_k in za $M := \max_{1 \leq k \leq m} M_k$ potem velja ocena

$$\|\vec{f}(x, \vec{y}_2) - \vec{f}(x, \vec{y}_1)\| \leq M\|\vec{y}_2 - \vec{y}_1\|, \tag{1.7.4}$$

če sta $\vec{y}_1$ in $\vec{y}_2$ v isti krogli K_k. Če pa $\vec{y}_1$ in $\vec{y}_2$ nista v isti krogli K_k, potem je njuna razdalja $\|\vec{y}_2 - \vec{y}_1\|$ večja od minimuma r polmerov krogel K_k, zato

$$\frac{\|\vec{f}(x, \vec{y}_2) - \vec{f}(x, \vec{y}_1)\|}{\|\vec{y}_2 - \vec{y}_1\|} \leq \frac{2N}{r},$$

kjer je $N = \max_{(x, \vec{y}) \in J \times K} \|\vec{f}(x, \vec{y})\|$. Če torej v neenakosti (1.7.4) nadomestimo konstanto M z $\max\{M, \frac{2N}{r}\}$, bo veljala za vse $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in K$ in $x \in J$. □

Naša osnovna naloga v tem razdelku je dokazati naslednji izrek:

Izrek 1.7.5. *(Picardov izrek o eksistenci in enoličnosti) Naj bo I (odprt) interval, D odprta množica v $\mathbb{R}^n$, $\vec{f} : I \times D \to \mathbb{R}^n$ pa zvezna funkcija, ki zadošča Lipschitzovemu pogoju v spremenljivki $\vec{y} \in D$. Potem za vsako točko $(x_0, \vec{y}_0) \in I \times D$ obstaja tak $h > 0$, da na intervalu $J := (x_0 - h, x_0 + h) \subset I$ obstaja natanko ena rešitev enačbe*

$$\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y}), \quad \textit{ki zadošča pogoju } vy(x_0) = \vec{y}_0. \tag{1.7.5}$$

Če je pri tem $D = \mathbb{R}^n$ (torej, če $\vec{f}$ zadošča Lipschitzovemu pogoju v spremenljivki $\vec{y}$ na celotnem prostoru $\mathbb{R}^n$), potem rešitev $\vec{y}$ obstaja na celotnem intervalu I.

Preden se lotimo bistva dokaza izreka 1.7.5, preformulirajmo problem v integralsko obliko.

Lema 1.7.6. *Funkcija $\vec{y}$ zadošča pogoju* (1.7.5) *natanko tedaj, ko je*

$$\vec{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(t, \vec{y}(t))\, dt \tag{1.7.6}$$

za $x \in J$.

Proof. Iz (1.7.5) sledi z integriranjem

$$\vec{y}(x) - \vec{y}_0 = \vec{y}(x) - \vec{y}(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt}\vec{y}(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} \vec{f}(t, \vec{y}(t))\, dt.$$

Še obratno, iz (1.7.6) je očitno, da je $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$, z odvajanjem na x pa dobimo še, da je $\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = \vec{f}(x, \vec{y}(x))$. □

Rešitev enačbe (1.7.6) nameravamo poiskati kot negibno točko operatorja, ki funkciji $\vec{y}$ priredi funkcijo $x \mapsto \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(t, \vec{y}(t))\, dt$. Za ta namen pa moramo najprej definirati metrični prostor funkcij, na katerem bo ta operator deloval. Množica $X := C(S, \mathbb{R}^n)$ vseh zveznih funkcij $y : S \to \mathbb{R}^n$ iz kompaktnega (metričnega) prostora S (ki bo v nadaljnjem kak zaprt interval) v $\mathbb{R}^n$ je vektorski prostor za običajni operaciji. Lahko ga opremimo z normo

$$\|\vec{y}\|_\infty := \sup_{x \in S} \|\vec{y}(x)\|.$$

(Definicijo norme, normiranih prostorov in povezave z metričnimi prostori lahko najdete npr. v [26].)

Trditev 1.7.7. *V tej normi je X poln prostor, kar pomeni, da je vsako Cauchyevo zaporedje $(\vec{y}_n)$ v X konvergentno.*

Proof. Za vsak $x \in S$ je $(\vec{y}_n(x))$ Cauchyevo zaporedje v $\mathbb{R}^n$, torej konvergentno. Označimo $\vec{y}(x) = \lim \vec{y}_n(x)$. Trdimo, da je $\vec{y}$ zvezna funkcija iz S v $\mathbb{R}^n$ in $\lim \|\vec{y} - \vec{y}_n\|_\infty = 0$. Da bi to dokazali, naj bo $\varepsilon > 0$ in $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, da je

$$\|\vec{y}_n - \vec{y}_m\|_\infty < \varepsilon \quad \text{za vse } m, n \geq n_0.$$

Potem je $\|\vec{y}_n(x) - \vec{y}_m(x)\| < \varepsilon$ za vse $x \in S$, če je $m, n \geq n_0$. Ko pošljemo v tej neenakosti m proti ∞, sledi, da je

$$\|\vec{y}_n(x) - \vec{y}(x)\| \leq \varepsilon \quad \text{za vse } x \in S \text{ in } n \geq n_0.$$

To pomeni, da zaporedje funkcij $\vec{y}_n$ konvergira proti $\vec{y}$ enakomerno, tj.

$$\lim \|\vec{y}_n - \vec{y}\|_\infty = 0,$$

zato mora biti $\vec{y}$ zvezna funkcija (po znanem argumentu iz osnov analize). □

TRDITEV 1.7.8. *Za vsako zaprto podmnožico $F \subseteq \mathbb{R}^n$ in vsak kompakten (metrični) prostor S je množica $Y := C(S, F)$ vseh zveznih funkcij iz S v F zaprta v prostoru $X = C(S, \mathbb{R}^n)$, torej je Y poln metrični prostor za razdaljo*

$$d(\vec{y}_2, \vec{y}_1) := \|\vec{y}_2 - \vec{y}_1\|_\infty.$$

PROOF. Ker je znano, da je zaprta podmnožica polnega metričnega prostora poln metrični prostor [26, trditev 5.2.4], moramo dokazati le, da je Y zaprta podmnožica v X. Za ta namen naj bo $(\vec{y}_n)$ poljubno zaporedje v Y, ki naj konvergira proti funkciji $\vec{y} \in X$. Pokazati moramo, da je $\vec{y} \in Y$. Ker je F zaprta množica in imajo vse funkcije $\vec{y}_n$ vrednosti v F, je za vsak $x \in S$ tudi $\vec{y}(x) = \lim \vec{y}_n(x)$ v F. To pa pomeni, da je $\vec{y} \in Y$. □

DOKAZ IZREKA 1.7.5. Naj bo $I_0 \subseteq I$ kompakten interval, ki ima x_0 v svoji notranjosti, $K \subset D$ pa kompaktna množica, ki ima $\vec{y}_0$ v svoji notranjosti. Naj bo $M = \max_{(x,\vec{y}) \in I_0 \times K} \|\vec{f}(x, y)\|$, L pa taka konstanta, da velja (1.7.3) na $I_0 \times K$. Izberimo tako majhen $h > 0$, da je $Lh < 1$, interval $[x_0 - h, x_0 + h]$ vsebovan v I_0, zaprta krogla $\bar{K}(\vec{y}_0, Mh)$ s središčem $\vec{y}_0$ in polmerom Mh pa vsebovana v K (če je slučajno $M = 0$, je treba M zamenjati npr. z 1). Označimo

$$Y = C([x_0 - h, x_0 + h], \bar{K}(\vec{y}_0, Mh)),$$

kar je poln metrični prostor po prejšnji trditvi. Preslikava T, definirana s predpisom

$$(T\vec{y})(x) := \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(t, \vec{y}(t))\, dt,$$

slika Y v Y, saj za vsako funkcijo $\vec{y} \in Y$ in vsak $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ velja

$$\|(T\vec{y})(x) - \vec{y}_0\| = \left\| \int_{x_0}^{x} \vec{f}(t, \vec{y}(t))\, dt \right\| \leq \left| \int_{x_0}^{x} \|\vec{f}(t, \vec{y}(t))\|\, dt \right| \leq M|x - x_0| \leq Mh.$$

Pri tem smo upoštevali, da je $\vec{y}(t) \in \bar{K}(\vec{y}_0, Mh)$ (ker je $\vec{y} \in Y$) in zato $\|\vec{f}(t, \vec{y}(t))\| \leq M$, saj je $\bar{K}(\vec{y}_0, Mh) \subseteq K$. Operator T na prostoru Y je skrčitev, saj za poljubni funkciji $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in Y$ in vsak $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ velja

$$\begin{aligned}
\|(T\vec{y}_2)(x) - (T\vec{y}_1)(x)\| &\leq \left| \int_{x_0}^{x} \|\vec{f}(x, \vec{y}_2(t)) - \vec{f}(t, \vec{y}_1(t))\| \, dt \right| \\
&\leq L \left| \int_{x_0}^{x} \|\vec{y}_2(t) - \vec{y}_1(t)\| \, dt \right| \\
&\leq L \|\vec{y}_2 - \vec{y}_1\|_\infty |x - x_0| \\
&\leq (Lh) \|\vec{y}_2 - \vec{y}_1\|_\infty,
\end{aligned}$$

torej

$$\|T\vec{y}_2 - T\vec{y}_1\|_\infty \leq (Lh)\|\vec{y}_2 - \vec{y}_1\|_\infty,$$

pri čemer je $Lh < 1$ po izbiri konstante h. Po Banachovem izreku o skrčitvah [26, 5.4.15] obstaja v Y natanko ena negibna točka $\vec{y}$ operatorja T, torej $T\vec{y} = \vec{y}$. Ker je tedaj $(T\vec{y})(x) = \vec{y}(x)$ za vse $x \in (x_0 - h, x_0 + h) =: J$, zadošča $\vec{y}$ pogoju (1.7.6) in s tem tudi (1.7.5). To je edina rešitev problema (1.7.5) na intervalu J, saj za vsako funkcijo $\vec{y}$, za katero velja (1.7.5), velja tudi (1.7.6), zato tudi $\|\vec{y}(x) - \vec{y}_0\| \leq M|x - x_0| \leq Mh$ za vse $x \in J$ in je torej $\vec{y} \in Y$.

V primeru, ko $\vec{f}$ zadošča Lipschitzovemu pogoju (1.7.3) na $I \times \mathbb{R}^n$, lahko v gornjem sklepanju uporabimo spremenjeno definicijo prostora Y, namreč

$$Y := C([x_0 - h, x_0 + h], \mathbb{R}^n).$$

Na ta način dobimo enolično rešitev $\vec{y}$ problema (1.7.5) na intervalu $[x_0 - h, x_0 + h]$, ki jo bomo sedaj označili z $\vec{y}_1$. Toda na isti način lahko najdemo tudi rešitev iste diferencialne enačbe (1.7.5) pri novem začetnem pogoju $\vec{y}(x_0 + h) = \vec{y}_1(x_0 + h)$, ki je definirana na intervalu polmera h okrog $x_0 + h$, če je ta interval vsebovan v I. (Sedaj, ko ni treba paziti, kje so vrednosti funkcij, je namreč edini drug pogoj za širino h intervala, da je $hL < 1$). Rešitvi na obeh delnih intervalih sestavljata tako rešitev problema (1.7.5) na intervalu $[x_0 - h, x_0 + 2h]$. Če tako nadaljujemo, lahko konstruiramo rešitev, ki bo definirana na celotnem intervalu I. □

Kot poseben primer zadnjega dela izreka 1.7.5 navedimo naslednjo posledico.

POSLEDICA 1.7.9. *Če je $A : I \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ zvezna funkcija iz intervala I v prostor vseh $n \times n$ matrik, $\vec{g} : I \to \mathbb{R}^n$ pa zvezna vektorska funkcija, potem ima za vsaka $x_0 \in I$ in $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ linearni sistem*

$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{g}(x) \quad \textit{pri pogoju } \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \tag{1.7.7}$$

enolično rešitev in le ta obstaja na celotnem intervalu I.

PROOF. Prepričajmo se, da funkcija $\vec{f}(x, \vec{y}) := A(x)\vec{y} + \vec{g}(x)$ izpolnjuje Lipschtzov pogoj (1.7.3) na vsakem kompaktnem podintervalu J v I. Za vsak $x \in J$ in poljubna $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathbb{R}^n$ res velja

$$\|\vec{f}(x, \vec{y}_2) - \vec{f}(x, \vec{y}_1)\| = \|A(x)(\vec{y}_2 - \vec{y}_1)\| \leq \|A(x)\| \|\vec{y}_2 - \vec{y}_1\| \leq L\|\vec{y}_2 - \vec{y}_1\|,$$

kjer je $L := \max_{x \in J} \|A(x)\|$. Po izreku 1.7.5 obstaja zato enolična rešitev problema (1.7.7) na intervalu J. Ker velja to za vsak kompakten podinterval J v I, obstaja rešitev na celem intervalu I in je ena sama. □

Diferencialne enačbe višjih redov (in tudi sisteme takih enačb) lahko prevedemo na sisteme enačb prvega reda. Enačba

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1.7.8}$$

pri začetnih pogojih

$$y(x_0) = v_0, \quad y'(x_0) = v_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)} = v_{n-1},$$

kjer so x_0 in $v_0, \ldots, v_{n-1}$ dane konstante, je očitno ekvivalentna sistemu enačb prvega reda

$$y' = y_1, \quad y_1' = y_2, \quad \ldots, \quad y_{n-2}' = y_{n-1}, \quad y_{n-1}' = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}), \tag{1.7.9}$$

z neznankami $y, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{n-1}$, pri začetnih pogojih

$$y(x_0) = v_0, \quad y_1(x_0) = v_1, \quad \ldots, \quad y_{n-2}(x_0) = v_{n-2}, \quad y_{n-1}(x_0) = v_{n-1}.$$

Zato ne bomo navajali eksistenčnih izrekov za enačbe višjih redov. Omenimo le, da je za linearno enačbo (1.7.8) (se pravi, kadar y in vsi odvodi $y^{(k)}$ nastopajo v funkciji f linearno), tudi sistem (1.7.9) linearen, zato lahko izpeljemo izrek 1.2.1 takoj iz posledice 1.7.9.

Izrek 1.7.5 je *lokalen* eksistenčni izrek, ker zagotavlja obstoj rešitve le na kakem dovolj majhnem intervalu okrog začetne točke $x = x_0$. Iz njega pa lahko izpeljemo, da obstaja rešitev na maksimalnem možnem intervalu.

Izrek 1.7.10. *Naj bo U odprta povezana podmnožica v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^n$ pa zvezna funkcija, ki lokalno zadošča Lipschitzovemu pogoju v spremenljivki $\vec{y}$ (kar pomeni, da ima vsaka točka $(x, \vec{y}) \in U$ kako okolico, na kateri $\vec{f}$ zadošča Lipshitzovemu pogoju v spremenljivki $\vec{y}$). Potem za vsako točko $(x_0, \vec{u}_0) \in U$ obstaja maksimalen odprt interval $I_{\max}$, ki vsebuje x_0, na katerem obstaja rešitev enačbe $\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y})$ pri začetnem pogoju $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$. Ta rešitev je ena sama.*

Proof. Pokazali bomo naslednjo pomožno trditev:

Če sta $\vec{y}_I$ in $\vec{y}_J$ rešitvi enačbe pri istem začetnem pogoju, definirani na intervalih I in J (zaporedoma), ki vsebujeta x_0, potem se na preseku $I \cap J$ rešitvi ujemata.

Privzemimo za hip to pomožno trditev in označimo z $I_{\max}$ unijo vseh odprtih intervalov I, ki vsebujejo x_0, in na katerih obstaja rešitev y_I enačbe in začetnega pogoja $y_I(x_0) = y_0$. Na $I_{\max}$ lahko definiramo funkcijo y s predpisom $y(x) = y_I(x)$, če je $x \in I$. Ta definicija je nedvoumna, saj je po pomožni trditvi $y_I(x) = y_J(x)$, če je x v preseku $I \cap J$ dveh takih intervalov. Očitno je tako definirana funkcija y rešitev enačbe in začetnega pogoja, $I_{\max}$ pa maksimalni interval, na katerem rešitev obstaja. Po pomožni trditvi se morata katerikoli dve taki rešitvi ujemati na $I_{\max} \cap I_{\max} = I_{\max}$.

Za dokaz pomožne trditve naj bo

$$S = \{x \in I \cap J : y(t) = z(t) \ \forall t \in [x_0, x]\} \quad \text{in} \quad a = \inf S, \quad b = \sup S.$$

Pokazati moramo, da sta a in b krajišči intervala $I \cap J$ (ali pa $\pm\infty$, če je $I \cap J$ neskončen interval). To bomo dokazali le za b, saj je dokaz za a podoben. Privzemimo nasprotno, da bi bila točka b notranja v $I \cap J$. Potem po izreku 1.7.5 na dovolj majhnem odprtem intervalu $K \subseteq I \cap J$ okrog b obstaja natanko ena rešitev $\vec{y}$ enačbe $\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y})$ pri začetnem pogoju $\vec{y}(b) = \vec{y}_I(b) = \vec{y}_J(b)$. Toda potem se zaradi enoličnosti rešitvi $\vec{y}_I$ in $\vec{y}_J$ ujemata na $[x_0, b] \cup K$, torej je desno krajišče (imenujmo ga b_1) intervala K v S, kar pa nasprotuje definiciji števila b (saj je $b_1 > b$). □

Naloge

1. Ugotovite, za katere $p \in \mathbb{R}$ zadošča funkcija $f(x, y) = |y|^p$ Lipschitzovemu pogoju na naslednjih območjih:

(i) na $\mathbb{R}^2$;

(ii) na polravnini $y > 0$;

(iii) na pasu $a < y < b$, kjer sta a in b pozitivni konstanti.

2. Pokažite, da funkcija $f(x, y) = x|y|$ zadošča Lipschitzovemu pogoju na vsaki omejeni množici v $\mathbb{R}^2$. V katerih točkah ne obstaja $\frac{\partial f}{\partial y}$?

3. Za katere $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ je problem

$$\frac{dy}{dx} = 3|y|y, \quad y(x_0) = y_0$$

rešljiv enolično?

4. Po dokazu Banachovega izreka o skrčitvah [26, 5.4.15] lahko najdemo negibno točko operatorja

$$T\vec{y} := \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(t, \vec{y}) \, dt,$$

ki nastopa v dokazu Picardovega izreka 1.7.5, kot limito zaporedja *Picardovih približkov*, definiranih induktivno z

$$\vec{y}_{n+1}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(t, \vec{y}_n(t)) \, dt.$$

Poiščite nekaj teh približkov za operatorja T, ki pripadata naslednjima problemoma, in jih primerjajte z natančnima rešitvama:

(i) $y' = y$, $y(0) = 1$;

(ii) $y' = y^2$, $y(0) = 1$.

5. Naj bo $A : I \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ zvezna matrična funkcija na intervalu I in $x_0 \in I$. Po posledici 1.7.9 ima za vsak $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ enačba

$$\frac{d}{dx}\vec{y} = A(x)\vec{y} \tag{1.7.10}$$

pri pogoju $\vec{y}(x_0) = \vec{u}$ natanko eno rešitev. Sklepajte od tod (ko vzamete za $\vec{u}$ zaporedoma bazne vektorje $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ v $\mathbb{R}^n$), da je množica vseh rešitev enačbe (1.7.10) n-razsežen vektorski podprostor v prostoru $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ vseh zvezno odvedljivih funkcij iz I v $\mathbb{R}^n$.

6. *Determinanta Wronskega* funkcij $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n : I \to \mathbb{R}^n$ je funkcija W, katere vrednost v točki $x \in I$ je determinanta matrike, ki ima za stolpce vektorje $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$, torej

$$W(x) = \det[\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)].$$

(i) Dokažite (izhajajoč iz definicije determinante) naslednjo formulo za odvod determinante matrične funkcije $[f_{i,j}]$:

$$\frac{d}{dx}\det\begin{bmatrix} f_{1,1}(x) & \ldots & f_{1,n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{i,1}(x) & \ldots & f_{i,n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n,1}(x) & \ldots & f_{n,n}(x) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \det\begin{bmatrix} f_{1,1}(x) & \ldots & f_{1,n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d}{dx}f_{i,1}(x) & \ldots & \frac{d}{dx}f_{i,n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{1,n}(x) & \ldots & f_{n,n}(x) \end{bmatrix}.$$

(ii) Naj bodo $\vec{y}_1, \ldots \vec{y}_n$ rešitve sistema (1.7.10), torej $\frac{d}{dx}\vec{y}_j = A(x)\vec{y}_j$ oziroma po komponentah

$$\frac{d}{dx}y_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(x)y_{k,j}.$$

Izpeljite od tod, s pomočjo točke (i), da za determinanto Wronskega W teh funkcij $\vec{y}_j$ velja

$$\frac{d}{dx}W(x) = (\mathrm{sl}\,A(x))W(x),$$

kjer je $\mathrm{sl}\,A(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}(x)$, sled matrike $A(x)$.

(iii) Izpeljite iz (ii) *Liouvillovo formulo* $W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{sl}\,A(t)\,dt}$ in sklepajte, da je na intervalu funkcija W bodisi brez ničel bodisi identično enaka 0.

* **7.** Naj bo U odprta povezana podmnožica v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^n$ zvezna funkcija, ki naj zadošča Lipschitzovemu pogoju, $(x_0, \vec{y}_0) \in U$ in I maksimalni odprt definicijski interval rešitve $\vec{y}$ enačbe $\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y})$ pri pogoju $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$. Dokažite, da množica $S := \{(x, \vec{y}(x)) : x \in I\}$ ni vsebovana v nobeni kompaktni podmnožici v U. (Rešitev: Privzemimo nasprotno, da je $S \subseteq K$ za kako kompaktno podmnožico $K \subset U$. Potem mora biti interval I končen, recimo

$I = (a, b)$, in obstaja tako zaporedje $(x_n) \subset I$, ki konvergira proti b, da zaporedje $(x_n, \vec{y}(x_n))$ konvergira proti kaki točki $(b, \vec{c}) \in K$ (utemeljite to). Naj bosta δ_1 in r tako majhna pozitivna, da je $(b - \delta_1, b + \delta_1) \times \bar{K}(\vec{c}, r) \subset U$. Iz dokaza izreka 1.7.5 opazite, da obstaja tak $\delta > 0$, da so vse rešitve enačbe pri začetnih pogojih $\vec{y}(t) = \vec{u}$ za $t \in (b - \delta_1, b + \delta_1)$, $\vec{u} \in K(\vec{c}, r)$ definirane vsaj na intervalu $(t - \delta, t + \delta)$. Nato izberite n tako velik, da je $x_n \in (b - \delta, b + \delta)$ in $\vec{y}(x_n) \in K(\vec{c}, r)$. Rešitev enačbe $\vec{z}$ pri začetnem pogoju $\vec{z}(x_n) = \vec{y}(x_n)$ je potem nadaljevanje rešitve $\vec{y}$ na odprt interval, ki vsebuje b, kar pa nasprotuje maksimalnosti intervala I.

Nekoliko drugačen način je naslednji. Naj bo $M = \max_{(x,\vec{u}) \in K} \|f(x, \vec{u})\|$. Za vsaka $s, t \in I$ iz

$$\vec{y}(t) - \vec{y}(s) = \int_s^t \frac{d}{dx}\vec{y}(x)\, dx = \int_s^t \vec{f}(x, \vec{y}(x))\, dx \tag{1.7.11}$$

sledi ocena

$$\|\vec{y}(t) - \vec{y}(s)\| \leq \left| \int_s^t \|\vec{f}(x, \vec{y}(x))\|\, dx \right| \leq M|t - s|.$$

Sklepajte od tod, da obstaja limita

$$\vec{c} := \lim_{x \to b,\ x \in I} \vec{y}(x) \in K.$$

Definirajte $\vec{y}(b) = \vec{c}$ in pokažite s pomočjo zveze (1.7.11), da je potem funkcija $\vec{y}$ odvedljiva z leve v točki b in da je odvod z leve v točki b enak $\vec{f}(b, \vec{y}(b))$. Nato uporabite lokalni eksistenčni izrek v točki $(b, \vec{y}(b))$, da najdete rešitev enačbe pri istem začetnem pogoju, ki je definirana na intervalu, ki vsebuje I kot pravo podmnožico. To pa nasprotuje maksimalnosti intervala I.)

***8.** Naj bo S kompakten metrični prostor (npr. zaprt interval), d pa metrika na njem (npr. $d(x, t) = |x - t|$, če je S interval). Družino $\mathcal{F}$ funkcij $\vec{f} : S \to \mathbb{R}^n$ imenujemo *enakozvezna*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za poljubna $x, t \in S$, ki zadoščata pogoju $d(x, t) < \delta$, velja $\|\vec{f}(x) - \vec{f}(t)\| < \varepsilon$ za vse $\vec{f} \in \mathcal{F}$. Družino $\mathcal{F}$ imenujemo *po točkah omejena*, če je za vsak $x \in S$ množica $\{\vec{f}(x) : \vec{f} \in \mathcal{F}\}$ omejena v $\mathbb{R}^n$. Dokažite naslednji izrek (*Arzela-Ascoli*):

Vsako po točkah omejeno enakozvezno zaporedje funkcij $\vec{f}_k$ $(k \in \mathbb{N})$ iz kompaktnega metričnega prostora S v $\mathbb{R}^n$ ima kako enakomerno konvergentno podzaporedje.

(Rešitev: Naj bo $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ kaka števna povsod gosta množica v S. Ker je zaporedje $(\vec{f}_k(x_0))$ omejeno v $\mathbb{R}^n$, ima konvergentno podzaporedje; imenujmo ga $(\vec{f}_{k,0}(x_0))$. Ker je tudi zaporedje $(\vec{f}_{k,0}(x_1))$ omejeno, ima konvergentno podzaporedje; imenujmo ga $(\vec{f}_{k,1}(x_1))$. Ko tako nadaljujemo, dobimo za vsak $m \in \mathbb{N}$ tako zaporedje $(\vec{f}_{k,m})$, da so konvergentna vsa zaporedja $(\vec{f}_{k,m}(x_j))$ za $j \leq m$; nadalje je $(\vec{f}_{k,m+1})$ podzaporedje zaporedja $(\vec{f}_{k,m})$. Opazimo, da je zaporedje $(\vec{f}_{k,k})$ podzaporedje vseh zaporedij $(\vec{f}_{k,m})$, zato je za vsak j zaporedje $(\vec{f}_{k,k}(x_j))$ konvergentno v $\mathbb{R}^n$. Sedaj pri danem $\varepsilon > 0$ izberimo $\delta > 0$ tako, da je $\|\vec{f}_k(x) - \vec{f}_k(t)\| < \varepsilon/3$ za vse k, če je le $d(x,t) < \delta$ (to je mogoče, ker je prvotno zaporedje enakozvezno). Za poljuben $x \in S$ izberimo x_j tako, da je $d(x,x_j) < \delta$ (to je mogoče, ker je množica $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ gosta v S) in ocenimo, da je za vsaka dovolj velika k, m

$$\begin{aligned}
&\|\vec{f}_{k,k}(x) - \vec{f}_{m,m}(x)\| \leq \\
&\qquad \leq \|\vec{f}_{k,k}(x) - \vec{f}_{k,k}(x_j)\| + \|\vec{f}_{k,k}(x_j) - \vec{f}_{m,m}(x_j)\| + \|\vec{f}_{m,m}(x) - \vec{f}_{m,m}(x)\| \\
&\qquad \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Torej je zaporedje $(\vec{f}_{k,k})$ enakomerno Cauchyevo in zato enakomerno konvergentno.)

***9.** (*Peanov eksistenčni izrek*) Naj bo $\vec{f} : [x_0 - a, x_0 + a] \times \bar{K}(\vec{y}_0, r)$ $(a > 0,\ r > 0)$ zvezna funkcija (ki ne nujno zadošča Lipschitzovemu pogoju). Označimo $M = \max\{\|\vec{f}(x,\vec{y})\| : x \in [x_0 - a, x_0 + a],\ \vec{y} \in \bar{K}(\vec{y}_0, r)\}$ in $b := \min\{a, \frac{r}{M}\}$. Končni cilj v tej nalogi je dokazati, da obstaja na intervalu $[x_0 - b, x_0 + b]$ vsaj ena rešitev $\vec{y} = \vec{y}(x)$ problema (1.7.5), se pravi (po lemi 1.7.6) problema

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(t, \vec{y}(t))\, dt.$$

Brez izgube splošnosti privzemimo, zaradi poenostavitve označevanja, da je $x_0 = 0$.

(i) Za vsak $k = 1, 2, \ldots$ definirajmo funkcijo $\vec{y}_k : [0,b] \to \mathbb{R}^n$ s predpisom

$$\vec{y}_k(x) = \begin{cases} \vec{y}_0, & x \in [0, \frac{b}{k}]; \\ \vec{y}_0 + \int_0^{x - \frac{b}{k}} \vec{f}(t, \vec{y}_k(t))\, dt, & \text{drugod.} \end{cases} \tag{1.7.12}$$

Premislite, da so s formulo (1.7.12) res enolično določene vrednosti funkcije, in sicer najprej na intervalu $[0, \frac{b}{k}]$, nato še na intervalu $[\frac{b}{k}, 2\frac{b}{k}]$, nato še na $[2\frac{b}{k}, 3\frac{b}{k}]$, $\ldots$, na koncu še na $[(k-1)\frac{b}{k}, b]$.

(ii) Sklepajte iz (1.7.12), da je

$$\|\vec{y}_k(x) - \vec{y}_0\| \leq \int_0^b M\, dt = Mb \leq r,$$

zato ima funkcija $\vec{y}_k$ vrednosti v $\bar{K}(\vec{y}_0, r)$ in je zaporedje funkcij $\vec{y}_k$ po točkah omejeno za $x \in [0,b]$.

(iii) Ocena

$$\|\vec{y}_k(x_2) - \vec{y}_k(x_1)\| \leq \int_{x_1 - \frac{b}{k}}^{x_2 - \frac{b}{k}} \|\vec{f}(t, \vec{y}_k(t))\|\, dt \leq M|x_2 - x_1|, \quad (x_1, x_2 \in [0,b])$$

pove, da je zaporedje funkcij $\vec{y}_k$ enakozvezno. Sklepajte od tod in iz naloge 8, da obstaja podzaporedje $(\vec{y}_{k_l})$ ki konvergira enakomerno proti neki funkciji $\vec{y}$.

(iv) Za fiksen $x \in (0, b]$ in vsak tak n_l, da je $\frac{1}{n_l} < x$ napišite formulo (1.7.12) kot

$$\vec{y}_{n_l}(x) = \vec{y}_0 + \int_0^x \vec{f}(t, \vec{y}_{n_l}(t))\, dt - \int_{x-\frac{b}{n_l}}^x \vec{f}(t, \vec{y}_{n_l}(t))\, dt$$

in sklepajte od tod (ter iz enakomerne zveznosti funkcije $\vec{f}$ na $[0, b] \times \bar{K}(\vec{y}_0, r)$), da $\vec{y}$ zadošča enačbi $\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int_0^x \vec{f}(t, \vec{y}(t))\, dt$. Ravnajte podobno še na intervalu $[-b, 0]$.

1.8. Odvedljivost rešitev na začetne pogoje in parametre†*

1.8.1. Lokalna odvisnost rešitev od začetnih pogojev in parametrov

Rešitev $\vec{y}$ problema (1.7.5) je funkcija spremenljivke x, odvisna pa je tudi od začetnega pogoja. V tem razdelku bomo začetni pogoj pisali kot

$$\vec{y}(x_0, \vec{u}) = \vec{u},$$

kjer bo $\vec{u}$ vektor iz $\mathbb{R}^n$. Rešitev $\vec{y}$ problema

$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x, \vec{u}) = \vec{f}(x, \vec{y}(x, \vec{u})), \qquad \vec{y}(x_0, \vec{u}) = \vec{u} \tag{1.8.1}$$

bomo obravnavali kot funkcijo spremenljivk x in $\vec{u}$, torej $\vec{y} = \vec{y}(x, \vec{u})$. Če bi poljubno majhne spremembe začetnega vektorja $\vec{u}$ lahko povzročile velike spremembe v rešitvi $\vec{y}(x, \vec{u})$, rešitev ne bi bila uporabna, saj v praksi ne moremo poznati začetnega podatka $\vec{u}$ z absolutno natančnostjo. Na srečo je $\vec{y}$ zvezna funkcija spremenljivk x in $\vec{u}$, če je $\vec{f}$ zvezna in zadošča Lipschitzovemu pogoju (1.7.3). Po dokazu izreka 1.7.5 je namreč rešitev negibna točka operatorja T, to pa po dokazu Banachovega izreka o skrčitvah dobimo kot limito zaporedja približkov, za katere ni težko ugotoviti, da so zvezni v argumentu $(x, \vec{u})$, zato mora isto veljati za njihovo enakomerno limito. Namesto da bi podrobneje razložili to sklepanje, bomo v naslednji trditvi dokazali nekoliko več.

Trditev 1.8.1. *Če je $\vec{f}$ zvezna funkcija in zadošča Lipschitzovemu pogoju* (1.7.3) *na $I \times D$, potem za vsako točko $(x_0, \vec{u}_0) \in I \times D$ obstaja tak (odprt, neprazen) interval $J \subseteq I$ okrog x_0, taka okolica $U \subseteq D$ točke $\vec{u}_0$ in taka konstanta $\beta \geq 0$, da za poljubna $\vec{u}, \vec{v} \in U$ in vsak $x \in J$ za rešitvi $\vec{y}(x, \vec{u})$ in $\vec{y}(x, \vec{v})$ enačbe $\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y})$ pri začetnih pogojih $\vec{y}(x, \vec{u}) = \vec{u}$ in $\vec{y}(x, \vec{v}) = \vec{v}$ velja*

$$\|\vec{y}(x, \vec{v}) - \vec{y}(x, \vec{u})\| \leq \beta \|\vec{v} - \vec{u}\|. \tag{1.8.2}$$

Proof. Kot v dokazu izreka 1.7.5 izberimo najprej $I_0 \subset I$ in $K \subset D$, nato pa še tak $h > 0$, da je $J := [x_0 - h, x_0 + h] \subseteq I_0$, $Lh < 1$ in $\bar{K}(\vec{u}_0, 2Mh) \subset K$ (zadnji pogoj je nekoliko ostrejši kot v dokazu izreka 1.7.5, kjer je namesto $2Mh$ nastopala količina Mh). Naj bo

$$Y = C(J, \bar{K}(\vec{u}_0, 2Mh))$$

in za vsak $\vec{u} \in \bar{K}(\vec{u}_0, Mh)$ definirajmo operator $T_{\vec{u}} : Y \to Y$ z

$$(T_{\vec{u}}\vec{y})(x) = \vec{u} + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(t, \vec{y}(t))\, dt.$$

Preverimo, da $T_{\vec{u}}$ res preslika Y v Y: za vsak $\vec{y} \in Y$ je

$$\|(T_{\vec{u}}\vec{y})(x) - \vec{u}_0\| \leq \|\vec{u} - \vec{u}_0\| + \left| \int_{x_0}^{x} \|\vec{f}(t, \vec{y}(t))\|\, dt \right| \leq \|\vec{u} - \vec{u}_0\| + Mh \leq 2Mh.$$

Kot v dokazu izreka 1.7.5 pokažemo, da je $T_{\vec{u}}$ skrčitev, se pravi

$$\|T_{\vec{u}}\vec{y} - T_{\vec{u}}\vec{z}\|_\infty \leq \alpha \|\vec{u} - \vec{z}\|_\infty \quad \text{za poljubna } \vec{y}, \vec{z} \in Y,$$

kjer je $\alpha := Lh < 1$. Rešitev $\vec{y}(x, \vec{u})$ enačbe $\frac{d}{dx}\vec{f}(x, \vec{y})$ pri pogoju $\vec{y}(x_0, \vec{u}) = \vec{u}$ je negibna točka operatorja $T_{\vec{u}}$, torej (po dokazu Banachovega izreka o skrčitvah [26, 5.4.15]) limita zaporedja približkov $\vec{y}_n \in Y$, definiranih induktivno kot

$$\vec{y}_0 = \vec{u}, \qquad \vec{y}_{n+1} = T_{\vec{u}}\vec{y}_n.$$

Rešitev $\vec{y}(x, \vec{v})$ pri pogoju $\vec{y}(x_0, \vec{v}) = \vec{v}$ pa je limita zaporedja približkov $\vec{z}_n \in Y$, definiranih kot

$$\vec{z}_0 = \vec{v}, \qquad \vec{z}_{n+1} = T_{\vec{v}}\vec{z}_n.$$

Zato velja

$$\begin{aligned}
\|\vec{z}_{n+1} - \vec{y}_{n+1}\|_\infty &= \|T_{\vec{v}}\vec{z}_n - T_{\vec{u}}\vec{y}_n\|_\infty \\
&\leq \|\vec{v} - \vec{u}\| + \sup_{|x - x_0| \leq h} \left| \int_{x_0}^{x} \|\vec{f}(t, \vec{z}_n(t)) - \vec{f}(t, \vec{y}_n(t))\|\, dt \right| \\
&\leq \|\vec{v} - \vec{u}\| + Lh\|\vec{z}_n - \vec{y}_n\|_\infty \\
&= \|\vec{v} - \vec{u}\| + \alpha\|\vec{z}_n - \vec{y}_n\|_\infty.
\end{aligned}$$

Torej je $\|\vec{z}_1 - \vec{y}_1\|_\infty \leq (1 + \alpha)\|\vec{v} - \vec{u}\|$ in nato (z indukcijo)

$$\|\vec{z}_n - \vec{y}_n\|_\infty \leq (1 + \alpha + \ldots + \alpha^n)\|\vec{v} - \vec{u}\|.$$

V limiti $n \to \infty$ sledi od tod, da je

$$\sup_{|x - x_0| \leq h} \|\vec{y}(x, \vec{v}) - \vec{y}(x, \vec{u})\| \leq \beta \|\vec{v} - \vec{u}\|,$$

kjer je $\beta = 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots = \frac{1}{1-\alpha}$. Od tod lahko takoj sklenemo, da je $\vec{y}$ zvezna funkcija argumenta $(x, \vec{u}) \in J \times \bar{K}(\vec{u}_0, Mh)$, saj lahko za poljubne $x_1, x_2 \in J = [x_0 - h, x_0 + h]$ in $\vec{v}, \vec{u} \in \bar{K}(\vec{u}_0, Mh)$ ocenimo

$$\begin{aligned}
\|\vec{y}(x_2, \vec{v}) - \vec{y}(x_1, \vec{u})\| &\leq \|\vec{y}(x_2, \vec{v}) - \vec{y}(x_1, \vec{v})\| + \|\vec{y}(x_1, \vec{v}) - \vec{y}(x_1, \vec{u})\| \\
&\leq \|\vec{y}(x_2, \vec{v}) - \vec{y}(x_1, \vec{v})\| + \beta\|\vec{v} - \vec{u}\|.
\end{aligned}$$

Ker je $\vec{y}$ odvedljiva (torej tudi zvezna) v spremenljivki x, sledi iz te ocene zveznost v spremenljivki $(x, \vec{u})$. □

Kasneje bomo pokazali, da je rešitev $\vec{y}$ problema (1.8.1) zvezno odvedljiva funkcija argumenta $(x, \vec{u})$, če je funkcija $\vec{f}$ zvezno odvedljiva. Ker je dokaz tega mnogo lažji pri močnejši predpostavki, da je $\vec{f}$ dvakrat zvezno odvedljiva, obravnavajmo najprej ta primer.

TRDITEV 1.8.2. *Če je $\vec{f}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija, je rešitev $\vec{y} = \vec{y}(x, \vec{u})$ sistema* (1.8.1) *zvezno odvedljiva funkcija spremenljivke $(x, \vec{u})$ na kaki dovolj majhni okolici katerekoli začetne točke $(x_0, \vec{u}_0)$ v domeni funkcije $\vec{f}$. Nadalje matrična funkcija $Z(x, \vec{u}) := D_{\vec{u}}\vec{y}(x, \vec{u}) = [\frac{\partial y_i}{\partial u_j}(x, \vec{u})]$ zadošča **variacijski enačbi***

$$\frac{d}{dx}Z = (D_{\vec{y}}\vec{f})(x, \vec{y})Z, \qquad Z(x_0, u) = I,$$

kjer je $D_{\vec{y}}\vec{f}(x, \vec{y})$ Jacobijeva matrika preslikave $\vec{f}$ v spremenljivki $\vec{y}$ (to je matrika $[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}]$, izračunana v $(x, \vec{y})$), I pa identična matrika.

PROOF. Oglejmo si sistem

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} \vec{y} \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{f}(x, \vec{y}) \\ (D_{\vec{y}}\vec{f})(x, \vec{y})Z \end{bmatrix} \quad \text{pri začetnem pogoju} \quad \begin{bmatrix} \vec{y} \\ Z \end{bmatrix}(x_0, \vec{u}) = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ I \end{bmatrix}. \tag{1.8.3}$$

Zaporedje približkov iz dokaza Banachovega izreka o negibni točki in eksistenčnega izreka za ta sistem je

$$\begin{bmatrix} \vec{y}_{n+1} \\ Z_{n+1} \end{bmatrix}(x, \vec{u}) = \begin{bmatrix} \vec{u} + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(t, \vec{y}_n(t, \vec{u}))\, dt \\ I + \int_{x_0}^{x} (D_{\vec{y}}\vec{f})(t, \vec{y}_n(t, \vec{u}))Z_n(t, \vec{u})\, dt \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \vec{y}_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}(x, \vec{u}) = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ I \end{bmatrix}. \tag{1.8.4}$$

To zaporedje konvergira (na dovolj majhni okolici poljubne začetne točke $(x_0, \vec{u}_0)$) enakomerno proti rešitvi $(\vec{y}, Z)^T$. Ker je $\vec{y}_0(x, \vec{u}) = \vec{u}$, je $D_{\vec{u}}\vec{y}_0 = I = Z_0$, saj je odvod preslikave $\vec{u} \mapsto \vec{u}$ identiteta I. Če predpostavimo, da je $D_{\vec{u}}\vec{y}_{n-1}(x, \vec{u}) = Z_{n-1}(t, \vec{u})$ za kak n, potem iz enačb (1.8.4) (kjer nadomestimo $n+1$ z n) vidimo, da velja tudi

$$\begin{aligned}
(D_{\vec{u}}\vec{y}_n)(x, \vec{u}) &= I + \int_{x_0}^{x} D_{\vec{u}}\vec{f}(t, \vec{y}_{n-1}(t, \vec{u}))\, dt \\
&= I + \int_{x_0}^{x} D_{\vec{y}}\vec{f}(t, \vec{y}_{n-1}(t, \vec{u}))D_{\vec{u}}\vec{y}_{n-1}(t, \vec{u})\, dt \\
&= I + \int_{x_0}^{x} D_{\vec{y}}\vec{f}(t, \vec{y}_{n-1}(t, \vec{u}))Z_{n-1}(t, \vec{u})\, dt \\
&= Z_n(x, \vec{u}).
\end{aligned}$$

Z indukcijo je torej $D_{\vec{u}}\vec{y}_n(x, \vec{u}) = Z_n(x, \vec{u})$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Potemtakem zaporedje odvodov $D_{\vec{u}}\vec{y}_n$ funkcij $\vec{y}_n$ konvergira enakomerno proti Z, zaporedje $\vec{y}_n$ pa proti $\vec{y}$. Znan izrek iz osnov analize pove, da je tedaj funkcija $\vec{y}$ odvedljiva na $\vec{u}$ in velja $D_{\vec{u}}\vec{y}(x, \vec{u}) = Z(x, \vec{u})$. Po trditvi 1.8.1 je funkcija $(x, \vec{u}) \mapsto (\vec{y}(x, \vec{u}), Z(x, \vec{u}))^T$ (kot rešitev sistema (1.8.3)) zvezna (med drugim je torej $\vec{y}$ zvezna), zato iz enačbe (1.8.1)) sedaj sledi, da je zvezen tudi odvod $\frac{d}{dx}\vec{y}$. □

Če v diferencialnih enačbah nastopajo tudi parametri, nas zanima, kako so rešitve odvisne od parametrov. Navedimo sedaj splošni izrek o odvedljivosti rešitev sistemov diferencialnih enačb na začetne pogoje in na parametre.

Izrek 1.8.3. *Naj bo I interval, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$, $r \in \mathbb{N}$ in $\vec{f} : I \times D \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ funkcija razreda C^r (kar pomeni, da ima parcialne odvode reda do r in so ti odvodi zvezni). Potem so tudi rešitve $\vec{y} = \vec{y}(x, \vec{u}, \vec{\lambda})$ sistema*

$$\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{\lambda}), \qquad \vec{y}(x_0, \vec{u}, \vec{\lambda}) = \vec{u} \tag{1.8.5}$$

v razredu C^r, vsaj na dovolj majhni okolici poljubne začetne točke $(x_0, \vec{u}_0, \vec{\lambda}_0)$.

Za dokaz izreka potrebujemo nekaj priprave. Naslednja lema prevede parametre na začetne pogoje: iz sistema s parametrom $\vec{\lambda}$ konstruiramo ekvivalenten sistem (z več neznankami) brez parametra.

Lema 1.8.4. *Če so rešitve $\vec{y} = \vec{y}(x, \vec{u})$ sistema*

$$\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y}), \qquad \vec{y}(x_0, \vec{u}) = \vec{u}$$

v razredu C^r za vsako funkcijo $\vec{f} \in C^r$, potem so tudi rešitve $\vec{y} = \vec{y}(x, \vec{u}, \vec{\lambda})$ sistema

$$\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{g}(x, y, \vec{\lambda}), \qquad \vec{y}(x_0, \vec{u}, \vec{\lambda}) = \vec{u}$$

v razredu C^r za vsako funkcijo $\vec{g} \in C^r$.

Proof. Opazujmo sistem (z dodatno neznano funkcijo $\vec{z}$)

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} \vec{y} \\ \vec{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{g}(x, \vec{y}, \vec{z}) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \vec{y} \\ \vec{z} \end{bmatrix}(x_0, \vec{u}, \vec{\lambda}) = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix}. \tag{1.8.6}$$

Iz $\frac{d}{dx}\vec{z} = \vec{0}$ in $\vec{z}(x_0, \vec{u}, \vec{\lambda}) = \vec{\lambda}$ sledi $\vec{z}(x, \vec{u}, \vec{\lambda}) = \vec{\lambda}$, zato se prva enačba v (1.8.6) glasi $\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{g}(x, \vec{y}, \vec{\lambda})$, začetni pogoj (njegova prva komponenta) pa $\vec{y}(x_0, \vec{u}, \vec{\lambda}) = \vec{u}$. V sistemu (1.8.6) ni več parametra, zato je po predpostavki rešitev $(\vec{y}, \vec{z})^T$ v razredu C^r kot funkcija spremenljivk $(x, \vec{u}, \vec{\lambda})$, torej mora biti v C^r tudi njena komponenta $\vec{y}$. □

Naslednja lema omili predpostavke v trditvi 1.8.2.

Lema 1.8.5. *Če je funkcija $\vec{f}$ zvezno odvedljiva, so take tudi rešitve $\vec{y} = \vec{y}(x, \vec{u})$ sistema* (1.8.1)*, odvod $Z(x, \vec{u}) := (D_{\vec{u}}\vec{y})(x, \vec{u})$ pa zadošča variacijski enačbi*

$$\frac{d}{dx}Z(x, \vec{u}) = (D_{\vec{y}}\vec{f})(x, \vec{y}(x, \vec{u}))Z(x, \vec{u}), \qquad Z(x_0, \vec{u}) = I. \tag{1.8.7}$$

(Za sedaj zatrjujemo le, da vse to velja lokalno, se pravi na kaki dovolj majhni okolici poljubne začetne točke $(x_0, \vec{u}_0)$ iz domene funkcije $\vec{f}$.)

Proof. Obravnavajmo najprej poseben primer, ko je $\vec{u}_0 = \vec{0}$ ter

$$\vec{f}(x, \vec{0}) = \vec{0} \qquad \text{in} \qquad (D_{\vec{y}}\vec{f})(x, \vec{0}) = 0 \tag{1.8.8}$$

za vse x na kakem odprtem intervalu J okrog x_0. Pokazali bomo, da je tedaj $Z(x, \vec{0}) = (D_{\vec{u}}\vec{y})(x, \vec{0}) = I$ za vse $x \in J$. Rešitev $\vec{y} = \vec{y}(x, \vec{0})$ sistema

$$\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{0}), \qquad \vec{y}(x_0, \vec{0}) = \vec{0},$$

je konstanta $\vec{y} \equiv \vec{0}$, ker je $\vec{f}(x, \vec{0}) = \vec{0}$. Variacijska enačba (1.8.7) se bo zato v tem primeru v točkah $(x, \vec{0})$ reducirala na identiteto $\frac{d}{dx}I = 0 \cdot I$. Za dokaz odvedljivosti na $\vec{u}$ funkcije $\vec{y}(x, \vec{u})$ v točki $(x, \vec{0})$ in dejstva, da je ta odvod enak I, upoštevajmo, da je $\vec{y}(x, \vec{u}) = \vec{u} + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(t, \vec{y}(t, \vec{u}))\, dt$ in $\vec{y}(x, \vec{0}) = \vec{0} = \vec{u}_0$, pa dobimo

$$\vec{y}(x, \vec{u}) - \vec{y}(x, \vec{u}_0) = \vec{u} + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(t, \vec{y}(t, \vec{u}))\, dt. \tag{1.8.9}$$

Zaradi (1.8.8) lahko izrazimo $\vec{f}(x, \vec{y})$ kot

$$\vec{f}(x, \vec{y}) = \|\vec{y}\|\vec{o}(x, \vec{y}), \quad \text{kjer je} \quad \lim_{\vec{y} \to \vec{0}} \vec{o}(x, \vec{y}) = \vec{0} \tag{1.8.10}$$

za vse x iz kakega (po potrebi skrajšanega) intervala $J = (-h, h)$ okrog 0. (Za dokaz si oglejmo pri fiksnih x in $\vec{y}$ funkcijo $\vec{g}(s) := \vec{f}(x, s\vec{y})$. Ker je $\vec{f}(x, \vec{0}) = \vec{0}$, imamo $\vec{f}(x, \vec{y}) = \vec{g}(1) - \vec{g}(0) = \int_0^1 \frac{d}{ds}\vec{g}(s)\, ds = \|\vec{y}\|\vec{o}(x, \vec{y})$, kjer je (za $\vec{y} \neq 0$)

$$\vec{o}(x, \vec{y}) := \|\vec{y}\|^{-1} \int_0^1 \frac{d}{ds}\vec{g}(s)\, ds = \|\vec{y}\|^{-1} \int_0^1 (D_{\vec{y}}\vec{f})(x, s\vec{y})\vec{y}\, ds$$

in zato $\|\vec{o}(x, \vec{y})\| \leq \sup_{s \in [0,1]} \|(D_{\vec{y}}\vec{f})(x, s\vec{y})\|$, kar gre proti $\vec{0}$, ko gre $\vec{y}$ proti $\vec{0}$, saj je $D_{\vec{y}}\vec{f}(x, \vec{0}) = \vec{0}$ in $D_{\vec{y}}\vec{f}$ zvezna funkcija.) Neenakost (1.8.2) se tukaj (ko je $\vec{v} := \vec{u}_0 = \vec{0}$ in $\vec{y}(x, \vec{u}_0) = \vec{0}$) glasi

$$\|\vec{y}(x, \vec{u})\| \leq \beta\|\vec{u}\| \qquad (\vec{u} \in U,\ x \in J), \tag{1.8.11}$$

kjer je β pozitivna konstanta. Iz (1.8.9), (1.8.10) in (1.8.11) sedaj sledi

$$\begin{aligned} \|\vec{y}(x, \vec{u}) - \vec{y}(x, \vec{0}) - I\vec{u}\| &= \left\| \int_{x_0}^{x} \vec{f}(t, \vec{y}(t, \vec{u}))\, dt \right\| \leq \left| \int_{x_0}^{x} \|\vec{y}(t, \vec{u})\| \|\vec{o}(t, \vec{y}(t, \vec{u}))\|\, dt \right| \\ &\leq \beta\|\vec{u}\||x - x_0| \sup_{t \in J} \|\vec{o}(t, \vec{y}(t, \vec{u}))\| \leq \beta h\|\vec{u}\| \sup_{t \in J} \|\vec{o}(t, \vec{y}(t, \vec{u}))\|. \end{aligned}$$

Ta neenakost pove, da odvod $(D_{\vec{u}}\vec{y})(x, \vec{0})$ obstaja in je enak I, saj gre količina $\beta h \sup_{t \in J} \|\vec{o}(t, \vec{y}(t, \vec{u}))\|$ proti 0, ko gre $\vec{u}$ proti $\vec{0}$.

Sedaj bomo splošni problem odvedljivosti v poljubni točki (x, u_0) prevedli na situacijo, ki smo jo obravnavali v prejšnjem odstavku, in sicer z vpeljavo nove neznanke $\vec{z}$ (namesto $\vec{y}$) s predpisom

$$\vec{y}(x, \vec{u}) = A(x)\vec{z}(x, \vec{u}) + \vec{\phi}(x), \tag{1.8.12}$$

kjer je $\vec{\phi}(x) := \vec{y}(x, \vec{u}_0)$ in A primerna funkcija (definirana na dovolj majhnem intervalu J okrog x_0) z vrednostmi v obrnljivih $n \times n$ realnih matrikah. Matrično funkcijo A bomo izbrali tako, da bo enačba, ki jo dobimo za $\vec{z}$, ko vstavimo izraz (1.8.12) v enačbo $\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y})$ in izrazimo $\frac{d}{dx}\vec{z}$, torej enačba

$$\frac{d}{dx}\vec{z} = A(x)^{-1}\left[\vec{f}(x, A(x)\vec{z} + \vec{\phi}(x)) - \frac{d}{dx}\vec{\phi}(x) - \frac{d}{dx}(A(x))\vec{z}\right] =: \vec{g}(x, \vec{z}), \qquad (1.8.13)$$

imela obliko $\frac{d}{dx}\vec{z} = \vec{g}(x, \vec{z})$, kjer bo $\vec{g}(x, \vec{0}) = \vec{0}$ in $(D_{\vec{z}}\vec{g})(x, \vec{0}) = \vec{0}$. Ko vstavimo $\vec{z} = \vec{0}$ v funkcijo $\vec{g}$, definirano v (1.8.13), vidimo, da je $\vec{g}(x, \vec{0}) = \vec{0}$ (ker je $\vec{\phi}(x) = \vec{y}(x, \vec{u}_0)$ rešitev sistema $\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y})$). Za $(D_{\vec{z}}\vec{g})(x, \vec{0})$ pa izračunamo

$$(D_{\vec{z}}\vec{g})(x, \vec{0}) = A(x)^{-1}\left[(D_{\vec{y}}\vec{f})(x, \vec{\phi}(x))A(x) - \frac{d}{dx}A(x)\right].$$

Naj bo torej A rešitev sistema

$$\frac{d}{dx}A(x) = (D_{\vec{y}}\vec{f})(x, \vec{\phi}(x))A(x) \quad \text{in} \quad A(x_0) = I. \qquad (1.8.14)$$

Pogoj $A(x_0) = I$ zagotavlja (zaradi zveznosti determinante), da je $A(x)$ res obrnljiva matrika, če je x v dovolj majhnem intervalu okrog x_0. Iz (1.8.12) in iz $\vec{y}(x_0, \vec{u}) = \vec{u}$, $\vec{\phi}(x_0) = \vec{y}(x_0, \vec{u}_0) = \vec{u}_0$ sledi, da $\vec{z}$ zadošča začetnemu pogoju

$$\vec{z}(x_0, \vec{u}) = \vec{u} - \vec{u}_0.$$

Obravnavajmo torej $\vec{z}$ kot funkcijo spremenljivk x in $\vec{v} := \vec{u} - \vec{u}_0$; z drugimi besedami, vpeljimo funkcijo $\vec{\zeta}(x, \vec{v}) := \vec{z}(x, \vec{u}) = \vec{z}(x, \vec{v} + \vec{u}_0)$. Potem $\vec{\zeta}$ zadošča enaki enačbi kot $\vec{z}$, se pravi $\frac{d}{dx}\zeta(x, \vec{v}) = \vec{g}(x, \vec{\zeta}(x, \vec{v}))$, in začetnemu pogoju $\vec{\zeta}(x_0, \vec{0}) = \vec{z}(x_0, \vec{u}_0) = \vec{u}_0 - \vec{u}_0 = \vec{0}$. Ker je $\vec{g}(x, \vec{0}) = \vec{0}$ in $(D_{\vec{z}}\vec{g})(x, \vec{0}) = \vec{0}$, je po prvem delu dokaza $\vec{\zeta}$ odvedljiva na $\vec{v}$ v točkah $(x, \vec{0})$ in velja $(D_{\vec{v}}\vec{\zeta})(x, \vec{0}) = I$. Zato je $\vec{z}(x, \vec{u})$ $(= \vec{\zeta}(x, \vec{u} - \vec{u}_0))$ odvedljiva na $\vec{u}$ v točkah $(x, \vec{u}_0)$ in velja $(D_{\vec{u}}\vec{z})(x, \vec{u}_0) = I$. Iz (1.8.12) potem sledi, da je tudi $\vec{y}$ odvedljiva na $\vec{u}$ v točkah $(x, \vec{u}_0)$ in je $(D_{\vec{u}}\vec{y})(x, \vec{u}_0) = A(x)$. Od tod in iz (1.8.14) končno sledi, da $(D_{\vec{u}}\vec{y})(x, \vec{u}_0)$ zadošča variacijski enačbi (1.8.7) v točkah $(x, \vec{u}_0)$:

$$\left(\frac{d}{dx}D_{\vec{u}}\vec{y}\right)(x, \vec{u}_0) = \frac{d}{dx}A(x) = (D_{\vec{y}}\vec{f})(x, \vec{\phi}(x))A(x) = (D_{\vec{y}}\vec{f})(x, \vec{y}(x, \vec{u}_0))(D_{\vec{u}}\vec{y})(x, \vec{u}_0).$$

Zadošča pa tudi začetnemu pogoju $(D_{\vec{u}}\vec{y})(x_0, \vec{u}_0) = A(x_0) = I$. □

Dokaz izreka 1.8.3. Po lemi 1.8.4 zadošča obravnavati sisteme brez parametrov. Dokaz je z indukcijo na r. Za $r = 0$ se izrek reducira na že prej dokazano zvezno odvisnost rešitev od začetnega pogoja. Za $r = 1$ lema 1.8.5 pove, da $D_{\vec{u}}\vec{y}$ obstaja in zadošča variacijski enačbi (1.8.7), v kateri $\vec{u}$ nastopa kot parameter. Po lemi 1.8.4 (in že prej dokazani zvezni odvisnosti od začetnih pogojev, trditev 1.8.1) je zato $D_{\vec{u}}$ zvezna funkcija argumenta $(x, \vec{u})$. Zveznost odvoda $\frac{d}{dx}\vec{y}$ pa sledi neposredno iz enačbe $\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y})$.

Privzemimo sedaj induktivno, da izrek velja za kak $r \in \mathbb{N}$ za vse sisteme oblike

$$\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{g}(x, \vec{y}), \qquad \vec{y}(x_0, \vec{u}) = \vec{u},$$

kjer je $\vec{g} \in C^r$. Opazujmo sistem

$$\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y}), \qquad \vec{y}(x_0, \vec{u}) = \vec{u},$$

kjer je $\vec{f} \in C^{r+1}$. Po lemi 1.8.5 zadošča funkcija $Z(x, \vec{u}) := (D_{\vec{u}}\vec{y})(x, \vec{u})$ variacijski enačbi

$$\frac{d}{dx}Z = (D_{\vec{y}}\vec{f})(x, \vec{y}(x, \vec{u}))Z =: \vec{g}(x, \vec{u}, Z), \qquad Z(x_0, \vec{u}) = I. \tag{1.8.15}$$

Po indukcijski predpostavki je $\vec{y} \in C^r$. Ker je $\vec{f} \in C^{r+1}$, je $D_{\vec{y}}\vec{f} \in C^r$ in sledi, da je funkcija $\vec{g}$ (definirana v (1.8.15)) prav tako v razredu C^r. Po indukcijski predpostavki je zato tudi funkcija $Z = D_{\vec{u}}\vec{y}$ v razredu C^r. Odvodi funkcije $\vec{y}$ do reda $r+1$ so bodisi odvodi funkcije $D_{\vec{u}}\vec{y}$ do reda r bodisi odvodi funkcije $\frac{d}{dx}\vec{y}$ do reda r. Toda z odvajanjem zveze $\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y})$ lahko tudi vse odvode funkcije $\frac{d}{dx}y$ do reda r izrazimo z odvodi funkcije $\vec{y}$ do reda r, torej so zvezni. □

1.8.2. Globalna odvisnost rešitev od začetnih pogojev

Doslej smo proučili zveznost in odvedljivost rešitev diferencialne enačbe pri danem začetnem pogoju le v dovolj majhni okolici začetne točke $(x_0, \vec{u})$. Zanima pa nas, kako je s tem na celotnem definicijskem območju rešitve.

Izrek 1.8.6. *Naj bo $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ odprta povezana množica, $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^n$ funkcija razreda C^r za kak $r \in \mathbb{N}$ (se pravi r-krat zvezno odvedljiva), $x_0 \in \mathbb{R}$ tak, da je $(x_0, \vec{u}_0) \in U$ za kak $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^n$. Označimo*

$$U_{x_0} = \Big\{(x, \vec{u}) \in U : x \text{ je v maksimalnem odprtem definicijskem intervalu kake rešitve } \vec{y} \text{ enačbe } \frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y}) \text{ pri začetnem pogoju } \vec{y}(x_0, \vec{u}) = \vec{u}\Big\}.$$

Potem je U_{x_0} odprta množica in funkcija $(x, \vec{u}) \mapsto \vec{y}(x, \vec{u})$ je v razredu C^r na U_{x_0}.

Proof. Naj bo $(x_1, \vec{u}_1) \in U_{x_0}$, se pravi, da je x_1 v maksimalnem odprtem definicijskem intervalu I rešitve $\vec{y}$ enačbe $\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y})$ pri začetnem pogoju $\vec{y}(x_0, \vec{u}_1) = \vec{u}_1$. Pokazati moramo, da obstaja odprt interval $J \supset [x_0, x_1]$ in odprta krogla $K(\vec{u}_1, r)$ $(r > 0)$, da je funkcija $\vec{y} = \vec{y}(x, \vec{u})$, ki reši enačbo $\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y})$ pri začetnem pogoju $\vec{y}(x_0, \vec{u}) = \vec{u}$, v razredu C^r na množici $J \times K(\vec{u}_1, r)$. Za ta namen predpostavimo (brez izgube splošnosti), da je $x_1 \geq x_0$ in si oglejmo množico A, sestoječo iz vseh tistih $t \in I$, za katere obstajata kak tak odprt interval $J \supset [x_0, t]$ in kaka taka odprta krogla $K(\vec{u}_1, r)$ $(r > 0)$, da za vsak $\vec{u} \in K(\vec{u}_1, r)$ obstaja rešitev $\vec{y} = \vec{y}(x, \vec{u})$ enačbe $\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y})$ pri začetnem pogoju $\vec{y}(x_0, \vec{u}) = \vec{u}$, ki je definirana za vse $x \in J$ in je v razredu C^r na množici $J \times K(\vec{u}_1, r)$. Če je množica A navzgor neomejena, potem je funkcija $(x, \vec{u}) \mapsto \vec{y}(x, \vec{u})$ v razredu C^r na okolici $J \times K(\vec{u}_1, r)$ točke $(t, \vec{u}_1)$ za vsak $t \in I$, torej tudi v okolici točke $(x_1, \vec{u}_1)$ in dokaz je tedaj končan. Predpostaviti smemo torej, da je množica A navzgor omejena; naj bo $b = \sup A$. Dokaz bo končan, če pokažemo, da je b desno krajišče intervala I.

Predpostavimo nasprotno, da je b v (notranjosti odprtega intervala) I. Potem obstaja $\vec{c} := \vec{y}(b, \vec{u}_1)$. Po izreku 1.8.3 o lokalni odvedljivosti rešitev obstajata tak odprt interval J_b okrog točke b in taka odprta krogla $K(\vec{c}, r)$, da je rešitev enačbe $\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y})$ pri začetnem pogoju $\vec{y}(b) = \vec{v}$ $(\vec{v} \in K(\vec{c}, r))$ v razredu C^r na množici $J_b \times K(\vec{c}, r)$. Označimo te rešitve z $\vec{\beta}(x, \vec{v})$ (namesto $\vec{y}(x, \vec{v})$; razlog za to začasno spremembo oznake bo jasen nekoliko kasneje). Izberimo sedaj $t_1 \in J_b$, $t_1 < b$, tako blizu b, da je $\vec{\beta}(t_1, \vec{u}_1) \in K(\vec{c}, \frac{r}{2})$. (To je mogoče, ker je $\vec{\beta}(b, \vec{u}_1) = \vec{u}_1$ in je $\vec{\beta}$ odvedljiva, torej tudi zvezna, funkcija v spremenljivki $x \in I$.) Ker je $t_1 \in A$, po definiciji množice A obstaja taka krogla $K(\vec{u}_1, \rho)$ $(\rho > 0)$ in tak odprt interval $J \supset [x_0, t_1]$, da je rešitev enačbe pri začetnem pogoju $\vec{y}(x, \vec{u}) = \vec{u}$ v razredu C^r na $J \times K(\vec{u}_1, \rho)$. Označimo to rešitev z $\vec{\alpha}(x, \vec{u})$ (namesto $\vec{y}(x, \vec{u})$). Ker je funkcija $\vec{u} \mapsto \vec{\alpha}(t_1, \vec{u})$ torej zvezna na $K(\vec{u}_1, \rho)$ in $\vec{\alpha}(t_1, \vec{u}_1) \in K(\vec{c}, \frac{r}{2})$, lahko ρ zmanjšamo tako, da bo $\vec{\alpha}(t_1, \vec{u}) \in K(\vec{c}, r)$ za vse $\vec{u} \in K(\vec{u}_1, \rho)$. Funkcija $\vec{\alpha}$ je v razredu C^r na $J \times K(\vec{u}_1, \rho)$, funkcija $\vec{\beta}$ pa na $J_b \times K(\vec{c}, r)$. Definirajmo sedaj

$$\vec{\gamma}(x, \vec{u}) = \begin{cases} \vec{\alpha}(x, \vec{u}), & (x, \vec{u}) \in J \times K(\vec{u}_1, \rho); \\ \vec{\beta}(x, \vec{\alpha}(t_1, \vec{u})), & x \in J_b \times K(\vec{c}, r). \end{cases}$$

Ker sta pri fiksnem $\vec{u} \in K(\vec{u}_1, \rho)$ funkciji $\vec{\alpha}$ in $\vec{\beta}$ rešitvi iste diferencialne enačbe in po definiciji funkcije $\vec{\beta}$ velja $\vec{\alpha}(t_1, \vec{u}) = \vec{\beta}(t_1, \vec{\alpha}(t_1, \vec{u}))$, se morata ujemati na preseku definicijskih intervalov, torej je $\vec{\alpha}(x, \vec{u}) = \vec{\beta}(x, \vec{\alpha}(x, \vec{u}))$ za vse $x \in J_b \cap J$ in $\vec{u} \in K(\vec{u}_1, \rho)$. Ker sta $\vec{\alpha}$ in $\vec{\beta}$ v razredu C^r na svojih definicijskih območjih $J \times K(\vec{u}_1, \rho)$ in $J_b \times K(\vec{c}, r)$ in ker je $\vec{\alpha}(\{t_1\} \times K(\vec{u}_1, \rho)) \subseteq K(\vec{c}, r)$, je funkcija $(x, \vec{u}) \mapsto \vec{\beta}(x, \vec{\alpha}(t_1, \vec{u}))$ v razredu C^r na $J_b \times K(\vec{u}_1, \rho)$. Ker se ujema z $\vec{\alpha}$ na preseku $(J_b \cap J) \times K(\vec{u}_1, \rho)$ njunih definicijskih območij, sledi, da je tudi $\vec{\gamma}$ v razredu C^r na uniji $(J \cup J_b) \times K(\vec{u}_1, \rho)$ njunih definicijskih območij. Toda to pomeni, da je interval $J \cup J_b$ vsebovan v množici A. Ker ta interval vsebuje točko b v svoji notranjosti (saj jo vsebuje že J_b), b ne more biti zgornja meja množice A, kar je protislovje. □

Ustrezna varianta zadnjega izreka velja seveda tudi za sisteme s parametrom, saj lahko take sisteme reduciramo na (večje) sisteme brez parametrov kot v dokazu leme 1.8.4.

Naloge

1. Napišite variacijsko enačbo (1.8.7) za $Z = \frac{\partial y}{\partial u}$ pri problemu

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \qquad y(0) = u$$

in jo rešite.

2. Najprej uganite tisto rešitev $y = y(x, u)$ diferencialne enačbe $y' = xy(x + y)$, ki zadošča pogoju $y(x, 0) = 0$, nato pa poiščite za zelo majhne u približno rešitev $y = y(x, u)$ enačbe pri začetnem pogoju $y(0, u) = u$.

3. Izračunajte odvod na parameter λ rešitve $y(x, \lambda)$ problema

$$\frac{dy}{dx} = y(y - \lambda), \qquad y(0, \lambda) = 1$$

v točki $\lambda = 1$.

4. Dokažite da so rešitve $\vec{y}(x, \tau, \vec{u})$ enačbe $\frac{d}{dx}\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y})$ pri začetnem pogoju $\vec{y}(\tau, \tau, \vec{u}) = \vec{u}$ v razredu C^r (v kaki okolici poljubne začetne točke), če je funkcija $\vec{f}$ v razredu C^r. (Navodilo: Vpeljite novo neodvisno spremenljivko t in opazujte razširjeni sistem

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \vec{y} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{f}(x, \vec{y}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{pri začetnem pogoju} \quad \begin{bmatrix} \vec{y} \\ x \end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \tau \end{bmatrix},$$

katerega rešitve so v razredu C^r v okolici dane začetne točke po izreku 1.8.3. Opazite, da je $x = t + \tau$.)

1.9. Tok vektorskega polja†*

Sedaj bomo v nekoliko bolj geometrijskem jeziku povedali nekaj posledic rezultatov prejšnjega razdelka. Teh posledic v nadaljevanju tega dela sicer ne bomo več omenjali, vendar pa so pomembne drugod. Pozornost bomo preusmerili iz diferencialnih enačb samih, na odvisnost njihovih rešitev od začetnih pogojev.

Naj bo $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ odprta množica. Preslikavo $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^n$ si lahko predstavimo tako, da interpretiramo prvo koordinato kot čas t in si za vsak par $(t, \vec{x}) \in U$ ($t \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$) zamislimo v točki $\vec{x}$ v času t vektor $\vec{f}(t, \vec{x})$ (z začetkom v $\vec{x}$). Zato bomo tako preslikavo $\vec{f}$ imenovali tudi *časovno odvisno vektorsko polje.* Časovno neodvisno *vektorsko polje na množici* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je potem preprosto preslikava iz D v $\mathbb{R}^n$. Izraz »vektorsko polje« bo tukaj vedno pomenil časovno neodvisno vektorsko polje.

Definicija 1.9.1. *Tokovnica* ali *integralska krivulja* zveznega vektorskega polja $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^n$ skozi točko $\vec{u} \in D$ je rešitev enačbe $\dot{\vec{x}} := \frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t))$ pri začetnem pogoju $\vec{x}(t_0) = \vec{u}$ za kak $t_0 \in \mathbb{R}$, definirana na kakem intervalu J okrog t_0. Predstavljamo si jo kot krivuljo skozi $\vec{u}$. Diferencialno enačbo oblike $\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t))$ (pri kateri v funkciji $\vec{f}$ neodvisna spremenljivka t ne nastopa eksplicitno) imenujemo *avtonomni sistem.*

Opomba 1.9.2. Če je $\vec{x} = \vec{x}(t)$ rešitev avtonomnega sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ pri začetnem pogoju $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$, potem je tudi funkcija

$$\vec{y}(t) := \vec{x}(t + t_0)$$

rešitev iste enačbe pri začetnem pogoju $\vec{y}(0) = \vec{x}_0$. Zato lahko pri tokovnicah (časovno neodvisnih) vektorskih polj vedno privzamemo, da njihov definicijski interval vsebuje 0 in da je začetni pogoj oblike $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$.

Definicija 1.9.3. *Lokalni tok vektorskega polja* $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^n$ v okolici točke $\vec{x}_0 \in D$ je taka preslikava $\vec{\varphi} : I \times V \to D$, kjer je I kak odprt interval okrog 0, V pa kaka odprta okolica točke $\vec{x}_0$, da je za vsak $\vec{x} \in V$ funkcija $t \mapsto \vec{\varphi}_t(\vec{x}) := \vec{\varphi}(t, \vec{x})$ tokovnica polja $\vec{f}$ skozi $\vec{x}$. Torej velja

$$\frac{d}{dt}\vec{\varphi}_t(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{\varphi}_t(\vec{x})) \quad (t \in I) \qquad \text{in} \qquad \vec{\varphi}_0(\vec{x}) = \vec{x} \quad (\vec{x} \in V).$$

To lahko napišemo tudi kot

$$\frac{d}{dt}\vec{\varphi}(t, \vec{x}) = \vec{f}(\vec{\varphi}(t, \vec{x})) \quad (t \in I) \qquad \text{in} \qquad \vec{\varphi}(0, \vec{x}) = \vec{x} \quad (\vec{x} \in V). \tag{1.9.1}$$

Iz izreka 1.7.5 o eksistenci in enoličnosti in izreka 1.8.3 o odvedljivosti rešitev takoj sledi naslednja ugotovitev:

Izrek 1.9.4. *Če je $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^n$ vektorsko polje razreda C^r $(0 \leq r \leq \infty)$ na odprti množici $D \subseteq \mathbb{R}^n$, potem za vsako točko $\vec{x}_0 \in D$ obstaja odprt interval I okrog 0, odprta okolica $V \subseteq D$ točke $\vec{x}_0$ in natanko en lokalni tok $\vec{\varphi} : I \times V \to D$ vektorskega polja $\vec{f}$. Ta tok je razreda C^r.*

Definicija 1.9.5. Tokovnico $t \mapsto \vec{\varphi}_t(\vec{x})$ vektorskega polja $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^n$ skozi točko $\vec{x} \in D$ (torej $\frac{d}{dt}\vec{\varphi}_t(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{\varphi}_t(\vec{x}))$ in $\vec{\varphi}_0(x) = \vec{x}$), definirano na maksimalnem možnem intervalu $I_{\vec{x}}$, imenujemo *maksimalna tokovnica* skozi $\vec{x}$. Množico

$$D(\vec{f}) := \{(t, \vec{x}) \in \mathbb{R} \times D : \ t \in I_{\vec{x}}\}$$

imenujemo *domena toka polja $\vec{f}$*. *Tok* (natančneje *globalni tok*) vektorskega polja je preslikava

$$\vec{\varphi} : D(\vec{f}) \to D, \qquad \vec{\varphi}(t, \vec{x}) := \vec{\varphi}_t(\vec{x}),$$

kjer je $t \mapsto \vec{\varphi}_t(\vec{x})$ maksimalna tokovnica vektorskega polja skozi $\vec{x}$ za vsak $\vec{x} \in D$.

Izrek 1.8.6 o globalni odvisnosti rešitev od začetnih pogojev lahko za avtonomne sisteme povemo tudi takole:

Izrek 1.9.6. *Naj bo $\vec{f}$ vektorsko polje razreda C^r na odprti (povezani) množici $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Domena $D(\vec{f})$ toka $\vec{\varphi}$ polja $\vec{f}$ je odprta množica v $\mathbb{R} \times D$, ki vsebuje $\{0\} \times D$, in $\vec{\varphi}$ je preslikava razreda C^r iz $D(\vec{f})$ v D.*

Izrek 1.9.7. *Naj bo $\vec{\varphi}$ tok vektorskega polja $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^n$ (kjer je D območje v $\mathbb{R}^n$). Za vsak $\vec{x} \in D$ in poljubna taka s, t iz definicijskega intervala $I_{\vec{x}}$ maksimalne tokovnice skozi $\vec{x}$, da je tudi $s + t \in I_{\vec{x}}$, velja*

$$\vec{\varphi}(s, \vec{\varphi}(t, \vec{x})) = \vec{\varphi}(s + t, \vec{x}) \qquad \textit{in} \tag{1.9.2}$$

$$\vec{\varphi}(0, \vec{x}) = \vec{x}. \tag{1.9.3}$$

Proof. Pri fiksnem t funkciji $\vec{y}(s) := \vec{\varphi}(s, \vec{\varphi}(t, \vec{x}))$ in $\vec{z}(s) := \vec{\varphi}(s+t, \vec{x})$ obe zadoščata diferencialni enačbi

$$\frac{d}{ds}\vec{v}(s) = \vec{f}(\vec{v}(s)),$$

saj velja (po prvi enakosti v (1.9.1), uporabljeni tudi v točki $\vec{\varphi}(t, \vec{x})$ namesto $\vec{x}$)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\vec{y}(s) = \frac{d}{ds}\vec{\varphi}(s, \vec{\varphi}(t, \vec{x})) = \vec{f}(\vec{\varphi}(s, \vec{\varphi}(t, \vec{x}))) = \vec{f}(\vec{y}(s)) \qquad \text{in} \\
&\frac{d}{ds}\vec{z}(s) = \frac{d}{ds}\vec{\varphi}(s+t, \vec{x}) = \frac{d(s+t)}{ds}\frac{d}{d(s+t)}\vec{\varphi}(s+t, \vec{x}) = \vec{f}(\vec{\varphi}(s+t, \vec{x})).
\end{aligned}$$

Zadoščata pa tudi istemu začetnemu pogoju $\vec{y}(0) = \vec{\varphi}(0, \vec{\varphi}(t, \vec{x})) = \vec{\varphi}(t, \vec{x}) = \vec{z}(0)$, kjer smo uporabili drugo enakost v (1.9.1) v točki $\vec{\varphi}(t, \vec{x})$ (namesto $\vec{x}$). Torej mora biti $\vec{y} \equiv \vec{z}$, s čimer je dokazana enakost (1.9.2).

Naj bo $\vec{y}$ rešitev enačbe $\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = \vec{f}(\vec{y}(t))$ pri začetnem pogoju $\vec{y}(0) = \vec{x}$. Po definiciji je $\vec{\varphi}(0, \vec{x}) = \vec{y}(0)$, torej je $\vec{\varphi}(0, \vec{x}) = \vec{x}$, kar je ravno enakost (1.9.3). □

Definicija 1.9.8. Vektorsko polje $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^n$ imenujemo *polno*, če je $D(\vec{f}) = \mathbb{R} \times D$, torej, če je vsaka njegova maksimalna tokovnica definirana povsod na $\mathbb{R}$.

Posledica 1.9.9. *Tok $\vec{\varphi}$ polnega vektorskega polja $\vec{f} : D \to \mathbb{R}$ razreda vsaj C^1 je enoparametrična grupa difeomorfizmov (= obrnljivih zvezno odvedljivih preslikav z zvezno odvedljivimi inverzi) območja D.*

Proof. Za vsak $t \in \mathbb{R}$ je s predpisom $\vec{\varphi}_t(x) = \vec{\varphi}(t, x)$ definirana preslikava razreda C^1 iz D v D. Po (1.9.3) je $\vec{\varphi}_0$ identična preslikava I, iz (1.9.2) pa potem sledi, da je $\vec{\varphi}_{-t} \circ \vec{\varphi}_t = I = \vec{\varphi}_t \circ \vec{\varphi}_{-t}$. Torej je $\vec{\varphi}_{-t}$ inverz preslikave $\vec{\varphi}_t$. Enakost (1.9.2) lahko izrazimo kot $\vec{\varphi}_s \circ \vec{\varphi}_t = \vec{\varphi}_{s+t}$, kar pomeni, da je preslikava $t \mapsto \vec{\varphi}_t$ homomorfizem iz aditivne grupe $\mathbb{R}$ v grupo vseh difeomorfizmov množice D, zato pravimo, da je $\vec{\varphi}$ enoparametrična grupa difeomorfizmov območja D. □

Naloge

1. Dokažite, da je vsako zvezno odvedljivo vektorsko polje $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ s kompaktnim nosilcem (torej tako, da je $\vec{f}(\vec{x}) = 0$ za vse $\vec{x}$ izven kake kompaktne množice v $\mathbb{R}$) polno.

2. Dokažite, da je vsaka enoparametrična grupa difeomorfizmov območja $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (se pravi vsaka zvezno odvedljiva preslikava $\vec{\varphi} : \mathbb{R} \times D \to D$, ki ima lastnosti (1.9.2) in (1.9.3)) tok natanko določenega vektorskega polja $\vec{f}$ na D. (Navodilo: Za vsak $\vec{x} \in D$ naj bo $\vec{f}(\vec{x}) = \frac{d}{dt}\vec{\varphi}(t, \vec{x})|_{t=0}$. Pokažite, da funkcija $t \mapsto \vec{\varphi}(t, \vec{x})$ zadošča diferencialni enačbi $\frac{d}{dt}\vec{\varphi}(t, \vec{x}) = \vec{f}(\vec{\varphi}(t, \vec{x}))$.)

3. Če za maksimalno tokovnico $\vec{\alpha}$ kakega (zveznega) vektorskega polja $\vec{f}$ velja $\vec{\alpha}(b) = \vec{\alpha}(a)$ za kaka $b \neq a$ $(a, b \in \mathbb{R})$, potem je $\vec{\alpha}$ definirana povsod na $\mathbb{R}$ in periodična s periodo $\omega := b - a$, torej $\vec{\alpha}(t + \omega) = \vec{\alpha}(t)$ za vsak $t \in \mathbb{R}$. (Namig:

Funkcija $\vec{\beta}(t) := \vec{\alpha}(t+\omega)$ zadošča isti diferencialni enačbi in istemu začetnemu pogoju v a kot $\vec{\alpha}$.)

4. Naj bo $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^n$ zvezno odvedljivo vektorsko polje in $\vec{\varphi}$ njegov tok. Zvezno odvedljivo funkcijo $\vec{g} : D \to \mathbb{R}$, ki ima konstantno vrednost vzdolž vsake tokovnice polja (torej funkcija $t \mapsto g(\vec{\varphi}(t,x))$ je konstantna za vsak $x \in D$) imenujemo *prvi integral* sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$. Dokažite, da za vsako tako točko $\vec{x}_0 \in D$, da je $\vec{f}(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$, obstaja taka odprta okolica V, da na njej obstaja $n-1$ neodvisnih prvih integralov. Pri tem imenujemo funkcije (prve integrale) $g_1, \ldots, g_{n-1}$ na V *neodvisne*, če ne obstaja taka funkcija h, ki ni identično 0 na nobeni odprti množici v $\mathbb{R}^{n-1}$, da je $h(g_1(\vec{x}), \ldots, g_{n-1}(\vec{x})) = 0$ za vse $\vec{x} \in V$. (Navodilo: Ker je vektor $\vec{f}(\vec{x}_0)$ različen od $\vec{0}$, je ena od njegovih komponent različna od 0, recimo $f_1(\vec{x}_0) \neq 0$. Naj bodo $x_{0,j}$ koordinate vektorja $\vec{x}_0$. Za poljuben vektor $\vec{u} = (x_{0,1}, u_2, \ldots, u_n) \in D$ opazujmo rešitev $\vec{x}(t; u_2, \ldots, u_n)$ enačbe $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ pri začetnem pogoju $\vec{x}(0) = \vec{u}$. Izračunajte, da je Jacobijeva matrika preslikave $(t; u_2, \ldots, u_n) \mapsto \vec{x}(t; u_2, \ldots, u_n)$ v $(0; u_2, \ldots, u_n)$ oblike

$$\begin{bmatrix} f_1(x_{0,1}, u_2, \ldots, u_n) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ * & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ * & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

in je torej v točki $(0; x_{0,2}, \ldots, x_{0,n})$ obrnljiva, ker je $f_1(\vec{x}_0) \neq 0$. Po izreku o inverzni preslikavi [26, izrek 6.3.5] zato obstaja taka odprta okolica W točke $(0; x_{0,2}, \ldots, x_{0,n})$, ki jo $\vec{x}$ preslika bijektivno na kako odprto okolico V točke $\vec{x}(0; x_{0,2}, \ldots, x_{0,n}) = \vec{x}_0$ in da je inverzna preslikava zvezno odvedljiva. To pomeni, da iz enačbe $\vec{x} = \vec{x}(t; u_2, \ldots, u_n)$ lahko izrazimo t in $u_2, \ldots, u_n$ kot zvezno odvedljive funkcije argumenta $\vec{x} \in V$. Te funkcije $\vec{x} \mapsto u_j(\vec{x})$ $(\vec{x} \in V)$ so konstantne vzdolž tokovnic polja $\vec{f}$. Premislite, da so tudi neodvisne.)

5. Naj bo $\vec{\varphi} : D(\vec{f}) \to D$ tok vektorskega polja $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^n$ razreda vsaj C^1. Dokažite, da za vsak $\vec{x}_0 \in D$ obstaja tak $\delta > 0$ in za vsak $t \in (-\delta, \delta)$ taka okolica $V_t \subseteq D$, da je preslikava $\vec{x} \mapsto \vec{\varphi}(t, \vec{x})$ bijekcija iz V_t na neko odprto podmnožico v D, katere inverz je zvezno odvedljiv.

6. Naj bo M gladka podmnogoterost v $\mathbb{R}^n$ (npr. implicitno podana hiperploskev $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : F(\vec{x}) = 0\}$ za kako zvezno odvedljivo funkcijo F z gradientom $\vec{\nabla} F(\vec{x}) \neq \vec{0}$ za vsak $\vec{x} \in M$), $\vec{f}$ pa tako zvezno odvedljivo vektorsko polje, definirano na kaki odprti okolici množice M, da je za vsak $\vec{x} \in M$ vektor $\vec{f}(\vec{x})$ tangenten na M v točki $\vec{x}$. Dokažite, da vsaka tokovnica polja $\vec{f}$, ki ima kako skupno točko z M, leži celotna v M.

POGLAVJE 2

Holomorfne funkcije

V tem poglavju bomo proučevali odvedljive funkcije kompleksne spremenljivke. Odvod bomo definirali na enak način kot za funkcije realne spremenljivke, vendar bomo spoznali, da imajo kljub temu v kompleksnem smislu odvedljive funkcije presenetljive lastnosti, ki jih funkcije realne spremenljivke nimajo. Kompleksna analiza je učinkovito orodje tudi pri obravnavi problemov realne analize in problemov iz drugih področij matematike.

2.1. Poti in območja v kompleksni ravnini

Preslikavo $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ lahko zapišemo v obliki $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$, kjer sta γ_1 in γ_2 preslikavi iz $[a, b]$ v $\mathbb{R}$. Rekli bomo, da je γ *odvedljiva*, če sta odvedljivi γ_1 in γ_2; tedaj definiramo *odvod* $\gamma'(t)$ kot

$$\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t) \quad (t \in [a, b]).$$

Namesto $\gamma'(t)$ bomo pisali tudi $\dot{\gamma}(t)$. Preslikavo γ bomo imenovali *zvezno odvedljiva* ali *razreda* C^1, če je γ' zvezna preslikava (tj. γ_1' in γ_2' sta zvezni funkciji iz $[a, b]$ v $\mathbb{R}$). Če je γ zvezna in se da interval $[a, b]$ razdeliti na končno mnogo zaprtih podintervalov, na katerih je γ zvezno odvedljiva, na krajiščih teh podintervalov pa ima γ' končne leve in desne limite, bomo rekli, da je γ *odsekoma zvezno odvedljiva*.

Definicija 2.1.1. Naj bo D odprta podmnožica kompleksne ravnine $\mathbb{C}$. *Pot* v D je odsekoma zvezno odvedljiva preslikava $\gamma : [a, b] \to D$, kjer je $[a, b]$ zaprt interval v $\mathbb{R}$. Točko $\gamma(a)$ imenujemo *začetna*, $\gamma(b)$ pa *končna* točka poti γ. Množico D imenujemo *s potmi povezano*, če za vsaki točki $z, w \in D$ obstaja taka pot γ v D, da je $\gamma(a) = z$ in $\gamma(b) = w$.

Opomba 2.1.2. (i) Običajno pojem povezanosti s potmi definiramo brez zahteve, da mora biti preslikava γ odsekoma odvedljiva, zadošča le zveznost, vendar se je lahko prepričati, da sta za odprte množice D v ravnini definiciji ekvivalentni. (Vsako zvezno preslikavo $\gamma : [a, b] \to D$ namreč lahko poljubno dobro aproksimiramo z odsekoma linearno preslikavo, se pravi s poligonsko krivuljo. Še več, vsako tako pot je mogoče poljubno natančno aproksimirati z zvezno odvedljivo potjo, zato bi se v definiciji povezanosti s potmi za odprte množice lahko omejili na zvezno odvedljive poti.)

(ii) Vsaka s potmi povezana množica D je *povezana* (kar pomeni, da je iz enega kosa) v naslednjem smislu: edini razcep množice D na unijo $D = D_1 \cup D_2$ dveh disjunktnih odprtih (relativno v D) podmnožic je, ko je ena od množic D_i prazna, druga pa enaka D. Za odprte množice v ravnini sta pojma povezanosti in povezanosti s potmi ekvivalentna, tj. D je povezana natanko takrat, ko je s potmi povezana. Dokaze teh znanih dejstev je mogoče najti v mnogih knjigah, npr. tudi v [26, trditev 5.5.5].

Definicija 2.1.3. Odprto povezano množico v kompleksni ravnini $\mathbb{C}$ bomo imenovali *območje.*

Kdaj pa kdaj je koristno kompleksno ravnino razširti s dodatno točko ∞, torej kompaktificirati z eno točko.

Definicija 2.1.4. *Razširjena kompleksna ravnina* je $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. *Okolice točke* ∞ so množice oblike $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$, kjer je K kompaktna podmnožica v $\mathbb{C}$.

Naloga

1. (*Razširjena kompleksna ravnina kot sfera*) Naj bo S sfera v $\mathbb{R}^3$ s središčem v 0 in polmerom 1 ter N njen severni pol, torej točka $(0, 0, 1)$. Kompleksno ravnino si zamislimo kot ravnino x, y na običajni način. Naj bo $f : S \to \hat{\mathbb{C}}$ preslikava, ki vsaki točki $T \in S \setminus \{N\}$ priredi presečišče premice skozi N in T z ravnino $\mathbb{C}$, in naj bo $f(N) = \infty$. Izpeljite formulo za $f(T)$ kot funkcijo koordinat (x, y, z) točke T ter pokažite, da je f bijektivna, neskončnokrat odvedljiva preslikava ter da je taka tudi njena inverzna preslikava. Med drugim je torej f homeomorfizem, zato je $\hat{\mathbb{C}}$, topološko gledano, sfera. Imenujemo jo *Riemannova sfera*, preslikavi f pa pravimo *stereografska projekcija.*

2.2. Odvedljivost v kompleksnem smislu in konformnost

2.2.1. Kompleksna odvedljivost

Definicija 2.2.1. Naj bo $f : D \to \mathbb{C}$ funkcija, definirana na odprti množici $D \subseteq \mathbb{C}$. Pravimo, da je f *odvedljiva v kompleksnem smislu* ali *holomorfna* v točki $z \in D$, če obstaja limita

$$f'(z) := \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

To limito imenujemo *odvod funkcije f v točki z.* Če je f odvedljiva v vsaki točki $z \in D$, rečemo, da je f *holomorfna na D.*

Zgled 2.2.2. Funkcija $f(z) = \bar{z}$ ni odvedljiva v nobeni točki $z \in \mathbb{C}$. Označimo namreč razliko $w - z$ z h. Ugotoviti moramo, ali obstaja limita kvocientov

$$\frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \frac{\bar{h}}{h},$$

ko gre h proti 0. Ko napišemo h v polarni obliki, $h = a|h|$, kjer je $|a| = 1$, vidimo, da je $\frac{\bar{h}}{h} = \frac{\bar{a}}{a}$, vrednost tega izraza pa je odvisna od a, torej od argumenta števila h, in ne konvergira nikamor, ko gre $|h|$ proti 0. Če npr. h konvergira proti 0 po realnih vrednostih, je kvocient $\frac{\bar{h}}{h}$ enak 1. Če pa je h oblike $h = ki$, kjer je $k \in \mathbb{R}$, je $\frac{\bar{h}}{h} = -1$, ne glede na to, kako majhen je k.

Enak račun kot pri funkcijah realne spremenljivke pokaže, da so vse potence $f_n(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$) odvedljive in $f_n'(z) = nz^{n-1}$. Za kompleksen odvod veljajo enaka formalna pravila kot za odvod funkcij realne spremenljivke; tako je npr. $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ (Leibnizova formula). Ker so dokazi enaki kot pri funkcijah realne spremenljivke, jih bomo tukaj opustili. Racionalne funkcije (npr. polinomi) so torej odvedljive v kompleksnem smislu. Nadaljnji zgledi so funkcije, definirane s potenčnimi vrstami. Potenčna vrsta

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{2.2.1}$$

kjer so a_n kompleksna števila, konvergira v notranjosti kroga s središčem 0 in polmerom

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{2.2.2}$$

ki ga imenujemo *konvergenčni polmer vrste*. Zunaj tega kroga pa vrsta (2.2.1) divergira. Dokaz tega je enak kot za realne vrste, ki je znan iz osnov analize, kjer namesto kroga nastopa interval. (R je lahko tudi 0 ali pa ∞.) Za točke z iz robne krožnice (torej za $|z| = R$) na splošno ne moremo vnaprej povedati, ali vrsta konvergira. S formalnim odvajanjem vrste (2.2.1) dobimo vrsto

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}. \tag{2.2.3}$$

Ker je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, preprost račun pove, da je konvergenčni polmer vrste (2.2.3) enak konvergenčnemu polmeru vrste (2.2.1), torej R. Na vsakem manjšem krogu $|z| \le r < R$ potenčna vrsta (2.2.3) konvergira enakomerno (dokaz je spet enak kot za realne vrste), zato velja naslednja trditev, katere neposreden dokaz (brez sklicevanja na izreke o konvergenci funkcijskih vrst) bomo orisali v nalogi 1.

Trditev 2.2.3. *Funkcija f, podana s potenčno vrsto* (2.2.1), *je holomorfna na krogu $|z| < R$, kjer je njen odvod enak $f'(z) = g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. Tukaj je R konvergenčni polmer vrste* (2.2.1).

Trditev 2.2.3 lahko uporabimo tudi na vrsti (2.2.3), namesto na (2.2.1), nato na njenem odvodu itd. Tako (in z vpeljavo nove spremenljivke $w = z - \alpha$) izpeljemo naslednjo posledico:

Posledica 2.2.4. *Če vrsta $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ konvergira na krogu $|z-\alpha| < R$, potem je funkcija f neskončnokrat odvedljiva (v kompleksnem smislu) in $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-\alpha)^{n-k}$. Torej je*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}.$$

Zgled 2.2.5. Eksponentna funkcija

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

je holomorfna na celotni kompleksni ravnini $\mathbb{C}$, saj njena vrsta konvergira za vsak $z \in \mathbb{C}$. Isto velja potem tudi za funkcije $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$, $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $\operatorname{sh} z = -i \sin(iz)$ in $\operatorname{ch} z = \cos(iz)$. Nadalje za poljubna $z, w \in \mathbb{C}$ velja

$$\begin{aligned} e^z e^w &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} \frac{z^j}{j!} \frac{w^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j w^{n-j} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w}. \end{aligned}$$

Za $w = -z$ sledi od tod $e^z e^{-z} = 1$, torej je $e^z \neq 0$ za vsak $z \in \mathbb{C}$. Za realna x in y velja $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$, in ker je $|e^{iy}| = 1$ ter $e^x > 0$, sledi $|e^{x+iy}| = e^x$. Torej je

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \qquad \text{za vsak } z \in \mathbb{C}.$$

Rešitve enačbe $e^z = 1$ so lahko le tisti $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, za katere je $e^x = |e^z| = 1$ in zato $e^{iy} = \cos y + i \sin y = 1$. Torej je $x = 0$ in $y = 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. S tem smo pokazali, da velja

$$e^z = 1 \Leftrightarrow z = n2\pi i \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

2.2.2. Konformne preslikave

Naj bo $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ kaka zvezno odvedljiva pot, ki naj gre skozi točko $z_0 \in \mathbb{C}$, torej $z_0 = \gamma(t_0)$ za kak $t_0 \in [0,1]$. Tangentni vektor v točki z_0 na pot γ je tedaj (gledan kot kompleksno število) enak $\dot\gamma(t_0)$. Nadalje naj bo f funkcija, ki je definirana in holomorfna na kakem območju, ki vsebuje množico $[\gamma] := \gamma([0,1])$. Tangentni vektor v točki $f(z_0)$ na pot $f \circ \gamma$ je potem $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t_0) = f'(z_0)\dot\gamma(t_0)$. Pri tem privzemimo, da je $f'(z_0) \neq 0$. Dolžina tega tangentnega vektorja je torej $|f'(z_0)||\dot\gamma(t_0)|$, njegov argument pa $\arg \dot\gamma(t_0) + \arg f'(z_0)$. Za dve taki, v točki z_0 sekajoči se poti γ_1, γ_2, je kot med njima (se pravi kot med njunima tangentnima vektorjema $\dot\gamma_j(t_j)$, kjer je $\gamma_j(t_j) = z_0$, $j = 1, 2$) enak $\psi := \arg \dot\gamma_2(t_2) - \arg \dot\gamma_1(t_1)$. Kot med potema $f \circ \gamma_1$ in $f \circ \gamma_2$ v presečišču $f(z_0)$ pa je $\arg \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_2)(t_2) - \arg \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1)(t_1) = (\arg f'(z_0) + \arg \dot\gamma_2(t_2)) - (\arg f'(z_0) + \arg \dot\gamma_1(t_1)) = \psi$. Torej preslikava f ohranja kote med krivuljami. Zato imenujemo holomorfne preslikave z neničelnim odvodom tudi *konformne preslikave*. Več o tem bomo povedali v 6. nalogi.

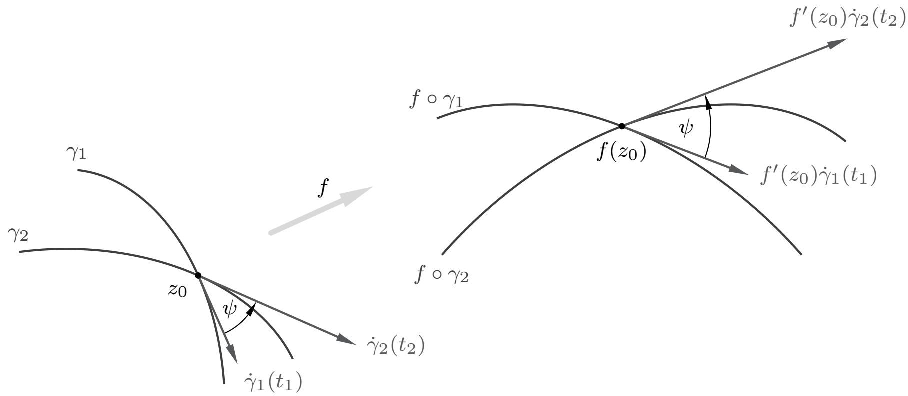

FIGURE 2.1. Konforma preslikava f ohranja kote.

Naloge

1. Naj bosta f in g kot v trditvi 2.2.3. Dokažite z neposrednim računom, da je

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) = 0 \tag{2.2.4}$$

za vsak z iz kroga $|z| < R$, kjer je R konvergenčni polmer vrste za f. (Rešitev: Z uporabo identitete $w^k - z^k = (w-z)(w^{k-1} + w^{k-2}z + w^{k-3}z^2 + \ldots + wz^{k-2} + z^{k-1})$, ki velja za vsako naravno število k in jo lahko preverimo z neposrednim računom, lahko zapišemo

$$\begin{aligned}
&\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) = \\
&\qquad = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{w^n - z^n}{w - z} - nz^{n-1}\right] \\
&\qquad = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[w^{n-1} + w^{n-2}z + \ldots + wz^{n-2} + z^{n-1} - nz^{n-1}\right] \\
&\qquad = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \big[(w^{n-1} - z^{n-1}) + z(w^{n-2} - z^{n-2}) + \\
&\qquad\qquad\qquad + z^2(w^{n-3} - z^{n-3}) + \ldots + z^{n-2}(w - z)\big] \\
&\qquad = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (w - z)\big[(w^{n-2} + w^{n-3}z + \ldots + z^{n-2}) + \\
&\qquad\qquad\qquad + z(w^{n-3} + w^{n-4}z + \ldots + z^{n-3}) + \ldots + z^{n-2}\big] \\
&\qquad = (w - z) \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[w^{n-2} + 2w^{n-3}z + 3w^{n-4}z^2 + \ldots + (n-1)z^{n-2}\right].
\end{aligned}$$

Izberimo $r \in \mathbb{R}$ tako, da bo $|z| < r < R$. Potem za vsak w, ki je dovolj blizu z, velja $|w| < r$ in iz zgornjega računa sledi

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z} - g(z)\right| \leq \\
&\qquad \leq |w-z| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \left[|w|^{n-2} + 2|w|^{n-3}|z| + \ldots + (n-1)|z|^{n-2}\right] \\
&\qquad \leq |w-z| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \left[r^{n-2} + 2r^{n-2} + \ldots + (n-1)r^{n-2}\right] \\
&\qquad = |w-z| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \frac{n(n-1)}{2}\, r^{n-2}.
\end{aligned}
$$

Zadnja vsota je končna, saj je konvergenčni polmer vrste $\sum_n |a_n| \frac{n(n-1)}{2} z^n$ enak $\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{n(n-1)}{2}|a_n|}} = R$ in je $r < R$. Zato iz gornje ocene sledi, da res velja (2.2.4).)

2. Določite vse kompleksne ničle funkcij sin, cos, sh in ch.

3. Dokažite identiteto $|\sin(x+iy)|^2 = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x$ za $x, y \in \mathbb{R}$.

4. (i) Naj bo (a_n) padajoče zaporedje pozitivnih števil z limito 0, (b_n) pa tako zaporedje kompleksnih števil, da so delne vsote s_n vrste $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ omejene, torej, da obstaja taka konstanta $M \in \mathbb{R}$, da je $|s_n| = |\sum_{j=0}^{n} b_j| \leq M$ za vsak n. Dokažite, da tedaj vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ konvergira. (Nasvet: Po Cauchyevem kriteriju za konvergenco vrst zadošča pokazati, da za vsak $\varepsilon > 0$ velja $|\sum_{j=m}^{n} a_j b_j| < \varepsilon$ za vsaka dovolj velika $m < n$. Opazimo, da je $|\sum_{j=m}^{n} a_j b_j| = |\sum_{j=m}^{n} a_j(s_j - s_{j-1})| = |-a_m s_{m-1} + \sum_{j=m}^{n-1}(a_j - a_{j+1})s_j + a_n s_n| \leq a_m|s_{m-1}| + \sum_{j=m}^{n-1}(a_j - a_{j+1})|s_j| + a_n|s_n| \leq M(a_m + \sum_{j=m}^{n-1}(a_j - a_{j+1}) + a_n) = 2Ma_m$.)

(ii) Naj bo (a_n) kot v točki (i), (f_n) pa tako zaporedje funkcij $f : D \to \mathbb{C}$, da je $|\sum_{j=0}^{n} f_n(z)| \leq M$ za kako konstanto M (ki je ista za vse n in vse $z \in D$). Dokažite, da je potem vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n$ enakomerno konvergentna na D.

5. Naj bo (a_n) kot v prejšnji nalogi. Pokažite, da vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergira enakomerno na množici $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1,\ |z-1| \geq \varepsilon\}$ za vsak $\varepsilon > 0$.

***6.** Za vsak $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ naj bo $A(z) = \frac{z}{|z|}$. Naj bo $f : D \to \mathbb{C}$ poljubna preslikava, definirana na ravninskem območju D, in $z_0 \in D$ poljubna točka. Označimo z $\tilde{D}(z_0, r) := D(0, r) \setminus \{z_0\}$ krog s središčem z_0 in polmerom $r > 0$, iz katerega smo izvzeli središče z_0. Naj bo r dovolj majhen, da je $D(z_0, r) \subseteq D$ in privzemimo, da je $f(z) \neq f(z_0)$ za vse $z \in \tilde{D}(z_0, r)$. Če obstaja limita

$$\lim_{r \to 0} e^{-i\varphi} A[f(z_0 + re^{i\varphi}) - f(z_0)]$$

in je neodvisna od φ, pravimo, da f *ohranja kote v točki* z_0. (Tedaj f ohranja tako velikost kot smer kotov.) Dokažite naslednje:

Če je f holomorfna v točki z_0 in je $f'(z_0) \neq 0$, potem f ohranja kote v z_0. Še obratno, če je f (v realnem smislu) diferenciabilna v točki z_0 in je $(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)) \neq 0$ ter f ohranja kote v z_0, potem je f holomorfna v točki z_0 in $f'(z_0) \neq 0$.

(Rešitev: Zaradi enostavnejšega zapisa bomo, brez izgube splošnosti, vzeli, da je $z_0 = 0$ in $f(0) = 0$. Če je f holomorfna v točki $z_0 = 0$ in $f'(z_0) \neq 0$, označimo $z = re^{i\varphi}$, in opazimo, da je

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0} e^{-i\varphi} A(f(re^{i\varphi}) - f(0)) &= \lim_{r\to 0} e^{-i\varphi} \frac{f(re^{i\varphi})}{|f(re^{i\varphi})|} \\ &= \lim_{z\to 0} \left| \frac{z-0}{f(z)-f(0)} \right| \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{f'(0)}{|f'(0)|}.\end{aligned}$$

Torej tedaj limita obstaja in je neodvisna od φ, zato f ohranja kote v z_0.

Če je f v realnem smislu diferenciabilna v točki $z_0 = 0$ in $f(0) = 0$, pokažite, da za vse dovolj majhne $|z|$ velja

$$f(z) = \alpha z + \beta \bar{z} + |z|\eta(z), \tag{2.2.5}$$

kjer sta α in β konstanti, η pa taka funkcija, da je $\lim_{z\to 0} \eta(z) = 0$. Pri tem je $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, ker smo privzeli, da je $(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)) \neq 0$. Če f ohranja kote v $z_0 = 0$, potem mora biti limita

$$\lim_{r\to 0} e^{-i\varphi} A(f(re^{i\varphi})) = \lim_{r\to 0} e^{-i\varphi} \frac{\alpha re^{i\varphi} + \beta re^{-i\varphi} + r\eta(re^{i\varphi})}{|\alpha re^{i\varphi} + \beta re^{-i\varphi} + r\eta(re^{i\varphi})|} = \frac{\alpha + \beta e^{-2i\varphi}}{|\alpha + \beta e^{-2i\varphi}|}$$

neodvisna od φ, zato mora biti $\beta = 0$. Sedaj pa iz (2.2.5) sledi, da je f holomorfna v točki 0 in $f'(0) = \alpha$.)

2.3. Cauchy-Riemannovi enakosti

Kompleksno funkcijo $f : D \to \mathbb{C}$ lahko razstavimo na realni in imaginarni del,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{2.3.1}$$

Tukaj sta u in v funkciji na odprti množici D, ki ju bomo obravnavali kot funkciji dveh realnih spremenljivk x, y, namesto kompleksne spremenljivke $z = x + iy$. Če je f holomorfna, je

$$\lim_{h\to 0,\ h\in\mathbb{R}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) = \lim_{h\to 0,\ h\in\mathbb{R}} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih}. \tag{2.3.2}$$

Z upoštevanjem zapisa (2.3.1) se relacija (2.3.2) glasi

$$\lim_{h\to 0,\ h\in\mathbb{R}}\left[\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}+i\frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h}\right]=f'(z)=$$
$$=\frac{1}{i}\lim_{h\to 0,\ h\in\mathbb{R}}\left[\frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{h}+i\frac{v(x,y+h)-v(x,y)}{h}\right].$$

Od tod sklepamo, da sta u in v odvedljivi funkciji in

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=f'(z)=\frac{1}{i}\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right]. \tag{2.3.3}$$

Ko primerjamo realna in imaginarna dela v realiciji (2.3.3), dobimo *Cauchy-Riemannovi enakosti*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{in} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.3.4}$$

Tako smo delno dokazali naslednji izrek:

Izrek 2.3.1. *Bodita u in v realni funkciji na odprti množici D v ravnini. Če je funkcija $f=u+iv$ holomorfna na D, sta u in v odvedljivi (v realnem smislu) in veljata Cauchy-Riemannovi enakosti* (2.3.4). *V obratno smer pa velja: če so parcialni odvodi $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ in $\frac{\partial v}{\partial y}$ zvezni na D in veljata Cauchy-Riemannovi enakosti* (2.3.4), *potem je f holomorfna na D in $f'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$.*

Proof. Dokazati moramo le še drugi del izreka. Naj bo $z=x+iy\in D$ in $h=h_1+ih_2$ tako majhen, da je $z+h\in D$. Razliko

$$f(z+h)-f(z)=u(x+h_1,y+h_2)-u(x,y)+i[v(x+h_1,y+h_2)-v(x,y)] \tag{2.3.5}$$

bomo izrazili s pomočjo diferencialov. Tako je npr.

$$\begin{aligned} &u(x+h_1,y+h_2)-u(x,y)=\\ &\qquad=[u(x+h_1,y+h_2)-u(x+h_1,y)]+[u(x+h_1,y)-u(x,y)]\\ &\qquad=\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x+h_1,y)h_2+\tilde{o}_2(h_2)h_2\right]+\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)h_1+\tilde{o}_1(h_1)h_1\right],\end{aligned}$$

kjer sta $\tilde{o}_1(h_1)$ in $\tilde{o}_2(h_2)$ količini, (sicer odvisni tudi od x,y) ki gresta proti 0, ko gresta h_1 in h_2 proti 0. Ker je po predpostavki funkcija $\frac{\partial u}{\partial y}$ zvezna, je $\frac{\partial u}{\partial y}(x+h_1,y)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\eta(h_1)$, kjer je $\lim_{h_1\to 0}\eta(h_1)=0$. Zato lahko gornji izraz napišemo kot

$$u(x+h_1,y+h_2)-u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)h_2+\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)h_1+ho_1(h),$$

kjer je $o_1(h)=\frac{(\eta(h_1)+\tilde{o}_2(h_2))h_2+\tilde{o}_1(h_1)h_1}{h}$. Ker je $|h_1|\le|h|$ in $|h_2|\le|h$, je lahko videti, da gre $o_1(h)$ proti 0, ko gre h proti 0. Ko na podoben način izrazimo tudi razliko

$v(x+h_1, y+h_2) - v(x,y)$, lahko izraz (2.3.5) preoblikujemo v

$$\begin{aligned} &f(z+h) - f(z) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)h_2 + i\left[\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)h_2\right] + h(o_1(h) + io_2(h)), \end{aligned}$$

kjer gresta $o_1(h)$ in $o_2(h)$ proti 0, ko gre h proti 0. Z upoštevanjem Cauchy-Riemannovih enakosti (2.3.4) (in zveze $h = h_1 + ih_2$) lahko zadnjo enakost preoblikujemo v

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)h_1 - \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)h_2 + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)h_1 + i\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)h_2 \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\right] h + ho(h), \end{aligned}$$

kjer je $o(h) = o_1(h) + o_2(h)$. Ker je $\lim_{h\to 0} o(h) = 0$, sledi od tod, da je

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \qquad \square$$

Gornji dokaz bi lahko nekoliko skrajšali, če bi uporabili znano dejstvo, da je funkcija z zveznimi parcialnimi odvodi diferenciabilna v realnem smislu.

Definicija 2.3.2. Dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo, definirano na odprti množici $D \subseteq \mathbb{R}^n$, imenujemo *harmonična* na D, če je

$$\Delta u := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) = 0 \qquad (x \in D).$$

Operator Δ imenujemo *Laplaceov operator*.

Kasneje bomo pokazali, da je vsaka holomorfna funkcija neskončnokrat odvedljiva; isto potem velja tudi za njen realni del u in imaginarni del v. Iz Cauchy-Riemannovih enakosti sledi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0.$$

Tako bo dokazan prvi del naslednje trditve:

Trditev 2.3.3. *Realni in imaginarni del holomorfne funkcije sta harmonični funkciji. Na enostavno povezanem območju je vsaka harmonična funkcija realni del kake holomorfne funkcije.*

Za odprto množico $D \subseteq \mathbb{C}$ lahko definiramo, da je *enostavno povezana*, če je njen komplement v razširjeni ravnini $\hat{\mathbb{C}}$ povezan. (Intuitivno to pomeni, da D nima lukenj.) Na taki množici velja (posledica Greenove formule), da za dani zvezno odvedljivi (realni) funkciji M in N na D obstaja taka funkcija F, da je $(M,N) = \vec{\nabla} F = \operatorname{grad} F$, natanko tedaj, ko je $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Če je u harmonična funkcija na D, potem funkciji

$M = -\frac{\partial u}{\partial y}$ in $N = \frac{\partial u}{\partial x}$ zadoščata pogoju $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, torej obstaja taka funkcija v na D, da je $\vec{\nabla} v = (M, N)$, se pravi $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ in $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$. To pomeni, da je funkcija $f := u + iv$ holomorfna, saj sta izpolnjeni Cauchy-Riemannovi enakosti. S tem je dokazan zadnji del trditve 2.3.3.

Naloge

1. Namesto realnih spremenljivk x in y obravnavajmo $z = x + iy$ in $\bar{z} = x - iy$ kot neodvisni spremenljivki, torej je $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ in $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ ter (po pravilu za posredno odvajanje) $\partial f := \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}$ in $\bar{\partial} f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}$. Pokažite, da je sistem Cauchy-Riemannovih enačb za funkcijo $f = u + iv$ ekvivalenten eni sami enačbi

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

in da za holomorfno funkcijo f velja $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$.

2. Naj bo $f = u + iv$ holomorfna preslikava, kjer sta u in v realni funkciji, in naj bo F preslikava, definirana kot $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Pokažite, da je Jacobijeva determinanta preslikave F enaka $|f'(z)|^2$.

3. Prepričajte se, da je funkcija $u(x, y) = x^2 - y^2$ harmonična in poiščite vse holomorfne funkcije, katerih realni del je u.

2.4. Integriranje kompleksnih funkcij

Definicija 2.4.1. *Integral kompleksne funkcije* $f = u + iv$, kjer sta u in v realni integrabilni funkciji na intervalu $[a, b]$, definiramo kot

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt.$$

Funkcijo $f = u + iv$ imenujemo *integrabilna*, če sta integrabilni funkciji u in v.

Integral kompleksnih funkcij ima podobne lastnosti kot integral realnih funkcij, npr.

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\, dt = \alpha \int_a^b f\, dt + \beta \int_a^b g\, dt$$

za poljubni konstanti $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ in integrabilni kompleksni funkciji f in g. Integral kompleksne funkcije f na intervalu $[a, b]$ bi lahko ekvivalentno definirali tudi kot limito Riemannovih vsot $\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(t_j - t_{j-1})$ ($\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$), ko gre širina $\max_{1 \le j \le n}(t_j - t_{j-1})$ delitve $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{j-1} < t_j < \ldots < t_n = b$ intervala $[a, b]$ proti 0. Iz te definicije bi bila naslednja trditev očitna.

Trditev 2.4.2. $|\int_a^b f\, dt| \le \int_a^b |f|\, dt \quad (a \le b)$.

Proof. Brez škode smemo predpostaviti, da je $\int_a^b f\,dt \neq 0$, sicer ni kaj dokazovati. Naj bo ω kompleksno število z absolutno vrednostjo 1 in argumentom, nasprotnim argumentu števila $\int_a^b f\,dt$. Torej je $\int_a^b \omega f\,dt = \omega\int_a^b f\,dt = |\int_a^b f\,dt|$ realno število in zato

$$\left|\int_a^b f\,dt\right| = \int_a^b \omega f\,dt = \operatorname{Re}\int_a^b \omega f\,dt = \int_a^b \operatorname{Re}(\omega f)\,dt \leq \int_a^b |\omega f|\,dt = \int_a^b |f|\,dt.$$

Pri tem smo upoštevali, da je $\operatorname{Re}(\omega f) \leq |\omega f|$ in da je $|\omega| = 1$. □

Definicija 2.4.3. Če je $\gamma : [a,b] \to D$ zvezno odvedljiva, $f : D \to \mathbb{C}$ pa zvezna funkcija, kjer je $D \subseteq \mathbb{C}$ poljubna množica, ki vsebuje $\gamma([a,b])$, definiramo *krivuljni integral* kot

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Če je $\gamma : [a,b] \to D$ poljubna pot (torej le odsekoma zvezno odvedljiva), pa najprej razdelimo $[a,b]$ na podintervale $[t_{j-1}, t_j]$, na katerih je γ zvezno odvedljiva, in definiramo $\int_\gamma f(z)\,dz$ kot vsoto integralov $\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$.

S pomočjo formule za vpeljavo nove spremenljivke v določeni integral sledi, da je zgoraj definirali krivuljni integral neodvisen od parametrizacije krivulje:

Trditev 2.4.4. *Če je $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ naraščajoča zvezno odvedljiva bijekcija, je $\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$.*

Zgled 2.4.5. Formula $\gamma(t) = \alpha + re^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$ predstavlja krožnico s središčem α in polmerom r. Krivuljni integral funkcije f po tej krožnici je

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{it})ire^{it}\,dt.$$

Za funkcijo $f(z) = (z-\alpha)^{-1}$ izračunamo

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-\alpha} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Ločni element ds na krivulji $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a,b]$, kjer sta x in y zvezno odvedljivi funkciji parametra t, je $ds = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}^2(t)}\,dt = |\gamma'(t)|\,dt = |d\gamma|$. Zato je dolžina te poti

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

Ocenimo še krivuljni integral poljubne zvezne funkcije f po poti $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ $(a \leq b)$.

Trditev 2.4.6. $|\int_\gamma f(z)\,dz| \leq \int_\gamma |f(z)|\,ds$.

Proof.

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t)\gamma'(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)||\gamma'(t)|\,dt = \int_\gamma |f(z)|\,ds.$$ □

Definicija 2.4.7. Poti $\gamma : [a, b] \to D$ *nasprotna* je *pot*

$$\gamma^- : [a, b] \to D, \qquad \gamma^-(t) = \gamma(a + b - t).$$

Ko teče t od a do b, potuje točka $\gamma(t)$ od $\gamma(a)$ do $\gamma(b)$, točka $\gamma^-(t)$ pa v nasprotni smeri od $\gamma(b)$ do $\gamma(a)$. Dokaz naslednje trditve bomo pustili za vajo.

Trditev 2.4.8. $\int_{\gamma^-} f(z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz$.

Za dve taki poti $\gamma_j : [a_j, b_j] \to D$, da je končna točka prve enaka začetni točki druge, torej $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, lahko definiramo *vsoto* $\gamma_1 + \gamma_2$, če najprej reparametriziramo npr. drugo pot kot

$$\tilde{\gamma}_2 : [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \to D, \qquad \tilde{\gamma}_2(t) = \gamma_2(a_2 - b_1 + t)$$

ter nato postavimo

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a_1, b_1] \\ \tilde{\gamma}_2(t), & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2]. \end{cases}$$

Opozoriti moramo, da ta operacija seštevanja poti ni komutativna, saj morda $\gamma_2 + \gamma_1$ sploh ni definirana, čeprav $\gamma_1 + \gamma_2$ je. Lahko pa se je prepričati, da velja

Trditev 2.4.9. $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$.

Definicija 2.4.10. Pot $\gamma : [a, b] \to D$ je *sklenjena*, če je $\gamma(b) = \gamma(a)$.

Če imata poti γ_1 in γ_2 isto začetno in isto končno točko, potem je $\gamma_1 + \gamma_2^-$ sklenjena pot. Od tod in iz trditev 2.4.8 in 2.4.9 takoj sledi naslednja lema.

Lema 2.4.11. *Naj bo $f : D \to \mathbb{C}$ (zvezna) funkcija. Potem je $\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$ za vsaki dve poti γ_1 in γ_2 v D, ki imata isto začetno in isto končno točko, natanko tedaj, ko je $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ za vsako sklenjeno pot γ v D.*

V naslednji lemi je privzetek, da je F' zvezna (torej integrabilna) funkcija, vedno izpolnjen, vendar bomo to spoznali šele kasneje.

Lema 2.4.12. *Za vsako holomorfno funkcijo $F : D \to \mathbb{C}$ z zveznim odvodom in vsako pot $\gamma : [a, b] \to D$ je*

$$\int_\gamma F'(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Proof. Po definiciji krivuljnega integrala je $\int_\gamma F'(z)\, dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t))\, dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. □

Izrek 2.4.13. *Naj bo $f : D \to \mathbb{C}$ taka zvezna funkcija na območju D, da je $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ za vsako sklenjeno pot γ v D. Potem obstaja taka holomorfna funkcija F na D, da je $f = F'$.*

Proof. Izberimo točko $\alpha \in D$ in za vsak $z \in D$ definirajmo

$$F(z) = \int_\alpha^z f(w)\,dw := \int_\gamma f(w)\,dw, \tag{2.4.1}$$

kjer je γ poljubna pot v D z začetno točko α in končno točko z. Iz leme 2.4.11 sledi, da je $F(z)$ nedvoumno definirana vrednost, saj je integral $\int_\gamma f(w)\,dw$ enak za vse poti z začetkom v α in koncem z. Da bi določili $F'(z)$, naj bo $\gamma_1 = [z, z+h]$ daljica od z do $z+h$. Ker je funkcija f zvezna v točki z, je za poljuben $\varepsilon > 0$, $|f(z+h) - f(z)| < \varepsilon$, če je le $|h|$ dovolj majhen. Ker je $\int_{\gamma_1} dw = z + h - z = h$, sledi, za dovolj majhne $|h|$, z uporabo trditev 2.4.6, 2.4.9 in leme 2.4.12, da velja

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{h}(F(z+h) - F(z)) - f(z)\right| = \\
&\qquad = \left|\frac{1}{h}\left[\int_{\gamma+\gamma_1} f(w)\,dw - \int_\gamma f(w)\,dw\right] - f(z)\frac{1}{h}\int_{\gamma_1} dw\right| \\
&\qquad = \left|\frac{1}{h}\int_{\gamma_1} (f(w) - f(z))\,dw\right| \le \frac{1}{|h|}\int_{\gamma_1} |f(w) - f(z)|\,ds \\
&\qquad \le \frac{1}{|h|}\int_{\gamma_1} \varepsilon\,ds = \frac{\varepsilon}{|h|}|h| = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Od tod sklepamo, da je $F'(z) = \lim_{h\to 0} h^{-1}(F(z+h) - F(z)) = f(z)$. □

Naloge

1. Izračunajte $\int_\gamma e^{\sin z}\cos z\,dz$, kjer je γ:

(i) krožnica s središčem α in polmerom r;

(ii) daljica od 0 do i.

2. Izračunajte $\int_\gamma y\,dz$, kjer je γ:

(i) daljica od 1 do i;

(ii) zgornja polovica krožnice $|z| = 1$.

3. Izračunajte $\int_{|z|=|\alpha|} |z - \alpha|\,|dz|$.

4. Pokažite, da je za vsako sklenjeno pot γ in holomorfno funkcijo f na $\mathbb{C}$ vrednost integrala $\int_\gamma \overline{f(z)}f'(z)\,dz$ čisto imaginarna.

***5.** Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ taka zvezna funkcija, da je $|\int_a^b f(t)\,dt| = \int_a^b |f(t)|\,dt$. Pokažite, da potem obstaja taka konstanta $\omega \in \mathbb{C}$, da je $f(t) = \omega|f(t)|$ za vse $t \in [a, b]$. (Rešitev: Napišimo kompleksno število $J := \int_a^b f(t)\,dt$ v polarni obliki, $J = \omega|J|$, kjer je $|\omega| = 1$. Potem je (zaradi $\bar\omega\omega = |\omega|^2 = 1$)

$$|J| = \bar\omega J = \bar\omega\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \bar\omega f(t)\,dt. \tag{2.4.2}$$

Ker je leva stran v tej enakosti (nenegativno) realno število, mora biti taka tudi desna stran, torej je

$$\begin{aligned}\int_a^b \bar{\omega} f(t)\,dt = \operatorname{Re}\int_a^b \bar{\omega} f(t)\,dt &= \int_a^b \operatorname{Re}(\bar{\omega} f(t))\,dt\\ &\le \int_a^b |\bar{\omega} f(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt.\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Skrajna leva stran v tej relaciji je $\int_a^b \bar{\omega} f(t)\,dt = \bar{\omega} J = |J| = |\int_a^b f(t)\,dt|$, kar je po predpostavki enako $\int_a^b |f(t)|\,dt$, torej ravno skrajna desna stran v relaciji (2.4.3). Od tod sledi, da mora neenakost v (2.4.3) biti enakost, torej $\int_a^b \operatorname{Re}(\bar{\omega} f(t))\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt$, kar lahko napišemo kot

$$\int_a^b (|f(t)| - \operatorname{Re}(\bar{\omega} f(t)))\,dt = 0.$$

Ker je $|f(t)| - \operatorname{Re}(\bar{\omega} f(t)) \ge |f(t)| - |\bar{\omega} f(t)| = 0$ za vse $t \in [a,b]$ in je integral nenegativne zvezne funkcije (tj. ploščina pod grafom) enak 0 le, ko je funkcija 0, sledi od tod, da je

$$\operatorname{Re}(\bar{\omega} f(t)) = |f(t)| = |\bar{\omega} f(t)|. \tag{2.4.4}$$

To pomeni, da mora biti $\operatorname{Im}(\bar{\omega} f(t) = 0$ (saj bi bilo sicer $|\bar{\omega} f(t)| > \operatorname{Re}(\bar{\omega} f(t)))$, torej je $\bar{\omega} f(t)$ realno število. Toda potem se prva enakost v (2.4.4) glasi $\bar{\omega} f(t) = |f(t)|$ za vse $t \in [a,b]$. Ker je $|\omega| = 1$, to pomeni $f(t) = \omega |f(t)|$.)

6. Predpostavimo, da je $|f'(z)| \le M$ za vse z na konveksni odprti množici D. (Množico D imenujemo *konveksna*, če je za vsaki točki $z, w \in D$ celotna daljica od z do w vsebovana v D.) Pokažite, da je tedaj $|f(w) - f(z)| \le M|w - z|$ za poljubna $z, w \in D$.

7. Naj bo f taka holomorfna funkcija na omejeni odprti povezani množici D, da je funkcija $|f'|$ omejena na D. Pokažite, da je potem tudi funkcija $|f|$ omejena na D

2.5. Ovojno število

Naj bo $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ zvezno odvedljiva sklenjena pot, katere slika $[\gamma] = \gamma([a,b])$ ne vsebuje točke 0. Potem lahko zapišemo $\gamma(t)$ v polarni obliki kot

$$\gamma(t) = r(t) e^{i\varphi(t)}, \tag{2.5.1}$$

kjer je $r(t) = |\gamma(t)|$ in je φ funkcija spremenljivke t, ki jo lahko določimo tako, da bo $\varphi(t)$ argument kompleksnega števila $\gamma(t)$ za vse t dovolj blizu a. Vendar pa se $\varphi(t)$ ne bo nujno ujemala z argumentom števila $\gamma(t)$ za vse $t \in [a,b]$, če naj bo φ zvezna funkcija, saj argument zavzame vrednosti med 0 in 2π, zaradi zveznosti pa bo funkcija $\varphi(t)$ morala zavzeti vrednosti več kot 2π, ko bo točka $\gamma(t)$ obkrožila točko 0. Da bi ugotovili, kako se taka funkcija φ izraža, za hip privzemimo, da je odvedljiva in odvajajmo enakost (2.5.1), da dobimo $\dot{\gamma}(t) = \dot{r}(t)e^{i\varphi(t)} + ir(t)e^{i\varphi(t)}\dot{\varphi}(t)$. Ko to enakost delimo z enakostjo (2.5.1), dobimo $\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)} = \frac{\dot{r}(t)}{r(t)} + i\dot{\varphi}(t)$, se pravi

$$i\dot{\varphi}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)} - \frac{\dot{r}(t)}{r(t)}. \tag{2.5.2}$$

Ker je γ zvezno odvedljiva funkcija in po predpostavki $r(t) = |\gamma(t)| \neq 0$ za vsak $t \in [a,b]$, je desna stran enakosti (2.5.2) zvezna funkcija in (2.5.2) namiguje, naj definiramo

$$\varphi(t) = \arg\gamma(a) + \frac{1}{i}\int_a^t \left[\frac{\dot{\gamma}(\tau)}{\gamma(\tau)} - \frac{\dot{r}(t)}{r(\tau)}\right] d\tau. \tag{2.5.3}$$

Tedaj je φ res zvezno odvedljiva funkcija in $\varphi(t) - \varphi(a)$ pomeni celotno spremembo kota med $\gamma(\tau)$ in pozitivnim poltrakom abscisne osi, ko τ teče od a do t. Če je pot γ sklenjena, torej $\gamma(b) = \gamma(a)$, lahko pričakujemo, da je $\varphi(b) - \varphi(a)$ večkratnik kota 2π, torej število $I_\gamma(0) := \frac{1}{2\pi}(\varphi(b) - \varphi(a))$ celo. Ker je tedaj $\int_a^b \frac{\dot{r}(\tau)}{r(\tau)}\, d\tau = \ln r(b) - \ln r(a) = 0$, iz (2.5.3) sledi

$$I_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z}. \tag{2.5.4}$$

Podobna formula mora veljati za vsako točko α, ki ne leži na poti γ (saj lahko vpeljemo nov koordinatni sistem s središčem v α).

Definicija 2.5.1. Za sklenjeno pot γ v $\mathbb{C}$ in vsako točko α, ki ne leži na sliki poti γ, je *ovojno število* (ali *indeks*) definirano kot

$$I_\gamma(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-\alpha}.$$

V nalogi 1 je oris računskega dokaza dejstva, da je $I_\gamma(\alpha)$ vedno celo število. Naj bo γ sklenjena pot. Ker je slika $[\gamma] = \gamma([a,b])$ kompaktna podmnožica v $\mathbb{C}$, je njen komplement $[\gamma]^c$ odprta množica, katere komponente povezanosti (to je maksimalne povezane podmnožice) so tudi odprte. Katerikoli dve točki take komponente U lahko povežemo s kako potjo γ_1. Ker je $I_\gamma(\alpha)$ zvezna funkcija točke $\alpha \in [\gamma]^c$ in zavzame le cele vrednosti, se vzdolž poti γ_1 ne more spreminjati, zato mora biti konstantna na celotni komponenti U. Bolj formalen dokaz tega dejstva se glasi takole: Naj bo α poljubna točka iz U. Množica $V := \{w \in U : I_\gamma(w) = I_\gamma(\alpha)\}$ je odprta (ker je to ravno praslika $I_\gamma^{-1}(I_\gamma(\alpha)-1, I_\gamma(\alpha)+1)$ odprtega intervala $(I_\gamma(\alpha)-1, I_\gamma(\alpha)+1)$) in zaprta (ker je enaka tudi prasliki zaprte množice $\{\alpha\}$). Ker je U povezana množica, mora biti $V = U$. Nadalje iz formule za ovojno število takoj sledi, da je $\lim_{|\alpha|\to\infty} I_\gamma(\alpha) = 0$, zato mora biti $I_\gamma(\alpha) = 0$ za vse točke α iz neomejene komponente množice γ^c. Tako smo dokazali naslednjo trditev:

TRDITEV 2.5.2. *Za vsako sklenjeno pot γ v $\mathbb{C}$ in vsako točko α iz komplementa $[\gamma]^c$ slike poti γ je $I_\gamma(\alpha)$ celo število, enako za vse točke v isti komponenti množice $[\gamma]^c$, enako 0 za točke iz neomejene komponente.*

ZGLED 2.5.3. Za točke w zunaj kroga, omejenega s krožnico $\gamma(t) = \alpha + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, je po gornji trditvi $I_\gamma(w) = 0$. Za točke w znotraj tega kroga pa je $I_\gamma(w) = 1$ po zgledu 2.4.5.

Nalogi

1. Naj točka α ne leži na sklenjeni poti $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Pokažite, da je odvod funkcije

$$F(t) = (\gamma(t) - \alpha)e^{-\int_a^t \frac{\dot\gamma(\tau)}{\gamma(\tau)-\alpha}\,d\tau}$$

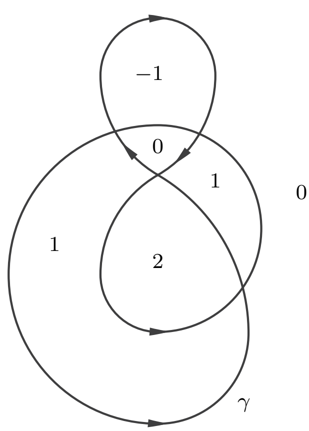

FIGURE 2.2. Ovojna števila poti γ.

enak 0 za vsak $t \in [a, b]$. Sklepajte od tod, da je F konstanta, torej $F(b) = F(a)$ in zato $e^{-\int_a^b \frac{\dot{\gamma}}{\gamma - \alpha}\,dt} = 1$. Potem mora biti $\int_a^b \frac{\dot{\gamma}}{\gamma - \alpha}\,dt$ oblike $n2\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

2. Določite $\int_\gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n\,dz$, kjer je γ sklenjena pot, ki ne gre skozi 0, in vrsta enakomerno konvergentna na sliki poti γ.

2.6. Cauchy-Greenova formula za pravokotnik

Naj bo γ sklenjena pot, $f = u + iv$ pa holomorfna funkcija na območju D. Potem je

$$int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u + iv)(dx + idy) = \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i \int_\gamma (v\,dx + u\,dy).$$

Če so parcialni odvodi funkcij u in v zvezni in γ ne obkroži nobene točke komplementa množice D, lahko po znani Greenovi formuli (ki jo bomo izpeljali v splošnejši obliki v eni od nalog naslednjega razdelka) zadnja dva integrala preoblikujemo v dvojna integrala po množici $\Omega \subseteq D$, ki jo ograjuje γ, da dobimo

$$\int_\gamma f(z)\,dz = -\iint_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + i \iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Po Cauchy-Riemannovih enakostih sta zadnja dva integrala enaka 0. S tem smo dokazali *Cauchyev izrek*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Če ga uporabimo na funkciji $g(z) := \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$, kjer je w poljubna izbrana točka iz definicijskega območja funkcije f, vidimo, da je

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - w}\,dz - f(w) \int_\gamma \frac{dz}{z - w} = \int_\gamma g(z)\,dz = 0,$$

se pravi (ker je drugi integral enak $2\pi i I_\gamma(w)$)

$$f(w) I_\gamma(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - w}\,dz,$$

kar je *Cauchyeva formula.* Upravičenost uporabe Cauchyevega izreka na funkciji g se zdi morda nekoliko vprašljiva, ker ne vemo, ali je g odvedljiva v točki w, toda, ker je g omejena v okolici točke w, to ni resna težava. (Da se jo odpraviti, če integriramo najprej po uniji poti γ in majhne, negativno orientirane krožnice γ_ε s središčem v w in polmerom ε. Ker je g omejena v okolici točke w, gredo integrali $\int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\,dz$ proti 0, ko gre ε proti 0. Glejte npr. [12].)

Pomanjkljivost gornje izpeljave je, da privzame zveznost parcialnih odvodov funkcij u in v, Cauchyev izrek pa bi radi izpeljali brez te predpostavke. Zato bomo v naslednjem razdelku izpeljali splošnejši izrek, ki bo vključeval tudi klasično Greenovo formulo, dokazano pri milejši predpostavki, kot pa je zveznost parcialnih odvodov. V tem razdelku se bomo omejili na primer, ko je γ rob pravokotnika. Bralec, ki se prvič srečuje s kompleksno analizo, lahko preskoči nadaljevanje tega razdelka in začetek naslednjega razdelka do posledice 2.7.3.

DEFINICIJA 2.6.1. Funkcija $f : D \to \mathbb{C}$ je *realno-diferenciabilna* v točki $\alpha \in D$, če obstaja taka $\mathbb{R}$-linearna preslikava $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in taka funkcija $\varepsilon : D \to \mathbb{C}$, da je

$$f(z) - f(\alpha) = A(z - \alpha) + \varepsilon(z)|z - \alpha| \quad (z \in D), \quad \text{kjer je } \lim_{z\to\alpha} \varepsilon(z) = 0. \tag{2.6.1}$$

OPOMBA 2.6.2. Ker je preslikava A linearna nad $\mathbb{R}$ (ne pa nujno nad $\mathbb{C}$), je določena s slikama $A_1 := A1$ in $A_2 := Ai$, tako da za $z = x + iy$ in $\alpha = a + ib$ velja $A(z - \alpha) = A_1(x - a) + A_2(y - b)$. Zato se gornja definicija diferenciabilnosti ujema z definicijo, ki jo je bralec najbrž že srečal pri uvodnem tečaju iz vektorskih funkcij več realnih spremenljivk. Lahko je videti, da mora biti tedaj f parcialno odvedljiva na x in na y v točki α.

V 1. nalogi razdelka 2.3 smo že vpeljali oznaki

$$\partial f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \text{in} \qquad \bar{\partial} f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Iz gornje opombe sledi, da za realno-diferenciabilno funkcijo f odvoda $\partial f(\alpha)$ in $\bar{\partial} f(\alpha)$ obstajata in velja

$$f(z) - f(\alpha) = (\partial f)(\alpha)(z - a) + (\bar{\partial} f)(\alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) + \varepsilon(z)|z - \alpha|, \quad \lim_{z\to\alpha} \varepsilon(z) = 0. \tag{2.6.2}$$

Od tod in iz definicije kompleksne odvedljivosti takoj sledi:

TRDITEV 2.6.3. *Realno-diferenciabilna funkcija f je holomorfna v točki α natanko tedaj, ko je $\bar{\partial} f(\alpha) = 0$.*

OPOMBA 2.6.4. Ker je $\bar{\partial}$ linearna kombinacija parcialnih odvodov $\frac{\partial}{\partial x}$ in $\frac{\partial}{\partial y}$, zadošča $\bar{\partial}$ pravilu za odvod produkta, tj. $\bar{\partial}(fg) = g\bar{\partial} f + f\bar{\partial} g$. Če je g holomorfna funkcija, je torej $\bar{\partial}(fg) = g\bar{\partial} f$.

Z ∂Q bomo označevali rob, s $p(Q)$ pa ploščino ravninske množice Q.

LEMA 2.6.5. *Za vsak pravokotnik Q s stranicami vzporednimi koordinatnima osema, je*

$$\int_{\partial Q} \bar{z}\, dz = 2ip(Q),$$

kjer je ∂Q pozitivno orientiran (torej v nasprotni smeri od gibanja urnega kazalca).

PROOF. Velja

$$\begin{aligned}\int_{\partial Q} \bar{z}\, dz &= \int_{\partial Q} (x - iy)(dx + idy) = \int_{\partial Q} (x\, dx + y\, dy) - i\int_{\partial Q} (y\, dx - x\, dy)\\ &= \frac{1}{2}\int_{\partial Q} d(x^2 + y^2) - i\int_{\partial Q} y\, dx + i\int_{\partial Q} x\, dy.\end{aligned}$$

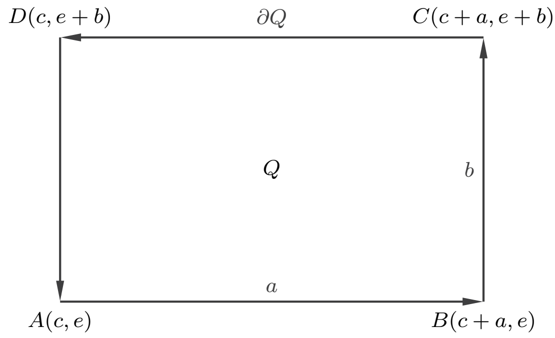

FIGURE 2.3. Pozitivno orientiran rob pravokotnika.

Ker je integral totalnega diferenciala po sklenjeni poti enak 0, moramo izračunati le zadnja dva integrala. Naj bodo oglišča pravokotnika podana kot $A(c, e)$, $B(c + a, e)$, $C(c+a, e+b)$ in $D(c, e+b)$, torej sta dolžini stranic enaki a in b. Ker na stranicah AD in BC velja $dx = 0$, je $\int_{\partial Q} y\,dx = \int_{AB} e\,dx + \int_{CD}(e + b)\,dx = \int_c^{c+a} e\,dx - \int_c^{c+a}(e + b)\,dx = -\int_c^{c+a} b\,dx = -ab = -p(Q)$. Podobno je $\int_{\partial Q} x\,dy = p(Q)$ in rezultat je $\int_{\partial Q} \bar{z}\,dz = 2ip(Q)$. □

IZREK 2.6.6. *(Cauchy-Greenov izrek za pravokotnik) Naj bo P zaprt pravokotnik in f funkcija, ki je realno-diferenciabilna na kakem območju D, ki vsebuje P. Če je funkcija $\bar{\partial} f$ zvezna na P, potem je*

$$\int_{\partial P} f(z)\,dz = 2i \iint_P \bar{\partial} f\,dx\,dy,$$

kjer označuje ∂P rob pravokotnika P, usmerjen pozitivno (torej tako, da je pravokotnik na njegovi levi).

PROOF. Koordinatni sistem lahko izberemo tako, da sta osi vzoredni stranicam pravokotnika. Za vsak pravokotnik Q, vsebovan v P, naj bo

$$m(Q) = \int_{\partial Q} f(z)\,dz - 2i \iint_Q \bar{\partial} f\,dx\,dy. \tag{2.6.3}$$

Pokazati moramo, da je $c := |m(P)| = 0$. Razdelimo P na štiri skladne pravokotnike $P^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) s stranicami, vzorednimi koordinatnima osema. Ker se integrala po vsaki skupni stranici po dveh pravokotnikov izničita (saj sta nasprotno usmerjeni), je $c = |m(P)| = |\sum_{j=1}^4 m(P^{(j)})| \le \sum_{j=1}^4 |m(P^{(j)})|$. Torej mora biti $|m(P^{(j)}| \ge \frac{c}{4}$ za vsaj en j; izberimo tak j in označimo $P_1 = P^{(j)}$. Izvedimo sedaj enak postopek na pravokotniku P_1 namesto P, da dobimo pravokotnik $P_2 \subset P_1$, za katerega je $m(P_2) \ge m(P_1)/4 \ge c/4^2$. Ko tako nadaljujemo, dobimo tako zaporedje zaprtih pravokotnikov

$$P \supset P_1 \supset P_2 \supset \ldots \supset P_n \supset \ldots,$$

da je

$$m(P_n) \geq m(P)4^{-n}. \tag{2.6.4}$$

Če sta a in b stranici pravokotnika P, sta stranici pravokotnika P_n enaki $a2^{-n}$ in $b2^{-n}$. Ker padajo diametri teh pravokotnikov proti 0, vsebuje njihov presek $\cap_n P_n$ eno samo točko, imenujmo jo α; seveda je $\alpha \in P_n$ za vsak n.

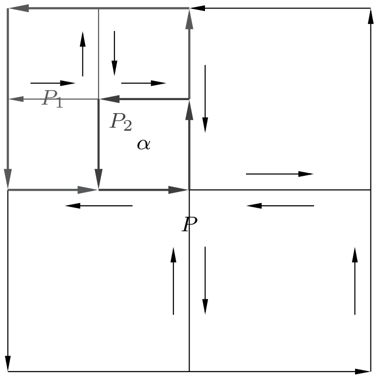

FIGURE 2.4. Delitev pravokotnika.

Ker je f realno-diferenciabilna, velja (2.6.2). Označimo $\varepsilon_n = \sup_{z \in P_n} |\varepsilon(z)|$. Ker pravokotniki P_n konvergirajo proti α, je $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Iz (2.6.3) in (2.6.2) dobimo

$$\begin{aligned} m(P_n) = f(\alpha) \int_{\partial P_n} dz + \partial f(\alpha) \int_{\partial P_n} (z-\alpha)\, dz + \bar\partial f(\alpha) \int_{\partial P_n} (\bar z - \bar\alpha)\, dz - \\ - 2i \iint_{P_n} \bar\partial f(z)\, dx\, dy + \int_{\partial P_n} \varepsilon(z)|z-\alpha|\, dz. \end{aligned}$$

Ker sta funkciji 1 in $z-\alpha$ odvoda holomorfnih funkcij (namreč funkcij z in $(z-\alpha)^2/2$), sta prva dva integrala v gornji formuli enaka 0, tretji pa je enak integralu $\int_{\partial P_n} \bar z\, dz = 2ip(P_n)$ po lemi 2.6.5, torej enak $2i \iint_{P_n} dx\, dy$. Zato se gornja formula za $m(P_n)$ poenostavi v

$$m(P_n) = -2i \iint_{P_n} (\bar\partial f(z) - \bar\partial f(\alpha))\, dx\, dy + \int_{\partial P_n} \varepsilon(z)|z-\alpha|\, dz.$$

Ker je $|z-\alpha| \leq \sqrt{(a^{-n})^2 + (b^{-n})^2}$ (= diagonala pravokotnika P_n) za vse $z \in P_n$, velja

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial P_n} \varepsilon(z)|z-\alpha|\, dz \right| \leq \int_{\partial P_n} |\varepsilon(z)||z-\alpha|\, ds \leq \\ \leq \int_{\partial P_n} \varepsilon_n \sqrt{(a2^{-n})^2 + (b2^{-n})^2}\, ds = 2\varepsilon_n \sqrt{(a2^{-n})^2 + (b2^{-n})^2}(a+b)2^{-n} \end{aligned}$$

in sledi, da je

$$|m(P_n)| \leq 2 \iint_{P_n} |\bar{\partial} f(z) - \bar{\partial} f(a)|\, dx\, dy + 2\varepsilon_n (a+b) 4^{-n} \sqrt{a^2+b^2}. \tag{2.6.5}$$

Naj bo $\delta > 0$. Ker je po predpostavki $\bar{\partial} f$ zvezna funkcija in gredo diametri pravokotnikov P_n proti 0, velja ocena $\sup_{z \in P_n} |\bar{\partial} f(z) - \bar{\partial} f(\alpha)| < \delta$ za vse dovolj velike n in iz (2.6.4) in (2.6.5) sledi (ker je $p(P_n) = 4^{-n} p(P)$ in $|m(P_n)| \geq 4^{-n} |m(P)|$)

$$4^{-n} |m(P)| \leq |m(P_n)| \leq 4^{-n} \left[2\delta p(P) + 2\varepsilon_n \sqrt{a^2+b^2} (a+b) \right].$$

Torej je

$$|m(P)| \leq 2\delta p(P) + 2\varepsilon_n \sqrt{a^2+b^2} (a+b)$$

za vse dovolj velike n. Ker je tukaj pozitivno število δ lahko poljubno majhno in je $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, mora biti $m(P) = 0$. □

Izrek 2.6.7. *(Cauchy-Greenova formula za pravokotnik) Naj bo f realno-diferenciabilna funkcija na kakem območju, ki vsebuje zaprt pravokotnik P. Če je zožitev $\bar{\partial} f | P$ funkcije $\bar{\partial} f$ na pravokotnik P zvezna, potem za vsako notranjo točko α pravokotnika P velja*

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P} \frac{f(z)}{z-\alpha}\, dz - \frac{1}{\pi} \iint_P \frac{\bar{\partial} f(z)}{z-\alpha}\, dp.$$

Proof. Spet lahko privzamemo, da so stranice pravokotnika vzporedne koordinatnima osema. Za vsak podpravokotnik $Q \subseteq P$ naj bo tokrat

$$m(Q) = \int_{\partial Q} \frac{f(z)}{z-\alpha}\, dz - 2i \iint_Q \frac{\bar{\partial} f(z)}{z-\alpha}\, dp. \tag{2.6.6}$$

Za vsak dovolj majhen $\delta > 0$ je kvadrat P_δ s središčem v α in stranicami dolžine δ, vzorednimi koordinatnima osema, vsebovan v notranjosti pravokotnika P. Ko podaljšamo stranice tega kvadrata tako, da sekajo stranice pravokotnika P, s tem razdelimo P na devet pravokotnikov; poleg P_δ še osem drugih, ki jih bomo označili s P_j $(j = 1, \ldots, 8)$. Po Cauchy-Greenovem izreku (uporabljenem na funkciji $z \mapsto \frac{f(z)}{z-\alpha}$ namesto f), upoštevajoč, da je po opombi 2.6.4 $\bar{\partial} \frac{f(z)}{z-\alpha} = \frac{\bar{\partial} f(z)}{z-\alpha}$ (saj je $\bar{\partial}(z-\alpha) = 0$), je $m(P_j) = 0$. Torej je $m(P) = m(P_\delta) + \sum_{j=1}^{8} m(P_j) = m(P_\delta)$. Sedaj zadošča dokazati, da je $\lim_{\delta\to 0} m(P_\delta) = 2\pi i f(\alpha)$.

Ker je $\bar{\partial} f | P$ zvezna funkcija, je $A := \sup_{z\in P} |\bar{\partial} f(z)| < \infty$. Ker je pravokotnik P_δ vsebovan v krogu $|z-\alpha| \leq \delta$, je

$$\left| \iint_{P_\delta} \frac{\bar{\partial} f(z)}{z-\alpha}\, dp \right| \leq \iint_{P_\delta} \frac{A}{|z-\alpha|}\, dp \leq \iint_{|z-\alpha|\leq\delta} \frac{A}{|z-\alpha|}\, dp = 2\pi A \delta. \tag{2.6.7}$$

Pri tem smo za izračun zadnjega integrala uporabili polarne koordinate s središčem v α (torej $z = \alpha + re^{i\varphi}$, $0 \leq r \leq \delta$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $dp = r\, dr\, d\varphi$).

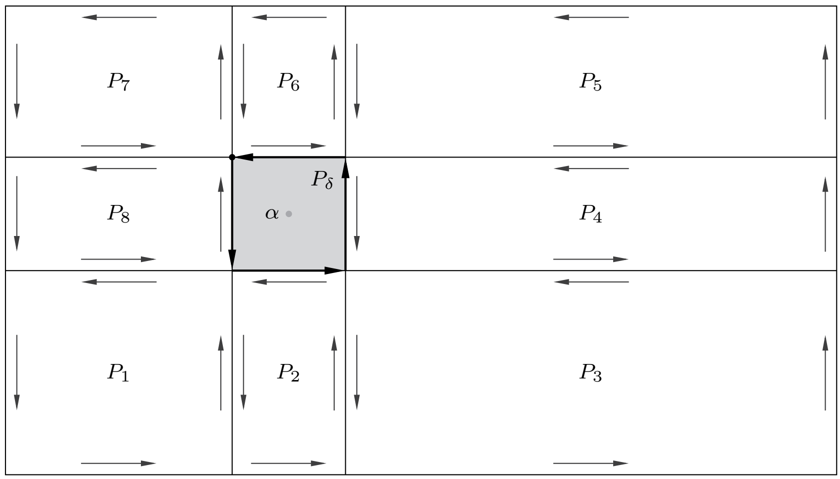

FIGURE 2.5. K dokazu Cauchy-Greenove formule za pravokotnik.

Ker je funkcija f realno-diferenciabilna, zanjo velja (2.6.2), od koder sledi (ko upoštevamo, da je $|\frac{\bar{z}-\bar{\alpha}}{z-\alpha}| = 1$), da je

$$\left|\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\right| \leq |\partial f(\alpha)| + |\bar{\partial} f(\alpha)| + |\varepsilon(z)| \leq B \qquad (\forall z \in P),$$

kjer je B konstanta (neodvisna od δ). Torej je

$$\left|\int_{\partial P_\delta} \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz - \int_{\partial P_\delta} \frac{f(\alpha)}{z-\alpha}\,dz\right| \leq \int_{\partial P_\delta} \left|\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}\right| ds \leq 4B\delta$$

in zato

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{\partial P_\delta} \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz = \lim_{\delta\to 0} \int_{\partial P_\delta} \frac{f(\alpha)}{z-\alpha}\,dz = f(\alpha) \lim_{\delta\to 0} 2\pi i I_{\partial P_\delta}(\alpha) = 2\pi i f(\alpha).$$

Od tod in iz (2.6.7) sledi, da je $\lim_{\delta\to 0} m(P_\delta) = 2\pi i f(\alpha)$, kot smo želeli dokazati. □

DEFINICIJA 2.6.8. Funkcija f, definirana na $\mathbb{C}$, ima *kompakten nosilec*, če je $f(z) = 0$ za vse z zunaj kakega (dovolj velikega) kroga. *Nosilec funkcije* f, $\operatorname{supp} f$, je zaprtje množice $\{z : f(z) \neq 0\}$.

Če uporabimo Cauchy-Greenovo formulo na funkciji f s kompaktnim nosilcem in izberemo pravokotnik P tako velik, da je $f|\partial P = 0$, dobimo naslednjo posledico:

POSLEDICA 2.6.9. *Za vsako realno-diferenciabilno funkcijo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s kompaktnim nosilcem in zveznim $\bar{\partial} f$ velja*

$$f(\alpha) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\bar{\partial} f(z)}{z-\alpha}\,dp \quad \textit{za vsak } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Naloga

† **1.** Naj ima funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kompakten nosilec in naj obstajajo parcialni odvodi $\frac{\partial^{j+k} f}{\partial^j z \partial^k \bar{z}}$ vseh redov. Definirajmo

$$g(w) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{f(z)}{z-w}\, dp.$$

Pokažite, da ima tedaj tudi g parcialne odvode vseh redov in da je

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = f.$$

(Navodilo: vpeljite v integral novo spremenljivko $\zeta = z - w$, namesto z, odvajajte nato integral na parameter w in se vrnite spet na staro spremenljivko z.)

2.7. Splošna Cauchy-Greenova formula in njene posledice

Da bi dokazali Cauchy-Greenovo formulo za območja, splošnejša od pravokotnikov, bomo potrebovali za vsak par množic $K \subset D$, kjer je K kompaktna, D pa odprta, tako zvezno odvedljivo funkcijo φ, da je $\varphi|K = 1$ in $\varphi(z) = 0$ za vse z iz komplementa D^c množice D. Za konstrukcijo take funkcije se najprej spomnimo iz osnovnega tečaja analize, da je funkcija $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana kot

$$\eta(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

neskončnokrat odvedljiva (ali *gladka*). (Razlog je v tem, da je $\lim_{t \to 0} e^{-\frac{1}{t}} t^{-n} = 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.) Potem je tudi funkcija

$$\tau(t) = \frac{\eta(t)}{\eta(t) + \eta(1-t)}$$

gladka, enaka 0 za vse $t \leq 0$, enaka 1 za vse $t \geq 1$ ter strogo med 0 in 1 za $t \in (0, 1)$. Funkcija

$$\theta(t) = \tau(2+t)\tau(2-t)$$

pa je enaka 1 za $t \in [-1, 1]$, enaka 0 za $|t| \geq 2$ in strogo med 0 in 1 za druge t. Končno definirajmo še funkcijo

$$\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \psi(z) = \theta(|z|).$$

Funkcija ψ je gladka (se pravi neskončnokrat odvedljiva kot funkcija realnih spremenljivk x in y), enaka 0 zunaj kroga $|z| < 2$ in enaka 1 na krogu $|z| \leq 1$. Za vsak $r > 0$ in $\alpha \in \mathbb{C}$ je torej funkcija $z \mapsto \psi(\frac{z-\alpha}{r})$ identično enaka 0 zunaj kroga $|z-\alpha| \leq 2r$ in identično enaka 1 v krogu $|z - \alpha| \leq r$.

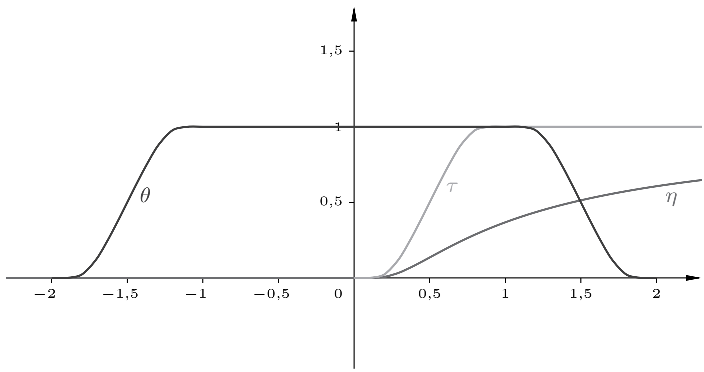

FIGURE 2.6. Grafi funkcij η, τ in θ.

LEMA 2.7.1. *Naj bo D odprta, K pa kompaktna podmnožica v $\mathbb{C}$ ter $K \subseteq D$. Obstaja taka gladka funkcija $\varphi : \mathbb{C} \to [0, 1]$ s kompaktnim nosilcem, vsebovanim v D, da je $\varphi|K = 1$.*

PROOF. Za vsak $z \in K$ naj bo $D(z, r_z)$ tak odprt krog s središčem z in polmerom $r_z > 0$, da je dvakrat večji krog $D(z, 2r_z)$ vsebovan v D. Ker je K kompaktna, lahko iz pokritja $\{D(z, r_z) : z \in K\}$ izberemo končno podpokritje $\{D(z_j, r_j) : j = 1, \ldots, n\}$. Za vsak j naj bo ψ_j funkcija, definirana s predpisom $\psi_j(z) = \psi(\frac{z-z_j}{r_j})$, kjer je ψ funkcija, definirana v odstavku pred lemo. Definirajmo funkcijo φ s $\varphi(z) = 1 - (1 - \psi_1(z)) \cdots (1 - \psi_n(z))$. Očitno je φ gladka funkcija. Vsak $z \in K$ je vsaj v enem od krogov $D(z_j, r_j)$, na katerem je ψ_j enaka 1, zato je $1 - \psi_j(z) = 0$ in $\varphi(z) = 1$. Če pa je z zunaj množice D, potem z ni v nobenem od krogov $D(z_j, 2r_j)$, zato je $\psi_j(z) = 0$ za vse j in posledično $\varphi(z) = 0$. □

IZREK 2.7.2. *(Cauchy-Greenova formula) Naj bo γ taka sklenjena pot v neprazni odprti množici $D \subseteq \mathbb{C}$, da je $I_\gamma(\zeta) = 0$ za vsako točko ζ iz komplementa $D^c := \mathbb{C} \setminus D$. Potem za vsako realno-diferenciabilno funkcijo $f : D \to \mathbb{C}$ z zveznim odvodom $\bar{\partial} f$ velja*

$$I_\gamma(w) f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - w}\, dz - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{I_\gamma(z) \bar{\partial} f(z)}{z - w}\, dp(z) \quad \text{za vsak } w \in D \setminus [\gamma], \tag{2.7.1}$$

kjer je $[\gamma]$ slika poti γ.

PROOF. Definirajmo množico K takole: naj K vsebuje točko $w \in D \setminus [\gamma]$, pot $[\gamma]$ in vse tiste komponente množice $D \setminus [\gamma]$, na katerih je ovojno število I_γ različno od 0, torej

$$K = \{w\} \cup [\gamma] \cup \{z \in D : I_\gamma(z) \neq 0\}.$$

Ker je K kompaktna podmnožica v D (zakaj?), obstaja odprta okolica U množice K s kompaktnim zaprtjem $\overline{U}$, vsebovanim v D (utemeljite!). Po lemi 2.7.1 obstaja taka gladka funkcija φ s kompaktnim nosilcem vsebovanim v D, da je $\varphi|\overline{U} = 1$. Ker je $I_\gamma(z) = 0$ za vse $z \in \mathbb{C} \setminus K$, lahko v drugem integralu v (2.7.1) nadomestimo integracijsko območje D z množico K. Ker je funkcija φ enaka 1 na okolici množice K, lahko nato funkcijo f nadomestimo s funkcijo φf. Pri tem ostaneta nespremenjena tudi prvi integral in leva stran formule (2.7.1), zato lahko privzamemo, da ima kar f kompakten nosilec, vsebovan v D. Za poljubna $\zeta, w \in \mathbb{C}$ lahko potem izrazimo $f(\zeta)$ in $f(w)$ po posledici 2.6.9. Za $\zeta \neq w$ dobimo tako

$$\begin{aligned}\frac{f(\zeta)-f(w)}{\zeta-w} &= \frac{1}{\zeta-w}\left[-\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\bar{\partial}f(z)}{z-\zeta}\,dp(z)+\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\bar{\partial}f(z)}{z-w}\,dp(z)\right] = \\ &= -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\bar{\partial}f(z)}{(z-\zeta)(z-w)}\,dp(z).\end{aligned}$$

Naj bo sedaj $w \in D \setminus [\gamma]$ in integrirajmo gornjo formulo po $\zeta \in [\gamma]$, da dobimo

$$\begin{aligned}&\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-w}\,d\zeta - 2\pi i I_\gamma(w) f(w) = \\ &\quad= \int_\gamma \frac{f(\zeta)-f(w)}{\zeta-w}\,d\zeta = -\frac{1}{\pi}\int_\gamma\iint_D \frac{\bar{\partial}f(z)}{(z-\zeta)(z-w)}\,dp(z)\,d\zeta \\ &\quad= -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\bar{\partial}f(z)}{z-w}\left(\int_\gamma \frac{d\zeta}{z-\zeta}\right)dp(z) = \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\bar{\partial}f(z)}{z-w} 2\pi i I_\gamma(z)\,dp(z).\end{aligned}$$

Ko od tod izrazimo $I_\gamma(w)f(w)$, dobimo formulo (2.7.1). Omeniti moramo le še, da je v gornjem računu zamenjava vrstnega reda integriranja po $d\zeta$ in $dp(z)$ upravičena po Fubinijevem izreku [27, izrek 3.5.8]. Zvezna funkcija $|\bar{\partial} f|$ je namreč na kompaktnem nosilcu H funkcije f omejena, recimo s konstanto M, točka w ima od množice $[\gamma]$ pozitivno razdaljo, recimo δ, množica H pa je vsebovana v vseh krogih s središči $\zeta \in [\gamma]$ ali w in polmerom R, če je le R dovolj velik, zato lahko ocenimo

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma \iint_D \frac{|\bar{\partial} f(z)|}{|z-\zeta||z-w|}\, dp(z)\, ds(\zeta) = \\
&\quad = \int_\gamma \frac{1}{|\zeta - w|} \iint_H |\bar{\partial} f(z)| \left| \frac{1}{z-\zeta} - \frac{1}{z-w} \right| dp(z)\, ds(\zeta) \\
&\quad \le \frac{M}{\delta} \left[\int_\gamma \iint_{|z-\zeta|\le R} \frac{1}{|z-\zeta|}\, dp(z)\, ds(\zeta) + \int_\gamma \iint_{|z-w|\le R} \frac{1}{|z-w|}\, dp(z)\, ds(\zeta) \right] \\
&\quad = \frac{M}{\delta} \left[\int_\gamma 2\pi R\, ds(\zeta) + \int_\gamma 2\pi R\, ds(\zeta) \right] = \frac{4\pi R M}{\delta} s(\gamma) < \infty,
\end{aligned}$$

kjer je $s(\gamma)$ dolžina poti γ. Pri tem smo dvojna integrala izračunali s pomočjo polarnih koordinat s srediči v ζ in w. □

Zelo pomemben poseben primer Cauchy-Greenove formule je:

Posledica 2.7.3. *(Cauchyeva formula) Naj bo γ taka sklenjena pot v neprazni odprti množici $D \subseteq \mathbb{C}$, da je $I_\gamma(\zeta) = 0$ za vsak ζ iz $\mathbb{C} \setminus D$. Potem za vsako holomorfno funkcijo $f : D \to \mathbb{C}$ velja*

$$I_\gamma(w) f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\, dz \qquad \text{za vsak } w \in D \setminus [\gamma]. \tag{2.7.2}$$

Če je f holomorfna funkcija na D, je taka tudi funkcija $z \mapsto (z-w)f(z)$ za vsak $w \in \mathbb{C}$. Ko na njej uporabimo Cauchyevo formulo, dobimo:

Posledica 2.7.4. *(Cauchyev izrek) Naj bo γ taka sklenjena pot v neprazni odprti množici $D \subseteq \mathbb{C}$, da je $I_\gamma(w) = 0$ za vsak w iz $\mathbb{C} \setminus D$. Potem za vsako v kompleksnem smislu odvedljivo funkcijo $f : D \to \mathbb{C}$ velja*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0. \tag{2.7.3}$$

Opomba 2.7.5. Če je $\Gamma = (\gamma_j)_{j=1}^n$ končna družina sklenjenih poti, imenovali jo bomo *cikel*, definiramo $I_\Gamma(w)$ kot $I_\Gamma(w) = \sum_{j=1}^n I_{\gamma_j}(w)$ za vsak w, ki ne leži na nobeni od poti γ_j, ter definiramo integral $\int_\Gamma g(z)\, dz$ kot vsoto $\sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} g(z)\, dz$. Cauchy-Greenova formula velja tudi za cikle, namesto posameznih sklenjenih poti. Kasneje bomo potrebovali predvsem poseben primer, ko je $n = 2$ in sta poti koncentrični krožnici, ki ga povzema naslednja posledica:

Posledica 2.7.6. *(Cauchyeva formula za kolobar) Naj bo f holomorfna funkcija na kaki okolici kolobarja $K := \{z \in \mathbb{C} : r \le |z-\alpha| \le R\}$ (kjer sta $r < R$ nenegativni konstanti). Potem za vsak w iz notranjosti kolobarja K (tj. $r < |w-\alpha| < R$) velja*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-\alpha|=R} \frac{f(z)}{z-w}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-\alpha|=r} \frac{f(z)}{z-w}\,dz, \tag{2.7.4}$$

kjer sta oba integrala po pozitivno orientiranih krožnicah. (Kolobar leži potem na desni strani notranje krožnice, od tod predznak $-$ pred drugim integralom.) Če je torej f holomorfna na kaki okolici kroga $|z-\alpha| \le R$, potem je za vsak w v notranjosti tega kroga

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-\alpha|=R} \frac{f(z)}{z-w}\,dz. \tag{2.7.5}$$

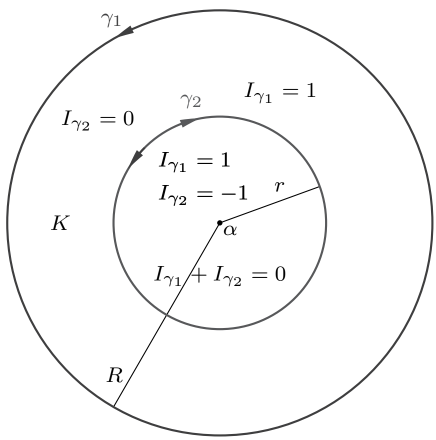

Figure 2.7. V Cauchyevi formuli za kolobar integriramo po $\gamma_1 - \gamma_2$.

Predznak $-$ pred drugim integralom v (2.7.4) izvira iz dejstva, da bi bilo treba notranjo krožnico orientirati negativno, če naj bo skupno ovojno število obeh krožnic okrog vsake točke zunaj kolobarja enako 0, izbrali pa smo pozitivno orientacijo.

Iz Cauchyeve formule za krog (2.7.5) dobimo z odvajanjem integrala na parameter w naslednjo formulo za odvode:

Posledica 2.7.7. *Vsaka holomorfna funkcija na območju D je neskončnokrat odvedljiva. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ in vsak zaprt krog $\overline{D}(\alpha, r)$, vsebovan v D, velja za vsak $w \in D(\alpha, r)$ enakost*

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-\alpha|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,dz. \tag{2.7.6}$$

Če je torej $|f|$ omejena, se pravi $|f(z)| \le M$ za kak M in vse $z \in D$, potem velja Cauchyeva ocena

$$|f^{(n)}(\alpha)| \le \frac{Mn!}{r^n}. \tag{2.7.7}$$

Posledica 2.7.8. *(Liouvillow izrek) Omejena holomorfna funkcija f na $\mathbb{C}$ je konstantna.*

Proof. Po Cauchyevi oceni (2.7.7) je

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{M}{r},$$

kjer lahko vzamemo za r poljubno veliko pozitivno število, saj je f holomorfna na celotni ravnini $\mathbb{C}$. Ko pošljemo r proti ∞, vidimo, da mora biti $f'(\alpha) = 0$ za vse α, torej mora biti f konstantna. □

Posledica 2.7.9. *(Osnovni izrek algebre) Vsak nekonstanten kompleksen polinom $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ $(n \geq 1)$ ima vsaj eno kompleksno ničlo.*

Proof. Iz ocene

$$|p(z)| \geq |z|^n \left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \ldots - \frac{|a_0|}{|z|^n}\right)$$

vidimo, da je $|p(z)| > \frac{1}{2}$ za vse dovolj velike $|z|$, recimo za $|z| \geq R$. Torej je $|\frac{1}{p(z)}| < 2$ za $|z| \geq R$. Če polinom p ne bi imel nobene ničle, bi bila funkcija $z \mapsto \frac{1}{p(z)}$ holomorfna na $\mathbb{C}$. Potem bi bila funkcija $1/|p|$ zvezna, torej omejena na krogu $|z| \leq R$. Ker je tudi zunaj tega kroga omejena (z 2), bi sledilo, da je $1/p$ omejena holomorfna funkcija na $\mathbb{C}$. Po Liouvillovem izreku bi morala biti $1/p$ (torej tudi p) konstantna, kar pa nasprotuje predpostavki. □

Naloge

1. Izpeljite Cauchyevo oceno (2.7.7) iz formule (2.7.6) v posledici 2.7.7.

2. Dokažite dejstvo (molče uporabljeno v dokazu Liouvillovega izreka), da je holomorfna funkcija na območju D konstantna, če je njen odvod 0. (Namig: za poljubni točki $\alpha, w \in D$ velja $f(w) - f(\alpha) = \int_\gamma f'(z)\,dz$, kjer je γ pot od α do w.)

3. Izračunajte naslednje integrale, kjer je $a > 0$ in krožnica pozitivno orientirana:

(i) $\displaystyle\int_{|z|=a} z^{-1}e^{-z}\,dz;$

(ii) $\displaystyle\int_{|z|=a} \frac{\sin z}{z}\,dz;$

(iii) $\displaystyle\int_{|z|=a} \frac{\cos z}{z}\,dz.$

4. (*Morerov izrek*) Dokažite: če je f taka zvezna funkcija na območju D, da je $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ za vsak trikotnik $\Delta \subseteq D$, potem je f holomorfna na D.

† **5.** Iz Cauchy-Riemannove formule izpeljite klasično Greenovo formulo

$$\oint_{\partial D} (M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy$$

za zvezno odvedljivi funkciji M, N in omejeno območje D z zvezno odvedljivim pozitivno orientiranim robom ∂D. (Navodilo: V Cauchy-Greenovi formuli naj bo $f(z) = (z-w)(M(x,y) - iN(x,y))$, kjer je $z = x + iy$ in w kaka notranja točka v D.)

6. Naj bo f holomorfna funkcija v okolici zaprtega kroga $\bar{D}(\alpha, R)$.

(i) Pokažite, da iz Cauchyeve formule sledi

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + Re^{it})\,dt. \tag{2.7.8}$$

(ii) * Sklepajte iz (i), da mora biti funkcija f konstantna na krožnici $|z-\alpha| = R$, če je $|f(\alpha)| = \max_{|z-\alpha|\le R} |f(z)|$. (Rešitev: Naj bo $M = \max_{z\in\bar{D}(\alpha,R)} |f(z)|$. Iz predpostavke in iz (2.7.8) sledi, da je

$$\begin{aligned} M = |f(\alpha)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(\alpha + Re^{it})\,dt \right| \\ &\le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\alpha + Re^{it})|\,dt \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M\,dt = M. \end{aligned}$$

Ker sta skrajna leva in desna stran v tej relaciji enaki, morata neenakosti $\le$ dejansko biti enakosti, torej

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\alpha + Re^{it})|\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M\,dt \tag{2.7.9}$$

in

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(\alpha + Re^{it})\,dt \right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\alpha + Re^{it})|\,dt. \tag{2.7.10}$$

Iz enakosti (2.7.9) sledi

$$\int_0^{2\pi} (M - |f(\alpha + Re^{it})|)\,dt = 0;$$

ker je pod integralom nenegativna zvezna funkcija, mora biti enaka 0, torej je $|f(\alpha + Re^{it})| = M$ za vse $t \in [0, 2\pi]$. Iz enakosti (2.7.10) pa sledi po 5. nalogi razdelka 2.4, da je $f(\alpha + Re^{it}) = \omega |f(\alpha + Re^{it})$, kjer je ω konstanta. Torej sta $|f|$ in f konstantni funkciji na krožnici $|z - \alpha| = R$.)

(iii) * Sklepajte iz točke (ii), da mora biti holomorfna funkcija f konstantna na krogu $D(\alpha, R)$, če je $|f(\alpha)| = \max_{z\in\bar{D}(\alpha,R)} |f(z)|$.

(iv) * Sklepajte iz točke (iii), da za nekonstantno holomorfno funkcijo f funkcija $|f|$ ne more zavzeti maksimalne vrednosti v nobeni točki območja D. (Navodilo: Privzemimo, da bi $|f|$ dosegla maximum M v točki $\alpha \in D$. Ker je $|f|$ zvezna, je množica $\Omega := \{z \in D : |f(z)| = M\}$ zaprta. Iz točke (iii) pa sledi, da je Ω tudi odprta množica. Ker je D povezana, sledi od tod, da mora biti $\Omega = D$.

Drugi način: Treba je dokazati, da je $f(\beta) = f(\alpha)$ za poljubno točko $\beta \in D$. Povežimo α in β s potjo γ. Pokažite s pomočjo točke (iii), da je mogoče množico $[\gamma]$ pokriti s krogi, na katerih je f konstantna.)

2.8. Razvoj v Laurentovo in v Taylorjevo vrsto

Naj bo f holomorfna funkcija na kaki okolici kolobarja $K = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq R$. Za vsak w iz notranjosti $\overset{\circ}{K}$ kolobarja velja po Cauchyevi formuli (2.7.4)

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-w}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z-w}\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z(1-\frac{w}{z})}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{w(1-\frac{z}{w})}\,dz. \end{aligned}$$

Za $|z| = R$ in $w \in \overset{\circ}{K}$ je $|w| < |z|$, torej $|\frac{w}{z}| < 1$, zato lahko $(1-\frac{w}{z})^{-1}$ razvijemo v geometrijsko vrsto

$$\left(1-\frac{w}{z}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^n,$$

ki konvergira enakomerno za vse z na krožnici $|z| = R$, zato jo lahko integriramo členoma. Podobno za $|z| = r$ in $w \in \overset{\circ}{K}$ velja $|\frac{z}{w}| < 1$ in lahko vrsto

$$\left(1-\frac{z}{w}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^n$$

členoma integriramo. Ko upoštevamo to v gornjem izrazu za $f(w)$, dobimo

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\; w^n + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{-n}}\,dz\; w^{-n-1}.$$

Enako sklepanje velja tudi za kolobarje okrog poljubne točke α (namesto $\alpha = 0$), saj lahko s premikom za α vpeljemo nov koordinatni sistem s središčem v α. Torej velja:

Izrek 2.8.1. *(Laurentov razvoj) Funkcijo f, holomorfno na kaki okolici kolobarja $K = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z-\alpha| \leq R\}$, lahko za vsak w iz notranjosti kolobarja razvijemo v Laurentovo vrsto*

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(w-\alpha)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(w-\alpha)^n, \tag{2.8.1}$$

kjer je

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\alpha|=R} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz \qquad \text{za} \;\; n \geq 0$$

in

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\alpha|=r} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz \qquad \text{za} \;\; n \leq -1.$$

Prva vrsta v (2.8.1) konvergira za vse w znotraj kroga $|w-\alpha| < R$, druga pa za vse w zunaj kroga $|w-\alpha| \leq r$. Vrsti predstavljata holomorfni funkciji na območjih konvergence.

Prvo vrsto v (2.8.1) bomo imenovali *regularni*, drugo pa *glavni* del Laurentovega razvoja funkcije f. Posebej pomemben primer gornjega izreka dobimo, ko je kolobar kar krog. Tedaj v gornji izpeljavi notranja krožnica sploh ne nastopa in zaključimo naslednje:

Posledica 2.8.2. *(Taylorjev razvoj) Funkcijo f, ki je holomorfna na okolici zaprtega kroga $\overline{D}(\alpha, R)$, lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto*

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w-\alpha)^n \qquad (|w-\alpha| < R), \tag{2.8.2}$$

kjer je $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\alpha|=R} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz$ in kjer integriramo po krožnici v pozitivni smeri.

Iz posledice 2.8.2 sklepamo, da ima holomorfna funkcija f, podana z vrsto (2.8.2) v točki α ničlo natanko takrat, ko je $c_0 = 0$. Če je n najmanjši tak indeks, za katerega je $c_n \neq 0$, lahko vrsto (2.8.2) zapišemo kot

$$f(z) = (z-\alpha)^n[c_n + c_{n+1}(z-\alpha) + c_{n+2}(z-\alpha)^2 + \ldots] = (z-\alpha)^n g(z), \quad (c_n \neq 0). \tag{2.8.3}$$

Pri tem je funkcija $g(z) := \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z-\alpha)^{k-n}$ holomorfna na krogu okrog α in $g(\alpha) \neq 0$. Zaradi zveznosti je potem $g(w) \neq 0$ za vse w v kakem (dovolj majhnem) krogu okrog α, torej je ničla α *izolirana*. (To pomeni, da v njeni dovolj majhni okolici ni nobene druge ničle). Število $n \in \mathbb{N}$ v (2.8.3) imenujemo *red* ali *stopnja* ničle α.

Trditev 2.8.3. *Ničle holomorfne funkcije $f : D \to \mathbb{C}$ na območju D nimajo stekališč v D, če f ni identično enaka* 0.

Proof. Predpostavimo, da f ni identično enaka 0. Naj bo D_1 množica vseh tistih točk $z \in D$, ki so vsebovane v kakem odprtem krogu $D_z \subseteq D$, na katerem ima f kvečjemu eno ničlo. Opazimo, da je D_1 odprta podmnožica v D. Prav tako je odprta tudi podmnožica D_2, ki naj vsebuje vse tiste točke $z \in D$, ki so vsebovane v kakem krogu, na katerem je f identično enaka 0. Očitno je $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ in (ker so ničle izolirane) $D_1 \cup D_2 = D$. Ker je D povezana množica in $D_2 \neq D$ (saj bi bila sicer f identično 0 na D), mora biti $D_1 = D$. Iz definicije množice D_1 pa je očitno, da nobena njena točka ne more biti stekališče ničel funkcije f. $\square$

Ko uporabimo gornjo trditev na razliki dveh holomorfnih funkcij, dobimo naslednjo pomembno posledico:

POSLEDICA 2.8.4. *Če se holomorfni funkciji f in g, definirani na območju D, ujemata na kaki podmnožici S v D, ki ima kako stekališče v D, potem je $g = f$.*

Drugi pomemben poseben primer Laurentovega razvoja (2.8.1) dobimo, če vzamemo, da je $r = 0$. Tedaj je funkcija f, podana z vrsto (2.8.1), holomorfna na krogu $|w - \alpha| < R$, razen morda v točki α. V tem primeru imenujemo točko α *izolirana singularna točka* funkcije f. Njen razvoj v Laurentovo vrsto (2.8.1) velja tedaj za vse w v krogu $|w - \alpha| < R$, razen morda v središču $w = \alpha$. Če so pri tem vsi koeficienti c_n enaki 0 za $n < 0$, potem je druga vrsta v (2.8.1) identično enaka 0, prva vrsta pa je potenčna in njena vrednost v točki α je c_0. Če tedaj definiramo, da je $f(\alpha) = c_0$, postane f holomorfna tudi v točki α (ker je podana s potenčno vrsto). V tem primeru pravimo, da je α *premostljiva* ali *navidezna* ali *odpravljiva* singularna točka za f.

TRDITEV 2.8.5. *Naj bo α izolirana singularna točka holomorfne funkcije f. Če je f omejena v kaki okolici točke α, potem je α premostljiva singularna točka.*

PROOF. Predpostavimo, da je $|f(z)| \leq M$ za kako konstanto M in vse z na krogu $\overline{D}(\alpha, R)$, razen morda v točki α. Za vsak $n = 1, 2, \ldots$ in $r < R$ je po izreku 2.8.1

$$|c_{-n}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=r} f(z)(z-\alpha)^{n-1}\, dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z-\alpha|=r} M|z-\alpha|^{n-1}\, ds = Mr^n.$$

Ko pošljemo r proti 0, vidimo, da je $c_{-n} = 0$. Torej je v razvoju (2.8.1) glavni del enak 0 in zato singularnost α premostljiva. □

OPOMBA 2.8.6. V gornji trditvi je pomembno, da je f holomorfna povsod na kaki okolici točke α, razen morda v točki α. Funkcija $z \mapsto \sqrt{z}$, na primer, je sicer omejena v bližini točke 0, vendar se je ne da definirati kot holomorfne funkcije na okolici točke 0, zato 0 zanjo ni premostljiva singularna točka.

Če je α taka izolirana singularna točka funkcije f, da so za kak $n = 1, 2 \ldots$ vsi koeficienti c_k v Laurentovem razvoju (2.8.1) enaki 0 za $k < -n$ (torej $c_{-n-1} = 0$, $c_{-n-2} = 0 \ldots$) in je $c_{-n} \neq 0$, pravimo, da je α *pol stopnje* ali *reda* n za f. Glavni del v razvoju (2.8.1) je tedaj racionalna funkcija. Ko gre w proti α, člen $c_{-n}(w - \alpha)^{-n}$ po velikosti prevlada druge člene in $f(w)$ konvergira proti ∞, ko gre w proti α.

Če pa glavni del v (2.8.1) ni racionalna funkcija, torej, če je $c_{-n} \neq 0$ za neskončno mnogo indeksov $n \in \mathbb{N}$, pravimo, da je α *bistvena singularna točka* za f.

ZGLED 2.8.7. Za funkcijo $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$ je 0 bistvena singularna točka.

Naslednji izrek pravi, da se v vsaki okolici take točke vrednosti $f(z)$ poljubno približajo vsakemu kompleksnemu številu (vrednosti $f(z)$ torej zelo nihajo).

IZREK 2.8.8. *(Casorati-Weierstrass) Če je α bistvena singularna točka funkcije f (ki je sicer holomorfna na kaki okolici te točke, razen v α), potem za vsak $w \in \mathbb{C}$ ter vsaka pozitivna ε in δ obstaja tak $z \in D(\alpha, \delta) \setminus \{\alpha\}$, da je $|f(z) - w| < \varepsilon$.*

Proof. Privzemimo nasprotno, da torej obstaja tak $w \in \mathbb{C}$ in pozitivna ε, δ, da je $|f(z) - w| \geq \varepsilon$ za vsak $z \in D(\alpha, \delta) \setminus \{\alpha\}$. Pri tem lahko, če je potrebno, δ zmanjšamo tako, da je f holomorfna na $D(\alpha, \delta) \setminus \{\alpha\}$. Tedaj je α izolirana singularna točka za funkcijo

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w}$$

in $|g(z)| \leq 1/\varepsilon$, torej je α premostljiva singularna točka za g po trditvi 2.8.5. Z upoštevanjem možnosti, da ima g v α ničlo reda m, lahko torej g razvijemo okrog α v vrsto oblike

$$g(z) = (z-\alpha)^m \left[c_m + c_{m+1}(z-\alpha) + c_{m+2}(z-\alpha)^2 + \dots\right] = (z-\alpha)^m h(z),$$

kjer je h holomorfna in $h(\alpha) = c_m \neq 0$. Toda potem je tudi funkcija $z \mapsto h(z)^{-1}$ holomorfna v okolici točke α, zato jo lahko razvijemo v vrsto oblike $h(z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-\alpha)^n$. Za f pa potem dobimo

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)} = w + (z-\alpha)^{-m} h(z)^{-1} = w + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-\alpha)^{n-m}.$$

Toda v zadnji vrsti je le končno mnogo členov z negativnimi eksponenti $n - m$ (le členi, ko je $n < m$), zato bi to pomenilo, da ima f v točki α pol reda kvečjemu m, ne pa bistvene singularnosti. □

Naj omenimo, da velja mnogo močnejša varianta gornje trditve, namreč Picardov izrek, ki pravi, da v vsaki okolici bistvene singularnosti holomorfna funkcija zavzame vsako vrednost, z izjemo morda ene.

Definicija 2.8.9. Točka ∞ je *izolirana singularna točka* funkcije f, če je 0 izolirana singularna točka funkcije

$$z \mapsto \hat{f}(z) := f\left(\frac{1}{z}\right).$$

Pravimo, da je ∞ *premostljiva singularna točka (pol, bistvena singularnost)*, če je 0 taka točka za funkcijo $\hat{f}$.

Če je

$$\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n z^n$$

Laurentov razvoj funkcije $\hat{f}$ okrog točke 0, potem je

$$f(z) = \hat{f}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n z^{-n} \tag{2.8.4}$$

Laurentov razvoj funkcije f okrog točke ∞. Prva vrsta v (2.8.4) je *regularni* (njeni členi so omejeni, ko gre z proti ∞), druga pa *glavni del* tega razvoja okrog ∞. Rekli bomo, da je ∞ ničla reda n, če je 0 ničla reda n za funkcijo $\hat{f}$; podobno tudi za pole.

Definicija 2.8.10. Funkcija f je *meromorfna* na odprti množici D, če obstaja taka podmnožica $S \subset D$, da S nima nobenega stekališča v D, da je vsaka točka iz S pol funkcije f in da je f holomorfna na $D \setminus S$.

Zgled 2.8.11. Kvocient dveh holomorfnih funkcij na D je meromorfna funkcija. (Da se dokazati tudi obratno, kar pa je precej težje.) Vsaka racionalna funkcija, na primer, je meromorfna.

Naloge

1. (i) Kdaj je ∞ ničla in kdaj pol racionalne funkcije $f(z) = \frac{z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \ldots + a_0}{z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_0}$ in koliko je njena (njegova) stopnja?

(ii) Pokažite, da ima na razširjeni ravnini $\hat{\mathbb{C}}$ vsaka racionalna funkcija enako število ničel in polov, če jih štejemo v skladu z njihovo mnogokratnostjo (torej pol stopnje n štejmo za n polov in podobno za ničle).

2. Pokažite, da racionalna funkcija na $\hat{\mathbb{C}}$ zavzame vsako vrednost w enakokrat, če štejemo n-krat vsako tako točko α, za katero je α ničla stopnje n funkcije $z \mapsto f(z) - w$.

3. Dokažite, da je na razširjeni ravnini $\hat{\mathbb{C}}$ vsaka meromorfna funkcija f racionalna. (Navodilo: Ker je vsak pol izolirana singularna točka, velja to tudi za ∞ (če ni regularna), zato so vsi morebitni končni poli vsebovani v kakem dovolj velikem zaprtem krogu $\overline{D}(0, R)$. Ker po definiciji meromorfne funkcije množica polov nima stekališč, krog $\overline{D}(0, R)$ pa je kompakten, ima torej f le končno mnogo polov. Naj bodo α_j $(j = 1, \ldots, k)$ vsi končni poli, n_j njihove stopnje in $q(z) = (z - \alpha_1)^{n_1} \cdots (z - \alpha_k)^{n_k}$. Potem je funkcija $p(z) := q(z)f(z)$ holomorfna na $\mathbb{C}$, v ∞ pa ima kvečjemu pol, torej je njen razvoj okrog ∞ oblike $p(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m$.)

4. Sklepajte iz 2. in 3. naloge, da je vsaka bijektivna meromorfna preslikava razširjene ravnine vase nujno *ulomljena linearna transformacija* torej oblike

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{2.8.5}$$

kjer so a, b, c, d taka kompleksna števila, da je $ad - bc \neq 0$.

5. Dokažite, da je množica G vseh ulomljenih linearnih transformacij (tj. preslikav oblike (2.8.5), kjer je $ad - bc \neq 0$) grupa za komponiranje preslikav in da je preslikava $F : GL(2, \mathbb{C}) \to G$, ki vsaki obrnljivi kompleksni 2×2 matriki

$$A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

priredi ulomljeno linearno transformacijo $F(A)$, podano s formulo (2.8.5), surjektiven homomorfizem grup, katerega jedro sestoji iz vseh neničelnih kompleksnih večkratnikov identične matrike I, torej $\ker F = \{\alpha I : \alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0\}$. (Definicije grupe, homomorfizma in jedra lahko najdete npr. v [26].)

6. Naj bodo z_j $(j = 2, 3, 4)$ različne točke v $\hat{\mathbb{C}}$. Potem je $z \mapsto \frac{z-z_3}{z-z_4}$ ulomljena linearna transformacija, ki preslika z_3 v 0, z_4 pa v ∞. Ulomljena linearna transformacija

$$f(z) := \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \frac{z - z_3}{z - z_4} \tag{2.8.6}$$

pa preslika točke z_2, z_3, z_4 zaporedoma v točke $1, 0, \infty$. Pokažite, da je to edina taka ulomljena linearna transformacija.

7. Dokažite: če ima ulomljena linearna transformacija f tri različne negibne točke z_j (tj. $f(z_j) = z_j$), potem je f identiteta.

8. Naj bodo z_j $(j = 1, 2, 3)$ različne točke in w_j tri prav tako različne točke v $\hat{\mathbb{C}}$. Pokažite, da obstaja natanko ena ulomljena linearna transformacija, ki preslika z_j v w_j za $j = 1, 2, 3$. (Navodilo: pomagajte si z nalogami 5, 6 in 7. Najprej preslikajte točke z_1, z_2, z_3 zaporedoma v $1, 0, \infty$, nato pa le-te v w_1, w_2, w_3.)

9. *Dvorazmerje* $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ štirih različnih točk iz $\hat{\mathbb{C}}$ je $f(z_1)$, kjer je f ulomljena linearna transformacija, podana z (2.8.6), torej

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] := \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}.$$

Dokažite, da vsaka ulomljena linearna transformacija g ohranja dvorazmerja, torej, da velja $[g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ za poljubne štiri različne točke $z_j \in \hat{\mathbb{C}}$. (Rešitev: Naj bo f podana z (2.8.6), tako da je $[z_1, z_2, z_3, z_4] = f(z_1)$. Potem ulomljena linearna transformacija $f \circ g^{-1}$ preslika točke $g(z_2)$, $g(z_3)$, $g(z_4)$ zaporedoma v 1, 0, ∞, torej je po definiciji $[g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)] = (f \circ g^{-1})(g(z_1)) = f(z_1) = [z_1, z_2, z_3, z_4]$.)

10. Dokažite, da je mogoče vsako ulomljeno linearno transformacijo izraziti kot kompozitum naslednjih štirih vrst preslikav:

(1) *translacij* (tj. preslikav oblike $z \mapsto z + b$ za kak $b \in \mathbb{C}$);

(2) *zasukov* (tj. preslikav oblike $z \mapsto az$ za kak $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$);

(3) *raztegov* (tj. preslikav $z \mapsto az$ za kak $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$);

(4) *inverzije* ($z \mapsto \frac{1}{z}$).

(Namig: če je $c \neq 0$, lahko izrazimo $\frac{az+b}{cz+d} = e + \frac{f}{cz+d}$, kjer je $e = \frac{a}{c}$ in $f = b - \frac{ad}{c}$.)

11. Pokažite, da predstavlja enačba

$$A|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0,$$

kjer je B kompleksna, A in C pa realni konstanti in $A \neq 0$, $|B|^2 - AC > 0$, krožnico. Če pa je $A = 0$, predstavlja taka enačba premico. Pokažite tudi, da lahko vsako krožnico oziroma premico v $\mathbb{C}$ predstavimo v taki obliki. (Namig: pomnožite enačbo $|z - \alpha|^2 = r^2$ s konstanto A in se vprašajte, kdaj se da iz koeficientov A, B, C določiti $r > 0$.)

12. Štejmo premice za krožnice z neskončnim polmerom. Dokažite, da ulomljena linearna transformacija preslika krožnice na krožnice. (Navodilo: uporabite nalogi 10 in 11.)

13. Dokažite, da je dvorazmerje $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ realno število natanko tedaj, ko vse štiri točke z_j ležijo na isti krožnici. (Rešitev: Z ulomljeno linearno transformacijo lahko po nalogi 8 preslikamo tri različne točke v tri točke na realni osi, torej se po nalogi 12 cela krožnica preslika na realno os. Ker se pri tem dvorazmerje ohranja (po nalogi 9) in so vse štiri preslikane točke na realni osi, mora biti dvorazmerje realno. Za dokaz v obratno smer predpostavimo, da je $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$. Preslikajmo krožnico skozi z_1, z_2, z_3 na realno os. Potem lahko privzamemo, da so prve tri preslikane točke realne. Ker je tudi dvorazmerje realno, sledi iz formule za dvorazmerje, da mora biti tedaj tudi četrta točka realna.)

14. Za katere ulomljene linearne transformacije je ∞ negibna točka? Opišite vse bijektivne holomorfne preslikave ravnine $\mathbb{C}$ vase.

15. Kakšna je povezava med lastnimi vektorji obrnljive kompleksne 2×2 matrike A in negibnimi točkami ustrezne ulomljene linearne transformacije $F(A)$ (definirane v nalogi 5)?

Če sta λ_1 in λ_2 lastni vrednosti matrike A in je $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ ter je (w_1, w_2) lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ_1, pokažite, da je točka $w := \frac{w_1}{w_2}$ *atraktor* preslikave $F(A)$, v smislu, da je $\lim_{n\to\infty} F(A)^n z = w$ za vsak $z \neq \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$, kjer je (ζ_1, ζ_2) lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ_2.

16. Razvijte funkcijo $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)}$ v Laurentovo vrsto na naslednjih območjih:

(i) na preluknjanem krogu $0 < |z - 1| < 2$;

(ii) na krogu $|z| < 1$;

(iii) zunaj kroga $|z - 1| \leq 2$.

17. Razvijte v Laurentovo vrsto na kolobarju $1 < |z-2| < 2$ funkcijo $f(z) = \frac{z^2}{z(z-3)}$.

18. Kakšna singularna točka je 0 za funkcijo $f(z) = z \sin \frac{1}{z}$? Kako se glasi v tem primeru Laurentov razvoj?

* **19.** Dokažite, da je zaloga vrednosti nekonstantne funkcije f, ki je holomorfna povsod na $\mathbb{C}$, gosta v $\mathbb{C}$.

* **20.** Naj bo f meromorfna funkcija na $\mathbb{C}$. Kakšna mora biti f, da bo tudi funkcija $\sin f$ meromorfna na $\mathbb{C}$?

21. Določite prve tri člene v Laurentovem razvoju funcije $f(z) = \frac{1}{\cos z}$ okrog točke 0 in okrog točke $\frac{\pi}{2}$.

2.9. Logaritem in potence

Kompleksno število $w \neq 0$ lahko enolično zapišemo v polarni obliki $w = |w|e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, zato se zdi smiselno definirati *naravni logaritem* na naslednji način:

DEFINICIJA 2.9.1. $\ln w = \ln|w| + i\varphi = \ln|w| + i \arg w$, ($w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $-\pi < \varphi < \pi$).

Pri tem smo poltrak $(-\infty, 0]$ izvzeli iz ravnine, da bi bila funkcija ln zvezna na preostanku. Za točke w blizu negativne realne osi je namreč $\arg w$ lahko blizu $-\pi$ ali pa π, zato v teh točkah gornja formula za ln ne da zvezne funkcije na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Na območju $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ pa je tako definirana funkcija ln holomorfna, saj velja naslednja trditev:

TRDITEV 2.9.2. *Izberimo poljubno točko $w_0 \in D := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Za vsak $w \in D$ je*

$$\ln w - \ln w_0 = \int_{w_0}^{w} \frac{dz}{z} := \int_\gamma \frac{dz}{z},$$

kjer je γ poljubna zvezno odvedljiva pot v D z začetno točko w_0 in končno točko w. Zato je $\ln' w = \frac{1}{w}$.

Ta trditev je le poseben primer splošnejše trditve 2.9.3, zato je ne bomo dokazovali posebej.

Za pozitivne w se zgoraj definirani $\ln w$ ujema z logaritmom, poznanim iz elementarne analize. Funkcija $z \mapsto \ln(1+z)$, definirana na območju $\Omega := \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$, je holomorfna, z odvodom $\frac{1}{1+z}$. Območje Ω vsebuje odprt krog $D(0,1)$, na katerem lahko $\ln(1+z)$ razvijemo v Taylorjevo vrsto okrog točke 0. To vrsto lahko dobimo kar z integriranjem geometrijske vrste $(1+z)^{-1} = 1 - z + z^2 - \ldots$, torej

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

(Tu smo upoštevali, da je integracijska konstanta 0, saj imata funkciji na levi in desni strani gornje enakosti enako vrednost v točki 0.)

Ker velja enakost $e^{\ln z} = z$ za vse pozitivne z in sta funkciji $z \mapsto z$ in $z \mapsto e^{\ln z}$ holomorfni na območju $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, se morata ujemati povsod na tem območju po posledici 2.8.4.

Gornjo definicijo logaritma bi lahko prilagodili tako, da bi, namesto negativne realne osi, iz ravnine izrezali kak drug poltrak p z začetkom v 0. Tako bi dobili drugo »vejo« logaritma, se pravi novo funkcijo L, ki bi na območju $\mathbb{C} \setminus p$ zadoščala enakosti $e^{L(z)} = z$. Pravzaprav lahko definiramo logaritem na splošnejših območjih, kar pove naslednja trditev:

TRDITEV 2.9.3. *Naj bo D tako ravninsko območje, da je $I_\gamma(\alpha) = 0$ za vsako sklenjeno pot γ v D in vsako točko $\alpha \in \mathbb{C} \setminus D$. Potem za vsako holomorfno funkcijo $f : D \to \mathbb{C}$, ki nima ničle na D, obstaja $g = \ln f$, se pravi taka holomorfna funkcija $g : D \to \mathbb{C}$, da je $e^{g(w)} = f(w)$ za vsak $w \in D$. Poljubni dve taki holomorfni funkciji se razlikujeta za $n2\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.*

Kasneje bomo dokazali, da pogoju o ovojnem številu v trditvi zadoščajo ravno enostavno povezana območja.

Dokaz trditve. Izberimo poljubno točko $w_0 \in D$ in tak $z_0 \in \mathbb{C}$, da je $e^{z_0} = f(w_0)$. Za vsak $w \in D$ definirajmo

$$g(w) = z_0 + \int_\lambda \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz,$$

kjer je λ poljubna pot v D z začetkom w_0 in koncem w. Če sta λ_1 in λ_2 taki poti, potem je $\gamma := \lambda_1 + \lambda_2^-$ sklenjena pot v D, zato po predpostavki $I_\gamma(\alpha) = 0$ za vsako točko $\alpha \in \mathbb{C} \setminus D$. Ker f nima ničel na D, je funkcija $\frac{f'}{f}$ holomorfna na D, zato je po Cauchyevem izreku $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$. Torej je $\int_{\lambda_1} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_{\lambda_2} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$ in definicija funkcije g zato nedvoumna. Ker je $g'(w) = \frac{f'(w)}{f(w)}$ (zakaj?), je $(e^{-g(w)} f(w))' = 0$ za vsak $w \in D$. Torej $e^{-g(w)} f(w)$ konstanta, enaka $e^{-g(w_0)} f(w_0) = e^{-z_0} f(w_0) = 1$, zato $e^{g(w)} = f(w)$.

Če je h kaka druga funkcija na D, ki zadošča pogoju $e^{h(w)} = f(w)$, potem je $e^{h(w)-g(w)} = 1$, torej $h(w) - g(w) = n(w)2\pi i$, kjer je $n(w) \in \mathbb{Z}$. Ker je pri tem funkcija $w \to n(w)$ zvezna in D povezana množica, mora biti $n(w)$ konstanta. □

S pomočjo logaritma lahko definiramo *potenco s kompleksnim eksponentom.*

Definicija 2.9.4. Za vsak $\alpha \in \mathbb{C}$ in $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ naj bo $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$.

Tako definirana funkcija $z \mapsto z^\alpha$ je holomorfna na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, saj je kompozitum holomorfnih funkcij. Za $z = |z|e^{i\varphi}$ $(-\pi < \varphi < \pi)$ je njena vrednost $e^{\alpha(\ln|z| + i\varphi)}$.

Zgled 2.9.5. Naj bo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Potem je $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{\varphi}{n}}$. Za vsak n-ti koren ω enote 1 je seveda tudi funkcija $z \mapsto \omega z^{\frac{1}{n}}$ holomorfna na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ in zadošča enačbi $(\omega z^{\frac{1}{n}})^n = z$, tako da ima identična funkcija $z \mapsto z$ na tem območju n-holomorfnih n-tih korenov. Točko 0 imenujemo *razvejišče funkcije* $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ in tudi funkcije $z \mapsto \ln z$.

Naloge

1. Določite $\lim_{y \to 0^+} [\ln(x + iy) - \ln(x - iy)]$, kjer $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Kam preslika funkcija $f(z) = e^z$ navpično premico $x = a$ (= konstanta)? Kam pa polravnino $x > a$? Ali holomorfna preslikava vedno preslika enostavno povezano množico na enostavno povezano množico?

3. Izračunajte $\lim_{b\to\infty} \int_\gamma \frac{dz}{z}$, kjer je $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ in γ daljica $[a - ib, a + ib]$.

4. Na katerem maksimalnem območju D v ravnini obstaja taka holomorfna funkcija f, da je $f'(z) = \frac{1}{z^2-4}$ za vsak $z \in D$?

5. Izračunajte integral $\int_\gamma z^{\frac{1}{n}}\, dz$, kjer je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ in γ krožnica s središčem v 0 in polmerom a.

2.10. Izrek o residuih in njegova uporaba pri računanju integralov

Definicija 2.10.1. Koeficient c_{-1} v Laurentovem razvoju

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n \tag{2.10.1}$$

holomorfne funkcije f okrog izolirane singularne točke α imenujemo *residuum* funkcije f v točki α in označimo z $\operatorname{Res}(f;\alpha)$.

Za pozitivno orientirano krožnico ali kako drugo sklenjeno pot γ, ki enkrat obkroži točko α, vsebovano v kakem krogu, na katerem je f holomorfna, razen morda v α, velja

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = c_{-1} I_\gamma(\alpha) = c_{-1}, \tag{2.10.2}$$

saj so za $n \neq -1$ vse funkcije $(z-\alpha)^n$ odvodi holomorfnih funkcij, zato njihovi integrali po sklenjeni poti enaki 0. Bistvo izreka o residuih je v formuli (2.10.2). Spodnja formulacija izreka o residuih morda zveni nekoliko zapleteno, ker je napisana v vsej splošnosti. V praksi pa je običajno množica S, ki v njem nastopa, končna, sklenjena pot γ pa taka, da vsako točko $\alpha \in S$ obkroži kvečjemu enkrat (tj. $I_\gamma(\alpha) \in \{1, 0\}$). Tedaj sta izrek in njegov dokaz enostavnejša. Za funkcijo f, ki je holomorfna na območju D, razen v izoliranih singularnih točkah, in sklenjeno pot γ v D, ki ne obkroži nobene točke iz $\mathbb{C} \setminus D$, vsako singularno točko pa kvečjemu enkrat, in sicer v pozitivnem smislu, izrek pove, da je $\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(f;\alpha_j)$, kjer so α_j $(j = 1,\dots,n)$ vse tiste singularne točke, ki jih pot γ obkroži (tj. $I_\gamma(\alpha_j) = 1$). Bralec lahko pri prvem branju izreka in njegovega dokaza misli na ta poseben primer.

Izrek 2.10.2. *(Izrek o residuih) Naj bo S podmnožica območja $D \subseteq \mathbb{C}$, ki naj nima nobenega stekališča v D, f holomorfna funkcija na $D \setminus S$ in γ taka sklenjena pot (ali pa cikel) v $D \setminus S$, da je $I_\gamma(\alpha) = 0$ za vsak $\alpha \in \mathbb{C} \setminus D$. Potem je*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{\alpha\in S} \operatorname{Res}(f;\alpha)\, I_\gamma(\alpha). \tag{2.10.3}$$

Proof. Najprej pokažimo, da je množica

$$T := \{\alpha \in S : I_\gamma(\alpha) \neq 0\}$$

končna, tako da je potem tudi vsota na desni strani formule (2.10.3) končna. Ker je ovojno število $I_\gamma(\alpha)$ konstantno na povezanih množicah in po predpostavki enako 0 za $\alpha \in D^c$, mora biti enako 0 na vsaki taki komponenti V množice $[\gamma]^c$, ki seka D^c. Vsaka druga komponenta U množice $[\gamma]^c$ je vsebovana v D (ker ne seka D^c). Unija K vseh takih komponent U in množice $[\gamma]$ je zaprta (saj so vse robne točke množice $[\gamma]^c$ vsebovane v $[\gamma]$) in omejena. (Vsebovana je namreč v komplementu neomejene komponente U_∞ množice $[\gamma]^c$, U_∞ pa je odprta okolica točke ∞, torej vsebuje komplement dovolj velikega kroga $\overline{D}(0,R)$, zato je $U_\infty^c \subseteq \overline{D}(0,R)$). Torej je K kompaktna. Ker po predpostavki S nima stekališč v D, je lahko v K le končno mnogo elementov množice S, kar pomeni, da je množica T končna.

Naj bodo α_j ($j = 1, \ldots, n$) vsi elementi množice T, Q_j glavni del Laurentove vrste za f okrog točke α_j in

$$g := f - (Q_1 + \ldots + Q_n).$$

Funkcija g ima v točkah α_j premostljive singularnosti, zato jo imamo lahko za holomorfno na množici $D_0 := D\setminus(S\setminus T)$. Ker je $I_\gamma(\alpha) = 0$ za vsak $\alpha \in D_0^c = D^c \cup (S\setminus T)$, Cauchyev izrek pove, da je $\int_\gamma g(z)\,dz = 0$, torej je

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}\int_\gamma Q_j(z)\,dz =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(Q_j;\alpha_j)\, I_\gamma(\alpha_j) = \sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}(f;\alpha_j)\, I_\gamma(\alpha_j). \qquad \square$$

Izrek o residuih omogoča računanje nekaterih integralov, ki bi bili sicer težko izračunljivi, če sploh.

2.10.1. Integrali oblike $\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi$, kjer je R racionalna funkcija dveh spremenljivk, ki je zvezna na enotski krožnici

Z vpeljavo nove spremenljivke $z = e^{i\varphi}$, $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$ (torej $d\varphi = \frac{dz}{iz}$), in Eulerjevih formul $\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ ter $\sin\varphi = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$ lahko take integrale preoblikujemo v integrale po pozitivno orientirani krožnici:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi = -i\oint_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{z}.$$

Sedaj je treba izračunati le še vsoto residuov racionalne funkcije, ki nastopa v integralu, v vseh polih znotraj kroga $|z| < 1$. (Ker je po predpostavki funkcija $\varphi \to R(\cos\varphi, \sin\varphi)$ zvezna, je integral na levi strani gornje formule končen, zato mora veljati isto tudi za integral na desni, od koder sledi, da racionalna funkcija v njem nima polov na enotski krožnici.)

Zgled 2.10.3. Naj bo $a > 1$. Ker je cos soda funkcija, je

$$I := \int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{a + \cos\varphi} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi} = -\frac{i}{2}\oint_{|z|=1}\frac{\frac{1}{z}\,dz}{a + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} =$$
$$= -i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = -i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)},$$

kjer je $\alpha_1 = -a - \sqrt{a^2-1}$ in $\alpha_2 = -a + \sqrt{a^2-1}$. Ker je $a > 1$, je $|\alpha_1| > 1$ in α_2 je edini pol funkcije $f(z) := \frac{1}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}$ v krogu $|z| < 1$. Iz razcepa na parcialne ulomke

$$f(z) = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\frac{1}{z-\alpha_2} - \frac{1}{z-\alpha_1}\right)$$

vidimo, da je $\operatorname{Res}(f;\alpha_2) = \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$. Po izreku o residuih je torej $I = -i2\pi i\operatorname{Res}(f;\alpha_2) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

2.10.2. Integrali $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$

Tukaj naj bo R holomorfna funkcija, ki ima le končno mnogo singularnih točk v zgornji polravnini, nobene na realni osi, v ∞ pa ničlo stopnje vsaj 2. Za primer je R lahko racionalna funkcija, $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, kjer je stopnja polinoma p vsaj za 2 manjša od stopnje polinoma q in q nima nobene ničle na realni osi. Potem integral

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} R(x)\,dx$$

konvergira. Izrek o residuih bomo uporabili za sklenjeno pot, sestavljeno iz daljice $[-A, A]$ na abscisni osi in polkrožnice γ_A s polmerom A, začetkom v točki $(A, 0)$ in koncem v $(-A, 0)$, torej $\gamma_A(\varphi) = Ae^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$. Ker ima R v ∞ ničlo stopnje vsaj 2, je funkcija $z \mapsto |R(z)||z|^2$ za vse dovolj velike $|z|$ omejena (saj obstaja $\lim_{z\to\infty} z^2R(z)$), recimo z M, zato je

$$\left|\int_{\gamma_A} R(z)\,dz\right| \le \int_{\gamma_A} |R(z)|\,ds \le \int_0^{\pi} \frac{M}{A^2} A\,d\varphi = \frac{\pi M}{A} \overset{A\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Za dovolj velike A opisana sklenjena pot ogradi območje, ki zajame vse pole funkcije R v zgornji polravnini, zato sledi iz izreka o residuih, da je

$$I = \lim_{A\to\infty} \left[\int_{-A}^{A} R(x)\,dx + \int_{\gamma_A} R(z)\,dz\right] = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}\alpha>0} \operatorname{Res}(R;\alpha)\,.$$

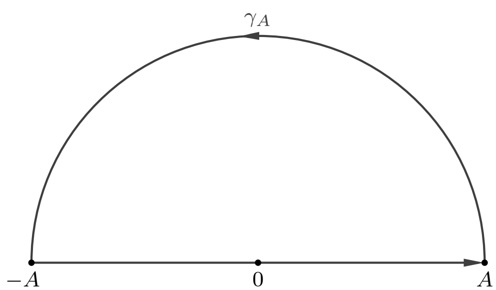

FIGURE 2.8. Integracijska pot.

ZGLED 2.10.4. Naj bo $a > 0$. Ker je ia edini pol funkcije $R(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$ v zgornji polravnini, je

$$I := \int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \pi i \operatorname{Res}(R; ia)\,.$$

Da bi izračunali residuum, razstavimo funkcijo R na delne ulomke:

$$R(z) = \frac{z^2}{(z+ai)^2(z-ai)^2} = \frac{A}{z-ai} + \frac{B}{(z-ai)^2} + \frac{C}{z+ai} + \frac{D}{(z+ai)^2}. \qquad (2.10.4)$$

Tedaj je $\operatorname{Res}(R; ai) = A$, toda za izračun konstante A potrebujemo najprej konstanto B. Iz (2.10.4) vidimo, da je

$$B = \big[(z-ai)^2 R(z)\big]_{z=ai} = \frac{z^2}{(z+ai)^2}\bigg|_{z=ai} = \frac{(ai)^2}{(2ai)^2} = \frac{1}{4}.$$

Iz (2.10.4) sedaj sledi tudi, da je

$$\begin{aligned} A = \lim_{z\to ai}\left(R(z) - \frac{B}{(z-ai)^2}\right)(z-ai) &= \lim_{z\to ai}\left[\frac{z^2}{(z+ai)^2(z-ai)} - \frac{1}{4(z-ai)}\right] = \\ &= \lim_{z\to ai}\frac{4z^2-(z+ai)^2}{4(z+ai)^2(z-ai)} = \lim_{z\to ai}\frac{(z-ai)(3z+ai)}{4(z+ai)^2(z-ai)} = -\frac{i}{4a}. \end{aligned}$$

Torej je

$$I = \pi i\left(-\frac{i}{4a}\right) = \frac{\pi}{4a}.$$

2.10.3. Integrali $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}\,dx$

Spet naj bo R holomorfna funkcija, ki naj ima le končno singularnih točk v zgornji polravnini, nobene na realni osi in ničlo v ∞. Tokrat pa bo zadoščalo, da je ∞ ničla reda 1 za R; če je torej R racionalna funkcija, zadošča, da je števec vsaj za 1 nižje stopnje od imenovalca.

Če je v ∞ ničla stopnje le 1 za R, ocena iz prejšnjega podrazdelka, da gre integral po polkrožnici γ_A proti 0, ko gre A proti ∞, ne velja več. Zato poskusimo integrirati raje po pravokotniku z oglišči $(-A, 0)$, $(A, 0)$, (A, B), $(-A, B)$, kjer sta A in B dovolj veliki pozitivni konstanti. Tokrat je funkcija $|R(z)z|$ za vse dovolj velike $|z|$ omejena z neko konstanto M, zato lahko integral po desni stranici $[A, A+iB]$ pravokotnika ocenimo kot

$$\left|\int_{[A,A+iB]} R(z)e^{iz}\,dz\right| \le \int_{[A,A+iB]} \frac{M}{|z|}e^{-y}\,ds \le \int_0^B \frac{M}{A}e^{-y}\,dy \le \frac{M}{A}.$$

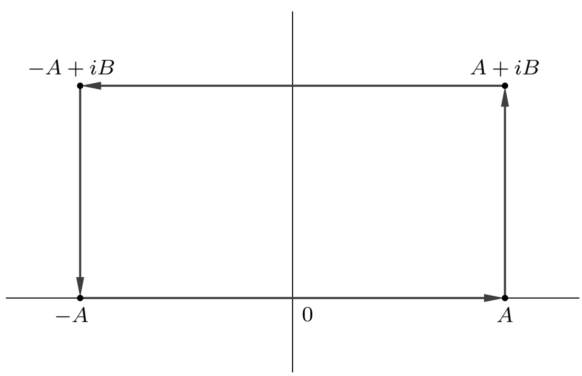

Figure 2.9. Integracijska pot.

Na enak način pokažemo, da je tudi integral po levi stranici $[-A, -A+iB]$ omejen z $\frac{M}{A}$. Integral po zgornji stranici $[-A+iB, A+iB]$ pa lahko ocenimo kot

$$\left|\int_{[-A+iB,A+iB]} R(z)e^{iz}\,dz\right| \le \int_{[-A+iB,A+iB]} \frac{M}{|z|}\,e^{-B}\,ds \le \int_{-A}^{A} \frac{M}{B}\,e^{-B}\,dx = \frac{2AM}{Be^B}.$$

Ko gresta A in B proti ∞ na primeren način (npr. $B = A$), gredo v teh ocenah desne strani proti 0, zato je po izreku o residuih

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}\alpha>0} \operatorname{Res}\left(R(z)e^{iz};\alpha\right).$$

Zgled 2.10.5. Integral $I := \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ lahko izrazimo kot

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx := \frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0,\delta>0}\left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\right)\frac{e^{ix}}{x}\,dx,$$

saj je $(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty})\frac{\cos x}{x}\,dx = 0$, ker je funkcija $x \mapsto \frac{\cos x}{x}$ liha. Racionalna funkcija v tem integralu, $R(z) = \frac{1}{z}$, pa ima pol v točki 0, zato bomo integracijsko pot spremenili tako, da bomo del roba zgoraj opisanega pravokotnika v bližini točke 0 nadomestili z majhno polkrožnico γ_δ s središčem v 0 in polmerom δ, $\gamma_\delta(\varphi) = \delta e^{i\varphi}$, $\pi \le \varphi \le 2\pi$. Z razvojem funkcije e^{iz} v vrsto vidimo, da je $\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + g(z)$, kjer je g holomorfna (torej tudi zvezna) funkcija, zato je

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\gamma_\delta} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \lim_{\delta\to 0}\int_{\gamma_\delta}\frac{dz}{z} + \lim_{\delta\to 0}\int_{\gamma_\delta} g(z)\,dz = \lim_{\delta\to 0}\int_{\gamma_\delta}\frac{dz}{z} = \lim_{\delta\to 0}\int_{\pi}^{2\pi} i\,d\varphi = \pi i.$$

Iz izreka o residuih in ocen, ki smo jih spoznali pred tem zgledom, sedaj sledi, da je

$$\lim_{A\to\infty,\ \delta\to 0}\left(\int_{-A}^{-\delta} + \int_{\delta}^{A}\right)\frac{e^{ix}}{x}\,dx + \pi i = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z};0\right) = 2\pi i,$$

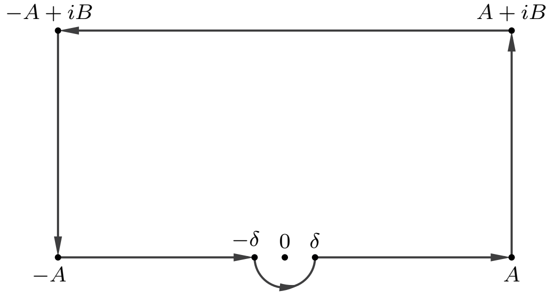

Figure 2.10. Integracijska pot.

torej

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\infty}\right)\frac{e^{ix}}{x}\,dx=\pi i$$

in končno

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\,(\pi i)=\frac{\pi}{2}. \tag{2.10.5}$$

2.10.4. Mellinova transformacija

Mellinova transformacija funkcije f je integral oblike

$$I(t)=\int_0^{\infty}f(x)x^{t-1}\,dx\quad (t>0).$$

Privzeli bomo, da je f holomorfna na $\mathbb{C}$, razen morda v končno mnogo točkah, ki ne ležijo na poltraku $[0,\infty)$, ter da (pri fiksnem t) obstajata taki konstanti $a<t<b$, da je funkcija $|f(z)z^b|$ omejena za vse dovolj velike $|z|$ (torej $|f(z)|\le\frac{C}{|z|^b}$ za kako konstanto C in vse dovolj velike $|z|$), funkcija $|f(z)z^a|$ pa omejena v kaki okolici točke 0 (torej $|f(z)|\le\frac{D}{|z|^a}$ za kak D in vse dovolj majhne $|z|\ne 0$).

Integracijska pot γ bo tokrat sestavljena iz: negativno usmerjenega krožnega loka γ_δ z enačbo $z=\delta e^{i\varphi}$, $\theta\le\varphi\le 2\pi-\theta$ (za kaka dovolj majhna $\delta>0,\theta>0$); daljice $\gamma_{\delta,R}$ od $\delta e^{i\theta}$ do $Re^{i\psi}$ za kak dovolj velik R, kjer je ψ tak, da je daljica vzporedna z abscisno osjo; pozitivno usmerjenega krožnega loka γ_R z enačbo $z=Re^{i\varphi}$, $\psi\le\varphi\le 2\pi-\psi$, ter daljice $\gamma_{R,\delta}$ od $Re^{i(2\pi-\psi)}$ do $\delta e^{i(2\pi-\theta)}$. Za $z=|z|e^{i\varphi}$, $0<\varphi<2\pi$, naj bo $z^t=|z|^te^{it\varphi}$; funkcija $z\mapsto z^t$ je tedaj holomorfna na območju $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$, po katerem poteka integracijska pot γ.

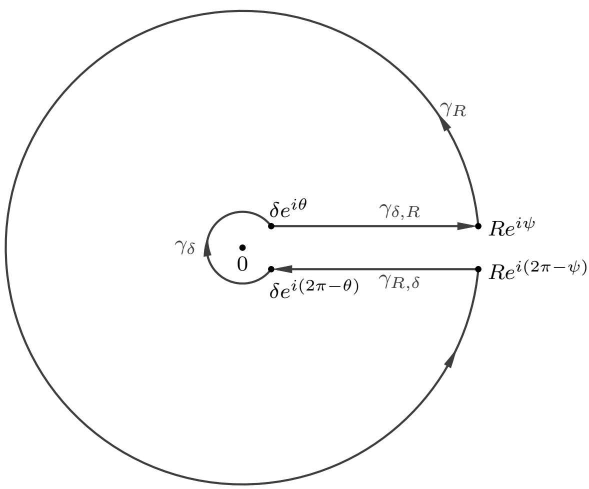

FIGURE 2.11. Integracijska pot pri Mellinovi transformaciji.

Ker je $|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^b}$ za vse dovolj velike $|z|$, velja na krožnem loku γ_R (za dovolj velik R) ocena $|f(z)z^{t-1}| \leq \frac{C}{R^{b-t+1}}$, torej je

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)z^{t-1}\,dz\right| \leq \frac{C}{R^{b-t+1}}\,2\pi R = \frac{2\pi C}{R^{b-t}} \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Podobno velja na krožnem loku γ_δ (za vsak dovolj majhen δ) ocena $|f(z)z^{t-1}| \leq \frac{D}{\delta^{a-t+1}}$, torej

$$\left|\int_{\gamma_\delta} f(z)z^{t-1}\,dz\right| \leq \frac{D}{\delta^{a-t+1}}\,2\pi\delta = 2\pi D\delta^{t-a} \stackrel{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ko gre θ proti 0, gre tudi ψ proti 0 in obe daljici $\gamma_{\delta,R}$ in $\gamma_{R,\delta}$ se približujeta pozitivnemu poltraku abscisne osi. Ker je f zvezna v okolici tega poltraka, je

$$\lim_{\theta\to 0}\int_{\gamma_{\delta,R}} f(z)z^{t-1}\,dz = \int_\delta^R f(x)x^{t-1}\,dx,$$

torej

$$\lim_{\delta\to 0, R\to\infty}\lim_{\theta\to 0}\int_{\gamma_{\delta,R}} f(z)z^{t-1}\,dz = \int_0^\infty f(x)x^{t-1}\,dx.$$

Na spodnji daljici $\gamma_{R,\delta}$ pa se $z^{t-1} = |z|^{t-1}e^{i(t-1)\varphi}$ približuje vrednosti $x^{t-1}e^{i(t-1)2\pi} = x^{t-1}e^{2\pi it}$, ker gre φ proti 2π in $|z|$ proti $x = \operatorname{Re} z$. Zato (in ker je v limiti spodnja daljica usmerjena v negativno stran abscisne osi) je

$$\lim_{\delta\to 0, R\to\infty}\lim_{\theta\to 0}\int_{\gamma_{R,\delta}} f(z)z^{t-1}\,dz = -e^{2\pi it}\int_0^\infty f(x)x^{t-1}\,dx.$$

Iz zgornjih ocen in enakosti sledi sedaj po izreku o residuih, da je

$$\left(1 - e^{2\pi it}\right)\int_0^\infty f(x)x^{t-1}\,dx = 2\pi i\sum_\alpha \operatorname{Res}\left(f(z)z^{t-1};\alpha\right).$$

Ker je $1 - e^{2\pi it} = -e^{\pi it}(e^{\pi it} - e^{-\pi it}) = -2ie^{\pi it}\sin\pi t$, dobimo od tod

$$\int_0^\infty f(x)x^{t-1}\,dx = -\frac{\pi e^{-\pi it}}{\sin\pi t}\sum_\alpha \operatorname{Res}\left(f(z)z^{t-1};\alpha\right), \quad \text{če je } t \in (a,b)\setminus\mathbb{Z}. \qquad (2.10.6)$$

ZGLED 2.10.6. Naj bo $s \in (0,1)$. V integral

$$B(s,1-s) := \int_0^1 u^{s-1}(1-u)^{-s}\,du = \int_0^1 \left(\frac{1}{u} - 1\right)^{-s}\frac{du}{u}$$

vpeljimo novo spremenljivko $x = \frac{1}{u} - 1$, da dobimo

$$B(s,1-s) = \int_0^\infty (1+x)^{-1}x^{-s}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+x}\,x^{(1-s)-1}\,dx.$$

Tukaj je $t := 1 - s \in (0, 1)$ in (ker je $|1 + z|^{-1} \leq \frac{2}{|z|}$ za velike $|z|$) je lahko videti, da so izpolnjeni pogoji za uporabo formule (2.10.6). Ker je edini pol funkcije $f(z) = (1+z)^{-1}$ v točki -1 in je v -1 residuum funkcije $z \mapsto (1+z)^{-1}z^{-s}$ enak $(-1)^{-s} = e^{-\pi i s}$, dobimo

$$B(s, 1-s) = -\frac{\pi e^{-\pi i(1-s)}}{\sin \pi(1-s)}(-1)^{-s} = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Za konec razdelka omenimo še preprosto trditev, ki smo jo pravzaprav deloma že uporabili v gornjih računih, njen dokaz pa bomo pustili bralcem za vajo.

TRDITEV 2.10.7. *Če ima funkcija g v točki α ničlo reda 1, funkcija f pa je holomorfna na kaki okolici točke α, potem je* $\operatorname{Res}(f/g; \alpha) = f(\alpha)/g'(\alpha)$.

Naloge

1. Izračunajte $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cx}}{1+e^x}\,dx$, kjer je $c \in (0, 1)$. (Navodilo: integracijska pot naj bo sestavljena iz daljic $[-R, R]$, $[R, R+2\pi i]$, $[R+2\pi i, -R+2\pi i]$ in $[-R+2\pi i, -R]$; $R \to \infty$.)

2. Izračunajte naslednje integrale, kjer je $a \neq 0$:

(i) $$\int_0^\infty \frac{dx}{a^4 + x^4};$$

(ii) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3};$$

(iii) $$\int_0^\infty \frac{dx}{a^n + x^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(Navodilo: integrirajte po poti, sestavljeni iz daljice $[0, R]$ na abscisni osi, krožnega loka $Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{n}$, in daljice od $Re^{i2\pi/n}$ do 0; pošljite $R \to \infty$.)

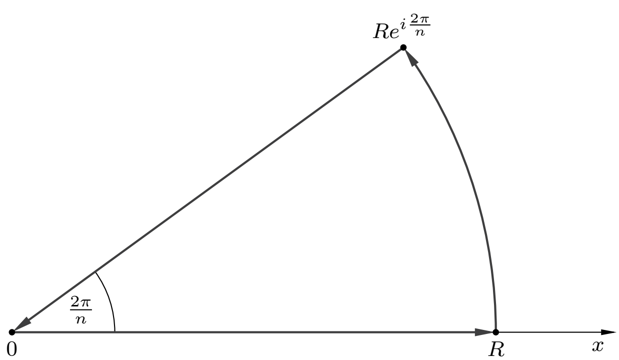

FIGURE 2.12. Integracijska pot v nalogi 2(iii).

3. Naj bo f holomorfna funkcija na polravnini $y > 0$ in zvezna na zaprti polravnini $y \geq 0$. Prepostavimo, da je funkcija $z \mapsto |z^2 f(z)|$ omejena. Pokažite, da je potem $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$, če je $\operatorname{Im} z > 0$.

4. Izračunajte integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}\, d\varphi \quad (r \in \mathbb{R})$.

***5.** Pokažite, da je $\int_0^\infty \cos x^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^\infty \sin x^2\, dx$. (Navodilo: integrirajte holomorfno funkcijo $z \mapsto e^{-z^2}$ po sklenjeni poti, sestavljeni iz daljice $[0, R]$ na abscisni osi, krožnega loka $z(\varphi) = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ in daljice od $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ do 0, ter nato pošljite R proti ∞.)

***6.** Pokažite, da je $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln|1 - e^{i\varphi}|\, d\varphi = 0.$

(Navodilo: Za z na polravnini $\operatorname{Re} z < 1$, je $1 - z \neq 0$ in lahko definiramo primerno vejo naravnega logaritma, torej take holomorfne funkcije L, da je $e^{L(1-z)} = 1 - z$ in $\operatorname{Re} L(1 - z) = \ln|1 - z|$, zato zadošča pokazati, da je $\int_{|z|=1} L(1 - z)\frac{dz}{z} = 0$. Za sklenjeno pot γ, sestavljeno iz krožnega loka $z = e^{i\varphi}$, $\delta \leq \varphi \leq 2\pi - \delta$ (kjer je $\delta > 0$ dovolj majhen) in dela γ_δ krožnice $|z - 1| = |e^{i\delta} - 1|$ od točke $e^{i(2\pi-\delta)}$ do $e^{i\delta}$, je po Cauchyevem izreku $\int_\gamma L(1 - z)\frac{dz}{z} = 0$, saj je funkcija $z \mapsto \frac{L(1-z)}{z}$ holomorfna v okolici območja, ki ga ograjuje γ (singularnost v 0 je namreč premostljiva, ker je $L(1) = 0$). Opazite, da konvergirata integrala po γ_δ in po loku $z = e^{i\varphi}$, $-\delta \leq \varphi \leq \delta$, proti 0, ko gre δ proti 0.)

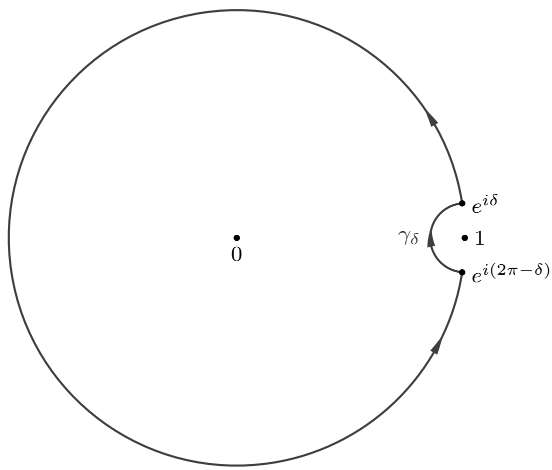

FIGURE 2.13. Integracijska pot v nalogi 6.

7. Določite $\operatorname{Res}(1/f; \alpha)$, če je α enkratna ničla funkcije f, ki je holomorfna v okolici točke α. (Rezultat: $1/f'(\alpha)$.)

2.11. Odprtost holomorfnih preslikav in njene posledice

Preslikavo $f : D \to \mathbb{C}$ imenujemo *odprta*, če je $f(U)$ odprta množica za vsako odprto podmnožico $U \subseteq D$. V tem razdelku bomo pokazali, da so holomorfne preslikave odprte in izpeljali nekaj posledic te ugotovitve.

LEMA 2.11.1. *Naj bo f meromorfna funkcija na območju Ω in $\bar{D}$ tak zaprt krog, da f nima nobene ničle niti pola na njegovem robu ∂D. Naj bo $\mathcal{N}$ število ničel, $\mathcal{P}$ pa število polov funkcije f v odprtem krogu D, kjer štejemo ničle in pole v skladu z njihovimi mnogokratnostmi. Potem je*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \mathcal{N} - \mathcal{P},$$

kjer je v integralu rob ∂D pozitivno orientiran.

PROOF. Naj bodo $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ vse ničle, $\beta_1, \ldots, \beta_\ell$ pa vsi poli funkcije f na D ter označimo z $m_1, \ldots, m_k$ in $n_1, \ldots, n_\ell$ njihove mnogokratnosti. Tedaj je

$$f(z) = (z - \alpha_1)^{m_1} \cdots (z - \alpha_k)^{m_k} (z - \beta_1)^{-n_1} \cdots (z - \beta_\ell)^{-n_\ell} g(z), \tag{2.11.1}$$

kjer je g holomorfna funkcija, definirana na kaki okolici zaprtega kroga $\bar{D}$, ki nima nobene ničle (niti pola) na $\bar{D}$. Ko iz (2.11.1) izrazimo $\frac{f'(z)}{f(z)}$ in integriramo, dobimo

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz &= \int_{\partial D} \frac{m_1}{z - \alpha_1}\, dz + \ldots + \int_{\partial D} \frac{m_k}{z - \alpha_k}\, dz - \\ &\quad - \int_{\partial D} \frac{n_1}{z - \beta_1}\, dz - \ldots - \int_{\partial D} \frac{n_\ell}{z - \beta_\ell}\, dz \\ &= 2\pi i(m_1 + \ldots + m_k - n_1 - \ldots - n_\ell) = 2\pi i(\mathcal{N} - \mathcal{P}).\end{aligned}$$

□

IZREK 2.11.2. *Naj bo f holomorfna funkcija na kaki odprti okolici D točke α in naj bo $\beta = f(\alpha)$. Torej ima funkcija $z \mapsto f(z) - \beta$ v točki α ničlo; naj bo n njena stopnja. Obstajata taka odprta kroga $D(\alpha, \delta) \subseteq D$ in $D(\beta, \varepsilon)$, da ima za vsak $w \in D(\beta, \varepsilon) \setminus \{\beta\}$ enačba $f(z) = w$ natanko n različnih rešitev v krogu $D(\alpha, \delta)$. (To pomeni, da se natanko n različnih točk iz $D(\alpha, \delta)$ preslika v w.)*

PROOF. Naj bo $\delta > 0$ tako majhen, da je funkcija f holomorfna v okolici kroga $\overline{D(\alpha, \delta)}$. Označimo z γ sklenjeno pot $t \mapsto f(\alpha + \delta e^{it})$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (torej je $[\gamma] = f(\partial D(\alpha, \delta)))$. Ker so ničle holomorfne funkcije izolirane, lahko pri tem izberemo δ tako majhen, da funkcija $z \mapsto f(z) - \beta$ nima nobene ničle v preluknjanem krogu $\overline{D(\alpha, \delta)} \setminus \{\alpha\}$. Označimo z $\mathcal{N}(w)$ število ničel funkcije $z \mapsto f(z) - w$ v krogu $D(\alpha, \delta)$. Ker funkcija $z \mapsto |f(z) - \beta|$ nima ničle na $\partial D(\alpha, \delta)$, je njen minimum tam pozitiven, zato tudi funkcija $z \mapsto f(z) - w$ nima nobene ničle na $\partial D(\alpha, \delta)$, če je le w dovolj blizu β. Tedaj velja

$$I_\gamma(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(\alpha, \delta)} \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = \mathcal{N}(w). \tag{2.11.2}$$

Pri tem druga enakost sledi z vpeljavo nove spremenljivke $\zeta = f(z)$, tretja enakost pa po lemi 2.11.1. Naj bo $\varepsilon > 0$ tako majhen, da krog $\overline{D(\beta,\varepsilon)}$ ves leži v isti komponenti množice $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$. Tedaj je $I_\gamma(w) = I_\gamma(\beta)$ za vse $w \in D(\beta,\varepsilon)$, torej iz (2.11.2) sledi, da je $\mathcal{N}(w) = \mathcal{N}(\beta) = n$. Ker je $n \geq 1$, to pomeni, med drugim, da f preslika krog $D(\alpha,\delta)$ surjektivno na krog $D(\beta,\varepsilon)$. Torej je vsaka točka $\beta = f(\alpha)$ notranja točka zaloge vrednosti preslikave f (zožene na katerokoli odprto množico, ki vsebuje α) in f je zato odprta preslikava.

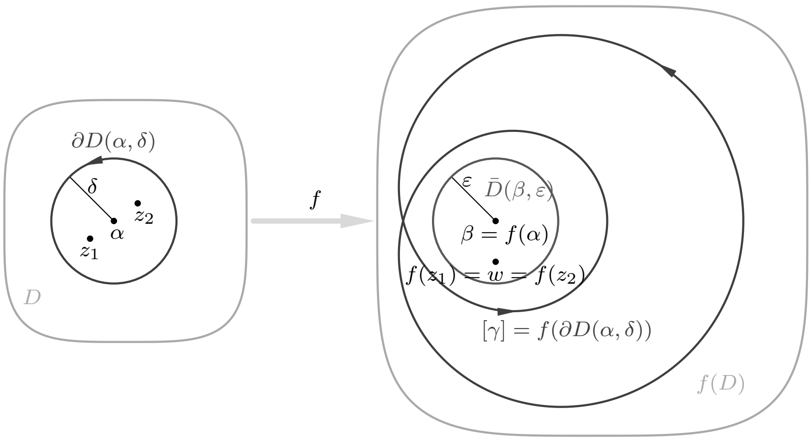

FIGURE 2.14. K dokazu odprtosti holomorfnih preslikav.

Če sedaj δ po potrebi še zmanjšamo, lahko dosežemo, da tudi odvod f' nima v preluknjanem krogu $D(\alpha,\delta) \setminus \{\alpha\}$ nobene ničle. Potem so vse ničle funkcije $z \mapsto f(z) - w$ na $D(\alpha,\delta) \setminus \{\alpha\}$ enostavne (saj bi bila vsaka večkratna ničla tudi ničla odvoda $(f-w)' = f'$). Torej tedaj funkcija f vsako vrednost $w \in D(\beta,\varepsilon) \setminus \{\beta\}$ zavzame na krogu $D(\alpha,\delta)$ v natanko n različnih točkah. $\square$

V dokazu izreka 2.11.2 smo že opazili naslednjo posledico:

POSLEDICA 2.11.3. *Vsaka holomorfna preslikava je odprta.*

Velja pa tudi naslednja inačica izreka o inverzni preslikavi:

POSLEDICA 2.11.4. *Če je f taka holomorfna funkcija v okolici točke α, da je $f'(\alpha) \neq 0$, potem obstaja taka odprta okolica U točke α, da f preslika U bijektivno na odprto množico $f(U)$, inverzna preslikava $f^{-1} : f(U) \to U$ pa je tudi holomorfna.*

PROOF. Po izreku 2.11.2 obstaja taka odprta okolica U točke α, da je $f|U$ odprta bijektivna preslikava (torej preslikava $f^{-1} : f(U) \to U$ zvezna). To okolico lahko zmanjšamo, tako da je $f'(z) \neq 0$ za vse $z \in U$. Pokazati moramo le še, da je f^{-1} holomorfna v vsaki točki $w_0 \in f(U)$. Za ta namen pa zadošča dokazati, da je

$$\lim_{w\to w_0} \left[\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} - \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))} \right] = 0,$$

saj je potem $(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}$. Naj bo $z_0 = f^{-1}(w_0)$ in $z = f^{-1}(w)$ za $w \in f(U)$. Ker je funkcija f^{-1} zvezna, lahko gornjo limito napišemo kot

$$\lim_{z \to z_0} \left[\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} - \frac{1}{f'(z_0)} \right],$$

od koder je očitno, da je enaka 0, saj je f odvedljiva v točki z_0 in $f'(z_0) \neq 0$. □

Ker je pri nekonstantni holomorfni preslikavi f po izreku 2.11.2 slika $f(D)$ odprte množice D odprta, je za vsak $w \in f(D)$ kak dovolj majhen krog $D(w, r)$ $(r > 0)$ vsebovan v $f(D)$. Ker krog $D(w, r)$ vsebuje tudi točke, ki so od izhodišča 0 bolj oddaljene kot w, je $\sup_{z \in D} |f(z)| > |w|$, torej velja:

Izrek 2.11.5. *(Princip maxima) Če je f nekonstantna holomorfna preslikava na odprti množici D, potem funkcija $|f|$ ne more doseči maksima v nobeni točki iz D. Minimum pa lahko doseže le v ničlah funkcije f.*

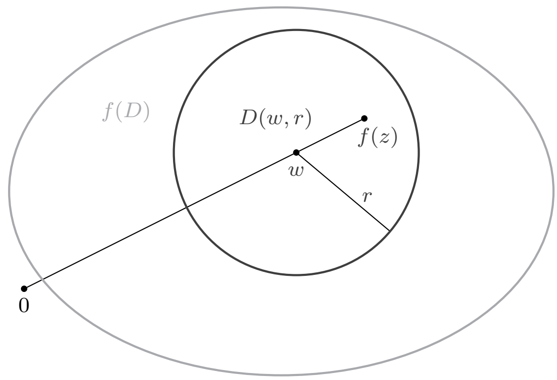

Figure 2.15. Princip maksima: $|f(z)| > |w|$.

Posledica 2.11.6. *Če je f nekonstantna holomorfna funkcija v okolici kake kompaktne množice $K \subset \mathbb{C}$, zavzame funkcija $|f||K$ svoj maksimum le v (nekaterih) robnih točkah množice K, minimum pa je tudi le na robu ali pa v ničlah funkcije f.*

Naslednji izrek je mnogo pomembnejši, kot pa je morda videti na prvi pogled.

Izrek 2.11.7. *(Schwarzova lema). Naj bo $f : D(0, R) \to D(0, r)$ holomorfna preslikava $(r, R > 0)$ in $f(0) = 0$. Potem je bodisi*

$$|f(z)| < \frac{r}{R}|z| \quad \textit{za vsak} \ \ z \in D(0, R) \setminus \{0\} \quad \textit{in} \ \ |f'(0)| < \frac{r}{R}$$

bodisi

$$f(z) = \frac{r}{R}\omega z \qquad (\forall z \in D(0, R))$$

za kak $\omega \in \mathbb{C}$, $|\omega| = 1$.

Proof. Privzeti smemo, da je $R = 1 = r$, sicer nadomestimo f s funkcijo $\tilde{f} : D(0,1) \to D(0,1)$, definirano z $\tilde{f}(z) = \frac{f(Rz)}{r}$. Ker je $f(0) = 0$, je funkcija

$$g(z) := \frac{f(z)}{z}$$

holomorfna tudi v točki 0 (to vidimo iz razvoja funkcije f v Taylorjevo vrsto okrog 0). Za vsak $\rho \in (0,1)$ je po principu maksima za funkcijo g na krogu $D(0,\rho)$

$$|g(z)| \le \max_{|\zeta|=\rho} |g(\zeta)| = \frac{1}{\rho} \max_{|\zeta|=\rho} |f(\zeta)| \le \frac{1}{\rho} \qquad (|z| < \rho).$$

Ko pošljemo v tej oceni ρ proti 1, vidimo, da je $|g(z)| \le 1$ za vsak $z \in D(0,1)$. Torej je $|f(z)| \le |z|$ in tudi $|f'(0)| = |g(0)| \le 1$. Če velja v kaki od teh ocen enakost, npr. $|f(z_0)| = |z_0|$ za kak $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$, potem je $|g(z_0)| = 1$ in po principu maksima mora biti g konstantna, $g(z) = \omega$. Potem je $f(z) = \omega z$ in $|\omega| = |g(z_0)| = 1$. □

Schwarzova lema omogoča opisati vse bijektivne holomorfne preslikave kroga vase, katerih inverz je tudi holomorfen. Take preslikave bomo imenovali *biholomorfizmi* kroga. Za vsak $\alpha \in D(0,1)$ naj bo

$$f_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}.$$

Funkcija f_α je holomorfna, razen v polu $\frac{1}{\bar{\alpha}}$, ki pa leži zunaj kroga $\bar{D}(0,1)$, ker je $|\frac{1}{\bar{\alpha}}| > 1$. Robno krožnico $\partial D(0,1)$ preslika preslikava f_α samo vase, ker za vsak $z \in \partial D(0,1)$ (torej $|z| = 1$ in zato $\bar{z} = \frac{1}{z}$) velja

$$\left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right| = \frac{|z-\alpha|}{|\overline{1-\bar{\alpha}z}|} = \frac{|z-\alpha|}{|1-\alpha\frac{1}{z}|} = \frac{|z-\alpha|}{|z-\alpha|}|z| = 1.$$

Po principu maksima sedaj sledi, da mora f_α preslikati krog $D(0,1)$ sam vase. Lahko je izračunati, da je $f_\alpha^{-1} = f_{-\alpha}$, torej je f_α biholomorfizem kroga $D(0,1)$.

Trditev 2.11.8. *Vsak biholomorfizem f kroga $D(0,1)$ je oblike*

$$f(z) = \omega f_\alpha(z)$$

za kak $\alpha \in D(0,1)$ in kak $\omega \in \mathbb{C}$ z absolutno vrednostjo $|\omega| = 1$.

Proof. Obravnavajmo najprej primer, ko je $f(0) = 0$. Če bi bilo $|f(z)| < |z|$ za kak $z \in D(0,1)$, bi uporabili Schwarzovo lemo na funkciji $g := f^{-1}$ in tako dobili

$$|z| = |g(f(z))| \le |f(z)| < |z|,$$

kar bi bilo protislovje. Torej mora biti $|f(z)| = |z|$ in zato po Schwarzovi lemi $f(z) = \omega z$ za vse $z \in D(0,1)$, kjer je ω konstanta in $|\omega| = 1$.

Na splošno pa označimo $\beta = f(0)$. Ker biholomorfizem $h := f_\beta \circ f$ preslika 0 v 0, je po prejšnjem odstavku oblike $h(z) = \omega z$. Od tod sledi, da je $f = f_\beta^{-1} \circ h = f_{-\beta} \circ h$, torej

$$f(z) = \frac{\omega z + \beta}{1 + \bar{\beta}\omega z} = \omega \frac{z + \bar{\omega}\beta}{1 + \bar{\beta}\omega z} = \omega f_\alpha(z),$$

kjer je $\alpha = -\bar{\omega}\beta$. □

Naloge

1. Dokažite osnovni izrek algebre s pomočjo principa minima (izrek 2.11.5). (Navodilo: opazujte funkcijo $|p(z)| = |z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \ldots + \alpha_0|$ na kakem dovolj velikem krogu $\bar{D}(0,R)$. Za z iz roba kroga je $|p(z)|$ veliko število, če je R velik, zato mora funkcija $|p||\bar{D}(0,R)$ doseči svoj minimum v kaki notranji točki kroga.)

***2.** Naj bo $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$ in $f : D(0,1) \to D(0,1)$ taka holomorfna (ne nujno bijektivna) preslikava, da je $f(\alpha) = \beta$. Koliko največ je lahko tedaj $|f'(\alpha)|$? (Navodilo: uporabite Schwarzovo lemo na funkciji $f_\beta \circ f \circ f_{-\alpha}$, kjer je f_α kot v trditvi 2.11.8.)

***3.** (i) Naj bo p polinom stopnje manjše od n. Za vsak $r > 0$ označimo $M(r) = \max_{|z|=r} |p(z)|$. Dokažite, da je funkcija $r \mapsto \frac{M(r)}{r^n}$ padajoča na $(0,\infty)$. (Namig: uporabite princip maksima na holomorfni funkciji $z \mapsto \frac{p(z)}{z^n}$ na kolobarju $r \le |z| \le R$ za kak dovolj velik R.)

(ii) Pokažite, da je $\sup_{|z|=1} |p(z)| \ge 1$ za vsak polinom z vodilnim koeficientom 1. (Namig: nova spremenljivka $\zeta = \frac{1}{z}$, nato princip maksima na enotskem krogu.)

(iii) Sklepajte s pomočjo točke (ii), da ugotovitev v (i) velja tudi za polinome stopnje n.

***4.** Pokažite, da za vsako končno podmnožico $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ krožnice $|z - \alpha| = R$ obstaja taka točka β na tej krožnici, da je $\prod_{j=1}^n |\beta - \alpha_j| = R^n$.

***5.** (*Phragmen-Lindelöf*) Naj bo f holomorfna funkcija na pasu $s < \operatorname{Re} z < t$ in zvezna na zaprtju tega pasu. Predpostavimo, da je na robu pasu funkcija $|f|$ omejena s kako konstanto M in da znotraj pasu velja

$$|f(z)| \le e^{Ae^{a|z|}} \tag{2.11.3}$$

za kaki konstanti $A > 0$ in $a \in (0,1)$. Pokažite, da je potem $|f| \le M$ povsod na pasu. (Navodilo: Če nadomestimo f s funkcijo $z \mapsto \frac{f(cz+d)}{M}$ za primerni konstanti c, d, lahko privzamemo, da je $M = 1$ ter $s = -\frac{\pi}{2}$, $t = \frac{\pi}{2}$. Izberimo $b \in (a,1)$ in za vsak $\varepsilon > 0$ opazujmo funkcijo $f_\varepsilon(z) := f(z)e^{-2\varepsilon\cos(bz)}$. Pokažite, da gre $|f_\varepsilon(z)|$ proti 0, ko gre $|z|$ proti ∞ in je z na pasu. Nato uporabite princip maksima na funkciji f_ε na vseh dovolj velikih pravokotnikih $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-R, R]$ in na koncu pošljite ε proti 0.)

6. Pokažite, da je funkcija $f(z) := e^{e^{iz}}$ omejena na robovih pasu $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$, a vseeno ni omejena na tem pasu. (Torej pogoj (2.11.3) v prejšnji nalogi ni odveč.)

***7.** (*Hadamardov izrek o treh premicah*) Naj bo f holomorfna funkcija na pasu $a < \operatorname{Re} z < b$, zvezna na zaprtju tega pasu ter omejena na robu. Za vsak $x \in [a,b]$ označimo $M(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(x+iy)|$. Pokažite, da je $x \mapsto \ln M(x)$ konveksna funkcija, torej, da je

$$M(x)^{b-a} \leq M(a)^{b-x} M(b)^{x-a} \quad (x \in [a,b]).$$

(Navodilo: Če je $M(b) = M(a)$, je izrek le poseben primer Phragmen-Lindelöfovega izreka (naloga 5). Na splošno pa uporabite ta izrek na funkciji

$$g(z) := M(a)^{\frac{z-b}{b-a}} f(z) M(b)^{\frac{a-z}{b-a}}.)$$

8. Naj bo f injektivna holomorfna preslikava v okolici točke α. Pokažite, da je $f'(\alpha) \neq 0$. (Rešitev: če je $f'(\alpha) = 0$, ima funkcija $z \mapsto f(z) - f(\alpha)$ v točki α ničlo stopnje vsaj 2, zato tedaj po izreku 2.11.2 (ki ga uporabimo na vsaki odprti okolici točke α) f ne more biti injektivna v nobeni okolici točke α.)

***9.** Naj bo α ničla reda m holomorfne funkcije f. Dokažite, da na kaki dovolj majhni okolici D točke α obstaja taka holomorfna funkcija h, da je $f(z) = h(z)^m$ za vse $z \in D$. (Namig: Iz razvoja funkcije f v vrsto okrog α vidimo, da je $f(z) = a(z-\alpha)^m(1+g(z))$, kjer je a konstanta, g holomorfna funkcija na kaki okolici točke α in $g(\alpha) = 0$. Za z v dovolj majhni okolici točke α je $|g(z)| < 1$, zato lahko $h_1(z) := \sqrt[m]{1+g(z)}$ razvijemo v binomsko vrsto $h_1(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{m}}{k} g(z)^k$, kar pove, da je $1 + g(z) = h_1(z)^m$.)

2.12. Zaporedja holomorfnih funkcij†

Definicija 2.12.1. $H(D)$ naj označuje množico vseh holomorfnih funkcij na odprti množici D. Zaporedje funkcij $f_n \in H(D)$ konvergira proti funkciji f *enakomerno na kompaktnih množicah*, če je

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_K = 0$$

za vsako kompaktno podmnožico $K \subseteq D$, kjer pomeni $\|g\|_K := \sup_{z\in K} |g(z)|$ za vsako funkcijo $g : D \to \mathbb{C}$.

Izrek 2.12.2. *Če zaporedje $(f_n) \subseteq H(D)$ konvergira proti f enakomerno na kompaktnih množicah, velja:*

(i) *$f \in H(D)$;*

(ii) *zaporedje (f'_n) konvergira proti f' enakomerno na kompaktnih množicah;*

(iii) *če je množica D povezana in nobena funkcija f_n nima ničle na D, je nima niti f ali pa je f identično enaka 0 na D;*

(iv) *če je D povezana, f ni konstantna na D in so vse funkcije f_n injektivne, potem je tudi f injektivna.*

Proof. (i) Naj bo $z \in D$ in $r > 0$ tak, da je zaprt krog $\bar{D}(z,r)$ vsebovan v D. Po Cauchyevi formuli je za vsak $w \in D(z,r)$

$$f_n(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z,r)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - w}\,d\zeta, \tag{2.12.1}$$

kjer je $\partial D(z,r)$ pozitivno orientirana robna krožnica. Ker je $\bar{D}(z,r)$ kompaktna podmnožica v D, zaporedje (f_n) konvergira proti f enakomerno na $\partial D(z,r)$ in tudi v točki w, zato iz (2.12.1) sledi, da je

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w}\,d\zeta.$$

Od tod vidimo, da je f odvedljiva (saj lahko integral odvajamo na parameter w) in da je

$$f_n'(w) - f'(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z,r)} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - w)^2}\,d\zeta \qquad (w \in D(z,r). \tag{2.12.2}$$

(ii) Za vsak $w \in D(z, \frac{r}{2})$ in $\zeta \in \partial D(z,r)$ je $|\zeta - w| \geq \frac{r}{2}$, zato iz (2.12.2) sledi, da je

$$|f_n'(w) - f'(w)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D(z,r)} \frac{|f_n(\zeta) - f(\zeta)|}{(\frac{r}{2})^2}\,|d\zeta| \qquad (w \in D(z, \tfrac{r}{2})). \tag{2.12.3}$$

Naj bo sedaj K kompaktna podmnožica v D in $\varepsilon > 0$. Potem obstaja tak $r > 0$, da je mogoče K pokriti s končno mnogo takimi krogi $D(z_j, \frac{r}{2})$ $(j = 1, \ldots, n)$, da je $\bar{D}(z_j, r) \subseteq D$. Ker zaporedje (f_n) konvergira proti f enakomerno na kompaktni množici $\tilde{K} := \cup_{j=1}^{n} \bar{D}(z_j, r)$, je $|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \varepsilon$ za vse dovolj velike n in vse $\zeta \in \tilde{K}$. Tedaj iz (2.12.3) sledi

$$|f_n'(w) - f'(w)| \leq \frac{4\varepsilon}{r} \qquad (w \in K).$$

Ker velja ta ocena za vsak $\varepsilon > 0$, to pove, da zaporedje (f_n') konvergira proti f enakomerno na K.

(iii) Predpostavimo sedaj, da funkcije f_n nimajo ničel in da f ni identično enaka 0 na D. Izberimo poljubno točko $\alpha \in D$ ter tak $r > 0$, da je $\bar{D}(\alpha, r) \subset D$ in da na $\bar{D}(\alpha, r)$ ni nobene ničle funkcije f, razen morda α. (To je mogoče, ker so ničle holomorfne funkcije f izolirane.) Ker zaporedji (f_n) in (f_n') konvergirata proti f in f' enakomerno na kompaktnih množicah, zaporedje (f_n'/f_n) konvergira proti f'/f enakomerno na $\partial D(\alpha, r)$, zato velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(\alpha,r)} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(\alpha,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

Po lemi 2.11.1 je leva stran te enakosti enaka 0 in tedaj tudi f ne more imeti ničle v α. Ker velja to za vsak $\alpha \in D$, to pomeni, da f nima ničle v D.

(iv) Predpostavimo, da sta α in β različni točki iz D in $f(\beta) = f(\alpha)$. Zaporedje funkcij $g_n(z) := f_n(z) - f_n(\alpha)$ konvergira proti funkciji $g(z) := f(z) - f(\alpha)$ enakomerno na kompaktnih množicah in $g_n(\alpha) = 0 = g(\alpha) = g(\beta)$. Ker so funkcije f_n injektivne, so take tudi g_n, torej ne morejo imeti nobene druge ničle na D, razen α. Ker po hipotezi f ni konstantna, g ne more biti 0 povsod na D, torej je β izolirana ničla za g. Izberimo tako majhen krog $\bar{D}(\beta, r)$, da je $g \neq 0$ povsod na $\bar{D}(\beta, r) \setminus \{\beta\}$; torej $\alpha \notin \bar{D}(\beta, r)$. Ker so vse funkcije g_n povsod na tem krogu različne od 0, mora po točki (iii) (uporabljeni na krogu $D(\beta, r)$, namesto na D) isto veljati tudi za g. Toda potem bi moralo biti $g(\beta) \neq 0$, kar je protislovje. □

Definicija 2.12.3. Naj bo $S \subseteq H(D)$. Pravimo, da je množica S *omejena na kompaktnih množicah*, če je $\sup_{f \in S} \|f\|_K < \infty$ za vsako kompaktno množico $K \subseteq D$.

S je *enakozvezna na kompaktni množici* K, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ za vsaka $z, w \in K$, za katera je $|z - w| < \delta$.

S je *relativno kompaktna*, če za vsako zaporedje $(f_n) \subseteq S$ obstaja kako podzaporedje, ki konvergira enakomerno na kompaktnih množicah proti kaki funkciji f (ki ni nujno v S).

Izrek 2.12.4. *Vsaka, na kompaktnih množicah omejena, družina $S \subseteq H(D)$ je enakozvezna na kompaktnih množicah in relativno kompaktna.*

Proof. Naj bo K kompaktna podmnožica v D in $r > 0$ tako majhen, da je $\bar{D}(z, 2r) \subseteq D$ za vsak $z \in K$. Po Cauchyevi formuli za $w \in D(z, 2r)$ velja

$$f(w) - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z,2r)} [\frac{f(\zeta)}{\zeta - w} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}]\, d\zeta = \frac{w - z}{2\pi i} \int_{\partial D(z,2r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)(\zeta - z)}\, d\zeta,$$

torej za $w \in D(z, r)$ velja (ker je $|\zeta - w| \geq r$ za $\zeta \in \partial D(z, 2r)$)

$$|f(w) - f(z)| \leq \frac{|w - z|}{2\pi} \int_{\partial D(z,2r)} \frac{\|f\|_{\tilde{K}}}{r \cdot 2r}\, ds = \frac{|w - z|}{r} \|f\|_{\tilde{K}},$$

kjer je $\tilde{K}$ (kompaktna) množica vseh tistih točk $z \in D$, ki so od K oddaljene za največ $2r$. Ker velja zadnja neenakost za vse $z, w \in K$, pri pogoju $|w - z| < r$, in je po hipotezi $\sup_{f \in S} \|f\|_{\tilde{K}} < \infty$, sledi, da je družina S enakozvezna na K, saj je desna stran v zgornji oceni poljubno majhna, če sta si le z in w dovolj blizu.

Pokazati moramo še, da za vsako zaporedje $(f_n) \subseteq S$ obstaja podzaporedje, ki konvergira enakomerno na vseh kompaktnih podmnožicah v D. Najprej bomo dokazali, da obstaja podzaporedje, ki konvergira enakomerno na fiksni kompaktni podmnožici K v D. Naj bo $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ kaka števna gosta podmnožica v K (njeno zaprtje je torej K). Ker je zaporedje $(f_n(z_1))$ omejeno, ima vsaj eno stekališče, torej obstaja konvergentno podzaporedje $(f_{n,1}(z_1))$. Ker je tudi zaporedje $(f_{n,1}(z_2))$ omejeno, ima konvergentno podzaporedje $(f_{n,2}(z_2))$. Prav tako ima zaporedje $(f_{n,2}(z_3))$ konvergentno podzaporedje. Ko tako nadaljujemo, dobimo družino zaporedij $(f_{n,k})$, tako da je $(f_{n,k+1})$ podzaporedje v $(f_{n,k})$ in da je zaporedje $(f_{n,k}(z_k))$ konvergentno za vsak k. Diagonalno zaporedje $(f_{n,n})_{n=1}^{\infty}$ je potem podzaporedje vsakega zaporedja $(f_{n,k})$, torej je zaporedje $(f_{n,n}(z_j))$ konvergentno za vsak z_j. Pokazati nameravamo, da je zaporedje funkcij $f_{n,n}$ enakomerno Cauchyevo (torej enakomerno konvergentno) na K.

Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je po že dokazanem družina S enakozvezna na K, obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(w) - f(z)| < \varepsilon/3$ za vse $f \in S$ (torej tudi za vse funkcije $f_{n,n}$), če je $|w - z| < \delta$ in $z, w \in K$. Ker je množica (z_j) gosta v K, za vsak $w \in K$ obstaja tak z_j, da je $|w - z_j| < \delta/2$. Za vsak $z \in D(w, \frac{\delta}{2})$ je tedaj $|z - z_j| < \delta$, zato

$$|f_{n,n}(z) - f_{n,n}(z_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{za vse } n. \tag{2.12.4}$$

Ker je zaporedje $(f_{n,n}(z_j))$ konvergentno (torej Cauchyevo), za vse dovolj velike m in n, recimo za $m, n \geq n(z_j)$, velja

$$|f_{n,n}(z_j) - f_{m,m}(z_j)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.12.5}$$

Za vse $m, n \geq n(z_j)$ sledi potem iz (2.12.4) in (2.12.5)

$$\begin{aligned} &|f_{n,n}(z) - f_{m,m}(z)| \leq \\ &\qquad \leq |f_{n,n}(z) - f_{n,n}(z_j)| + |f_{n,n}(z_j) - f_{m,m}(z_j)| + |f_{m,m}(z_j) - f_{m,m}(z)| \\ &\qquad < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ta ocena velja za vse točke z iz kroga $D(w, \frac{\delta}{2})$. Ker lahko pokrijemo K s končno mnogo takimi krogi, recimo s krogi $D(w_k, \frac{\delta}{2})$ $(k = 1, \ldots, q)$, sledi, da je $|f_{n,n}(z) - f_{m,m}(z)| < \varepsilon$ za vse $z \in K$ in vse dovolj velike m, n. To dokazuje, da je zaporedje $(f_{n,n})$ enakomerno Cauchyevo na K in iz osnov analize je znano, da je zato enakomerno konvergentno na K.

Sedaj D izrazimo kot unijo naraščajočega zaporedja kompaktnih podmnožic K_n, in sicer takih, da je K_n vsebovana v notranjosti $\overset{\circ}{K}_{n+1}$ množice K_{n+1} za vsak n (glejte 1. nalogo). Po že dokazanem lahko izberemo podzaporedje $(g_{n,1})$ prvotnega zaporedja (f_n), ki konvergira enakomerno na K_1. Nato iz tega podzaporedja lahko izberemo podzaporedje $(g_{n,2})$, ki konvergira enakomerno na K_2 itd. Diagonalno podzaporedje $(g_{n,n})$ potem konvergira enakomerno na vseh množicah K_n. Ker notranjosti teh množic pokrivajo D, je vsaka kompaktna podmnožica K v D vsebovana v kaki množici K_n, zato zaporedje $(g_{n,n})$ konvergira enakomerno na K. □

Naloge

1. Pokažite, da je mogoče vsako odprto množico $D \subseteq \mathbb{C}$ izraziti kot $D = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$, kjer so K_n take kompaktne množice, da je $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$ za vsak n. (Namig: naj bo K_n presek kroga $\bar{D}(0, n)$ in množice vseh tistih točk $z \in D$, ki so od $\mathbb{C} \setminus D$ oddaljene vsaj za $\frac{1}{n}$.)

2. Naj bo $S \subseteq H(D)$ taka družina funkcij, da je $\sup_{f \in S} |f'|_K < \infty$ za vsako kompaktno množico $K \subset D$. Pokažite, da je S enakozvezna na kompaktnih množicah.

3. Ugotovite, katere od naslednjih družin funkcij f, izraženih s potenčno vrsto $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, so omejene na kompaktnih podmnožicah enotskega kroga $D(0,1)$ (torej enakozvezne na kompaktnih množicah v $D(0,1)$ in relativno kompaktne po izreku 2.12.4):

(i) družina vseh tistih f, za katere je $\sup_n |a_n| < \infty$;

(ii) družina vseh tistih f, za katere je $\sup_{n\neq 0} \frac{|a_n|}{n} < \infty$;

(iii) družina vseh tistih f, za katere je $\sup_n \frac{|a_n|}{n!} < \infty$.

4. Pokažite, da je vsaka družina $S \subset H(D)$, ki je enakozvezna na kompaktnih množicah in po točkah omejena (v smislu, da je $\sup_{f\in S} |f(z)| < \infty$ za vsak $z \in D$), omejena na kompaktnih množicah.

5. Če je $S \subset H(D)$ na kompaktnih množicah omejena družina funkcij, pokažite, da je taka tudi družina $\{f' : f \in S\}$. Ali velja tudi obratno?

***6.** (i) Pokažite, da je s predpisom $d_K(f,g) := \frac{\|g-f\|_K}{1+\|g-f\|_K}$ definirana metrika na prostoru vseh zveznih (kompleksnih) funkcij na kompaktni množici K.

(ii) Naj bo območje D unija kompaktnih podmnožic K_n kot v 1. nalogi, d_{K_n} pa metrika, definirana kot v (i). Pokažite, da potem predpis

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_{K_n}(f,g)$$

definira metriko na prostoru $H(D)$.

(iii) Dokažite, da je zaporedje $(f_n) \subset H(D)$ enakomerno konvergentno na kompaktnih podmnožicah v D natanko tedaj, ko je konvergentno v metriki d, definirani v točki (ii).

(iv) Dokažite, da je družina $S \subset H(D)$ relativno kompaktna v smislu definicije 2.12.3 natanko tedaj, ko je njeno zaprtje v metriki d kompaktna množica. (Namig: v metričnem prostoru je množica M kompaktna natanko tedaj, ko ima vsako zaporedje njenih elementov stekališče v M, torej konvergentno podzaporedje z limito v M.)

2.13. Homotopija krivulj†

Krivulja naj pomeni zvezno preslikavo $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ za kak interval $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Vsako krivuljo je mogoče reparametrizirati tako, da je njen definicijski interval $[0,1]$. Če je namreč γ definirana na $[a,b]$, potem preslikava $\lambda : [0,1] \to \mathbb{C}$, definirana z $\lambda(t) = \gamma(a+(b-a)t)$, opiše isto množico v $\mathbb{C}$ kot γ. Zato ne bo nobene izgube splošnosti, ko bomo v tem razdelku odslej obravnavali le krivulje, definirane na intervalu $[0,1]$. Sedaj bi radi definirali ovojno število *sklenjene krivulje* γ (tj. take, da je $\gamma(1) = \gamma(0)$)

okrog poljubne točke α, ki ne leži na krivulji. Za odsekoma zvezno odvedljive krivulje, torej poti, smo to storili v razdelku 2.5, za splošne krivulje γ (ko γ' ne obstaja), si bomo pomagali z aproksimacijo s potmi.

LEMA 2.13.1. *Za vsako (sklenjeno) krivuljo $\gamma : [0,1] \to D$ in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka (sklenjena) pot $\lambda : [0,1] \to D$, da je*

$$|\gamma(t) - \lambda(t)| \le \varepsilon \qquad \text{za vse } t \in [0,1]. \tag{2.13.1}$$

PROOF. Krivuljo γ lahko aproksimiramo s primerno odsekoma linearno funkcijo (tako, da aproksimiramo posebej $\operatorname{Re}\gamma$ in $\operatorname{Im}\gamma$). Druga možnost pa je, da uporabimo znani Weierstrassov izrek (ki ga bomo dokazali kasneje), po katerem za vsako zvezno funkcijo $\gamma : [0,1] \to D$ obstaja tak polinom p, da je $|p(t) - \gamma(t)| < \varepsilon/3$ za vse $t \in [0,1]$. Ker je razdalja d krivulje $[\gamma]$ do množice $\mathbb{C} \setminus D$ pozitivna in smemo brez škode privzeti, da je $\varepsilon < d$, pot $t \mapsto p(t)$ ($t \in [0,1]$) leži v D. (Tu bi zadoščalo zahtevati, da je $\varepsilon < 3d$; strožjo zahtevo bomo potrebovali kasneje.) Vendar pa ta pot ni nujno sklenjena, saj je morda $p(1) \neq p(0)$. Ker pa je $|p(0) - \gamma(0)| < \varepsilon/3$, $|p(1) - \gamma(1)| < \varepsilon/3$ in $\gamma(1) = \gamma(0)$ (če je γ sklenjena), je $|p(1) - p(0)| < 2\varepsilon/3$. Če sedaj definiramo $\lambda(t) := p(t) + t(p(0) - p(1))$, je $\lambda : [0,1] \to \mathbb{C}$ sklenjena pot, vsebovana v D, ker je $|\lambda(t) - \gamma(t)| \le |\gamma(t) - p(t)| + t|p(0) - p(1)| < \varepsilon$ za vse $t \in [0,1]$. ☐

Naslednja lema pove, da imajo vse bližnje sklenjene poti enako ovojno število okrog dane točke.

LEMA 2.13.2. *Naj bo $\alpha \in \mathbb{C}$ in $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ taki sklenjeni poti, da je*

$$|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| < |\gamma_1(t) - \alpha| \qquad \text{za vse } t \in [0,1]. \tag{2.13.2}$$

Potem je $I_{\gamma_1}(\alpha) = I_{\gamma_2}(\alpha)$.

PROOF. Iz neenakosti (2.13.2) sledi, da je njena desna stran pozitivna za vse $t \in [0,1]$, torej točka α ne more ležati na $[\gamma_1]$. Prav tako α ne more ležati na $[\gamma_2]$, saj bi v tem primeru za kak t imeli $\alpha = \gamma_2(t)$ in bi se tedaj neenakost (2.13.2) glasila $|\alpha - \gamma_1(t)| < |\gamma_1(t) - \alpha|$, kar bi bilo protislovje. Obe ovojni števili sta zato definirani.

Pot γ, definirana z

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_2(t) - \alpha}{\gamma_1(t) - \alpha}, \qquad (t \in [0,1]),$$

poteka v celoti znotraj kroga $D(1,1)$, saj je po (2.13.2)

$$|\gamma(t) - 1| = \frac{|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)|}{|\gamma_1(t) - \alpha|} < 1.$$

Torej je točka 0 v neomejeni komponenti množice $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$, zato $I_\gamma(0) = 0$. Iz

$$\begin{aligned} 2\pi i(I_{\gamma_2}(\alpha) - I_{\gamma_1}(\alpha)) &= \int_0^1 \left(\frac{\dot\gamma_2(t)}{\gamma_2(t) - \alpha} - \frac{\dot\gamma_1(t)}{\gamma_1(t) - \alpha} \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t)}\, dt = I_\gamma(0) = 0 \end{aligned}$$

sedaj sledi, da je $I_{\gamma_2}(\alpha) = I_{\gamma_1}(\alpha)$. ☐

Posledica 2.13.3. *Naj bo $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ sklenjena krivulja, $\alpha \in \mathbb{C}$ pa točka s pozitivno razdaljo $\delta := \inf_{t\in[0,1]} |\gamma(t) - \alpha|$ do $[\gamma]$. Tedaj za vsaki sklenjeni poti $\gamma_j : [0,1] \to \mathbb{C}$ $(j = 1, 2)$, ki zadoščata pogoju $\max_{t\in[0,1]} |\gamma_j(t) - \gamma(t)| < \delta/3$, velja $I_{\gamma_2}(\alpha) = I_{\gamma_1}(\alpha)$.*

Proof. Za vsak $t \in [0,1]$ in $j = 1, 2$ je

$$\begin{aligned}|\gamma_j(t) - \alpha| &= |(\gamma_j(t) - \gamma(t)) + (\gamma(t) - \alpha)| \\ &\geq |\gamma(t) - \alpha| - |\gamma_j(t) - \gamma(t)| \geq \delta - \frac{\delta}{3} = \frac{2\delta}{3}\end{aligned}$$

in

$$|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| \leq |\gamma_2(t) - \gamma(t)| + |\gamma(t) - \gamma_1(t)| < \frac{2\delta}{3},$$

torej je $|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| < |\gamma_1(t) - \alpha|$. Sedaj lema 2.13.2 pove, da je $I_{\gamma_2}(\alpha) = I_{\gamma_1}(\alpha)$. $\square$

Ta posledica nam omogoča definirati ovojno število krivulje.

Definicija 2.13.4. Naj bo δ razdalja točke α od sklenjene krivulje $[\gamma]$ in privzemimo, da je $\delta > 0$. *Ovojno število* ali *indeks* krivulje γ okrog točke α je definirano kot

$$I_\gamma(\alpha) := I_\lambda(\alpha),$$

kjer je λ poljubna sklenjena zvezno odvedljiva krivulja (torej pot), ki zadošča pogoju $\max_{t\in[0,1]} |\lambda(t) - \gamma(t)| < \delta/3$.

Dve krivulji γ_0 in γ_1 v območju $D \subseteq \mathbb{C}$ bomo imenovali homotopni v D, če je mogoče eno krivuljo zvezno preoblikovati v drugo z vmesnimi krivuljami, ki potekajo po D. Natančneje: obstajati mora taka družina krivulj $\Gamma_s : [0,1] \to D$ $(s \in [0,1])$, da je $\Gamma_0 = \gamma_0$, $\Gamma_1 = \gamma_1$ in da se krivulji Γ_{s_1} in Γ_{s_2} le malo razlikujeta, če je razlika $|s_2 - s_1|$ majhna. (Torej mora za vsak $\varepsilon > 0$ obstajati tak $\delta > 0$, da je $\max_{t\in[0,1]} |\Gamma_{s_2}(t) - \Gamma_{s_1}(t)| < \varepsilon$, kakor hitro je $|s_2 - s_1| < \delta$ in $s_1, s_2 \in [0,1]$.) Če imata krivulji γ_1 in γ_0 isto začetno in isto končno točko, bomo to zahtevali tudi od vseh vmesnih krivulj Γ_s. Kadar pa bosta začetni krivulji sklenjeni, naj bodo take tudi vse krivulje Γ_s. Če pišemo $\Gamma(t, s)$ namesto $\Gamma_s(t)$, lahko definicijo homotopnosti povemo takole:

Definicija 2.13.5. Krivulji $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to D$ z isto začetno točko $\alpha = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ in isto končno točko $\beta = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ sta *homotopni v D* (natančneje, γ_0 je homotopna γ_1) *s homotopijo, ki ohranja začetno in končno točko*, če obstaja taka zvezna funkcija $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to D$, da je

$$\Gamma(t, 0) = \gamma_0(t), \qquad \Gamma(t, 1) = \gamma_1(t) \tag{2.13.3}$$

ter $\Gamma(0, s) = \alpha$ in $\Gamma(1, s) = \beta$ za vse $s \in [0,1]$.

Dve sklenjeni krivulji $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to D$ (torej $\gamma_j(0) = \gamma_j(1)$) pa imenujemo *homotopni v D*, če obstaja taka zvezna funkcija $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to D$ (imenovana *homotopija*), da velja (2.13.3) in $\Gamma(0, s) = \Gamma(1, s)$. (Vse krivulje $t \mapsto \Gamma(t, s)$ $(s \in [0,1])$ so torej sklenjene.)

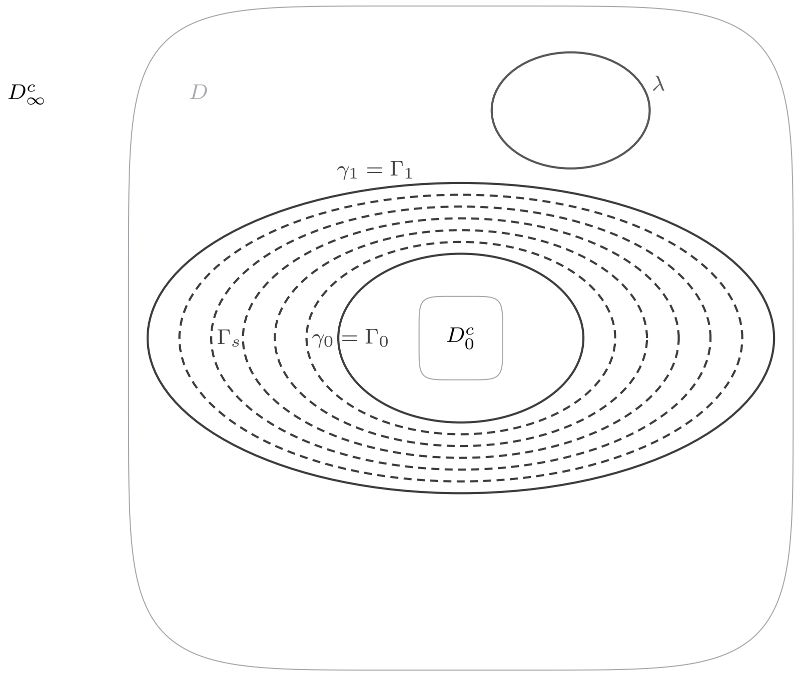

FIGURE 2.16. Sklenjeno krivuljo γ_0 lahko v območju D zvezno preoblikujemo v γ_1 (prek vmesnih krivulj Γ_s), ne pa v λ, ker γ_0 obkroži komponento D_0^c komplementa množice D, λ pa je ne obkroži.

ZGLED 2.13.6. Naj bo D konveksno območje, $\alpha \in D$ poljubna točka, $\gamma : [0,1] \to D$ pa poljubna sklenjena krivulja. Potem je preslikava

$$\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to D, \qquad \Gamma(t,s) = s\alpha + (1-s)\gamma(t),$$

homotopija krivulje γ v konstantno krivuljo $[0,1] \ni t \mapsto \alpha$.

IZREK 2.13.7. *Če sta γ_0 in γ_1 homotopni sklenjeni krivulji v D, potem je $I_{\gamma_1}(\alpha) = I_{\gamma_0}(\alpha)$ za vsako točko $\alpha \in \mathbb{C} \setminus D$.*

PROOF. Naj bo $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to D$ homotopija od γ_0 do γ_1 in δ razdalja točke α do (kompaktne) množice $\Gamma([0,1] \times [0,1])$. Ker je preslikava Γ enakomerno zvezna, obstaja tako velik $n \in \mathbb{N}$, da je

$$\max_{t \in [0,1]} |\Gamma(t,s_2) - \Gamma(t,s_1)| < \frac{\delta}{3}, \qquad \text{če je } |s_2 - s_1| < \frac{1}{n}.$$

Za vsak $j = 0, 1, \ldots, n$ naj bo $\lambda_j : [0,1] \to D$ sklenjena krivulja, definirana z $\lambda_j(t) = \Gamma(t, \frac{j}{n})$. Opazimo, da je $|\lambda_{j+1}(t) - \lambda_j(t)| < \frac{\delta}{3} \leq \frac{1}{3}|\lambda_j(t) - \alpha|$ za vse $t \in [0,1]$, zato iz definicije ovojnega števila krivulje in posledice 2.13.3 sledi, da je $I_{\lambda_{j+1}}(\alpha) = I_{\lambda_j}(\alpha)$ za vse j. Ker je $\lambda_0 = \gamma_0$ in $\lambda_n = \gamma_1$, mora biti $I_{\gamma_1}(\alpha) = I_{\gamma_0}(\alpha)$. □

Posledica 2.13.8. *Za vsaki homotopni sklenjeni poti γ_j $(j = 0, 1)$ v območju D in vsako holomorfno funkcijo $f : D \to \mathbb{C}$ velja*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz.$$

Če je torej sklenjena pot γ v D homotopna konstanti v D, je $I_\gamma(w) = 0$ za vsak $w \in \mathbb{C} \setminus D$ in $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Proof. Po izreku 2.13.7 ima cikel $\{\gamma_1, \gamma_0^-\}$ ovojno število 0 okrog vsake točke $\alpha \in \mathbb{C} \setminus D$, zato sledi po Cauchyevem izreku (glejte opombo 2.7.5), da je $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz$. □

Naloge

1. Pokažite, da je homotopnost krivulj ekvivalenčna relacija.

2. Pokažite, da je za vsako krivuljo $\gamma : [0, 1] \to D$, sklenjena krivulja $\lambda := \gamma + \gamma^-$ (kjer je $\gamma^-(t) := \gamma(1-t)$) homotopna konstantni krivulji $c(t) := \gamma(0)$ $(t \in [0, 1])$. (Namig: opazujte družino sklenjenih krivulj $\lambda_s := \gamma_s + \gamma_s^-$, kjer je $\gamma_s(t) := \gamma(st)$, $t, s \in [0, 1]$.) Sklepajte od tod in iz naloge 1 naslednje: če sta γ in λ homotopni krivulji z isto začetno in isto končno točko, potem je sklenjena krivulja $\gamma + \lambda^-$ homotopna konstanti.

3. Pokažite (s pomočjo prejšnje naloge in posledice 2.13.8), da je $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz$ za vsako holomorfno funkcijo $f : D \to \mathbb{C}$ in v D homotopni poti z isto začetno in isto končno točko.

4. (*Rouchejev izrek*) Če sta f in g taki holomorfni funkciji na D, da je $|g(z) - f(z)| < |f(z)|$ za vsako točko $z \in [\gamma]$, kjer je γ *enostavna sklenjena pot* v D (tj. taka, da ima množica $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$ le dve komponenti), homotopna v D konstanti, potem γ obkroži enako število ničel funkcij f in g. (Navodilo: S podobnim sklepanjem kot v dokazu leme 2.11.1 ugotovimo, da je število ničel funkcije f znotraj območja, ki ga obkroži γ, enako $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = I_{f\circ\gamma}(0)$. Nato lahko uporabimo lemo 2.13.2 za sklenjeni poti $f \circ \gamma$ in $g \circ \gamma$.)

5. Koliko ničel ima polinom $g(z) = z^7 - 7z^5 + z^3 - 1$ v krogu $|z| < 1$? (Namig: uporabite Rouchejev izrek (tj. prejšnjo nalogo), kjer naj bo $f(z) = -7z^5$.)

6. Dokažite, da funkcija $f_n(z) = \sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!}$ ne more imeti nobene ničle v krogu $|z| < 1$. (Namig: za $n \geq 2$ uporabite Roucheyev izrek za $f(z) = e^z$ in $g(z) = f_n(z)$ ter oceno $\sum_{k=3}^\infty \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{6}(1 + \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + \ldots) = \frac{2}{9}$.)

***7.** Koliko rešitev ima enačba $e^{-iz-1} = z^n$ znotraj enotskega kroga $|z| < 1$? (Navodilo: Če je $n \geq 2$, je za vsak dovolj majhen $\delta > 0$ na krožnici $|z| = 1 + \delta$ veljavna ocena $|e^{-iz-1}| = e^{\operatorname{Im} z - 1} \leq e^\delta < (1 + \delta)^n = |z|^n$, zato ima po Rouchejevem izreku (glejte 4. nalogo) na krogu $|z| < 1+\delta$ enačba $z^n - e^{-iz-1} = 0$ toliko rešitev kot $z^n = 0$, se pravi n, če jih štejemo v skladu z njihovo mnogokratnostjo. Ker velja to za vsak dovolj majhen $\delta > 0$, imata obe enačbi n rešitev na krogu $|z| \leq 1$. Treba je torej ugotoviti le še, koliko od teh rešitev leži na krožnici $|z| = 1$. To pa ni težko, če upoštevamo, da $|e^{-iz-1}| = 1$ pomeni, da je $\operatorname{Im} z - 1 = 0$. Če je $n = 0$, je mogoče vse rešitve enačbe zlahka izračunati. Če pa je $n = 1$, napišemo enačbo kot sistem $e^{y-1}\cos x = x$ in $e^{y-1}\sin x = -y$. Iz tega sistema dobimo najprej $y = -x \operatorname{tg} x$, nato še $e^{-x \operatorname{tg} x - 1}\cos x = x$. Funkcija na levi strani zadnje enačbe je soda ter na intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$ pozitivna in padajoča, v točki $\frac{\pi}{2}$ pa enaka 0, zato njen graf seka premico $y = x$ na tem intervalu v eni točki (x_0, x_0). Treba je ugotoviti še, ali je $x_0^2 + x_0^2 \operatorname{tg}^2 x_0 < 1$. Opazimo, da je vrednost funkcije $f(x) := e^{-x \operatorname{tg} x - 1}\cos x - x$ v točki 0 enaka $e^{-1} > 0$, v točki $\pi/6$ pa $e^{-\frac{\pi}{6\sqrt{3}} - 1}\frac{\sqrt{3}}{2} - \pi/6 < 0$ (ker je $3\sqrt{3} < \pi e < \pi e^{1+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}}$), zato mora f imeti ničlo x_0 med 0 in $\pi/6$. Torej je $x_0^2 + x_0^2 \operatorname{tg}^2 x_0 < (\pi/6)^2 + \frac{1}{3}(\pi/6)^2 < 1$.)

2.14. Konformna ekvivalentnost enostavno povezanih območij†

Bijektivno holomorfno preslikavo $f : D_1 \to D_2$ med ravninskima območjema D_1 in D_2 imenujemo tudi *biholomorfizem* ali *konformna ekvivalenca.* (V razdelku 2.11 smo že obravnavali take preslikave v posebnem primeru, ko sta D_1 in D_2 enotski krog.) Inverzna preslikava je tedaj tudi holomorfna. Pokazali bomo Riemannov izrek, ki pravi, da je vsako, od $\mathbb{C}$ različno, enostavno povezano območje v $\mathbb{C}$ konformno ekvivalentno krogu $D(0,1)$. Pri tem bomo potrebovali naslednjo lemo.

Lema 2.14.1. *Če je $D \subset \mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$, tako območje, da je $I_\gamma(\alpha) = 0$ za vsako sklenjeno pot γ v D in vsako točko $\alpha \in \mathbb{C} \setminus D$, potem obstaja injektivna holomorfna preslikava $f : D \to D(0,1)$, ki izbrano točko $z_0 \in D$ preslika v 0.*

Proof. Izberimo $\alpha \in \mathbb{C} \setminus D$. Po trditvi 2.9.3 obstaja taka holomorfna funkcija $g : D \to \mathbb{C}$, da je $e^{g(z)} = z - \alpha$ za vse $z \in D$. Ker je funkcija $z \mapsto z - \alpha$ injektivna, mora biti injektivna tudi g. (Iz $g(z_2) = g(z_1)$ namreč sledi $z_2 - \alpha = e^{g(z_2)} = e^{g(z_1)} = z_1 - \alpha$, torej $z_2 = z_1$.)

Trdimo naslednje: za vsak β_0 iz zaloge vrednosti funkcije g, torej $\beta_0 = g(z_0)$ za kak $z_0 \in D$, obstaja okrog točke $\beta := \beta_0 + 2\pi i$ krog $D(\beta, \delta)$, ki ne seka zaloge vrednosti funkcije g, torej

$$|g(z) - \beta| \geq \delta \qquad \text{za vsak } z \in D. \tag{2.14.1}$$

Če to ne bi bilo res, bi obstajalo tako zaporedje $(\zeta_n) \subseteq D$, da bi zaporedje $(g(\zeta_n))$ konvergiralo proti β. Potem bi zaporedje točk $\zeta_n - \alpha = e^{g(\zeta_n)}$ konvergiralo proti $e^\beta = e^{\beta_0} = z_0 - \alpha$, torej bi zaporedje (ζ_n) konvergiralo proti z_0. Toda potem mora zaporedje $(g(\zeta_n))$ konvergirati proti $g(z_0) = \beta_0$, saj je g zvezna funkcija. To je protislovje, saj zaporedje $(g(\zeta_n))$ ne more imeti dveh limit β in β_0.

Naj bo torej $D(\beta, r)$ krog, ki ne seka zaloge vrednosti preslikave g. Potem iz (2.14.1) sledi, da je zaloga vrednosti preslikave $z \mapsto h(z) := \frac{1}{g(z) - \beta}$ vsebovana v krogu $\bar{D}(0, \frac{1}{\delta})$, in ker je g injektivna, je taka tudi h. Ko pomnožimo h z dovolj majhno konstanto, dobimo injektivno holomorfno preslikavo iz D v krog $D(0, \frac{1}{2})$; imenujmo jo f. Preslikava $z \mapsto f(z) - f(z_0)$ je tudi injektivna in preslika D v enotski krog $D(0,1)$ ter točko z_0 v 0. □

Izrek 2.14.2. *(Riemannov izrek o konformni ekvivalentnosti) Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ tako območje, različno od $\mathbb{C}$, da je $I_\gamma(\alpha) = 0$ za vsako sklenjeno pot γ v D in vsako točko $\alpha \in \mathbb{C} \setminus D$. Potem je D konformno ekvivalentno krogu $D(0,1)$. Torej so za vsako ravninsko območje D ekvivalentni naslednji pogoji:*

(i) *D je enostavno povezano (tj. $\hat{\mathbb{C}} \setminus D$ je povezana množica);*

(ii) *vsaka sklenjena krivulja v D je v D homotopna konstanti;*

(iii) *$I_\gamma(\alpha) = 0$ za vsako sklenjeno pot γ v D in vsak $\alpha \in \mathbb{C} \setminus D$.*

Proof. Naj bo $D \neq \mathbb{C}$. Po lemi 2.14.1 smemo privzeti, da je $D \subseteq D(0,1)$ in $0 \in D$. Naj bo S družina vseh tistih injektivnih holomorfnih funkcij $f : D \to D(0,1)$, za katere je $f(0) = 0$. Družina S ni prazna, saj vsebuje inkluzijo $z \mapsto z$ množice D v $D(0,1)$. Ker je S očitno omejena, je po izreku 2.12.4 relativno kompaktna. Naj bo

$$M = \sup_{f \in S} |f'(0)|.$$

Iz Cauchyeve formule za odvod vidimo, da je $M < \infty$. Za vsak $n = 1, 2, \ldots$ obstaja taka funkcija $f_n \in S$, da je $|f_n'(0)| > M - \frac{1}{n}$. Ker je S relativno kompaktna, ima zaporedje (f_n) stekališče f, ki je holomorfna funkcija na D in ima zalogo vrednosti vsebovano v $\bar{D}(0,1)$. Po principu maksima mora biti zaloga vrednosti $f(D(0,1))$ vsebovana v $D(0,1)$. Poleg tega je $f(0) = 0$ in (po izreku 2.12.2(ii), uporabljenem na ustreznem konvergentnem podzaporedju)

$$|f'(0)| = M.$$

Trdimo, da je ta preslikava f surjektivna.

Predpostavimo nasprotno, da obstaja $\alpha \in D(0,1) \setminus f(D)$. Naj bo f_α holomorfna bijekcija diska $D(0,1)$ nase kot v trditvi 2.11.8, torej $f_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$. Ker je $f_\alpha(\alpha) = 0$, $\alpha \notin f(D)$ in f_α bijekcija kroga $D(0,1)$ nase, $0 \notin f_\alpha(f(D))$, torej $f_\alpha \circ f$ nima ničle v D. Ker je $f_\alpha \circ f$ holomorfna funkcija, po trditvi 2.9.3 obstaja $\ln(f_\alpha \circ f)$ (natančneje, taka holomorfna funkcija g na D, da je $e^g = f_\alpha \circ f$), torej obstaja tudi holomorfna funkcija $h = \sqrt{f_\alpha \circ f}$ (namreč $h = e^{\frac{1}{2}g}$). Označimo $\beta = h(0) = \sqrt{-\alpha}$ in si oglejmo kompozitum $F := f_\beta \circ h$, kjer ima f_β enak pomen kot v trditvi 2.11.8, le da je α zamenjan z β. Preslikava F je injektivna in holomorfna iz D v $D(0,1)$ ter $F(0) = 0$. Če pokažemo, da je $|F'(0)| > |f'(0)|$, bo to v protislovju z maksimalno lastnostjo odvoda $f'(0)$, s čimer bo dokazano, da mora biti f surjektivna. Iz $F = f_\beta \circ \sqrt{f_\alpha \circ f}$ lahko izrazimo f kot

$$f = f_{-\alpha} \circ (f_{-\beta} \circ F)^2 = f_{-\alpha} \circ \kappa \circ f_{-\beta} \circ F = G \circ F,$$

kjer je κ kvadriranje (tj. $\kappa(z) = z^2$ za vsak $z \in D(0,1)$) in $G := f_{-\alpha} \circ \kappa \circ f_{-\beta}$. Pri tem je $F(0) = 0$ in $G(0) = f_{-\alpha}(\beta^2) = f_{-\alpha}(-\alpha) = 0$. Preslikava G ni injektivna, saj κ ni injektivna in sta $f_{-\alpha}$ ter $f_{-\beta}$ bijekciji kroga $D(0,1)$ nase. Po Schwarzovi lemi je zato $|G'(0)| < 1$. Iz $f = G \circ F$ (in ker je $F(0) = 0 = G(0)$) pa dobimo $f'(0) = G'(0)F'(0)$, torej je $|f'(0)| < |F'(0)|$.

Če je $D \neq \mathbb{C}$ tako območje v $\mathbb{C}$, da je $\hat{\mathbb{C}} \setminus D$ povezana množica ali pa, da je vsaka sklenjena krivulja v D homotopna konstanti v D, potem je $I_\gamma(\alpha) = 0$ za vsako sklenjeno pot γ v D in vsako točko $\alpha \in \mathbb{C} \setminus D$ po trditvi 2.5.2 oziroma po posledici 2.13.8. Zato je tako območje po že dokazanem konformno ekvivalentno krogu $D(0,1)$. Ker krog očitno zadošča vsem trem pogojem (i)-(iii) v izreku (zgled 2.13.6 in trditev 2.5.2), so za taka območja D vsi ti trije pogoji ekvivalentni. Ker so tudi za $D = \mathbb{C}$ izpolnjeni vsi pogoji (i)-(iii), je dokaz izreka končan. □

Zgled 2.14.3. Preslikavo $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, podano z

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i},$$

imenujemo *Caylejeva transformacija.* (To je zgled ulomljene linearne transformacije, ki jih na splošno obravnavajo nekatere naloge razdelka 2.8.) Inverzna preslikava je dana z

$$f^{-1}(z) = i\,\frac{z+1}{1-z}.$$

Poglejmo, katere točke preslika f v enotsko krožnico $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Pogoj $|f(z)| = 1$ lahko napišemo kot $|z-i|^2 = |z+i|^2$ oziroma $(z-i)(\bar{z}+i) = (z+i)(\bar{z}-i)$, kar poenostavimo v $\bar{z} = z$ oziroma $z \in \mathbb{R}$. Torej se na $\mathbb{S}^1$ preslika natanko realna os $\mathbb{R}$, se pravi $f(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1$. Ker je zgornja polravnina $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ povezana množica in zvezna preslikava preslika povezane množice v povezane, je $f(\mathbb{H})$ povezana množica. Ker je $f(i) = 0$, je $f(\mathbb{H}) \cap D(0,1) \neq \emptyset$. Ker $f(\mathbb{H})$ ne more sekati krožnice $\mathbb{S}^1$ (saj je f bijekcija in je $\mathbb{S}^1$ že slika realne osi), je $f(\mathbb{H})$ unija odprtih množic $f(\mathbb{H}) \cap D(0,1)$ in $f(\mathbb{H}) \cap (\mathbb{C} \setminus D(0,1))$. Ker je $f(\mathbb{H})$ povezana množica, mora zato biti $f(\mathbb{H}) = D(0,1)$. Torej f preslika zgornjo polravnino na notranjost, spodnjo polravnino pa potem (zaradi bijektivnosti) na zunanjost kroga $D(0,1)$.

Naloge

1. Pokažite, da je konformna ekvivalenca $f : D \to D(0,1)$ enolično določena z zahtevama, da za dano točko $z_0 \in D$ velja $f(z_0) = 0$ in $f'(z_0) > 0$. (Namig: če sta f_1 in f_2 taki ekvivalenci, lahko za preslikavo $f_2 f_1^{-1}$ uporabimo Schwarzovo lemo ali pa trditev 2.11.8.)

2. Poiščite holomorfno bijekcijo, ki preslika prvi kvadrant $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ na krog $D(0,1)$.

3. Poiščite kako holomorfno bijekcijo pasu $\{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Im} z < b\}$ na krog $D(0,1)$. (Namig: nalogo lahko reduciramo na iskanje holomorfne bijekcije pasu $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ na zgornjo polravnino $\mathbb{H}$; poskusite s preslikavo $f(z) = e^z$.)

* **4.** Kam preslika preslikava $z \mapsto w := z + \frac{1}{z}$ tisti del zunanjosti kroga $D(0,1)$, ki leži v zgornji polravnini? (Navodilo: Izrazite $z + \frac{1}{z}$ v običajnih realnih spremenljivkah x, y in pokažite, da je slika vsebovana v zgornji polravnini. Za dokaz, da je slika vsa zgornja polravnina, pa opazite, da ena od dveh rešitev z_j enačbe $z^2 - wz + 1 = 0$ zadošča pogoju $|z_j| > 1$, ker je $z_1 z_2 = 1$ in enačba nima dvojne ničle, če je $w \neq 2, -2$. Nato iz izraza za $\operatorname{Im} w$ sklepajte, da mora biti $\operatorname{Im} z_j > 0$, če je $|z_j| > 1$ in $\operatorname{Im} w > 0$.)

2.15. Predstavitev holomorfnih funkcij z neskončnimi produkti†

2.15.1. Številski produkti

Definicija 2.15.1. Neskončni produkt

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1+z_j), \tag{2.15.1}$$

kjer so z_j kompleksna števila, imenujemo *konvergenten*, če obstaja limita

$$P := \lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}(1+z_j)$$

in je bodisi $P \neq 0$ bodisi $z_j = -1$ za kak j in je v zadnjem primeru za kak m limita

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{j=m}^{n}(1+z_j)$$

različna od 0.

Produkt (2.15.1) imenujemo *absolutno konvergenten*, če je konvergenten produkt

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1+|z_j|).$$

Opomba 2.15.2. Po gornji definiciji npr. produkt $\prod_{j=1}^{\infty}(1-\frac{1}{j+1})$ ni konvergenten, ker je

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{1}{j+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\,\frac{n}{n+1}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

in so vsi faktorji različni od 0. Razlog, da je gornja definicija morda nekoliko nepričakovana, je, da bomo imeli lepšo povezavo med konvergenco produktov in vrst.

V dokazu naslednjega izreka bomo uporabili elementarno neenakost

$$1+x < e^x \qquad (x>0), \tag{2.15.2}$$

ki sledi takoj iz razvoja funkcije $x \to e^x$ v potenčno vrsto.

Izrek 2.15.3. *Produkt $P = \prod_{j=1}^{\infty}(1+z_j)$ je absolutno konvergenten natanko tedaj, ko je absolutno konvergentna vrsta $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$.*

Absolutno konvergenten produkt je konvergenten in njegova vrednost P je neodvisna od vrstnega reda faktorjev.

Proof. Zaporedje delnih produktov

$$A_n := \prod_{j=1}^{n}(1+|z_j|)$$

je očitno naraščajoče. Če je vrsta $\sum_{j=1}^{\infty}|z_j|$ konvergentna, potem sledi iz neenakosti (2.15.2) ocena

$$|A_n| \le \prod_{j=1}^{n} e^{|z_j|} \le e^{\sum_{j=1}^{\infty}|z_j|},$$

ki pove, da je zaporedje (A_n) tudi omejeno, torej konvergentno. To pove, da je produkt absolutno konvergenten (saj je $\lim_{n\to\infty} A_n \ne 0$, ker je $1+|z_j| \ge 1$ za vsak j).

Predpostavimo sedaj, da je produkt absolutno konvergenten. Potem je zaporedje (A_n) konvergentno; naj bo A njegova limita (in s tem tudi zgornja meja, ker je zaporedje naraščajoče). Neenakost

$$\sum_{j=1}^{n}|z_j| \le \prod_{j=1}^{n}(1+|z_j|) \le A,$$

ki jo lahko dokažemo z indukcijo, pove, da je tedaj vrsta $\sum_{j=1}^{\infty}|z_j|$ konvergentna.

Dokažimo še, da je absolutno konvergenten produkt konvergenten. Ker je vrsta $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ (absolutno) konvergentna, morajo njeni členi z_j konvergirati proti 0, torej jih je lahko le končno mnogo enakih -1. Če izpustimo končno mnogo faktorjev, lahko torej privzamemo, da so vsi faktorji $1+z_j$ različni od 0. Pokažimo, da je zaporedje delnih produktov $P_n = \prod_{j=1}^{n}(1+z_j)$ Cauchyevo (torej konvergentno). Z uporabo neenakosti

$$|(1+\alpha_1)\cdots(1+\alpha_k)-1| \le (1+|\alpha_1|)\cdots(1+|\alpha_k|)-1 \qquad (\alpha_k\in\mathbb{C}) \tag{2.15.3}$$

(ki postane očitna, ko si zamislimo faktorje zmnožene in upoštevamo trikotniško neenakost) vidimo, da za poljubna indeksa $n>m$ velja

$$\begin{aligned}
|P_n - P_m| &= |P_m||(1+z_{m+1})\cdots(1+z_n)-1| \\
&\le |P_m|[(1+|z_{m+1}|)\cdots(1+|z_n|)-1] \\
&\le A_m[(1+|z_{m+1}|)\cdots(1+|z_n|)-1] \\
&= A_n - A_m.
\end{aligned}$$

Ker je produkt absolutno konvergenten, gre $A_n - A_m$ proti 0, ko $m,n\to\infty$, zato gornja ocena pove, da je zaporedje (P_n) res Cauchyevo; naj bo P njegova limita. Če bi bil $P=0$, bi iz prve neenakosti v gornjem ocenjevanju dobili (ko bi n poslali proti ∞)

$$|P_m| \le |P_m|[(1+|z_{m+1}|)(1+|z_{m+2}|)\cdots-1],$$

torej

$$1 \le (1+|z_{m+1}|)(1+|z_{m+2}|)\cdots-1 = \frac{A}{A_m}-1.$$

Toda, ko gre m proti ∞, gre A_m proti $A\ne 0$, zato gre desna stran v zadnji neenakosti proti 0 in neenakost je tedaj protislovna.

Dokaz, da je vrednost absolutno konvergentnega produkta neodvisna od vrstega reda faktorjev, je zelo podoben dokazu ustreznega dejstva za vrste, ki ga bralec najbrž dobro pozna, zato ga bomo pustili za vajo. □

2.15.2. Funkcijski produkti

Definicija 2.15.4. Produkt funkcij $\prod_{j=1}^{\infty}(1+f_n)$ *konvergira enakomerno na množici* K, če za vsak $z \in K$ konvergira številski produkt $P(z) := \prod_{j=1}^{\infty}(1+f_j(z))$ (torej je $P(z) = 0$ le, ko je $f_j(z) = -1$ za kak j) in konvergirajo delni produkti $P_n := \prod_{j=1}^{n}(1+f_j)$ enakomerno proti P.

Izrek 2.15.5. *Če konvergira vrsta $\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|$ omejenih funkcij f_j enakomerno na množici K, potem konvergira enakomerno na K tudi produkt $\prod_{j=1}^{\infty}(1+f_j)$.*

Proof. Pokazati zadošča, da je zaporedje delnih produktov P_n enakomerno Cauchyevo. Za vsak $z \in K$ in $n > m$ imamo z uporabo neenakosti (2.15.3) in (2.15.2)

$$\begin{aligned}
|P_n(z) - P_m(z)| &= \prod_{j=1}^{m}|1+f_j(z)| \left| \prod_{j=m+1}^{n}(1+f_j(z)) - 1 \right| \\
&\leq e^{\sum_{j=1}^{\infty}|f_j(z)|} \left[\prod_{j=m+1}^{n}(1+|f_j(z)|) - 1 \right] \\
&\leq e^{M} e^{M_{m,n}},
\end{aligned}$$

kjer je $M := \sup_{z\in K}\sum_{j=1}^{\infty}|f_j(z)|$ in $M_{m,n} := \sup_{z\in K}\sum_{j=m+1}^{n}|f_j(z)|$. Ker so funkcije f_n po predpostavki omejene in je vrsta $\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|$ enakomerno konvergentna, je $M < \infty$ in $\lim_{m,n\to\infty} M_{m,n} = 0$, zato gornja ocena pove, da je zaporedje (P_n) enakomerno Cauchyevo. □

Naj bo sedaj (z_j) proti ∞ konvergirajoče zaporedje kompleksnih števil. Radi bi pokazali, da obstaja holomorfna funkcija na $\mathbb{C}$, ki ima ničle natanko v točkah z_j. Najprej se domislimo produkta $\prod_{j=1}^{\infty}(1-\frac{z}{z_j})$, ki pa na splošno ne konvergira, zato ga bomo morali popraviti z dodatnimi faktorji brez ničel. Potrebovali bomo naslednjo lemo, za katero bomo navedli dokaz, ki se ga je najlažje spomniti. V 5. nalogi pa bo bralec lemo in njen dokaz lahko izboljšal.

Lema 2.15.6. *Označimo*

$$E_0(z) = 1 - z \qquad \text{in za vsak } n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad E_n(z) = (1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^n}{n}}.$$

Tedaj je

$$E_n(z) = 1 + f_n(z), \qquad \text{kjer je } |f_n(z)| \leq 4|z|^{n+1}, \quad \text{če je } |z| \leq \frac{1}{2}. \tag{2.15.4}$$

Proof. Izraz v eksponentu formule za $E_n(z)$ je ravno vsota prvih n členov Taylorjeve vrste za $-\ln(1-z)$, zato za $|z| < 1$ velja

$$E_n(z) = e^{\ln(1-z)+z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^n}{n}} = e^{-(\frac{z^{n+1}}{n+1}+\frac{z^{n+2}}{n+2}+\ldots)}.$$

Pri tem lahko eksponent, označimo ga z $F_n(z)$, ocenimo kot

$$|F_n(z)| = \left|\frac{z^{n+1}}{n+1} + \frac{z^{n+2}}{n+2} + \dots\right| \le \frac{|z|^{n+1}}{n+1}\left[1 + \frac{n+1}{n+2}|z| + \frac{n+1}{n+3}|z|^2 + \dots\right]$$
$$\le |z|^{n+1}\left[1 + |z| + |z|^2 + \dots\right].$$

Za $|z| \le \frac{1}{2}$ je torej $|F_n(z)| \le 2|z|^{n+1}$ in zato v razvoju

$$E_n(z) = e^{F_n(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} F_n(z)^k$$

funkcija $f_n(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} F_n(z)^k$ zadošča oceni

$$|f_n(z)| \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^k |z|^{k(n+1)} = 2|z|^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} (2|z||z|^n)^{k-1}$$
$$\le 2|z|^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} (|z|^n)^{k-1} \le 2|z|^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n(k-1)} \le 4|z|^{n+1}. \qquad \square$$

Izrek 2.15.7. *(Weierstrassov izrek) Za vsako zaporedje (ne nujno različnih) kompleksnih števil z_j, ki konvergira proti ∞, obstaja holomorfna funkcija na $\mathbb{C}$, ki ima ničle natanko v točkah z_j. (Pri tem je v z_j ničla reda n_j, če je natanko n_j členov zaporedja enakih z_j.)*

Proof. Privzeti smemo, da smo člene zaporedja poimenovali tako, da je $|z_1| \le |z_2| \le |z_3| \le \dots$ in da so vsi z_j različni od 0, saj na koncu dobljeno funkcijo lahko pomnožimo s funkcijo $z \mapsto z^k$, če želimo dobiti funkcijo, ki bo imela v 0 ničlo reda k. Ker zaporedje z_j konvergira proti ∞, nima končnih stekališč, zato je v vsakem krogu $\bar{D}(0, 2R)$ le končno mnogo elementov z_n. Za vsak $z \in \bar{D}(0, R)$ je torej neenakost $|z| < \frac{1}{2}|z_j|$ izpolnjena za vse, razen morda za končno mnogo j. (Izpolnjena je namreč vsaj za vse tiste j, za katere je z_j zunaj kroga $\bar{D}(0, 2R)$). Za vse take j in vsak $n = 1, 2, \dots$ je tedaj po lemi 2.15.6

$$E_n\left(\frac{z}{z_j}\right) = 1 + f_n\left(\frac{z}{z_j}\right), \qquad \text{kjer je} \quad \left|f_n\left(\frac{z}{z_j}\right)\right| \le 4\left|\frac{z}{z_j}\right|^{n+1} \le 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \quad (2.15.5)$$

Torej obstajajo taki $n_j \in \mathbb{N}$, da vrsta $\sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_j}(\frac{z}{z_j})|$ konvergira enakomerno na krogu $\bar{D}(0, R)$. (Vzamemo namreč lahko kar $n_j = j$, saj je $\sum_j |f_j(\frac{z}{z_j})| \le 4\sum_j (\frac{1}{2})^{j+1}$. V obravnavi praktičnih primerov pa je po navadi najbolje izbrati čim manjše n_j.) Potem po izreku 2.15.5 konvergira enakomerno na krogu $\bar{D}(0, R)$ tudi produkt

$$P(z) := \prod_{j=1}^{\infty} E_{n_j}\left(\frac{z}{z_j}\right) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_j}\right) e^{\frac{z}{z_j} + \frac{1}{2}(\frac{z}{z_j})^2 + \dots + \frac{1}{n_j}(\frac{z}{z_j})^{n_j}}. \qquad (2.15.6)$$

Ker je vsaka kompaktna ravninska množica vsebovana v kakem dovolj velikem krogu $\bar{D}(0, R)$, je konvergenca enakomerna na kompaktnih množicah. Po izreku 2.12.2 je zato P holomorfna funkcija na $\mathbb{C}$. Iz definicije konvergence produkta sledi, da so ničle funkcije P natanko v točkah z_j. $\square$

Opomba 2.15.8. Dokaz izreka 2.15.7 pove, da *Weierstrassov produkt* (2.15.6) konvergira enakomerno na kompaktnih množicah, čim vrsta $\sum_j |\frac{z}{z_j}|^{n_j+1}$ (in s tem tudi vrsta $\sum_j |f_{n_j}|$ po prvi neenakosti v (2.15.5)) konvergira enakomerno na kompaktnih množicah).

Oglejmo si sedaj zelo pomemben zgled.

Zgled 2.15.9. Preden se lotimo produktov, dokažimo, da je

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}. \tag{2.15.7}$$

Funkcija

$$f(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$$

je periodična, namreč $f(z+1) = f(z)$. (Da vrsta konvergira, ni težko videti, sledi pa tudi iz ocen, ki jih bomo navedli nekoliko nižje.) Iz razvoja funkcije sin v Taylorjevo vrsto okrog točke 0 lahko sklepamo, da se razvoj funkcije $z \mapsto \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ v Laurentovo vrsto okrog točke 0 glasi $\frac{1}{z^2}$+regularni del, torej ima funkcija f v točki 0 le premostljivo singularnost. Zaradi periodičnosti mora biti tako v vseh točkah $n \in \mathbb{Z}$, torej imamo f lahko za holomorfno funkcijo na $\mathbb{C}$. Če pokažemo, da gre $f(z)$ proti 0, ko gre z proti ∞, bo f omejena in s tem po Liouvillovem izreku konstantna, torej identično enaka 0. S tem bo enakost (2.15.7) dokazana.

Ker je f periodična s periodo 1, zadošča pokazati, da je $\lim_{y\to\infty} |f(x+iy)| = 0$ enakomerno za vse $x \in [0,1]$. Za vse z v pasu $0 \le x \le 1$ je, $\frac{1}{|z-n|^2} \le \frac{1}{(n-1)^2}$, če je $n \ge 2$, in $\frac{1}{|z-n|^2} \le \frac{1}{(n+1)^2}$, če je $n \le -2$. Naj bo $\varepsilon \in (0,1)$. Ker je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergentna, je za vsak dovolj velik $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vsota $\sum_{|n|\ge n(\varepsilon)} \frac{1}{n^2} < \varepsilon$. Tedaj je tudi (če vzamemo, da je $n(\varepsilon) \ge 2$) $|\sum_{|n|\ge n(\varepsilon)} \frac{1}{(z-n)^2}| < \varepsilon$. Ker gredo vsi členi v končni vsoti $\sum_{|n|<n(\varepsilon)} \frac{1}{(z-n)^2}$ proti 0, ko gre z proti ∞, velja isto za končno vsoto. Od tod sledi, da je

$$\lim_{z\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = 0. \tag{2.15.8}$$

Neposreden račun (izhajajoč iz Eulerjeve formule $\sin \pi z = \frac{1}{2i}(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z})$) pokaže, da je za $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$

$$|\sin \pi z|^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\pi y - \cos 2\pi x),$$

torej $\lim_{y\to\pm\infty} |\sin \pi z|^2 = \infty$ za vse $x \in [0,1]$. Od tod in iz (2.15.8) pa sledi, da je res $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$.

Pokažimo sedaj še, da iz (2.15.7) sledi

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z},\ n\ne 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right). \tag{2.15.9}$$

Vrsta na desni konvergira enakomerno na kompaktnih množicah, ker lahko njen splošni člen izrazimo kot $\frac{z}{n(z-n)}$ in jo torej lahko primerjamo s konvergentno vrsto $\sum \frac{1}{n^2}$ (podobno, kot smo to že storili zgoraj za vrsto (2.15.8)). Naj bo $g(z)$ razlika med levo in desno stranjo v formuli (2.15.9). Ker ima funkcija $z \mapsto \sin \pi z$ enostavne ničle v točkah $n \in \mathbb{Z}$ in nima drugih ničel, ima funkcija $z \mapsto \pi \operatorname{ctg} \pi z = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ same enostavne pole v točkah n. Residui v teh polih so $\pi \lim_{z \to n} \frac{z-n}{\sin \pi z} \cos \pi z = \pi(-1)^n \lim_{z \to n} \frac{1}{\pi \cos \pi z} = 1$. (Uporabili smo trditev 2.10.7.) Iz razvoja funkcije $z \mapsto \pi \operatorname{ctg} \pi z$ v Laurentovo vrsto okrog točke n sedaj vidimo, da ima g v točki n le premostljivo singularnost (ker se pola leve in desne strani v (2.15.9) izničita), torej jo bomo obravnavali kot holomorfno funkcijo na $\mathbb{C}$. Ker je $g' = f$ in smo zgoraj že pokazali, da je f identično enaka 0, mora biti g konstantna. Ker pa je $\lim_{z \to 0}(\pi \operatorname{ctg} \pi z - \frac{1}{z}) = 0$ (kar najhitreje vidimo, če razvijemo funkciji cos in sin v Taylorjevo vrsto okrog 0), sledi, da je $g(0) = 0$. Torej je g identično enaka 0 in s tem formula (2.15.9) dokazana.

Oglejmo si sedaj funkcijo

$$s(z) := \pi z \prod_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}. \tag{2.15.10}$$

Ker je vrsta $\sum (\frac{|z|}{n})^2$ enakomerno konvergentna na kompaktnih podmnožicah v $\mathbb{C}$, sledi iz opombe 2.15.8, da je produkt v (2.15.10) enakomerno konvergenten na kompaktnih množicah. Po Weierstrassovem izreku je zato s holomorfna funkcija na $\mathbb{C}$, ki ima ničle natanko v točkah $n \in \mathbb{Z}$. Ker ima tudi funkcija $z \mapsto \sin \pi z$ iste ničle (in so vse prav tako enkratne), je funkcija $h(z) := \frac{\sin \pi z}{s(z)}$ holomorfna na $\mathbb{C}$ in brez ničel. Velja

$$\sin \pi z = h(z) s(z)$$

in naš cilj je dokazati, da je h konstanta 1. Delni produkti

$$P_N(z) := h(z) \pi z \prod_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$$

konvergirajo enakomerno na kompaktnih množicah proti $h(z)s(z) = \sin \pi z$, ko $N \to \infty$, po izreku 2.12.2 zato njihovi odvodi na isti način konvergirajo proti $\pi \cos \pi z$. Tedaj pa kvocienti

$$\frac{P_N'(z)}{P_N(z)} = \frac{h'(z)}{h(z)} + \frac{1}{z} + \sum_{n=-N, n \neq 0}^{N} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$$

konvergirajo proti $\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$, torej je

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{h'(z)}{h(z)} + \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right).$$

Iz te enakosti in iz (2.15.9) sedaj sledi, da je $\frac{h'(z)}{h(z)} = 0$ za vse $z \in \mathbb{C}$, torej je h' povsod 0 in zato h konstanta. To konstanto h lahko določimo, če zvezo $\sin \pi z = h(z)s(z)$

napišemo kot

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = h(z) \prod_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$$

in pošljemo z proti 0. Dobimo $h = 1$. Tako smo dokazali formulo

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \tag{2.15.11}$$

Naloge

1. Pokažite, da za števila $z_j \in (0,1)$ velja

$$1 - s_n \leq \prod_{j=1}^{n} (1 - z_j) \leq \frac{1}{1 + s_n}$$

za vsak n, kjer je $s_n = \sum_{j=1}^{n} z_j$. Sklepajte od tod (s pomočjo Cauchyevega kriterija za konvergenco), da je za števila $z_j \in (0,1)$ produkt $\prod_{j=1}^{\infty}(1 - z_j)$ konvergenten natanko tedaj, ko je konvergentna vrsta $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$.

2. (i) Za kompleksni števili z in w ne velja vedno $\ln(zw) = \ln z + \ln w$; pokažite, da ta enakost velja, če je $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$ in $|\arg w| < \frac{\pi}{2}$.

(ii) Pokažite, da za $x \in (0,1)$ velja $\arcsin x < \frac{\pi x}{2}$.

(iii) Če je $z \in \mathbb{C}$ in $|z - 1| < \varepsilon < 1$, pokažite, da je $|\arg z| < \arcsin \varepsilon$. (Namig: narišite trikotnik z ogliščí 0, 1 in z in uporabite sinusni izrek.)

3. (i) Če je vrsta $\sum_{j=1}^{\infty} \ln(1 + z_j)$ konvergentna in je njena vsota S, pokažite, da je konvergenten tudi produkt $\prod_{j=1}^{\infty}(1 + z_j)$ in je njegova vrednost e^S.

(ii) Ali velja tudi obrat trditve v točki (i)? (Rešitev: Za vsaka $n > m$ označimo

$$P_{m,n} = \prod_{j=m+1}^{n} (1+z_j), \quad P_m = P_{0,m}, \quad P = \lim_{m\to\infty} P_m \quad \text{in} \quad S_{m,n} = \sum_{j=m+1}^{n} \ln(1+z_j).$$

Predpostavimo, da je produkt konvergenten. Če nobeden od faktorjev $1 + z_j$ ni na poltraku $(-\infty, 0]$ (tedaj je vrednost $\ln(1 + z_j)$ definirana z glavno vejo logaritma), potem so vsi faktorji $1 + z_j$ različni od 0. Ker je po definiciji konvergentnosti produkta tedaj $P \neq 0$, za vsak $\varepsilon \in (0,1)$ obstaja tak $n(\varepsilon)$, da je

$$|P_{m,n} - 1| = |(P_n - P_m)/P_m| < \varepsilon \tag{2.15.12}$$

za vse $n > m \geq n(\varepsilon)$. Iz 2. naloge sledi, da tedaj za vse $p > n > m$ velja

$$\arg P_{m,n} < \frac{\pi\varepsilon}{2} < \frac{\pi}{2} \qquad \text{in} \qquad \arg P_{n,p} < \frac{\pi\varepsilon}{2} < \frac{\pi}{2} \tag{2.15.13}$$

ter zato tudi $\ln(P_{m,n}P_{n,p}) = \ln P_{m,n} + \ln P_{n,p}$. Od tod sledi induktivno, da je $\ln P_{m,n} = S_{m,n}$ in zato tudi

$$S_{m,n} = \ln P_{m,n} = \ln |P_{m,n}| + i \arg P_{m,n}. \tag{2.15.14}$$

Ker iz (2.15.12) sledi tudi $|P_{m,n}| \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, torej

$$|\ln |P_{m,n}|| < \max\{\ln(1+\varepsilon), |\ln(1-\varepsilon)|\} = -\ln(1-\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

sklepamo sedaj od tod ter iz (2.15.13) in (2.15.14), da je $|S_{m,n}| < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + \frac{\pi\varepsilon}{2}$, kar pomeni, da vrsta $\sum_j \ln(1+z_j)$ zadošča Cauchyevemu pogoju za konvergenco. Vendar pa se njena vsota lahko razlikuje od $\ln P$ za $\ell 2\pi i$ ($\ell \in \mathbb{Z}$).)

***4.** Ali iz konvergentnosti produkta $\prod_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|$ vedno sledi konvergentnost produkta $\prod_{j=1}^{\infty} \alpha_j$? (Namig: oglejte si produkt $\prod_{j=1}^{\infty}(1-\frac{i}{j})$. Pomagate si lahko tudi z nalogo 3 in oceno $|x - \ln x| \le C|x^2|$ za $|x| < \frac{1}{2}$, kjer je C konstanta.)

5. Dokažite, da za $|z| \le 1$ velja $|E_n(z) - 1| \le |z|^{n+1}$, kjer so $E_n(z)$ kot v lemi 2.15.6. (Navodilo: Iz $E_n(z) - 1 = \int_{[0,z]} E_n'(\zeta)\, d\zeta$ (kjer označuje $[0,z]$ daljico od 0 do z) in iz $E_n'(z) = -z^n e^{z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^n}{n}}$ sledi, da je 0 ničla reda $n+1$ za funkcijo $E_n - 1$ in da so vsi koeficienti v Taylorjevem razvoju funkcije $g(z) := \frac{1-E_n(z)}{z^{n+1}}$ okrog točke 0 nenegativni. Zato je $|g(z)| \le g(1)$ za vse $|z| \le 1$.)

6. Za katere z in kam konvergira produkt $\prod_{j=1}^{\infty}(1+z^{2^j})$? (Namig: pomnožite z $(1-z)(1+z)$.)

7. (i) Preoblikujte formulo (2.15.9) v

$$\pi z \operatorname{ctg} \pi z = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{z^2 - n^2} = 1 - 2z^2 \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{n^{2m+2}}, \qquad (|z| < 1).$$

(ii) Pokažite, da ima razvoj funkcije $f(t) := \frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2}$ v Taylorjevo vrsto okrog točke 0 obliko

$$f(t) = \frac{t}{2}\,\frac{e^t + 1}{e^t - 1} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!},$$

torej, da je $f(0) = 1$ in $f'(0) = 0$. (Koeficiente B_k v tem razvoju imenujemo *Bernoullijeva števila*.)

(iii) Vstavite v funkcijo f iz točke (ii) $t = 2\pi i z$ in izpeljite formulo

$$\pi z \operatorname{ctg} \pi z = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} B_k \frac{(2\pi i z)^k}{k!}.$$

(iv) Iz (i) in (iii) zaključite, da je $B_k = 0$, če je k liho število; če pa je k sodo, $k = 2m$, je

$$B_{2m} = (-1)^{m-1} \frac{(2m)!}{2^{2m-1}\pi^{2m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}.$$

(v) * Izračunajte B_2 iz razvoja v točki (ii) in nato sklepajte iz točke (iv), da je $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

8. (i) Dokažite, da vrsta

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$$

konvergira absolutno in enakomerno na vsaki kompaktni podmnožici polravnine

$$\operatorname{Re} z > 1$$

in torej tam definira holomorfno funkcijo, imenovano *Riemannova zeta funkcija.*

(ii) Dokažite, da je $\zeta(z)=\prod_p(1-p^{-z})^{-1}$ (če je $\operatorname{Re} z > 1$), kjer teče produkt po vseh praštevilih p. (Namig: $(1-p^{-z})^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}p^{-kz}$; vsako naravno število n se da izraziti enolično kot produkt praštevil.)

***9.** Dokažite, da je vrsta $\sum_{p \text{ praštevilo}}\frac{1}{p}$ divergentna.

***10.** (*Mittag-Lefflerjev izrek*) Naj bo (α_n) zaporedje kompleksnih števil, ki naj nima nobenega končnega stekališča. Za vsak n naj bo P_n poljuben polinom brez konstantnega člena. Dokažite, da obstaja meromorfna funkcija f na $\mathbb{C}$, ki ima pole natanko v točkah α_n in glavne dele v teh polih enake $P_n(\frac{1}{z-\alpha_n})$. (To je poseben primer Mittag-Lefflerjevega izreka [30, izrek 13.10]. Navodilo: V vsakem krogu $D(0,R)$ je le končno mnogo členov α_n. S pomočjo Taylorjevega razvoja funkcij $\frac{1}{z-\alpha_j}$ poiščite polinome p_n, ki tako dobro aproksimirajo funkcije $P_n(\frac{1}{z-\alpha_n})$ na krogih $\bar{D}(0,\frac{|\alpha_n|}{2})$, da vrsta $\sum_n(P_n(\frac{1}{z-\alpha_n})-p_n(z))$ konvergira enakomerno na vsakem krogu $\bar{D}(0,R)$.)

2.16. Eulerjeva funkcija Γ

2.16.1. Definicija, holomorfnost in rekurzivna formula

Definicija 2.16.1. Na polravnini $\operatorname{Re} z > 0$ je funkcija Γ definirana z

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}\,dt. \tag{2.16.1}$$

Najprej želimo dokazati, da je integral v (2.16.1) konvergenten in da definira holomorfno funkcijo na polravnini $\operatorname{Re} z > 0$. Za vsak $n=1,2,\ldots$ naj bo

$$F_n(z)=\int_{\frac{1}{n}}^{n}t^{z-1}e^{-t}\,dt. \tag{2.16.2}$$

Integral v (2.16.2) je integral s parametrom z in tako integrand kot njegov odvod $\frac{\partial}{\partial z}(t^{z-1}e^{-t})$ sta zvezni funkciji na $[\frac{1}{n},n]\times\mathbb{C}$. Ker je integracijski interval končen, pove elementaren argument (enak tistemu iz osnov integralov s parametri), da je funkcija F_n odvedljiva v kompleksnem smislu. Če pokažemo, da zaporedje $(F_n(z))$ konvergira proti integralu v (2.16.1) enakomerno za z na vsaki kompaktni podmnožici K polravnine $\operatorname{Re} z > 0$, bo po izreku 2.12.2 funkcija Γ holomorfna na tej polravnini. Pokazati torej zadošča, da je

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^{\frac{1}{n}} \left|t^{z-1}\right| e^{-t}\,dt + \int_n^{\infty} \left|t^{z-1}\right| e^{-t}\,dt\right] = 0 \tag{2.16.3}$$

enakomerno za $z \in K$. Upoštevali bomo, da je $|t^{z-1}| = |e^{(z-1)\ln t}| = e^{(\operatorname{Re} z-1)\ln t} = t^{\operatorname{Re} z-1} = t^{x-1}$. Ker je K kompaktna in vsebovana v polravnini $\operatorname{Re} z > 0$, je $\delta := \inf\{\operatorname{Re} z : z \in K\} > 0$ in $M := \sup\{\operatorname{Re} z : z \in K\} < \infty$, zato veljata oceni

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \left|t^{z-1}\right| e^{-t}\,dt \le \int_0^{\frac{1}{n}} t^{\delta-1}e^{-t}\,dt \le \int_0^{\frac{1}{n}} t^{\delta-1}\,dt = \frac{1}{\delta n^{\delta}} \qquad \text{in}$$

$$\begin{aligned}\int_n^{\infty} \left|t^{z-1}\right| e^{-t}\,dt \le \int_n^{\infty} t^{M-1}e^{-t}\,dt &= \int_n^{\infty} (t^{M-1}e^{-t/2})e^{-t/2}\,dt \\ &\le \int_n^{\infty} Ce^{-t/2}\,dt = 2Ce^{-n/2},\end{aligned}$$

kjer je $C := \sup_{t\ge 1} t^{M-1}e^{-t/2}$. (Da je $C < \infty$, sledi iz $\lim_{t\to\infty} \frac{t^{M-1}}{e^{t/2}} = 0$ in dejstva, da so na kompaktnih množicah zvezne funkcije omejene.) Iz teh ocen je relacija (2.16.3) evidentna. S tem smo dokazali naslednjo trditev:

Trditev 2.16.2. *S formulo* (2.16.1) *definirana funkcija* Γ *je holomorfna na polravnini* $\operatorname{Re} z > 0$.

Preden razširimo njeno definicijsko območje, si oglejmo pomembno lastnost funkcije Γ.

Trditev 2.16.3. *(Rekurzivna formula)* $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\operatorname{Re} z > 0)$.

Proof. Z integriranjem per partes imamo

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t}\,dt = -t^z e^{-t}\Big|_0^{\infty} + z\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt = z\Gamma(z). \qquad \square$$

Ker neposredno iz formule (2.16.1) sledi, da je $\Gamma(1) = 1$, z indukcijo dokažemo naslednjo posledico:

Posledica 2.16.4. $\Gamma(n+1) = n!$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$.

To nam namiguje, naj definiramo

$$z! := \Gamma(z+1)$$

za vse z v polravnini $\operatorname{Re} z > -1$.

Rekurzivna formula nam omogoča, da razširimo definicijsko območje funkcije Γ. Če je namreč $\operatorname{Re} z \in (-1,0)$, je $\operatorname{Re}(z+1) \in (0,1)$, zato je vrednost $\Gamma(z+1)$ že definirana in lahko postavimo

$$\Gamma(z) := \frac{\Gamma(z+1)}{z}. \tag{2.16.4}$$

S ponavljanjem rekurzivne formule dobimo

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}. \tag{2.16.5}$$

Za vsak $z \in \mathbb{C}$, ki ni negativno celo število ali 0, lahko izberemo tak najmanjši naraven n, da je $\operatorname{Re}(z+n) > 0$; tedaj je vrednost $\Gamma(z+n)$ že definirana in lahko $\Gamma(z)$ definiramo s formulo (2.16.5). Tako je sedaj Γ holomorfna funkcija na $\mathbb{C}$, razen v točkah $0, -1, -2, \ldots$, kjer ima pole (kot sledi iz (2.16.5)).

Za pozitivne z je integrand v (2.16.1) pozitivna funkcija, zato je $\Gamma(x) > 0$, če je $x > 0$. Ker je $\Gamma(1) = 1$, vidimo iz (2.16.4), da gre $\Gamma(x)$ proti ∞, ko gre x proti 0 po pozitivnih vrednostih. Enakost $\Gamma(n+1) = n!$ pa nakazuje, da je tudi $\lim_{x\to\infty} \Gamma(x) = \infty$, česar ni težko dokazati neposredno iz formule (2.16.1). Ker je $\Gamma(1) = 1 = \Gamma(2)$, zavzame Γ na intervalu $[1,2]$ neko najmanjšo pozitivno vrednost. Kako se ponaša $\Gamma(x)$ za negativne x, pa sledi iz definicije, se pravi z zaporedno uporabo rekurzivne formule $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$. Naj omenimo še, da je na poltraku $x > 0$ funkcija Γ konveksna (dokaz naj bo za vajo). Tako lahko sedaj že skiciramo graf funkcije Γ za realne x.

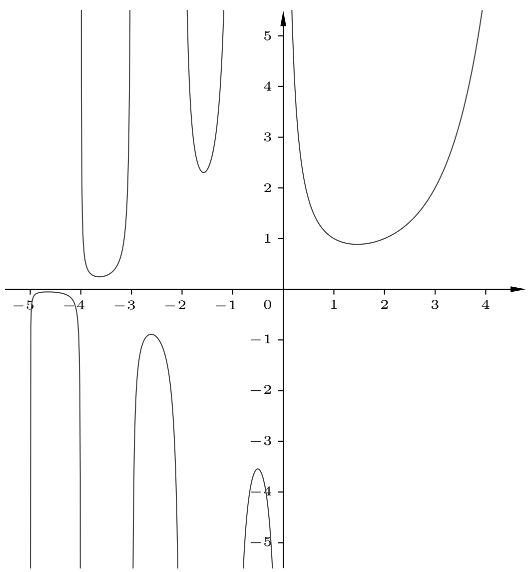

FIGURE 2.17. Graf funkcije Γ.

Za boljše razumevanje funkcije Γ pa moramo sedaj vpeljati še novo funkcijo dveh realnih spremenljivk.

2.16.2. Eulerjeva funkcija beta

DEFINICIJA 2.16.5. *Funkcija beta* je definirana kot

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt,\qquad (x>0,\ y>0).\tag{2.16.6}$$

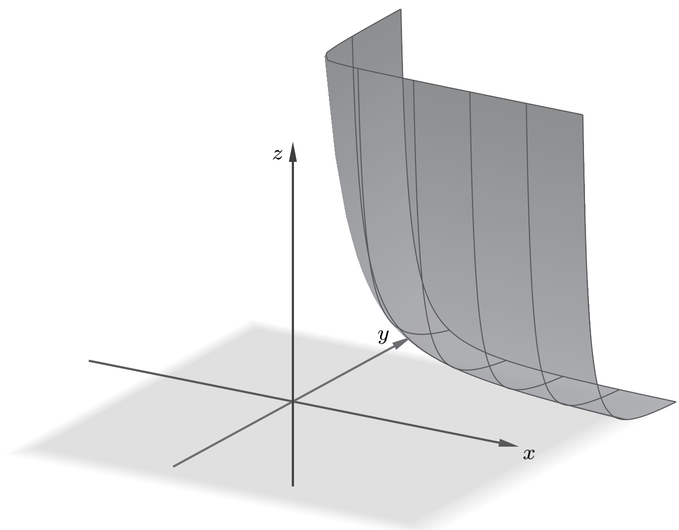

FIGURE 2.18. Funkcija B.

Lahko se je prepričati, da je integral v (2.16.6) konvergenten, če je $x>0$ in $y>0$. (Pravzaprav lahko definiramo na isti način B kot funkcijo dveh kompleksnih spremenljivk pri pogoju $\operatorname{Re}x>0$ in $\operatorname{Re}y>0$, vendar tega ne bomo potrebovali.) Z vpeljavo nove integracijske spremenljivke $t=\sin^2\varphi$ lahko definicijo funkije B zapišemo tudi kot

$$B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}\varphi\cos^{2y-1}\varphi\,d\varphi.\tag{2.16.7}$$

Sedaj že lahko pokažemo povezavo s funkcijo Γ.

TRDITEV 2.16.6. *Za poljubna pozitivna x,y je*

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.\tag{2.16.8}$$

PROOF. Najprej vpeljimo v (2.16.1) novo integracijsko spremenljivko prek zveze $t=u^2$, da dobimo

$$\Gamma(x)=2\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2x-1}\,du.\tag{2.16.9}$$

Ko na enak način izrazimo tudi $\Gamma(y)$, lahko zapišemo

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= 4\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2x-1}\,du\int_0^\infty e^{-v^2}v^{2y-1}\,dv\\ &= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\,dx\,dy.\end{aligned}$$

(Pri tem smo upoštevali, da je drugi integral neodvisen od u in smo ga zato kot konstanto nesli v prvi integral.) Dvakratni integral imamo lahko za dvojni integral po kvadrantu $x>0, y>0$ in vanj vpeljemo polarne koordinate $u=r\cos\varphi$, $v=r\sin\varphi$. Tako dobimo

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(x+y)-1}\cos^{2x-1}\varphi\,\sin^{2y-1}\varphi\,dr\,d\varphi\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\varphi\,\sin^{2y-1}\varphi\,d\varphi\;2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(x+y)-1}\,dr\\ &= B(x,y)\Gamma(x+y).\end{aligned}$$

Pri tem je zadnja enakost sledila iz (2.16.7) in (2.16.9). □

Kot poseben primer formule (2.16.8) imamo $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=B(x,1-x)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x}\,dt$. Tak integral smo izračunali v zgledu 2.10.6, s čimer smo pokazali, da je $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$ za $x\in(0,1)$. Ker se dve holomorfni funkciji, ki se ujemata na kaki množici, ki ima stekališča v območju holomorfnosti, ujemata povsod, smo s tem dokazali:

Trditev 2.16.7. $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$ *($z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$).*

Iz trditve 2.16.7 takoj dobimo npr. $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$. (To pa je mogoče izračunati tudi bolj elementarno, glejte nalogo 1.) Neposredna posledica trditve 2.16.7 je tudi:

Posledica 2.16.8. *Funkcija Γ nima (kompleksnih) ničel. Funkcija $\frac{1}{\Gamma}$ je holomorfna na $\mathbb{C}$.*

Formulo v trditvi 2.16.7, namreč $\Gamma(z)=\frac{\pi}{\Gamma(1-z)\sin\pi z}$, bi lahko uporabili tudi za razširitev definicijskega območja funkcije Γ iz polravnine $\operatorname{Re}z>0$ na $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$ (kar smo sicer storili že prej s pomočjo rekurzivne formule). Za $\operatorname{Re}z<1$ je namreč $\operatorname{Re}(1-z)>0$, zato je vrednost $\Gamma(1-z)$ že definirana v začetku razdelka.

2.16.3. Stirlingova formula

Da se dokazati, da za velike $|z|$ velja približna enakost

$$\Gamma(z+1)\sim\sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^z.$$

Natančneje, kvocient med levo in desno stranjo te formule konvergira proti 1, ko gre z proti ∞, in sicer enakomerno na vsakem sektorju $-\pi+\delta<\arg z<\pi-\delta$ za vsak $\delta\in(0,\pi)$. Zaradi enostavnosti bomo tukaj dokazali le poseben primer, ko je z naravno število, ki se največkrat uporablja v praksi.

Izrek 2.16.9. *(Stirlingova formula)* $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n} = \sqrt{2\pi}$.

Preden se lotimo dokazovanja Stirlingove formule, potrebujemo nekaj priprave.

Trditev 2.16.10. *(Wallisova formula)* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{2j}{2j-1}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$.

Proof. Za vsak $k \in \mathbb{N}$ označimo $I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k x\, dx$. Po formulah (2.16.7), (2.16.8), $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ in $\Gamma(n+1) = n!$ ter rekurzivni formuli imamo

$$\begin{aligned} I_{2n} = \frac{1}{2} B\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2n!} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2n!}\left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} I_{2n+1} = \frac{1}{2} B\left(n+1, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{n!}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} = \frac{n!}{2(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})\cdots\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.16.10}$$

Torej je

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{(2n+1)(2n-1)^2(2n-3)^2\cdots 1^2}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi = \frac{\pi}{2P_n}, \tag{2.16.11}$$

kjer je P_n ravno izraz, ki nastopa pod limito v Wallisovi formuli. Sedaj zadošča dokazati, da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1. \tag{2.16.12}$$

Iz (2.16.10) vidimo, da je

$$I_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}n!}{2\Gamma(n+\frac{3}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}(n-1)!}{2\Gamma(n+\frac{1}{2})} \frac{n}{n+\frac{1}{2}} = \frac{n}{n+\frac{1}{2}} I_{2n-1}.$$

Ker je $\sin x \in [0,1]$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, velja tudi $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$, torej

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{n+\frac{1}{2}}{n}.$$

Od tod je relacija (2.16.12) očitna. □

†Dokaz Stirlingove formule. Najprej bomo dokazali, da limita v Stirlingovi formuli sploh obstaja. Označimo z a_n logaritem izraza, ki natopa v Stirlingovi formuli, torej

$$a_n = \ln n! + n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n. \tag{2.16.13}$$

Razlika med dvema sosednjima členoma zaporedja (a_n) je

$$\begin{aligned}
a_j - a_{j+1} &= -\ln(j+1) - 1 - \left(j+\frac{1}{2}\right)\ln j + \left(j+\frac{3}{2}\right)\ln(j+1) \\
&= \left(j+\frac{1}{2}\right)(\ln(j+1)-\ln j) - 1 \\
&= \left(j+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{j}\right) - 1 \\
&= \frac{2j+1}{2}\ln\frac{1+\frac{1}{2j+1}}{1-\frac{1}{2j+1}} - 1 \\
&= \frac{2j+1}{2}\left[\ln\left(1+\frac{1}{2j+1}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2j+1}\right)\right] - 1.
\end{aligned}$$

Sedaj oba logaritma razvijemo v potenčni vrsti (po formuli $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$, torej $\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, $x = \frac{1}{2j+1}$) in uredimo, da dobimo

$$\begin{aligned}
a_j - a_{j+1} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2j+1)^{2k}} < \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2j+1)^2}\right)^k = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(2j+1)^2-1} \\
&= \frac{1}{3}\,\frac{1}{2j(2j+2)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right).
\end{aligned}$$

Od tod vidimo, da je $a_j - a_{j+1} > 0$ in za poljubna $m < n$

$$0 < a_m - a_n = \sum_{j=m}^{n-1}(a_j - a_{j+1}) < \frac{1}{12}\sum_{j=m}^{n-1}\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right).$$

To pove, da je zaporedje (a_n) Cauchyevo, torej konvergentno; imenujmo njegovo limito a. Torej mora biti konvergentno tudi zaporedje s členi $b_n := e^{a_n} = \frac{n!}{\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n}$.

Da bi določili limito b zaporedja b_n, upoštevajmo, da je $b = e^a \neq 0$, torej tudi

$$b = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n^2}{b_{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2(\frac{2n}{e})^{2n}\sqrt{2n}}{(2n)!(\frac{n}{e})^{2n}n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}\sqrt{2}. \tag{2.16.14}$$

Po drugi strani pa iz (2.16.12) in (2.16.11) sledi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(2n-1)^2(2n-3)^2\cdots 1^2} = \frac{\pi}{2},$$

kar lahko napišemo, ko pomnožimo števec in imenovalec s faktorjem $[2n(2n-2)\cdots 2]^2 = (2^n n!)^2$, kot

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[2^{2n}(n!)^2\right]^2}{(2n+1)((2n)!)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ker je $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$, sledi od tod

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Iz te formule in iz (2.16.14) lahko sedaj sklepamo, da je $b = \sqrt{2\pi}$. □

Za konec razdelka omenimo še, brez dokaza, bolj izpopolnjeno verzijo Stirlingove formule:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \frac{163879}{209018880n^5} + \ldots\right).$$

Naloge

1. Izračunajte $\Gamma(\frac{1}{2})$ tako, da v integral (2.16.1) vpeljete novo spremenljivko $t = u^2$, dobljeni integral $I = \int_0^\infty e^{-u^2}\, du$ pa izračunate tako, da v dvojni integral $I^2 = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}\, du\, dv$ vpeljete polarne koordinate $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$.

2. Naslednje integrale izračunajte tako, da jih prevedete na funkcijo Γ:

(i) $\int_0^\infty x^5 e^{-x}\, dx$;

(ii) $\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-2x}\, dx$;

(iii) $\int_0^\infty x^n e^{-ax}\, dx$ $(a > 0,\ \ n > -1)$.

3. Določite ploščino, ki jo ograjuje sklenjena krivulja $|x|^r + |y|^r = 1\ \ (r > 0)$.

***4.** Dokažite naslednjo povezavo med Riemannovo zeta funkcijo $\zeta(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z}$ $(\operatorname{Re} z > 1)$ in funkcijo Γ: $\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\, dt$.

***5.** Integral $\int_0^1 \frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{(t+z)^{x+y}}\, dt$, kjer so x, y in z pozitivni, izrazite najprej z beta, nato še z gama funkcijo. (Navodilo: vpeljite novo integracijsko spremenljivko u prek zveze $t = \frac{zu}{1+z-u}$.)

6. Določite površino in prostornino krogle s polmerom a v $\mathbb{R}^n$.

***7.** Pokažite, da je $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{4\sqrt{2\pi}}$.

8. (i) Pokažite, da za $x > 0$ velja $\frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(2x)} = 2\int_0^{\frac{1}{2}} (t(1-t))^{x-1}\, dt$. (Namig: uporabite (2.16.8).)

(ii) Vpeljite v integral v (i) novo integracijsko spremenljivko $u = 1 - 4t(1-t)$ in dokažite, da velja *podvojitvena formula*

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

9. (i) Za vsak $j = 1, 2, \dots$ in $x \in [j-1, j]$ je $\frac{1}{j} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{j-1}$, torej tudi $\frac{1}{j} \le \int_{j-1}^{j} \frac{dx}{x} \le \frac{1}{j-1}$ in zato

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \le \sum_{j=2}^{n} \int_{j-1}^{j} \frac{dx}{x} = \int_{1}^{n} \frac{dx}{x} = \ln n \le \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j-1} \le \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

Sklepajte od tod, da je zaporedje s členi

$$a_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln n$$

omejeno: $0 \le a_n \le 1$.

(ii) Interpretirajte a_n kot ploščino ravninskega območja nad grafom funkcije $x \mapsto \frac{1}{x}$ in pod grafom določene stopničaste funkcije, v mejah $1 \le x \le n$ in sklepajte, da je zaporedje (a_n) tudi naraščajoče.

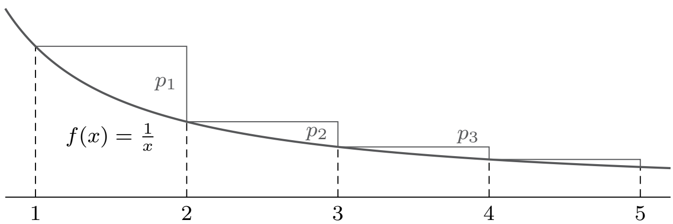

FIGURE 2.19. $\gamma = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$

Zaključite, da obstaja

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln n \right].$$

To limito γ imenujemo *Eulerjeva konstanta.* Ni znano, ali je racionalna. Njena približna vrednost je 0,5772156...

10. (i) Napišite vsoto $s_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ kot

$$s_n = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 x^j \, dx = \int_0^1 \sum_{j=0}^{n-1} x^j \, dx = \int_0^1 \frac{1 - x^n}{1 - x} \, dx$$

in vpeljite v zadnji integral novo spremenljivko $t = n(1 - x)$, da dobite

$$s_n = \int_0^n \left[1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right] \frac{dt}{t}.$$

(ii) Sklepajte iz (i), da za Eulerjevo konstanto γ (definirano v prejšnji nalogi) velja

$$\begin{aligned}\gamma &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n \left[1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]\frac{dt}{t} - \int_1^n \frac{dt}{t}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \left[1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]\frac{dt}{t} - \int_1^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\frac{dt}{t}\right)\\ &= \int_0^1 \left(1-e^{-t}\right)\frac{dt}{t} - \int_1^\infty e^{-t}\frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

11. Dokažite, da je

$$\int_x^\infty e^{-t}\frac{dt}{t} = -\gamma - \ln x + x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} - \frac{x^4}{4\cdot 4!} + \ldots$$

(Navodilo: Z uporabo točke (ii) prejšnje naloge imamo

$$\begin{aligned}\int_x^\infty e^{-t}\frac{dt}{t} &= \int_1^\infty e^{-t}\frac{dt}{t} - \int_1^x e^{-t}\frac{dt}{t} = \int_0^1 \left(1-e^{-t}\right)\frac{dt}{t} - \gamma - \int_1^x e^{-t}\frac{dt}{t}\\ &= -\gamma + \int_0^x \left(1-e^{-t}\right)\frac{dt}{t} + \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\gamma - \ln x + \int_0^x \left(1-e^{-t}\right)\frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Razvijte e^{-t} v Taylorjevo vrsto in nato tako dobljeno vrsto v zadnjem integralu integrirajte členoma.)

12. Pokažite, da je

$$\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-t}\ln t\,dt = -\gamma, \tag{2.16.15}$$

kjer je γ Eulerjeva konstanta, definirana v nalogi 9. (Navodilo:

$$\int_0^\infty e^{-t}\ln t\,dt = \int_0^1 e^{-t}\ln t\,dt + \int_1^\infty e^{-t}\ln t\,dt. \tag{2.16.16}$$

V prvem integralu na desni v (2.16.16) razvijte e^{-t} v Taylorjevo vrsto okrog 0 in nato integrale $\int_0^1 t^k\ln t\,dt$ integrirajte per partes, da dobite $\int_0^1 e^{-t}\ln t\,dt = -1 + \frac{1}{2\cdot 2!} - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{4\cdot 4!} - \ldots$ Drugi integral na desni v (2.16.16) pa je po nalogi 11 enak $-\gamma + 1 - \frac{1}{2\cdot 2!} + \frac{1}{3\cdot 3!} - \ldots$ Opomba: enakost (2.16.15) je lažje dokazati kot posledico naloge 13.(iv).)

† **13.** (i) Pokažite, da za $x\in[0,1]$ velja

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt\\ &= \lim_{n\to\infty} n^{x+1}B(x+1,n+1)\\ &= \lim_{n\to\infty} n^{x+1}n!\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+n+2)}.\end{aligned}$$

(ii) Izpeljite iz (i) *Gaussovo formulo*

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{x+1} n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}. \tag{2.16.17}$$

(iii) Preoblikujte Gaussovo formulo iz (ii) v

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(x+1)} &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x+1}{n}\right) n^{-x} \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{j}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{-x\ln n} \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{j}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{x(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n)} \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{j}\right) e^{-\frac{x}{j}} \end{aligned}$$

(iv) Sklepajte po Weierstrassovem izreku in opombi 2.15.8, da je neskončni produkt $\prod_{j=1}^{\infty}(1+\frac{z}{j})e^{-\frac{z}{j}}$ konvergenten in zato predstavlja holomorfno funkcijo na $\mathbb{C}$. Po nalogi 9 je $\lim_{n\to\infty} e^{z(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n)} = e^{\gamma z}$. Sklepajte sedaj iz (iii), da je

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{\gamma z} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{j}\right) e^{-\frac{z}{j}} \tag{2.16.18}$$

za vse realne, in ker sta obe strani holomorfni, za vse kompleksne z. Formulo (2.16.18) je dokazal Weierstrass. Sklepajte, da tudi (2.16.17) velja za vse kompleksne z (namesto realnih x). Izpeljite iz (2.16.18), da je $\Gamma'(1) = -\gamma$.

† **14.** Iz (2.16.18) in (2.15.11) sklepajte, da velja že prej dokazana trditev 2.16.7. (Namig: najprej upoštevajte rekurzivno formulo $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$.)

15. Pokažite (z dvakratnim odvajanjem ustreznega integrala na parameter), da je Γ konveksna funkcija na poltraku $(0,\infty)$.

POGLAVJE 3

Pogled v harmonične funkcije

Harmonične imenujemo funkcije, ki zadoščajo enačbi $\Delta u = 0$, kjer je Δ *Laplaceov operator*, $\Delta u := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$. Taka funkcija je npr. potencial električnega polja v vakuumu. Veja matematike, ki se ukvarja s harmoničnimi funkcijami, je *potencialna teorija.* Celovito obravnavanje te teorije bi zahtevalo samostojno knjigo (bolje rečeno, celotno knjižnico), tukaj se bomo morali omejiti le na nekaj najosnovnejših izrekov, več pa lahko preberete npr. v [14] in [33]. V ravnini so harmonične funkcije tesno povezane s holomorfnimi, zato jih bomo obravnavali najprej.

3.1. Harmonične funkcije v ravnini

Za funkcijo f, holomorfno na kaki okolici zaprtega enotskega kroga $\bar{D}(0,1)$, imamo po Cauchyevi formuli za vsak z znotraj kroga

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{1 - \bar{\zeta} z}\, \frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{3.1.1}$$

saj je $\bar{\zeta}\zeta = 1$. Ker je za $|z| < 1$ funkcija $\zeta \mapsto f(\zeta)(1 - \bar{z}\zeta)^{-1}$ holomorfna v okolici kroga $\bar{D}(0,1)$, je po Cauchyevem izreku $\oint_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta}\, d\zeta = 0$, torej tudi

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} f(\zeta) \left(\frac{1}{1 - \bar{z}\zeta} - 1 \right) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \bar{z} \oint_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{1 - \bar{z}\zeta}\, d\zeta = 0. \tag{3.1.2}$$

Ko seštejemo enakosti (3.1.1) in (3.1.2), dobimo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} f(\zeta) \left(\frac{1}{1 - \bar{\zeta} z} + \frac{1}{1 - \bar{z}\zeta} - 1 \right) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} f(\zeta) \frac{1 - |z|^2}{|1 - \bar{z}\zeta|^2}\, \frac{d\zeta}{\zeta} \tag{3.1.3}$$

oziroma, če pišemo $\zeta = e^{i\theta}$ in $z = re^{i\varphi}$ ($r > 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$),

$$f\left(re^{i\varphi}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2}\, f\left(e^{i\theta}\right) d\theta. \tag{3.1.4}$$

Definicija 3.1.1. Funkcijo

$$P_r(\theta) := \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \qquad (0 \le r < 1,\ \theta \in \mathbb{R})$$

imenujemo *Poissonovo jedro*.

Ko vzamemo v formuli (3.1.4) realni del in upoštevamo, da je na krogu vsaka harmonična funkcija realni del holomorfne (trditev 2.3.3), dobimo:

TRDITEV 3.1.2. *(Poissonova formula) Za vsako funkcijo u, ki je harmonična v enotskem krogu $D(0,1)$ in zvezna na zaprtju tega kroga, velja*

$$u\big(re^{i\varphi}\big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-\varphi)u\big(e^{i\theta}\big)\,d\theta \qquad (0 \le r < 1,\ \varphi \in \mathbb{R}). \tag{3.1.5}$$

PROOF. Sklepanje pred trditvijo pove, da velja formula (3.1.5) za vse funkcije, ki so harmonične v kaki okolici zaprtega kroga $\bar{D}(0,1)$. Če je u harmonična v krogu $D(0,1)$, je za vsak $\rho \in (0,1)$ funkcija $u_\rho(z) := u(\rho z)$ harmonična na krogu $D(0,\frac{1}{\rho})$, ki vsebuje krog $\bar{D}(0,1)$, zato zanjo Poissonova formula velja, torej je

$$u\big(\rho re^{i\varphi}\big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-\varphi)u\big(\rho e^{i\theta}\big)\,d\theta \qquad (0 \le r < 1).$$

Ko pošljemo v tej formuli ρ proti 1, sledi, ker je u zvezna na krogu $\bar{D}(0,1)$, da velja Poissonova formula tudi za u. □

TRDITEV 3.1.3. *(Lastnosti Poissonovega jedra) P_r je zvezna funkcija z lastnostmi:*

(i) $P_r > 0$;

(ii) $P_r(-\theta) = P_r(\theta)$ *in* P_r *je periodična funkcija s periodo* 2π;

(iii) $\lim_{r\to 1} P_r(\theta) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & \theta \ne 0 \\ \infty, & \theta = 0 \end{array}\right\} \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$;

(iv) *za* $0 \le \delta \le \theta \le \pi$ *je* $P_r(\theta) \le P_r(\delta)$;

(v) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta)\,d\theta = 1$.

PROOF. Prve štiri lastnosti so očitne iz definicije Poissonovega jedra, lastnost (v) pa je le poseben primer Poissonove formule (3.1.5), ko je u konstantna funkcija 1 in $\varphi = 0$. □

OPOMBA 3.1.4. Iz Poissonove formule za enotski krog takoj sledi tudi Poissonova formula za splošen krog $D(\alpha,R)$, saj je za vsako harmonično funkcijo u na krogu $D(\alpha,R)$ funkcija $z \mapsto u(\alpha+Rz)$ harmonična na krogu $D(0,1)$. Za take funkcije u, ki so zvezne na $\bar{D}(\alpha,R)$, se Poissonova formula glasi

$$u\big(\alpha+re^{i\varphi}\big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,u\big(\alpha+Re^{i\theta}\big)\,d\theta \qquad (r<R). \tag{3.1.6}$$

Dokaz naj bo bralcem za vajo.

POSLEDICA 3.1.5. *(Izrek o povprečju) Za vsako na krogu $\bar{D}(\alpha,R)$ zvezno funkcijo u, ki je harmonična v notranjosti kroga, velja*

$$u(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\big(\alpha+Re^{i\theta}\big)\,d\theta.$$

Proof. To je le poseben primer Poissonove formule (3.1.6), v katero vstavimo $r = 0$. ☐

Posledica 3.1.6. *(Princip maksima in minima) Nekonstantna harmonična funkcija u na območju D ne more zavzeti niti maksima niti minima. Na kompaktni množici K zvezna nekonstantna funkcija u, ki je harmonična v notranjosti K°, pa lahko zavzame svoj maksimum ali minimum le na robu množice K.*

Proof. Dokazali bomo le princip maksima, saj je princip minima za funkcijo u le posledica principa maksima za funkcijo $-u$. Predpostavimo, da je v točki $\alpha \in D$ maksimum M funkcije u in naj bo $\bar{D}(\alpha, R)$ kak krog, vsebovan v D. Ker je $u(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\alpha)\, d\theta$, sledi po izreku o povprečju

$$0 = u(\alpha) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\big(\alpha + Re^{i\theta}\big)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(u(\alpha) - u\big(\alpha + Re^{i\theta}\big)\big)\, d\theta. \tag{3.1.7}$$

Ker je v α maksimum funkcije u, je $u(\alpha) \geq u(z)$ za vse $z \in D$, zato $u(\alpha) - u(\alpha + Re^{i\theta}) \geq 0$. Da bo zadnji integral v (3.1.7) res enak 0, mora zato biti $u(\alpha) - u(\alpha + Re^{i\theta}) = 0$ za vse θ. Torej ima u na krožnici $\alpha + Re^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ povsod isto vrednost $u(\alpha)$. Enak sklep velja za vsako manjšo krožnico s središčem v α, torej je u konstantna na krogu $\bar{D}(\alpha, R)$. Ta argument pove, da je množica $U := \{z \in D : u(z) = M\}$ odprta, saj za vsako svojo točko β vsebuje tudi kak dovolj majhen krog s središčem β. Ker je u zvezna, je tudi množica $V := \{z \in D : u(z) \neq M\}$ odprta. Očitno sta U in V disjunktni množici z unijo D. Ker je D povezana in $U \neq \emptyset$, sledi, da mora biti $U = D$. To pa pomeni, da je u konstantna, kar nasprotuje predpostavki.

Znano je, da na kompaktni množici K vsaka zvezna funkcija zavzame svoj maksimum. Po pravkar dokazanem ga ne more zavzeti v notranjosti množice K, torej ga mora na robu. ☐

Poissonova formula nam omogoči rešiti *Dirichletovo nalogo* za krog, to je poiskati harmonično funkcijo u na krogu, ki ima na robni krožnici predpisane vrednosti.

Izrek 3.1.7. *Naj bo g zvezna (realna) funkcija na krožnici $\partial D(0,1)$. Obstaja natanko ena taka zvezna funkcija u na krogu $\bar{D}(0,1)$, ki je harmonična v notranjosti tega kroga in je na robu enaka g, torej $u|\partial D(0,1) = g$. Ta funkcija je v notranjosti dana s Poissonovo formulo*

$$u\big(re^{i\varphi}\big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\varphi - \theta) g\big(e^{i\theta}\big)\, d\theta \qquad (r < 1). \tag{3.1.8}$$

Proof. Enoličnost je posledica principa maksima in minima: za dve taki funkciji u_1 in u_2 ima namreč razlika $u_2 - u_1$ na robu kroga vrednost 0, zato mora biti 0 tudi znotraj kroga.

Iz izpeljave formul (3.1.3) in (3.1.4) lahko opazimo, da za Poissonovo jedro velja

$$P_r(\theta - \varphi) = \frac{1}{1 - \bar{\zeta} z} + \frac{1}{1 - \bar{z}\zeta} - 1 = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1 - \bar{\zeta} z} - \frac{1}{2}\right) \qquad \left(z = re^{i\varphi},\ \zeta = e^{i\theta}\right),$$

zato (in ker je $d\theta = \frac{1}{i}\frac{d\zeta}{\zeta}$) lahko formulo (3.1.8) napišemo kot

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\oint_{|\zeta|=1} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\bar{\zeta}z} - \frac{1}{2}\right) g(\zeta)\,\frac{d\zeta}{i\zeta} = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\left(\frac{1}{1-\bar{\zeta}z} - \frac{1}{2}\right) g(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta}\right].$$

Ker je funkcija

$$f(z) := \frac{1}{\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\left(\frac{1}{1-\bar{\zeta}z} - \frac{1}{2}\right) g(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta}$$

holomorfna za $|z| < 1$ (saj lahko integral odvajamo na parameter z) in je $u = \mathrm{Re}\, f$, je u harmonična v krogu $D(0,1)$.

Pokazati moramo le še, da je $\lim_{r\to 1} u(re^{i\varphi}) = g(e^{i\varphi})$ za vsak φ; od tod namreč zlahka sledi, da je funkcija

$$\tilde{u}\big(re^{i\varphi}\big) := \begin{cases} u\big(re^{i\varphi}\big), & r < 1 \\ g\big(e^{i\varphi}\big), & r = 1 \end{cases}$$

zvezna na $\bar{D}(0,1)$. Z uporabo formule (3.1.8) in trditve 3.1.3(v), (ii), (i) lahko zapišemo

$$\begin{aligned} \big|u\big(re^{i\varphi}\big) - g\big(e^{i\varphi}\big)\big| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\varphi-\theta)\,\big(g\big(e^{i\theta}\big) - g\big(e^{i\varphi}\big)\big)\,d\theta\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\varphi-\theta)\,\big|g\big(e^{i\theta}\big) - g\big(e^{i\varphi}\big)\big|\,d\theta. \end{aligned}$$

Ker je funkcija g zvezna, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|g(e^{i\theta}) - g(e^{i\varphi})| < \frac{\varepsilon}{2}$, če je le $|\theta - \varphi| < \delta$. Zadnji integral sedaj razdelimo na dva dela:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\varphi-\theta)\,\big|g\big(e^{i\theta}\big) - g\big(e^{i\varphi}\big)\big|\,d\theta = \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} P_r(\varphi-\theta)\,\big|g\big(e^{i\theta}\big) - g\big(e^{i\varphi}\big)\big|\,d\theta + \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\varphi|\ge\delta} P_r(\varphi-\theta)\,\big|g\big(e^{i\theta}\big) - g\big(e^{i\varphi}\big)\big|\,d\theta. \end{aligned}$$

Prvi člen na desni strani zadnje formule je pod

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} P_r(\varphi-\theta)\frac{\varepsilon}{2}\,d\theta < \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\varphi-\theta)\,d\theta = \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta)\,d\theta = \frac{\varepsilon}{2},$$

kjer smo v zadnjih dveh relacijah uporabili trditev 3.1.3. Drugi člen na desni strani gornje formule pa lahko z uporabo trditve 3.1.3(iv), (v) ocenimo kot

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\varphi|\ge\delta} P_r(\varphi-\theta)\,\big|g\big(e^{i\theta}\big) - g\big(e^{i\varphi}\big)\big|\,d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\delta)\,2M\,d\theta = 2MP_r(\delta),$$

kjer je $M := \max_{0\le\theta<2\pi}|g(e^{i\theta})|$. Ker je $\lim_{r\to 1} P_r(\delta) = 0$ (po trditvi 3.1.3(iii)), je $2MP_r(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$, če je r dovolj blizu 1. Za take r sledi iz teh ocen, da je $|u(re^{i\varphi}) - g(e^{i\varphi})| < \varepsilon$, kar dokazuje, da je res $\lim_{r\to 1} u(re^{i\varphi}) = g(e^{i\varphi})$. $\square$

Naloge

1. (i) Izrazite Poissonovo jedro kot

$$P_r(\varphi) = \operatorname{Re} \frac{1 + re^{i\varphi}}{1 - re^{i\varphi}} = \operatorname{Re} \frac{1+z}{1-z},$$

kjer je $z = re^{i\varphi}$.

(ii) Z razvojem funkcije $(1-z)^{-1}$ v vrsto pokažite, da je

$$\operatorname{Re} \frac{1+z}{1-z} = 1 + (z + \bar{z}) + (z^2 + \bar{z}^2) + \ldots$$

(iii) Sklepajte iz (i) in (ii), da je

$$P_r(\varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\varphi}.$$

2. Naj bo rob območja D zvezno odvedljiva sklenjena pot γ, parametrizirana kot $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $(t \in [a,b])$. Označimo z ds ločni element, z $\vec{n} = (-\frac{dy}{ds}, \frac{dx}{ds})$ pa enotsko normalno vektorsko polje na γ. Dokažite, da za vsako funkcijo u, ki je harmonična na kaki okolici množice $\bar{D}$, velja

$$\oint_\gamma \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}\, ds = 0,$$

kjer je $\vec{\nabla} u$ gradient funkcije u. Z drugimi besedami, $\int_{\partial D} u_{\vec{n}}\, ds = 0$, kjer označuje $u_{\vec{n}} = \vec{\nabla} u \cdot n$ odvod funkcije u v smeri vektorja $\vec{n}$.

3. Dokažite, da za funkcijo u, ki je harmonična na krogu $D(\alpha, R)$ in zvezna na zaprtju tega kroga, velja

$$u(\alpha) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D(\alpha,R)} u\, dp,$$

kjer je dp ploščinski element. (Namig: integriranje v polarnih koordinatah in izrek o povprečju.)

4. Naj bo u zvezna funkcija na območju D, ki ima lastnost povprečja: za vsak $\alpha \in D$ in vsak tak $R > 0$, da je $D(\alpha, R) \subset D$, je $u(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\alpha + Re^{i\theta})\, d\theta$. Dokažite, da mora biti u harmonična funkcija. (Navodilo: Za poljuben krog $\bar{D}(\alpha, R) \subset D$ naj bo v taka harmonična funkcija na $D(\alpha, R)$, da je $v|\partial D(\alpha, R) = u|\partial D(\alpha, R)$. Ker imata funkciji u in v lastnost povprečja, jo ima tudi $u - v$. Sklepajte od tod, da je $v(\alpha) = u(\alpha)$ za vsak $\alpha \in D$.)

5. (i) Pokažite, da je $\Delta = 4\bar{\partial}\partial$.

(ii) Naj bo $f : D \to U$ holomorfna preslikava, u pa harmonična funkcija na U. Dokažite, da je tedaj $u \circ f$ harmonična funkcija na D.

†**6.** Kako se izraža funkcija u, ki je harmonična na zgornji polravnini $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ in zvezna na $\bar{H}$, s svojimi vrednostmi na realni osi? (Namig: s Cayleyjevo transformacijo preslikajte H na enotski krog in uporabite Poissonovo formulo (3.1.5).)

7. Funkcija $u(x, y) := \operatorname{Re} \frac{z-i}{z+i}$ je harmonična na krogu $D(0, 1)$ (utemeljite) in enaka 0 na $\partial D(0, 1)$ (izračunajte, da je res tako), a vseeno ni identično enaka 0 na $D(0, 1)$. Ali to nasprotuje principu maksima?

8. (i) Imaginarni del holomorfne funkcije na enostavno povezanem območju je harmonična funkcija. Sklepajte od tod, da je $(x, y) \mapsto \arg(x + iy)$ harmonična funkcija na zgornji polravnini H.

(ii) Poiščite v zgornji polravnini harmonično funkcijo u, ki zadošča pogoju

$$\lim_{y\to 0} u(x, y) = \begin{cases} A, & x > 0 \\ B, & x < 0, \end{cases}$$

kjer sta A in B konstanti.

(iii) Poiščite na enotskem krogu harmonično funkcijo, za katero velja

$$\lim_{|z|\to 1} u(z) = \begin{cases} A, & \operatorname{Im} z > 0 \\ B, & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

kjer sta A in B konstanti.

***9.** Naj bo u harmonična funkcija na kolobarju $K = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$. Dokažite, da jo je mogoče izraziti kot $u(re^{i\varphi}) = a \ln r + \operatorname{Re} f$, kjer je a konstanta, f pa holomorfna funkcija na K. (Navodilo: Naj bo $\vec{F} = (-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x})$ in $\vec{G} = (-\frac{\partial \ln r}{\partial y}, \frac{\partial \ln r}{\partial x})$. Opazite, da je krivuljni integral $a := \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=\rho} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ neodvisen od polmera $\rho \in (R_1, R_2)$ krožnice, po kateri integriramo. Nato pokažite, da je krivuljni integral $\int_\gamma (\vec{F} - a\vec{G}) \cdot d\vec{r}$ enak 0 za vsako sklenjeno pot γ v K in od tod sklepajte, da obstaja realna funkcija v z gradientom enakim $\vec{F} - a\vec{G}$. S pomočjo Cauchy-Riemannovih enakosti pokažite, da je funkcija $f(z) := u(z) - a \ln |z| + iv(z)$ holomorfna na K.)

***10.** Dokažite, da lahko vsako omejeno harmonično funkcijo u na preluknjanem krogu $D(\alpha, R) \setminus \{\alpha\}$ razširimo do harmonične funkcije na $D(\alpha, R)$. (Navodilo: Brez izgube splošnosti smemo vzeti, da je $\alpha = 0$. Potem je po prejšnji nalogi $u(z) = c \ln |z| + \operatorname{Re} f(z)$ za kako konstanto c in holomorfno funkcijo f. Sklepajte iz omejenosti funkcije u, da f v točki 0 ne more imeti niti pola niti bistvene singularnosti (za slednje opazujte vrednosti funkcij za majhne $|z|$ in uporabite izrek 2.8.8). Nato iz omejenosti funkcije u sklepajte še, da mora biti $c = 0$.)

†**11.** Naj zaporedje harmoničnih funkcij u_n konvergira proti funkciji u enakomerno na kompaktnih podmnožicah območja D. Dokažite, da je u harmonična funkcija na D. (Namig: uporabite lahko npr. nalogo 4.)

3.2. Harmonične funkcije v prostoru

Harmonične funkcije v $\mathbb{R}^n$ za $n \geq 3$, to je rešitve Laplaceove enačbe $\Delta u \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0$, je mogoče obravnavati na enoten način za vse n, vendar se bomo tukaj omejili le na najpomembnejši primer $n = 3$, da nam ne bo treba uporabljati vektorske analize v $\mathbb{R}^n$, ki morda bralcem še ni poznana. Omejili se bomo na nekaj najosnovnejših izrekov, mnogo bolj celovito obravnavo pa lahko najde bralec v [33] ali [14].

Zgled 3.2.1. Poiščimo vse harmonične funkcije u na $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, ki so odvisne le od razdalje $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ do izhodišča. S posrednim odvajanjem imamo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'(r)\, \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\, u'(r),$$

torej tudi

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\, u'(r)\right) = \frac{1}{r}\, u'(r) + x\, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) u'(r) + \frac{x}{r}\, \frac{x}{r}\, u''(r) \\ &= \frac{x^2}{r^2}\, u''(r) + \left(\frac{1}{r} - \frac{x}{r^2}\, \frac{x}{r}\right) u'(r) = \frac{x^2}{r^2}\, u''(r) + \frac{r^2 - x^2}{r^3}\, u'(r).\end{aligned}$$

Podobno lahko izrazimo tudi odvoda $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ in $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ in tako dobimo

$$\Delta u(r) = u''(r) + \frac{2}{r}\, u'(r).$$

Splošna rešitev Eulerjeve enačbe

$$u'' + \frac{2}{r}\, u'(r) = 0$$

(ki ji lahko tudi znižamo red z novo neznanko $v = u'$) je $u(r) = a + \frac{b}{r}$, kjer sta a in b konstanti.

Podobno izračunamo, da je za vsak $\vec{r}_0$ funkcija $\vec{r} \mapsto \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|}$ harmonična na $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{r}_0\}$.

Definicija 3.2.2. Funkcijo $u(r) = -\frac{1}{4\pi r}$ $(r > 0)$ imenujemo *osnovna rešitev Laplaceove enačbe.*

Ogledali si bomo, kako iz osnovne pridemo do drugih rešitev Laplaceove enačbe, najprej pa moramo spoznati nekaj posledic Gaussovega izreka o divergenci.

3.2.1. Greenove identitete

V celotnem razdelku naj bo D odprta, povezana in omejena množica v $\mathbb{R}^3$ (razen če ne bo rečeno drugače), katere rob ∂D naj bo ploskev razreda C^1. To pomeni, da lahko ploskev ∂D v okolici vsake njene točke opišemo z zvezno odvedljivo vektorsko funkcijo $\vec{r} = \vec{r}(t, s)$, kjer je $\vec{r}$ krajevni vektor in parametra (t, s) tečeta po kakem ravninskem območju, in sicer tako, da je vedno $\frac{\partial\vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial s} \neq 0$. Enotsko, iz območja D navzven usmerjeno, normalo v točki $\vec{r}$ ploskve ∂D, bomo označili z $\vec{n}(\vec{r})$.

Gaussov izrek o divergenci pove, da za vsako zvezno odvedljivo vektorsko polje $\vec{F}$ na $\bar{D}$ velja

$$\iint_{\partial D} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_D \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV, \tag{3.2.1}$$

kjer je dS ploskovni element na ∂D, dV volumni element, $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ pa divergenca, $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$, vektorskega polja $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

Normalni odvod zvezno odvedljive funkcije u v točki $\vec{r}$ ploskve ∂D je definiran kot

$$\partial_{\vec{n}} u(\vec{r}) = \vec{\nabla} u(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}),$$

kjer je $\vec{\nabla}u(\vec{r}) := (\frac{\partial u}{\partial x}(\vec{r}), \frac{\partial u}{\partial y}(\vec{r}), \frac{\partial u}{\partial z}(\vec{r}))$ gradient, $\operatorname{grad} u(r)$, funkcije u.

TRDITEV 3.2.3. *Za poljubni dvakrat zvezno odvedljivi funkciji u in v na kaki okolici množice $\bar{D}$ veljajo Greenove identitete:*

$$\iint_{\partial D} v\partial_{\vec{n}} u\,dS = \iiint_D \left(v\Delta u + \vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v\right) dV, \tag{3.2.2}$$

$$\iint_{\partial D} (v\partial_{\vec{n}} u - u\partial_{\vec{n}} v)\,dS = \iiint_D (v\Delta u - u\Delta v)\,dV \tag{3.2.3}$$

in za vsak $\vec{r}_0 \in D$

$$u(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial D}\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}\,\partial_{\vec{n}}u(\vec{r}) - u(\vec{r})\partial_{\vec{n}}\left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}\right)\right)dS - \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\Delta u}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}\,dV. \tag{3.2.4}$$

PROOF. Identiteto (3.2.2) dobimo, če vstavimo v formulo (3.2.1) $\vec{F} = v\vec{\nabla}u$ in upoštevamo, da je $\vec{\nabla}\cdot(v\vec{\nabla}u) = v\Delta u + \vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v$ (kar lahko preverimo s preprostim računom). Identiteta (3.2.3) pa sledi, če v (3.2.2) zamenjamo u in v ter tako dobljeno enakost odštejemo od (3.2.2).

Tretja Greenova identiteta (3.2.4) sledi iz identitete (3.2.3), ko jo uporabimo za funkciji u in $v(\vec{r}) := \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}$ na območju $D\setminus\bar{K}_\delta$, kjer je $\bar{K}_\delta$ zaprta krogla s središčem $\vec{r}_0$ in polmerom δ, vsebovana v D, ter nato pošljemo δ proti 0. Ker je tukaj v harmonična funkcija, se namreč identiteta (3.2.3) glasi

$$\left(\iint_{\partial D} - \iint_{\partial K_\delta}\right)(u\partial_{\vec{n}}v - v\partial_{\vec{n}}u)\,dS = \left(\iiint_D - \iiint_{K_\delta}\right)(-v\Delta u)\,dV. \tag{3.2.5}$$

Predznak minus v drugem integralu na levi je posledica dejstva, da izberemo normalo $\vec{n}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}$ na sfero ∂K_δ, ki kaže v območje $D\setminus K_\delta$. Trojni integral po krogli K_δ v (3.2.5) se v polarnih koordinatah s središčem v $\vec{r}_0$ glasi, če označimo $\rho = \|\vec{r}-\vec{r}_0\|$ (torej je $v = \frac{1}{\rho}$),

$$\iiint_{K_\delta} v\Delta u\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\Delta u}{\rho}\,\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

in gre očitno proti 0, ko gre δ proti 0. Podobno velja tudi za integral

$$\iint_{\partial K_\delta} v\partial_{\vec{n}} u\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\partial_{\vec{n}} u}{\delta}\,\delta^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \xrightarrow{\delta\to 0} 0.$$

Ker je normalni odvod $\partial_{\vec{n}} v$ na sferi ∂K_δ enak

$$\vec{\nabla} v\cdot\vec{n} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{\rho}\right)\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{\delta} = -\frac{1}{\rho^2}\,\vec{\nabla}\rho\bigg|_{\rho=\delta}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{\delta} = -\frac{1}{\delta^2}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{\delta}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{\delta} = -\frac{1}{\delta^2}, \quad (3.2.6)$$

je

$$\iint_{\partial K_\delta} u\partial_{\vec{n}} v = -\iint_{\partial K_\delta} \frac{u}{\delta^2}\, dS = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \xrightarrow{\delta\to 0} -4\pi u(\vec{r}_0),$$

kjer smo upoštevali, da se funkcija v zadnjem integralu približuje k $u(\vec{r}_0)\sin\theta$, ko gre δ proti 0. Iz povedanega sledi, da se v limiti $\delta\to 0$ enakost (3.2.5) glasi

$$\iint_{\partial D} (u\partial_{\vec{n}} v - v\partial_{\vec{n}} u)\, dS + 4\pi u(\vec{r}_0) = -\iiint_D v\Delta u\, dV,$$

kar je, le nekoliko drugače zapisana, enakost (3.2.4). □

Če vstavimo v prvo ali pa drugo Greenovo formulo za u poljubno harmonično funkcijo, za v pa konstantno funkcijo 1, izpeljemo naslednjo posledico:

Posledica 3.2.4. *Za vsako harmonično funkcijo na okolici množice $\bar{D}$ je*

$$\iint_{\partial D} \partial_{\vec{n}} u\, dS = 0.$$

Od tod in iz tretje Greenove formule (3.2.4) takoj sledi izrek o povprečju za harmonične funkcije v prostoru. Za harmonične funkcije v ravnini smo tak izrek spoznali že v prejšnjem razdelku.

Izrek 3.2.5. *(Izrek o povprečju) Naj bo u harmonična funkcija na območju D, $\vec{r}_0\in D$ in $R>0$ tak, da je zaprta krogla $\bar{K}(\vec{r}_0,R)$ s središčem v $\vec{r}_0$ in polmerom R vsebovana v D. Potem je*

$$u(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\partial K(\vec{r}_0,R)} u(\vec{r})\, dS.$$

Proof. Uporabimo tretjo Greenovo formulo (3.2.4) za kroglo $D := K(\vec{r}_0,R)$. Ker je u harmonična in je na sferi ∂D normalni odvod funkcije $\|\vec{r}-\vec{r}_0\|$ enak $-\frac{1}{R^2}$ (kot smo že opazili v (3.2.6), le da je tam nastopal δ, namesto R), se formula (3.2.4) tokrat glasi

$$u(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{R}\iint_{\partial D}\partial_{\vec{n}} u(\vec{r})\, dS + \frac{1}{R^2}\iint_{\partial D} u(\vec{r})\, dS\right).$$

Po prejšnji posledici je prvi integral enak 0 in zadnja enakost se zato reducira na enakost, ki smo jo želeli dokazati. □

Iz izreka o povprečju sledi princip maksima in minima na enak način kot v prejšnjem razdelku za harmonične funkcije na ravninskih območjih, zato bomo dokaz opustili.

POSLEDICA 3.2.6. *(Princip maksima in minima) Nekonstantna harmonična funkcija na območju $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ne more zavzeti v D niti maksima niti minima. Na kompaktni množici $K \subset \mathbb{R}^3$ zvezna nekonstantna funkcija, ki je harmonična v notranjosti množice K, pa zavzame svoj maksimum in minimum na robu množice K.*

3.2.2. Dirichletov problem in Greenova funkcija

Dirichletov problem za omejeno območje D z gladkim robom je: poiskati funkcijo u, ki je zvezna na $\bar{D}$, harmonična na D in ima na ∂D predpisane vrednosti, tj. $u|\partial D = f$, kjer je f dana zvezna funkcija na ∂D.

Predpostavimo, da nam je uspelo najti tako funkcijo v posebnem primeru, ko je $f(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}$, kjer je $\vec{r}_0$ poljubna točka iz D; označimo to funkcijo z $v(\vec{r},\vec{r}_0)$. Funkcija v je torej harmonična na D v prvi spremenljivki $\vec{r}$ in za $\vec{r} \in \partial D$ je $v(\vec{r},\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}$. Če uporabimo sedaj drugo Greenovo identiteto (3.2.3) na poljubni harmonični funkciji u in pravkar definirani harmonični funkciji $\vec{r} \mapsto v(\vec{r},\vec{r}_0)$ pri fiksnem $\vec{r}_0 \in D$, dobimo

$$\iint_{\partial D} \left(u(\vec{r})\partial_{\vec{n}} v(\vec{r},\vec{r}_0) - \frac{1}{4\pi\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}\, \partial_{\vec{n}} u(\vec{r}) \right) dS = 0. \tag{3.2.7}$$

Po drugi strani pa tretja Greenova identiteta (3.2.4) za harmonično funkcijo u pove, da je

$$u(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial D} \left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}\, \partial_{\vec{n}} u(\vec{r}) - u(\vec{r})\partial_{\vec{n}} \left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|} \right) \right) dS.$$

Ko k temu prištejemo (3.2.7), dobimo

$$u(\vec{r}_0) = \iint_{\partial D} \partial_{\vec{n}} G(\vec{r},\vec{r}_0) u(\vec{r})\, dS, \tag{3.2.8}$$

kjer je $G(\vec{r},\vec{r}_0) := v(\vec{r},\vec{r}_0) - \frac{1}{4\pi}\|\vec{r}-\vec{r}_0\|^{-1}$. Funkcija G ima lastnosti iz naslednje definicije:

DEFINICIJA 3.2.7. *Greenova funkcija* na omejenem območju D z gladkim robom je taka funkcija G, definirana na $\bar{D} \times D$, da za vsak $\vec{r}_0 \in D$ velja:

(i) funkcija $\vec{r} \mapsto G(\vec{r},\vec{r}_0) + \frac{1}{4\pi}\|\vec{r}-\vec{r}_0\|^{-1}$ je harmonična na D in zvezna na $\bar{D}$;
(ii) za $\vec{r} \in \partial D$ je $G(\vec{r},\vec{r}_0) = 0$.

Funkcijo $\partial_{\vec{n}} G(\vec{r},\vec{r}_0)$, definirano na $\partial D \times D$, imenujemo *Poissonovo jedro*, formulo (3.2.8) pa *Poissonova formula*.

Obstoja Greenove funkcije za splošna območja ni lahko dokazati matematično, vendar pa je Green sam navedel enostavno fizikalno utemeljitev. Mislimo si, da je ∂D popolnoma prevodna ploskev, ki obkroža vakuum D, in postavimo v točko $\vec{r}_0$

enotski negativni električni naboj. Ta naboj povzroči na ploskvi ∂D tako razporeditev pozitivnih nabojev, da je potencial na ploskvi enak 0. Tedaj je $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ potencial v točki $\vec{r}$, ki ga povzročijo skupaj naboji na ∂D in v $\vec{r}_0$. Je pa Greenova funkcija, kadar obstaja, enolično določena. To sledi iz enoličnosti rešitve Dirichletovega problema, kar je (kot v prejšnjem razdelku) enostavna posledica principa maksima. Nekaj splošnih lastnosti Greenove funkcije si bomo ogledali v nalogah, sedaj pa si oglejmo le še poseben primer, ko je D krogla.

Zgled 3.2.8. Naj bo D krogla s središčem $\vec{0}$ in polmerom 1. Točki $\vec{r}_0 \in D$ zrcalna točka glede na enotsko sfero ∂D je definirana kot

$$\vec{r}_1 := r_0^{-2}\vec{r}_0, \qquad \text{kjer je } r_0 := \|\vec{r}_0\|.$$

Trdimo, da je

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_0\|\vec{r}-\vec{r}_1\|} - \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}\right) \tag{3.2.9}$$

Greenova funkcija za enotsko kroglo D. (Ko je $\vec{r}_0 = \vec{0}$, je treba to formulo razumeti kot $G(\vec{r}, \vec{0}) = \frac{1}{4\pi}(\frac{1}{\|r_0\vec{r}-r_0\vec{r}_1\|} - \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}) = \frac{1}{4\pi}(\frac{1}{r_0\|\vec{r}_1\|} - \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{0}\|}) = \frac{1}{4\pi}(1 - \frac{1}{\|\vec{r}\|})$.) Ker je $G(\vec{r}, \vec{r}_0) + \frac{1}{4\pi}\|\vec{r}-\vec{r}_0\|^{-1} = \frac{1}{4\pi r_0\|\vec{r}-\vec{r}_1\|}$ harmonična funkcija povsod, razen v točki $\vec{r}_1 \notin D$, moramo preveriti le, da je $G(\vec{r}, \vec{r}_0) = 0$, kadar je $\|\vec{r}\| = 1$ in $\vec{r}_0 \in D$. To pa sledi takoj iz enakosti

$$\|\vec{r}-\vec{r}_0\|^2 = r_0^2\|\vec{r}-\vec{r}_1\|^2 \qquad (\|\vec{r}\| = 1),$$

ki jo dokaže preprost račun; obe strani sta namreč enaki $1 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}_0 + r_0^2$. Preprost račun pove tudi, da je Poissonovo jedro $P(\vec{r}, \vec{r}_0) = \partial_{\vec{n}} G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ enako

$$P(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{1-\|\vec{r}_0\|^2}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|^3}. \tag{3.2.10}$$

Naloge

1. Poiščite vse harmonične funkcije v $\mathbb{R}^2$, ki so odvisne le od razdalje r do izhodišča.

2. Izpeljite naslednjo inačico izreka o povprečju za funkcijo u, harmonično na kaki okolici zaprte krogle $\bar{K}(\vec{r}_0, R)$:

$$u(\vec{r}_0) = \frac{\iiint_{K(\vec{r}_0,R)} u(\vec{r})\,dV}{\frac{4}{3}\pi R^3}. \tag{3.2.11}$$

3. Dokažite, da je omejena harmonična funkcija na $\mathbb{R}^3$ konstantna. (Navodilo: Naj bo $M = \sup_{\vec{r}\in\mathbb{R}^3} |u(\vec{r})|$. Za dani $\vec{r}_0$ izrazite $u(\vec{r}_0)$ in $u(\vec{0})$ po formuli (3.2.11) za kak zelo velik R ($R > \|\vec{r}_0\|$) in od tod ocenite, da je

$$|u(\vec{r}_0) - u(0)| \le \frac{3M}{4\pi R^3}\iiint_D dV \le \frac{3M}{4\pi R^3}\iiint_\Omega dV,$$

kjer je $D = (K(\vec{r}_0, R) \setminus K(\vec{0}, R)) \cup (K(\vec{0}, R) \setminus K(\vec{r}_0, R))$ in $\Omega = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : R - \|\vec{r}_0\| < \|\vec{r}\| < R + \|\vec{r}_0\|$. Pokažite, da konvergira izraz na desni strani gornje formule proti 0, ko gre R proti ∞.)

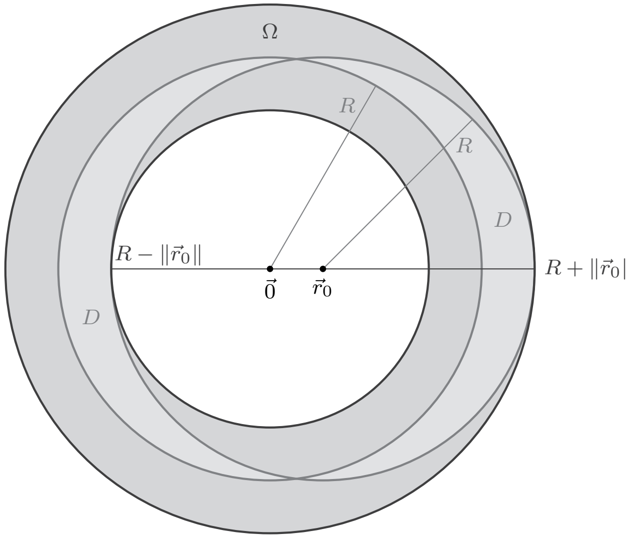

FIGURE 3.1. Integracijski območji v nalogi 3.

† **4.** Sklepajte iz definicije Greenove funkcije G za omejeno območje D, principa maksima za G na območju $D \setminus K(\vec{r}_0, \varepsilon)$ za kak dovolj majhen $\varepsilon > 0$ ter principa minima za funkcijo $G(\vec{r}, \vec{r}_0) + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|}$ na D, da je

$$-\frac{1}{4\pi\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} \leq G(\vec{r}, \vec{r}_0) \leq 0, \qquad \text{če je } \vec{r} \neq \vec{r}_0,\ \vec{r}, \vec{r}_0 \in D. \tag{3.2.12}$$

† **5.** Dokažite, da je Greenova funkcija simetrična, tj.

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = G(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$$

za poljubna $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in D$. (Navodilo: Predpostaviti smemo, da je $\vec{r}_2 \neq \vec{r}_1$. Uporabite drugo Greenovo identiteto (3.2.3) (in dejstvo, da je $G(\vec{r}, \vec{r}_j) = 0$ za $\vec{r} \in \partial D$) za funkciji $u(\vec{r}) = G(\vec{r}, \vec{r}_1)$ in $v(\vec{r}) = G(\vec{r}, \vec{r}_2)$ na območju $D \setminus (K(\vec{r}_1, \varepsilon) \cup K(\vec{r}_2, \varepsilon))$, za dovolj majhen $\varepsilon > 0$. S pomočjo neenakosti (3.2.12) pokažite, da je $\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\partial K(\vec{r}_j, \varepsilon)} G(\vec{r}, \vec{r}_j) \partial_{\vec{n}} G(\vec{r}, \vec{r}_k)\, dS = 0$ za $k \neq j$ $(k, j = 1, 2)$. Nadalje pokažite, izhajajoč iz definicije Greenove funkcije, da je

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\partial K(\vec{r}_j, \varepsilon)} G(\vec{r}, \vec{r}_k) \partial_{\vec{n}} G(\vec{r}, \vec{r}_j)\, dS =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\partial K(\vec{r}_j, \varepsilon)} \frac{1}{4\pi} G(\vec{r}, \vec{r}_k) \partial_{\vec{n}} \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_j\|}\right) dS$$

za $k \neq j$ in izračunajte (podobno kot v (3.2.6)), da je zadnja limita enaka $-G(\vec{r}_j, \vec{r}_k)$.)

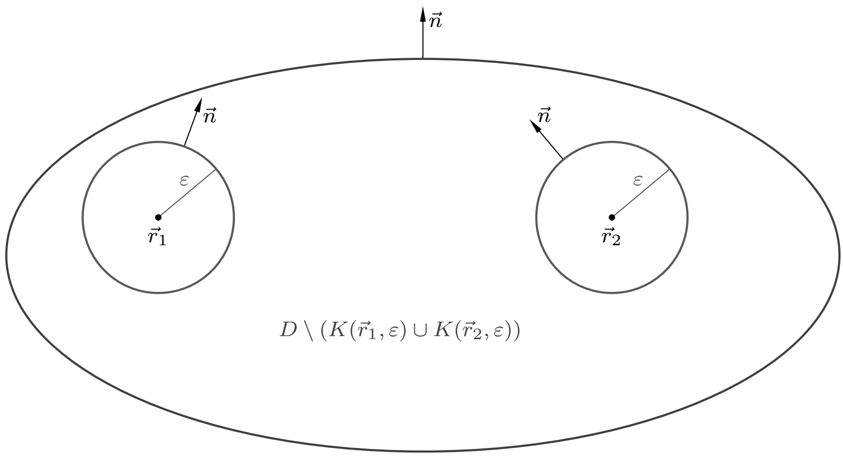

FIGURE 3.2. K dokazu simetričnosti Greenove funkcije.

6. Izračunajte iz Greenove funkcije (3.2.9) Poissonovo jedro $P(\vec{r}, \vec{r}_0) = \vec{\nabla} G(\vec{r}, \vec{r}_0) \cdot \vec{r}$ na enotski krogli (tj. dokažite formulo (3.2.10)).

7. Dokažite varianto izreka 3.1.7 za enotsko kroglo.

† **8.** Polinom več spremenljivk imenujemo *homogen* stopnje m, če imajo vsi monomi v njem stopnjo m ali pa je identično enak 0. Naj bo P_m vektorski prostor vseh homogenih polinomov stopnje m v treh spremenljivkah (vključno s polinomom 0), H_m pa podprostor vseh harmoničnih polinomov v P_m.

(i) Dokažite, da je s predpisom

$$\langle p, q \rangle := p(\partial)(\bar{q}),$$

kjer za $p(x, y, z) = \sum_{i,j,k} a_{i,j,k} x^i y^j z^k$ izraz $p(\partial)$ pomeni $\sum_{i,j,k} a_{i,j,k} \frac{\partial^{i+j+k}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}$, definiran skalarni produkt na prostoru P_m, in da tvorijo monomi $x^i y^j z^k$ $(i + j + k = m)$ ortogonalno bazo prostora P_m.

(ii) Označimo z r^2 polinom $x^2 + y^2 + z^2$. Opazite, da je

$$\langle r^2 p, q \rangle = \langle p, \Delta q \rangle$$

za vsaka polinoma $p \in P_{m-2}$ in $q \in P_m$ ter sklepajte od tod, da je H_m ortogonalni komplement podprostora $r^2 P_{m-2}$ v P_m. Sklepajte sedaj z indukcijo, da je $P_m = H_m \oplus r^2 H_{m-2} \oplus r^4 H_{m-4} \oplus \cdots$.

(iii) Za dimenziji prostorov P_m in H_m dokažite

$$\dim P_m = \frac{(m+1)(m+2)}{2} \qquad \text{in} \qquad \dim H_m = 2m + 1.$$

† **9.** Označimo s $\mathcal{H}_m$ množico vseh zožitev polinomov iz H_m na enotsko sfero $S = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{r}\| = 1\}$.

(i) Opazite, da sta vektorska prostora H_m in $\mathcal{H}_m$ izomorfna: zožitvi inverzna preslikava priredi funkciji $f \in \mathcal{H}_m$ homogen polinom $p(\vec{r}) = r^m f(r^{-1}\vec{r})$, kjer je $\vec{r} = (x, y, z)$ in $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(ii) Pokažite, da sta za $k \neq m$ podprostora $\mathcal{H}_k$ in $\mathcal{H}_m$ med seboj ortogonalna v $L^2(S)$, kjer je skalarni produkt definiran kot $\langle f, g \rangle = \int_S f\bar{g}\, dS$, pri čemer označuje dS ploskovni element na sferi S. (Navodilo: Po drugi Greenovi identiteti (3.2.3) za poljubna polinoma $p \in H_k$ in $q \in H_m$ velja

$$0 = \iiint_{K(\vec{0},1)} (p\Delta\bar{q} - \bar{q}\Delta p)\, dV = \iint_S (p\partial_{\vec{n}}\bar{q} - \bar{q}\partial_{\vec{n}}p)\, dS.$$

Normalni odvod na enotski sferi pa se izraža kot $\partial_{\vec{n}}p = \vec{\nabla}p \cdot \vec{r} = x\frac{\partial p}{\partial x} + y\frac{\partial p}{\partial y} + z\frac{\partial p}{\partial z} = kp$, kjer smo v zadnji enakosti uporabili Eulerjevo formulo za homogene funkcije stopnje k.)

(iii) Sklepajte sedaj iz točk (i), (ii) in prejšnje naloge ter Weierstrassovega izreka, da je $L^2(S) = \oplus_{m=0}^{\infty}\mathcal{H}_m$.

Opomba. Funkcije iz $\mathcal{H}_m$ so tesno povezane s sferičnimi harmonijami in s prirejenimi Legendreovimi funkcijami, ki jih bomo definirali kasneje, ko bomo obravnavali stacionarno porazdelitev temperature na krogli. Pomembno vlogo igrajo na primer tudi pri reprezentacijah grupe $SO(3)$ (dostopno razlago tega lahko najdete v [21]) in pri kvantnomehanski vrtilni količini.

POGLAVJE 4

Fourierove vrste in Fourierova transformacija

V tem poglavju si bomo ogledali, kako lahko funkcije aproksimiramo z linearnimi kombinacijami enostavnejših funkcij, npr. funkcij $\sin nx$ in $\cos nx$ ($n \in \mathbb{N}$). Pri tem bomo obravnavali funkcije kot vektorje v (neskončno razsežnem) vektorskem prostoru, opremljenim s skalarnim produktom. Zato se bomo najprej na kratko posvetili takim prostorom. Pri tej tematiki bi bilo ugodno poznati Lebesgueovo teorijo integriranja. Ker pa tega predznanja v drugem letniku še ne moremo predpostaviti, Lebesgueovega integrala (ki se sicer ujema z Riemannovim na vseh funkcijah, ki so integrabilne v Riemannovem smislu) ne bomo uporabljali. Na nekaj mestih bomo uporabili le *Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci*, ki je zelo uporaben tudi za Riemannovo integrabilne funkcije:

Če je (f_n) tako zaporedje integrabilnih kompleksnih funkcij na kakem intervalu I (lahko tudi neomejenem), ki konvergira po točkah proti funkciji f, da je $|f_n(x)| \le g(x)$ za (skoraj) vse $x \in I$ in kako tako nenegativno funkcijo g, da je $\int_I g(x)\,dx < \infty$, potem je

$$\int_I f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx.$$

Tukaj je integrabilnost kake funkcije h mišljena v Lebesgueovem smislu, a bralec lahko predpostavlja, da pomeni le integrabilnost v Riemannovem smislu, torej, da obstaja Riemannov integral $\int_I |h(x)|\,dx$. (Splošnejšo formulacijo in dokaz Lebesgueovega izreka o dominirani konvergenci lahko najdete npr. v [10], [27].) V kasnejših razdelkih poglavja bomo obravnavali tudi zvezno analogijo razvoja v Fourierovo vrsto, to je Fourierovo (in Laplaceovo) transformacijo. Pri tem se bomo omejili le na osnovno transformacijo, definirano za funkcije na $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$; druge variante, npr. diskretno Fourierovo transformacijo in mnoge uporabe v fiziki in drugod pa najde bralec npr. v [36] in [13].

4.1. Hilbertov prostor

4.1.1. Definicija in zgledi

Skalarni produkt na kompleksnem vektorskem prostoru $\mathcal{H}$ je preslikava iz $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ v $\mathbb{C}$, ki vsakemu paru (f, g) vektorjev iz $\mathcal{H}$ priredi število $\langle f, g\rangle$, pri čemer veljajo naslednje lastosti za vse vektorje $f, g, h \in \mathcal{H}$ in skalarje $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

(i) $\langle \alpha f + \beta g, h\rangle = \alpha\langle f, h\rangle + \beta\langle g, h\rangle$ (*linearnost v prvem faktorju*);

(ii) $\langle g, f\rangle = \overline{\langle f, g\rangle}$ (*poševna simetričnost*);

(iii) $\langle f, f\rangle \geq 0$ (*nenegativnost*);

(iv) $\langle f, f\rangle = 0$ le, ko je $f = 0$ (*definitnost*).

Kot je znano iz linearne algebre, iz teh lastnosti sledi, da je skalarni produkt *konjugirano linearen* v drugem faktorju (tj. $\langle f, \alpha g + \beta h\rangle = \bar{\alpha}\langle f, g\rangle + \bar{\beta}\langle f, h\rangle$) ter da velja *Cauchy-Schwarzova neenakost*

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\|g\| \qquad (f, g \in \mathcal{H}),$$

kjer je *norma* $\|f\|$ elementa f definirana z

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

Ključne lastnosti norme so:

(1) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (*trikotniška neenakost*);

(2) $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ (*homogenost*);

(3) $\|f\| = 0$ le, ko je $f = 0$.

Skalarni produkt lahko izrazimo z normo s *polarizacijsko identiteto*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|f + i^k g\|^2 \tag{4.1.1}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\|f+g\|^2 + i\|f+ig\|^2 - \|f-g\|^2 - i\|f-ig\|^2\right]. \tag{4.1.2}$$

Iz skalarnega produkta porojena norma zadošča *paralelogramski identiteti*

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right). \tag{4.1.3}$$

Norma definira *razdaljo* $d(f, g)$ med dvema vektorjema kot

$$d(f, g) := \|g - f\|.$$

Razdalja zadošča trikotniški neenakosti $(d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h))$, je *simetrična* $(d(g, f) = d(f, g))$, *nenegativna* $(d(f, g) \geq 0)$ in *definitna* ($d(f, g) = 0$ natanko tedaj, ko je $g = f$).

Vektorja f in g imenujemo *ortogonalna* (oznaka $f \perp g$), če je $\langle f, g\rangle = 0$. Podmnožici M, N v $\mathcal{H}$ sta *ortogonalni*, če je $f \perp g$ za vsaka $f \in M$ in $g \in N$. Množico $M \subseteq \mathcal{H}$ imenujemo *ortogonalna*, če sta poljubna dva njena vektorja med seboj ortogonalna; če imajo pri tem še vsi vektorji iz M dolžino 1, pravimo, da je M *ortonormirana množica*.

Definicija 4.1.1. Zaporedje vektorjev (f_n) v $\mathcal{H}$ imenujemo *konvergentno*, če obstaja tak vektor $f \in \mathcal{H}$, da je
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0.$$
Tak vektor f imenujemo *limita zaporedja* (f_n) in zapišemo
$$f = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Zaporedje (f_n) imenujemo *Cauchyevo*, če velja
$$\lim_{m,n\to\infty} \|f_n - f_m\| = 0.$$
Z drugimi besedami, za vsak $\varepsilon > 0$ mora obstajati tak $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, da za vsaka $n, m \geq n(\varepsilon)$ velja
$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Lahko je videti, da je vsako konvergentno zaporedje Cauchyevo; dokaz je tak kot za zaporedja realnih števil, zato ga bomo izpustili. Obratno pa ni vedno res; prostor, v katerem je vsako Cauchyevo zaporedje konvergentno, imenujemo *poln*.

Definicija 4.1.2. *Hilbertov prostor* je poln vektorski prostor s skalarnim produktom; torej tak vektorski prostor, opremljen s skalarnim produktom, v katerem je vsako Cauchyevo zaporedje konvergentno.

Zgled 4.1.3. Naj bo $\mathcal{F}$ prostor vseh tistih zaporedij $f = (f(n))$ kompleksnih števil, ki imajo le končno mnogo členov $f(n)$ različnih od 0. Skalarni produkt v $\mathcal{F}$ naj bo definiran kot
$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\overline{g(n)} \qquad (f = (f(n)),\ g = (g(n))).$$
Oglejmo si zaporedje vektorjev
$$f_n := \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right).$$
Za $n > m$ je
$$\|f_n - f_m\| = \sqrt{\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}}. \tag{4.1.4}$$
Ker je vrsta $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ konvergentna, gre izraz na desni v (4.1.4) proti 0, ko gre m proti ∞, zato je zaporedje (f_n) Cauchyevo. Vendar pa v prostoru $\mathcal{F}$ nima limite. Njegova limita je namreč zaporedje $f := (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots)$, ki pa ni v $\mathcal{F}$, saj ima neskončno mnogo členov različnih od 0. To zaporedje f je element *prostora* ℓ^2, ki po definiciji sestoji iz vseh takih zaporedij $g = (g(n))$ kompleksnih števil, za katera je
$$\sum_{n=0}^{\infty} |g(n)|^2 < \infty.$$

V prostoru ℓ^2 je skalarni produkt definiran kot

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\overline{g(n)} \qquad (f = (f(n)),\ g = (g(n))),$$

kjer nastopa na desni vsota konvergentne vrste. Vrsta je celo absolutno konvergentna, saj za njene delne vsote velja po Cauchy-Schwarzovi neenakosti

$$\sum_{n=0}^{N} |f(n)\overline{g(n)}| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{N} |f(n)|^2}\sqrt{\sum_{n=0}^{N} |g(n)|^2} \leq \|f\|\|g\|,$$

kjer smo z

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |f(n)|^2}$$

označili normo v prostoru ℓ^2. Bralec lahko dokaže, da je vektor $f = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{m}, \ldots)$ res limita zgoraj definiranega zaporedja (f_n), torej, da je $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ v prostoru ℓ^2. (V zgledu na koncu razdelka bomo to storili v nekoliko splošnejši situaciji.)

Zgled 4.1.4. Prostor $C[a, b]$ vseh zveznih kompleksnih funkcij na intervalu $[a, b]$ (kjer je $a < b$) lahko opremimo s skalarnim produktom

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\bar{g}(t)\, dt. \tag{4.1.5}$$

Vendar pa $C[a, b]$ ni poln prostor v normi

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\, dt}, \tag{4.1.6}$$

ki jo porodi ta skalarni produkt. Zlahka namreč najdemo Cauchyevo zaporedje zveznih funkcij, ki ni konvergentno. Zaradi enostavnejšega zapisa vzemimo, da je $a = -1$ in $b = 1$. Definirajmo funkcije $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ za $n = 1, 2, \ldots$ npr. takole:

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1, 0]; \\ nt, & t \in [0, \frac{1}{n}); \\ 1, & t \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

To zaporedje funkcij f_n konvergira po točkah proti karakteristični funkciji f intervala $(0, 1]$, tj. $f(t) = 1$ za $t \in (0, 1]$ in $f(t) = 0$ za $t \in [-1, 0]$. Ta konvergenca je tudi po normi:

$$\|f - f_n\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} |f(t) - f_n(t)|^2\, dt} = \sqrt{\int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nt)^2\, dt} = \sqrt{\frac{1}{3n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Vendar pa karakteristična funkcija intervala $(0, 1]$ ni zvezna, torej ni v prostoru $C[-1, 1]$.

Prostor $C[a,b]$ je vsebovan v prostoru

$$L^2(a,b) := \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : \int_a^b |f(t)|^2\, dt < \infty\}, \tag{4.1.7}$$

v katerem je skalarni produkt podan z isto formulo (4.1.5). Da se dokazati, da je prostor $L^2(a,b)$ poln, če integrala v (4.1.5) in (4.1.7) vzamemo kot Lebesgueova integrala [27]. Tedaj je $C[a,b]$ gost podprostor, tj. zaprtje $\overline{C[a,b]}$ množice $C[a,b]$ v $L^2(a,b)$ je kar $L^2(a,b)$. Ker tukaj ne bomo uporabljali Lebesgueovega integrala, raje definirajmo prostor $L^2(a,b)$ kot napolnitev prostora $C[a,b]$ v normi (4.1.6); tj. $L^2(a,b)$ dobimo tako, da prostoru $C[a,b]$ dodamo še vse tiste kompleksne funkcije na $[a,b]$, ki so limite Cauchyevih zaporedij funkcij iz $C[a,b]$ v normi (4.1.6). (Natančneje je postopek napolnitve opisan v nalogi 15.)

Splošneje je za vsako pozitivno zvezno funkcijo $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\langle f, g\rangle_w = \int_a^b f(t)\bar{g}(t)w(t)\, dt \tag{4.1.8}$$

definiran skalarni produkt v $C[a,b]$, ki porodi normo

$$\|f\|_w = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 w(t)\, dt}. \tag{4.1.9}$$

Napolnitev prostora $C[a,b]$ v tej normi bomo označili z

$$L^2_w(a,b).$$

4.1.2. Razdalja do konveksne podmnožice in ortogonalni komplement†

Naj spomnimo, da je podmnožica C vektorskega prostora V *konveksna*, če za vsaki dve svoji točki x in y vsebuje tudi celotno daljico med njima, torej

$$tx + (1-t)y \in C \qquad \text{za vsaka } x, y \in C \text{ in vsak } t \in [0,1].$$

Razdalja $d(f,C)$ točke f od množice C v metričnem prostoru je definirana kot infimum razdalj $d(f,g)$, ko teče g po vseh elementih množice C.

Izrek 4.1.5. *Naj bo C zaprta, konveksna, neprazna podmnožica Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$. Za vsak $f \in \mathcal{H}$ obstaja natanko en tak $g \in C$, da je*

$$\|f - g\| = d(f,C).$$

Proof. Brez izgube splošnosti smemo vzeti, da je $f = 0$, saj lahko nadomestimo f s $f - f = 0$, množico C pa z množico $C - f := \{c - f : c \in C\}$. Označimo

$$d = d(0,C)$$

in naj bo (g_n) tako zaporedje v C, da je $\lim \|g_n\| = \lim d(0,g_n) = d$. Ker je

$$\left\|\frac{1}{2}(g_n + g_m)\right\| \le \frac{1}{2}\left(\|g_n\| + \|g_m\|\right) \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} d$$

in je $\frac{1}{2}(g_n + g_m) \in C$ (saj je C konveksna množica), sledi iz definicije števila d, da mora biti

$$\lim_{m,n\to\infty} \left\| \frac{1}{2}(g_n + g_m) \right\| = d.$$

Zato sedaj iz paralelogramske identitete

$$\left\| \frac{1}{2}(g_n - g_m) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{2}(g_n + g_m) \right\|^2 = \frac{1}{2} \left(\|g_n\|^2 + \|g_m\|^2 \right) \tag{4.1.10}$$

sledi, da je $\lim_{m,n\to\infty} \|\frac{1}{2}(g_n - g_m)\|^2 = 0$, saj gresta tako desna stran kot drugi člen na levi v (4.1.10) proti d^2, ko gresta m in n proti ∞. To pomeni, da je zaporedje (g_n) Cauchyevo, torej konvergentno; naj bo

$$g = \lim_{n\to\infty} g_n.$$

Ker je množica C zaprta in $g_n \in C$ za vsak n, je $g \in C$. Očitno je $d(0, g) = \|g\| = \lim_{n\to\infty} \|g_n\| = d = d(0, C)$.

Dokazati moramo le še enoličnost elementa g. Če je $h \in C$ kak nadaljnji element z normo $\|h\| = d$, potem iz $\|\frac{1}{2}(g+h)\| \le d$ in definicije števila d sledi (ker je $\frac{1}{2}(g+h) \in C$), da je $\|\frac{1}{2}(g+h)\| = d$. Od tod in iz paralelogramske identitete

$$\left\| \frac{1}{2}(h - g) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{2}(h + g) \right\|^2 = \frac{1}{2} \left(\|h\|^2 + \|g\|^2 \right) = d^2$$

sledi, da je $h = g$. □

Ortogonalni komplement podmnožice $\mathcal{K}$ v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ je

$$\mathcal{K}^\perp := \{g \in \mathcal{H} : g \perp f \quad \forall f \in \mathcal{K}\}.$$

Lahko se je prepričati, da je $\mathcal{K}^\perp$ vedno zaprt vektorski podprostor Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$, torej Hilbertov podprostor.

Izrek 4.1.6. *Če je $\mathcal{K}$ zaprt vektorski prostor v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$, lahko vsak vektor $f \in \mathcal{H}$ enolično izrazimo kot*

$$f = g + h, \qquad \text{kjer je } g \in \mathcal{K} \text{ in } h \in \mathcal{K}^\perp.$$

To dejstvo bomo simbolično zapisali kot $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp$.

Proof. Pri danem $f \in \mathcal{H}$ izberimo po prejšnjem izreku $g \in \mathcal{K}$ tako, da je

$$\|f - g\| = d(f, \mathcal{K})$$

in označimo $h := f - g$. Pokazali bomo, da je $h \in \mathcal{K}^\perp$, se pravi $\langle h, v\rangle = 0$ za vsak $v \in \mathcal{K}$. Ker je za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ vektor $g + \lambda v$ v $\mathcal{K}$, je $\|h\| \le \|f - (g + \lambda v)\|$, se pravi $\|h\|^2 \le \|h - \lambda v\|^2$, kar lahko napišemo kot

$$2 \operatorname{Re} (\bar{\lambda} \langle h, v\rangle) \le |\lambda|^2 \|v\|^2.$$

Če izrazimo λ v polarni obliki, $\lambda = te^{i\varphi}$ ($t \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$), ter pri tem izberemo argument ϕ tako, da je $e^{-i\varphi}\langle h, v\rangle$ nenegativno število (to je mogoče, ker je $\lambda \in \mathbb{C}$ poljuben), iz zadnje neenakosti sledi, da je

$$2|\langle h, v\rangle| \leq t\|v\|^2$$

za vse $t > 0$. Ko pošljemo v tej neenakosti t proti 0, vidimo, da je $\langle h, v\rangle = 0$. Ker velja to za vsak $v \in \mathcal{K}$, je $h \in \mathcal{K}^\perp$.

Dokazati moramo še enoličnost. Predpostavimo, da je $f = g + h = g_1 + h_1$, kjer je $g, g_1 \in \mathcal{K}$ in $h, h_1 \in \mathcal{K}^\perp$. Potem je

$$g_1 - g = h - h_1.$$

Ker je $g_1 - g \in \mathcal{K}$, $h - h_1 \in \mathcal{K}^\perp$ in ker noben neničelni vektor u ne more biti ortogonalen sam nase (saj je $\langle u, u\rangle = 0$ le, ko je $u = 0$), sledi od tod, da mora biti $g_1 - g = 0 = h - h_1$, torej $g_1 = g$ in $h_1 = h$. □

Posledica 4.1.7. *(i) Za vsak vektorski podprostor $\mathcal{K}$ Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$ je $\mathcal{K}^{\perp\perp} := (\mathcal{K}^\perp)^\perp$ zaprtje $\bar{\mathcal{K}}$ podprostora $\mathcal{K}$.*

(ii) Vektorski podprostor $\mathcal{K}$ je gost v $\mathcal{H}$ (tj. $\bar{\mathcal{K}} = \mathcal{H}$) natanko tedaj, ko je $\mathcal{K}^\perp = 0$.

Proof. (i) Bralec naj se sam prepriča, da je $\bar{\mathcal{K}}$ vektorski podprostor v $\mathcal{H}$, $\bar{\mathcal{K}}^\perp = \mathcal{K}^\perp$ in $\bar{\mathcal{K}} \subseteq \mathcal{K}^{\perp\perp}$. Za dokaz obratne inkluzije pa vzemimo poljuben vektor $f \in \mathcal{K}^{\perp\perp}$ in ga po prejšnjem izreku razstavimo v $f = g + h$, kjer je $g \in \bar{\mathcal{K}}$ in $h \in \bar{\mathcal{K}}^\perp = \mathcal{K}^\perp$. Torej je $f - g = h$. Ker je pri tem $f - g \in \mathcal{K}^{\perp\perp}$ (saj je $\mathcal{K}^{\perp\perp}$ vektorski podprostor in vsebuje $\bar{\mathcal{K}}$), mora biti $f - g$ ortogonalen na h. Ker noben neničelen vektor ni ortogonalen sam nase, sledi, da je $f - g = 0 = h$. Torej je $f = g \in \bar{\mathcal{K}}$.

(ii) Če je $\bar{\mathcal{K}} = \mathcal{H}$, potem noben neničelni vektor ne more biti ortogonalen na $\mathcal{K}$ (ker bi bil sicer ortogonalen tudi na $\bar{\mathcal{K}} = \mathcal{H}$), torej je $\mathcal{K}^\perp = 0$. Velja tudi obratno: če je $\mathcal{K}^\perp = 0$, imamo po (i) $\bar{\mathcal{K}} = \mathcal{K}^{\perp\perp} = 0^\perp = \mathcal{H}$. □

4.1.3. Zvezni linearni funkcionali†

Za vsak vektor $g \in \mathcal{H}$ je s predpisom

$$\rho_g(f) := \langle f, g\rangle \qquad (f \in \mathcal{H})$$

definiran linearen funkcional na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Iz Schwarz-Cauchyeve neenakosti zlahka sledi, da je ta funkcional zvezen. Pokazali bomo, da so vsi zvezni linearni funkcionali na $\mathcal{H}$ take oblike.

Izrek 4.1.8. *(Rieszov izrek) Za vsak zvezen linearen funkcional ρ na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ obstaja natanko en tak vektor $g \in \mathcal{H}$, da je*

$$\rho(f) = \langle f, g\rangle \qquad \text{za vse } f \in \mathcal{H}.$$

Proof. Ker je ρ zvezen, je njegovo jedro

$$\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{H} : \rho(f) = 0\} = \rho^{-1}(\{0\})$$

zaprt vektorski podprostor v $\mathcal{H}$ (saj je $\{0\}$ zaprta množica v $\mathbb{C}$). Predpostaviti smemo, da je $\rho \neq 0$ (sicer je dokaz trivialen, saj lahko vzamemo kar $g = 0$). Potem je $\mathcal{N} \neq \mathcal{H}$, zato po prejšnjem izreku $\mathcal{N}^\perp \neq 0$ in lahko izberemo neničelni vektor $h \in \mathcal{N}^\perp$. Tedaj je vektor $e := \rho(h)^{-1}h$ tudi v $\mathcal{N}^\perp$ in $\rho(e) = 1$. Za vsak $f \in \mathcal{H}$ je zato vektor $f - \rho(f)e$ v $\mathcal{N}$ (saj je $\rho(f - \rho(f)e) = 0$). Torej je vektor $f - \rho(f)e$ ortogonalen na e, se pravi $\langle f - \rho(f)e, e\rangle = 0$ oziroma

$$\rho(f)\langle e, e\rangle = \langle f, e\rangle.$$

Od tod sledi, da za vektor $g := \|e\|^{-2}e$ velja $\rho(f) = \langle f, g\rangle$ za vse $f \in \mathcal{H}$.

Da bi dokazali enoličnost, predpostavimo, da je

$$\langle f, g\rangle = \rho(f) = \langle f, g_1\rangle \qquad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Potem je $\langle g_1 - g, f\rangle = 0$ za vse $f \in \mathcal{H}$, torej tudi za $f = g_1 - g$, zato mora biti $g_1 - g = 0$ in $g_1 = g$. □

4.1.4. Ortonormirane baze

Definicija 4.1.9. Naj bo $(e_k)_{k\in\mathbb{K}}$ ortonormirana množica v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. (Zaradi enostavnosti si lahko bralec zamišlja, da je tukaj množica indeksov $\mathbb{K}$ števna, npr. kar $\mathbb{N}$. To zadošča za vse Hilbertove prostore, ki bodo nastopali v kasnejših razdelkih tega dela.) Vsak vektor $f \in \mathcal{H}$ določa funkcijo $\hat{f} : \mathbb{K} \to \mathbb{C}$, definirano kot

$$\hat{f}(k) = \langle f, e_k\rangle.$$

Števila $\hat{f}(k)$ ($k \in \mathbb{K}$) imenujemo *Fourierovi koeficienti* vektorja f glede na ortonormirano množico $(e_k)_{k\in\mathbb{K}}$.

Preprost dokaz naslednje trditve, v kateri uporabljamo oznake, vpeljane v gornji definiciji, bomo pustili bralcem za vajo.

Trditev 4.1.10. *Naj bo $(e_k)_{k\in\mathbb{K}}$ ortonormirana množica v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Za vsak končen nabor koeficientov, to je za vsako tako funkcijo $\alpha : \mathbb{K} \to \mathbb{C}$, da je $\alpha(k) = 0$ za vse $k \in \mathbb{K}$ zunaj kake končne podmnožice $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$, obstaja natanko en tak element f v linearni ogrinjači $\mathcal{H}_\mathbb{F}$ množice $(e_k)_{k\in\mathbb{F}}$, da je $\hat{f}(k) = \alpha(k)$ za vse $k \in \mathbb{K}$. Ta element je*

$$f = \sum_{k\in\mathbb{F}} \alpha(k)e_k.$$

Za njegovo normo velja

$$\|f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{F}} |\alpha(k)|^2.$$

Trditev 4.1.11. *Naj bo $(e_k)_{k\in\mathbb{K}}$ ortonormirana množica v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$, $\mathbb{F}$ končna podmnožica v $\mathbb{K}$ in za vsak $f \in \mathcal{H}$ naj bo*

$$s_\mathbb{F}(f) = \sum_{k\in\mathbb{F}} \hat{f}(k)e_k,$$

kjer so $\hat{f}(k)$ Fourierovi koeficienti elementa f. Za vsak element s iz linearne ogrinjače $\mathcal{H}_{\mathbb{F}}$ množice $(e_k)_{k\in\mathbb{F}}$, razen za $s = s_{\mathbb{F}}$, velja

$$\|f - s_{\mathbb{F}}(f)\| < \|f - s\|.$$

Velja tudi Besselova neenakost

$$\sum_{k\in\mathbb{F}} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|^2.$$

Proof. Očitno je $\langle f - s_{\mathbb{F}}(f), e_k\rangle = 0$ za vse $k \in \mathbb{F}$, kar pomeni, da je vektor $f - s_{\mathbb{F}}(f)$ ortogonalen na vse vektorje iz linearne ogrinjače $\mathcal{H}_{\mathbb{F}}$ množice $(e_k)_{k\in\mathbb{F}}$, torej tudi na vektor $s_{\mathbb{F}}(f) - s$ za vsak $s \in \mathcal{H}_{\mathbb{F}}$. Zato je

$$\|f - s\|^2 = \|(f - s_{\mathbb{F}}(f)) + (s_{\mathbb{F}}(f) - s)\|^2 = \|f - s_{\mathbb{F}}(f)\|^2 + \|s_{\mathbb{F}}(f) - s\|^2. \quad (4.1.11)$$

Od tod sklepamo, da je $\|f - s_{\mathbb{F}}(f)\| < \|f - s\|$, razen za $s = s_{\mathbb{F}}(f)$. Za $s = 0$ se enakost (4.1.11) glasi $\|f\|^2 = \|f - s_{\mathbb{F}}(f)\|^2 + \|s_{\mathbb{F}}(f)\|^2$, torej je

$$\|s_{\mathbb{F}}(f)\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Ker je $\|s_{\mathbb{F}}(f)\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{F}} |\hat{f}(k)|^2$, smo s tem dokazali tudi Besselovo neenakost. $\square$

Besselova neenakost velja tudi za neskončne podmnožice v $\mathbb{K}$.

Trditev 4.1.12. *Naj bo $(e_k)_{k\in\mathbb{K}}$ ortonormirana množica v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Za vsak $f \in \mathcal{H}$ je množica*

$$\mathbb{K}(f) := \{k \in \mathbb{K} :\ \hat{f}(k) = \langle f, e_k\rangle \neq 0\}$$

števna in velja Besselova neenakost

$$\sum_{k\in\mathbb{K}} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|^2. \quad (4.1.12)$$

Proof. $\mathbb{K}(f)$ je unija množic

$$\mathbb{K}_n(f) := \{k \in \mathbb{K} :\ |\hat{f}(k)| \geq \tfrac{1}{n}\} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Če označimo z $|\mathbb{F}|$ število elementov končne množice $\mathbb{F}$, za vsako končno podmnožico $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}_n(f)$ po prejšnji trditvi velja

$$|\mathbb{F}|\,\frac{1}{n^2} \leq \sum_{k\in\mathbb{F}} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|^2.$$

Od tod sledi, da je $|\mathbb{F}| \leq n^2\|f\|^2$, kar pomeni (ker velja to za vse končne podmnožice $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}_n(f)$), da mora biti množica $\mathbb{K}_n(f)$ končna (ima kvečjemu $n^2\|f\|^2$ elementov). Torej je $\mathbb{K}(f)$ unija števne družine končnih množic, zato je števna. V vsoti na levi v (4.1.12) je tako le števno mnogo členov različnih od 0. Ker je po prejšnji trditvi vsaka delna vsota vrste na levi v (4.1.12) dominirana z $\|f\|^2$, mora veljati isto za vsoto celotne vrste. $\square$

Izrek 4.1.13. *Za ortonormirano množico $(e_k)_{k\in\mathbb{K}}$ v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ so naslednje lastnosti ekvivalentne:*

(i) *$(e_k)_{k\in\mathbb{K}}$ je maksimalna ortonormirana množica (kar pomeni, da ni vsebovana v nobeni drugi ortonormirani množici v $\mathcal{H}$, se pravi, da je le vektor 0 ortogonalen na vse vektorje e_k);*

(ii) *linearna ogrinjača množice $(e_k)_{k\in\mathbb{K}}$ je gosta v $\mathcal{H}$;*

(iii) *$f = \sum_{k\in\mathbb{K}} \hat{f}(k)e_k$ za vsak $f \in \mathcal{H}$;*

(iv) *za vsak $f \in \mathcal{H}$ velja Parsevalova enakost*

$$\sum_{k\in\mathbb{K}} |\hat{f}|^2 = \|f\|^2;$$

(v) *za poljubna $f, g \in \mathcal{H}$ je*

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k\in\mathbb{K}} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}.$$

Proof. (i)$\Leftrightarrow$(ii) Naj bo $\mathcal{K}$ zaprtje linearne ogrinjače množice $(e_k)_{k\in\mathbb{K}}$. Po posledici 4.1.7(ii) je $\mathcal{K} \neq \mathcal{H}$ natanko tedaj, ko je $\mathcal{K}^\perp \neq 0$. To pa je natanko tedaj, ko obstaja enotski vektor $e \in \mathcal{K}^\perp$. Toda to pomeni natanko, da ortonormirana množica $(e_k)_{k\in\mathbb{K}}$ ni maksimalna, saj je vsebovana v ortonormirani množici $(e_k)_{k\in\mathbb{K}} \cup \{e\}$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Vektor

$$g := f - \sum_{k\in\mathbb{K}} \hat{f}(k)e_k = f - \sum_{k\in\mathbb{K}} \langle f, e_k\rangle e_k$$

je ortogonalen na vse vektorje e_k, saj je $\langle f, e_k\rangle = 0$. Iz (ii) sledi, da je tedaj ortogonalen na $\mathcal{H}$, torej $g = 0$ in $f = \sum_{k\in\mathbb{K}} \hat{f}(k)e_k$.

(iii)$\Rightarrow$(ii) Po trditvi 4.1.12 je v vsoti $f = \sum_{k\in\mathbb{K}} \hat{f}(k)e_k$ le števno mnogo členov različnih od 0, zato lahko to vsoto obravnavamo kot vrsto, katere končne delne vsote konvergirajo proti f. Od tod je očitno, da velja (ii).

(iii)$\Rightarrow$(v) Po trditvi 4.1.12 je množica vseh tistih $k \in \mathbb{K}$, za katere je vsaj eden od obeh koeficientov $\hat{f}(k)$ ali $\hat{g}(k)$ različen od 0, števna. Te indekse lahko potem preimenujemo v naravna števila in tako privzamemo, da je kar

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)e_k \qquad \text{in} \qquad g = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{g}(k)e_k.$$

V teh dveh vrstah delne vsote $s_n(f) := \sum_{k=0}^{n} \hat{f}(k)e_k$ in $s_n(g) := \sum_{k=0}^{n} \hat{g}(k)e_k$ konvergirajo proti f in g. Torej je

$$\langle f, g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle s_n(f), s_n(g)\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}.$$

Pri tem smo za prvo enakost molče uporabili Cauchy-Schwarzovo in Besselovo neenakost, po katerih je

$$\begin{aligned}|\langle f,g\rangle - \langle s_n(f), s_n(g)\rangle| &= |\langle f - s_n(f), g\rangle + \langle s_n(f), g - s_n(g)\rangle|\\ &\le \|f - s_n(f)\|\|g\| + \|s_n(f)\|\|g - s_n(g)\|\\ &\le \|f - s_n(f)\|\|g\| + \|f\|\|g - s_n(g)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Ker je točka (iv) le poseben primer točke (v), ko je $g = f$, moramo dokazati le še (iv)⇒(iii). Za ta namen le izračunamo, da je

$$\begin{aligned}\Big\|f - \sum_{k\in\mathbb{K}} \hat{f}(k)e_k\Big\|^2 &= \|f\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\Big(\sum_{k\in\mathbb{K}} \hat{f}(k)\langle e_k, f\rangle\Big) + \Big\|\sum_{k\in\mathbb{K}} \hat{f}(k)e_k\Big\|^2\\ &= \|f\|^2 - 2\sum_{k\in\mathbb{K}} |\hat{f}(k)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{K}} |\hat{f}(k)|^2\\ &= \|f\|^2 - \sum_{k\in\mathbb{K}} |\hat{f}(k)|^2\\ &= 0,\end{aligned}$$

kjer smo za zadnjo enakost uporabili (iv). (Če želi, lahko bralec posamezne korake zadnjega računa upraviči tako, da neskončne vsote aproksimira s končnimi delnimi vsotami.) □

Definicija 4.1.14. Ortonormirano množico $(e_k)_{k\in\mathbb{K}}$, ki zadošča pogojem v izreku 4.1.13, imenujemo *ortonormirana baza* Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$ ali tudi *poln ortonormiran sistem* v $\mathcal{H}$.

Izrek 4.1.15. *V vsakem Hilbertovem prostoru $\mathcal{H} \neq 0$ obstaja kaka ortonormirana baza.*

Proof. S pomočjo Zornove leme [17], ki pravi, da v delno urejeni množici obstaja maksimalni element, če ima v njej vsaka linearno urejena podmnožica zgornjo mejo, bomo dokazali, da v $\mathcal{H}$ obstaja maksimalna ortonormirana množica. Naj bo $\mathcal{O}$ družina vseh ortonormiranih množic v $\mathcal{H}$, urejena z inkluzijo. Za vsako verigo $\mathcal{V}$ v $\mathcal{O}$ (tj. za vsako linearno urejeno podmnožico v $\mathcal{O}$) je unija vseh ortonormiranih množic iz $\mathcal{V}$ očitno ortonormirana množica. Torej ima vsaka veriga $\mathcal{V}$ zgornjo mejo v $\mathcal{O}$, zato po Zornovi lemi v $\mathcal{O}$ obstaja maksimalen element, se pravi maksimalna ortonormirana množica v $\mathcal{H}$. □

V eni od nalog bomo orisali dokaz dejstva, da imajo vse ortonormirane baze Hilbertovega prostora enako moč.

Definicija 4.1.16. Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ je *separabilen*, če ima kako števno ortonormirano bazo.

Zgled 4.1.17. Za dano množico $\mathbb{K}$ si oglejmo naslednjo podmnožico v prostoru vseh funkcij iz $\mathbb{K}$ v $\mathbb{C}$:

$$\ell^2_{\mathbb{K}} = \Big\{ f : \mathbb{K} \to \mathbb{C} : \sum_{k\in\mathbb{K}} |f(k)|^2 < \infty \Big\}.$$

Pri tem naj vsota $\sum_{k\in\mathbb{K}} |f(k)|^2$ pomeni supremum vsot $\sum_{k\in\mathbb{F}} |f(k)|^2$, ko $\mathbb{F}$ teče po vseh končnih podmnožicah v $\mathbb{K}$. Lahko se je prepričati, da je $\ell^2_{\mathbb{K}}$ vektorski prostor in da predpis

$$\langle f, g\rangle := \sum_{k\in\mathbb{K}} f(k)\overline{g(k)}$$

določa skalarni produkt na njem. (Kot v dokazu trditve 4.1.12 je le števno mnogo členov v tej vsoti različnih od 0, njena konvergenca pa sledi s pomočjo Cauchy-Schwarzove neenakosti.) Da bi pokazali, da je $\ell^2_{\mathbb{K}}$ poln (se pravi Hilbertov) prostor, naj bo (f_n) poljubno Cauchyevo zaporedje v njem. Potem je $(f_n(k))$ Cauchyevo zaporedje kompleksnih števil za vsak $k \in \mathbb{K}$, saj za poljubna $m, n \in \mathbb{N}$ velja

$$|f_n(k) - f_m(k)| \le \|f_n - f_m\|.$$

Naj bo

$$f(k) = \lim_{n\to\infty} f_n(k).$$

Pokazati želimo, da je $\sum_{k\in\mathbb{K}} |f(k)|^2 < \infty$ in zato $f := (f(k)) \in \ell^2_{\mathbb{K}}$. Ker je zaporedje (f_n) Cauchyevo, je omejeno, kar pomeni, da za vse n velja $\|f_n\| \le C$ za kako konstanto C. (To se dokaže na enak način kot omejenost Cauchyevih zaporedij realnih števil.) Za vsako končno podmnožico $\mathbb{F}$ v $\mathbb{K}$ je

$$\sum_{k\in\mathbb{F}} |f(k)|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{F}} |f_n(k)|^2 \le \|f_n\|^2 \le C^2.$$

Ker to velja za vse končne podmnožice $\mathbb{F}$ v $\mathbb{K}$, je tudi $\sum_{k\in\mathbb{K}} |f(k)|^2 \le C^2$. Torej je res $f \in \ell^2_{\mathbb{K}}$. Sedaj želimo pokazati še, da je f limita zaporedja (f_n), se pravi, da je

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{K}} |f(k) - f_n(k)|^2 = 0. \tag{4.1.13}$$

Ker je zaporedje (f_n) Cauchyevo, pri poljubnem $\varepsilon > 0$ za vse dovolj velike m in n (recimo za $n, m \ge m(\varepsilon)$) velja

$$\sum_{k\in\mathbb{K}} |f_n(k) - f_m(k)|^2 = \|f_n - f_m\|^2 < \varepsilon^2,$$

torej je tudi

$$\sum_{k\in\mathbb{F}} |f_n(k) - f_m(k)|^2 < \varepsilon^2$$

za vsako končno podmnožico $\mathbb{F}$ v $\mathbb{K}$. Ko v tej neenakosti pošljemo n proti ∞, dobimo, da je

$$\sum_{k\in\mathbb{F}} |f(k) - f_m(k)|^2 < \varepsilon^2.$$

Ko vzamemo supremum po vseh končnih podmnožicah $\mathbb{F}$ v $\mathbb{K}$, dobimo od tod

$$\sum_{k\in\mathbb{K}} |f(k) - f_m(k)|^2 \le \varepsilon^2$$

za vse $m \ge m(\varepsilon)$, kar pomeni, da je $\|f - f_m\| \le \varepsilon$ in zato res $f = \lim_{m\to\infty} f_m$.

Za vsak $k \in \mathbb{K}$ naj bo δ_k karakteristična funkcija singletona $\{k\}$ (torej $\delta_k(k) = 1$ in $\delta_k(j) = 0$ za $j \ne k$, $j \in \mathbb{K}$). Lahko je videti, da je množica vseh teh funkcij, torej $(\delta_k)_{k\in\mathbb{K}}$, ortonormirana baza Hilbertovega prostora $\ell^2_{\mathbb{K}}$. Ta baza je števna (in s tem prostor $\ell^2_{\mathbb{K}}$ separabilen) natanko tedaj, ko je $\mathbb{K}$ števna množica.

V primeru $\mathbb{K} = \mathbb{N}$ označimo prostor $\ell^2_{\mathbb{K}}$ kar z ℓ^2.

Zgled 4.1.18. Funkcije $f_n(x) := e^{inx}$ $(n \in \mathbb{Z})$ so ortogonalne v prostoru $L^2(0, 2\pi)$, saj za $n \ne m$ velja

$$\langle f_n, f_m\rangle = \int_0^{2\pi} f_n(x)\bar{f}_m(x)\,dx = \int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}\,dx = 0.$$

Poleg tega je

$$\|f_n\|^2 = \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2\,dx = 2\pi,$$

zato tvorijo funkcije $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$ ortonormiran sistem. Kasneje bomo pokazali, da je ta sistem poln, torej ortonormirana baza za $L^2(0, 2\pi)$.

Tudi množica funkcij $T := \{1, \cos nx, \sin nx \,:\, n = 1, 2, \ldots\}$ je ortogonalna v prostoru $L^2(0, 2\pi)$ (preverite to!). Ker je po Eulerjevi formuli $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$, vsebuje linearna ogrinjača množice T vse funkcije oblike $f_n(x) = e^{inx}$. Ker le-te razpenjajo gost podprostor v $L^2(0, 2\pi)$ (kot bomo pokazali kasneje), mora isto veljati tudi za množico T. Lahek račun pove, da so norme funkcij $\cos nx$ in $\sin nx$ enake $\sqrt{\pi}$, norma konstantne funkcije 1 pa $\sqrt{2\pi}$, torej je množica funkcij $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \,:\, n = 1, 2, \ldots\}$ poln ortonormiran sistem. Imenujemo ga *trigonometrijski sistem*; pravzaprav že množici T rečemo trigonometrijski sistem, čeprav ni ortonormirana, le ortogonalna.

Naloge

1. Naj bo (f_n) tako zaporedje vektorjev v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$, da za vsak $f \in \mathcal{H}$ velja

$$c\|f\|^2 \le \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, f_n\rangle|^2,$$

kjer je $c > 0$ konstanta. Pokažite, da je tedaj linearna ogrinjača množice (f_n) gosta v $\mathcal{H}$. (Namig: uporabite posledico 4.1.7(ii).)

2. Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija in $f(b) = f(a)$. Pokažite, da sta tedaj funkciji f in f' med seboj ortogonalni v prostoru $L^2(a, b)$.

3. (i) Naj zaporedje funkcij $f_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ iz prostora $L^2(a, b)$ konvergira enakomerno proti funkciji $f \in L^2(a, b)$. Pokažite, da tedaj konvergira tudi v normi prostora $L^2(a, b)$. Tukaj sta a in b realni števili, torej je interval končen.

(ii) Poiščite kako zaporedje funkcij v $L^2(a, b)$, ki konvergira proti 0 v normi prostora $L^2(a, b)$, a ne konvergira enakomerno.

(iii) Zaporedje $(\frac{1}{\sqrt{n}}\chi_n)$, kjer je χ_n karakteristična funkcija intervala $[0, n]$, konvergira proti 0 enakomerno, a ne v normi prostora $L^2(0, \infty)$.

† **4.** Zaporedje (f_n) v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ *šibko konvergira* proti f, če za vsak $g \in \mathcal{H}$ velja

$$\langle f, g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, g\rangle.$$

(i) Pokažite, da je vsako po normi konvergentno zaporedje tudi šibko konvergentno.

(ii) Pokažite, da vsako ortonormirano zaporedje šibko konvergira proti 0 (namig: Besselova neenakost), a ne konvergira po normi.

(iii) Če zaporedje (f_n) v Hilbertovem prostoru šibko konvergira proti f in velja tudi $\|f\| = \lim \|f_n\|$, potem pokažite, da zaporedje (f_n) konvergira proti f po normi. (Namig: razvijte $\|f - f_n\|^2$.)

† **5.** Pokažite, da je zaprta enotska krogla $B := \{f \in \mathcal{H} : \|f\| \le 1\}$ v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ kompaktna množica (tj., da ima vsako zaporedje iz B stekališče v B) natanko tedaj, ko je $\mathcal{H}$ končno razsežen prostor.

6. Kateri linearni polinom v prostoru $L^2(0, 1)$ je najbližji funkciji e^x?

† **7.** Linearno preslikavo $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ med Hilbertovima prostoroma imenujemo izometrija, če ohranja skalarni produkt, tj. $\langle Af, Ag\rangle = \langle f, g\rangle$ za poljubna $f, g \in \mathcal{H}$. Če obstaja kaka bijektivna izometrija $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, imenujemo Hilbertova prostora $\mathcal{H}$ in $\mathcal{K}$ izometrično izomorfna. Dokažite, da sta Hilbertova prostora izometrično izomorfna natanko tedaj, ko imata katerikoli njuni ortonormirani bazi enako moč. Sklepajte, da je vsak Hilbertov prostor izometrično izomorfen prostoru oblike $\ell^2_{\mathbb{K}}$ za kako množico $\mathbb{K}$.

8. Dokažite, da je Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ separabilen natanko tedaj, ko je separabilen kot metrični prostor (torej, ko obstaja v njem kaka števna gosta podmnožica). (Navodilo: Če je S števna gosta množica, uporabite na S Gram-Schmidtov ortogonalizacijski postopek, znan iz linearne algebre, in pokažite, da je tako dobljena ortonormirana množica maksimalna. Za dokaz v obratno smer pa iz števne ortonormirane baze $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sestavite števno množico, katere elementi so vse končne linearne kombinacije vektorjev e_n s koeficienti oblike $a + bi$, $a, b \in \mathbb{Q}$.)

† 9. Pokažite, da je vsaka točka f z normo $\|f\| = 1$ *ekstremna točka* enotske krogle $B := \{g \in \mathcal{H} : \|g\| \leq 1\}$ Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$. Pri tem imenujemo točko $f \in B$ ekstremna, če ni v notranjosti nobene daljice s krajišči v B, tj.: za vsaka $g, h \in B$ in $t \in (0,1)$ iz $f = tg + (1-t)h$ sledi, da je $g = h = f$.

10. Naj bo $(e_k)_{k\in\mathbb{K}}$ ortonormirana množica, f pa tak vektor v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$, da je

$$\|f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{K}} |\langle f, e_k\rangle|^2.$$

Dokažite, da je tedaj $f = \sum_{k\in\mathbb{K}}\langle f, e_k\rangle e_k$. (Navodilo: razvijte izraz

$$\left\| f - \sum_{k\in\mathbb{K}}\langle f, e_k\rangle e_k \right\|^2 .)$$

*** 11.** Naj bo $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pa taka ortonormirana množica v $\mathcal{H}$, da je $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k - e_k\|^2 < \infty$. Dokažite, da je tedaj tudi $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza za $\mathcal{H}$. (Rešitev: Najprej opazimo, da je dovolj dokazati, da so vsi vektorji $e_k - f_k$ v zaprtju linearne ogrinjače množice $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, ker potem isto velja tudi za vse vektorje e_k. Po prejšnji nalogi torej zadošča dokazati, da je $\|e_k - f_k\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\langle e_k - f_k, f_j\rangle|^2$ za vsak k. Za ta namen zadošča dokazati, zaradi Besselove neenakosti $\sum_{j=0}^{\infty} |\langle e_k - f_k, f_j\rangle|^2 \leq \|e_k - f_k\|^2$, da je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|e_k - f_k\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} |\langle e_k - f_k, f_j\rangle|^2. \tag{4.1.14}$$

Sedaj opazimo, da je $\langle e_k - f_k, f_j\rangle = \langle e_k, f_j - e_j\rangle$, zaradi česar lahko desno stran v (4.1.14) preoblikujemo v $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |\langle e_k, f_j - e_j\rangle|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|f_j - e_j\|^2$, kjer smo v zadnji enakosti upoštevali Parsevalovo enakost (torej, da je $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza).)

12. Naj bo $D = D(0,1)$ enotski krog. Prostor $L^2(D)$ je definiran kot napolnitev prostora zveznih funkcij $C(\bar{D}, \mathbb{C})$ v normi

$$\|f\| = \sqrt{\iint_D |f(z)|^2\, dp(z)}.$$

(i) Pokažite, da tvorijo funkcije $f_n(z) = z^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ortogonalno množico v $L^2(D)$. (Namig: izrazite skalarni produkt dveh funkcij v polarnih koordinatah.) Izračunajte tudi $\|f_n\|$. (Rezultat: $\|f_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}$.)

(ii) Ali razpenjajo funkcije f_n iz točke (i) gost podprostor v $L^2(D)$? (Odgovor je »ne«. Pokažite, da je vsaka funkcija oblike $g_m(z) = \bar{z}^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ ortogonalna na vse funkcije f_n.)

***13.** *Bergmanov prostor* $A^2(D)$ nad enotskim krogom $D = D(0,1)$ vsebuje natanko vse tiste holomorfne funkcije $f : D \to \mathbb{C}$, za katere je

$$\|f\|^2 := \iint_D |f(z)|^2\, dp(z) < \infty.$$

(i) Za funkcijo $f \in A^2(D)$ s Taylorjevim razvojem $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pokažite, da je

$$\|f\|^2 = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}. \tag{4.1.15}$$

Sklepajte od tod, da je $|f(0)| \leq \frac{\|f\|}{\sqrt{\pi}}$ za vsak $f \in A^2(D)$ in da je zato preslikava $f \mapsto f(0)$ zvezen linearen funkcional na prostoru $A^2(D)$.

(ii) Dokažite, da je za vsak $z \in D$ evaluacija $f \mapsto f(z)$ zvezen linearen funkcional na prostoru $A^2(D)$ in da za vsako kompaktno podmnožico K v D obstaja taka konstanta C_K, da je $|f(z)| \leq C_K \|f\|$ za vse $f \in A^2(D)$ in vse $z \in K$. (Navodilo: Ena možnost je, da razvijete funkcijo $f \in A^2(D)$ v Taylorjevo vrsto okrog točke z na krogu $D(z,\rho)$ za kak $\rho \leq 1 - |z|$, upoštevate, da je $\|f\|^2 = \iint_D |f(z)|^2\, dp(z) \geq \iint_{D(z,\rho)} |f(z)|^2\, dp(z)$ in izrazite zadnji integral s koeficienti Taylorjevega razvoja okrog z. Obstaja pa tudi alternativna rešitev: enakost $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ zapišemo kot $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n+1}} (\sqrt{n+1} z^n)$ in uporabimo Cauchy-Schwarzovo neenakost, da dobimo

$$|f(z)| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}} \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|z^n|^2} = \frac{\|f\|}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{1-|z|^2}.$$

Pri tem smo v zadnji enakosti uporabili (4.1.15) in zadnjo vrsto sešteli z upoštevanjem identitete

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} \right)' = \left(\frac{t}{1-t} \right)' = \frac{1}{(1-t)^2} \qquad (|t| < 1).) \tag{4.1.16}$$

(iii) Dokažite, da je $A^2(D)$ Hilbertov prostor. (Navodilo: Če je (f_n) Cauchyevo zaporedje v $A^2(D)$, sledi iz točke (ii), da je zaporedje (f_n) tudi enakomerno Cauchyevo na kompaktnih podmnožicah v D, torej konvergira proti neki holomorfni funkciji f na D, in sicer enakomerno na vsakem krogu $\bar{D}(0,r)$ $(r < 1)$. Sklepajte iz dejstva, da je zaporedje (f_n) Cauchyevo v $A^2(D)$, z uporabo zveze

$$\iint_D |g(z)|^2\, dp(z) = \lim_{r \to 1} \iint_{D(0,r)} |g(z)|^2\, dp(z),$$

da mora konvergirati proti f tudi v normi prostora $A^2(D)$.)

(iv) Dokažite, da tvorijo funkcije $e_n(z) := \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ortonormirano bazo prostora $A^2(D)$. (Navodilo: Če je funkcija $f \in A^2(D)$ ortogonalna na vse

e_n, pokažite, da morajo biti vsi koeficienti v Taylorjevem razvoju funkcije f okrog točke 0 enaki 0, torej $f \equiv 0$.)

(v) Po Rieszovem izreku in točkah (ii) in (iii) obstaja za vsak $z \in D$ taka funkcija $g_z \in A^2(D)$, da je $f(z) = \langle f, g_z \rangle$ za vse $f \in A^2(D)$. Določite to funkcijo g_z. (Navodilo: Določite konstante $c_n(z)$ v Taylorjevem razvoju funkcije $g_z(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z) w^n$ $(w \in D)$ tako, da bo enakost $f(z) = \langle f, g_z \rangle$ veljala za vse funkcije oblike $f(w) = w^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Preprost račun pokaže, da mora biti $c_n(z) = \frac{n+1}{\pi} \bar{z}^n$. Torej je $g_z(w) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \bar{z}^n w^n = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1-\bar{z}w)^2}$, kjer smo uporabili (4.1.16).)

14. Dokažite, da je za vsako zaporedje kompleksnih števil α_n, ki zadoščajo pogoju $\sup_n |\alpha_n| < 1$, linearna ogrinjača zaporedja vektorjev $f_n := (1, \alpha_n, \alpha_n^2, \alpha_n^3, \ldots)$ gosta v prostoru ℓ^2. (Navodilo: Predpostavimo, da je vektor $g = (g_0, g_1, g_2, \ldots)$ ortogonalen na vse f_n. Opazite, da je funkija $\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{g}_k z^k$ holomorfna na enotskem krogu $D(0,1)$ in $\psi(\alpha_n) = 0$.)

***15.** Naj bo $\mathcal{V}$ (neskončno razsežen) kompleksen vektorski prostor, opremljen s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(i) Dokažite, da je za poljubni Cauchyevi zaporedji (f_n) in (g_n) v $\mathcal{V}$ zaporedje kompleksnih števil $\langle f_n, g_n \rangle$ Cauchyevo, torej konvergentno.

(ii) Naj bo $\tilde{\mathcal{V}}$ vektorski podprostor v prostoru vseh zaporedij s členi iz $\mathcal{V}$, sestoječ iz vseh Cauchyevih zaporedij. Po (i) lahko vpeljemo v $\tilde{\mathcal{V}}$ preslikavo

$$[\cdot, \cdot] : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}, \qquad [(f_n), (g_n)] := \lim_{n \to \infty} \langle f_n, g_n \rangle.$$

Pokažite, da ima ta preslikava vse lastnosti skalarnega produkta, razen definitnosti, tj.

$$[(f_n), (f_n)] = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n \to \infty} \|f_n\| = 0. \tag{4.1.17}$$

Naj bo torej $\mathcal{N}$ množica vseh tistih zaporedij iz $\tilde{\mathcal{V}}$, za katera velja zadnja enakost v (4.1.17). Dokažite, da je $\mathcal{N}$ vektorski podprostor in da je

$$[x, y] = 0 \qquad (x \in \mathcal{N},\ y \in \tilde{\mathcal{V}}). \tag{4.1.18}$$

(iii) Pokažite, da lahko v kvocientni prostor $\mathcal{H} := \tilde{\mathcal{V}}/\mathcal{N}$ vpeljemo skalarni produkt

$$\langle [x], [y] \rangle := [x, y],$$

kjer označuje $[x]$ odsek v $\mathcal{H}$, v katerem je zaporedje $x \in \tilde{\mathcal{V}}$. Da je ta definicija nedvoumna, sledi iz (4.1.18).

(iv) Dokažite, da je prostor $\mathcal{H}$ s skalarnim produktom, definiran v (iii), poln, torej Hilbertov. (Namig: Za dano Cauchyevo zaporedje v $\mathcal{H}$ s členi $[x_n]$, kjer je $x_n = (f_{n.0}, f_{n,1}, f_{n,2}, \ldots)$ $(f_{n,m} \in \mathcal{V})$ obravnavajte razred diagonalnega zaporedja, to je $[(f_{0,0}, \ldots, f_{n,n}, \ldots)]$, kot možno limito.)

(v) Dokažite, da je preslikava

$$\iota : \mathcal{V} \to \mathcal{H}, \qquad \iota(f) = [(f, f, f, \ldots)]$$

izometrija in da je $\iota(\mathcal{V})$ gost podprostor v $\mathcal{H}$. Tako konstruiran Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ imenujemo *napolnitev prostora* $\mathcal{V}$.

* **16.** Dokažite, da imajo vse ortonormirane baze v (neskončno razsežnem) Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$ enako moč. (Navodilo: Bodita $(e_k)_{k\in\mathbb{K}}$ in $(f_j)_{j\in\mathbb{J}}$ ortonormirani bazi za $\mathcal{H}$. Vsak f_j lahko izrazimo kot $f_j = \sum_{k\in\mathbb{K}} \langle f_j, e_k\rangle e_k$, kjer je le števno mnogo koeficientov $\langle f_j, e_k\rangle$ različnih od 0; naj bo $\mathbb{K}_j$ množica vseh tistih $k \in \mathbb{K}$, za katere je $\langle f_j, e_k\rangle \neq 0$. Vsi vektorji f_j se potem dajo izraziti z vektorji e_k za $k \in S := \cup_{j\in\mathbb{J}}\mathbb{K}_j$ (se pravi, da so v zaprtju linearne ogrinjače množice $(e_k)_{k\in S}$). Premislite, da mora biti zato $S = \mathbb{K}$ in posledično $|\mathbb{K}| \leq \aleph_0|\mathbb{J}| = |\mathbb{J}|$, kjer smo z $|\cdot|$ označili moč množice in $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$. Sedaj zamenjajte vlogi množic $\mathbb{K}$ in $\mathbb{J}$ in uporabite Schröder-Bernsteinov izrek [17].)

4.2. Fourierove vrste

4.2.1. Periodične funkcije

Definicija 4.2.1. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je *periodična s periodo* $\omega > 0$, če je $f(x+\omega) = f(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

V tem razdelku bomo najprej obravnavali vprašanje, ali lahko dano funkcijo f s periodo 2π izrazimo kot *Fourierovo vrsto*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{4.2.1}$$

kjer vrsta v tej formuli konvergira po točkah proti f, kar pomeni, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ konvergira proti $f(x)$. Kaj so tukaj koeficienti a_n in b_n? Zaradi medsebojne ortogonalnosti funkcij 1, $\cos nx$, $\sin mx$ v prostoru $L^2(0, 2\pi)$ so ti *Fourierovi koeficienti* a_n in b_n funkcije f določeni z

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx, \tag{4.2.2}$$

kjer je $n > 1$. Te formule namreč dobimo, če (4.2.1) pomnožimo s kako od funkcij 1, $\cos nx$, $\sin nx$ in nato integriramo od 0 do 2π; na desni ostane tako le en člen, namreč πa_n, πb_n ali $2\pi a_0$. (Tukaj smo za hip pustili ob strani vprašanje, ali smemo vrsto integrirati členoma.) Naslednja trditev pove, da integracijski meji nista pomembni vsaka zase, pomembno je le, da je dolžina intervala, po katerem integriramo, enaka 2π.

Trditev 4.2.2. *Če je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrabilna periodična funkcija s periodo ω, je*

$$\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx = \int_0^{\omega} f(x)\,dx$$

za vsak $a \in \mathbb{R}$.

Proof. Zapišemo lahko

$$\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx = \int_a^{\omega} f(x)\,dx + \int_{\omega}^{a+\omega} f(x)\,dx.$$

Če v zadnji integral vpeljemo novo spremenljivko $t = x - \omega$ in upoštevamo periodičnost, izpeljemo, da je

$$\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx = \int_a^{\omega} f(x)\,dx + \int_0^{a} f(t)\,dt = \int_0^{\omega} f(x)\,dx. \qquad \square$$

Obravnavo funkcij s splošno periodo ω zlahka prevedemo na obravnavo funkcij s periodo 2π. Za vsako funkcijo f s periodo ω ima namreč funkcija

$$g(x) := f\Big(\frac{\omega}{2\pi}\,x\Big)$$

periodo 2π, saj je

$$g(x+2\pi) = f\Big(\frac{\omega}{2\pi}\,(x+2\pi)\Big) = f\Big(\frac{\omega}{2\pi}\,x + \omega\Big) = f\Big(\frac{\omega}{2\pi}\,x\Big) = g(x).$$

Če za g velja

$$g(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

potem mora za f veljati

$$f(x) = g\Big(\frac{2\pi}{\omega}\,x\Big) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \cos n\frac{2\pi}{\omega}x + b_n \sin n\frac{2\pi}{\omega}x\right).$$

Formule (4.2.2) za Fourierove koeficiente a_n lahko z vpeljavo nove integracijske spremenljivke $t = \frac{\omega}{2\pi}x$ preoblikujemo v

$$a_n = \int_0^{2\pi} g(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\omega}\int_0^{\omega} f(t)\cos n\frac{2\pi}{\omega}\,dt.$$

Podobno velja tudi za b_n. Z upoštevanjem trditve 4.2.2 lahko te formule zapišemo v obliki

$$a_0 = \frac{1}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} f(x)\cos n\frac{2\pi}{\omega}x\,dx, \quad b_n = \frac{2}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} f(x)\sin n\frac{2\pi}{\omega}x\,dx. \tag{4.2.3}$$

Iz te oblike je takoj razvidno, da so za sodo funkcijo f vsi koeficienti b_n enaki 0 (ker je produkt $f(x)\sin n\frac{2\pi}{\omega}x$ liha funkcija), koeficiente a_n pa lahko tedaj zapišemo kot

$$a_0 = \frac{2}{\omega}\int_0^{\frac{\omega}{2}} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{4}{\omega}\int_0^{\frac{\omega}{2}} f(x)\cos n\frac{2\pi}{\omega}x\,dx \qquad (n > 1) \quad (f \text{ soda}).$$

Podobna poenostavitev nastopi pri lihih funkcijah.

Zgled 4.2.3. Naj ima f periodo 2π in naj bo na intervalu $[-\pi, \pi)$ definirana s

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, 0); \\ 1, & x \in [0, \pi). \end{cases}$$

Izračunajmo Fourierovo vrsto te funkcije. Ker je f v bistvu liha ($f(-\pi)$ se sicer ne ujema z $f(\pi)$, toda vrednost v končno mnogo točkah ne vpliva na integrale), je $a_n = 0$ za vse $n \geq 0$ in

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nx \, dx = -\frac{2}{\pi} \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^\pi = \frac{2}{n\pi} \left[1 - (-1)^n\right].$$

Fourierova vrsta funkcije f se torej glasi

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{2}{n\pi} \left[1 - (-1)^n\right] \sin nx = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}. \tag{4.2.4}$$

4.2.2. Konvergenca po točkah in enakomerna konvergenca

Funkciji, ki se razlikujeta le v končno mnogo točkah, imata enaki Fourierovi vrsti, saj sprememba vrednosti funkcije le v končno mnogo točkah ne more vplivati na vrednosti integralov, ki nastopajo v izračunu koeficientov. Isto se da dokazati tudi za poljubni funkciji, ki se razlikujeta le na množici z mero 0. (Podmnožica A v $\mathbb{R}$ ima mero 0, če jo je mogoče za vsak $\varepsilon > 0$ pokriti s kakim zaporedjem intervalov, katerih vsota dolžin je pod ε.) Nekoliko presenetljivo pa je, da niti za vsako zvezno funkcijo f njena Fourierova vrsta ne konvergira vedno proti f, pač pa to velja za odvedljive funkcije.

S teoretičnega vidika je, namesto razvoja po trigonometrijskih funkcijah $\cos kx$ in $\sin kx$, ugodneje obravnavati razvoj po funkcijah e^{ikx} ($k \in \mathbb{Z}$). Ker je norma teh funkcij na intervalu $(-\pi, \pi)$ enaka $\sqrt{2\pi}$ in zaradi ortogonalnosti, se v razvoju

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \tag{4.2.5}$$

koeficienti c_k izražajo kot

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) e^{-ikt} \, dt \qquad (k \in \mathbb{Z}). \tag{4.2.6}$$

Ko vstavimo te izraze v delno vsoto

$$s_n(x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

vrste v (4.2.5), dobimo

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^\pi f(t) e^{ik(x-t)} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} \, dt. \tag{4.2.7}$$

Definicija 4.2.4. Funkcijo

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \tag{4.2.8}$$

imenujemo *Dirichletovo jedro*.

Če je funkcija f periodična s periodo 2π, lahko sedaj formulo (4.2.7) napišemo kot

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt, \tag{4.2.9}$$

kjer zadnja enakost sledi iz periodičnosti funkcije v integralu (z vpeljavo nove integracijske spremenljivke $t \to x-t$).

Lema 4.2.5. (i) $D_n(x) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$.

(ii) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 1$.

Proof. Točka (i) sledi iz definicije (4.2.8), ko seštejemo geometrijsko zaporedje. Drugače rečeno, ko pomnožimo (4.2.8) z $e^{ix}-1$, dobimo po krajšem računu, da je

$$D_n(x)(e^{ix}-1) = e^{i(n+1)x} - e^{-inx}.$$

Torej je

$$D_n(x) = \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix}-1} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}},$$

kjer je druga enakost sledila tako, da smo števec in imenovalec prvega ulomka pomnožili z $e^{-i\frac{x}{2}}$.

Točka (ii) sledi z integriranjem vsote v (4.2.8), saj je integral $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\,dx$ enak 0, če je $k \neq 0$, za $k=0$ pa enak 2π. □

Naslednja lema pove, da za velike n na vrednost delne vsote $s_n(x)$ Fourierove vrste zvezne funkcijo f znatno vplivajo le vrednosti funkcije f v bližini točke x.

Lema 4.2.6. *(Riemannova lokalizacijska lema) Za vsako zvezno funkcijo f s periodo 2π in za vsak $\delta \in (0,\pi)$ velja*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right) f(x-t)D_n(t)\,dt = 0.$$

Proof. Pri fiksnem x definirajmo funkcijo

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x-t)}{\sin\frac{t}{2}}, & \delta \le |t| \le \pi; \\ 0, & |t| < \delta. \end{cases}$$

Potem lahko zapišemo

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right) f(x-t)D_n(t)\,dt &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos\frac{t}{2}\sin nt\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\frac{t}{2}\cos nt\,dt.\end{aligned}$$

Ker sta funkciji $g(t)\cos\frac{t}{2}$ in $g(t)\sin\frac{t}{2}$ v prostoru $L^2(-\pi,\pi)$, sledi iz Besselove neenakosti (uporabljeni za trigonometrijski ortonormiran sistem), da konvergirata zadnja dva integrala proti 0, ko gre n proti ∞. □

DEFINICIJA 4.2.7. Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ zadošča *Lipschitzovemu pogoju v točki* x, če obstajata taki pozitivni konstanti M in δ, da je

$$|f(y)-f(x)|<M|y-x|,\qquad \text{kadar je } |y-x|<\delta. \tag{4.2.10}$$

Vsaka odvedljiva funkcija očitno zadošča Lipschitzovemu pogoju.

IZREK 4.2.8. *Če periodična funkcija f zadošča Lipschitzovemu pogoju v točki x, potem njena Fourierova vrsta v točki x konvergira proti $f(x)$, se pravi*

$$\lim_{n\to\infty}|f(x)-s_n(x)|=0.$$

PROOF. Kot že vemo, smemo privzeti, da je perioda enaka 2π. Po (4.2.9) in lemi 4.2.5 lahko zapišemo

$$\begin{aligned}|s_n(x)-f(x)|&=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))D_n(t)\,dt\right|\leq\\ &\leq\frac{1}{2\pi}\left|\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)(f(x-t)-f(x))D_n(t)\,dt\right|+\\ &\qquad+\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x-t)-f(x)||D_n(t)|\,dt.\end{aligned}$$

Zaradi Lipschitzovega pogoja (4.2.10) lahko za vsak dovolj majhen δ zadnji integral ocenimo takole:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x-t)-f(x)||D_n(t)|\,dt\leq\frac{M}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{|t|}{|\sin\frac{t}{2}|}\,dt\leq\frac{2M}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}dt=\frac{4M\delta}{\pi},$$

kjer smo upoštevali, da je $|t|\leq 4|\sin\frac{t}{2}|$ za vse dovolj majhne t. Ta člen bo torej tako majhen, kot želimo, če le izberemo δ dovolj majhen. Ker je po lemi 4.2.6 tudi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)(f(x-t)-f(x))D_n(t)\,dt=0,$$

je izrek dokazan. □

IZREK 4.2.9. *Za vsako odsekoma zvezno odvedljivo periodično funkcijo f konvergira njena Fourierova vrsta v točki x proti $\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$, kjer je $f(x^+)$ desna, $f(x^-)$ pa leva limita funkcije f v točki x. Če je torej funkcija f v točki x zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, potem njena Fourierova vrsta v tej točki konvergira proti $f(x)$. Za zvezno in odsekoma zvezno odvedljivo funkcijo f konvergira njena Fourierova vrsta proti f enakomerno in vrsta je absolutno konvergentna.*

Proof. Privzeli bomo, da je perioda 2π, saj že vemo, kako ravnati potem s splošno periodo. Prvi del tega izreka sledi iz dokaza prejšnjega izreka, le nekoliko ga moramo spremeniti. Tokrat moramo pokazati, da je $\lim_{n\to\infty} |s_n(x) - \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))| = 0$. Z metodo v dokazu prejšnjega izreka se to reducira na ocenjevanje integrala

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left|f(x-t) - \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))\right| |D_n(t)|\,dt.$$

Ker je f odsekoma zvezno odvedljiva, obstaja interval $[x-\delta, x+\delta]$ ($\delta > 0$), na katerem ima f zvezen odvod, razen morda v točki x. Na tem intervalu f zadošča Lipschitzovemu pogoju s konstanto $M = \sup_{t\in[x-\delta,x+\delta],t\neq x} |f'(t)|$ (ta supremum je po predpostavki končen, ker definicija odsekoma zvezne odvedljivosti vključuje predpostavko, da ima odvod v točkah nezveznosti levo in desno limito). Zadnji integral je pod vsoto

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0}\left|\frac{1}{2}(f(x-t) - f(x^+))\right| |D_n(t)|\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\delta}\left|\frac{1}{2}(f(x-t) - f(x^-))\right| |D_n(t)|\,dt.$$

Razliki $|f(x-t)-f(x^+)|$ in $|f(x-t)-f(x^-)|$ lahko ocenimo po Lipschitzovem pogoju na obeh delnih intervalih $[x-\delta, x)$ in $(x, x+\delta]$, in sicer sta dominirani z $M|t|$. Ko upoštevamo formulo v lemi 4.2.5(i) za Dirichletovo jedro, lahko oba integrala ocenimo podobno kot v dokazu prejšnjega izreka in vidimo, da gresta proti 0, ko gre δ proti 0.

Da bi dokazali, da je za zvezne, odsekoma zvezno odvedljive funkcije f konvergenca enakomerna in absolutna, naj bodo c_k Fourierovi koeficienti v razvoju funkcije f po funkcijah e^{ikx}, d_k pa koeficienti v razvoju funkcije f'. Torej je

$$d_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}f(x)e^{-ikx}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{ik}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = ikc_k.$$

Pri tem smo integrirali per partes in upoštevali, da je izintegrirani del enak 0 zaradi periodičnost in zveznosti. Ker je $|e^{ikx}| = 1$, so vsi členi Fourierove vrste za f dominirani s členi vrste

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|$$

in dokazati zadošča, da je ta številska vrsta konvergentna. Ker je $c_k = \frac{d_k}{ik}$, lahko po Cauchy-Schwarzovi neenakosti in Besselovi neenakosti $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |d_k|^2 \leq \|f'\|^2$ ocenimo

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| &= |c_0| + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{k}\,|d_k| \\
&\leq |c_0| + \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |d_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |c_0| + \left(2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|f'\|.
\end{aligned}$$

Ker je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergentna, mora isto veljati tudi za vrsto $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|$. □

Vsako zvezno periodično funkcijo f (s periodo 2π) lahko enakomerno aproksimiramo z odsekoma linearno (torej tudi odsekoma zvezno odvedljivo) periodično funkcijo g v naslednjem smislu: za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak g, da je

$$\|f-g\|_\infty := \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)-g(x)| < \varepsilon.$$

Potem je

$$\|f-g\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|^2\,dx} \le \varepsilon\sqrt{2\pi},$$

torej je aproksimacija tudi v normi prostora $L^2(-\pi,\pi)$. Ker so zvezne funkcije goste v $L^2(-\pi,\pi)$, sledi, da velja isto tudi za odsekoma zvezno odvedljive funkcije. Po izreku 4.2.9 lahko vsako odsekoma zvezno odvedljivo funkcijo g enakomerno (torej tudi v normi prostora $L^2(-\pi,\pi)$) aproksimiramo z linearnimi kombinacijami funkcij e^{ikx} (namreč z delnimi vsotami njene Fourierove vrste). Od tod sedaj sledi, da so linearne kombinacije funkcij e^{ikx} ($k \in \mathbb{Z}$) goste v Hilbertovem prostoru $L^2(-\pi,\pi)$, zato je po izreku 4.1.13 ortonormirana množica funkcij $\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ maksimalna. Tako smo dokazali naslednjo posledico:

Posledica 4.2.10. *Funkcije* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$ *($k \in \mathbb{Z}$) tvorijo ortonormirano bazo Hilbertovega prostora* $L^2(-\pi,\pi)$*. Torej je (kot posledica Eulerjevih formul) tudi trigonometrijski sistem funkcij* 1, $\cos nx$, $\sin nx$ *($n = 1, 2, \ldots$) poln v* $L^2(-\pi,\pi)$*.*

Zgled 4.2.11. Razvijmo v Fourierovo vrsto funkcijo, periodično s periodo 2π, ki je na intervalu $[-\pi,\pi)$ definirana z $f(x) = |x|$. Koeficienti v razvoju po trigonometrijskem sistemu funkcij 1, $\cos nx$ in $\sin nx$ (ker je f soda funkcija) so

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}$$

in $b_n = 0$ za vse $n \ge 1$. Ker je f zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, je torej

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x.$$

Ko vstavimo v to enakost $x = 0$, dobimo, da je

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Označimo

$$K = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad \text{in} \qquad S = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}.$$

Ker je

$$S=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{K}{4}$$

in

$$K=S+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=S+\frac{\pi^2}{8},$$

sledi, da je $K=\frac{K}{4}+\frac{\pi^2}{8}$, torej $K=\frac{\pi^2}{6}$. S tem smo dokazali enakost

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Ker je enakomerna limita zveznih funkcij zvezna, Fourierova vrsta nezvezne funkcije f ne more konvergirati proti f enakomerno. V tej zvezi si oglejte nalogo 10.

4.2.3. Cezarova povprečja delnih vsot Fourierove vrste

Znano je, da zveznost periodične funkcije ne zagotavlja konvergence njene Fourierove vrste proti funkciji (naloga 15). Videli pa bomo, da povprečja delnih vsot s_k Fourierove vrste zvezne periodične funkcije f, to je *Cezarove delne vsote*

$$\sigma_n:=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}s_k, \qquad (n\in\mathbb{N}), \tag{4.2.11}$$

konvergirajo proti f enakomerno. Iz (4.2.9) sledi, da je

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)K_n(t)\,dt, \tag{4.2.12}$$

kjer je

$$K_n(t):=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_n(t). \tag{4.2.13}$$

Funkcijo $K_n(t)$ imenujemo *Fejerjevo jedro.*

TRDITEV 4.2.12. *Fejerjevo jedro lahko izrazimo kot*

$$K_n(x)=\frac{1}{n+1}\,\frac{1-\cos(n+1)x}{1-\cos x}. \tag{4.2.14}$$

Ima naslednje lastnosti (podobne lastnostim Poissonovega jedra):

(i) $K_n(x)\geq 0$ *za vse* $x\in\mathbb{R}$*;*

(ii) $K_n(-x)=K_n(x)$ *in* K_n *ima periodo* 2π*;*

(iii) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)\,dx=1$*;*

(iv) $K_n(x)\leq\frac{2}{(n+1)(1-\cos\delta)}$*, če je* $0<\delta\leq|x|\leq\pi$.

Proof. Lastnosti (i), (ii) in (iv) so očitne iz formule (4.2.14), lastnost (iii) pa takoj sledi iz (4.2.13) in leme 4.2.5(ii). Torej moramo dokazati le enakost (4.2.14). Za ta namen se spomnimo na identiteto

$$D_k(x)(e^{ix}-1)=e^{i(k+1)x}-e^{ikx}$$

in jo pomnožimo z $e^{-ix}-1$ ter seštejmo vse tako dobljene enakosti za $k=0,1,\dots,n$, da dobimo

$$\begin{aligned}(n+1)K_n(x)(e^{ix}-1)(e^{-ix}-1)&=\sum_{k=0}^{n}D_k(x)(e^{ix}-1)(e^{-ix}-1)\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i(k+1)x}-e^{-ikx}\right)(e^{-ix}-1)\\&=\sum_{k=0}^{n}e^{i(k+1)x}(e^{-ix}-1)-\sum_{k=0}^{n}e^{-ikx}(e^{-ix}-1)\\&=-e^{i(n+1)x}+1-(e^{-i(n+1)x}-1)\\&=2-2\cos(n+1)x.\end{aligned}$$

Od tod je

$$K_n(x)=\frac{2(1-\cos(n+1)x)}{(n+1)(e^{ix}-1)(e^{-ix}-1)}=\frac{1-\cos(n+1)x}{(n+1)(1-\cos x)}.\qquad\square$$

Izrek 4.2.13. *Za vsako zvezno funkcijo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ s periodo 2π konvergirajo njene Cezarove delne vsote σ_n proti f enakomerno.*

Proof. Po (4.2.12) in trditvi 4.2.12(iii),(i) imamo

$$\begin{aligned}|\sigma_n(x)-f(x)|&=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))K_n(t)\,dt\right|\\&\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)\,dt\\&=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)|f(x-t)-f(x)|K_n(t)\,dt+\\&\qquad+\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)\,dt.\end{aligned}$$

Zaradi enakomerne zveznosti funkcije f na intervalu $[-\pi,\pi]$ lahko izberemo, pri danem $\varepsilon>0$, tak $\delta>0$, da je $|f(x-t)-f(x)|<\varepsilon$, če je $|t|<\delta$. Tedaj je

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)\,dt\le\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}K_n(t)\,dt\le\varepsilon,$$

kjer smo za zadnjo neenakost uporabili trditev 4.2.12(i),(iii). Ker je f zvezna in periodična, je $M := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty$, torej po trditvi 4.2.12(iv)

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right) |f(x-t) - f(x)| K_n(t)\,dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right) \frac{2M\cdot 2}{(n+1)(1-\cos\delta)}\,dt \leq \frac{4M}{(n+1)(1-\cos\delta)}.$$

Za vse dovolj velike n je tudi zadnji izraz pod ε, torej $|\sigma_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon$ za vse $x \in \mathbb{R}$. □

Naloge

1. Razvijte v Fourierove vrste po funkcijah 1, $\cos nx$ in $\sin nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$ naslednje funkcije s periodo 2π:

(i) $f(x) = x$ za $x \in [-\pi, \pi)$;

(ii) $f(x) = \cos^2 x$;

(iii) $f(x) = |\sin x|$;

(iv) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\pi, 0), \\ 0, & x \in [0, \pi). \end{cases}$

2. Razvijte v Fourierove vrste po funkcijah 1, $\cos n\frac{2\pi}{\omega}x$ in $\sin n\frac{2\pi}{\omega}$ periodične funkcije, definirane na intervalu $[-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2})$ dolžine ene periode ω z naslednjimi formulami:

(i) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \omega/2], \\ 0, & x \in (-\omega/2, 0); \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < \frac{\omega}{4}, \\ 1, & |x| \geq \frac{\omega}{4}; \end{cases}$

(iii) $f(x) = x^2$;

(iv) $f(x) = e^{cx}$ (c konstanta);

(v) $f(x) = \operatorname{ch} x$.

3. Razvijte v eksponentno Fourierovo vrsto (se pravi po funkcijah e^{inx} $(n \in \mathbb{Z})$) funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi, 0], \\ 1, & x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

4. Iz Fourierovega razvoja funkcije, definirane na intervalu $[-\pi, \pi)$ s predpisom $f(x) = |x|$ in periodične s periodo 2π, sklepajte s pomočjo Parsevalove enakosti, da je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

in izpeljite od tod, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

5. Iz razvoja v Fourierovo vrsto funkcije, definirane s $f(x) = x^2$ za $x \in [-\pi, \pi)$, periodične s periodo 2π, izpeljite enakost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

6. Iz razvoja v Fourierovo vrsto funkcije, definirane s $f(x) = x$ za $x \in [-\pi, \pi)$, periodične s periodo 2π, izpeljite enakost

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

7. Dokažite, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \qquad \text{in} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4}.$$

(Namig: razvijte funkcijo $f(x) = |\sin x|$, $x \in [-\pi, \pi)$, v Fourierovo vrsto s periodo 2π.)

8. (i) Dokažite, da Fourierovi koeficienti c_n v razvoju m-krat zvezno odvedljive periodične funkcije v Fourierovo vrsto po funkcijah e^{inx} $(n \in \mathbb{Z})$ zadoščajo oceni

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n^m c_n|^2 < \infty.$$

Sklepajte, da je $\lim_{n\to\infty} n^m c_n = 0$ in pokažite isto tudi za koeficiente v razvoju po funkcijah 1, $\cos nx$, $\sin nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

(ii) Dokažite: če Fourierovi koeficienti c_n periodičen funkcije f zadoščajo oceni

$$|c_n| \le \frac{C}{n^{m+1+\theta}} \qquad (n \neq 0)$$

za kaki konstanti $C, \theta > 0$, potem je f m-krat zvezno odvedljiva.

* **9.** Pokažite, da je

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(x)|\,dx=\infty,$$

kjer je D_n Dirichletovo jedro.

* **10.** (*Gibbsov pojav*) Naj ima funkcija f periodo 2π in naj bo na intervalu $[0,2\pi)$ definirana s $f(x)=\pi-x$.

(i) Pokažite, da se Fourierova vrsta te funkcije glasi

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}.$$

(ii) Naj bo s_n delna vsota vrste v (i), torej $s_n=2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$, in

$$g_n(x):=s_n(x)-(\pi-x).$$

Izračunajte, da je $g_n'(x)=D_n(x)$ (Dirichletovo jedro) in da je prva pozitivna stacionarna točka funkcije g_n v $x_n=\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}$. (Namig: lema 4.2.5(i).) Premislite, da je

$$g_n(x_n)=\int_0^{x_n}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx-\pi.$$

(iii) Pokažite (z vpeljavo nove integracijske spremenljivke $t=(n+\frac{1}{2})x$), da je

$$\lim_{n\to\infty}g_n(x_n)=2\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt-\pi.$$

Prepričajte se (s pomočjo formule (2.10.5)), da je izraz na desni v zadnji formuli različen od 0; njegova približna vrednost je 0,56. Ko gre n proti ∞, gre x_n proti 0, razlika $g_n(x_n)$ med vrednostjo n-te Fourierove delne vsote $s_n(x_n)$ in vrednostjo funkcije $f(x_n)$ pa ostaja približno 0,56. To imenujemo Gibbsov pojav.

* **11.** Gibbsov pojav nastopa tudi pri drugih nezveznih odsekoma zvezno odvedljivih funkcijah. Oglejmo si le še en primer. Fourierovo vrsto funkcije

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\in[-\pi,0),\\ 1, & x\in[0,\pi)\end{cases}$$

smo izračunali v (4.2.4). Delne vsote te vrste so

$$s_n(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}\qquad(n=1,2,\ldots).$$

(i) Izračunajte, da je

$$s_n'(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\cos(2k+1)x=\frac{2}{\pi}\frac{\sin(2n+2)x}{\sin x}.$$

(Namig: $\cos(2k+1)x = \frac{1}{2}(e^{i(2k+1)x} + e^{-i(2k+1)x})$; seštejte dve rezultirajoči geometrijski zaporedji.) Pokažite, da ima s_n prvi ekstrem desno od 0 v točki $x_n = \frac{\pi}{2n+2}$.

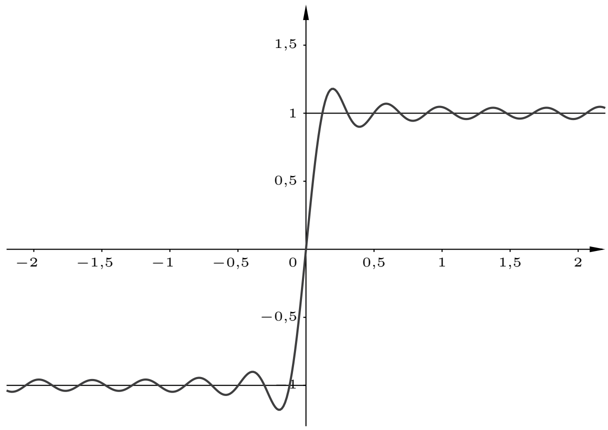

FIGURE 4.1. Ilustracija Gibbsovega pojava v nalogi 11: grafa funkcij f in $s_7(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{7} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$.

(ii) Sklepajte iz (i), da je

$$s_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2n+2)t}{\sin t}\,dt.$$

(iii) Pokažite, da je

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Zadnji integral lahko približno izračunate, če razvijete $\sin t$ v Taylorjevo vrsto in členoma integrirate nekaj členov te vrste. Njegova vrednost je približno za 18 % večja od $\pi/2$.

* **12.** Dokažite, da Cezarova povprečja $\sigma_n(x)$ odsekoma zvezne funkcije f konvergirajo proti $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ (povprečje leve in desne limite v točki x).

* **13.** Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zvezna periodična funkcija s periodo 2π. Za vsak $y > 0$ definirajmo

$$\eta(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+y) - f(x)|\,dx.$$

Dokažite, da za Fourierove koeficiente c_k v razvoju funkcije f po funkcijah e^{ikx} $(k \in \mathbb{Z})$ velja

$$|c_k| \le \frac{1}{2}\,\eta\left(\frac{\pi}{k}\right).$$

(Navodilo: Najprej opazite, da je

$$c_k = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ik(x-\frac{\pi}{k})}\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\Big(x+\frac{\pi}{k}\Big)\,e^{-ikx}\,dx.)$$

***14.** (*Neenakomerno konvergentna Fourierova vrsta z omejenim zaporedjem delnih vsot*) Fourierova vrsta v 10. nalogi konvergira proti nezvezni funkciji, zato konvergenca ne more biti enakomerna. V tej nalogi pa bo bralec pokazal, da njene delne vsote tvorijo omejeno zaporedje.

(i) Pokažite, da za $x \neq 2m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$) velja

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

in sklepajte od tod, na neenakost

$$|\sum_{k=1}^{n} \sin kx| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}. \tag{4.2.15}$$

(ii) Izpeljite iz (i), da za vse n in vse $x \in (0,\pi)$ (torej, zaradi periodičnosti in lihosti tudi za vse $x \in \mathbb{R}$) velja

$$|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}| \leq \pi + 2.$$

(Navodilo: Razdelite vsoto na dva dela:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin kx}{k} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx}{k},$$

kjer je $m = \min\{n, [\frac{\pi}{x}]\}$ (tukaj $[t]$ označuje celi del števila t). Ker je vedno $|\sin t| \leq |t|$, je prva vsota dominirana z $x\sum_{k=1}^{m} 1 = mx \leq \pi$. Drugo vsoto pa lahko ocenimo po absolutni vrednosti navzgor (s pomočjo (4.2.15 in parcialnega seštevanja; glejte nasvet k 4. nalogi iz razdelka 2.2) z

$$\frac{2}{(m+1)\sin\frac{x}{2}} \leq \frac{2\pi}{(m+1)x} \leq 2,$$

kjer smo uporabili dejstvo, da je $\sin t \geq 2t/\pi$ za $t \in [0,\pi/2]$ in da je $(m+1)x \geq \pi$ (saj je $m = [\frac{\pi}{x}]$, kadar druga vsota sploh nastopa, ker mora biti tedaj $m < n$).)

***15.** (*Fejerjev primer zvezne funkcije, katere Fourierova vrsta je divergentna vsaj v eni točki*)

(i) Za vse pare naravnih števil $m > n > 0$ in vsak $x \in \mathbb{R}$ naj bo

$$g(x,m,n) := 2\sin mx \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}.$$

Iz točke (ii) prejšnje naloge sledi, da je g omejena funkcija. Napišite g v obliki

$$g(x,m,n) = \frac{\cos(m-n)x}{n} + \frac{\cos(m-n+1)x}{n-1} + \ldots + \frac{\cos(m-1)x}{1} - \\ - \frac{\cos(m+1)x}{1} - \frac{\cos(m+2)x}{2} - \ldots - \frac{\cos(m+n)x}{n}.$$

Opazite, da je vsota prvih n členov v točki 0 enaka $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, hkrati pa je $g(0,m,n) = 0$. Naj bo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentna vrsta s pozitivnimi členi (ki jih bomo natančneje definirali kasneje) in (n_k), (m_k) taki strogo naraščajoči zaporedji naravnih števil, da je $n_k < m_k$ za vsak k. Potem je zaradi omejenosti funkcije g vrsta

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k g(x, m_k, n_k) \tag{4.2.16}$$

enakomerno konvergentna (po Cauchyevem kriteriju), torej je njena vsota zvezna funkcija.

(ii) Izberimo zaporedji (n_k) in (m_k) tako, da je

$$m_k + n_k < m_{k+1} - n_{k+1} \tag{4.2.17}$$

za vse k. Opazite, da dobimo tedaj, ko vse funkcije $g(x, m_k, n_k)$ razvijemo v Fourierove vrste po funkcijah oblike $\cos jx$ (kot zgoraj funkcijo $g(x,m,n)$) in vstavimo te razvoje v vrsto v (4.2.16), ravno Fourierovo vrsto za f. Nekatere njene delne vsote (namreč vsaj tiste, ki sovpadajo z delnimi vsotami vrste (4.2.16)) konvergirajo enakomerno proti f, vendar pa bomo videli, da to ne velja vedno za vse delne vsote. Najprej opazite (upoštevajoč, da je $g(0, m_j, n_j) = 0$), da za m_k-te delne vsote velja

$$s_{m_k}(0) = a_k \sum_{k=1}^{n_k} \frac{1}{k} > a_k \ln n_k. \tag{4.2.18}$$

(iii) Pokažite, da lahko izberemo a_k in m_k, n_k tako, da bo zaporedje $(a_k \ln k)$ neomejeno, zato po (4.2.18) tudi zaporedje $(s_{m_k}(0))$ neomejeno in s tem Fourierova vrsta za funkcijo f v točki 0 divergentna. (Navodilo: Naj bo npr. $m_k = 2n_k$ za vse k in izberimo n_k zaporedoma tako, da je $n_{k+1} > 3n_k$ za vsak k; potem je pogoj (4.2.17) izpolnjen. Naj bo npr. $a_k = \frac{1}{k^2}$. Potem je treba izbrati (n_k) tako, da bo $\frac{\ln n_k}{k^2} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ in $n_{k+1} > 3n_k$. Tako zaporedje lahko definiramo induktivno, če pazimo, da je na vsakem koraku npr. $n_{k+1} > \max\{3n_k, e^{k^3}\}$.)

16. Kako se glasi Parsevalova enakost za eksponentni sistem $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ in kako za trigonometrijski sistem $\{1, \cos nx, \sin nx : n = 1, 2, \ldots\}$?

4.3. Konvolucija

Mnogokrat je treba dano (neodvedljivo) funkcijo aproksimirati z neskončnokrat odvedljivimi funkcijami. Za ta namen koristno orodje je konvolucija.

DEFINICIJA 4.3.1. *Konvolucija* $f * g$ funkcij $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je funkcija, definirana s predpisom

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt, \tag{4.3.1}$$

kadar je integral v (4.3.1) absolutno konvergenten.

Integral v (4.3.1) je absolutno konvergenten, če je npr. funkcija f omejena in odsekoma zvezna, funkcija g pa odsekoma zvezna s kompaktnim nosilcem (se pravi, da je g enaka 0 zunaj kakega kompaktnega intervala $[a, b]$). Če tedaj integral $\int_a^b f(x-t)g(t)\,dt$ aproksimiramo z Riemanovimi vsotami $\sum f(x-t_k)g(t_k)\Delta_k t$, vidimo, da je $f * g$ limita linearnih kombinacij translacij funkcije f; namreč linearnih kombinacij s koeficienti oblike $g(t_k)\Delta_k t$ funkcij oblike $f_{t_k}(x) := f(x-t_k)$, ki so *translacije* funkcije f. Osnovne lastnosti konvolucije so povzete v naslednji trditvi, katere preprost dokaz prepuščamo bralcu.

TRDITEV 4.3.2. (i) $(\alpha f + \beta g) * h = \alpha(f * h) + \beta(g * h)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$;

(ii) $g * f = f * g$;

(iii) $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Če je f zvezno odvedljiva funkcija in je integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x-t)g(t)|\,dt$ enakomerno konvergenten na vsakem končnem intervalu za x, potem smemo (4.3.1) odvajati tako, da odvajamo na x funkcijo v integralu. Tedaj je $f * g$ zvezno odvedljiva funkcija in

$$(f * g)' = f' * g. \tag{4.3.2}$$

Po točki (ii) prejšnje trditve velja podobno, če je g odvedljiva. Kadar ima integrabilna funkcija g kompakten nosilec, je integracijsko območje v integralu (4.3.1) omejeno in konvolucija $f*g$ obstaja za vsako integrabilno funkcijo f. Če je tedaj g *gladka* (pomeni neskončnokrat odvedljiva) funkcija, je taka tudi $f*g$ (in $(f*g)^{(n)} = f*g^{(n)}$ za $n \in \mathbb{N}$), čeprav morda f ni niti zvezna.

DEFINICIJA 4.3.3. Prostor $L^1(\mathbb{R})$ je napolnitev prostora $C_c(\mathbb{R})$ vseh zveznih kompleksnih funkcij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ s kompaktnim nosilcem (torej takih, ki so različne od 0 le na kakem končnem intervalu) v normi

$$\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx. \tag{4.3.3}$$

$L^1(\mathbb{R})$ dobimo torej tako, da prostoru $C_c(\mathbb{R})$ dodamo še vse tiste funkcije, ki so limite zaporedij funkcij iz $C_c(\mathbb{R})$ v normi (4.3.3).

Opomba 4.3.4. Elemente prostora $L^1(\mathbb{R})$ lahko obravnavamo kot (merljive) funkcije f, za katere je Lebesgueov integral $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx$ končen, pri čemer imamo dve funkciji za enaki, če se razlikujeta le na množici z mero 0. V izogib pojmom mere in Lebesgueovega integrala se lahko bralec v vseh trditvah, v katerih bo nastopal $L^1(\mathbb{R})$, omeji le na Riemannovo absolutno integrabilne funkcije.

Trditev 4.3.5. *(i) Za funkciji $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ konvolucija $f * g$ obstaja, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ in*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

(ii) Če je $f \in L^1(\mathbb{R})$, g pa omejena in recimo odsekoma zvezna funkcija (namesto odsekoma zvezna bi zadoščalo merljiva), potem je $f * g$ zvezna funkcija.

Proof. (i) Znano je (Tonellijev izrek [27]), da lahko v dvojnem integralu nenegativne funkcije zamenjamo vrstni red integriranja, torej je

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |(f * g)(x)|\,dx &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)||g(t)|\,dt\,dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|\,dx\ |g(t)|\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,dy\ |g(t)|\,dt = \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} |g(t)|\,dt = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.\end{aligned}$$

Ker je torej integral njene absolutne vrednosti končen, mora imeti funkcija $f*g$ (skoraj povsod) končne vrednosti.

(ii) Naj bo M taka konstanta, da je $|g(x)| \leq M$ za vse $x \in \mathbb{R}$. Tedaj je

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)||g(t)|\,dt \leq M \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|\,dt = M \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,dy = M\|f\|_1 < \infty,$$

zato $f*g$ obstaja. Če je pri tem f zvezna funkcija, ki je enaka 0 zunaj kakega končnega intervala (a, b), potem za vse x na poljubnem končnem intervalu (c, d) velja

$$(f * g)(x) = \int_a^b f(t)g(x-t)\,dt = \int_{x-b}^{x-a} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{c-b}^{d-a} f(x-y)g(y)\,dy,$$

saj je $f(x-y) = 0$, če je $x \in (c, d)$ in $y \notin (c-b, d-a)$ (ker tedaj $x - y \notin (a, b)$). Zadnji integral je zvezna funkcija parametra x na intervalu (c, d). Ker velja to za vsak končen interval (c, d), je $f * g$ zvezna funkcija na $\mathbb{R}$.

Za splošno funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R})$ pa obstaja zaporedje zveznih funkcij f_n s kompaktnimi nosilci, ki konvergira proti f, torej $\lim \|f - f_n\|_1 = 0$. Tedaj za vse $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned}|((f - f_n) * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |(f - f_n)(t)||g(x-t)|\,dt \\ &\leq M \int_{\mathbb{R}} |(f - f_n)(t)|\,dt \\ &= M\|f - f_n\|_1.\end{aligned}$$

Torej konvergira zaporedje zveznih funkcij $f_n * g$ enakomerno proti $f * g$, zato mora biti tudi $f * g$ zvezna funkcija. $\square$

Če je $g \in L^1(\mathbb{R})$ taka funkcija, da je $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = 1$, velja isto tudi za vse funkcije

$$g_{(\delta)}(x) = \frac{1}{\delta}\, g\Big(\frac{x}{\delta}\Big) \qquad (\delta > 0). \tag{4.3.4}$$

Če ima pri tem g kompakten nosilec, je $g_{(\delta)}$ različna od 0 le v bližini točke 0, kadar je δ majhen. Tedaj za vsako zvezno funkcijo f velja

$$(f * g_{(\delta)})(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g_{(\delta)}(t)\,dt \approx f(x) \int_{\mathbb{R}} g_{(\delta)}(t)\,dt = f(x).$$

V naslednjem izreku bomo to dokazali za splošnejše funkcije.

Izrek 4.3.6. *Naj bo $g \in L^1(\mathbb{R})$ taka funkcija, da je $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = 1$.*

(i) Za vsako omejeno zvezno funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ konvergirajo funkcije $f * g_{(\delta)}$ proti f enakomerno na vsakem končnem intervalu $[a, b]$, ko gre δ proti 0.

(ii) Za vsako funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R})$ konvergirajo funkcije $f * g_{(\delta)}$ proti f v normi prostora $L^1(\mathbb{R})$, ko gre δ proti 0 (torej $\lim_{\delta \to 0} \|f * g_{(\delta)} - f\|_1 = 0$).

Proof. (i) Naj bo $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Ker je f enakomerno zvezna na vsakem končnem intervalu, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\eta > 0$, da je

$$|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \text{če je } |t| < \eta \text{ in } x \in [a, b].$$

Tedaj lahko ocenimo za vsak $x \in [a, b]$ in vsak pozitiven $\delta \le \eta$

$$\begin{aligned}
\big|(f * g_{(\delta)})(x) - f(x)\big| &= \left|\int_{\mathbb{R}} (f(x-t) - f(x)) g_{(\delta)}(t)\,dt\right| \le \\
&\le \int_{|t|<\eta} |f(x-t) - f(x)||g_{(\delta)}(t)|\,dt + \int_{|t|\ge\eta} |f(x-t) - f(x)||g_{(\delta)}(t)|\,dt \\
&\le \varepsilon \int_{|t|<\eta} |g_{(\delta)}(t)|\,dt + 2M \int_{|t|\ge\eta} |g_{(\delta)}(t)|\,dt \\
&\le \varepsilon \|g\|_1 + 2M \int_{|t|\ge\eta} \left|g\Big(\frac{t}{\delta}\Big)\right| \frac{dt}{\delta} = \varepsilon \|g\|_1 + 2M \int_{|s|\ge\frac{\eta}{\delta}} |g(s)|\,ds.
\end{aligned}$$

Ko gre δ proti 0, gre $\frac{\eta}{\delta}$ proti ∞, in ker je integral $\int_{\mathbb{R}} |g(s)|\,ds$ končen, morajo konvergirati integrali $\int_{|s|\ge\frac{\eta}{\delta}} |g(s)|\,ds$ proti 0. Ker velja gornja ocena za vsak $\varepsilon > 0$, iz nje sledi, da konvergirajo vrednosti $(f * g_{(\delta)})(x)$ proti $f(x)$, ko gre δ proti 0, in sicer enakomerno za $x \in [a, b]$.

(ii) Če je $f \in L^1(\mathbb{R})$, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka zvezna funkcija h s kompaktnim nosilcem, da je $\|f - h\|_1 < \varepsilon / \|g\|_1$. Naj bo $M = \max_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|$. Po (i) funkcije $h * g_{(\delta)}$ konvergirajo proti h enakomerno na vsakem končnem intervalu, pokazali pa bomo, da morajo konvergirati tudi v normi prostora $L^1(\mathbb{R})$. Za vsak tako velik $a > 0$, da je je funkcija h enaka 0 zunaj intervala $[-a, a]$, lahko ocenimo

$$\|h * g_{(\delta)} - h\|_1 \le \int_{-2a}^{2a} |(h * g_{(\delta)}(x) - h(x)|\,dx + \int_{|x|>2a} |h * g_{(\delta)}|\,dx. \tag{4.3.5}$$

Drugi integral v (4.3.5) je dominiran z

$$\begin{aligned}\int_{|x|>2a}\int_{-a}^{a}|h(t)g_{(\delta)}(x-t)|\,dt\;dx &= \int_{|x|>2a}\int_{-a}^{a}\left|h(t)g\left(\frac{x-t}{\delta}\right)\right|\frac{dt}{\delta}\;dx\\ &\le M\int_{-a}^{a}\int_{|x|>2a}\left|g\left(\frac{x-t}{\delta}\right)\right|\frac{dx}{\delta}\;dt\\ &= M\int_{-a}^{a}\int_{y\notin[-\frac{2a+t}{\delta},\frac{2a-t}{\delta}]}|g(y)|\,dy\;dt\\ &\le M\int_{-a}^{a}\int_{y\notin[-\frac{a}{\delta},\frac{a}{\delta}]}|g(y)|\,dy\;dt.\end{aligned}$$

Pri tem zadnja neenakost sledi iz inkluzije (ko vzamemo komplemente) $[-\frac{a}{\delta},\frac{a}{\delta}]\subseteq[-\frac{2a+t}{\delta},\frac{2a-t}{\delta}]$, ki velja za vse $t\in[-a,a]$. Ko gre δ proti 0, gre $\frac{a}{\delta}$ proti ∞, zato gre integral $\int_{y\notin[-\frac{a}{\delta},\frac{a}{\delta}]}|g(y)|\,dy$ proti 0 (ker je $g\in L^1(\mathbb{R})$). Pri danem $\varepsilon>0$ je torej za dovolj majhne δ ta integral manjši od $\varepsilon/(4Ma)$ in tedaj po zgornji oceni $\int_{|x|>2a}|h*g_{(\delta)}|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}$. Iz točke (i) pa sledi, da je tudi prvi integral na desni v (4.3.5) pod $\varepsilon/2$, če je δ dovolj majhen, torej za take δ velja

$$\|h*g_{(\delta)}-h\|_1<\varepsilon.$$

Končno lahko sedaj zaključimo (z uporabo trditve 4.3.5(i)), da je

$$\begin{aligned}\|f*g_{(\delta)}-f\|_1 &\le \|(f-h)*g_{(\delta)}\|+\|h*g_{(\delta)}-h\|_1\\ &\le \|f-h\|_1\|g\|_1+\|h*g_{(\delta)}-h\|_1<2\varepsilon\end{aligned}$$

za vse dovolj majhne $\delta>0$. □

Če izberemo v izreku 4.3.6 za g kako gladko funkcijo, vidimo, da lahko vsako zvezno funkcijo f aproksimiramo z gladkimi funkcijami enakomerno na vsakem končnem intervalu. Če ima pri tem f kompakten nosilec, vsebovan v intervalu $[a,b]$, in izberemo za g gladko funkcijo s kompaktnim nosilcem, izpeljemo naslednjo posledico:

Posledica 4.3.7. *Za vsako zvezno funkcijo f z nosilcem, vsebovanim v intervalu $[a,b]$, in vsak $\varepsilon>0$ obstaja zaporedje gladkih funkcij f_n z nosilci, vsebovanimi v intervalu $[a-\varepsilon,b+\varepsilon]$, ki konvergira enakomerno proti f.*

Proof. Naj bo $g:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ gladka funkcija z nosilcem v intervalu $(-1,1)$ (take funkcije smo konstruirali v razdelku o Cauchy-Greenovi formuli), za katero je $\int_{\mathbb{R}}g(x)\,dx=1$. Po izreku 4.3.6(i) zaporedje funkcij $f*g_{(\frac{1}{n})}$ konvergira proti f enakomerno na intervalu $[a-1,b+1]$. Izraz $f*g_{(\delta)}(x)=\int_{\mathbb{R}}f(x-t)g(\frac{t}{\delta})\frac{dt}{\delta}$ je enak 0 za vse x zunaj intervala $[a-\delta,b+\delta]$, saj za take x velja bodisi $x-t\notin[a,b]$ (in tedaj $f(x-t)=0$) bodisi $t\notin[-\delta,\delta]$ (in tedaj $g(\frac{t}{\delta})=0$). Zato je nosilec funkcije $f*g_{(\delta)}$ vsebovan v $[a-\delta,b+\delta]$. Za vse dovolj velike n je torej nosilec funkcije $f*g_{(\frac{1}{n})}$ vsebovan v intervalu $[a-\varepsilon,b+\varepsilon]$. □

Izrek 4.3.8. *(Weierstrassov aproksimacijski izrek) Vsako zvezno funkcijo f lahko na vsakem kompaktnem intervalu $[a,b]$ enakomerno aproksimiramo s polinomi. To pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak polinom p, da je*

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon. \tag{4.3.6}$$

Proof. Najprej razširimo f do zvezne funkcije na $\mathbb{R}$, ki jo bomo tudi imenovali kar f, in sicer tako, da je f enaka 0 zunaj intervala $[a-1, b+1]$. (Na intervala $(a-1,a)$ in $(b, b+1)$ razširimo f npr. kar linearno.) Vzemimo v izreku 4.3.6 za g *Gaussovo funkcijo*

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

To je dovoljeno, saj je

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = 2\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \int_0^\infty \sqrt{2}e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\, dt = \sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi}. \tag{4.3.7}$$

Po izreku 4.3.6(i) tedaj za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - (f * g_{(\delta)})(x)| < \varepsilon/2$ za vse $x \in [a,b]$, se pravi

$$\left| f(x) - \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{a-1}^{b+1} f(t) e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-t}{\delta})^2}\, dt \right| < \varepsilon/2 \qquad \text{za vse } x \in [a,b].$$

V integralu v tej formuli leži $\frac{x-t}{\delta}$ na končnem intervalu $[\frac{a-b-1}{\delta}, \frac{b-a+1}{\delta}]$, saj je $t \in [a-1, b+1]$ in $x \in [a,b]$. Ko razvijemo funkcijo $z \mapsto e^{-\frac{1}{2}z^2}$ v Taylorjevo vrsto okrog 0 in jo nato aproksimiramo z njeno dovolj dolgo delno vsoto, recimo z $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}(-\frac{z^2}{2})^k$, ter nato vstavimo $z = \frac{x-t}{\delta}$, dobimo, da za funkcijo

$$p(x) := \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{a-1}^{b+1} f(t) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (\frac{x-t}{\delta})^{2k}}{2^k k!}\, dt \tag{4.3.8}$$

velja (4.3.6). Ko razvijemo na desni v (4.3.8 izraze $(x-t)^{2k}$ po binomski formuli in nato dobljeno vsoto členoma integriramo, spoznamo, da je p polinom (stopnje $2n$) v spremenljivki x. $\square$

Povejmo, da je Weierstrassov aproksimacijski izrek le poseben primer Stone-Weierstrassovega izreka [28].

Definicija 4.3.9. *Schwartzov prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ hitro padajočih funkcij* sestoji iz vseh neskončnokrat odvedljivih funkcij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, za katere so vse funkcije $x \mapsto f^{(m)}(x)x^n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ omejene.

Iz definicije sledi, da za vsako funkcijo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergirajo vse vrednosti $f^{(m)}(x)x^n$ proti 0, ko gre $|x|$ proti ∞, saj so funkcije $x \mapsto f^{(m)}(x)x^{n+1}$ omejene. Zgledi funkcij v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ so npr. vse gladke funkcije s kompaktnimi nosilci (take funkcije smo konstruirali pred dokazom Cauchy-Greenove formule), funkcije oblike $x \mapsto e^{-cx^2}$, kjer je c pozitivna konstanta, in mnoge druge.

Opomba 4.3.10. Velja inkluzija $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, saj je funkcija $x \mapsto (1+x^2)f(x)$ omejena in zvezna, če je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Očitno je $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vektorski prostor funkcij, ki ima naslednje lastnosti:

Trditev 4.3.11. *(i) Za vsako funkcijo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ so v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tudi vse njene translacije f_t ($f_t(x) = f(x-t)$), vse funkcije oblike $x \mapsto f(ax)$ ($a \in \mathbb{R}$), vsi odvodi $f^{(n)}$ in vsi produkti pf, kjer je p polinom.*

(ii) Če sta f in g v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, je tudi $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Proof. Preprost dokaz točke (i) bomo pustili za vajo.

(ii) Da bi dokazali, da je $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, moramo pokazati, da je za poljubna $m, n \in \mathbb{N}$ funkcija

$$h(x) := x^m (f*g)^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f^{(n)}(x-t)g(t)\,dt$$

omejena. Ker je $f^{(n)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, zadošča obravnavati primer $n = 0$ (sicer bi funkcijo f v nadaljevanju dokaza nadomestili s $f^{(n)}$). Uporabili bomo neenakost

$$|x+y|^m \leq (2\max\{|x|,|y|\})^m \leq 2^m\left(|x|^m + |y|^m\right).$$

Po njej lahko ocenimo

$$|h(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^m |f(x-t)||g(t)|\,dt \leq 2^m \int_{-\infty}^{\infty} \left[|x-t|^m + |t|^m\right]|f(x-t)||g(t)|\,dt.$$

Ker je $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, so funkcije $s \mapsto s^{m+2}f(s)$, $t \mapsto t^m g(t)$, f in g omejene, torej obstaja taka konstanta $C > 0$, da je

$$|x-t|^m|f(x-t)| \leq \frac{C}{1+|x-t|^2}, \quad |t|^m|g(t)| \leq \frac{C}{1+|t|^2},$$
$$|f(x-t)| \leq C \quad \text{in} \quad |g(t)| \leq C.$$

Sedaj lahko gornjo oceno za h nadaljujemo kot

$$\begin{aligned}
|h(x)| &\leq 2^m \int_{-\infty}^{\infty} \left[(|x-t|^m|f(x-t)|)|g(t)| + (|t|^m|g(t)|)|f(x-t)|\right] dt \\
&\leq 2^m \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{C|g(t)|}{1+|x-t|^2} + \frac{C|f(x-t)|}{1+|t|^2}\right] dt \\
&\leq 2^m \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{C^2}{1+|x-t|^2} + \frac{C^2}{1+|t|^2}\right] dt \\
&= 2^m C^2 \cdot 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+|t|^2}\,dt < \infty.
\end{aligned}$$

□

Naloge

1. Pokažite, da je funkcija $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ v prostoru $L^2(\mathbb{R})$, a ni v prostoru $L^1(\mathbb{R})$. Funkcija g, definirana z $g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ za $|x| \leq 1$ in $x \neq 0$, $g(0) = 0$ ter $g(x) = 0$ za $|x| > 1$, pa je v $L^1(\mathbb{R})$ a ni v $L^2(\mathbb{R})$.

2. Za katere a je funkcija, definirana s $f(x) = \frac{\sin x}{|x|^a}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$, v prostoru $L^1(\mathbb{R})$ in za katere a v prostoru $L^2(\mathbb{R})$?

3. Izračunajte $f * f$, če je f karakteristična funkcija intervala $[-a, a]$ $(a > 0)$.

4. (i) Če funkcija $f \in L^1(\mathbb{R})$ zadošča enakosti $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx = 0$ za vsako funkcijo $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pokažite, da je $f = 0$ (skoraj povsod). (Namig: uporabite izrek 4.3.6.)

(ii) Pokažite, da sklep iz točke (i) velja tudi za vse funkcije $f \in L^2(\mathbb{R})$.

5. Dokažite, da funkcije $f_a(x) := \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}$ $(a > 0)$ zadoščajo enakosti $f_a * f_b = f_{a+b}$.

6. Dokažite, da funkcije

$$g_a(x) = \begin{cases} \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

kjer je $a > 0$, zadoščajo identiteti $g_a * g_b = g_{a+b}$.

7. Dokažite, da za funkciji $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ velja

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)||g(t)|\,dt \leq \|f\|_2 \|g\|_2,$$

torej konvolucija $f * g$ obstaja. (Namig: Cauchy-Schwarzova neenakost.)

8. Kakšna funkcija je (kadar obstaja) konvolucija dveh sodih in kakšna dveh lihih funkcij?

9. Naj bo $g \in L^1(\mathbb{R})$ taka funkcija, da je $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = 1$. Označimo

$$a = \int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx \qquad \text{in} \qquad b = \int_{0}^{\infty} g(x)\,dx.$$

Dokažite naslednjo posplošitev izreka 4.3.6(i):

Za vsako omejeno odsekoma zvezno funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je

$$\lim_{\delta \to 0} (f * g_{(\delta)})(x) = af(x^+) + bf(x^-).$$

(Dokaz je podoben dokazu izreka 4.3.6(i).)

***10.** Pokažite, da je za vsako funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R})$ preslikava $F : \mathbb{R} \to L^1(\mathbb{R})$, definirana s $F(a) = f_a$, kjer je $f_a(x) = f(x-a)$ za vse $x \in \mathbb{R}$, enakomerno zvezna. (Namig: najprej obravnavajte primer, ko je f zvezna s kompaktnim nosilcem.) Podoben zaključek izpeljite tudi za funkcije iz $L^2(\mathbb{R})$.

***11.** Dokažite, da je konvolucija $f * g$ funkcij $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ zvezna funkcija in da velja $\lim_{|x|\to\infty}(f*g)(x) = 0$. (Navodilo: najprej obravnavajte primer, ko sta f in g zvezni funkciji s kompaktnima nosilcema.)

12. Za vsak vektor $\vec{k} \in \mathbb{R}^m$ s celoštevilskimi komponentami, $\vec{k} = (k_1, \ldots, k_m)$, naj bo $e_{\vec{k}}$ funkcija

$$e_{\vec{k}}(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \qquad (\vec{x} \in \mathbb{R}^m),$$

kjer označuje $\vec{k}\cdot\vec{x}$ skalarni produkt vektorjev $\vec{k}$ in $\vec{x}$.

(i) Pokažite, da so funkcije $e_{\vec{k}}$ med seboj ortogonalne v prostoru $L^2((-\pi,\pi)^m)$ vseh funkcij $f : (-\pi,\pi)^m \to \mathbb{C}$, ki zadoščajo pogoju $\int_{(-\pi,\pi)^m} |f|^2\, dV < \infty$, kjer je integral m-kratni po kocki $(-\pi,\pi)^m$. Izračunajte tudi norme funkcij $e_{\vec{k}}$.

(ii) Definirajmo Fourierovo vrsto dane (integrabilne) funkcije $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ kot

$$\sum_{\vec{k}\in\mathbb{Z}^m} c_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}},$$

kjer je

$$c_{\vec{k}} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{(-\pi,\pi)^m} f(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, dV(\vec{x}).$$

Pokažite, da za vsako zvezno-odvedljivo funkcijo $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$, ki je periodična s periodo 2π v vseh spremenljivkah, konvergira njena Fourierova vrsta enakomerno proti f. (Navodilo: Za funkcije oblike $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto f_1(x_1)\cdots f_m(x_m)$ lahko zaključek izpeljemo iz izreka 4.2.9, od tod pa potem sledi tudi za končne vsote takih funkcij. Sklepajte s pomočjo Stone-Weierstrassovega izreka (se pravi inačice izreka 4.3.8 za funkcije več spremenljivk), da so take funkcije enakomerno goste v prostoru vseh zveznih funkcij na $[-\pi,\pi]^m$.)

4.4. Fourierova transformacija

Opazujmo, kaj se dogaja s formulo za razvoj dane funkcije f v Fourierovo vrsto po funkcijah $e^{ik\frac{2\pi}{\omega}x}$ $(k \in \mathbb{Z})$, torej s formulo

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{\omega}x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\omega} \int_{-\omega/2}^{\omega/2} f(t) e^{-ik\frac{2\pi}{\omega}t}\, dt \right) e^{ik\frac{2\pi}{\omega}x}, \qquad x \in \left(-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}\right), \tag{4.4.1}$$

ko gre ω proti ∞. Predpostavimo, da gredo vrednosti $f(x)$ zelo hitro proti 0, ko gre $|x|$ proti ∞, tako da lahko integral $\int_{-\omega/2}^{\omega/2} f(t)e^{-ik\frac{2\pi}{\omega}t}\,dt$ zelo dobro aproksimiramo z integralom $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ik\frac{2\pi}{\omega}t}\,dt$ za velike ω. Če označimo

$$\Delta\xi = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{in} \qquad \xi_k = k\frac{2\pi}{\omega},$$

potem lahko (4.4.1) zapišemo kot

$$f(x) \approx \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi_k t}\,dt \right) e^{i\xi_k x} \Delta\xi. \tag{4.4.2}$$

Ko vpeljemo še funkcijo

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t}\,dt,$$

lahko (4.4.2) zapišemo kot

$$f(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi_k)e^{i\xi_k x}\Delta\xi. \tag{4.4.3}$$

Ko gre ω proti ∞, gre $\Delta\xi$ proti 0, zato lahko pričakujemo, da se vsota na desni v (4.4.3) približuje integralu $\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi$ in da se v limiti formula (4.4.3) glasi

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi.$$

V tem razdelku si bomo ogledali, za kakšne funkcije taka formula res velja.

4.4.1. Definicija in osnovne lastnosti Fourierove transformacije

Definicija 4.4.1. Za vsako funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R})$ je njena *Fourierova transformiranka* $\hat{f}$ definirana kot

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}\,dx \qquad (\xi \in \mathbb{R}). \tag{4.4.4}$$

Integral v (4.4.4) je absolutno konvergenten, ker je $|e^{-it\xi}| = 1$.

Trditev 4.4.2. *Naj bo $f \in L^1(\mathbb{R})$.*

(i) *Funkcija $\hat{f}$ je zvezna in $|\hat{f}(\xi)| \le \|f\|_1$ za vsak $\xi \in \mathbb{R}$.*

(ii) *Za vsak $t \in \mathbb{R}$ naj bo e_t funkcija, definirana z $e_t(x) = e^{itx}$. Potem je $\widehat{fe_t}(\xi) = \hat{f}(\xi - t)$.*

(iii) *Za vsak $a > 0$ naj bo funkcija $f_{[a]}$ definirana s predpisom $f_{[a]}(x) = f(ax)$. Tedaj je $\widehat{f_{[a]}}(\xi) = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\xi}{a})$.*

(iv) *Za vsak $t \in \mathbb{R}$ definirajmo za t premaknjeno funkcijo f_t kot $f_t(x) = f(x-t)$. Velja*

$$\widehat{f_t}(\xi) = e^{-it\xi}\hat{f}(\xi).$$

(v) *Označimo s χ identično funkcijo na $\mathbb{R}$ (torej $\chi(x) = x$ za vsak $x \in \mathbb{R}$). Če je tudi funkcija χf v $L^1(\mathbb{R})$, potem je $\hat{f}$ odvedljiva funkcija in $(\hat{f})'(\xi) = -i\widehat{(\chi f)}(\xi)$.*

(vi) *Če je f (zvezno) odvedljiva in $f' \in L^1(\mathbb{R})$, potem je $\widehat{f'}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$.*

(vii) *Za poljubno funkcijo $g \in L^1(\mathbb{R})$ velja $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g}$.*

(viii) *Za vsako funkcijo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ je tudi $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Proof. (i) Neenakost $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$ je očitna iz definicije. Za dokaz zveznosti funkcije $\hat{f}$ pa naj bo $\varepsilon > 0$ in ocenimo

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)||e^{-ix\xi}(e^{-ixh)} - 1)|\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)||e^{-ixh} - 1|\,dx.\end{aligned}$$

Zadnji integral razdelimo na dva dela

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{|x|<A} |f(x)||e^{-ixh} - 1|\,dx + \int_{|x|\geq A} |f(x)||e^{-ixh} - 1|\,dx\right), \tag{4.4.5}$$

kjer je konstanta $A > 0$ tako velika, da je $\int_{|x|\geq A} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{4}\sqrt{2\pi}$. (To je mogoče, ker je $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx < \infty$.) Ker je $|e^{-ixh} - 1| \leq 2$, bo tedaj drugi integral v (4.4.5) (pomnožen s faktorjem $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$) pod $\varepsilon/2$. Za vse dovolj majhne $|h|$ je $|e^{-ixh} - 1| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_1}\sqrt{2\pi}$ za vse $x \in (-A, A)$. Tedaj je tudi prvi integral v (4.4.5) pod $\varepsilon/2$ in sledi, da je $|\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| < \varepsilon$.

(ii) $\widehat{fe_t}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{itx}e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix(\xi-t)}\,dx = \hat{f}(\xi - t)$.

(iii) Dokaz te točke je preprosto vpeljava nove spremenljivke v integral:

$$\widehat{f_{[a]}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy\frac{\xi}{a}}\frac{dy}{a} = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

(iv) Po definiciji je

$$\widehat{f_t}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x - t)e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-i(y+t)\xi}\,dy = e^{-it\xi}\hat{f}(\xi).$$

(v) Diferenčni kvocient $h^{-1}(\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi))$ lahko izrazimo v obliki

$$\frac{\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}\frac{e^{-ixh} - 1}{h}\,dx.$$

Ker je vedno $|e^{i\varphi} - 1| \leq |\varphi|$ (narišite skico na enotski krožnici; krožni lok je daljši od tetive), je izraz v integralu omejen z

$$|f(x)|\frac{|e^{-ihx} - 1|}{|h|} \leq |f(x)x|.$$

Ker je po predpostavki funkcija $f\chi$ v $L^1(\mathbb{R})$, je po Lebesgueovem izreku o dominirani konvergenci

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)}{h} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}\lim_{h\to 0}\frac{e^{-ixh}-1}{h}\,dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}(-ix)\,dx = -i\widehat{\chi f}(\xi).\end{aligned}$$

(vi) Ker je po predpostavki f' v $L^1(\mathbb{R})$, sledi iz zveze $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$ (ki velja tudi, če f' ni zvezna funkcija [30, izrek 7.21]), da obstaja $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Ker je tudi $f \in L^1(\mathbb{R})$, mora biti ta limita enaka 0. Podobno je $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Z integriranjem per partes zato sledi, da je

$$\widehat{f'}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-ix\xi}\,dx = i\xi\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,dx = i\xi\hat{f}(\xi).$$

(vii) Za vsak $\xi \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x-t)g(t)\,dt\;dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x-t)\,dx\;g(t)\,dt\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-i(y+t)\xi}f(y)\,dy\;g(t)\,dt\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-it\xi}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-iy\xi}\,dy\;dt\\ &= \sqrt{2\pi}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).\end{aligned}$$

Pri tem je zamenjava vrstnega reda integriranja v drugi vrstici dovoljena, ker je dvojni integral $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |e^{-ix\xi}f(x-t)g(t)|\,dx\,dt = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|\,dx\,|g(t)|dt = \|f\|_1\|g\|_1$ končen.

(viii) Naj bo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pokazati moramo, da je za poljubna $m, n \in \mathbb{N}$ funkcija $\xi \mapsto \xi^m(\hat{f})^{(n)}(\xi)$ omejena. Z n-kratno uporabo točke (v) spoznamo, da je $(\hat{f})^{(n)} = (-i)^n\widehat{\chi^n f}$. Nato sledi z m-kratno uporabo točke (vi), da je funkcija $\xi \mapsto \xi^m(\hat{f})^{(n)}(\xi)$ enaka $(-i)^n(-i)^m\hat{g}$, kjer je $g = (\chi^n f)^{(m)}$. Ker je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, je tudi $\chi^n f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (to sledi s pomočjo pravila za odvode produkta) in zato tudi $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Tedaj pa je $|\hat{g}(\xi)| \le \|g\|_1 < \infty$. □

4.4.2. Inverzna transformacija

Lema 4.4.3. *Za funkcijo $g_0(x) := e^{-\frac{1}{2}x^2}$ velja $\hat{g}_0 = g_0$, torej je Fourierova transformiranka funkcije $(g_0)_{[a]}(x) = e^{-\frac{1}{2}a^2x^2}$ enaka*

$$\widehat{(g_0)_{[a]}}(\xi) = \frac{1}{a}\,e^{-\frac{\xi^2}{2a^2}} \qquad (a > 0).$$

Proof. Po definiciji je

$$\hat{g}_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-ix\xi}\, dx = e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2}\, dx.$$

Po Cauchyevem izreku je integral holomorfne funkcije $e^{-\frac{1}{2}z^2}$ po robu pravokotnika z oglišči $-A$, A, $A+i\xi$, $-A+i\xi$ enak 0. Ko gre A proti ∞, gresta integrala po vertikalnih stranicah $[-A,-A+i\xi]$ in $[A,A+i\xi]$ proti 0, zato sledi, da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx.$$

Zadnji integral lahko izrazimo kot $2\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{2\pi}$, torej je $\hat{g}_0(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$. Lema sledi sedaj iz trditve 4.4.2(iii) □

Izrek 4.4.4. *(Inverzna formula za Fourierovo transformacijo) Če je $f \in L^1(\mathbb{R})$ taka funkcija, da je tudi $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, potem je*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi$$

za skoraj vsak $x \in \mathbb{R}$.

Proof. Za vsako funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R})$ in $a > 0$ velja

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} e^{-\frac{a^2\xi^2}{2}}\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i(x-t)\xi} e^{-\frac{a^2\xi^2}{2}}\, dt\, d\xi. \tag{4.4.6}$$

Dodatni faktor $e^{-\frac{a^2\xi^2}{2}}$ smo uvedli zato, da je funkcija v dvojnem integralu absolutno integrabilna, tj.

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(t)| e^{-\frac{a^2\xi^2}{2}}\, dt\, d\xi = \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{a^2\xi^2}{2}}\, d\xi < \infty,$$

kar omogoča, da lahko zamenjamo vrstni red integriranja na desni v (4.4.6). Tako dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} e^{-\frac{a^2\xi^2}{2}}\, d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-t)\xi} e^{-\frac{a^2\xi^2}{2}}\, d\xi\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \widehat{(g_0)_{[a]}}(t-x)\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{a} e^{-\frac{(x-t)^2}{2a^2}}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \frac{1}{a} e^{-\frac{y^2}{2a^2}}\, dy \\
&= (f * (g_0)_{(a)})(x),
\end{aligned}$$

kjer smo v predzadnji enakosti uporabili prejšnjo lemo (pomen oznake $(g_0)_{(a)}$ pa je definiran v (4.3.4)). Ker je po hipotezi $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, je po Lebesgueovem izreku o dominirani konvergenci

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} e^{-\frac{a^2\xi^2}{2}}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi = \hat{\hat{f}}(-x).$$

Torej mora tedaj obstajati tudi $\lim_{a\to 0}(f * (g_0)_{(a)})(x)$ in biti enaka $\hat{\hat{f}}(-x)$. Kadar je f zvezna (in omejena), je po izreku 4.3.6(i) $\lim_{a\to 0} f * (g_0)_{(a)} = f(x)$, torej mora tedaj veljati $\hat{\hat{f}}(-x) = f(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Na splošno pa po izreku 4.3.6(ii) funkcije $f * (g_0)_{(a)}$ konvergirajo proti f v normi prostora $L^1(\mathbb{R})$, ko gre a proti 0. Ko izberemo $a = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, dobimo tako zaporedje funkcij $f * (g_0)_{(\frac{1}{n})}$, ki konvergira proti f v normi. Tedaj se da pokazati ([27]), da kako podzaporedje konvergira proti f po točkah za skoraj vsak x. Od tod sedaj sledi, da je $f(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$ za skoraj vsak $x \in \mathbb{R}$, ravno to pa trdi izrek. □

Po izreku 4.4.4 je s predpisom

$$\check{f}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{ix\xi}\, d\xi = \hat{f}(-x)$$

definirana transformacija, ki je inverzna Fourierovi. Po trditvi 4.4.2(viii) je $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ za vsako funkcijo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ker je $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$, torej funkcije f iz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ zadoščajo pogoju izreka 4.4.4. Ker je za vsako funkcijo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tudi funkcija $x \mapsto f(-x)$ v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, tudi inverzna transformacija preslika $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, torej lahko zabeležimo naslednjo posledico:

Posledica 4.4.5. *Fourierova transformacija preslika prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ bijektivno nase.*

Kako ugotoviti funkcijo f iz njene Fourierove transformiranke $\hat{f}$ v primeru, ko $\hat{f}$ ni v $L^1(\mathbb{R})$? Preden poskusimo odgovoriti na to vprašanje, si oglejmo še eno pomembno lastnost Fourierovih transformirank.

Lema 4.4.6. *(Riemann-Lebesgueova lema) Za vsako funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R})$ velja*

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0. \tag{4.4.7}$$

Proof. Oglejmo si najprej primer, ko je f karakteristična funkcija kakega končnega intervala (a, b); torej $f(x) = 1$ za $x \in (a, b)$ in $f(x) = 0$ drugje. Tedaj je

$$|\hat{f}(\xi)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-ix\xi}\, dx \right| = \left| \frac{e^{-ib\xi} - e^{-ia\xi}}{-\sqrt{2\pi} i\xi} \right| \le \frac{2}{\sqrt{2\pi|\xi|}} \overset{|\xi|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ker je Fourierova transformacija linearna, mora relacija (4.4.7) veljati tudi za vse linearne kombinacije takih karakterističnih funkcij; le-te bomo imenovali *stopničaste* *funkcije.* Pokazali bomo, da lahko vsako funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R})$ aproksimiramo s stopničastimi funkcijami, torej, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka stopničasta funkcija s, da je $\|f - s\|_1 < \varepsilon$. Potem bo iz

$$|\hat{f}(\xi)| = |\widehat{f-s}(\xi) + \hat{s}(\xi)| \leq |\widehat{f-s}(\xi)| + |\hat{s}(\xi)| \leq \|f - s\|_1 + |\hat{s}(\xi)| < \varepsilon + |\hat{s}(\xi)|$$

sledila relacija (4.4.7) za vse $f \in L^1(\mathbb{R})$. Ker smo prostor $L^1(\mathbb{R})$ definirali kot napolnitev prostora $C_c(\mathbb{R})$ zveznih funkcij s kompaktnim nosilcem, je dovolj dokazati, da lahko vsako funkcijo $f \in C_c(\mathbb{R})$ aproksimiramo po normi $\|\cdot\|_1$ s stopničastimi funkcijami. Naj bo $[c, d]$ interval, zunaj katerega je f enaka 0, $c = x_0 < x_1 < \ldots < x_{j-1} < x_j \ldots < x_n = d$ pa taka delitev intervala $[c, d]$, da je $|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{d-c}$, če sta t in s v istem delilnem intervalu $[x_{j-1}, x_j]$. Označimo $\Delta_j x = x_j - x_{j-1}$ in izberimo točke $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$. Če označimo s χ_j karakteristično funkcijo intervala (x_{j-1}, x_j), je $s := \sum_{j=1}^n f(t_j)\chi_j$ stopničasta funkcija in

$$\begin{aligned}
\|f - s\|_1 &= \int_c^d |f(x) - s(x)|\, dx = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f(x) - s_j(x)|\, dx \\
&= \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f(x) - f(t_j)|\, dx < \frac{\varepsilon}{d-c} \sum_{j=1}^n \Delta_j x = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Izrek 4.4.7. *Naj zvezna funkcija $f \in L^1(\mathbb{R})$ zadošča Lipschitzovemu pogoju v točki x (npr. naj bo f odvedljiva v točki x). Potem je*

$$f(x) = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi.$$

Proof. Najprej opazimo, da je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} e^{ix\xi} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi}\, dt\, d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \int_{-A}^{A} e^{i(x-t)\xi}\, d\xi\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{e^{iA(x-t)} - e^{-iA(x-t)}}{i(x-t)}\, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{\sin A(x-t)}{x-t}\, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \frac{\sin Ay}{y}\, dy.
\end{aligned}$$

V razdelku o izreku o residuih smo že izračunali, da je $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin y}{y} = \pi$, od koder dobimo (z vpeljavo nove integracijske spremenljivke Ay), da je $\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin Ay}{y}\, dy = 1$. Tako lahko sedaj zapišemo

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi - f(x) \right| = \frac{1}{\pi} \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x-y) - f(x)) \frac{\sin Ay}{y}\, dy \right|. \tag{4.4.8}$$

Ker je $|\frac{\sin Ay}{y}| \leq 1$, če je $|y| \geq 1$, je za vsak $B \geq 1$

$$\left|\int_{|y|\geq B} f(x-y)\frac{\sin Ay}{y}\,dy\right| \leq \int_{|y|\geq B} |f(x-y)|\,dy. \tag{4.4.9}$$

Ker je integral $\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}} |f(s)|\,ds$ končen (saj je $f \in L^1(\mathbb{R})$), je za vse dovolj velike B integral na desni v (4.4.9) pod $\pi\varepsilon/3$ (pri fiksnem x). Ker je tudi integral $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin Ay}{y}\,dy$ konvergenten, velja za vse dovolj velike B tudi

$$\left|f(x)\int_{|y|\geq B} \frac{\sin Ay}{y}\,dy\right| < \pi\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.4.10}$$

Ker je f zvezna in zadošča Lipschitzovemu pogoju v točki x, je funkcija

$$g(y) := \begin{cases} \frac{f(x-y)-f(x)}{y}, & |y| \leq B, \\ 0, & |y| > B \end{cases}$$

omejena, torej tudi v $L^1(\mathbb{R})$. Zato je po Riemann-Lebesgueovi lemi, če ima f (in s tem tudi g) realne vrednosti,

$$\lim_{A\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g(y)\sin Ay\,dy = -\mathrm{Im}\,\lim_{A\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-iAy}\,dy = 0.$$

Pri funkciji f s kompleksnimi vrednostmi pa lahko sklepamo enako za njen realni in imaginarni del. Za vse dovolj velike A je torej

$$\left|\int_{|y|\leq B}(f(x-y)-f(x))\frac{\sin Ay}{y}\,dy\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} g(y)\sin Ay\,dy\right| < \pi\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.4.11}$$

Iz (4.4.9), (4.4.10) in (4.4.11) sedaj sledi, da je desna stran v (4.4.8) pod ε za vse dovolj velike A. Po (4.4.8) to pomeni, da je $\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi = f(x)$. $\square$

4.4.3. Plancherelov izrek

Za poljubni funkciji $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ lahko njun skalarni produkt $\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{g}(x)\,dx$ preoblikujemo s pomočjo inverzne formule za Fourierovo transformacijo takole:

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\overline{\hat{g}(\xi)e^{ix\xi}}\,d\xi\;dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\overline{\hat{g}(\xi)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,dx\;d\xi = \int_{\mathbb{R}}\overline{\hat{g}(\xi)}\hat{f}(\xi)\,d\xi = \langle\hat{f}, \hat{g}\rangle.\end{aligned}$$

To pove, da Fourierova transformacija, to je preslikava $f \mapsto \hat{f}$, ohranja skalarni produkt in zato tudi normo porojeno iz njega, torej velja

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$$

za vsako funkcijo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ker lahko prostor $L^2(\mathbb{R})$ definiramo kot napolnitev prostora vseh zveznih funkcij s kompaktnim nosilcem in lahko po posledici 4.3.7 vsako tako funkcijo aproksimiramo enakomerno z gladkimi funkcijami z nosilci, vsebovanimi v fiksnem intervalu, sledi, da je vsaka funkcija $f \in L^2(\mathbb{R})$ limita kakega zaporedja gladkih funkcij f_n s kompaktnimi nosilci, torej $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0$. Ker so vse funkcije $f_n - f_m$ v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, je $\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2$. Ker je zaporedje (f_n) konvergentno (torej Cauchyevo), vidimo od tod, da je tako tudi zaporedje $\hat{f}_n$. Njegovo limito lahko potem razglasimo za Fourierovo transformiranko $\mathcal{F}(f)$ funkcije f. Na ta način postane Fourierova transformacija linearna preslikava prostora $L^2(\mathbb{R})$ nase, ki ohranja skalarni produkt. S tem smo v bistvu dokazali Plancherelov izrek.

Izrek 4.4.8. *(Plancherelov izrek) Fourierovo transformacijo lahko iz prostora $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ enolično razširimo do unitarnega operatorja na prostoru $L^2(\mathbb{R})$.*

Naloge

1. Pokažite, da za sodo funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R})$ velja $\hat{f}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos x\xi \, dx$. Kako se glasi podobna formula za lihe funkcije?

2. Izračunajte Fourierove transformiranke naslednjih funkcij, kjer je a pozitivna konstanta:

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$;

(ii) $f(x) = e^{-a|x|}$;

(iii) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-a, a]; \\ 0, & x \notin [-a, a]; \end{cases}$

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + a^4}$;

(v) $f(x) = \begin{cases} x^{a-1} e^{-x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$

3. Dokažite, da za funkcije $f_a(x) := \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$ $(a > 0)$ velja $f_a * f_b = f_{a+b}$. (Namig: dokazati zadošča, da je $\widehat{f_a * f_b} = \hat{f}_{a+b}$.)

4. Naj bosta a in b pozitivni konstanti. Fourierova transformiranka funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ je $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|\xi|}$, funkcije $g(x) = e^{-b^2x^2}$ pa $\hat{g}(\xi) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4b^2}}}{b\sqrt{2}}$. Izračunajte od tod integral $\int_0^\infty \frac{e^{-bx^2}}{x^2+a^2} \, dx$. (Namig: uporabite, da Fourierova transformacija ohranja skalarni produkt.)

5. Dokažite, da za vsako odsekoma zvezno funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R})$ velja

$$\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a\to 0} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi - \frac{a^2\xi^2}{2}} \, d\xi.$$

(Namig: opazujte dokaz izreka 4.4.4 in uporabite nalogo 9 iz prejšnjega razdelka.)

6. Dokažite, da za poljubni funkciji $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ velja $\sqrt{2\pi}\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$. *Sklepajte, da velja ta identiteta tudi za poljubni funkciji $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

***7.** Naj bo $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ Fourierova transformiranka v smislu Plancherelovega izreka in za vsak $A > 0$ naj bo

$$g_A(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \qquad \text{ter} \qquad h_A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi.$$

Dokažite, da je $\lim_{A\to\infty} \|g_A - \hat{f}\| = 0$ in $\lim_{A\to\infty} \|h_A - f\| = 0$, kjer je norma običajna v $L^2(\mathbb{R})$.

***8.** (*Poissonova sumacijska formula*) Naj bo $f \in L^1(\mathbb{R})$ taka zvezno odvedljiva funkcija, da sta funkciji $x \mapsto x^2 f(x)$ in $x \mapsto x^2 f'(x)$ omejeni.

(i) Pokažite, da vrsta

$$g(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k)$$

konvergira absolutno in enakomerno na vsakem kompaktnem intervalu za x in da to velja tudi za vrsto $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f'(x+k)$. Sklepajte, da je g zvezno odvedljiva funkcija in periodična s periodo 1.

(ii) Naj bo $g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi ikx}$ razvoj funkcije g v Fourierovo vrsto. Pokažite, da je

$$\begin{aligned} c_k &= \int_0^1 g(x)e^{-2\pi ikx}\,dx = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+m)e^{-2\pi ikx}\,dx \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_m^{m+1} f(y)e^{-2\pi iky}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi iky}\,dy \\ &= \sqrt{2\pi}\hat{f}(2\pi k) \end{aligned}$$

in sklepajte, da velja

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = g(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k = \sqrt{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi k).$$

Enakost

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = \sqrt{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi k) \tag{4.4.12}$$

je *Poissonova sumacijska formula.*

***9.** (*Vrsta* Θ) Pokažite (s pomočjo Poissonove sumacijske formule (4.4.12) za funkcijo $f(x) = e^{-\pi tx^2}$), da za funkcijo

$$\Theta(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-t\pi k^2} \qquad (t > 0)$$

velja identiteta

$$\Theta\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\Theta(t). \tag{4.4.13}$$

***10.** (*Razširitev Riemannove funkcije ζ na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$*) Naj bo

$$\xi(z) = \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z), \tag{4.4.14}$$

kjer je ζ Riemannova funkcija, definirana (v nalogi 8 iz razdelka 2.15) za $\operatorname{Re} z > 1$ kot $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$. Naj ima Θ enako pomen kot v prejšnji nalogi.

(i) Pokažite, da je

$$\xi(z) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^{\frac{z}{2}}(\Theta(t)-1)\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\int_0^{1} t^{\frac{z}{2}}(\Theta(t)-1)\frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_1^{\infty} t^{\frac{z}{2}}(\Theta(t)-1)\frac{dt}{t}.$$

(ii) Z vpeljavo nove integracijske spremenljivke ($t \to \frac{1}{t}$) in s pomočjo identitete (4.4.13) pokažite, da je

$$\frac{1}{2}\int_0^{1} t^{\frac{z}{2}}(\Theta(t)-1)\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} t^{-\frac{z}{2}}\sqrt{t}(\Theta(t)-1)\frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_1^{\infty} t^{-\frac{z}{2}}(\sqrt{t}-1)\frac{dt}{t}.$$

(iii) Izpeljite iz (i) in (ii), da je

$$\xi(z) = \frac{1}{2}\int_1^{\infty}\left(t^{\frac{z}{2}} + t^{\frac{1-z}{2}}\right)(\Theta(t)-1)\frac{dt}{t} + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}.$$

Dokažite, da predstavlja integral v tej formuli na vsej ravnini $\mathbb{C}$ holomorfno funkcijo spremenljivke z, da je zato funkcija ξ holomorfna povsod na $\mathbb{C}$, razen v polih 0 in 1, in da je

$$\xi(z) = \xi(1-z).$$

(iv) Sklepajte iz (iii) in (4.4.14), da lahko razširimo funkcijo ζ holomorfno na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ ter da ima tako razširjena funkcija v točki 1 pol stopnje 1, v točkah $-2, -4, -6, \ldots$ pa ničle.

***11.** V tej nalogi bo bralec pokazal, da Riemannova funkcija ζ nima ničel na polravnini $\operatorname{Re} z \geq 1$. Dokazati *Riemannovo hipotezo*, da so vse netrivialne ničle (torej ničle, različne od $-2, -4, \ldots$) funkcije ζ na premici $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, je eden največjih odprtih problemov v matematiki.

(i) Iz zveze

$$\zeta(z) = \prod_p (1-p^{-z})^{-1} \qquad (\operatorname{Re} z > 1) \tag{4.4.15}$$

(glejte nalogo 8 iz razdelka 2.15) izpeljite, da je

$$\zeta(z) = e^{\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{nz}}}$$

in od tod (z oznakami $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$)

$$|\zeta(z)| = e^{\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(ny \ln p)}{np^{nx}}}$$

ter

$$\zeta^3(x)|\zeta(x+iy)|^4|\zeta(x+2iy)| = e^{\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+4\cos(ny\ln p)+\cos(2ny\ln p)}{np^{nx}}}.$$

(ii) Iz zadnje enakosti v (i) in relacije

$$3 + 4\cos\varphi + \cos(2\varphi) = 2(1+\cos\varphi)^2 \geq 0$$

sklepajte, da velja

$$\zeta^3(x)|\zeta(x+iy)|^4|\zeta(x+2iy)| \geq 1 \tag{4.4.16}$$

za vse $x > 1$ in $y \in \mathbb{R}$.

(iii) Predpostavimo, da bi bila v kaki točki $1 + iy$ ničla funkcije ζ. Potem bi za x v okolici točke 1 veljalo (ker je $(x + iy) - (1 + iy) = x - 1$)

$$|\zeta(x+iy)| \leq C|x-1|$$

za kako konstanto C. Ker ima funkcija ζ v točki 1 pol stopnje 1 (naloga 10), bi v okolici točke 1 veljalo tudi

$$|\zeta(x)| \leq \frac{C_1}{|x-1|}.$$

za kako konstanto C_1. Ker je funkcija $x \mapsto \zeta(x + 2iy)$ omejena v okolici točke $x = 1$, lahko sklepate, da gre leva stran v (4.4.16) proti 0, ko gre x proti 1 z desne strani, zato tedaj neenakost (4.4.16) ne bi mogla veljati. Sklepajte sedaj iz (4.4.15), da funkcija ζ nima ničle na množici $\operatorname{Re} z \geq 1$.

* **12.** (*Logaritemski odvod funkcije* ζ) Naj bo

$$\Phi(z) = \sum_p \frac{\ln p}{p^z} \qquad (\operatorname{Re} z > 1),$$

kjer teče vsota po vseh praštevilih p. Dokažite, da je funkcija

$$h(z) := \Phi(z) + \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$$

holomorfna na območju $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$ in sklepajte od tod in iz nalog 10(iv) in 11, da je funkcija

$$z \mapsto \Phi(z) - \frac{1}{z-1}$$

holomorfna na območju, ki vsebuje množico $\operatorname{Re} z \geq 1$. (Navodilo: Najprej iz formule (4.4.15) izpeljite enakost

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_p \frac{\ln p}{p^z - 1}.$$

Nato iz razvoja

$$(p^z - 1)^{-1} = p^{-z}(1 - p^{-z})^{-1} = p^{-z} + p^{-2z} + p^{-3z} + \dots$$

sklepajte, da je

$$-\left(\Phi(z) + \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) = \sum_p \frac{\ln p}{p^{2z}} \left(1 + \frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{2z}} + \dots\right).$$

Pri tem zadnja vsota predstavlja holomorfno funkcijo na območju $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$, saj so vse vrste

$$h_p(z) = 1 + \frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{2z}} + \dots$$

na tem območju absolutno konvergentne, ker je

$$|h_p(z)| \leq 1 + \frac{1}{p^{\operatorname{Re} z}} + \frac{1}{p^{2\operatorname{Re} z}} + \dots = \frac{1}{1 - p^{-\operatorname{Re} z}} \leq \frac{1}{1 - 2^{-1/2}} =: C,$$

in zato

$$\sum_p \frac{\ln p}{|p^{2z}|} |h_p(z)| \leq C \sum_p \frac{\ln p}{p^{2\operatorname{Re} z}} < \infty.$$

Ta argument pove tudi, da je konvergenca enakomerna na vsaki polravnini $\operatorname{Re} z > \delta$ za $\delta > 1/2$.)

* **13.** Za vsak $x \in \mathbb{R}$ naj bo

$$\varphi(x) = \sum_{p \leq x} \ln p,$$

kjer teče vsota po vseh praštevilih p, manjših ali enakih x. Dokažite, da lahko funkcijo Φ (definirano v prejšnji nalogi) izrazimo kot

$$\Phi(z) = z \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{z+1}}\, dx \qquad (\operatorname{Re} z > 1).$$

(Navodilo: $\int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{z+1}}\, dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{[p_n, p_{n+1})} \frac{\varphi(x)}{x^{z+1}}\, dx$, kjer je $p_0 = 1$ in so $p_1, p_2, \dots$ vsa praštevila, napisana v naraščajočem zaporedju. Na intervalih $[p_n, p_{n+1})$ pa ima funkcija φ konstantno vrednost.)

* **14.** (*Izrek Čebiševa*) Naj bo φ kot v prejšnji nalogi. Dokažite, da je funkcija $x \mapsto \frac{\varphi(x)}{x}$ omejena na poltraku $[1, \infty)$. (Navodilo: Za vsak $n = 1, 2, 3, \dots$ sledi iz binomske formule, da je

$$\binom{2n}{n} \leq (1+1)^{2n}.$$

Vsako praštevilo $p \in (n, 2n]$ deli $(2n)!$ in ne more deliti $n!$, zato mora deliti $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$; torej je

$$\prod_{n<p\leq 2n} p \leq \binom{2n}{n}.$$

Sklepajte, da je $e^{\varphi(2n)-\varphi(n)} \leq 2^{2n}$, torej

$$\varphi(2n) - \varphi(n) \leq 2n \ln 2.$$

Od tod je lahko videti, da obstaja taka konstanta M, da je $\varphi(x) - \varphi(x/2) \leq Cx$ za vse $x > 1$. Uporabite to neenakost zaporedoma za x, $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{2^2}$, $\frac{x}{2^3}, \ldots$)

† **15.** Prepričajte se, da je za vsako zvezno funkcijo f s kompaktnim nosilcem funkcija

$$z \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-iz\xi}\, dx$$

holomorfna na $\mathbb{C}$. Sklepajte, da tedaj funkcija $\hat{f}$ ne more imeti kompaktnega nosilca.

† **16.** Dokažite, da formula v izreku 4.4.7 velja za vsako odsekoma zvezno-odvedljivo funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R})$, če njeno levo stran nadomestimo s povprečjem leve in desne limite funkcije f v točki x, torej

$$\frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+)) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi.$$

4.5. Fourierova transformacija v $\mathbb{R}^n$

4.5.1. Osnovne lastnosti

Definicija 4.5.1. Prostor $L^1(\mathbb{R}^n)$ je napolnitev prostora $C_c(\mathbb{R}^n)$ zveznih funkcij s kompaktnimi nosilci v normi

$$\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}^n} |f(\vec{x})|\, dV := \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, \ldots, x_n)|\, dV,$$

kjer je $dV = dx_1 \cdots dx_n$ volumni element v $\mathbb{R}^n$. Podobno je $L^2(\mathbb{R}^n)$ napolnitev prostora $C_c(\mathbb{R}^n)$ v normi

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\vec{x})|^2\, dV\right)^{\frac{1}{2}},$$

ki izvira iz skalarnega produkta

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})\overline{g(\vec{x})}\, dV.$$

Definicija 4.5.2. *Konvolucija funkcij na* $\mathbb{R}^n$ je definirana kot

$$(f * g)(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{t})g(\vec{x} - \vec{t})\, dV(\vec{t}),$$

kadar je ta integral absolutno konvergenten.

Konvolucija v $\mathbb{R}^n$ ima podobne lastnosti kot v $\mathbb{R}$, navedene v trditvah 4.3.2 in 4.3.5; ker so tudi dokazi podobni, jih bomo tukaj opustili. Če je $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ taka funkcija, da je $\int_{\mathbb{R}^n} g(\vec{x})\, dV = 1$, velja isto tudi za funkcijo

$$g_{(\delta)}(\vec{x}) := \delta^{-n} g(\delta^{-1}\vec{x})$$

za vsak $\delta > 0$. Izrek 4.3.6 ima naslednjo posplošitev v $\mathbb{R}^n$, katere podoben dokaz bomo pustili za vajo:

Izrek 4.5.3. *Naj bo* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *taka funkcija, da je* $\int_{\mathbb{R}^n} g(\vec{x})\, dV = 1$.

(i) *Za vsako omejeno zvezno funkcijo* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *konvergirajo funkcije* $f * g_{(\delta)}$ *proti* f *enakomerno na vsaki kompaktni podmnožici v* $\mathbb{R}^n$*, ko gre* δ *proti* 0.

(ii) *Za vsako funkcijo* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *je* $\lim_{\delta \to 0} \|f * g_{(\delta)} - f\|_1 = 0$.

Definicija 4.5.4. *Schwartzov prostor* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sestoji iz vseh tistih neskončnokrat odvedljivih funkcij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, za katere so vse funkcije

$$x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n} f}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}} \qquad (k_1, \ldots, k_n, j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N})$$

omejene.

Definicija 4.5.5. *Fourierova transformiranka* funkcije $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ je funkcija $\hat{f}$ na $\mathbb{R}^n$, definirana kot

$$\hat{f}(\vec{\xi}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) e^{-i\langle \vec{x}, \vec{\xi} \rangle}\, dV(\vec{x}),$$

kjer označuje $\langle \vec{x}, \vec{\xi} \rangle$ skalarni produkt, torej $\langle \vec{x}, \vec{\xi} \rangle = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$.

Navedimo osnovne lastnosti Fourierove transformacije v $\mathbb{R}^n$, ki so v primeru $n = 1$ naštete v trditvi 4.4.2.

Trditev 4.5.6. *Naj bo* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(i) *Funkcija* $\hat{f}$ *je zvezna in* $|\hat{f}(\vec{\xi})| \le \|f\|_1$ *za vsak* $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$.

(ii) *Za vsak* $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$ *naj bo* $e_{\vec{t}}$ *funkcija, definirana z* $e_{\vec{t}}(\vec{x}) = e^{i\langle \vec{t}, \vec{x} \rangle}$*. Potem je* $\widehat{fe_{\vec{t}}}(\vec{\xi}) = \hat{f}(\vec{\xi} - \vec{t})$.

(iii) *Za vsak* $a > 0$ *naj bo funkcija* $f_{[a]}$ *definirana s predpisom* $f_{[a]}(\vec{x}) = f(a\vec{x})$*. Tedaj je* $\widehat{f_{[a]}}(\vec{\xi}) = \frac{1}{a^n} \hat{f}(\frac{\vec{\xi}}{a})$.

(iv) *Za vsak $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$ definirajmo za $\vec{t}$ premaknjeno funkcijo $f_{\vec{t}}$ kot $f_{\vec{t}}(\vec{x}) = f(\vec{x} - \vec{t})$. Velja*

$$\widehat{f_{\vec{t}}}(\vec{\xi}) = e^{-i\langle \vec{t}, \vec{\xi}\rangle} \hat{f}(\vec{\xi}).$$

(v) *Označimo s χ_j funkcijo, definirano z $\chi_j(\vec{x}) := x_j$ za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Če je tudi $\chi_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, potem je $\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\vec{\xi}) = -i\widehat{(\chi_j f)}(\vec{\xi})$.*

(vi) *Če je $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, potem je $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\vec{\xi}) = i\xi_j \hat{f}(\vec{\xi})$.*

(vii) *Za poljubno funkcijo $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ velja $\widehat{f * g} = (\sqrt{2\pi})^n \hat{f}\hat{g}$.*

(viii) *Za vsako funkcijo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ je tudi $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

(ix) *Fourierova transformacija komutira z rotacijami v $\mathbb{R}^n$ (tj. ortogonalnimi transformacijami z determinanto 1): če za vsako rotacijo R označimo z Rf funkcijo, definirano z $(Rf)(\vec{x}) = f(R^{-1}\vec{x})$, velja*

$$\widehat{Rf}(\vec{\xi}) = \hat{f}(R^{-1}\vec{\xi}) \qquad \text{za vsak } \vec{\xi} \in \mathbb{R}^n.$$

Proof. Dokazali bomo le točko (ix), saj je dokaz ostalih točk v bistvu enak kot v trditvi 4.4.2. Po definiciji Fourierove transformacije imamo

$$\widehat{Rf}(\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(R^{-1}\vec{x}) e^{-i\langle \vec{x}, \vec{\xi}\rangle}\, dV(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{y}) e^{-i\langle R\vec{y}, \vec{\xi}\rangle}\, dV(\vec{y}),$$

kjer smo upoštevali, da je pri vpeljavi nove spremenljivke $\vec{y} = R^{-1}\vec{x}$ Jacobijeva determinanta rotacije $\vec{y} \mapsto R\vec{y}$ enaka 1. Ker je R ortogonalna transformacija, je ($R^* = R^{-1}$, torej) $\langle R\vec{y}, \vec{\xi}\rangle = \langle \vec{y}, R^{-1}\vec{\xi}\rangle$ in sledi

$$\widehat{Rf}(\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{y}) e^{-i\langle \vec{y}, R^{-1}\vec{\xi}\rangle}\, dV(\vec{y}) = \hat{f}(R^{-1}\vec{\xi}). \qquad \square$$

Opomba 4.5.7. Če je f produkt funkcij ene spremenljivke,

$$f(\vec{x}) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n),$$

potem velja isto tudi za Fourierovo transformiranko $\hat{f}$, saj je

$$\begin{aligned}\hat{f}(\vec{\xi}) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) e^{-ix_1\xi_1} \cdots e^{-ix_n\xi_n}\, dV \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_1(x_1) e^{-ix_1\xi_1}\, dx_1 \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_n(x_n) e^{-ix_n\xi_n}\, dx_n = \hat{f}_1(\xi_1) \cdots \hat{f}_n(\xi_n).\end{aligned}$$

Pomemben primer take funkcije je *Gaussovo jedro*

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}\|\vec{x}\|^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_n^2}. \tag{4.5.1}$$

Iz leme 4.4.3 sledi, da se pri Fourierovi transformaciji Gaussovo jedro ne spremeni, zato podoben razmislek kot v dokazu izreka 4.4.4 pove, da velja inverzna formula tudi v $\mathbb{R}^n$.

Izrek 4.5.8. *Če je $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ taka funkcija, da je tudi $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, potem je*

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\vec{\xi}) e^{i\langle \vec{x}, \vec{\xi} \rangle} \, dV(\vec{\xi}).$$

Iz inverzne formule lahko izpeljemo na enak način kot v primeru $n = 1$ (izrek 4.4.8):

Izrek 4.5.9. (Plancherelov izrek) *Fourierovo transformacijo lahko na enoličen način razširimo do unitarnega operatorja na $L^2(\mathbb{R}^n)$, tj. $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ za vsako funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Tudi Riemann-Lebesgueova lema velja v $\mathbb{R}^n$:

Lema 4.5.10. *Za vsako funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ velja $\lim_{\|\vec{\xi}\| \to \infty} \hat{f}(\vec{\xi}) = 0$.*

4.5.2. Uporaba pri reševanju toplotne enačbe

Kot je znano iz fizike (posledica Newtonovega zakona o prevajanju toplote), temperatura $u = u(\vec{x}, t)$ v poljubni točki $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ v času t zadošča *toplotni enačbi*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \tag{4.5.2}$$

kjer je $c > 0$ konstanta. Zanimajo nas rešitve te enačbe pri danem začetnem pogoju

$$u(\vec{x}, 0) = f(\vec{x}), \tag{4.5.3}$$

kjer je f funkcija, ki pada dovolj hitro proti 0, ko gre $\|\vec{x}\|$ proti ∞ (npr. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). Ko uporabimo pri fiksnem t na enačbi (4.5.2) Fourierovo transformacijo, pri čemer obravnavamo u kot funkcijo prostorskih koordinat $\vec{x} = (x, y, z)$, tako da je $\hat{u}(\vec{\xi}, t) = \hat{u}(\xi, \eta, \zeta, t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{\mathbb{R}^3} u(\vec{x}, t) e^{-i\langle \vec{x}, \vec{\xi} \rangle} \, dV$, dobimo (z uporabo trditve 4.5.6(vi))

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -c\|\vec{\xi}\|^2 \hat{u}. \tag{4.5.4}$$

Pri tem smo upoštevali, da je $\widehat{(\frac{\partial u}{\partial t})} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$, tj. integral s parametrom t smo odvajali na parameter kar pod integralskim znakom. Enakost (4.5.4) lahko preoblikujemo v

$$\frac{\partial (e^{c\|\vec{\xi}\|^2 t} \hat{u})}{\partial t} = 0,$$

od koder sledi, da je funkcija $e^{c\|\vec{\xi}\|^2 t} \hat{u}$ neodvisna od t, torej

$$e^{c\|\vec{\xi}\|^2 t} \hat{u}(\vec{\xi}, t) = A(\vec{\xi}) \tag{4.5.5}$$

za kako funkcijo A. Ko uporabimo Fourierovo transformacijo še na začetnem pogoju (4.5.3), dobimo $\hat{u}(\vec{\xi},0)=\hat{f}(\vec{\xi})$. Zato sedaj iz (4.5.5) sledi $A(\vec{\xi})=\hat{f}(\vec{\xi})$ in

$$\hat{u}(\vec{\xi},t)=\hat{f}(\vec{\xi})e^{-c\|\vec{\xi}\|^2 t}. \tag{4.5.6}$$

Na tej formuli bomo uporabili inverz Fourierove transformacije, ki preslika produkt v konvolucijo pomnoženo z $(\sqrt{2\pi})^{-3}$ (vsaj za funkcije iz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je tako). Ker se pri Fourierovi transformaciji Gaussovo jedro $e^{-\frac{1}{2}\|\vec{x}\|^2}$ ne spremeni, sledi iz trditve 4.5.6(iii), da je Fourierova transformiranka funkcije $e^{-a^2\|\vec{x}\|^2}=e^{-\frac{1}{2}\|\sqrt{2}a\vec{x}\|^2}$ enaka $\frac{1}{(\sqrt{2}a)^3}e^{-\frac{1}{2}\|\frac{1}{\sqrt{2}a}\vec{\xi}\|^2}=\frac{1}{(\sqrt{2}a)^3}e^{-\frac{\|\vec{\xi}\|^2}{4a^2}}$. Če izberemo konstanto $a>0$ tako, da je $\frac{1}{4a^2}=ct$ (se pravi $a=\frac{1}{2\sqrt{ct}}$), spoznamo, da je inverzna Fourierova transformiranka funkcije $e^{-c\|\vec{\xi}\|^2 t}$ enaka $K_t(\vec{x})=\frac{1}{(\sqrt{2ct})^3}e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{4ct}}$. Tako dobimo iz (4.5.6)

$$u(\vec{x},t)=(2\pi)^{-\frac{3}{2}}(f*K_t)(\vec{x})=\frac{1}{(\sqrt{4\pi ct})^3}\int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{x}-\vec{y})e^{-\frac{\|\vec{y}\|^2}{4ct}}\,dV(\vec{y}). \tag{4.5.7}$$

Funkcijo

$$\frac{1}{(\sqrt{4\pi ct})^3}e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{4ct}}$$

imenujemo *toplotno jedro*. Podobna formula (s podobno izpeljavo) velja v vseh dimenzijah n.

Naloge

1. Naj bo funkcija $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{C}$ odvisna le od razdalje r do izhodišča, torej $f(\vec{x})=f_0(r)$ za kako funkcijo f_0, kjer je $r=\|\vec{x}\|$. Pokažite, da je tedaj tudi Fourierova transformiranka $\hat{f}$ odvisna le od $\rho:=\|\vec{\xi}\|$, torej $\hat{f}(\vec{\xi})=\tilde{f}_0(\rho)$, kjer je

$$\tilde{f}_0(\rho)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\rho}\int_0^\infty f_0(r)r\sin(r\rho)\,dr.$$

2. Rešite nalogo 1 za funkcije $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$, tj. pokažite, da velja $\hat{f}(\vec{\xi})=\tilde{f}_0(\rho)$, kjer je

$$\tilde{f}_0(\rho)=\int_0^\infty f_0(r)rJ_0(r\rho)\,dr,$$

pri čemer je J_0 *Besselova funkcija*, definirana z

$$J_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ix\sin\theta}\,d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)\,d\theta.$$

3. Izračunajte Fourierovo transformiranko karakteristične funkcije krogle s središčem 0 in polmerom a v $\mathbb{R}^3$.

4. Izračunajte inverzno Fourierovo transformiranko funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, podane s $f(\vec{\xi}) = e^{-c\|\vec{\xi}\|}$, kjer je c pozitivna konstanta. (Namig: polarne koordinate; pri računanju integrala si pomagajte z izrekom o residuih. Rezultat: $\frac{c}{(\|x\|^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}$.)

5. (*Dirichletov problem za polprostor*) Poiščite funkcijo u, ki je harmonična na polprostoru $z > 0$ v $\mathbb{R}^3$, zvezna na zaprtju tega polprostora in ima na njegovem robu $z = 0$ predpisane vrednosti $f(x, y)$. Poiskati je torej treba rešitev enačbe $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$ pri robnem pogoju $u(x, y, 0) = f(x, y)$. (Navodilo: Uporabite Fourierovo transformacijo na u kot funkciji vektorja $\vec{x} := (x, y)$ pri konstantnem z in upoštevajte, da je Fourierova transformiranka omejena funkcija. Rezultat je $u(\vec{x}, z) = \frac{1}{2\pi}(f * P_z)(\vec{x})$, kjer je P_z inverzna Fourierova transformiranka funkcije $\vec{\xi} \mapsto e^{-\|\vec{\xi}\|z}$, ki je po prejšnji nalogi enaka $P_z(\vec{x}) = \frac{z}{(\|\vec{x}\|^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$. Funkcijo P_z imenujemo *Poissonovo jedro za polprostor*.)

* **6.** Poiščite kako rešitev enačbe $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$, kjer je f karakteristična funkcija eliptičnega območja $x^2 + 2y^2 \leq 1$.

4.6. Laplaceova transformacija

4.6.1. Osnovne lastnosti

Za funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R})$, ki je enaka 0 na poltraku $(-\infty, 0)$, je Fourierova transformiranka

$$\hat{f}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(x)e^{-ix\zeta}\, dx$$

definirana za vse ζ z negativnim imaginarnim delom. Če namreč izrazimo $\zeta = \xi + i\eta$, kjer sta ξ in η realna, je $|f(x)e^{-ix\zeta}| = |f(x)|e^\eta \leq |f(x)|$, če je $\eta \leq 0$, zato je tedaj gornji integral konvergenten. Nadalje je za $\operatorname{Im}\zeta < a$, kjer je $a \in \mathbb{R}$ konstanta, gornji integral konvergenten tudi za nekatere funkcije f, ki niso v $L^1(\mathbb{R})$. Če namreč f zadošča pogoju

$$|f(x)| \leq Me^{ax} \tag{4.6.1}$$

za kako konstanto $M > 0$, potem je $|f(x)e^{-ix\zeta}| \leq Me^{(a+\eta)x}$ in zato gornji integral konvergenten za vse ζ na polravnini $\operatorname{Im}\zeta = \eta < -a$. Odsekoma zvezne funkcije f, ki zadoščajo pogoju (4.6.1) za kaki konstanti a in M, bomo imenovali *funkcije eksponentnega reda*, množico vseh takih funkcij pa označili z $\mathcal{E}$. Za take funkcije je ugodneje zamenjati spremenljivko ζ z $-i\zeta$ in definirati Laplaceovo transformiranko kot $\sqrt{2\pi}\hat{f}(-i\zeta)$. Torej:

Definicija 4.6.1. *Laplaceova transformiranka Lf funkcije* $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ je definirana z

$$(Lf)(\zeta) = \int_0^\infty f(x)e^{-\zeta x}\, dx \tag{4.6.2}$$

za tiste $\zeta \in \mathbb{C}$, za katere je integral v (4.6.2) konvergenten.

TRDITEV 4.6.2. *Za vsako funkcijo $f \in \mathcal{E}$ je Laplaceova transformiranka Lf definirana in holomorfna za vse dovolj velike* $\operatorname{Re}\zeta$. *Če f zadošča pogoju* (4.6.1)*, potem je Lf definirana in holomorfna na polravnini* $\operatorname{Re}\zeta > a$.

PROOF. Če funkcija f zadošča pogoju (4.6.1), potem je za $\operatorname{Re}\zeta > a$ integral (4.6.2) absolutno konvergenten, saj velja

$$\int_0^\infty |f(x)||e^{-\zeta x}|\,dx = \int_0^\infty |f(x)|e^{-\operatorname{Re}\zeta x}\,dx \le \int_0^\infty Me^{(a-\operatorname{Re}\zeta)x}\,dx = \frac{M}{\operatorname{Re}\zeta - a}.$$

Podobna ocena pove, da je integral

$$\int_0^\infty |f(x)|x|e^{-\zeta x}|\,dx$$

enakomerno konvergenten na vsaki polravnini $\operatorname{Re}\zeta \ge a + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), zato smemo integral (4.6.2) odvajati na ζ pod integralskim znakom. Torej je Lf v kompleksnem smislu odvedljiva funkcija na vsaki polravnini $\operatorname{Re}\zeta > a + \varepsilon$ (in s tem na polravnini $\operatorname{Re}\zeta > a$) ter velja

$$(Lf)'(\zeta) = -\int_0^\infty xf(x)e^{-\zeta x}\,dx. \qquad \square$$

TRDITEV 4.6.3. *Na funkcijah iz $\mathcal{E}$ ima Laplaceova transformacija L naslednje lastnosti:*

(i) *Je linearna v naslednjem smislu: za poljubni konsatni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ in funkciji $f, g \in \mathcal{E}$ velja $L(\alpha f + \beta g)(\zeta) = \alpha L(f)(\zeta) + \beta L(g)(\zeta)$ za vse ζ z dovolj velikim realnim delom.*

(ii) $\lim_{|\eta|\to\infty, \eta\in\mathbb{R}} L(f)(\xi + i\eta) = 0$ *za vsak dovolj velik $\xi \in \mathbb{R}$.*

(iii) $\lim_{\xi\to\infty, \xi\in\mathbb{R}} L(f)(\xi + i\eta) = 0$ *za vsak $\eta \in \mathbb{R}$.*

(iv) $L(f')(\zeta) = \zeta L(f)(\zeta) - f(0)$ *za vse dovolj velike* $\operatorname{Re}\zeta$*, če je f zvezna.*

(v) $L(f)'(\zeta) = L(-\chi f)(\zeta)$*, kjer je $\chi(x) = x$ za vse $x \ge 0$.*

(vi) $L(E_c f)(\zeta) = L(f)(\zeta - c)$*, kjer je $E_c(x) = e^{cx}$ za $x \ge 0$ in c konstanta.*

(vii) *Za $b > 0$ naj bo*

$$f_b(x) := \begin{cases} f(x-b), & x \ge b \\ 0, & x < b; \end{cases}$$

potem je $L(f_b)(\zeta) = e^{-b\zeta}L(f)(\zeta)$.

(viii) *Za $b > 0$ naj bo $f_{[b]}(x) = f(bx)$; potem je $L(f_{[b]})(\zeta) = b^{-1}L(f)(b^{-1}\zeta)$.*

PROOF. Točko (i) lahko preveri bralec sam, in sicer, da velja $L(\alpha f + \beta g)(\zeta) = \alpha L(f)(\zeta) + \beta L(g)(\zeta)$ za vse ζ, za katere je $\operatorname{Re}\zeta > \max\{a, b\}$, če je $|f(x)| \le Me^{ax}$ in $|g(z)| \le Ne^{bx}$ za kake konstante M, N, a, b.

(ii) Ta točka sledi iz Riemann-Lebesgueove leme, saj je $L(f)(\xi + i\eta) = \sqrt{2\pi}\hat{g}(\eta)$, kjer je

$$g(x) := \begin{cases} e^{-x\xi} f(x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

pri čemer je funkcija g v $L^1(\mathbb{R})$ za $\xi > a$, če f zadošča pogoju (4.6.1).

(iii) Če f zadošča pogoju (4.6.1), potem za vsak $\xi > a$ velja

$$|L(f)(\xi + i\eta)| \leq \int_0^\infty |f(x)||e^{-(\xi+i\eta)x}|\, dx \leq M \int_0^\infty e^{(a-\xi)x}\, dx = \frac{M}{\xi - a} \overset{\xi\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(iv) Z integriranjem per partes in upoštevanjem pogoja (4.6.1) dobimo za $\operatorname{Re}\zeta > a$

$$L(f')(\zeta) = \int_0^\infty f'(x)e^{-x\zeta}\, dx = f(x)e^{-x\zeta}\Big|_0^\infty + \zeta \int_0^\infty f(x)e^{-x\zeta}\, dx = \zeta L(f)(\zeta) - f(0),$$

saj je $\lim_{x\to\infty} f(x)e^{-x\zeta} = 0$, če je $\operatorname{Re}\zeta > a$.

(v) To smo že opazili v dokazu trditve 4.6.2.

(vi) $L(E_c f)(\zeta) = \int_0^\infty f(x)e^{(c-\zeta)x}\, dx = L(f)(\zeta - c)$.

(vii) $L(f_b)(\zeta) = \int_0^\infty f_b(x)e^{-x\zeta}\, dx = \int_b^\infty f(x-b)e^{-x\zeta}\, dx = \int_0^\infty f(y)e^{-(y+b)\zeta}\, dy = e^{-b\zeta}L(f)(\zeta)$.

(viii) $L(f_{[b]}(\zeta) = \int_0^\infty f(bx)e^{-x\zeta}\, dx = b^{-1}\int_0^\infty f(y)e^{-yb^{-1}\zeta}\, dy = b^{-1}L(f)(b^{-1}\zeta)$. □

Za funkciji f in g, ki sta obe enaki 0 na poltraku $(-\infty, 0)$, je njuna konvolucija

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^\infty f(x-t)g(t)\, dt = \begin{cases} \int_0^x f(x-t)g(t)\, dt, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

TRDITEV 4.6.4. *Za funkciji $f, g \in \mathcal{E}$ velja $L(f * g) = L(f)L(g)$.*

PROOF. Dokaz sestoji iz naslednjega računa:

$$\begin{aligned} L(f*g)(\zeta) &= \int_0^\infty e^{-x\zeta}(f*g)(x)\, dx \\ &= \int_0^\infty e^{-x\zeta} \int_0^x f(x-t)g(t)\, dt\, dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_t^\infty e^{-\zeta(x-t)} f(x-t)\, dx \right) e^{-t\zeta} g(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\zeta u} f(u)\, du \right) e^{-t\zeta} g(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty L(f)(\zeta) e^{-t\zeta} g(t)\, dt \\ &= L(f)(\zeta) \int_0^\infty g(t)e^{-t\zeta}\, dt \\ &= L(f)(\zeta)L(g)(\zeta). \end{aligned}$$

□

Izračunajmo sedaj nekaj zgledov Laplaceovih transformirank.

ZGLED 4.6.5. (i) Za funkcijo $f(x) = x^n$, kjer je n konstanta z $\operatorname{Re} n > -1$, je za $\zeta > 0$

$$L(f)(\zeta) = \int_0^\infty x^n e^{-x\zeta}\, dx = \zeta^{-n-1} \int_0^\infty e^{-s} s^n\, ds = \frac{\Gamma(n+1)}{\zeta^{n+1}}.$$

Zaradi holomorfnosti mora ta enakost veljati za vse $\operatorname{Re}\zeta > 0$. Po točki (vi) trditve 4.6.3 sledi od tod, da je za funkcijo

$$f(x) = e^{cx} x^n, \qquad L(f)(\zeta) = \frac{\Gamma(n+1)}{(\zeta - c)^{n+1}}.$$

Kot poseben primer je Laplaceova transformiranka funkcije e^{cx} enaka $\frac{1}{\zeta - c}$. Kadar je $n \in \mathbb{N}$, je Laplaceova transformiranka funkcije $e^{cx} x^n$ racionalna, namreč $n!(\zeta - c)^{-n-1}$. Ker lahko vsako racionalno funkcijo, katere števec ima nižjo stopnjo od imenovalca, razcepimo na delne ulomke (tj. zapišemo kot linearno kombinacijo funkcij oblike $\frac{1}{(\zeta - c)^n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}$)), je vsaka taka racionalna funkcija Laplaceova transformiranka kake linearne kombinacije funkcij oblike $x^n e^{cx}$.

V primeru $n = -\frac{1}{2}$ gornja formula pove, da je Laplaceova transformiranka funkcije $x^{-1/2}$ enaka $\frac{\Gamma(1/2)}{\zeta^{1/2}} = \sqrt{\pi}\zeta^{-1/2}$, torej je to lastna funkcija Laplaceove transformacije, ki pripada lastni vrednosti $\sqrt{\pi}$ (če obravnavamo Laplaceovo transformiranko le za pozitivne ζ).

(ii) Z dvakratnim integriranjem per partes lahko izračunamo Laplaceovi transformiranki funkcij $f(x) = \cos cx$ in $g(x) = \sin cx$, kjer je c konstanta. Dobimo

$$L(f)(\zeta) = \frac{\zeta}{\zeta^2 + c^2} \qquad \text{in} \qquad L(g)(\zeta) = \frac{c}{\zeta^2 + c^2}.$$

Podobno sta Laplaceovi transformiranki funkcij $\operatorname{ch} cx$ in $\operatorname{sh} cx$ enaki

$$\frac{\zeta}{\zeta^2 - c^2} \qquad \text{in} \qquad \frac{c}{\zeta^2 - c^2}.$$

Po trditvi 4.6.3(vi) sledi, da je Laplaceova transformiranka funkcije $e^{cx} \sin bx$ enaka $\frac{b}{(\zeta - c)^2 + b^2}$.

(iii) Za vsak $\varepsilon > 0$ naj bo

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & 0 \le x \le \varepsilon; \\ 0, & \text{drugod.} \end{cases}$$

Laplaceova transformiranka take funkcije je

$$L(f_\varepsilon)(\zeta) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon e^{-x\zeta}\, dx = \frac{1 - e^{-\varepsilon\zeta}}{\varepsilon\zeta}. \tag{4.6.3}$$

Ko gre ε proti 0, konvergirajo funkcije f_ε proti *Diracovi »funkciji«* δ, ki ima v točki 0 vrednost ∞, drugod pa vrednost 0. Laplaceove transformiranke $L(f_\varepsilon)$ pa konvergirajo proti konstantni funkciji 1, kot lahko vidimo iz (4.6.3) s pomočjo L'Hospitalovega pravila. Torej bi lahko rekli, da je $L(\delta)$ konstantna funkcija 1.

Kako poiskati iz dane Laplaceove transformiranke $L(f)$ prvotno funkcijo f? Načeloma na to odgovarja naslednji izrek:

Izrek 4.6.6. *Naj zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva funkcia $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ zadošča pogoju $|f(x)| \leq Me^{ax}$ za kaki konstanti $a \in \mathbb{R}$ in $M > 0$. Potem za vsak $b > a$ velja*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{A\to\infty} \int_{[b-iA,b+iA]} L(f)(\zeta)e^{x\zeta}\, d\zeta. \tag{4.6.4}$$

Če opustimo predpostavko, da je f zvezna, formula še vedno velja, če njeno levo stran nadomestimo s povprečjem leve in desne limite funkcije f v točki x.

Proof. Izberimo $b > a$ in opazimo, da je funkcija

$$g(x) := \begin{cases} f(x)e^{-bx}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

v prostoru $L^1(\mathbb{R})$ in zanjo velja izrek 4.4.7, torej

$$\begin{aligned} e^{-bx}f(x) = g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \hat{g}(\xi)e^{ix\xi}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-bt}e^{-i\xi t}\, dt\; e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} L(f)(b+i\xi)e^{ix\xi}\, d\xi. \end{aligned}$$

Od tod izrazimo

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} L(f)(b+i\xi)e^{x(b+i\xi)}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \lim_{A\to\infty} \int_{[b-iA,b+iA]} L(f)(\zeta)e^{x\zeta}\, d\zeta.$$

Če f ni zvezna v točki x, je dokaz enak, le da moramo uporabiti inačico izreka 4.4.7, navedeno v nalogi 12 razdelka o Fourierovi transformaciji. □

Izrek 4.6.6 pove, da je Laplaceova transformacija injektivna na funkcijah eksponentnega reda, a ni zelo uporaben, ker ne pove ničesar o tem, katere funkcije so Laplaceove transformiranke. Obstajajo holomorfne funkcije F, pri katerih uporaba formule (4.6.4) na F (namesto $L(f)$) privede do funkcij f, katerih Laplaceove transformiranke niso F (naloga 7).

4.6.2. Uporaba v diferencialnih enačbah

Po trditvi 4.6.3(iv) imamo (za dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo $f \in \mathcal{E}$)

$$L(f'')(\zeta) = \zeta L(f')(\zeta) - f'(0) = \zeta(\zeta L(f)(\zeta) - f(0)) - f'(0),$$

torej

$$L(f'')(\zeta) = \zeta^2 L(f)(\zeta) - f(0)\zeta - f'(0). \tag{4.6.5}$$

Ta formula omogoča praktično in enostavno reševanje linearnih diferencialnih enačb drugega reda (s konstantnimi koeficienti) pri danih začetnih pogojih. Rešiti želimo enačbo

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad \text{pri pogojih } y(0) = y_0,\ y'(0) = v_0,$$

kjer so a, b, y_0 in v_0 konstante, $f \in \mathcal{E}$ pa dana funkcija. Ko uporabimo na enačbi Laplaceovo transformacijo in pri tem upoštevamo (4.6.5), trditev 4.6.3(iv) ter začetna pogoja, dobimo

$$\zeta^2 L(y)(\zeta) - y_0\zeta - v_0 + a(\zeta L(y)(\zeta) - y_0) + bL(y)(\zeta) = L(f)(\zeta).$$

Od tod lahko izrazimo

$$L(y)(\zeta) = \frac{L(f)(\zeta) + (\zeta + a)y_0 + v_0}{\zeta^2 + a\zeta + b}. \tag{4.6.6}$$

Če znamo poiskati funkcijo y, katere Laplaceova transformiranka je enaka funkciji na desni strani zadnje formule, smo s tem rešili nalogo.

Zgled 4.6.7. $y'' + 2y' + 5y = 3e^{-x}\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$. V zgledu 4.6.5(ii) smo ugotovili, da je Laplaceova transformiranka funkcije $e^{-x}\sin x$ enaka $\frac{1}{(\zeta+1)^2+1}$. Z uporabo formule (4.6.6) sledi, da je

$$L(y)(\zeta) = \frac{\frac{3}{(\zeta+1)^2+1} + 3}{\zeta^2 + 2\zeta + 5} = 3\frac{\zeta^2 + 2\zeta + 3}{(\zeta^2 + 2\zeta + 2)(\zeta^2 + 2\zeta + 5)}.$$

Da bi od tod ugotovili y, bomo najprej ulomek na desni razstavili na delne ulomke:

$$\frac{\zeta^2 + 2\zeta + 3}{(\zeta^2 + 2\zeta + 2)(\zeta^2 + 2\zeta + 5)} = \frac{A\zeta + B}{\zeta^2 + 2\zeta + 2} + \frac{C\zeta + D}{\zeta^2 + 2\zeta + 5}.$$

Ko pomnožimo to enačbo z imenovalcem in izenačimo koeficiente pred enakimi potencami v tako dobljenih polinomih na levi in desni, dobimo sistem enačb za konstante A, B, C, D:

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ 2A + B + 2C + D &= 1 \\ 5A + 2B + 2C + 2D &= 2 \\ 5B + 2D &= 3. \end{aligned}$$

Njegova rešitev je $A = 0 = C$, $B = \frac{1}{3}$, $D = \frac{2}{3}$. Torej je

$$L(y)(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2 + 2\zeta + 2} + \frac{2}{\zeta^2 + 2\zeta + 5} = \frac{1}{(\zeta + 1)^2 + 1} + \frac{2}{(\zeta + 1)^2 + 4}.$$

S pomočjo zgleda 4.6.5(ii) sklepamo od tod, da je $y = e^{-x}\sin x + e^{-x}\sin 2x$.

4.6.3. Uporaba v integralskih enačbah

Poiskati je treba funkcijo $y = y(x)$, ki zadošča enačbi

$$y(x) + \int_0^x h(x-t)y(t)\,dt = f(x),$$

kjer sta f in h dani funkciji na $[0,\infty)$. Ker je integral v tej enačbi ravno konvolucija $h*y$, dobimo, ko na enačbi uporabimo Laplaceovo transformacijo, $L(y)+L(h)L(y) = L(f)$, torej

$$L(y) = \frac{L(f)}{1+L(h)}.$$

Zgled 4.6.8. (*Abelov problem o tautohroni*) Kakšno obliko mora imeti navpično postavljeni žleb, da bo čas potovanja kroglice po njem do izbrane končne točke neodvisen od začetne točke, iz katere smo kroglico spustili? Pri tem zanemarimo trenje in zračni upor. Postavimo koordinatni sistem (u,v) tako, da bo njegovo izhodišče v končni točki potovanja kroglice, os v naj kaže navpično navzgor, žleb pa naj bo v ravnini (u,v). Začetni položaj kroglice označimo z (x,y), ločni element na neznani krivulji (žlebu), po kateri kroglica potuje, pa z ds. Ko kroglica pripotuje od točke (x,y) do točke (u,v), se je spustila za višino $y-v$, zato je tedaj njena hitrost (po zakonu o ohranitvi energije) enaka $\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(y-v)}$. Predznak $-$ smo zapisali, ker bomo ločno dolžino s merili kot razdaljo na krivulji od izhodišča do splošne točke (u,v) na krivulji, torej se s zmanjšuje, ko t narašča. Krivuljo si zamišljamo podano kot $u = u(v)$, kjer je treba neznano funkcijo u šele poiskati. Torej je $dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(y-v)}}$ in zato čas potovanja od točke (x,y) do končne točke $(0,0)$ enak

$$t = \int_{v=y}^{0} dt = \int_0^y \frac{ds}{\sqrt{2g(y-v)}} = \int_0^y \frac{\frac{ds}{dv}}{\sqrt{2g(y-v)}}\,dv = \int_0^y \frac{\sqrt{1+(\frac{du}{dv})^2}}{\sqrt{2g(y-v)}}\,dv.$$

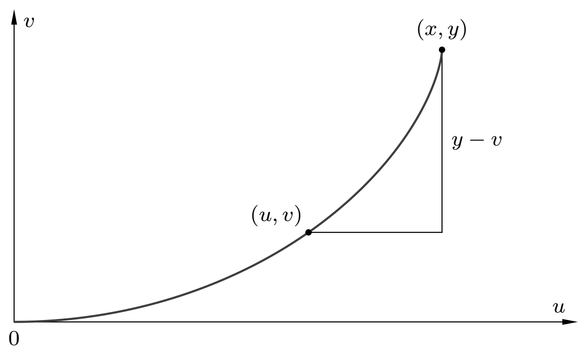

Figure 4.2. Drsenje kroglice po žlebu.

Zadnji integral je konvolucija funkcij $h(v) := v^{-\frac{1}{2}}$ in $e(v) := (2g)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1+(\frac{du}{dv}(v))^2}$, zato sledi (ker je čas potovanja t po predpostavki konstanten) $tL(1) = L(h)L(e)$. Po zgledu 4.6.5(i) je $L(h)(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{\zeta}}$ in $L(1)(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$, zato lahko sklenemo, da je

$$L(e)(\zeta) = \frac{tL(1)(\zeta)}{L(h)(\zeta)} = \frac{t}{\sqrt{\pi\zeta}}.$$

Spet po zgledu 4.6.5(i) sledi od tod $e(v) = \frac{t}{\pi\sqrt{v}}$, se pravi $\sqrt{1+(\frac{du}{dv})^2} = \frac{t}{\pi}\sqrt{\frac{2g}{v}}$ in od tod

$$\frac{du}{dv} = \sqrt{\frac{2gt^2}{\pi^2 v} - 1}.$$

Da bi spoznali obliko krivulje, ki jo določa zadnja diferencialna enačba, označimo $b := \frac{2gt^2}{\pi^2}$ in vpeljimo parameter ϕ prek zveze $v = b\sin^2\phi$. Potem se enačba glasi

$$du = \sqrt{\frac{b}{v} - 1}\, dv = 2b\sqrt{\frac{1}{\sin^2\phi} - 1}\, \sin\phi\cos\phi\, d\phi = 2b\cos^2\phi\, d\phi,$$

torej je

$$u = 2b\int \cos^2\phi\, d\phi = \frac{b}{2}(2\phi + \sin 2\phi) + C,$$

kjer je C konstanta. Tako smo dobili parametrično enačbo iskane krivulje:

$$u = \frac{b}{2}(2\phi + \sin 2\phi) + C, \qquad v = b\sin^2\phi = \frac{b}{2}(1 - \cos 2\phi).$$

Za $\phi = 0$ je $v = 0$; da bo tedaj tudi $u = 0$ (saj mora iti krivulja skozi izhodišče), izberimo $C = 0$. Če označimo $a := \frac{b}{2}$ in $\theta = 2\phi$, lahko enačbo krivulje poenostavimo:

$$u = a(\theta + \sin\theta), \qquad v = a(1 - \cos\theta).$$

To je enačba cikloide, ki nastane, ko se krog s polmero a kotali po spodnji strani premice $v = 2a$ (glejte sliko).

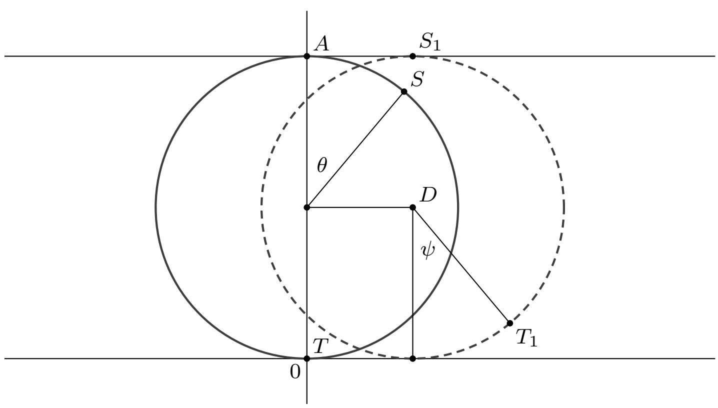

FIGURE 4.3. Kotaljenje kroga po spodnji strani premice $v = 2a$.

Točka T je na začetku v izhodišču, točka A pa nad njo na premici $v = 2a$. Ko se krog nekoliko zakotali po premici $v = 2a$, tako da pride točka S v točko S_1, preide T v točko T_1. Lok TS se tako premakne v lok T_1S_1, zato imata enako dolžino, torej je $a\pi - a\theta = a\pi - a\psi$, zato $\psi = \theta$. Ker gre za kotaljenje brez drsenja, je dolžina loka AS (to je $a\theta$) enaka dolžini daljice AS_1, zato je po zakotalitvi središče kroga v točki $D = (a\theta, a)$. Torej sta koordinati točke T_1 enaki $u = a\theta + a\sin\psi = a(\theta + \sin\theta)$ in $v = a - a\cos\psi = a(1 - \cos\theta)$.

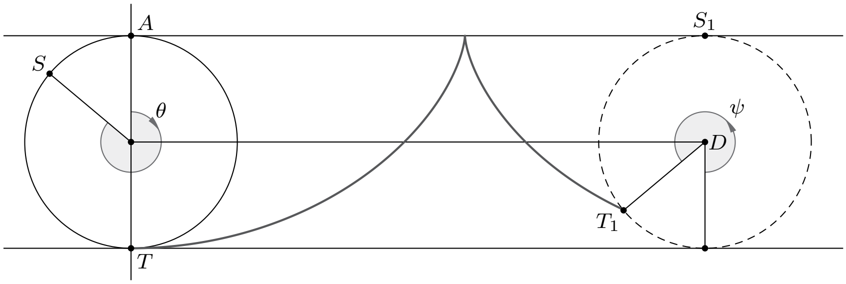

FIGURE 4.4. Del cikloide $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, ki jo prepotuje točka T (ki je na začetku v izhodišču 0) pri kotaljenju kroga s polmerom a po premici $y = 2a$.

Naloge

1. Izračunajte Laplaceove transformiranke naslednjih funkcij, kjer je c pozitivna konstanta:

(1) $\sin^2 x$;

(2) $\sin\sqrt{x}$ (navodilo: vpeljite novo integracijsko spremenljivko, integrirajte per partes, integral oblike $\int_0^\infty e^{-\zeta t^2}\cos t\,dt$ prevedite na $\int_{-\infty}^\infty e^{-\zeta t^2} e^{it}\,dt$, le-tega pa lahko izračunate s pomočjo Cauchyevega izreka; rezultat je $\frac{\sqrt{\pi}}{2\zeta^{3/2}}e^{-\frac{1}{4\zeta}}$);

(3) $x\sin c\sqrt{x}$ (namig: točka (2) in trditev 4.6.3);

*(4) $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-ct^2}\,dt$.

2. Naj bo $f \in \mathcal{E}$ in $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$. Dokažite, da je

$$L(F)(\zeta) = \frac{L(f)(\zeta)}{\zeta}.$$

(Namig: trditev 4.6.3(iv).)

3. Bodita funkciji f in $g(x) := \frac{f(x)}{x}$ v $\mathcal{E}$. Dokažite, da je

$$L(g)(\zeta) = \int_\gamma L(f)(z)\,dz,$$

kjer je γ poltrak $[\zeta,\infty)$, vzporeden z abscisno osjo, z začetkom v točki ζ. (Namig: trditev 4.6.3(v),(iii).)

4. Izračunajte Laplaceovi transformiranki funkcij:

(1) $\frac{\sin x}{x}$ (namig: uporabite nalogo 3, rezultat je $\operatorname{arctg} \frac{1}{\zeta}$);

(2) (*integralski sinus*) $\operatorname{Si} x := \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ (namig: uporabite (1) in nalogo 2).

5. S pomočjo ugotovitve v zgledu 4.6.5(i) poiščite funkcije, katerih Laplaceove transformiranke so:

(1) $\dfrac{1}{\zeta} + \dfrac{1}{\zeta + 4}$;

(2) $\dfrac{4}{\zeta(\zeta^2 + 4)}$;

(3) $\dfrac{\zeta}{\zeta^2 + 4\zeta + 8}$;

(4) $\dfrac{4\zeta - 4}{\zeta^2(\zeta - 2)^2}$.

6. Izračunajte konvolucijo naslednjih parov funkcij na dva načina (tj. neposredno in z uporabo Laplaceove transformacije), ki so za pozitivne x podane z:

(1) $f(x) = x^a$, $g(x) = x^b$;

(2) $f(x) = e^{ax}$, $g(x) = e^{bx}$.

Tukaj sta a in b konstanti, za negativne x pa naj bodo vrednosti teh funkcij 0.

7. (i) Pokažite, da funkcija $F(\zeta) := e^{\zeta^2}$ ni Laplaceova transformiranka nobene funkcije. (Namig: trditev 4.6.3(iii).)

(ii) Izračunajte $f(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{A\to\infty} \int_{[b-iA.b+iA]} F(\zeta) e^{x\zeta}\, d\zeta$.
(Rezultat: $f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}}$.)

(iii) Zakaj ugotovitvi v (i) in (ii) nista v nasprotju z izrekom 4.6.6?

8. Rešite z uporabo Laplaceove transformacije naslednje diferencialne enačbe pri danih začetnih pogojih:

(1) $y'' - 6y' + 9y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$;

(2) $y'' + 16y = \cos 4x,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$;

(3) $(x + 1)y'' - (x + 1)y' + y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$.

9. Rešite integralski enačbi:

(i) $y(x) = \int_0^x \sin(x - u) y(u)\, du + 1$;

(ii) $y(x) + \int_0^x \cos(x - t) y(t)\, dt = x$.

Naj bo $\pi(x)$ število praštevil, ki so manjša ali enaka pozitivnemu realnemu številu x. V nadaljnjih nalogah tega razdelka nameravamo orisati dokaz *praštevilskega izreka*, ki pravi, da velja asimpotična enakost $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$, se pravi

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x)\frac{\ln x}{x} = 1. \tag{4.6.7}$$

Ker bo pri tem bistvenega pomena Riemannova funkcija ζ, bomo spremenljivko v Laplaceovih transformirankah označevali z z (namesto s ζ).

***10.** Naj bo $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezna in omejena funkcija (se pravi, da je $|f(x)| \le M$ za kako konstanto M in vse $x \in [0,\infty)$), torej je njena Laplaceova transformiranka $L(f)$ definirana na polravnini $\operatorname{Re} z > 0$. Predpostavimo, da se $L(f)$ da razširiti do funkcije g, ki je holomorfna na kaki okolici polravnine $\operatorname{Re} z \ge 0$. Cilj je dokazati, da je tedaj integral $\int_0^\infty f(x)\,dx$ konvergenten in da je njegova vrednost enaka $g(0)$, torej, da za funkcije

$$g_b(z) := \int_0^b f(x)e^{-zx}\,dx$$

velja

$$\lim_{b\to\infty} (g(0) - g_b(0)) = 0.$$

Ker je po predpostavki g holomorfna na kaki okolici množice $\operatorname{Re} z \ge 0$, za vsak $R > 0$ obstaja tak $\delta = \delta(R) > 0$, da je g holomorfna na območju $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -2\delta,\ |\operatorname{Im} z| < 2R\}$. (Utemeljite to!) Naj bo γ pozitivno orientirana sklenjena pot v tem območju, sestoječa iz dela kroga $|z| = R$ in daljice $\operatorname{Re} z = -\delta$ (glejte sliko). Označimo z γ^+ del poti, na katerem je $\operatorname{Re} z \ge 0$, z γ^- pa preostali del poti.

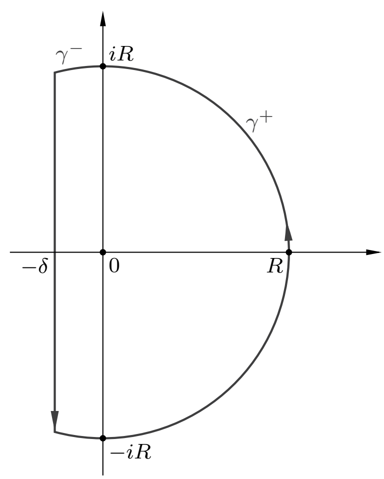

FIGURE 4.5. Integracijska pot v nalogi 10.

(i) Pokažite, da je funkcija g_b povsod holomorfna (za vsak $b > 0$) in je zato za vsak $R > 0$ holomorna tudi funkcija

$$h_b(z) := (g(z) - g_b(z))e^{bz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)$$

na območju, ki vsebuje $[\gamma]$. Ker je $h_b(0) = g(0) - g_b(0)$, imamo po Cauchyevi formuli

$$g(0) - g_b(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h_b(z)\frac{dz}{z}. \tag{4.6.8}$$

(ii) Kadar je $\operatorname{Re} z > 0$, lahko izrazimo

$$g(z) - g_b(z) = \int_b^\infty f(x)e^{-zx}\,dx,$$

torej je tedaj

$$|g(z) - g_b(z)| \le \int_b^\infty Me^{-x\operatorname{Re} z}\,dx = \frac{M}{\operatorname{Re} z}e^{-b\operatorname{Re} z}.$$

Kadar je $|z| = R$, pokažite, da velja

$$\left|e^{bz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right| = 2e^{b\operatorname{Re} z}\frac{|\operatorname{Re} z|}{R^2}.$$

Izpeljite sedaj, da za del integrala (4.6.8) velja ocena

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} h_b(z)\,dz\right| \le \frac{M}{R}. \tag{4.6.9}$$

(iii) Integral $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} h_b(z)\frac{dz}{z}$ ocenite v dveh korakih. Najprej opazite, da lahko v integralu

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} g_b(z)e^{bz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}$$

nadomestimo integracijsko pot γ^- s polkrožnico $|z| = R$, $\operatorname{Re} z \le 0$, saj je funkcija v integralu holomorfna na območju med to polkrožnico in potjo γ^-. Nato na podoben način kot v (i) pokažite, da velja

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} g_b(z)e^{bz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| \le \frac{M}{R}. \tag{4.6.10}$$

V izrazu

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} g(z)e^{bz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}$$

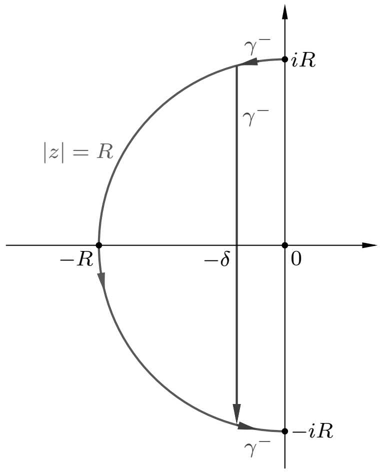

FIGURE 4.6. Integral holomorfne funkcije po poti γ^- je enak integralu po polkrožnici $|z| = R$, $\operatorname{Re} z \leq 0$.

pa padajo funkcije pod integralom po absolutni vrednosti proti 0, ko gre b proti ∞ (ker gre e^{bz} proti 0, saj je $\operatorname{Re} z < 0$). Sklepajte od tod, da je

$$\lim_{b\to\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} g(z)e^{bz} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} \right| = 0. \tag{4.6.11}$$

(iv) Sklepajte iz relacij (4.6.8), (4.6.9), (4.6.10) in (4.6.11), da res velja

$$\lim_{b\to\infty} (g(0) - g_b(0)) = 0.$$

* **11.** Bodita funkciji φ in Φ definirani kot v nalogah 12 in 13 iz razdelka 4.4. Izračunajte Laplaceovo transformiranko (imenujmo jo g) funkcije

$$f(x) := \frac{\varphi(e^x) - e^x}{e^x}.$$

(Rešitev: Iz izreka Čebiševa (14. naloga iz razdelka 4.4) sledi, da je f omejena funkcija, in ker je tudi odsekoma zvezna, je njena Laplaceova transformiranka g definirana za vse z na polravnini $\operatorname{Re} z > 0$. Za take z dobimo z vpeljavo nove integracijske spremenljivke $t = e^x$

$$g(z) = \int_0^\infty f(x)e^{-xz}\,dx = \int_0^\infty \frac{\varphi(e^x) - e^x}{e^x} e^{-zx}\,dx = \int_1^\infty \frac{\varphi(t) - t}{t^{z+2}}\,dt.$$

S pomočjo naloge 13 iz razdelka 4.4. dobimo tako, da je

$$g(z) = \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}.) \tag{4.6.12}$$

* **12.** Dokažite, da je integral

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(t)-t}{t^2}\,dt \tag{4.6.13}$$

konvergenten. (Rešitev: Po rešitvi prejšnje naloge je integral

$$g(z)=\int_1^\infty \frac{\varphi(t)-t}{t^{z+2}}\,dt$$

ravno Laplaceova transformiranka funkcije $f(x)=\frac{\varphi(e^x)-e^x}{e^x}$ in velja (4.6.12). Po 12. nalogi iz razdelka 4.4 in zvezi (4.6.12) lahko to funkcijo g razširimo do holomorfne funkcije na območju, ki vsebuje polravnino $\operatorname{Re} z \geq 0$. Zato je po nalogi 10 integral (4.6.13) konvergenten.)

* **13.** Dokažite, da sta za poljubni konstanti $c>1$ in $d\in(0,1)$ množici

$$A_c := \{x\in\mathbb{R}^+ : \varphi(x)\geq cx\} \qquad \text{in} \qquad B_d := \{x\in\mathbb{R}^+ : \varphi(x)\leq dx\}$$

omejeni in sklepajte od tod, da je

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=1.$$

(Navodilo: Dokaza omejenosti obeh tipov množic sta si podobna, zato bomo navedli le enega. Če A_c ne bi bila omejena, potem bi obstajali poljubno veliki x, za katere bi veljalo $\varphi(x)\geq cx$. Ker je funkcija φ naraščajoča, bi sledilo, da je

$$\int_x^{cx}\frac{\varphi(t)-t}{t^2}\,dt \geq \int_x^{cx}\frac{\varphi(x)-t}{t^2}\,dt \geq \int_x^{cx}\frac{cx-t}{t^2}\,dt = \int_1^c\frac{c-s}{s^2}\,ds.$$

Ker je vrednost zadnjega integrala pozitivna konstanta, bi od tod lahko sklepali, da integral $\int_1^\infty \frac{\varphi(t)-t}{t^2}\,dt$ ni konvergenten, kar pa bi nasprotovalo ugotovitvi v nalogi 12.)

* **14.** (i) Funkcija π je definirana v komentarju pred nalogo 10, torej imamo

$$\varphi(x)=\sum_{p\leq x}\ln p\leq \pi(x)\ln x.$$

Sklepajte od tod in iz prejšnje naloge, da velja

$$\liminf_{x\to\infty}\left(\pi(x)\frac{\ln x}{x}\right)\geq \lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=1. \tag{4.6.14}$$

(ii) Naj bo $\varepsilon>0$. Za vsak $x\in\mathbb{R}^+$ imamo

$$\varphi(x)\geq \sum_{x^{1-\varepsilon}<p\leq x}\ln p\geq \sum_{x^{1-\varepsilon}<p\leq x}\ln x^{1-\varepsilon}=(1-\varepsilon)\ln x(\pi(x)-\pi(x^{1-\varepsilon})).$$

Ker je očitno $\pi(y) \leq y$ za vsak $y \in \mathbb{R}^+$, izpeljemo od tod neenakost

$$\varphi(x) \geq (1-\varepsilon)(\pi(x) - x^{1-\varepsilon}) \ln x.$$

Od tod zaključite, da je

$$(1-\varepsilon) \limsup_{x\to\infty} \pi(x) \frac{\ln x}{x} \leq \lim \frac{\varphi(x)}{x}$$

in (ko pošljemo ε proti 0 in uporabimo prejšnjo nalogo)

$$\limsup_{x\to\infty} \pi(x) \frac{\ln x}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 1. \tag{4.6.15}$$

(iii) Končno iz (4.6.14) in (4.6.15) izpeljite, da velja praštevilski izrek, tj. (4.6.7).

POGLAVJE 5

Robni problemi za linearne diferencialne enačbe 2. reda

V tem poglavju bomo spoznali Frobeniusovo metodo za reševanje linearnih diferencialnih enačb ter številne nove funkcije, ki jih dobimo pri reševanju takih enačb, in so pomembne v fiziki in matematiki. Obravnavali bomo tudi problem lastnih vrednosti in lastnih funkcij za diferencialne operatorje drugega reda, do katerega privedejo številna fizikalna vprašanja, in je povezan z reševanjem parcialnih diferencialnih enačb. Za motivacijo bomo začeli z najpreprostejšim med takimi vprašanji, nihanjem strune, pri katerem pa se pokažejo pomembne značilnosti, ki jih lahko pričakujemo pri drugih tovrstnih problemih.

5.1. Nihanje strune

5.1.1. Končna struna

Oglejmo si nihajočo struno v ravnini x, y, vpeto v krajiščih. V mirovanju naj struna leži na osi x, eno krajišče naj ima v točki 0, drugo pa v točki z absciso $a > 0$. Odmik točke z absciso x na struni od ravnovesne lege v času t bomo označili z $u(x,t)$. Če so odmiki od ravnovesne lege dovolj majhni, je mogoče iz Newtonovega zakona $F = ma$ izpeljati enačbo

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}. \tag{5.1.1}$$

Tukaj je c konstanta (hitrost širjenja valov po struni), z indeksi pa smo označili parcialne odvode; npr u_{tt} pomeni $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$. Izpeljava enačbe (5.1.1) sodi sicer v fiziko, za bralce, ki te izpeljave morda še ne poznajo, pa bomo v nalogi 9 navedli izčrpno navodilo. Podobna enačba za širjenje valov v prostoru se glasi

$$u_{tt} = c^2 \Delta u,$$

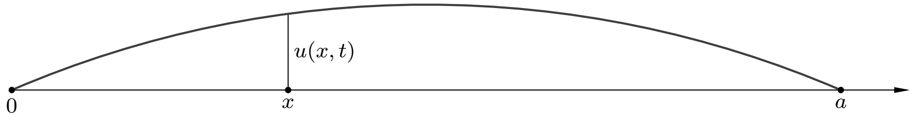

FIGURE 5.1. Struna.

kjer je Δ *Laplaceov operator*,

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

Taki enačbi zadošča npr. tudi komponenta električne poljske jakosti v smeri dane osi pri elektromagnetnem valovanju. Pogoja, da je struna v krajiščih vpeta, zapišemo kot

$$u(0,t) = 0 \qquad \text{in} \qquad u(a,t) = 0. \tag{5.1.2}$$

Imenujemo ju *robna pogoja.* (Možni so tudi drugačni robni pogoji; npr. $u_x(0,t) = 0$ in $u_x(a,t) = 0$.) Da bomo lahko določili odmik $u(x,t)$ v poljubnem času t, moramo poznati še začetno lego in začetno hitrost vseh delov strune, tj. $u(x,0)$ in $u_t(x,0)$. Predpostavili bomo torej, da sta funkciji

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{in} \qquad u_t(x,0) = g(x) \tag{5.1.3}$$

znani. Pogoja (5.1.3) imenujemo *začetna pogoja.* Naša naloga v tem razdelku je poiskati tisto rešitev parcialne diferencialne enačbe (5.1.1), ki zadošča robnima pogojema (5.1.2) in začetnima pogojema (5.1.3). Fizikalna izkušnja nam pravi, da mora biti taka rešitev enolična.

Po *Fourierovi metodi ločitve spremenljivk* bomo najprej poiskali tiste netrivialne rešitve $u(x,t)$ enačbe (5.1.1) in robnih pogojev (5.1.2), ki jih je mogoče izraziti kot produkt

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

kakih dvakrat odvedljivih neničelnih funkciji X in T. Ko vstavimo tako funkcijo u v enačbo (5.1.1), lahko le-to preuredimo v

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{5.1.4}$$

Leva stran v (5.1.4) je odvisna le od t in zato ostane nespremenjena, ko se spreminja le spremenljivka x. Toda, ker je desna stran odvisna le od x in enaka levi, to pomeni, da mora biti desna stran v (5.1.4) konstantna. Imenujmo to konstanto $-\lambda$. Ker sta X in T realni funkciji, je $\lambda \in \mathbb{R}$. Tako dobimo iz (5.1.4) dve enačbi:

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{5.1.5}$$

in

$$T'' + c^2\lambda T = 0. \tag{5.1.6}$$

Robna pogoja (5.1.2) se sedaj glasita

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \qquad \text{in} \qquad u(a,t) = X(a)T(t) = 0.$$

Ker nas zanimajo le netrivialne rešitve, možnost $T \equiv 0$ odpade in se zato robna pogoja pretvorita v

$$X(0) = 0 \qquad \text{in} \qquad X(a) = 0. \tag{5.1.7}$$

Enačba (5.1.5) skupaj z robnima pogojema (5.1.7) predstavlja poseben primer *Sturm-Liouvillovega problema*, ki ga bomo podrobneje opisali v naslednjem razdelku. Robna pogoja (5.1.7) zahtevata, da ima netrivialna rešitev X enačbe (5.1.5) dve ničli; to je mogoče le, če je $\lambda > 0$ (kot sledi iz Sturmovega primerjalnega kriterija ali pa z direktnim računom), zato pišimo $\lambda = \mu^2$, kjer je $\mu > 0$. Potem se splošna rešitev enačbe (5.1.5) glasi $X = A\cos\mu x + B\sin\mu x$, kjer sta A in B konstanti. Iz (5.1.7) takoj sledi, da mora biti $A = 0$ in $B\sin\mu a = 0$. Ker nas zanimajo le neničelne rešitve, bomo vzeli, da $B \neq 0$, torej mora biti $\sin\mu a = 0$. To pomeni, da je μa nujno ena od ničel funkcije sin, torej (ker je tudi $\mu > 0$) $\mu a = n\pi$ za kak $n = 1, 2, \ldots$ Za vsak tak n smo tako dobili konstanto $\mu_n = \frac{n\pi}{a}$ in funkcijo $X_n(x) = \sin\mu_n x$, ki zadošča enačbi (5.1.5) in pogojema (5.1.7). (Temu zadoščajo tudi vse funkcije $C_n X_n$, kjer so C_n konstante, vendar bi bilo pisanje konstant C_n v nadaljevanju postopka odveč, ker jih lahko v produktih $u_n(x, T) = X_n(x)T_n(t)$ štejemo kot dele faktorjev T_n.)

Splošna rešitev enačbe (5.1.6), kjer je $\lambda = \mu_n^2 = (\frac{n\pi}{a})^2$, je $T_n = A_n\cos\mu_n ct + B_n\sin\mu_n ct$, kjer sta A_n in B_n poljubni konstanti. Za vsak n torej funkcija

$$u_n(x, t) = X_n(t)T_n(t) = (A_n\cos\mu_n ct + B_n\sin\mu_n ct)\sin\mu_n x$$

zadošča tako enačbi (5.1.1) kot robnima pogojema (5.1.2). Isto velja potem tudi za vsoto

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n\cos\frac{n\pi c}{a}t + B_n\sin\frac{n\pi c}{a}t\Big)\sin\frac{n\pi}{a}x, \tag{5.1.8}$$

če je le vrsta na desni v (5.1.8) dovolj prijazna, da jo smemo členoma dvakrat odvajati tako na x kot na t (torej, če vrsti drugih odvodov konvergirata enakomerno za $x \in [0, a]$ in t na končnih intervalih v $\mathbb{R}^+$). Če privzamemo to, potem moramo le še določiti konstante A_n in B_n tako, da bo funkcija u, podana z (5.1.8), zadoščala tudi začetnima pogojema (5.1.3), se pravi

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{n\pi}{a}x = f(x) \qquad \text{in} \qquad u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{a}B_n\sin\frac{n\pi}{a}x = g(x). \tag{5.1.9}$$

Da je to mogoče, če sta f in g iz prostora $L^2(0, a)$, sledi iz teorije Fourierovih vrst. Funkciji f in g namreč najprej razširimo na interval $[-a, a]$ kot lihi funkciji (torej definiramo $f(x) = -f(x)$ za $x \in [-a, 0)$ in podobno za g), nato pa ju razširimo na celo realno os kot periodični funkciji s periodo $2a$. Potem ju je mogoče razviti v Fourierovi vrsti po funkcijah $\sin\frac{n2\pi}{2a}x = \sin\frac{n\pi}{a}x$. Ker so te funkcije ortogonalne na intervalu $(0, a)$ in je kvadrat norme funkcije $\sin\mu_n x$ enak $\int_0^a \sin^2\frac{n\pi}{a}x\,dx = \frac{a}{2}$, se koeficienti v razvojih (5.1.9) funkcij f in g izražajo kot

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx \qquad \text{in} \qquad \frac{n\pi c}{a}B_n = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx.$$

Ker so A_n koeficienti v razvoju funkcije f (kot lihe funkcije s periodo $2a$) v Fourierovo vrsto, konvergirajo proti 0 in so torej omejeni. Koeficienti B_n pa konvergirajo proti 0 še hitreje od Fourierovih koeficientov funkcije g. Pričakujemo torej lahko, da bo vrsta (5.1.8) konvergirala. Toda, ko njene člene dvakrat odvajamo na x ali na t, se pred koeficienti pojavijo faktorji n^2, ki lahko zapletejo vprašanje konvergence. Če predpostavimo, da sta funkciji f in g dovolj lepi, recimo taki, da imata ustrezni lihi, na $\mathbb{R}$ razširjeni, funkciji zvezna četrta odvoda, potem bodo njuni Fourierovi koeficienti omejeni s $\frac{\text{konst.}}{n^4}$ (glejte 8. nalogo iz razdelka 4.2) in vrsti drugih odvodov bosta na končnih intervalih za t in x dominirani s konvergentno vrsto konst. $\sum \frac{1}{n^2}$, torej enakomerno konvergentni. Tedaj nam gornji postopek res da rešitev problema. Vendar pa je predpostavka o štirikratni odvedljivosti razširjenih funkcij f in g s fizikalnega stališča prestroga in nenaravna. Pravi pojmovni aparat za obravnavanje tovrstnih vprašanj (in parcialnih diferencialnih enačb na splošno) je teorija distribucij, ki pa je tukaj ne bomo obravnavali. Pri enačbi strune pa obstaja še druga pot do rešitve. Ta enačba je namreč ena redkih, v praksi pomembnih parcialnih diferencialnih enačb, pri kateri je mogoče eksplicitno izraziti splošno rešitev.

5.1.2. Neskončna struna

Poglejmo, kako se enačba (5.1.1) spremeni, ko vanjo vpeljemo novi spremenljivki

$$\xi = x - ct \qquad \text{in} \qquad \eta = x + ct.$$

Za vsako (odvedljivo) funkcijo $u(x,t)$ je

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\xi + u_\eta \qquad \text{in podobno} \quad u_t = c(u_\eta - u_\xi).$$

Ko uporabimo ti dve pravili še na funkcijah u_x in u_t (namesto na u), dobimo

$$u_{xx} = (u_x)_\xi + (u_x)_\eta = (u_\xi + u_\eta)_\xi + (u_\xi + u_\eta)_\eta = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

in podobno

$$u_{tt} = c^2(u_{\eta\eta} - 2u_{\xi\eta} + u_{\xi\xi}).$$

Ko vstavimo ta izraza za u_{tt} in u_{xx} v enačbo (5.1.1), se le-ta poenostavi v

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0.$$

Od tod razberemo, da je funkcija $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ odvisna le od ξ, saj je njen odvod na η identično 0. Torej je $\frac{\partial u}{\partial \xi} = F_0(\xi)$ za kako funkcijo F_0 in zato $u = F(\xi)+G(\eta)$, kjer je F poljubna funkcija z odvodom F_0, G pa poljubna odvedljiva funkcija. V prvotnih spremenljivkah x in t se u izraža kot

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct). \tag{5.1.10}$$

Lahko je preveriti, da za vsaki dvakrat odvedljivi funkciji F in G funkcija u, podana z (5.1.10), zadošča enačbi (5.1.1).

Določimo sedaj F in G tako, da bo funkcija u iz (5.1.10) zadostila tudi začetna pogoja (5.1.3), torej

$$u(x,0) = F(x)+G(x) = f(x) \qquad \text{in} \qquad u_t(x,0) = c(G'(x)-(F'(x)) = g(x). \tag{5.1.11}$$

Ko prvo enačbo v (5.1.11) odvajamo in jo nato kombiniramo z drugo, dobimo

$$G'(x) = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2c}g(x) \qquad \text{in} \qquad F'(x) = \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2c}g(x),$$

torej

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds + C,$$

kjer je C poljubna konstanta. Z upoštevanjem tega izraza za G sledi sedaj iz prve enačbe v (5.1.11), da je

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds - C.$$

Ko upoštevamo ta izraza za F in G v (5.1.10), dobimo

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x-ct) + f(x+ct)) + \frac{1}{2c}\left(\int_0^{x+ct} g(s)\,ds + \int_{x-ct}^0 g(s)\,ds\right)$$

oziroma

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x-ct) + f(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds. \tag{5.1.12}$$

To je *d'Alembertova formula* za valovno enačbo na premici. Funkcija u v (5.1.12) zadošča enačbi (5.1.1), če je g vsaj enkrat, f pa vsaj dvakrat odvedljiva funkcija; zadošča pa tudi začetnima pogojema (5.1.3). Če sta f in g lihi periodični funkciji s periodo $2a$ in $f(a) = 0 = g(a)$, potem iz (5.1.12) sledi, da je $u(0,t) = 0$ in

$$\begin{aligned} u(a,t) &= \frac{1}{2}(f(a-ct) + f(a+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{a-ct}^{a+ct} g(s)\,ds \\ &= \frac{1}{2}(f(a-ct-2a) + f(a+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{a-ct-2a}^{a+ct} g(s)\,ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

(Pri tem smo uporabili, da je integral periodične funkcije s periodo $2a$ po vseh intervalih širine $2a$ enak in je torej 0, če je funkcija liha.) Torej zadošča tedaj rešitev (5.1.12) tudi robnima pogojema (5.1.2).

Naloge

1. Določite rešitev enačbe (5.1.1) pri robnih pogojih (5.1.2) in začetnih pogojih (5.1.3), če je $f(x) = x(a-x)$ in $g(x) = 0$ za vse $x \in [0,a]$.

2. Rešite enačbo (5.1.1) pri robnih pogojih $u_x(0,t) = 0$ in $u(a,0) = 0$ ter začetnih pogojih (5.1.3).

3. *Enačba za prevajanje toplote v eni dimenziji* se glasi

$$u_t = cu_{xx}, \tag{5.1.13}$$

kjer je $c > 0$ konstanta. Rešite to enačbo za $t > 0$ pri robnih pogojih

$$u(0,t) = 0, \qquad u(a,t) = 0 \tag{5.1.14}$$

in začetnem pogoju

$$u(x,0) = f(x). \tag{5.1.15}$$

(Rezultat:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2\pi^2 c}{a^2}t} \sin \frac{n\pi}{a} x, \tag{5.1.16}$$

kjer so A_n koeficienti v razvoju funkcije f (razširjene kot lihe funkcije s periodo $2a$) v Fourierovo vrsto po funkcijah $\sin \frac{n\pi}{a} x$, torej $A_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi}{a} x\, dx$.)

† **4.** Izkoristite dejstvo, da eksponentna funkcija v formuli (5.1.16) hitro pada za $t > 0$, za dokaz dejstva, da je vrsta v (5.1.16) konvergentna in jo smemo členoma odvajati, tako da (5.1.16) res predstavlja rešitev enačbe (5.1.13) za $t > 0$. (Opomba: Za $t < 0$ vrsta (5.1.16) običajno ni konvergentna, ker konvergirajo faktorji $e^{-\frac{n^2\pi^2 c}{a^2}t}$ proti ∞, ko gre n proti ∞. Toplotna enačba opisuje fizikalno ireverzibilne procese, v katerih časa ne moremo obrniti. Ko smo na primer pomešali vročo in hladno tekočino, ne moremo obrniti postopka in ponovno ločiti vročega od hladnega dela.)

5. Rešite toplotno enačbo (5.1.13) (za $t > 0$) pri začetnem pogoju (5.1.15) in robnih pogojih

$$u(0,t) = A, \qquad u(a,t) = B,$$

kjer sta A in B konstanti. (Navodilo: obravnavajte diferencialno enačbo in začetni pogoj za funkcijo $v(x,t) := u(x,t) - A - kx$, kjer je konstanta k tako določena, da je $v(a,t) = B - A - ka = 0$; tedaj je $v(0,t) = 0 = v(a,t)$.)

*** Cauchyeva naloga za valovno enačbo v $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$.** Cilj naslednjih nekaj nalog je izpeljati formulo za rešitev valovne enačbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u \qquad \text{pri začetnih pogojih } u(\vec{x},0) = f(\vec{x},0) \quad \text{in} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},0) = g(\vec{x}) \tag{5.1.17}$$

za dani funkciji f in g na $\mathbb{R}^3$ ali pa na $\mathbb{R}^2$. (To imenujemo *Cauchyeva naloga* za valovno enačbo.) Pri tem bomo z $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots$ označevali vektorje, njihove komponente pa z $x_j, y_j, z_j, \ldots$

* **6.** Za zvezno funkcijo h na $\mathbb{R}^3$ definirajmo njeno *sferično povprečje* kot funkcijo na $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, podano z

$$\hat{h}(\vec{x},r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\|\vec{z}-\vec{x}\|=|r|} h(\vec{z})\, dS(\vec{z}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\|\vec{y}\|=1} h(\vec{x}+r\vec{y})\, dS(\vec{y}), \tag{5.1.18}$$

če je $r \neq 0$ in $\hat{h}(\vec{x},0) = h(\vec{x})$. Opazite, da je $\hat{h}$ soda funkcija v spremenljivki r.

(i) Opazite, da je po Gaussovem izreku (za $r > 0$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\hat{h}(\vec{x},r) &= \frac{1}{4\pi}\iint_{\|\vec{y}\|=1} \vec{\nabla}h(\vec{x}+r\vec{y})\cdot\vec{y}\,dS(\vec{y})\\ &= \frac{1}{4\pi}\iiint_{\|\vec{y}\|\le 1} r\,\mathrm{div}\,\vec{\nabla}h(\vec{x}+r\vec{y})\,dV(\vec{y})\\ &= \frac{1}{4\pi r^2}\iiint_{\|\vec{z}\|\le r} \Delta h(\vec{x}+\vec{z})\,dV(\vec{z}),\end{aligned}$$

torej (če pomnožimo z r^2 in izrazimo zadnji integral v sferičnih koordinatah)

$$r^2\frac{\partial}{\partial r}\hat{h}(\vec{x},r) = \frac{1}{4\pi}\int_0^r \rho^2 \iint_{\|\vec{y}\|=1} \Delta h(\vec{x}+\rho\vec{y})\,dS(\vec{y})\,d\rho.$$

Izpeljite od tod, da je

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\hat{h}(\vec{x},r)\right) = \frac{r^2}{4\pi}\iint_{\|\vec{y}\|=1} \Delta h(\vec{x}+r\vec{y})\,dS(\vec{y}) = r^2\Delta_{\vec{x}}\hat{h}(\vec{x},r).$$

(ii) Sklepajte iz zadnje enakosti v (i), da funkcija

$$\tilde{h}(\vec{x},r) := r\hat{h}(\vec{x},r)$$

zadošča enačbi

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\tilde{h}(\vec{x},r) = \Delta_{\vec{x}}\tilde{h}(\vec{x},r). \tag{5.1.19}$$

***7.** Za vsako funkcijo $u(\vec{x},t)$ definirajmo $\tilde{u}(\vec{x},r,t) := \widetilde{h_t}(\vec{x},r)$, kjer je $h_t(\vec{x},r) := u(\vec{x},r,t)$ in je funkcija $\widetilde{h_t}$ definirana kot v prejšnji nalogi, kjer nadomestimo h s h_t pri fiksnem t.

(i) Če je u rešitev Cauchyeve naloge (5.1.17), pokažite, s pomočjo prejšnje naloge, da $\tilde{u}$ zadošča pogojem

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial r^2},\qquad \tilde{u}(\vec{x},r,0) = \tilde{f}(\vec{x},r),\qquad \frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}(\vec{x},r,0) = \tilde{g}(\vec{x},r). \tag{5.1.20}$$

(ii) Sklepajte iz (5.1.20) po d'Alembertovi formuli, da je

$$\tilde{u}(\vec{x},r,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{f}(\vec{x},r+ct)+\tilde{f}(\vec{x},r-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct}\tilde{g}(\vec{x},s)\,ds. \tag{5.1.21}$$

(iii) Premislite (izhajajoč iz $\tilde{u}(\vec{x},r,t) = \frac{r}{4\pi}\iint_{\|\vec{y}\|=1} u(\vec{x}+r\vec{y},t)\,dS(\vec{y})$), da je

$$u(\vec{x},t) = \lim_{r\to 0}\frac{\tilde{u}(\vec{x},r,t)}{r}$$

Za izračun te limite uporabite formulo (5.1.21) in L'Hospitalovo pravilo, torej je

$$\begin{aligned} u(\vec{x},t) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}(\vec{x},r+ct)+\frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}(\vec{x},r-ct)\right]_{r=0}+\frac{1}{2c}\left[\tilde{g}(\vec{x},ct)-\tilde{g}(\vec{x},-ct)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}(\vec{x},r)\Big|_{r=ct}+\frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}(\vec{x},r)\Big|_{r=-ct}\right]+\frac{1}{2c}\left[\tilde{g}(\vec{x},ct)-\tilde{g}(\vec{x},-ct)\right]. \end{aligned}$$

Ker sta $\hat{f}$ in $\hat{g}$ sodi funkciji v spremenljivki r, sta $\tilde{f}$ $(= r\hat{f})$ in $\tilde{g}$ lihi, $\frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}$ pa soda, zato se gornja formula poenostavi v

$$u(\vec{x},t) = \frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}(\vec{x},r)\Big|_{r=ct}+\frac{1}{c}\,\tilde{g}(\vec{x},ct).$$

Po definiciji funkcij $\tilde{f}$ in $\tilde{g}$ lahko zadnjo enakost napišemo kot

$$u(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\iint_{\|\vec{y}\|=1} f(\vec{x}+r\vec{y})\,dS(\vec{y})\right)\Bigg|_{r=ct}+t\iint_{\|\vec{y}\|=1} g(\vec{x}+ct\vec{y})\,dS(\vec{y})\right]$$

oziroma

$$u(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(t\iint_{\|\vec{y}\|=1} f(\vec{x}+ct\vec{y})\,dS(\vec{y})\right)+t\iint_{\|\vec{y}\|=1} g(\vec{x}+ct\vec{y})\,dS(\vec{y})\right] \tag{5.1.22}$$

Preoblikujte to formulo (za $t > 0$) v

$$u(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi c^2t^2}\iint_{\|\vec{z}-\vec{x}\|=ct}\left[f(\vec{z})+\vec{\nabla}f(\vec{z})\cdot(\vec{z}-\vec{x})+tg(\vec{z})\right]dS(\vec{z}). \tag{5.1.23}$$

To je *Kirchhoffova formula.* Opazite, da je vrednost $u(\vec{x},t)$ odvisna le od vrednosti funkcij f, $\vec{\nabla}f$ in g na sferi s središčem $\vec{x}$ in polmerom ct.

***8.** Cauchyevo nalogo (5.1.17) v dveh dimenzijah, kjer sta f in g funkciji na $\mathbb{R}^2$, lahko rešujemo kot nalogo v treh dimenzijah, le da sta funkciji f in g neodvisni od tretje spremenljivke. Zato lahko ploskovna integrala po enotski sferi v (5.1.22) preoblikujemo v dvojna integrala po krogu $y_1^2+y_2^2 \le 1$. Upoštevajoč prispevek iz zgornje in spodnje polovice sfere pokažite, da se tako preoblikovana formula glasi

$$u(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(t\iint_{\|\vec{y}\|\le 1}\frac{f(\vec{x}+ct\vec{y})}{\sqrt{1-\|y\|^2}}\,dp(\vec{y})\right)+t\iint_{\|\vec{y}\|\le 1}\frac{g(\vec{x}+ct\vec{y})}{\sqrt{1-\|\vec{y}\|^2}}\,dp(\vec{y})\right], \tag{5.1.24}$$

kjer označuje $\vec{x} = (x_1, x_2)$ in $\vec{y} = (y_1, y_2)$ ravninska vektorja in $dp(\vec{y})$ ploščinski element. Preoblikujte to formulo (za $t > 0$) v

$$u(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi ct}\iint_{\|\vec{z}-\vec{x}\|\le ct}\frac{f(\vec{z})+\vec{\nabla}f(\vec{z})\cdot(\vec{z}-\vec{x})+tg(\vec{z})}{\sqrt{c^2t^2-\|\vec{z}-\vec{x}\|^2}}\,dp(\vec{z}). \tag{5.1.25}$$

Opazite, da je tokrat vrednost $u(\vec{x},t)$ odvisna od vrednosti funkcij f in g na krogu $\|\vec{z}-\vec{x}\| \leq ct$ in ne le od vrednosti na robni krožnici.

9. (*Izpeljava enačbe strune*) Opazujmo struno, ki leži na gladki vodoravni podlagi vzdolž osi x, niha pa v smeri osi y, ki je tudi vodoravna. Na majhen odsek strune med točkama A in B delujeta sosednja odseka s silama $\vec{F}(x,t)$ in $\vec{F}(x+dx,t)$. Ker se delci strune ne gibljejo v smeri osi x, bomo privzeli, da se sili v smeri osi x uravnovesita, torej

$$F(x+dx,t)\cos\varphi(x+dx,t) =: F_0 = F(x,t)\cos\varphi(x,t). \tag{5.1.26}$$

Rezultanta $F(x+dx,t)\sin\varphi(x+dx,t) - F(x,t)\sin\varphi(x,t)$ sil v smeri osi y pa je po Newtonovem zakonu enaka produktu mase dm in pospeška $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$, kjer smo z u označili odmik od ravnovesne lege. Privzemimo, da je linearna gostota ρ strune (to je masa na enoto dolžine) konstantna. Sklepajte od tod, da velja enakost

$$\frac{\partial}{\partial x}(F\sin\varphi) = \rho\,\frac{\partial s}{\partial x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

kjer je $ds = \sqrt{1+(\frac{\partial u}{\partial x})^2}$ ločni element na struni. Z upoštevanjem enakosti (5.1.26) in dejstva $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}$ izpeljite od tod enačbo

$$F_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Pri majhnih naklonih delov strune lahko $\frac{\partial u}{\partial x}$ zanemarimo in s tem enačbo poenostavimo v $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, kjer je $c = \sqrt{\frac{F_0}{\rho}}$.

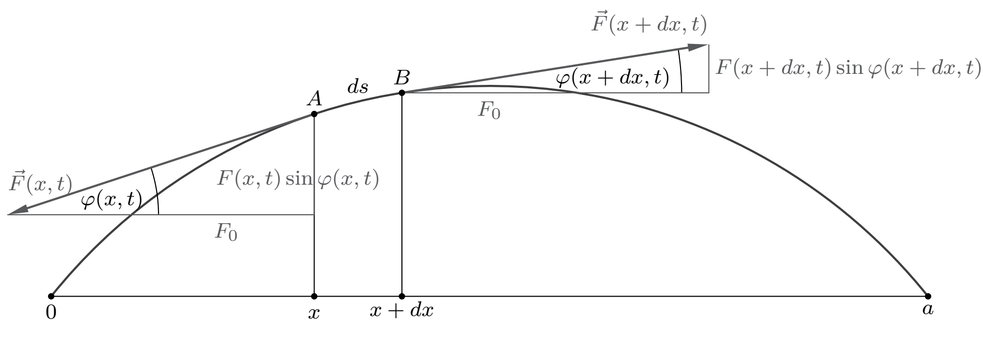

Figure 5.2. Sile $\vec{F}(\cdot)$ na del strune v danem trenutku t.

5.2. Sturm-Liouvillov problem

V prejšnjem razdelku smo videli, da reševanje parcialnih diferencialnih enačb iz fizike lahko privede do reševanja navadne diferencialne enačbe oblike

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = -\lambda y, \tag{5.2.1}$$

na kakem intervalu $[a, b]$, pri robnih pogojih oblike

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad \text{in} \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$
$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0 \ \text{ in } \ \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0). \tag{5.2.2}$$

Tukaj so α_j, β_j realne konstante. Predpostavili bomo, da so P, Q in R zvezne funkcije na $[a, b]$ z realnimi vrednostmi. Parameter λ v enačbi (5.2.1) je na začetku neznan in ga je treba določiti tako, da ima enačba (5.2.1) pri pogojih (5.2.2) netrivialne rešitve. Ta problem, imenovan *Sturm-Liouvillov problem*, spominja na vprašanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev operatorjev iz linearne algebre, zato bomo tudi tukaj vpeljali nekaj operatorske terminologije.

Označimo s $C[a, b]$ vektorski prostor vseh kompleksnih zveznih funkcij na intervalu $[a, b]$, opremljen z običajnim skalarnim produktom

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

$C^2[a, b]$ pa naj označuje vektorski podprostor vseh dvakrat zvezno odvedljivih funkcij na $[a, b]$. Za poljubne (fiksne) zvezne funkcije P, Q, R na $[a, b]$ je preslikava

$$L : C^2[a, b] \to C[a, b], \qquad L(y) := Py'' + Qy' + Ry \tag{5.2.3}$$

linearna. Imenujemo jo *linearni diferencialni operator drugega reda.* Enačbo (5.2.1) lahko sedaj napišemo kot

$$Ly = -\lambda y$$

in torej povprašuje po lastnih vektorjih y operatorja L. Vendar pa nas pri tem zanimajo le taki lastni vektorji $y \in C^2[a, b]$, ki zadoščajo tudi pogojema (5.2.2). Videli bomo, da je pri določenih predpostavkah dovolj lastnih vektorjev, da je mogoče z njimi izraziti vsako funkcijo iz $C^2[a, b]$ v obliki posplošene Fourierove vrste, podobno kot je v linearni algebri mogoče vsak vektor izraziti kot linearno kombinacijo lastnih vektorjev danega operatorja, če se le-ta da diagonalizirati. Poseben primer takega problema, namreč enačbo $y'' = -\lambda y$ pri pogojih $y(0) = 0$, $y(a) = 0$, smo rešili v prejšnjem razdelku (le da je tam nastopala kot neznana funkcija X namesto y); videli bomo, da je pri splošnejšem Sturm-Liouvillovem problemu rezutat podoben, le da rešitve morda ne moremo zapisati v elementarni obliki. Znan razred operatorjev (na končno razsežnih prostorih), ki imajo dovolj lastnih vektorjev, da jih je mogoče diagonalizirati, so sebi-adjungirani ali simetrični operatorji. Zato bomo najprej pogledali, kako je s tem pojmom pri diferencialnih operatorjih.

Ključna lastnost, ki določa adjungirani operator L^* danega linearnega operatorja L, je enakost
$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, L^*v\rangle,$$
ki velja za vsak u v domeni operatorja L in vsak v v domeni operatorja L^*. Da bi ugotovili, kaj taka enakost pomeni v primeru diferencialnega operatorja (5.2.3), naj bosta u in v poljubni dvakrat zvezno odvedljivi funkciji in preoblikujmo izraz

$$\langle Lu, v\rangle = \int_a^b (Pu'' + Qu' + Ru)\,\bar{v}\,dx$$

z integriranjem per partes, pri čemer upoštevajmo, da so po predpostavki P, Q in R realne zvezne funkcije, kjer naj bo P vsaj dvakrat, Q pa vsaj enkrat zvezno odvedljiva. Tako je

$$\begin{aligned}
\langle Lu, v\rangle &= \int_a^b Pu''\bar{v}\,dx + \int_a^b Qu'\bar{v}\,dx + \int_a^b Ru\bar{v}\,dx \\
&= Pu'\bar{v}\Big|_a^b - \int_a^b u'(P\bar{v})'\,dx + Qu\bar{v}\Big|_a^b - \int_a^b u(Q\bar{v})'\,dx + \int_a^b Ru\bar{v}\,dx \\
&= \big[Pu'\bar{v} + Qu\bar{v} - u(P\bar{v})'\big]_a^b + \int_a^b u(P\bar{v})''\,dx - \int_a^b u(Q\bar{v})'\,dx + \int_a^b Ru\bar{v}\,dx \\
&= \big[P(u'\bar{v} - u\bar{v}') + (Q - P')u\bar{v}\big]_a^b + \int_a^b u\overline{[(Pv)'' - (Qv)' + Rv]}\,dx.
\end{aligned}$$

Od tod se zdi, da je smiselno definirati *formalni adjungirani operator* L^* diferencialnega operatorja L, podanega s (5.2.3), s predpisom

$$L^*v := (Pv)'' - (Qv)' + Rv = Pv'' + (2P' - Q)v' + (P'' - Q' + R)v \qquad (v \in C^2[a,b]), \tag{5.2.4}$$

saj bo potem po gornjem računu veljala identiteta $\langle Lu, v\rangle = \langle u, L^*v\rangle$ vsaj v primerih, ko bo
$$\big[P(u'\bar{v} - u\bar{v}') + (Q - P')u\bar{v}\big]_a^b = 0. \tag{5.2.5}$$
Operator L, definiran z (5.2.3), bomo torej imenovali *formalno sebi-adjungiran*, če je $L^* = L$, kar po (5.2.4) in (5.2.3) pomeni, da je $2P' - Q = Q$ in $P'' - Q' + R = R$. Zadnji dve enakosti sta očitno ekvivalentni s pogojem $Q = P'$. Kadar je le-ta izpolnjen, se tudi leva stran v (5.2.5) poenostavi v $[P(u'\bar{v} - u\bar{v}')]_a^b$, operator L pa lahko napišemo v obliki
$$Ly = (Py')' + Ry. \tag{5.2.6}$$

Kadar je L oblike (5.2.6), integriranje per partes pove, da je L formalno sebi-adjungiran, torej

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle + \big[P(u'\bar{v} - u\bar{v}')\big]_a^b, \qquad (u, v \in C^2[a,b]), \tag{5.2.7}$$

tudi, ko je P le enkrat zvezno odvedljiva funkcija. Tako spoznamo, da velja naslednja trditev:

TRDITEV 5.2.1. *Če je diferencialni operator* (5.2.3) *formalno sebi-adjungiran na intervalu* $[a, b]$ *(tj. če je* $Q = P'$*, kjer je* P *realna, zvezno odvedljiva,* R *pa realna zvezna funkcija), potem velja Greenova identiteta* (5.2.7)*.*

V praksi pogosto nastopata robna pogoja oblike (5.2.2), ki ju bomo imenovali *ločena robna pogoja*, ker vsak od njiju vključuje po eno krajišče.

POSLEDICA 5.2.2. *Če funkciji* $u, v \in C^2[a, b]$ *zadoščata ločenima robnima pogojema* (5.2.2)*, potem je* $\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle$ *za vsak formalno sebi-adjungiran diferencialni operator* L*.*

PROOF. Po prejšnji trditvi zadošča izračunati, da je vrednost izraza $u'\bar{v} - u\bar{v}'$ v točkah a in b enaka 0. Račun je rutinski in ga prepuščamo bralcu. □

Pogosto je uporabna nekoliko splošnejša enačba od (5.2.1), namreč enačba oblike

$$Ly = -\lambda w y, \tag{5.2.8}$$

kjer je w dana pozitivna zvezna funkcija na $[a, b]$, imenovana *utež*, L pa diferencialni operator, podan s (5.2.3). Števila λ, za katera ima enačba (5.2.8) pri robnih pogojih (5.2.2) kako netrivialno rešitev, imenujemo *lastne vrednosti* diferencialnega operatorja L, rešitve y enačbe (5.2.8) in robnih pogojev (5.2.2) pa *lastne funkcije.* Spomnimo še na definicijo, ki smo jo vpeljali že v prejšnjem poglavju, in vpeljimo še nekaj oznak:

DEFINICIJA 5.2.3. Pozitivna zvezna funkcija w določa skalarni produkt na prostoru $C[a, b]$ s predpisom

$$\langle f, g\rangle_w := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)\,dx. \tag{5.2.9}$$

Funkciji f in g imenujemo *ortogonalni z utežjo* w, če je $\langle f, g\rangle_w = 0$. Normo, ki jo porodi skalarni produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$, bomo označevali z $\|\cdot\|_w$, torej $\|f\|_w = \sqrt{\langle f, f\rangle_w}$. Napolnitev prostora $C[a, b]$ v tej normi bomo označevali z $L^2_w(a, b)$.

TRDITEV 5.2.4. *Lastne vrednosti formalno sebi-adjungiranega diferencialnega operatorja* L *oblike* (5.2.6)*, kjer naj bo* P *brez ničel, pri robnih pogojih* (5.2.2)*, so realne in lastne funkcije, ki pripadajo različnim lastnim vektorjem, so med seboj ortogonalne z utežjo* w*. Za vsako lastno vrednost* λ *sta katerikoli pripadajoči lastni funkciji linearno odvisni.*

PROOF. Naj bo λ lastna vrednost, u pa kaka neničelna pripadajoča lastna funkcija, torej $Lu = -\lambda uw$. Ko pomnožimo skalarno to enakost z u, dobimo (z upoštevanjem posledice 5.2.2)

$$-\lambda\langle u, u\rangle_w = -\lambda\langle uw, u\rangle = \langle Lu, u\rangle = \langle u, Lu\rangle = \langle u, -\lambda uw\rangle = -\bar{\lambda}\langle u, u\rangle_w.$$

Od tod sledi $\bar{\lambda} = \lambda$, torej $\lambda \in \mathbb{R}$.

Naj bo sedaj v lastna funkcija, ki pripada kaki drugi lastni vrednosti μ operatorja L. Iz

$$-\lambda\langle u, v\rangle_w = \langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle = \langle u, -\mu vw\rangle = -\mu\langle u, v\rangle_w$$

lahko sklepamo, da mora biti $\langle u, v\rangle_w = 0$, v nasprotnem primeru bi namreč sledilo, da je $\lambda = \mu$.

Bodita sedaj u in v lastni funkciji, ki pripadata isti lastni vrednosti λ. Potem sta zaradi robnega pogoja v točki a vektorja $(u(a), u'(a))$ in $(v(a), v'(a))$ oba pravokotna na vektor (α_1, α_2), torej sta linearno odvisna, kar pomeni, da je $c_1(u(a), u'(a)) + c_2(v(a), v'(a)) = 0$ za kaki konstanti c_1, c_2. Toda tedaj funkcija $y := c_1 u + c_2 v$ reši homogeno linearno diferencialno enačbo $Ly + \lambda wy = 0$ pri pogojih $y(0) = 0 = y'(0)$. Ker velja to tudi za funkcijo 0, mora biti, zaradi enoličnosti takih rešitev, $y \equiv 0$, torej sta funkcij u in v linearno odvisni. □

Zanima nas, kdaj ima formalno sebi-adjungiran diferencialni operator pri ločenih robnih pogojih dovolj neničelnih, paroma ortogonalnih (z utežjo w) lastnih funkcij, da tvorijo ortogonalno bazo Hilbertovega prostora $L^2_w(a, b)$. Da bi lažje obravnavali to vprašanje, vpeljimo najprej naslednjo definicijo:

Definicija 5.2.5. Naj bo L diferencialni operator oblike (5.2.6), kjer je P realna, zvezno odvedljiva, R pa realna, zvezna funkcija na končnem intervalu $[a, b]$. Predpostavimo še, da je funkcija P strogo pozitivna na $[a, b]$ in naj bo w kaka nadaljnja strogo pozitivna zvezna funkcija na $[a, b]$. Tedaj imenujemo problem, določiti vse take $\lambda \in \mathbb{C}$, za katere ima enačba

$$Ly = -\lambda wy$$

pri robnih pogojih (5.2.2) kako netrivialno rešitev $y \in C^2[a, b]$, in določiti take rešitve y, *regularni Sturm-Liouvillov problem.*

Izrek 5.2.6. *(Sturm-Liouvillov izrek) Za vsak regularni Sturm-Liouvillov problem* (5.2.8), (5.2.2) *obstaja ortonormirana baza Hilbertovega prostora* $L^2_w(a, b)$, *sestavljena iz realnih lastnih funkcij* u_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *operatorja* L. *Za lastne vrednosti* λ_n, *ki pripadajo lastnim funkcijam* u_n *(torej* $Lu_n = -\lambda_n u_n w$*) velja* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. *Za vsako funkcijo* $y \in C^2[a, b]$, *ki zadošča robnima pogojema* (5.2.2), *konvergira vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} \langle y, u_n\rangle_w u_n$ *proti* y *enakomerno na* $[a, b]$.

Za dokaz izreka 5.2.6 bomo potrebovali precej priprave. Najprej bomo reducirali enačbo na enostavnejšo, da bo kasneje manj računanja. Vsako enačbo oblike

$$Py'' + Qy' + Ry = -\lambda wy, \tag{5.2.10}$$

kjer sta P in w pozitivni zvezni funkciji na $[a, b]$, lahko delimo z w in jo nato poskusimo poenostaviti z vpeljavo nove neznane funkcije u (namesto y) prek zveze $y = uv$, kjer je v primerna funkcija brez ničel, ki jo bomo šele določili. Ko vstavimo to in zvezi $y' = u'v + uv'$, $y'' = u''v + 2u'v' + uv''$ v enačbo (5.2.10), deljeno z w, jo nato delimo z v in uredimo, dobimo

$$P_1 u'' + Q_1 u' + R_1 u = -\lambda u, \tag{5.2.11}$$

kjer je

$$P_1 = Pw^{-1}, \qquad Q_1 = 2Pw^{-1}\frac{v'}{v} + Qw^{-1} \qquad \text{in} \qquad R_1 = Pw^{-1}\frac{v''}{v} + Qw^{-1}\frac{v'}{v} + Rw^{-1}.$$

Funkcijo v izberimo tako, da bo $Q_1 = \frac{1}{2}P_1'$. (Razlog za tako izbiro bo jasen nekoliko kasneje.) Izbrati moramo torej v tako, da bo $\frac{v'}{v} = \frac{1}{4}\frac{(Pw^{-1})'}{Pw^{-1}} - \frac{Q}{2P}$, se pravi, da naj bo

$$v(x) = \left(P(x)w(x)^{-1}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\int \frac{Q(x)}{P(x)}\,dx}. \tag{5.2.12}$$

Sedaj pa vpeljimo v enačbo (5.2.11) novo neodvisno spremenljivko $t = t(x)$ (namesto x). Če označimo s pikami odvode na t, imamo $u' = \frac{\dot u}{\dot x}$ in $u'' = \frac{1}{\dot x}\frac{d}{dt}(\frac{\dot u}{\dot x}) = \dot x^{-3}(\ddot u \dot x - \dot u \ddot x)$. Po krajšem računu tako preoblikujemo enačbo (5.2.11) v

$$\frac{P_1}{\dot x^2}\,\ddot u + \left(\frac{Q_1}{\dot x} - \frac{\ddot x}{\dot x^3}P_1\right)\dot u + R_1 u = -\lambda u. \tag{5.2.13}$$

Če izberemo t tako, da je

$$\dot x = \sqrt{P_1(x)}, \tag{5.2.14}$$

torej npr. $t = \int_a^x \frac{ds}{\sqrt{P_1(s)}}$, je t naraščajoča funkcija spremenljivke x, v enačbi (5.2.13) koeficient pred $\ddot u$ enak 1, koeficient pred $\dot u$ pa enak (upoštevajoč, da je $Q_1 = \frac{P_1'}{2}$, $\ddot x = \frac{d}{dt}(\sqrt{P_1}) = \frac{\dot P_1}{2\sqrt{P_1}}$ in $P' = \frac{\dot P_1}{\dot x}$)

$$\frac{1}{2}\,\frac{P_1'(x)}{\dot x} - P_1(x)^{-3/2}\,\frac{1}{2}\,P_1(x)^{-1/2}\dot P_1(x)P_1(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot P_1}{\dot x^2} - \frac{\dot P_1}{P_1}\right) = 0.$$

S tem smo prvotno enačbo poenostavili v obliko

$$\ddot u + R_1 u = -\lambda u, \tag{5.2.15}$$

ki jo imenujemo *Liouvillova normalna oblika*. S tako transformacijo se sicer spremenijo koeficienti v robnih pogojih (5.2.2), a narava robnih pogojev ostane enaka. Transformacija $y \mapsto u = v^{-1}y$ je izometrija Hilbertovega prostora $L^2_w(a,b)$ na Hilbertov prostor $L^2_{v^2w}(a,b)$, transformacija $u \mapsto u \circ x$ pa izometrija Hilbertovega prostora $L^2_{v^2w}(a,b)$ na Hilbertov prostor $L^2_{[(v^2w)\circ x]\dot x}(t(a),t(b))$ (naloga 1). Če je operator na levi strani enačbe (5.2.10) formalno sebi-adjungiran (torej $Q = P'$), tako da so njegove lastne funkcije ortogonalne z utežjo w, potem morajo torej biti lastne funkcije operatorja na levi v (5.2.15) ortogonalne z utežjo $\dot x[(v^2w)\circ x]$. Po (5.2.12) in (5.2.14) imamo

$$\dot x v^2 w = \sqrt{Pw^{-1}}\left(Pw^{-1}\right)^{1/2} e^{-\int \frac{P'}{P}\,dx} w = Pw^{-1}CP^{-1}w = C,$$

kjer je C konstanta. To je v skladu s pričakovanjem, saj je utež za enačbe oblike (5.2.15) enaka 1. Na ta način lahko prevedemo dokaz izreka 5.2.6 iz splošnih na enačbe oblike (5.2.15). Zato bomo v dokazovanju izreka 5.2.6 obravnavali le enačbe oblike

$$y'' + qy = -\lambda y, \tag{5.2.16}$$

kjer je q zvezna funkcija na intervalu $[a,b]$, in sicer le pri robnih pogojih

$$y(a) = 0 \qquad \text{in} \qquad y(b) = 0. \tag{5.2.17}$$

Za splošnejše robne pogoje (5.2.2) je dokaz zelo podoben, le nekoliko več računanja; potrebne spremembe bomo nakazali v nalogah.

Če poznamo dve linearno neodvisni rešitvi y_1, y_2 homogene enačbe

$$y'' + qy = 0, \tag{5.2.18}$$

potem lahko s pomočjo formul (1.3.4) poiščemo splošno rešitev enačbe

$$y'' + qy = f \tag{5.2.19}$$

za vsako (zvezno) funkcijo f. Partikularna rešitev enačbe (5.2.19) je $y_p = c_1y_1 + c_2y_2$, kjer sta funkciji c_1 in c_2 določeni z (1.3.4), torej lahko vzamemo, da je

$$c_1(x) = \int_x^b \frac{y_2(t)}{W} f(t)\,dt \qquad \text{in} \qquad c_2 = \int_a^x \frac{y_1(t)}{W} f(t)\,dt,$$

kjer je determinanta Wronskega W konstantna (po Liouvillovi formuli, saj v enačbi (5.2.18) ni člena z y'). Torej lahko y_p izrazimo kot

$$y_p = c_1y_1 + c_2y_2 = y_1(x)\int_x^b \frac{y_2(t)}{W} f(t)\,dt + y_2(x)\int_a^x \frac{y_1(t)}{W} f(t)\,dt. \tag{5.2.20}$$

Kadar je $y_1(a) = 0$ in $y_2(b) = 0$, ta rešitev zadošča pogoju $y_p(a) = 0 = y_p(b)$, saj je $c_2(a) = 0$ in $c_1(b) = 0$. Če vpeljemo *Greenovo funkcijo*

$$G(x,t) := \frac{1}{W}\left\{\begin{array}{ll} y_1(t)y_2(x), & t \le x \\ y_1(x)y_2(t), & x \le t \end{array}\right\} = \frac{1}{W}\, y_1(\min\{t,x\})y_2(\max\{t,x\}), \tag{5.2.21}$$

lahko y_p zapišemo tako, kot pove naslednja trditev:

TRDITEV 5.2.7. *Če sta y_1 in y_2 linearno neodvisni rešitvi enačbe* (5.2.18)*, ki zadoščata pogojema $y_1(a) = 0$ in $y_2(b) = 0$, in je Greenova funkcija G definirana s* (5.2.21)*, potem je*

$$y_p = \int_a^b G(x,t) f(t)\,dt \tag{5.2.22}$$

rešitev nehomogene enačbe (5.2.19)*, ki zadošča pogojema $y(a) = 0$ in $y(b) = 0$.*

Ta trditev pove, da je s formulo v (5.2.22) določen inverz L^{-1} diferencialnega operatorja $Ly = y'' + q(x)y$ iz prostora vseh tistih dvakrat zvezno odvedljivih funkcij y na intervalu $[a,b]$, ki zadoščajo pogojema $y(a) = 0 = y(b)$, v prostor vseh zveznih funkcij na $[a,b]$. Za vsak $\lambda \neq 0$ velja, da je λ lastna vrednost operatorja L natanko tedaj, ko je λ^{-1} lastna vrednost operatorja L^{-1}. Ker je operator L^{-1} podan s formulo (5.2.22), v kateri je jedro G zvezna simetrična (tj. $G(x,y) = \overline{G(y,x)}$) funkcija, torej $\int_a^b\int_a^b |G(x,t)|^2\,dt\,dx < \infty$, je sebi-adjungiran in spada v poseben razred operatorjev, ki jih v operatorski teoriji imenujemo Hilbert-Schmidtovi operatorji. Iz teorije takih operatorjev bi sedaj lahko takoj izpeljali Sturm-Liouvillov izrek 5.2.6 [19], [32]. Ker pa v tem delu ne želimo predpostaviti predznanja iz operatorske teorije, bomo v dokazovanju Sturm-Liouvillovega izreka v naslednjem razdelku raje ubrali drugo pot. Njena prednost je tudi v tem, da pripelje do asimptotičnih ocen za razporeditev lastnih vrednosti.

Naloge

1. (i) Naj bo v pozitivna, zvezno odvedljiva funkcija na $[a,b]$. Pokažite, da je s predpisom $Tu := vu$ definirana linearna preslikava iz $L^2_{v^2w}(a,b)$ na $L^2_w(a,b)$, ki ohranja skalarni produkt: $\langle Tu_1, Tu_2\rangle_w = \langle u_1, u_2\rangle_{v^2w}$. Torej je T izometrija.

(ii) Naj bo $t = t(x)$ strogo naraščajoča, zvezno odvedljiva funkcija na $[a,b]$ in $x = x(t)$ njen inverz. Pokažite, da je s predpisom $Su := u\circ x$ definirana linearna preslikava iz $L^2_w(a,b)$ na $L^2_{(w\circ x)\frac{dx}{dt}}(t(a), t(b))$, ki ohranja skalarni produkt.

2. Pokažite, da je mogoče vsak diferencialni operator

$$Ly := Py'' + Qy' + Ry,$$

kjer je P zvezno odvedljiva, Q in R pa zvezni funkciji na $[a,b]$, pomnožiti s tako pozitivno zvezno odvedljivo funkcijo ρ, da je operator ρL formalno sebi-adjungiran. (Poiskati je treba torej tako funkcijo ρ, da bo $(\rho P)' = \rho Q$.)

3. (i) Določite funkcijo g tako, da bodo rešitve regularnega Sturm-Liouvillovega problema $f(x)y'' + g(x)y' + (q(x) + \lambda\rho(x))y$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, za različne λ med seboj ortogonalne z utežjo $\rho(x)$ na intervalu $[0,1]$.

(ii) Koliko je utež za ortogonalnost pri Sturm-Liouvillovem problemu

$$(1+x^2)y'' + xy' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0 = y(1)?$$

4. S katero pozitivno funkcijo $\rho = \rho(x)$ je treba pomnožiti operator $L(y) = x^2y'' + y'$, da bo formalno sebi-adjungiran? S kakšno utežjo so potem ortogonalne lastne funkcije dobljenega operatorja pri robnih pogojih $y(1) = 0 = y(2)$?

5. Pokažite, da so vse lastne vrednosti Sturm-Liouvillovega problema

$$y'' + (q+\lambda)y = 0, \qquad y(a) = 0 = y(b)$$

pozitivne, če je q negativna zvezna funkcija na $[a,b]$. (Namig: Sturmov primerjalni kriterij (izrek 1.5.5).) Sklepajte, da na splošno za vse lastne vrednosti velja $\lambda_n > -M := -\max_{a\le x\le b} q(x)$.

6. Določite lastne vrednosti in lastne funkcije Sturm-Liouvillovega problema

$$y'' = -\lambda y, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(\pi) = y(\pi).$$

7. Izračunajte lastne vrednosti in ortonormirane lastne funkcije za

$$xy'' + y' + \frac{\lambda}{x}y = 0, \qquad y(1) = 0, \qquad y(a) = 0 \qquad (a > 1).$$

Katera funkcija je tukaj utež?

8. Opazite, da so lastne funkcije, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim formalno sebi-adjungiranega operatorja $Lu = (Pu')' + Ru$ pri *periodičnih robnih pogojih* $u(b) = u(a)$ in $u'(b) = u'(a)$, med seboj ortogonalne, če je $P(b) = P(a)$.

* **9.** Dokažite, da ima n-ta lastna funkcija (torej tista, ki pripada lastni vrednosti λ_n) regularnega Sturm-Liouvillovega problema (5.2.16), (5.2.17) natanko $n-1$ ničel v intervalu (a, b). (Navodilo: Označimo z $y(x, \lambda)$ tisto rešitev enačbe (5.2.16), ki zadošča pogojema $y(a, \lambda) = 0$ in $y'(a, \lambda) = 1$. Naj bo $\nu_k(\lambda)$ k-ta realna ničla funkcije y, ki je večja od a, torej $y(\nu_k(\lambda), \lambda) = 0$ in $a < \nu_1(\lambda) < \nu_2(\lambda) < \ldots$ Iz razdelka 1.8 sledi, da je y enakomerno zvezna funkcija parametra λ za $x \in [a, b]$. Sklepajte, da je ν_k zvezna funkcija spremenljivke λ in s pomočjo Sturmovega primerjalnega kriterija ter 2. naloge iz razdelka 1.5 opazujte, kako se spreminja $\nu_k(\lambda)$, ko λ narašča.)

5.3. Dokaz Sturm-Liouvillovega izreka†*

Sklepanje, ki nas je pripeljalo do trditve 5.2.7, velja tudi za enačbo

$$y'' + (q + \lambda)y = f, \tag{5.3.1}$$

kjer je λ parameter. Le da sta sedaj rešitvi y_1 in y_2 homogene enačbe

$$y'' + (q + \lambda)y = 0 \tag{5.3.2}$$

odvisni tudi od λ.

V tem razdelku bomo z y_1 in y_2 označevali tisti rešitvi enačbe (5.3.2), ki zadoščata pogojem

$$y_1(a; \lambda) = 0, \quad y_1'(a; \lambda) = 1, \quad y_2(b; \lambda) = 0, \quad y_2'(b; \lambda) = 1. \tag{5.3.3}$$

Determinanta Wronskega takih dveh funkcij y_1, y_2 je sicer neodvisna od x, lahko pa je odvisna od λ. Zato je tudi ustrezna Greenova funkcija odvisna tudi od λ:

$$G(x, t; \lambda) = \frac{y_1(\min\{t, x\}; \lambda) y_2(\max\{t, x\}; \lambda)}{W(\lambda)} \tag{5.3.4}$$

Ta Greenova funkcija ni definirana v točkah λ, za katere je $W(\lambda) = 0$, kar pomeni, da sta takrat funkciji y_1 in y_2 linearno odvisni. Tedaj je y_1 rešitev Sturm-Liouvillovega problema (5.2.16), (5.2.17). Velja tudi obratno: če je λ lastna vrednost Sturm-Liouvillovega problema (5.2.16), (5.2.17), potem za ustrezno lastno funkcijo y velja $y(a) = 0$ in $y(b) = 0$, zato mora biti y konstanten mnogokratnik rešitve y_1 (to sledi iz enoličnosti rešitev pri danih začetnih vrednostih $y(a)$ in $y'(a)$, veljati mora namreč $y = y'(a)y_1$) in tudi konstanten večkratnik rešitve y_2. Torej sta tedaj y_1 in y_2 linearno odvisni in zato njuna determinanta Wronskega enaka 0. Tako smo dokazali:

TRDITEV 5.3.1. *Lastne vrednosti Sturm-Liouvillovega problema* (5.2.16), (5.2.17) *so ničle determinante Wronskega $W(\lambda)$ tistih dveh rešitev y_1, y_2 enačbe* (5.3.2), *ki zadoščata pogojem* (5.3.3).

Po trditvi 5.2.4 so vse lastne vrednosti realne, torej ima po prejšnji trditvi funkcija W le realne ničle. Iz dokaza izreka o eksistenci rešitev diferencialnih enačb sledi (ker je rešitev enakomerna limita zaporedja približkov, ki so vsi holomorfne funkcije parametra), da sta rešitvi y_1 in y_2 holomorfni funkciji parametra λ (če je q holomorfna sledi to tudi iz opombe 5.4.2), torej je taka tudi W. Koristno bo vedeti, da so vse ničle funkcije W enostavne.

Lema 5.3.2. *Vse ničle funkcije W so enostavne; torej, če je $W(\lambda_0) = 0$, je $W'(\lambda_0) \neq 0$.*

Proof. Ker je funkcija W neodvisna od x, jo lahko izračunamo kar v točki $x = b$ in dobimo $W(\lambda) = y_1(b;\lambda)y_2'(b;\lambda) - y_2(b;\lambda)y_1'(b;\lambda) = y_1(b;\lambda)$. Oglejmo si funkcijo

$$g(x;\lambda) = y_1(x;\lambda_0)y_1'(x;\lambda) - y_1(x;\lambda)y_1'(x;\lambda_0).$$

Ker je $g(a;\lambda) = 0$, je $g(b;\lambda) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(x;\lambda)\,dx$. Ker je

$$g(b;\lambda) = W(\lambda_0)y_1'(b;\lambda) - W(\lambda)y_1'(b;\lambda_0)$$

in je $y_1(x;\lambda)$ rešitev enačbe (5.2.16) ter podobno za λ_0, sledi

$$\begin{aligned}
W(\lambda_0)&y_1'(b;\lambda) - W(\lambda)y_1'(b;\lambda_0) = \\
&= \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(x;\lambda)\,dx = \int_a^b y_1(x;\lambda_0)y_1''(x;\lambda) - y_1(x;\lambda)y_1''(x;\lambda_0)\,dx \\
&= \int_a^b y_1(x;\lambda_0)[-(q(x)+\lambda)y_1(x;\lambda)] - y_1(x;\lambda)[-(q(x)+\lambda_0)y_1(x;\lambda_0)]\,dx \\
&= -(\lambda-\lambda_0)\int_a^b y_1(x;\lambda)y_1(x;\lambda_0)\,dx.
\end{aligned}$$

Če je λ_0 ničla funkcije W, lahko to enakost za $\lambda \neq \lambda_0$ zapišemo kot

$$\frac{W(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}y_1'(b;\lambda_0) = \int_a^b y_1(x;\lambda)y_1(x;\lambda_0)\,dx. \tag{5.3.5}$$

Ko gre λ proti λ_0, gre leva stran zadnje enakosti proti $W'(\lambda_0)y_1'(b;\lambda_0)$, desna stran pa proti $\int_a^b y_1^2(x;\lambda_0)\,dx > 0$ (y_1 je realna, zvezna, neničelna funkcija), torej je $W'(\lambda_0) \neq 0$, zato je λ_0 enostavna ničla za W. □

Ključna bo naslednja lema:

Lema 5.3.3. *Ničle funkcije W lahko razporedimo v naraščajoče, neomejeno zaporedje*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \to \infty.$$

Natančneje: za vse dovolj velike k je na intervalu $((k-\frac{1}{2})^2\pi^2(b-a)^{-2}, (k+\frac{1}{2})^2\pi^2(b-a)^{-2})$ ($k \in \mathbb{N}$) natanko ena od ničel λ_j in vse dovolj velike λ_j ležijo v kakem takem intervalu.

Za Greenovo funkcijo (5.3.4) *in vsak* λ*, ki je različen od vseh ničel* λ_n *funkcije* W*, pa velja*

$$G(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Res}\left(\frac{G(x,t;z)}{\lambda - z}; \lambda_n\right), \tag{5.3.6}$$

kjer vrsta na desni konvergira enakomerno za $x, t \in [a,b]$*. (V vsoti na desni je* n*-ti člen residuum funkcije* $z \mapsto \frac{G(x,t;z)}{\lambda - z}$ *v točki* $z = \lambda_n$*.)*

Dokaz izreka 5.2.6, če privzamemo lemo 5.3.3. Vemo že, da se lahko omejimo na enačbe oblike (5.2.16). Zaradi računske enostavnosti bomo obravnavali le robne pogoje (5.2.17), druge robne pogoje pa v nalogah. Funkcija

$$z \mapsto G(x,t;z) = \frac{y_1(\min\{x,t\};z)y_2(\max\{x,t\};z)}{W(z)}$$

je holomorfna povsod, razen v ničlah λ_n funkcije W, ki so po lemi 5.3.2 enostavne, zato je za $\lambda \neq \lambda_n$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{G(x,t;z)}{\lambda - z}; \lambda_n\right) &= \lim_{z\to\lambda_n} (z - \lambda_n)\,\frac{G(x,t;z)}{\lambda - z} \\
&= \frac{y_1(\min\{x,t\};\lambda_n)y_2(\max\{x,t\};\lambda_n)}{\lambda - \lambda_n} \lim_{z\to\lambda_n} \frac{z-\lambda_n}{W(z)}.
\end{aligned}$$

Po definiciji je $y_1(x;\lambda_n)$ tista rešitev enačbe $y'' + (q + \lambda_n)y = 0$, ki zadošča robnemu pogoju $y(a;\lambda_n) = 0$ (in $y'(a;\lambda_n) = 1$), torej mora biti enaka večkratniku lastne funkcije (po trditvi 5.2.4); podobno velja tudi za $y_2(x;\lambda)$, zato je

$$y_1(\min\{x,t\};\lambda_n)y_2(\max\{x,t\};\lambda_n) = c_n u_n(x)u_n(t)$$

za kako konstanto c_n. Tako se gornji izraz za residuum poenostavi v

$$\operatorname{Res}\left(\frac{G(x,t;z)}{\lambda - z}; \lambda_n\right) = \frac{c_n u_n(x)u_n(t)}{W'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)},$$

kjer smo upoštevali, da je $W(\lambda_n) = 0$ in definicijo odvoda $W'(\lambda_n)$. Formulo (5.3.6) iz leme 5.3.3 lahko sedaj napišemo v obliki

$$G(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{u_n(x)u_n(t)}{\lambda - \lambda_n}, \tag{5.3.7}$$

kjer so d_n konstante.

Naj bo sedaj $y \in C^2[a,b]$ poljubna funkcija, ki zadošča robnima pogojema $y(a) = 0 = y(b)$. Označimo $f := y'' + (q + \lambda)y$. Po trditvi 5.2.7 je potem

$$y(x) = \int_a^b G(x,t;\lambda)f(t)\,dt$$

in od tod po formuli (5.3.7)

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n u_n(x)}{\lambda - \lambda_n} \int_a^b f(t) u_n(t)\, dt. \tag{5.3.8}$$

Pri tem lahko integral

$$\int_a^b f(t) u_n(t)\, dt = \int_a^b u_n(t) y''(t)\, dt + \int_a^b u_n(t)(q(t) + \lambda) y(t)\, dt$$

preoblikujemo tako, da prvi integral na desni integriramo dvakrat per partes. Zaradi robnih pogojev $y(a) = 0 = y(b)$ in $u_n(a) = 0 = u_n(b)$ sta izintegrirana dela obakrat enaka 0. Ko upoštevamo, da je $u_n'' = -(q + \lambda_n) u_n$, dobimo po kratkem računu, da je

$$\int_a^b f(t) u_n(t)\, dt = (\lambda - \lambda_n) \int_a^b y(t) u_n(t)\, dt.$$

Ko upoštevamo to v enakosti (5.3.8), jo lahko napišemo kot

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n(x) \int_a^b y(t) u_n(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} e_n u_n(x), \tag{5.3.9}$$

kjer je $e_n := d_n \int_a^b y(t) u_n(t)\, dt = d_n \langle y, u_n \rangle$. Ker je po lemi 5.3.3 konvergenca v (5.3.6) enakomerna za $x, t \in [a, b]$, mora veljati isto tudi za konvergenco v (5.3.9), zato vrsta v (5.3.9) konvergira tudi v normi prostora $L^2(a, b)$. Ker so funkcije u_n ortonormirane, mora biti $e_n = \langle y, e_n \rangle$.

Po doslej dokazanem tvorijo linearne kombinacije lastnih funkcij u_n gost podprostor v vektorskem prostoru V, sestavljenem iz vseh tistih funkcij $y \in C^2[a, b]$, ki zadoščajo pogojema $y(a) = 0$, $y(b) = 0$. Da bi dokazali, da je $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ ortonormirana baza prostora $L^2(a, b)$, zato zadošča pokazati, da je V gost podprostor v $L^2(a, b)$. Ker vemo, da je $C[a, b]$ gost podprostor v $L^2(a, b)$, $C^2[a, b]$ pa gost v $C[a, b]$ (po Weierstrassovem izreku), zadošča pokazati, da lahko vsako funkcijo $u \in C^2[a, b]$ poljubno natančno aproksimiramo v L^2-normi s funkcijami, ki imajo v krajiščih a in b vrednost 0. V ta namen naj bo $g_\varepsilon : [a, b] \to [0, 1]$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija, ki je enaka 1 na intervalu $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ in skupaj s svojim odvodom enaka 0 v točkah a in b, za dovolj majhen $\varepsilon > 0$. Potem je $\lim_{\varepsilon \to 0} \|u - u g_\varepsilon\|_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} (\int_a^b |u|^2 (1 - g_\varepsilon)^2\, dx)^{1/2} = 0$, saj je

$$\int_a^b |u|^2 (1 - g_\varepsilon)^2\, dx \le \left(\int_a^{a+\varepsilon} + \int_{b-\varepsilon}^b \right) |u|^2\, dx$$

in je $\int_a^b |u|^2\, dx < \infty$. □

Dokazati moramo še lemo 5.3.3, kar pa zahteva precej priprave. Ker sta $u_1 := \cos \mu x$ in $u_2 := \sin \mu x$ (kjer je μ konstanta) linearno neodvisni rešitvi enačbe $y'' + \mu^2 y = 0$, je za splošno funkcijo f partikularna rešitev enačbe

$$y'' + \mu^2 y = f \tag{5.3.10}$$

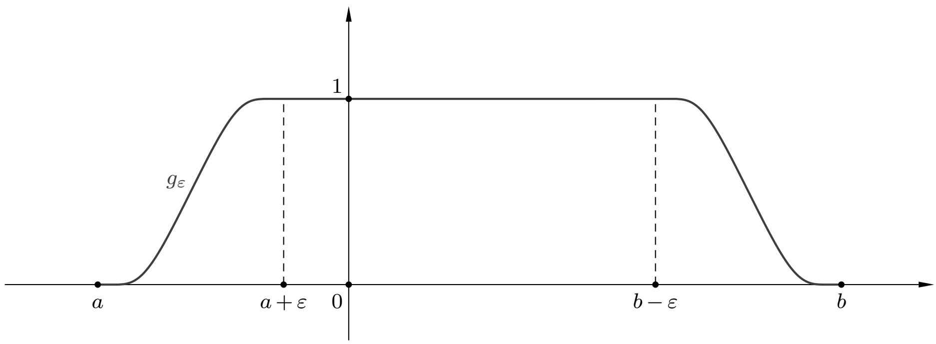

FIGURE 5.3. Funkcija g_ε.

enaka $y_p = c_1u_1+c_2u_2$, kjer funkciji c_1 in c_2 zadoščata pogoju (1.3.4); vzamemo lahko npr.

$$\begin{aligned} y_p &= -\frac{1}{\mu}\cos\mu x\int_a^x f(t)\sin\mu t\,dt + \frac{1}{\mu}\sin\mu x\int_a^x f(t)\cos\mu t\,dt \\ &= \frac{1}{\mu}\int_a^x f(t)\sin\mu(x-t)\,dt. \end{aligned}$$

Ta rešitev zadošča začetnima pogojema $y_p(a) = 0$ in $y_p'(a) = 0$. Če ji prištejemo rešitev $\frac{1}{\mu}\sin\mu(x-a)$ homogene enačbe, dobimo rešitev

$$y = \frac{1}{\mu}\sin\mu(x-a) + \frac{1}{\mu}\int_a^x f(t)\sin\mu(x-t)\,dt \tag{5.3.11}$$

enačbe (5.3.10) pri začetnih pogojih $y(a) = 0$, $y'(a) = 1$. Naj bo sedaj $f(x) := -q(x)y_1(x;\mu^2)$, kjer je y_1 funkcija iz prejšnjega razdelka, torej tista rešitev enačbe $y'' + \mu^2 y = -qy$, ki zadošča pogojema $y_1(a;\mu^2) = 0$ in $y_1'(a;\mu^2) = 1$. Za ta f je torej y_1 rešitev iste enačbe in začetnih pogojev kot funkcija y, podana z (5.3.11), zato morata biti enaki, torej

$$y_1(x;\mu^2) = \frac{1}{\mu}\sin\mu(x-a) - \frac{1}{\mu}\int_a^x q(t)y_1(t;\mu^2)\sin\mu(x-t)\,dt. \tag{5.3.12}$$

Od tod bomo sedaj izpeljali naslednje ocene:

LEMA 5.3.4. *Za $x\in[a,b]$ in $\mu\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ velja*

$$\begin{aligned} y_1(x;\mu^2) &= \frac{1}{\mu}\sin\mu(x-a) + \frac{1}{\mu^2}O_1(x;\mu), \\ y_1'(x;\mu^2) &= \cos\mu(x-a) + \frac{1}{\mu}O_2(x;\mu), \end{aligned}$$

kjer je $|O_j(x;\mu)| \le Ce^{|\mathrm{Im}\,\mu|(x-a)}$ *za kako konstanto* C $(j=1,2)$*. Podobni oceni veljata tudi za* $y_2(x;\mu^2)$*, namreč*

$$y_2(x;\mu^2) = \frac{1}{\mu}\sin\mu(b-x) + \frac{1}{\mu^2}O_3(x;\mu),$$
$$y_2'(x;\mu^2) = -\cos\mu(b-x) + \frac{1}{\mu}O_4(x;\mu),$$

kjer je $|O_j(x;\mu)| \le Ce^{|\mathrm{Im}\,\mu|(b-x)}$ $(j=3,4)$*. Za determinanto Wronskega funkcij* y_1 *in* y_2 *pa velja*

$$W(\mu^2) = -\frac{1}{\mu}\sin\mu(b-a) + \frac{1}{\mu^2}O(\mu),$$

kjer je $|O(\mu)| \le Ce^{|\mathrm{Im}\,\mu|(b-a)}$*.*

Proof. Zaradi omejenosti na kompaktnih množicah zveznih funkcij, ki nastopajo v (5.3.12), vse ocene v lemi gotovo veljajo za vse

$$|\mu| \le \max\left\{1, 2\int_a^b |q(t)|\,dt\right\},$$

če le izberemo konstanto C dovolj veliko. Zato naj bo odslej $|\mu| > 1$ in $|\mu| > 2\int_a^b |q(t)|\,dt$. Označimo

$$N_\mu(x) = e^{-|\mathrm{Im}\,\mu|(x-a)}y_1(x;\mu^2) \qquad \text{in} \qquad M_\mu = \max_{x\in[a,b]}|N_\mu|.$$

Potem je $y_1(t;\mu^2) = e^{|\mathrm{Im}\,\mu|(t-a)}N_\mu(t)$ in iz (5.3.12) sledi

$$N_\mu(x) = \frac{1}{\mu}e^{-|\mathrm{Im}\,\mu|(x-a)}\sin\mu(x-a) - \frac{1}{\mu}\int_a^x q(t)N_\mu(t)e^{-|\mathrm{Im}\,\mu|(x-t)}\sin\mu(x-t)\,dt. \tag{5.3.13}$$

Ker je $|\sin z| \le \frac{1}{2}(|e^{iz}| + |e^{-iz}|) \le e^{|\mathrm{Im}\,z|}$ za vsak $z\in\mathbb{C}$, sledi iz (5.3.13)

$$M_\mu \le \frac{1}{|\mu|} + \frac{M_\mu}{|\mu|}\int_a^b |q(t)|\,dt \le \frac{1}{|\mu|} + \frac{M_\mu}{2}.$$

Od tod je $M_\mu \le \frac{2}{|\mu|}$ in zato

$$|y_1(x;\mu^2)| \le \frac{2}{|\mu|}\,e^{|\mathrm{Im}\,\mu|(x-a)}. \tag{5.3.14}$$

Formulo (5.3.12) lahko napišemo kot $y_1(x;\mu^2) = \frac{1}{\mu}\sin\mu(x-a) + \frac{1}{\mu^2}O_1(x;\mu)$, kjer je

$$O_1(x;\mu) := -\mu\int_a^x q(t)y_1(t;\mu^2)\sin\mu(x-t)\,dt.$$

Od tod in iz ocene (5.3.14) (uporabljene za t, namesto x) ter ocene $|\sin z| \le e^{|\mathrm{Im}\,z|}$ sklepamo, da je

$$|O_1(x;\mu)| \le 2\int_a^b |q(t)|\,e^{|\mathrm{Im}\,\mu|(t-a)}e^{|\mathrm{Im}\,\mu|(x-t)}\,dt = 2\int_a^b |q(t)|\,dt\ e^{|\mathrm{Im}\,\mu|(x-a)}.$$

S tem je dokazana prva neenakost v lemi, le konstanto C je treba izbrati dovolj veliko, da je $C \ge 2\int_a^b |q(t)|\,dt$.

Z odvajanjem na x dobimo iz (5.3.12)

$$y_1'(x;\mu^2)=\cos\mu(x-a)-\int_a^x q(t)y_1(t;\mu^2)\cos\mu(x-t)\,dt,$$

torej je $y_1'(x;\mu^2)=\cos\mu(x-a)+\frac{1}{\mu}O_2(x;\mu)$, kjer

$$O_2(x;\mu):=-\mu\int_a^x q(t)y_1(t;\mu^2)\cos\mu(x-t)\,dt$$

zadošča oceni (uporabili bomo (5.3.14) in $|\cos z|\le e^{|\operatorname{Im} z|}$ za $z\in\mathbb{C}$)

$$|O_2(x;\mu)|\le 2\int_a^b |q(t)|\,dt\; e^{|\operatorname{Im}\mu|(x-a)}\le Ce^{|\operatorname{Im}\mu|(x-a)},$$

kar je druga neenakost v lemi. Tretja in četrta ocena v lemi sta le prvi dve oceni za funkcijo y_2, namesto y_1. Dokazali bomo le še trditev o determinanti Wronskega.

Po že dokazanem imamo

$$\begin{aligned}W(\mu^2)&=\left[\frac{1}{\mu}\sin\mu(x-a)+\frac{1}{\mu^2}O_1(x;\mu)\right]\left[-\cos\mu(b-x)+\frac{1}{\mu}O_4(x;\mu)\right]-\\&\qquad-\left[\frac{1}{\mu}\sin\mu(b-x)+\frac{1}{\mu^2}O_3(x;\mu)\right]\left[\cos\mu(x-a)+\frac{1}{\mu}O_2(x;\mu)\right]\\&=-\frac{1}{\mu}\sin\mu(b-a)+\frac{1}{\mu^2}O(\mu),\end{aligned}$$

kjer je

$$\begin{aligned}O(\mu):=&-O_1(x;\mu)\cos\mu(b-x)+O_4(x;\mu)\sin\mu(x-a)-O_3(x;\mu)\cos\mu(x-a)-\\&-O_2(x;\mu)\sin\mu(x-a)+\frac{1}{\mu}\left[O_1(x;\mu)O_4(x;\mu)-O_2(x;\mu)O_3(x;\mu)\right].\end{aligned}$$

Iz prvih štirih ocen v lemi sledi, da so vsi členi v vsoti na desni strani zadnje formule omejeni s konstantnim večkratnikom izraza $e^{|\operatorname{Im}\mu|(b-a)}$. Na primer

$$|O_1(x;\mu)\cos\mu(b-x)|\le Ce^{|\operatorname{Im}\mu|(x-a)}e^{|\operatorname{Im}\mu|(b-x)}=Ce^{|\operatorname{Im}\mu|(b-a)}$$

in

$$|O_1(x;\mu)O_4(x;\mu)|\le Ce^{|\operatorname{Im}\mu|(x-a)}Ce^{|\operatorname{Im}\mu|(b-x)}=C^2e^{|\operatorname{Im}\mu|}(b-a).$$

Torej bo veljala tudi ocena $|O(\mu)|\le Ce^{|\operatorname{Im}\mu|(b-a)}$, če konstanto C ustrezno povečamo. $\square$

S pomočjo zadnje leme lahko sedaj opišemo ponašanje Greenove funkcije.

Lema 5.3.5. *Obstajata taki konstanti C_1 in C_2, da je*

$$|G(x,t;\mu^2)|\le\frac{C_1}{|\mu|}$$

za vse tiste μ, za katere je $|\mu|\ge C_2$ in je izpolnjen vsaj še eden od naslednjih dveh pogojev: (i) $|\operatorname{Im}\mu|\ge\frac{1}{b-a}$; (ii) $\operatorname{Re}\mu=\frac{(2k+1)\pi}{2(b-a)}$.

Proof. Po (5.3.4) je Greenova funkcija dana z

$$G(x,t;\mu^2) = \frac{y_1(\min\{t,x\};\mu^2)y_2(\max\{t,x\};\mu^2)}{W(\mu^2)}. \tag{5.3.15}$$

Po lemi 5.3.4 in neenakosti $|\sin z| \le e^{|\operatorname{Im} z|}$ lahko za $|\mu| \ge 1$ števec v tej formuli omejimo (po krajšem računu) kot

$$|y_1(\min\{t,x\};\mu^2)y_2(\max\{t,x\};\mu^2)| \le \frac{K}{|\mu|^2} e^{|\operatorname{Im}\mu|(b-a)}$$

za kako konstanto K. (Pri tem smo upoštevali, da je $e^{|\operatorname{Im}\mu|[(\min\{t,x\}-a)+(b-\max\{t,x\})]} \le e^{|\operatorname{Im}\mu|(b-a)}$, saj je $\min\{x,t\} - \max\{x,t\} \le 0$.) Nadalje je po lemi 5.3.4

$$|W(\mu^2)| = \frac{1}{|\mu|^2}|\mu\sin\mu(b-a) - O(\mu)| \ge \frac{1}{|\mu|^2}(|\mu\sin\mu(b-a)| - Ce^{|\operatorname{Im}\mu|(b-a)}). \tag{5.3.16}$$

Za vsaka realna s in t velja

$$|\cos s| \le 1 \le \frac{\sqrt{3}}{4}\, e^{|t|}, \qquad \text{če je } |t| \ge 1,$$

in zato

$$|\sin(s+it)|^2 = \operatorname{ch}^2 t - \cos^2 s \ge (\frac{e^{|t|}}{2})^2 - \cos^2 s \ge \frac{e^{2|t|}}{16}, \qquad \text{če je } |t| \ge 1 \text{ ali } \cos s = 0.$$

Torej je

$$|\sin(s+it)| \ge \frac{e^{|t|}}{4}, \qquad \text{če je } |t| \ge 1 \text{ ali } \cos s = 0,$$

zato iz (5.3.16) sledi

$$|W(\mu^2)| \ge \frac{1}{|\mu|^2}\left(\frac{|\mu|}{4} e^{|\operatorname{Im}\mu|(b-a)} - Ce^{|\operatorname{Im}\mu|(b-a)}\right),$$

če je $|\operatorname{Im}\mu|(b-a) \ge 1$ ali $\cos \operatorname{Re}\mu(b-a) = 0$. Če je torej $|\mu| \ge 8C$ in hkrati velja vsaj eden od pogojev $|\operatorname{Im}\mu| \ge |b-a|^{-1}$, $\operatorname{Re}\mu(b-a) = (k+\frac{1}{2})\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, potem je

$$|W(\mu^2)| \ge \frac{|\mu|}{8|\mu|^2}\, e^{|\operatorname{Im}\mu|(b-a)}.$$

Od tod in iz gornje ocene za števec v (5.3.15) sledi, da je $|G(x,t;\mu^2)| \le 8K/|\mu|$, če je $|\mu| \ge 8C$ in je izpolnjen vsaj eden od pogojev $|\operatorname{Im}\mu| \ge |b-a|^{-1}$, $\operatorname{Re}\mu = (k+\frac{1}{2})\pi(b-a)^{-1}$. □

Dokaz leme 5.3.3. Vemo že, da so vse lastne vrednosti enačbe (5.2.16) pri pogojih (5.2.17) realne. Če nadomestimo funkcijo q s $q_1 := q - M - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, kjer je $M := \max_{a\le x\le b} q(x)$, bo $q_1 < 0$, lastne vrednosti prvotnega operatorja pa se le premaknejo za $M+\varepsilon$, zato smemo predpostaviti, da je že na začetku $q(x)<0$ za vse $x\in[a,b]$. Potem sledi iz Sturmovega primerjalnega kriterija (ker netrivialne rešitve enačbe $u''=0$ nimajo dveh ničel a in b), da so vse lastne vrednosti λ Sturm-Liouvillovega problema (5.2.16), (5.2.17) pozitivne. Po trditvi 5.3.1 so lastne vrednosti ničle determinante Wronskega; zaradi pozitivnosti so torej oblike μ^2 ($\mu\in\mathbb{R}^+$). Po lemi 5.3.4 je

$$W(\mu^2)=-\frac{1}{\mu}\left[\sin\mu(b-a)-\frac{1}{\mu}O(\mu)\right], \tag{5.3.17}$$

kjer je $|O(\mu)|\leq Ce^{|\operatorname{Im}\mu|(b-a)}=C$ (tukaj smo uporabili, da je $\mu\in\mathbb{R}$). Torej je $|\frac{O(\mu)}{\mu}|<\frac{1}{2}$, če je $\mu>2C$. V točkah $\mu_k:=(k+\frac{1}{2})\pi(b-a)^{-1}$ ($k\in\mathbb{Z}$) je $\sin\mu_k(b-a)=(-1)^k$, in ker je $|\frac{O(\mu_k)}{\mu_k}|<1/2$, sledi iz (5.3.17), da ima $W(\mu_k^2)$ enak predznak kot $\sin\mu_k(b-a)$. Torej je zvezna funkcija $\mu\mapsto W(\mu^2)$ v točkah μ_{k-1} in μ_k nasprotno predznačena, zato mora imeti vmes vsaj eno ničlo. S tem smo dokazali, da ima W neskončno mnogo ničel. Ker je W holomorfna funkcija, ima lahko na vsakem končnem intervalu le končno mnogo ničel (saj bi sicer ničle imele stekališče, kar pa je nemogoče, ker W ni identično 0). Od tod sledi, da vse te ničle lahko razporedimo v naraščajoče zaporedje $\lambda_1<\lambda_2<\ldots$, ki konvergira proti ∞.

Če je na kakem intervalu (μ_{k-1},μ_k) več kot ena ničla funkcije $\mu\mapsto W(\mu^2)$, potem so ničle vsaj tri (ker ima funkcija na krajiščih nasproten predznak), zato lahko izberemo med njimi dve taki, imenujmo ju μ_0 in μ, ki sta med seboj oddaljeni za največ polovico širine intervala, torej

$$|\mu-\mu_0|\leq\frac{1}{2}\,|\mu_k-\mu_{k-1}|. \tag{5.3.18}$$

Uporabimo sedaj enakost (5.3.5), v kateri naj bo $\lambda_0=\mu_0^2$, $\lambda=\mu^2$ in kjer izrazimo $y_1(x;\mu^2)$ in $y_1(x;\mu_0^2)$ po lemi 5.3.4. Tako dobimo (upoštevajoč, da je $W(\mu^2)=0$)

$$\int_a^b\left[\sin\mu(x-a)+\frac{1}{\mu}O_1(x;\mu)\right]\left[\sin\mu_0(x-a)+\frac{1}{\mu_0}O_1(x;\mu_0)\right]dx=0. \tag{5.3.19}$$

Pri tem je $|O_1(x;\mu)|\leq C$ in $|O_1(x;\mu_0)|\leq C$ za kako konstanto C (upoštevali smo, da je $\mu,\mu_0\in\mathbb{R}$). Toda, ker je $\mu,\mu_0>\mu_{k-1}=(k-\frac{1}{2})\pi(b-a)^{-1}$, je integrand v (5.3.19) večji od

$$\frac{1}{2}[\cos((\mu-\mu_0)(x-a))-\cos((\mu+\mu_0)(x-a))]-\frac{1}{k-1}C_1,$$

kjer je C_1 konstanta (neodvisna od k), zato je integral v (5.3.19) večji od

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sin[(\mu-\mu_0)(b-a)]}{\mu-\mu_0}-\frac{1}{2}\,\frac{\sin[(\mu+\mu_0)(b-a)]}{\mu+\mu_0}-\frac{K_1}{k}>\frac{b-a}{2}\,\frac{\sin s}{s}-\frac{K}{k}, \tag{5.3.20}$$

kjer sta K_1 in K konstanti in $s:=(\mu-\mu_0)(b-a)$. (Pri tem smo uporabili, da je $\frac{|\sin[(\mu+\mu_0)(b-a)]|}{|\mu+\mu_0|}\leq\frac{1}{|\mu+\mu_0|}\leq\frac{b-a}{(2k-1)\pi}\leq\frac{b-a}{k\pi}$ in da je zaporedje $(\frac{k}{k-1})$ omejeno.) Ker je po (5.3.18) $|s|\leq\frac{1}{2}|\mu_k-\mu_{k-1}|(b-a)=\frac{\pi}{2}$, funkcija $s\mapsto\frac{\sin s}{s}$ pa padajoča na intervalu

$(0, \frac{\pi}{2}]$ (saj je tam njen odvod negativen, ker je $s < \operatorname{tg} s$), je $\frac{\sin s}{s} \geq \frac{2}{\pi}$. Potemtakem sledi iz (5.3.20), da je integral v (5.3.19) večji od

$$\frac{b-a}{\pi} - \frac{K}{k}.$$

Ker je ta izraz pozitiven za vse dovolj velike k, je za take k enakost (5.3.19) nemogoča, torej je tedaj na intervalu (μ_{k-1}, μ_k) natanko ena ničla funkcije $\mu \mapsto W(\mu^2)$.

Dokazati moramo še formulo (5.3.6). Za vsak m naj bo $A_m = (m+\frac{1}{2})\pi(b-a)^{-1}$ in naj bo γ_m pozitivno usmerjen rob kvadrata z oglišči $A_m(-1-i)$, $A_m(1-i)$, $A_m(1+i)$, $A_m(-1+i)$. Uporabili bomo izrek o residuih za funkcijo $z \mapsto \frac{G(x,t;z)}{z-\lambda}$, kjer λ ni nobena

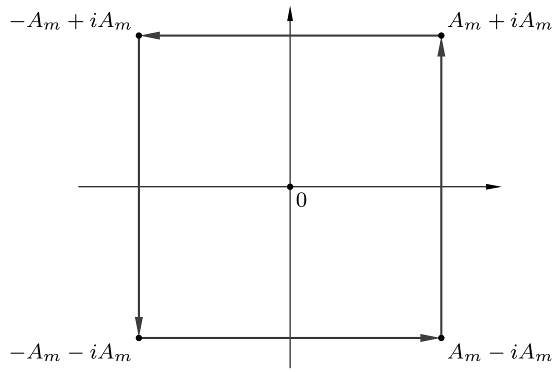

FIGURE 5.4. Integracijska pot; $A_m = (m + \frac{1}{2})\frac{\pi}{b-a}$.

od lastnih vrednosti λ_n. Po lemi 5.3.5 za dovolj velike m za vse z na poti γ_m velja $|G(x,t;z)| \leq \frac{C_1}{\sqrt{|z|}}$, torej za vse dovolj velike m (da je $|z| > 2|\lambda|$ za vse z na poti γ_m) velja za z na poti γ_m ocena

$$\left|\frac{G(x,t;z)}{z-\lambda}\right| \leq \frac{C_1|z|^{-1/2}}{|z-\lambda|} \leq 2C_1|z|^{-3/2} \leq Dm^{-3/2},$$

kjer je D konstanta. Zato je

$$\left|\int_{\gamma_m} \frac{G(x,t;z)}{z-\lambda}\,dz\right| \leq Dm^{-3/2}s(\gamma_m) = \frac{4D(2m+1)\pi}{m^{3/2}(b-a)} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

kjer je s_{γ_m} dolžina poti γ_m. Tukaj je konvergenca proti 0 enakomerna za vse $x, t \in [a,b]$. Po izreku o residuih je zato

$$\operatorname{Res}\left(\frac{G(x,t;z)}{z-\lambda};\lambda\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Res}\left(\frac{G(x,t;z)}{z-\lambda};\lambda_n\right) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_m} \frac{G(x,t;z)}{z-\lambda}\,dz = 0.$$

Ker je $\operatorname{Res}\left(\frac{G(x,t;z)}{z-\lambda};\lambda\right) = G(x,t;\lambda)$, od tod takoj sledi formula (5.3.6). □

Naloge

* **1.** Izboljšajte prvi del leme 5.3.3 tako, da pokažete, da pozitivne lastne vrednosti Sturm-Liouvillovega problema (5.2.16), (5.2.17) zadoščajo asimtotični oceni

$$\sqrt{\lambda_n} = n\pi(b-a)^{-1} + r(n)\frac{1}{n},$$

kjer je funkcija $n \mapsto r(n)$ omejena. (Namig: poskusite čim natančneje določiti položaj rešitev enačbe $\sin\mu(b-a) = \frac{O(\mu)}{\mu}$ za velike pozitivne μ, če je O omejena funkcija.)

2. Bodita y_1 in y_2 rešitvi enačbe $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ z lastnostima $y_1'(a) = \alpha y_1(a)$ in $y_2'(b) = \beta y_2(b)$, kjer sta α in β konstanti. Pokažite, da je potem rešitev problema

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y'(a) = \alpha y(a), \quad y'(b) = \beta y(b),$$

kjer so p, q in f zvezne funkcije na intervalu $[a, b]$, podana s formulo

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)\,dt = y_2(x)\int_a^x \frac{y_1(t)}{W(t)}f(t)\,dt + y_1(x)\int_x^b \frac{y_2(t)}{W(t)}f(t)\,dt,$$

kjer je *Greenova funkcija* G dana z

$$G(x,t) = \frac{y_1(\min\{x,t\})y_2(\max\{x,t\})}{W(t)},$$

pri čemer je W determinanta Wronskega funkcij y_1 in y_2. (To je inačica trditve 5.2.7.)

* **3.** Za vsak λ bodita $y_1(x, \lambda)$ in $y_2(x, \lambda)$ tisti rešitvi enačbe

$$y'' + (q + \lambda)y = 0, \tag{5.3.21}$$

na intervalu $[a, b]$, ki zadoščata pogojema

$$y_1'(a;\lambda) = \alpha, \quad y_1(a;\lambda) = 1 \quad \text{in} \quad y_2'(b;\lambda) = \beta, \quad y_2(b;\lambda) = 1,$$

kjer sta α in β realni konstanti. Naj bo $W(\lambda)$ determinanta Wronskega funkcij y_1 in y_2; g pa funkcija, definirana kot v dokazu leme 5.3.2, se pravi $g(x;\lambda) = y_1(x;\lambda_0)y_1'(x;\lambda) - y_1(x;\lambda)y_1'(x;\lambda_0)$. Pokažite, da je $g(a;\lambda) = 0$ in

$$g(b;\lambda) = y_1(b;\lambda)W(\lambda_0) - y_1(b;\lambda_0)W(\lambda)$$

in da podoben sklep kot v dokazu leme 5.3.2 pove, da ima funkcija W le enostavne ničle.

4. (i) Pokažite, da je za poljubni konstanti α, μ in vsako zvezno funkcijo f rešitev enačbe

$$y'' + \mu^2 y = f,$$

pri začetnih pogojih $y(a) = 1$, $y'(a) = \alpha$, podana s formulo

$$y(x) = \cos\mu(x-a) + \frac{\alpha}{\mu}\sin\mu(x-a) + \frac{1}{\mu}\int_a^x f(t)\sin\mu(x-t)\,dt.$$

(ii) Sklepajte iz (i), da funkciji y_1 in y_2, definirani v nalogi 3 (kjer je $\lambda = \mu^2$), zadoščata integralskima enačbama

$$y_1(x;\mu^2) = \cos\mu(x-a) + \frac{\alpha}{\mu}\sin\mu(x-a) - \frac{1}{\mu}\int_a^x q(t)y_1(t;\mu^2)\sin\mu(x-t)\,dt,$$
$$y_2(x;\mu^2) = \cos\mu(b-x) + \frac{\beta}{\mu}\sin\mu(b-x) - \frac{1}{\mu}\int_x^b q(t)y_2(t;\mu^2)\sin\mu(t-x)\,dt.$$

(iii) * Dokažite, da za funkciji y_1 in y_2 ter njuno determinanto Wronskega W iz točke (ii) velja naslednja inačica leme 5.3.4: za vse $x \in [a,b]$ in $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ je

$$\begin{aligned}
y_1(x;\mu^2) &= \cos\mu(x-a) + \frac{1}{\mu}O_1(x;\mu),\\
y_1'(x;\mu^2) &= -\mu\sin\mu(x-a) + O_2(x;\mu,\\
y_2(x;\mu^2) &= \cos\mu(b-x) + \frac{1}{\mu}O_3(x;\mu),\\
y_2'(x;\mu^2) &= \mu\sin\mu(b-x) + O_4(x;\mu),\\
W(\mu^2) &= \mu\sin\mu(b-a) + O(\mu),
\end{aligned}$$

kjer za ostanke O in O_j veljajo ocene

$$\begin{aligned}
|O_1(x;\mu)| &\le Ce^{|\mathrm{Im}\,\mu|(x-a)}, &\qquad |O_2(x;\mu)| &\le Ce^{|\mathrm{Im}\,\mu|(x-a)},\\
|O_3(x;\mu)| &\le Ce^{|\mathrm{Im}\,\mu|(b-x)}, &\qquad |O_4(x;\mu)| &\le Ce^{|\mathrm{Im}\,\mu|(b-x)},
\end{aligned}$$
$$|O(\mu)| \le Ce^{|\mathrm{Im}\,\mu|(b-a)}$$

za kako konstanto C. (Navodilo: Naj imajo oznake enak pomen kot v dokazu leme 5.3.4. Pokažite najprej, da velja $M_\mu \le 1+|\alpha|+\frac{M_\mu}{2}$ in zato $M_\mu \le 2(1+|\alpha|)$. (Tukaj je α konstanta iz robnega pogoja $y_1'(a;\lambda) = \alpha y_1(a;\lambda)$, kot v 3. nalogi.)

***5.** Dokažite, da za Greenovo funkcijo, ki jo konstruiramo kot v nalogi 2, le da iz funkcij y_1 in y_2 iz naloge 3, velja ocena iz leme 5.3.5 in zato veljata v tukajšnjem kontekstu tudi lema 5.3.3 in izrek 5.2.6.

5.4. Reševanje linearnih diferencialnih enačb s potenčnimi vrstami

Linearne diferencialne enačbe drugega reda, ki nastopajo v Sturm-Liouvillovih problemih, mnogokrat nimajo za rešitev elementarnih funkcij. Ogledali si bomo, kako lahko take enačbe rešujemo s potenčnimi vrstami. Potenčne vrste je ugodneje obravnavati v kompleksni kot v realni spremenljivki. V tem razdelku bomo privzeli, da sta p in q holomorfni funkciji v okolici točke 0 in ju torej lahko razvijemo v potenčni vrsti

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \qquad \text{in} \qquad q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k,$$

kjer so koeficienti p_k in q_k kompleksna števila. Enačbo

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{5.4.1}$$

bomo poskusili rešiti s pomočjo potenčne vrste

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \tag{5.4.2}$$

v kateri so koeficienti c_k neznani in jih nameravamo izračunati tako, da bomo vstavili vrsto (5.4.2) v enačbo (5.4.1). S formalnim odvajanjem po členih (postopek bomo upravičili nekoliko kasneje) dobimo $y' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} z^j$ in $y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1) c_j z^j$. Ko vstavimo to v enačbo (5.4.1), dobimo

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} z^k + \Big(\sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} z^j\Big) + \Big(\sum_{i=0}^{\infty} q_i z^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j\Big) = 0,$$

kar lahko preuredimo v

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big[(k+2)(k+1) c_{k+2} + \sum_{j=0}^{k} \Big((j+1) p_{k-j} c_{j+1} + q_{k-j} c_j\Big)\Big] z^k = 0.$$

Vsi koeficienti v vrsti na levi strani te enakosti morajo biti 0, torej $(k+2)(k+1)c_{k+2} + \sum_{j=0}^{k} ((j+1) p_{k-j} c_{j+1} + q_{k-j} c_j) = 0$ in zato

$$c_{k+2} = -\frac{\sum_{j=0}^{k} ((j+1) p_{k-j} c_{j+1} + q_{k-j} c_j)}{(k+2)(k+1)}. \tag{5.4.3}$$

Ta formula nam omogoča, da zaporedoma izračunamo vse koeficiente c_{k+2} ($k = 0, 1, 2, \ldots$), potem ko izberemo c_0 in c_1. Seveda je treba sedaj dokazati, da tako dobljena vrsta $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ konvergira na kakem krogu okrog 0.

Predpostavimo, da gornji vrsti za p in q konvergirata na krogu $|z| < R$ za kak $R > 0$. Pokazali bomo, da tedaj na istem krogu konvergira tudi vrsta (5.4.2), kjer koeficienti c_k zadoščajo zvezi (5.4.3). Za ta namen izberimo pri danem $z \in D(0, R)$ pozitivni števili r in ρ tako, da bo $|z| < r < \rho < R$. Ker vrsti za p in q konvergirata v točki ρ, so njuni členi $p_j\rho^j$ in $q_j\rho^j$ omejeni s kako konstanto M, torej

$$|p_j| \leq \frac{M}{\rho^j} \qquad \text{in} \qquad |q_j| \leq \frac{M}{\rho^j} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.4.4}$$

Izberimo k_0 tako velik, da je

$$\frac{Mr\rho(k + r + 1)}{(k + 2)(k + 1)(\rho - r)} \leq 1 \qquad \text{za vse } k \geq k_0. \tag{5.4.5}$$

(To je mogoče, saj je limita izraza na levi, ko gre k proti ∞, enaka 0.) Naj bo E tako velika konstanta, da je $|c_k| \leq Er^{-k}$ za vse $k \leq k_0$. Pokazali bomo, da potem ocena

$$|c_k| \leq Er^{-k} \tag{5.4.6}$$

velja sploh za vse $k \in \mathbb{N}$. Od tod bo takoj sledilo, da vrsta $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ konvergira, saj je dominirana s konvergentno geometrijsko vrsto $\sum_{k=0}^{\infty} E|\frac{z}{r}|^k$. Dokaz ocene (5.4.6) je z indukcijo. Privzemimo, da velja za vsa števila $0, 1, \ldots, k + 1$ in jo dokažimo za $k + 2$. Ko uporabimo indukcijsko predpostavko (se pravi (5.4.6) za $0, 1, \ldots, k + 1$) in (5.4.4) v formuli (5.4.3), dobimo

$$\begin{aligned}
|c_{k+2}| &\leq \frac{\sum_{j=0}^{k} \left[(j + 1)M\rho^{-(k-j)}Er^{-(j+1)} + M\rho^{-(k-j)}Er^{-j}\right]}{(k + 2)(k + 1)} \\
&\leq \frac{MEr^{-(k+2)} \sum_{j=0}^{k} \left[(k + 1)\rho^{-k+j}r^{k-j+1} + \rho^{-k+j}r^{k-j+2}\right]}{(k + 2)(k + 1)} \\
&= \frac{E}{r^{k+2}} \frac{M\left[(k + 1)r + r^2\right] \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{k-j}}{(k + 2)(k + 1)} \\
&\leq \frac{E}{r^{k+2}} \frac{M\left[(k + 1)r + r^2\right] \frac{1}{1-\frac{r}{\rho}}}{(k + 2)(k + 1)} \\
&= \frac{E}{r^{k+2}} \frac{Mr\rho(k + r + 1)}{(k + 2)(k + 1)(\rho - r)} \\
&\leq \frac{E}{r^{k+2}},
\end{aligned}$$

kjer smo za zadnjo neenakost uporabili (5.4.5).

Zgornje sklepanje velja seveda tudi za kako drugo točko α (namesto 0), v okolici katere sta funkciji p in q holomorfni, saj lahko vpeljemo novo spremenljivko $z - a = \zeta$. Na ta način dobimo za rešitev funkcijo oblike $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - \alpha)^k$, kjer vrsta konvergira na vsakem krogu, na katerem konvergirata vrsti za p in q (in jo tam smemo členoma odvajati). Tako smo dokazali naslednji izrek:

Izrek 5.4.1. *Če sta p in q holomorfni funkciji na krogu $D(\alpha, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < R\}$, potem za poljubni kompleksni konstanti c_0 in c_1 obstaja natanko ena rešitev y enačbe $y'' + py' + qy = 0$, ki je holomorfna na krogu $D(\alpha, R)$ in zadošča pogojema $y(\alpha) = c_0$ in $y'(\alpha) = c_1$.*

Zglede za zgoraj opisani način reševanja enačb si bomo ogledali v naslednjih razdelkih.

Opomba 5.4.2. * Če sta funkciji p in q odvisni še od dodatnega parametra w, torej $p = p(z, w)$ in $q = q(z, w)$, in sta pri tem p in q zvezni kot funkciji dveh spremenljivk ter holomorfni v vsaki posamezni spremenljivki $z \in D(\alpha, R)$ in w (na kakem območju), so vsi koeficienti p_k in q_k v razvojih v vrsti $p(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(w)(z - \alpha)^k$ in $q(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(w)(z - \alpha)^k$ holomorfne funkcije spremenljivke w. To vidimo iz formule $p_k(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-\alpha|=r} \frac{p(z,w)}{(z-\alpha)^{k+1}}\, dz$, kjer integral lahko odvajamo na parameter w. Poleg tega izpeljava Taylorjeve vrste iz Cauchyeve formule $p(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=r} \frac{p(\zeta,w)}{\zeta - z}\, d\zeta$ pove, da je

$$\frac{\partial p}{\partial w}(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=r} \frac{\frac{\partial p}{\partial w}(\zeta, w)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} p_k'(w)(z - \alpha)^k$$

in podobno za q. Trdimo, da je tedaj rešitev $y = y(z, w)$ diferencialne enačbe holomorfna tudi v spremenljivki w za vse z na kakem dovolj majhnem krogu okrog α. Da bi to dokazali, je treba pokazati, da je vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} c_k'(w)(z - \alpha)^k$ konvergentna za vse z na kakem krogu okrog α. To sledi s podobnim sklepanjem kot v dokazu izreka 5.4.1, le da izhajamo iz konvergence vrst (če je $\alpha = 0$) $\frac{\partial p(z,w)}{\partial w} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k'(w) z^k$ in $\frac{\partial q(z,w)}{\partial w} = \sum_{k=0}^{\infty} q_k'(w) z^k$, da ocenimo koeficiente $p_k'(w)$ in $q_k'(w)$, na podoben način kot v (5.4.4), in nato še koeficiente $c_k'(w)$, podobno kot smo ocenili c_k v dokazu izreka 5.4.1.

Naloge

1. Rešite s potenčno vrsto okrog 0 enačbo $y'' + y = 0$ in prepoznajte v dobljeni potenčni vrsti linearno kombinacijo funkcij cos in sin.

2. Poiščite s pomočjo potenčnih vrst po dve linearno neodvisni rešitvi naslednjih enačb v okolici točke 0:

(i) $(1 + z^2)y'' - 4xy' + 4y = 0$;

(ii) $(1 + z^2)y'' - xy' + y = 0$.

Ali so rešitve kake znane elementarne funkcije?

3. Poiščite splošno rešitev *Airyjeve enačbe* $y'' - zy = 0$. Za realne z, koliko ničel imajo rešitve na poltraku $z < 0$ in koliko na poltraku $z > 0$?

5.5. Legendreovi in drugi ortogonalni polinomi

5.5.1. Legendreovi polinomi

Rešimo s pomočjo potenčnih vrst *Legendreovo enačbo*

$$(z^2-1)y''+2zy'-\nu(\nu+1)y=0. \tag{5.5.1}$$

Tukaj sta

$$p(z)=\frac{2z}{z^2-1} \qquad \text{in} \qquad q(z)=-\frac{\nu(\nu+1)}{z^2-1}$$

holomorfni funkciji na krogu $D(0,1)$. Ko vstavimo $y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$ v enačbo (5.5.1), dobimo

$$(z^2-1)\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)c_kz^{k-2}+2z\sum_{k=0}^{\infty}kc_kz^{k-1}-\nu(\nu+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k=0.$$

Koeficient pred z^k na levi je

$$k(k-1)c_k-(k+2)(k+1)c_{k+2}+2kc_k-\nu(\nu+1)c_k.$$

Ker mora biti enak 0, sledi, da je

$$c_{k+2}=\frac{k(k-1)+2k-\nu(\nu+1)}{(k+2)(k+1)}\,c_k=\frac{(k-\nu)(k+\nu+1)}{(k+2)(k+1)}\,c_k. \tag{5.5.2}$$

Od tod dobimo zaporedoma

$$c_2=-\frac{\nu(\nu+1)}{2\cdot 1}\,c_0, \qquad c_4=\frac{(2-\nu)(2+\nu+1)}{4\cdot 3}\,c_2=\frac{(-\nu)(-\nu+2)(\nu+1)(\nu+3)}{4!}\,c_0$$

in v splošnem

$$c_{2n}=\frac{(-\nu)(-\nu+2)\cdots(-\nu+2n-2)(\nu+1)(\nu+3)\cdots(\nu+2n-1)}{(2n)!}\,c_0.$$

Torej je

$$c_{2n}=\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,\nu(\nu-2)\cdots(\nu-2n+2)(\nu+1)(\nu+3)\cdots(\nu+2n-1)\,c_0. \tag{5.5.3}$$

Podobno izračunamo, da je

$$c_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,(\nu-1)(\nu-3)\cdots(\nu-2n+1)(\nu+2)(\nu+4)\cdots(\nu+2n)\,c_1. \tag{5.5.4}$$

Če izberemo $c_0=1$ in $c_1=0$, dobimo rešitev

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}c_{2n}z^{2n}=1-\frac{\nu(\nu+1)}{2!}z^2+\frac{\nu(\nu-2)(\nu+1)(\nu+3)}{4!}z^4-\ldots$$

Če pa izberemo $c_0 = 0$ in $c_1 = 1$, dobimo rešitev

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{(\nu-1)(\nu+2)}{3!} z^3 + \frac{(\nu-1)(\nu-3)(\nu+2)(\nu+4)}{5!} z^5 - \ldots,$$

ki je linearno neodvisna od y_1. Kvocientni kriterij pokaže (to bomo pustili bralcu za vajo), da vrsti konvergirata za $|z| < 1$, kar je v skladu z izrekom 5.4.1, saj sta p in q holomorfni funkciji na krogu $|z| < 1$. Kadar je ν sodo število, $\nu = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$), vidimo iz (5.5.3), da je $c_{2n} = 0$ za vse $n > m$ (ker tedaj v c_{2n} nastopa faktor $2m - 2m = 0$), zato je v tem primeru y_1 polinom stopnje $2m$, in sicer sod. Podobno je y_2 polinom stopnje $2n+1$, kadar je $\nu = 2n+1$ ($n \in \mathbb{N}$). V vsakem primeru je torej ena od rešitev y_1, y_2 polinom stopnje n, kadar je $\nu = n$ naravno število; začasno jo bomo označili kar z y_n. Ti polinomi so pomembni v matematiki in fiziki, zato jih bomo poskusili zapisati v bolj strnjeni obliki, ki si jo bo lažje zapomniti.

Iz rekurzivne formule (5.5.2) lahko izrazimo (ko je $\nu = n \in \mathbb{N}$)

$$c_k = -\frac{(k+1)(k+2)}{(n-k)(n+k+1)} c_{k+2}. \tag{5.5.5}$$

Od tod dobimo zaporedoma

$$c_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\, c_n, \qquad c_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}\, c_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\, c_n$$

in v splošnem

$$c_{n-2k} = (-1)^k \, \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-2k+1)}{2\cdot 4\cdots 2k(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2k+1)}\, c_n.$$

To formulo bomo preoblikovali z upoštevanjem enakosti, kot so

$$(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2k+1) = \frac{(2n)!}{(2n-2k)!2n(2n-2)\cdots(2n-2k+2)}$$

in $2n(2n-2)\cdots(2n-2k+2) = 2^k n(n-1)\cdots(n-k+1) = 2^k \frac{n!}{(n-k)!}$. Tako sledi

$$\begin{aligned} c_{n-2k} &= (-1)^k \frac{n!}{2^k k!(n-2k)! \frac{(2n)!}{2n(2n-2)\cdots(2n-2k+2)(2n-2k)!}}\, c_n \\ &= \frac{(-1)^k n!(2n-2k)!2^k \frac{n!}{(n-k)!}}{2^k k!(n-2k)!(2n)!}\, c_n = \frac{(-1)^k (n!)^2 (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!(2n)!}\, c_n. \end{aligned}$$

Če polinom y_n pomnožimo s primerno konstanto, tako da bo vodilni koeficient novega polinoma P_n enak $c_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}$, dobimo iz pravkar izpeljane formule

$$c_{n-2k} = \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}$$

in tako

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}\, z^{n-2k}. \tag{5.5.6}$$

Polinom P_n imenujemo *Legendreov polinom*. Izraz na desni v (5.5.6) lahko poenostavimo:

$$\begin{aligned} P_n(z) &= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k}{2^n k!(n-k)!} \frac{d^n}{dz^n} z^{2n-2k} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \binom{n}{k} \left(z^2\right)^{n-k} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(z^2\right)^{n-k}, \end{aligned}$$

kjer smo v zadnji enakosti upoštevali, da je $\frac{d^n}{dz^n}(z^{2n-2k}) = 0$, ko je $k > [\frac{n}{2}]$, saj je tedaj monom z^{2n-2k} stopnje manjše od n. Tako smo končno izpeljali *Rodriguesovo formulo*

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \left[\left(z^2 - 1\right)^n\right]. \tag{5.5.7}$$

Iz Rodriguesove formule takoj izračunamo

$$P_0(z) = 1, \qquad P_1(z) = z, \qquad P_2(z) = \frac{3z^2 - 1}{2}, \qquad P_3(z) = \frac{5z^3 - 3z}{2}, \quad \ldots$$

V nalogi 1 bo bralec lahko neposredno preveril, da polinom, podan s formulo (5.5.7), zadošča Legendreovi enačbi, ko je $\nu = n$.

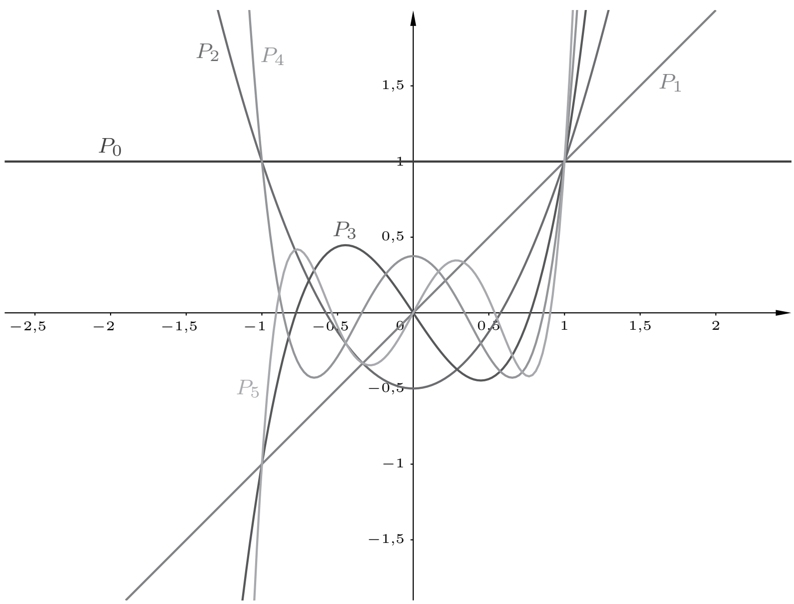

FIGURE 5.5. Legendreovi polinomi P_n, $n \leq 5$.

Funkcijo $(1-2zt+t^2)^{-1/2}$ imenujemo *generirajoča funkcija Legendreovih polinomov*, ker jih generira v smislu, opisanem v naslednji trditvi:

TRDITEV 5.5.1. *Za vse dovolj majhne $|t|$ je*

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)t^n. \tag{5.5.8}$$

PROOF. Kadar je $|t(2z-t)|<1$, lahko razvijemo generirajočo funkcijo v binomsko vrsto:

$$\begin{aligned}
(1-t(2z-t))^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-1)^k t^k(2z-t)^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+k-1)}{k!}\,t^k(2z-t)^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!}\,t^k(2z-t)^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^k k! 2\cdot 4\cdots 2k}\,t^k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(2z)^{k-j}(-t)^j\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{(2k)!}{2^{k+j}k!}\,\frac{1}{j!(k-j)!}\,(-1)^j z^{k-j}t^{k+j}.
\end{aligned}$$

Vpeljimo nov sumacijski indeks $n=k+j$, namesto k. Potem je v gornji vsoti $0\le j\le k=n-j$, torej je $2j\le n$ in sledi, da je

$$\begin{aligned}
(1-t(2z-t))^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^j\frac{(2(n-j))!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!}\,z^{n-2j}t^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)t^n,
\end{aligned}$$

kjer je zadnja enakost posledica formule (5.5.6). □

Z odvajanjem formule (5.5.8) na t dobimo

$$\left(1-2zt+t^2\right)^{-\frac{3}{2}}(z-t)=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(z)t^{n-1},$$

torej je

$$\left(1-2zt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}(z-t)=\left(1-2zt+t^2\right)\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(z)t^{n-1}.$$

Ko razvijemo izraz na levi po formuli (5.5.8), sledi

$$\sum_{n=0}^{\infty} zP_n(z)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[nP_n(z)t^{n-1} - 2nzP_n(z)t^n + nP_n(z)t^{n+1}\right].$$

Koeficienta pred t^n na levi in desni strani te enakosti morata biti enaka, torej $zP_n(z) - P_{n-1}(z) = (n+1)P_{n+1}(z) - 2nzP_n(z) + (n-1)P_{n-1}(z)$. Ko to enakost preuredimo, dobimo naslednjo posledico:

POSLEDICA 5.5.2.

$$(n+1)P_{n+1}(z) = (2n+1)zP_n(z) - nP_{n-1}(z). \tag{5.5.9}$$

Formula (5.5.9) nam omogoča postopno izračunati vse Legendreove polinome, ko poznamo $P_0(z) = 1$ in $P_1(z) = z$.

Pomembna lastnost Legendreovih polinomov je njihova ortogonalnost v smislu naslednje trditve.

TRDITEV 5.5.3.

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \delta_{m,n}\frac{2}{2n+1}, \tag{5.5.10}$$

kjer je $\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & \text{če je } m = n \\ 0, & \text{če je } m \neq n. \end{cases}$

PROOF. Za vsako n-krat zvezno odvedljivo funkcijo f dobimo z uporabo Rodriguesove formule in z integriranjem per partes:

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f(x)\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]dx =$$
$$= \frac{1}{2^n n!}\left[f(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(x^2-1)^n\right]\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(x^2-1)^n\right]dx.$$

Izintegrirani del je enak 0, saj je

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(x-1)^n(x+1)^n\right] = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left[(x-1)^n\right]^{(k)}\left[(x+1)^n\right]^{(n-1-k)},$$

pri čemer po odvajanju v vseh členih ostane faktor $(x-1)(x+1)$, ki je enak 0 v obeh točkah $x = 1$ in $x = -1$. Torej je

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx = -\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f'(x)\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(x^2-1)^n\right]dx.$$

Sedaj lahko integral na desni ponovno integriramo per partes in po n-kratni ponovitvi tega postopka dobimo

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x)(x^2-1)^n\,dx. \tag{5.5.11}$$

Ko vstavimo v formulo (5.5.11) $f = P_m$, kjer je $m < n$, dobimo 0, saj je polinom P_m stopnje m in je zato njegov n-ti odvod enak 0. To pove, da so polinomi P_n ortogonalni. Ko pa vstavimo $f = P_n$, nastopi v integralu na desni strani formule (5.5.11) $P_n^{(n)}(x)$, kar je ravno vodilni koeficient polinoma P_n, pomnožen s faktorjem $n!$. Ker je vodilni koeficient polinoma P_n enak $c_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}$, sledi sedaj iz (5.5.11)

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_n(x)^2\,dx &= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{(2n)!}{n!2^n}(x^2-1)^n\,dx \\
&= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n\,dx \\
&= \frac{2(2n)!}{(2^n n!)^2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}\varphi\,d\varphi \\
&= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}B\left(n+1,\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \\
&= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{n!\sqrt{\pi}}{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})\cdots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} \\
&= \frac{2(2n)!}{2^n n!(2n+1)(2n-1)\cdots 1} \\
&= \frac{2}{2n+1}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Ker ima za vsak n polinom P_n stopnjo n, je lahko ugotoviti, da se dajo vsi monomi (in torej tudi vsi polinomi) izraziti kot linearne kombinacije polinomov P_n. Ker so po Weierstrassovem izreku polinomi gosti v zveznih funkcijah na intervalu $[-1,1]$, te funkcije pa goste v prostoru $L^2(-1,1)$, sledi, da polinomi P_n tvorijo ortogonalno bazo Hilbertovega prostora $L^2(-1,1)$. Torej lahko vsako funkcijo $f \in L^2(-1,1)$ razvijemo v vrsto, kot pove naslednja trditev:

TRDITEV 5.5.4. *Za vsako funkcijo $f \in L^2(-1,1)$ konvergira vrsta*

$$
\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n, \qquad \text{kjer je} \quad a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx,
$$

proti f v normi prostora $L^2(-1,1)$. (To pomeni, da je $\lim_{N\to\infty}\|\sum_{n=0}^{N} a_nP_n - f\| = 0$, kjer je $\|g\| = \sqrt{\int_{-1}^{1}|g(x)|^2\,dx}$ za vsak $g \in L^2(-1,1)$.)

5.5.2. Ničle splošnih ortogonalnih polinomov

DEFINICIJA 5.5.5. Naj bo w pozitivna funkcija na intervalu (a,b) (ki je lahko tudi poltrak ali cela realna os), in sicer taka, da je $\int_a^b x^n w(x)\,dx < \infty$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. (Ta pogoj je samodejno izpolnjen, če je w zvezna in interval (a,b) končen.) Potem vsebuje Hilbertov prostor

$$L^2_w(a,b) := \{f : (a,b) \to \mathbb{C},\ \int_a^b |f(x)|^2 w(x)\,dx < \infty\}$$

vse polinome. Družino polinomov $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ imenujemo *družina ortogonalnih polinomov z utežjo* w, če je $\langle p_n, p_m\rangle_w = 0$ za $n \neq m$, kjer je skalarni produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$ definiran z $\langle f, g\rangle_w = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)w(x)\,dx$.

Naslednja trditev pove, da vrednosti ortogonalnih polinomov z naraščanjem stopnje čedalje bolj nihajo.

TRDITEV 5.5.6. *Naj bo (p_n) tako zaporedje ortogonalnih polinomov s kako utežjo w na intervalu (a,b), da je stopnja polinoma p_n enaka n. Potem ima p_n natanko n ničel na intervalu (a,b).*

PROOF. Najprej opazimo, da so taki polinomi enolično določeni do skalarnih faktorjev. Očitno to velja za p_0, saj je p_0 konstanta. Lahko je videti, da se vsi monomi (torej tudi vsi polinomi) stopnje do $n-1$ dajo izraziti kot linearne kombinacije polinomov $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$, torej je p_n nujno skalarni večkratnik polinoma oblike $p(z) = z^n + b_{n-1}p_{n-1}(z) + \ldots + b_0p_0(z)$ za kake koeficiente $b_0, \ldots, b_{n-1}$. Iz zveze $\langle p, p_j\rangle_w = 0$ in ortogonalnosti polinomov p_j sledi, da so koeficienti b_j enolično določeni (namreč $b_j = -\frac{\langle z^n, p_j\rangle_w}{\langle p_j, p_j\rangle_w}$). Torej je polinom p_n enolično določen do skalarnega faktorja natančno. Enak razmislek (in indukcija) pove tudi, da lahko privzamemo, da so vsi koeficienti polinomov p_n realni.

Naj bodo $a_1, \ldots, a_m$ vse točke na intervalu (a,b), v katerih p_n spremeni predznak (torej ničle lihe stopnje). Pokazati moramo, da je $m = n$. Privzemimo nasprotno, da je $m < n$. Potem je $q(z) := (z-a_1)\cdots(z-a_m)$ polinom stopnje $m < n$, torej se da izraziti kot linearna kombinacija polinomov $p_1, \ldots, p_m$. Ker so polinomi p_j ortogonalni z utežjo w, sledi, da je $\langle p_n, q\rangle_w = 0$, torej

$$\int_a^b p_n(x)q(x)w(x)\,dx = 0. \tag{5.5.12}$$

Toda polinom p_nq ima na intervalu (a,b) samo ničle sode stopnje, zato na intervalu (a,b) ne more spremeniti predznaka. Integral v (5.5.12) mora potemtakem biti bodisi pozitiven bodisi negativen, kar pa nasprotuje enakosti (5.5.12). □

5.5.3. Pridružene Legendreove funkcije

Poleg Legendreovih polinomov nastopajo v fiziki pogosto tudi njim pridružene funkcije.

DEFINICIJA 5.5.7. Legendreovemu polinomu P_n *pridružene Legendreove funkcije* so

$$P_n^m(z) := \left(1-z^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m}P_n(z), \qquad m = 0, 1, \ldots, n. \tag{5.5.13}$$

Z m-kratnim odvajanjem enačbe (5.5.1) ugotovimo, da funkcija $w := \frac{d^m}{dz^m}P_n(z)$ zadošča enačbi

$$(1-z^2)w'' - 2(m+1)zw' + (n-m)(n+m+1)w = 0.$$

Od tod in iz zveze $w = (1-z^2)^{-\frac{m}{2}}y$, kjer je $y := P_n^m$, potem sledi po krajšem računu, da funkcija P_n^m zadošča enačbi

$$\left[(1-z^2)y'\right]' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right]y = 0. \tag{5.5.14}$$

Za $m > 0$ velja

$$P_n^m(1) = 0 = P_n^m(-1). \tag{5.5.15}$$

Po (5.5.14) in (5.5.15) imamo lahko funkcije P_n^m za lastne funkcije ustreznega diferencilnega operatorja, zato sledi kot v trditvi 5.2.4, da so pri fiksnem $m >$ funkcije P_n^m $(n \geq m)$ med seboj ortogonalne. (To velja tudi za $m = 0$, saj so polinomi P_n med seboj ortogonalni.) Trdimo, da tvorijo ortogonalno bazo prostora $L^2(-1,1)$. Če je namreč kaka funkcija $f \in L^2(-1,1)$ ortogonalna na vse funkcije P_n^m $(n = m, m+1, \ldots)$, potem je funkcija $g(x) := f(x)(1-x^2)^{m/2}$ ortogonalna na vse polinome $p_{n-m}(x) := [(x^2-1)^n]^{n+m}$ v prostoru $L^2(-1,1)$. Ker ima polinom p_{n-m} stopnjo $2n-(n+m) = n-m$, pretečejo te stopnje vsa naravna števila, ko zavzame n vrednosti $m, m+1, m+2, \ldots$, zato razpenjajo polinomi p_{n-m} $(n \geq m)$ prostor vseh polinomov. Iz Weierstrassovega izreka (in gostosti zveznih funkcij v $L^2(-1,1)$) zato sledi, da mora biti $g \equiv 0$. Torej je tudi $f = 0$. Tako smo dokazali del naslednjega izreka:

Izrek 5.5.8. *Pri vsakem fiksnem m je $(P_n^m)_{n=m}^{\infty}$ ortogonalna baza Hilbertovega prostora $L^2(-1,1)$ in*

$$\|P_n^m\|^2 = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \tag{5.5.16}$$

Proof. Izračunati moramo le še

$$\|P_n^m\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^m(x)^2\,dx = \frac{1}{(2^n n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^m\left[\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}\left(\left(1-x^2\right)^n\right)\right]^2 dx.$$

Funkcijo v zadnjem integralu napišemo kot uv, kjer je $u = (1-x^2)^m\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}((1-x^2)^n)$ in $v = \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}((1-x^2)^n)$, in zaporedoma $n+m$-krat integriramo per partes. Iz razcepa $(1-x^2)^m = (1-x)^m(1+x)^m$ sledi s pomočjo formule za (višje) odvode produkta, da so izintegrirani deli v prvih m integriranjih per partes enaki 0. Podobno pokažemo, da so izintegrirani deli enaki 0 tudi pa nadaljnjih n integriranjih per partes (le da je treba upoštevati $(1-x^2)^n = (1-x)^n(1+x)^n$). Tako dobimo

$$\|P_n^m\|^2 = \frac{(-1)^{n+m}}{(2^n n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}\left[\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}\left(\left(1-x^2\right)^n\right)\left(1-x^2\right)^m\right]\left(1-x^2\right)^n dx.$$

Polinom $\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(1-x^2)^n)$ je stopnje $2n-(n+m)=n-m$ in ima vodilni koeficient $(-1)^n\frac{(2n)!}{(n-m)!}$. Ko ga pomnožimo s faktorjem $(1-x^2)^m$ in nato $(n+m)$-krat odvajamo, dobimo polinom stopnje $n-m+2m-(n+m)=0$, z vodilnim koeficientom $(-1)^n\frac{(2n)!}{(n-m)!}(-1)^m(n+m)!$. Ko vstavimo to v zadnji izraz za $\|P_n^m\|^2$, dobimo

$$\|P_n^m\|^2 = 2\,\frac{(2n)!(n+m)!}{(2^n n!)^2(n-m)!}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n\,dx.$$

Integral v zadnji formuli smo že izračunali v dokazu trditve 5.5.10; njegova vrednost je $\frac{1}{2}B(n+1,\frac{1}{2}) = \frac{1}{2n+1}\frac{2^n n!}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}$. Ko vstavimo to v zadnji izraz za $\|P_n^m\|^2$ in uredimo, dobimo želeno formulo (5.5.16). $\square$

Poleg Legendreovih obstajajo še številni drugi pomembni primeri ortogonalnih polinomov, nekatere med njimi, ki najpogosteje nastopajo v fiziki, si bomo ogledali v nalogah.

Naloge

Legendreovi polinomi

1. Preverite, da funkcija $y=\frac{d^n}{dz^n}[(z^2-1)^n]$ zadošča enačbi

$$(z^2-1)y''+2zy'-n(n+1)y=0.$$

(Navodilo: Označimo $u=(z^2-1)^n$. Potem je $(z^2-1)u'=2nzu$. Ko $(n+1)$-krat odvajamo to enakost (z uporabo formule $(fg)^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}$), dobimo

$$(z^2-1)u^{(n+2)}+2z(n+1)u^{(n+1)}+(n+1)nu^{(n)}=2nzu^{(n+1)}+2n(n+1)u^{(n)}.$$

Uredite zadnjo enakost in opazite, da je $y=u^{(n)}$.)

2. (i) Pokažite, da je $P_n(1)=1$ za vsak n.
(Namig: $\frac{d^n}{dz^n}[(z-1)^n(z+1)^n]=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[(z-1)^n]^{(k)}[(z+1)^n]^{(n-k)}$.)

(ii) Pokažite, da je $P_n(-1)=(-1)^n$.

(iii) Izračunajte vodilni koeficient polinoma P_n iz Rodriguesove formule. (Rezultat: $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.)

3. Pokažite, da so Legendreovi polinomi konstantni večkratniki polinomov, ki jih dobimo, ko uporabimo Gram-Schmidtov ortonormalizacijski postopek na zaporedju monomov $1,z,z^2,\ldots,z^n,\ldots$, kjer je skalarni produkt definiran z

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)\bar{g}(x)\,dx.$$

4. (*Potencial električnega dipola*) Dipol sestavljata dva enako velika, a nasprotno predznačena električna naboja. Postavimo koordinatni sistem tako, da bo naboj $-e$ v točki $(0,0,-a)$, naboj e pa v točki $(0,0,a)$. Splošna točka, ki je oddaljena za r od izhodišča in katere krajevni vektor oklepa s pozitivnim poltrakom osi z kot ϑ, je oddaljena od obeh nabojev za razdalji r_1 in r_2, ki se izražata kot

$$r_1 = \sqrt{a^2 + 2ar\cos\vartheta + r^2} \qquad \text{in} \qquad r_2 = \sqrt{a^2 - 2ar\cos\vartheta + r^2}.$$

Uporabite formulo (5.5.8), da izrazite skupni potencial $u := e(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1})$ dipola v obliki

$$u = \frac{2e}{r}\sum_{k=0}^{\infty} P_{2k+1}(\cos\vartheta)\left(\frac{a}{r}\right)^{2k+1}, \qquad \text{ko je } r > a.$$

Izpeljite od tod približek $u \approx \frac{2ae}{r^2}\cos\vartheta$, ki ga uporabljajo fiziki, kadar je r zelo velik v primerjavi z a.

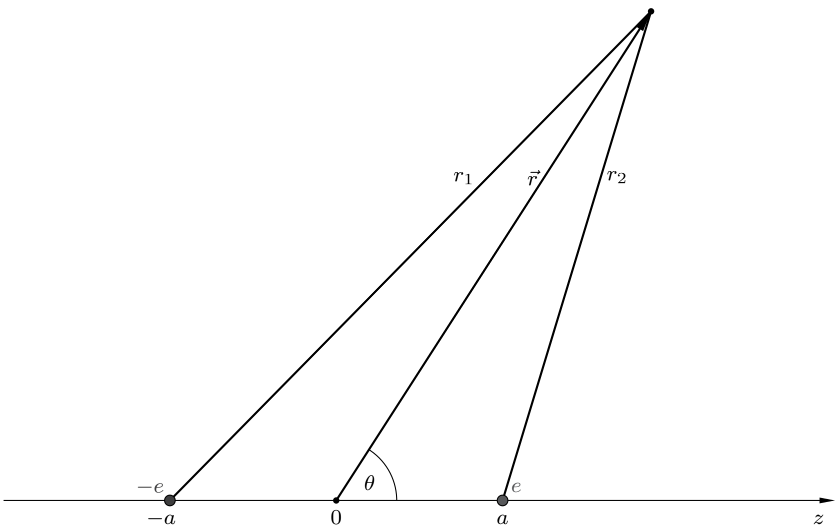

FIGURE 5.6. Električni dipol.

5. Določite prve tri člene v razvoju funkcije cos po Legendreovih polinomih.

* **6.** Naj bo $x \in (-1,1)$ in γ pozitivno orientirana krožnica s središčem x in polmerom $\sqrt{1-x^2}$. Iz Cauchyeve formule za n-ti odvod holomorfne funkcije f (namreč $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$) in Rodriguesove formule izpeljite, da je

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(x + i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\right)^n d\varphi$$

in sklepajte od tod, da je $|P_n(x)| \le 1$ za vse $x \in [-1,1]$ in $n \in \mathbb{N}$.

Hermiteovi polinomi

7. (i) Pokažite, da reševanje enačbe

$$y'' - 2zy' + 2\nu y = 0 \tag{5.5.17}$$

s potenčno vrsto $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ privede do rekurzivne formule

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} = 2(k-\nu)c_k \tag{5.5.18}$$

in izpeljite od, da sta

$$y_1 = 1 - \frac{2\nu}{2!}z^2 + \frac{2^2\nu(\nu-2)}{4!}z^4 - \frac{2^3\nu(\nu-2)(\nu-4)}{6!}z^6 + \ldots \quad \text{in}$$
$$y_2 = z - \frac{2(\nu-1)}{3!}z^3 + \frac{2^2(\nu-1)(\nu-3)}{5!}z^5 - \frac{2^3(\nu-1)(\nu-3)(\nu-5)}{7!}z^7 + \ldots$$

linearno neodvisni rešitvi enačbe.

(ii) Pokažite, da je v primeru, ko je $\nu = n \in \mathbb{N}$, ena rešitev enačbe polinom stopnje n. Če prilagodimo vodilni koeficient tega polinoma tako, da bo enak 2^n, pokažite, da ga je mogoče zapisati kot $H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}$. Polinome H_n imenujemo *Hermiteovi polinomi*. Prvih nekaj teh polinomov je: $H_0(z) = 1$, $H_1(z) = 2z$, $H_2(z) = 4z^2 - 2$, $H_3(z) = 8z^3 - 12z$, $H_4(z) = 16z^4 - 48z^2 + 12$, $\ldots$

(iii) * Dokažite, da kaka netrivialna rešitev y enačbe (5.5.17) zadošča pogoju

$$\lim_{|z|\to\infty} y(z)e^{-\frac{z^2}{2}} = 0 \tag{5.5.19}$$

natanko tedaj, ko je ν naravno število in y polinom. (Rešitev: Iz elementarne analize je znano, da vsak polinom y zadošča pogoju (5.5.19). Za dokaz v obratno smer pa bomo obravnavali le rešitev y_1 (ker je argument za y_2 in za splošno rešitev podoben). Najprej iz (5.5.18) sledi $\frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} = \frac{2(2n-\nu)}{(2n+2)(2n+1)}$, od koder opazimo, da imajo, kadar ν ni sodo naravno število, za vse dovolj velike n vsi koeficienti c_{2n} isti predznak in so neničelni; brez škode smemo vzeti, da so pozitivni (sicer bi obravnavali $-y_1$). V razvoju $e^{\frac{z^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} z^{2n}$ koeficienti $b_{2n} = \frac{1}{2^n n!}$ zadoščajo enakosti $\frac{b_{2n+2}}{b_{2n}} = \frac{1}{2(n+1)}$. Sedaj opazimo, da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{c_{2n+2}}{b_{2n+2}}}{\frac{c_{2n}}{b_{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4(2n-\nu)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = 2,$$

torej obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da je $\frac{c_{2n+2}}{b_{2n+2}} > \frac{3}{2}\frac{c_{2n}}{b_{2n}}$ za vse $n \geq N$. Od tod sledi, da je $\frac{c_{2N+2k}}{b_{2N+2k}} > (\frac{3}{2})^k \frac{c_{2N}}{b_{2N}} > 1$ za vse dovolj velike k. To pomeni, da je $\frac{c_{2n}}{b_{2n}} > 1$ za vse dovolj velike n, recimo za $n \geq n_0$, in zato kvocient

$$\frac{y_1(z)}{e^{\frac{z^2}{2}}} = \frac{c_0 + c_2 z^2 + \ldots + c_{2n} z^2 n + \ldots}{b_0 + b_2 z^2 + \ldots + b_{2n} z^{2n} + \ldots}$$

ne more konvergirati proti 0, ko gre $|z|$ proti ∞. Za dovolj velike $|z|$ je namreč prvih n_0 členov obeh vrst zanemarljivo majhnih v primerjavi z drugimi in je potem za pozitivne z števec gornjega ulomka večji od imenovalca).)

8. Pokažite s podobnim sklepanjem kot v nalogi 1 za Legendreove polinome, da funkcija $y = e^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}e^{-z^2}$ zadošča enačbi $y'' - 2zy' + 2ny = 0$.

9. Pokažite, da je e^{2zt-t^2} *generirajoča funkcija za Hermiteove polinome*, kar pomeni, da je

$$e^{2zt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!}\, t^n. \tag{5.5.20}$$

(Rešitev: Koeficient pred t^n v razvoju kake funkcije f v Taylorjevo vrsto je $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, torej je

$$e^{2zt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(z)}{n!}\, t^n,$$

kjer je

$$\begin{aligned} A_n(z) &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{2zt-t^2}\Big|_{t=0} = e^{z^2}\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(z-t)^2}\Big|_{t=0} \\ &= (-1)^n e^{z^2}\frac{\partial^n}{\partial s^n} e^{-s^2}\Big|_{s=z} = (-1)^n e^{z^2}\frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}. \end{aligned}$$

Po nalogi 7 je zadnji izraz v gornji izpeljavi enak $H_n(z)$, torej $A_n(z) = H_n(z)$.)

10. (i) Opazite, da je $e^{-z^2}H_n(z) = -\frac{d}{dz}(e^{-z^2}H_{n-1}(z))$ in izpeljite od tod zvezo

$$H_n(z) = 2zH_{n-1}(z) - H'_{n-1}(z).$$

(ii) Z odvajanjem enakosti (5.5.20) na z izpeljite zvezo $H'_n(z) = 2nH_{n-1}(z)$ in nato sklepajte s pomočjo točke (i), da velja *rekurzivna formula*

$$H_n(z) = 2zH_{n-1}(z) - 2(n-1)H_{n-2}(z).$$

11. Pokažite, da so Hermiteovi polinomi ortogonalni z utežjo e^{-x^2} na realni osi, natančneje, da velja

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)H_m(x) = \delta_{m,n}\sqrt{\pi}2^n n!.$$

* **12.** (i) Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ taka funkcija, da je $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|e^{-x^2}e^{|tx|} < \infty$ za vsak $t \in \mathbb{R}$ in da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)e^{-x^2} = 0$$

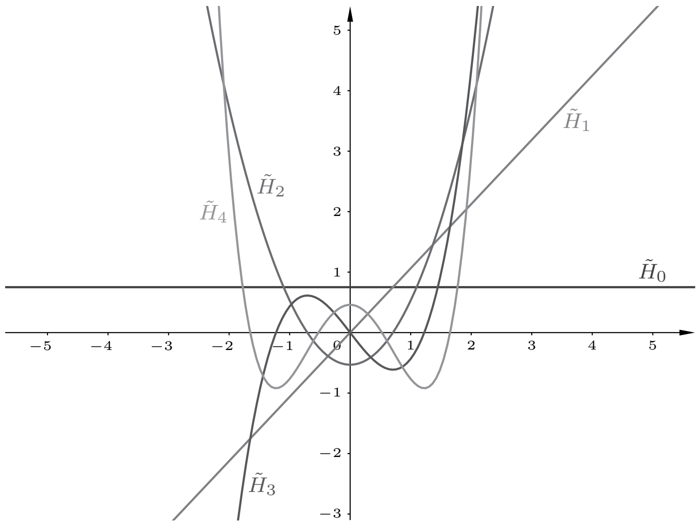

FIGURE 5.7. Normalizirani Hermiteovi polinomi $\tilde{H}_n := \frac{H_n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}$, $n \leq 4$.

za vse polinome p. Pokažite, da je tedaj

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} e^{itx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} x^n f(x) e^{-x^2}\, dx = 0$$

in zato $f = 0$ skoraj povsod. (Namig: injektivnost Fourierove transformacije.)

(ii) Izpeljite iz (i), da tvorijo polinomi H_n ortogonalno bazo prostora $L_w^2(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 w(x)\, dx < \infty\}$, kjer je $w(x) = e^{-x^2}$. (Navodilo: najprej pokažite s pomočjo Cauchy-Schwarzove neenakosti, da je $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| e^{-x^2} e^{|tx|}\, dx < \infty$ za vsako funkcijo $f \in L_w^2(\mathbb{R})$.)

13. Razvijte po bazi $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcijo $f(x) = e^{cx}$, kjer je c konstanta. (Namig: Lažja od direktne je naslednja pot: po (5.5.20) je $e^{2z\frac{c}{2} - (\frac{c}{2})^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} (\frac{c}{2})^n$; torej je $e^{cz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{c^2}{4}} c^n}{2^n n!} H_n(z)$.)

***14.** (*Harmonični oscilator v kvantni mehaniki*) Zakon o ohranitvi energije za vzmetno nihalo (tj. kvader na gladki podlagi, pritrjen na vzmet koeficienta k) pravi, da je

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2 = E, \tag{5.5.21}$$

kjer je E konstanta, x odmik od ravnovesne lege, p pa gibalna količina. V kvantni mehaniki je treba v to enačbo namesto p vstaviti operator $-i\frac{h}{2\pi}\frac{d}{dx}$, kjer je h Planckova konstanta, delujoč na valovno funkcijo ψ. Spremenljivko x je treba interpretirati kot operator množenja z x, E pa kot množenje s skalarjem

E. Tako dobimo iz enačbe (5.5.21)

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)\psi = 0.$$

Ko vpeljemo (namesto k) novo konstanto ν prek zveze $2\nu + 1 = \frac{4\pi E}{h}\sqrt{\frac{m}{k}}$ in novo spremenljivko $z = \sqrt{\frac{2\pi}{h}}\sqrt[4]{mk}x$, se enačba spremeni v

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \left(2\nu + 1 - z^2\right)\psi = 0. \tag{5.5.22}$$

Za zelo velike $|z|$ je konstanta $2\nu + 1$ zanemarljiva v primerjavi z z^2 in enačba (5.5.22) se glasi približno $\frac{d^2\psi}{dz^2} = z^2\psi$. Preverite, da sta za velike $|z|$ funkciji $\psi = e^{\pm\frac{z^2}{2}}$ približni rešitvi zadnje enačbe, če zanemarimo $e^{\pm\frac{z^2}{2}}$ v primerjavi z $z^2 e^{\pm\frac{z^2}{2}}$. Nato pokažite, da vpeljava nove neznanke $y = \psi e^{\frac{z^2}{2}}$ spremeni enačbo (5.5.22) v

$$y'' - 2zy' + 2\nu y = 0.$$

Fizikalno smiselne so tiste rešitve, pri katerih je $\lim_{|x|\to\infty}\psi(x) = 0$. Sklepajte sedaj od tod in iz naloge 7, da mora biti ν naravno število, $\nu = n$. Sledi, da sme zavzeti energija le diskretne vrednosti, $E = (2n+1)\frac{h}{4\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ $(n \in \mathbb{N})$.)

Polinomi Čebiševa

15. (i) Iz zveze

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = \left(e^{i\varphi}\right)^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}\varphi\, i^k \sin^k\varphi$$

izpeljite enakost

$$\cos n\varphi = \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^j\binom{n}{2j}\cos^{n-2j}\varphi(1-\cos^2\varphi)^j \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Če torej označimo s T_n polinom

$$T_n(z) := \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^j\binom{n}{2j}z^{n-2j}(1-z^2)^j,$$

imenovan *polinom Čebiševa*, imamo $\cos n\varphi = T_n(\cos\varphi)$ oziroma, ko pišemo $z = \cos\varphi$,

$$\cos(n\arccos z) = T_n(z). \tag{5.5.23}$$

(ii) Koliko je vodilni koeficient polinoma T_n? (Odgovor: 2^{n-1})

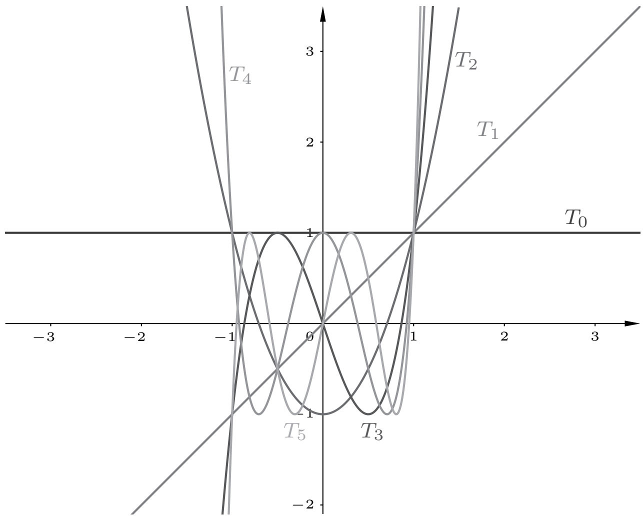

FIGURE 5.8. Polinomi Čebiševa T_n, $n \leq 5$.

(iii) Po pravilu za posredno odvajanje pokažite, da je $\frac{dy}{d\varphi} = -\sin\varphi\ \frac{dy}{dz}$ in $\frac{d^2y}{d\varphi^2} = \sin^2\varphi\ \frac{d^2y}{dz^2} - \cos\varphi\ \frac{dy}{dz} = (1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - z\frac{dy}{dz}$ ter nato sklepajte iz zveze $\frac{d^2}{d\varphi^2}\cos n\varphi + n^2\cos n\varphi = 0$, da polinom $y = T_n(z)$ zadošča enačbi

$$(1-z^2)y'' - zy' + n^2y = 0.$$

(iv) Pokažite (z veljavo spremenljivke $x = \cos\varphi$), da je

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{če je } m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & \text{če je } m = n \neq 0 \\ \pi, & \text{če je } m = n = 0. \end{cases}$$

16. (*Generirajoča funkcija polinomov Čebiševa je Poissonovo jedro.*) Dokažite, da je

$$\frac{1-t^2}{1-2tz+t^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(z)t^n$$

za vse dovolj majhne t. (Navodilo: S substitucijo $z = \cos\varphi$ se desna stran enakosti glasi $1+2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(\cos\varphi)t^n = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} t^n\cos n\varphi = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(e^{in\varphi}+e^{-in\varphi})t^n$. Seštejte geometrijski vrsti, iz katerih je sestavljena zadnja vsota. To bo dokazalo formulo za realne t.)

17. (*Minimaks lastnost polinomov Čebiševa*) Dokažite, da za vsak polinom p stopnje n z vodilnim koeficientom 1 velja

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |p(x)| \geq \max_{-1\leq x\leq 1} |2^{1-n}T_n(x)| = 2^{1-n}.$$

(Rešitev: Enakost sledi iz zveze $T_n(\cos\varphi) = \cos n\varphi$, ko vstavimo za x katerokoli od vrednosti $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Za dokaz neenakosti pa smemo privzeti, da ima p realne koeficiente, saj zadošča dokazati, da je $\max_{-1\leq x\leq 1}|\mathrm{Re}\, p(x)| \geq 2^{1-n}$. Opazimo, da zavzame polinom $T_n(x)$ v točkah x_k zaporedoma vrednosti $1, -1, 1, -1, \ldots$ Če bi bilo $\max_{-1\leq x\leq 1}|p(x)| < 2^{1-n}$, bi tudi polinom

$$q(x) := 2^{1-n}T_n(x) - p(x)$$

v točkah x_k zamenjal predznak, torej bi imel med x_k in x_{k+1} ničlo in zato na intervalu $[-1, 1]$ vsaj n ničel. Toda, ker je q stopnje $n-1$, je to nemogoče.)

Laguerrovi polinomi

18. Polinome

$$L_n(z) := \frac{e^z}{n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^n e^{-z}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

imenujemo *Laguerrovi polinomi*.

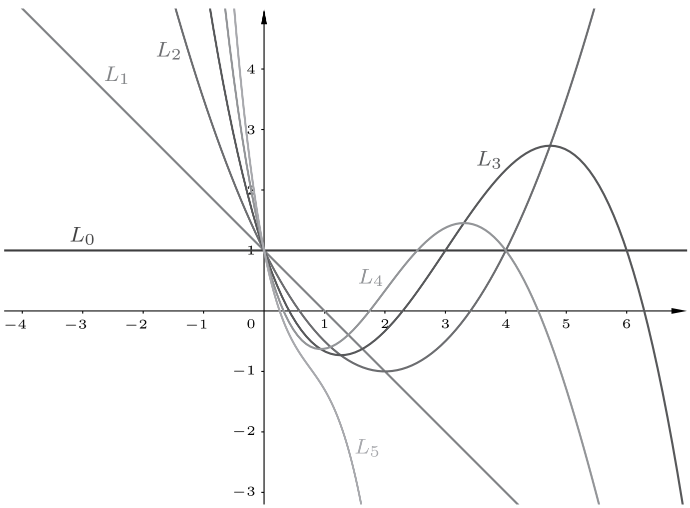

FIGURE 5.9. Laguerrovi polinomi L_n, $n \leq 5$.

(i) Pokažite, da $y := L_n$ zadošča diferencialni enačbi

$$zy'' + (1-z)y' + ny = 0.$$

(ii) Izrazite L_n v obliki

$$L_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k} z^k.$$

*\ **19.** (*Generirajoča funkcija Laguerrovih polinomov*) Dokažite identiteto

$$\frac{e^{-\frac{zt}{1-t}}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(z)t^n \qquad (|t| < 1). \tag{5.5.24}$$

*\ **20.** Izpeljite *rekurzivno formulo za Laguerrove polinome*, tj.

$$(n+1)L_{n+1}(z) + (z - 2n - 1)L_n(z) + nL_{n-1}(z) = 0.$$

(Namig: najprej odvajajte na t enakost (5.5.24).)

21. (i) Pokažite, da so Laguerrovi polinomi L_n ortogonalni z utežjo $w(x) = e^{-x}$ na poltraku $(0, \infty)$ in da je $\|L_n\|_w^2 = 1$.

(ii) * Dokažite, da je $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza Hilbertovega prostora $L_w^2(0, \infty)$. (Navodilo: Ker je vsak polinom linearna kombinacija Laguerrovih polinomov, zadošča dokazati, da za funkcijo $f \in L_w^2(0, \infty)$, iz pogoja $\int_0^\infty f(x)x^n e^{-x}\, dx = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ sledi $f = 0$. S substitucijo $x = s^2$ prevedite ta pogoj na $\int_{-\infty}^\infty f(s^2)|s|s^{2n}e^{-s^2} ds = 0$. Od tod sledi, da je $\int_{-\infty}^\infty f(s^2)|s|s^n e^{-s^2} ds = 0$ za vse $n \in \mathbb{N}$, saj je za lihe n integrand liha funkcija. S pomočjo Cauchy-Schwarzove neenakosti pokažite, da funkcija $g(s) := f(s^2)|s|^{1/2}$ zadošča pogoju $\int_{-\infty}^\infty |g(s)|e^{-s^2}e^{|ts|}\, ds < \infty$ za vse $t \in \mathbb{R}$ in uporabite nalogo 12(i).)

5.6. Stacionarna porazdelitev temperature na krogli

Kot zgled uporabe Legendreovih polinomov si oglejmo stacionarno porazdelitev temperature na krogli s polmerom a, če poznamo porazdelitev temperature na površini krogle. Izhodišče koordinatnega sistema naj bo v središču krogle, temperatura v točki s sferičnimi koordinatami (r, θ, φ) v času t pa naj bo $u(r, \theta, \varphi, t)$. (Tukaj naj θ označuje kot med krajevnim vektorjem do točke in pozitivnim poltrakom osi z.) Iz fizike je znano, da temperatura zadošča toplotni enačbi $\frac{\partial u}{\partial t} = c\Delta u$, kjer je c pozitivna konstanta, Δ pa Laplaceov operator, ki se v sferičnih koordinatah glasi

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2 \sin\theta}(u_\theta \sin\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}.$$

Pri tem smo z indeksi označili parcialne odvode, npr. $u_{rr} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$. Temperatura na površini krogle je podana kot $u(a, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$, kjer je f dana funkcija. Ker nas zanima stacionarna (torej od časa neodvisna) porazdelitev temperature, je $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, torej želimo rešiti *Dirichletov problem za kroglo*:

$$\Delta u = 0 \qquad \text{za } r < a \text{ in } u(a, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi).$$

Po Fourierovi metodi ločitve spremenljivk poskusimo najprej poiskati tiste rešitve enačbe $\Delta u = 0$, ki jih je mogoče izraziti kot $u(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ za kake funkcije R, Θ in Φ. Ko vstavimo to v enačbo $\Delta u = 0$, pri čemer uporabimo izraz za Δ v sferičnih koordinatah, dobimo enačbo

$$R''\Theta\Phi + \frac{2}{r}R'\Theta\Phi + \frac{1}{r^2 \sin\theta}(\Theta' \sin\theta)' R\Phi + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Phi'' R\Theta = 0.$$

Preoblikujemo jo lahko v

$$r^2 \sin^2\theta \left(\frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R}\right) + \sin\theta \frac{(\Theta' \sin\theta)'}{\Theta} = -\frac{\Phi''}{\Phi}. \tag{5.6.1}$$

Ker je desna stran v tej enačbi odvisna le od φ, leva pa je neodvisna od φ, morata biti obe strani konstantni; označimo to konstanto z m^2. Tako dobimo iz (5.6.1) enačbi

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0 \tag{5.6.2}$$

in

$$r^2\left(\frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R}\right) = \frac{m^2}{\sin^2\theta} - \frac{(\Theta' \sin\theta)'}{\Theta \sin\theta}. \tag{5.6.3}$$

Funkcija Φ mora biti periodična s periodo 2π, saj sprememba kota φ za 2π ne vpliva na lego točke v prostoru. Rešitve enačbe (5.6.2) (tj. linearne kombinacije funkcij $\cos m\varphi$ in $\sin m\varphi$) imajo periodo 2π le, če je m celo število. Ker v enačbah nastopa le m^2, smemo vzeti, da je $m \geq 0$, torej $m \in \mathbb{N}$.

V enačbi (5.6.3) je leva stran odvisna le od r, desna pa le od θ, torej morata biti obe enaki kaki konstanti λ. Iz (5.6.3) tako sledi

$$r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \tag{5.6.4}$$

in

$$\sin\theta(\Theta' \sin\theta)' + (\lambda \sin^2\theta - m^2)\Theta = 0. \tag{5.6.5}$$

Enačba (5.6.4) je Eulerjeva in jo bomo lahko rešili z nastavkom $R = r^\mu$. V enačbo (5.6.5) pa vpeljimo novo spremenljivko $s = \cos\theta$; torej je $\frac{dg}{d\theta} = \frac{dg}{ds}\frac{ds}{d\theta} = -\sin\theta\frac{dg}{ds}$ za vsako funkcijo g, zato tudi $\Theta' \sin\theta = -\frac{d\Theta}{ds}\sin^2\theta = -(1-s^2)\frac{d\Theta}{ds}$ in

$$\begin{aligned}
\sin\theta(\Theta' \sin\theta)' &= \sin\theta(-\sin\theta)\frac{d}{ds}(\Theta' \sin\theta) \\
&= -\sin^2\theta \frac{d}{ds}\left[-\left(1-s^2\right)\frac{d\Theta}{ds}\right] \\
&= \left(1-s^2\right)\frac{d}{ds}\left[\left(1-s^2\right)\frac{d\Theta}{ds}\right].
\end{aligned}$$

Tako preoblikujemo (5.6.5) v

$$\left(1-s^2\right)\frac{d}{ds}\left(\left(1-s^2\right)\frac{d\Theta}{ds}\right) + \left[\lambda\left(1-s^2\right) - m^2\right]\Theta = 0$$

oziroma

$$\left(1-s^2\right)\frac{d^2\Theta}{ds^2} - 2s\frac{d\Theta}{ds} + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-s^2}\right)\Theta = 0. \tag{5.6.6}$$

To pa je ravno enačba (5.5.14) za pridružene Legendreove funkcije, če je $\lambda = n(n+1)$.

Zaradi enostavnosti bomo sedaj predpostavili, da je funkcija f, ki nastopa v robnem pogoju $u(a,\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi)$, odvisna le od θ. Potem lahko pričakujemo, da bo tudi rešitev u neodvisna od φ, v gornjem računu torej Φ konstanta in zato $m = 0$ po (5.6.2). Tedaj se enačba (5.6.6) poenostavi v Legendreovo enačbo. Ena rešitev le-te je, kadar je $\lambda = n(n+1)$, Legendreov polinom P_n. Ker tvorijo polinomi P_n ortogonalno bazo Hilbertovega prostora $L^2(-1,1)$, jih je dovolj, da razvijamo funkcije po njih. Zato bomo vzeli, da je λ eno od števil

$$\lambda_n = n(n+1) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Tedaj za vsak n vzamemo $\Theta_n(\theta) := P_n(\cos\theta)$ za rešitev enačbe (5.6.6) (kadar je $m = 0$). Eulerjeva enačba (5.6.4) se sedaj glasi

$$r^2R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0.$$

Njeni linearno neodvisni rešitvi sta $R = r^n$ in $R = r^{-(n+1)}$. Le prva je definirana tudi v točki 0 in omejena ter s tem fizikalno smiselna. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je torej funkcija

$$u_n(r,\theta) = A_n r^n P_n(\cos\theta),$$

kjer je A_n poljubna konstanta, rešitev enačbe $\Delta u = 0$. Tudi vsota

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) \tag{5.6.7}$$

mora biti potem rešitev iste enačbe, če je le vrsta v (5.6.7) taka, da jo smemo členoma odvajati po dvakrat na vsako od spremenljivk r in θ.

Konstante A_n moramo seveda še določiti tako, da bo izpolnjen robni pogoj $u(a,\theta) = f(\theta)$, se pravi

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta) = f(\theta).$$

Po trditvi 5.5.4 je to mogoče, in sicer sledi, da je

$$a^n A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(\arccos s)P_n(s)\,ds = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta.$$

Na splošno, ko je f odvisna tudi od φ, pa v rešitvi u nastopajo (namesto funkcij $P_n(\cos\theta)$) funkcije oblike $P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ in $P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$ (imenovane *sferične harmonije*), kjer so P_n^m prirejene Legendreove funkcije, ki smo jih vpeljali v prejšnjem razdelku.

Naloge

1. (i) Izračunajte, da je

$$\left[(z^2-1)^{n+1}\right]'' = 2(n+1)(2n+1)(z^2-1)^n + 4n(n+1)(z^2-1)^{n-1}.$$

(ii) S pomočjo točke (i) izpeljite iz Rodriguesove formule zvezo

$$P_{n+1}(z) = \frac{2n+1}{2^n n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z^2-1)^n\right] + P_{n-1}(z),$$

od tod pa

$$P'_{n+1}(z) - P'_{n-1}(z) = (2n+1)P_n(z).$$

Sklenite, da je

$$\int P_n(x)\,dx = \frac{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)}{2n+1} + \text{konst.}$$

(iii) Iz (5.5.6) izpeljite, da je $P_{2k-1}(0) = 0$ in $P_{2k}(0) = \frac{(-1)^k(2k)!}{(2^k k!)^2}$.

2. Določite stacionarno razporeditev temperature na krogli s polmerom a, če je temperatura na površini podana z

$$f(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi. \end{cases}$$

(Namig: za izračun koeficientov v razvoju funkcije f po Legendreovih polinomih uporabite nalogo 1.)

3. Kako bi določili stacionarno porazdelitev $u(r,\theta,\varphi)$ temperature na polkrogli $r \le a$, $\theta < \frac{\pi}{2}$, če je temperatura na robu podana kot

$$u(a,\theta,\varphi) = f(\theta) \qquad \text{za} \ \ \theta < \frac{\pi}{2} \ \ \text{in} \ \ u\Big(r, \frac{\pi}{2}, \varphi\Big) = 0?$$

(Namig: razširite f na interval $[0,\pi]$ tako, da bo $f(\cos\theta)$ liha funkcija argumenta $\cos\theta$ na intervalu $(-1,1)$.)

4. Izračunajte $\iint_{\|\vec{r}\|=1} f(\vec{r})^2\,dS$, kjer je $dS = \sin\theta\,d\theta d\varphi$ ploskovni element na enotski sferi, f pa ena od sferičnih funkcij, npr. $f(\theta,\varphi) = P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$.

5.7. Pravilna singularna točka diferencialne enačbe

V diferencialnih enačbah oblike

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{5.7.1}$$

ki nastopajo v fiziki, p in q običajno nista povsod holomorfni funkciji, pač pa imata lahko pole.

Definicija 5.7.1. Točka α je *pravilna singularna točka* enačbe (5.7.1), če sta p in q holomorfni funkciji na kaki njeni okolici, razen morda v α, kjer ima p pol stopnje največ 1, q pa pol stopnje največ 2. Če pa sta p in q holomorfni tudi v α, pravimo, da je α *regularna* točka enačbe.

Zgled 5.7.2. (i) Za Legendreovo enačbo

$$y'' - \frac{2z}{1-z^2}y' + \frac{\nu(\nu+1)}{1-z^2}y = 0$$

sta 1 in -1 pravilni singularni točki.

(ii) Za *Besselovo enačbo*

$$y'' + \frac{1}{z}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)y = 0$$

je 0 pravilna singularna točka.

(iii) Za *Gaussovo hipergeometrijsko enačbo*

$$z(1-z)y'' + [c - (a+b+1)z]y' - aby = 0,$$

kjer so a, b in c konstante, sta 0 in 1 pravilni singularni točki.

Oglejmo si, kako rešimo s *Frobeniusovo metodo* enačbo (5.7.1) v okolici pravilne singularne točke α. Zaradi krajšega zapisa bomo vzeli, da je $\alpha = 0$. Po predpostavki sta potem funkciji $zp(z)$ in $z^2q(z)$ holomorfni v okolici točke 0, torej ju lahko razvijemo v vrsti

$$zp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \qquad \text{in} \qquad z^2q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k, \tag{5.7.2}$$

ki naj obe konvergirata recimo na krogu $D(0,R)$. Rešitev enačbe (5.7.1) bomo iskali v obliki

$$y = z^\mu \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{\mu+k}, \tag{5.7.3}$$

kjer so μ in c_k še neznane kompleksne konstante. Pri tem smemo privzeti, da je $c_0 \neq 0$ (sicer bi iz vrste lahko izpostavili dodatni faktor z^m in prilagodili μ). Ko vstavimo ta izraz v enačbo (5.7.1), ki smo jo pomnožili z z^2 (torej v enačbo $z^2y'' + z^2p(z)y' + z^2q(z)y = 0$), in upoštevamo vrsti (5.7.2), dobimo

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\mu+k)(\mu+k-1)c_k z^{\mu+k} + \\ + \left(\sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}(\mu+j)c_j z^{\mu+j}\right) + \left(\sum_{i=0}^{\infty} q_i z^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j z^{\mu+j}\right) = 0.$$

Koeficient pred $z^{\mu+k}$ je

$$(\mu+k)(\mu+k-1)c_k + \sum_{j=0}^{k}\left[(\mu+j)p_{k-j}c_j + q_{k-j}c_j\right].$$

Ker morajo biti vsi ti koeficienti enaki 0, sledi, da je

$$[(\mu+k)(\mu+k-1+p_0)+q_0]c_k = -\sum_{j=0}^{k-1}[(\mu+j)p_{k-j}+q_{k-j}]c_j \quad (k=1,2,\ldots) \tag{5.7.4}$$

in (ker smo privzeli, da je $c_0 \neq 0$)

$$\mu(\mu-1+p_0)+q_0 = 0. \tag{5.7.5}$$

Formulo (5.7.4) bomo imenovali *rekurzivna formula za koeficiente*, enačbo (5.7.5) pa *določilna enačba*. Rešitvi μ_1, μ_2 določilne enačbe imenujemo *karakteristična eksponenta diferencialne enačbe* (5.7.1). Uredili ju bomo tako, da bo $\operatorname{Re}\mu_1 \geq \operatorname{Re}\mu_2$. Če za hip označimo s f kvadratno funkcijo, ki nastopa na levi strani določilne enačbe, torej

$$f(\mu) = \mu(\mu-1+p_0)+q_0 = \mu^2+(p_0-1)\mu+q_0 = (\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2),$$

vidimo, da je koeficient na levi strani rekurzivne formule (5.7.4) enak $f(\mu+k) = (\mu+k-\mu_1)(\mu+k-\mu_2)$ in rekurzivno formulo (5.7.4) lahko napišemo kot

$$(\mu+k-\mu_1)(\mu+k-\mu_2)c_k = -\sum_{j=0}^{k-1}[(\mu+j)p_{k-j}+q_{k-j}]c_j \quad (k=1,2,\ldots). \tag{5.7.6}$$

V to formulo moramo vstaviti za μ eno od rešitev μ_1, μ_2 določilne enačbe. Za $\mu=\mu_1$ je koeficient na levi strani enakosti (5.7.6) enak $k(\mu_1-\mu_2+k)$ in je različen od 0 za vse $k=1,2,\ldots$, saj $\mu_1-\mu_2$ ne more biti negativno celo število, ker je $\operatorname{Re}\mu_1 \geq \operatorname{Re}\mu_2$. Zato lahko tedaj z rekurzivno formulo (5.7.6) zaporedoma izračunamo vse koeficiente c_k $(k=1,2,\ldots)$, ko smo izbrali c_0 (npr. $c_0=1$). Za $\mu=\mu_2$ pa je koeficient na levi strani v (5.7.6) enak $k(k-(\mu_1-\mu_2))$, kar je lahko 0, v primeru, ko je $\mu_1-\mu_2$ naravno število. Tedaj se lahko zgodi, da formula (5.7.6) ne dopušča določitve koeficientov c_k za rešitev, ki bi pripadala eksponentu μ_2. V tem primeru nam opisana metoda da le eno linearno neodvisno rešitev enačbe (5.7.1), drugo rešitev pa moramo potem poiskati s pomočjo Liouvillove formule.

Raziskati moramo še vprašanje konvergence vrste s koeficienti c_k, ki jih dobimo iz (5.7.6) pri $\mu=\mu_1$. Tedaj lahko (5.7.6) napišemo kot

$$c_k = -\frac{\sum_{j=0}^{k-1}[(\mu_1+j)p_{k-j}+q_{k-j}]c_j}{k(k+(\mu_1-\mu_2))} \qquad (k=1,2,\ldots). \tag{5.7.7}$$

Razmislek bo podoben tistemu v dokazu izreka 5.4.1. Za dani $z \in D(0,R)$ izberimo pozitivni števili r in ρ tako, da je $|z|<r<\rho<R$. Ker vrsti (5.7.2) konvergirata v točki ρ, so njuni členi omejeni s kako konstanto M, torej je

$$|p_j| \leq M\rho^{-j} \qquad \text{in} \qquad |q_j| \leq M\rho^{-j}. \tag{5.7.8}$$

Izberimo k_0 tako velik, da je

$$\frac{M\rho(|\mu_1|+k)}{k^2(\rho-r)} \leq 1 \qquad \text{za vse } k \geq k_0 \tag{5.7.9}$$

in nato konstanto E tako veliko, da je

$$|c_k| \leq Er^{-k} \qquad \text{za vse } k \leq k_0.$$

Za dokaz konvergentnosti vrste $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ zadošča pokazati (ker je $|z| < r$), da je $|c_k| \leq Er^{-k}$ za vse k. Za $k \leq k_0$ je to res po definiciji konstante E, za $k > k_0$ pa bomo dokazali z indukcijo. Privzemimo torej, da ocena velja za vse $j < k$. Potem iz (5.7.7), (5.7.8) in (5.7.9) sledi, da je

$$\begin{aligned} |c_k| &\leq \frac{\sum_{j=0}^{k-1}((|\mu_1| + k - 1)M\rho^{j-k} + M\rho^{j-k})Er^{-j}}{k^2} \\ &= Er^{-k}\,\frac{M(|\mu_1| + k)\sum_{j=0}^{k-1}\left(r\rho^{-1}\right)^{k-j}}{k^2} \\ &\leq Er^{-k}\,\frac{M(|\mu_1| + k)\left(1 - r\rho^{-1}\right)^{-1}}{k^2} \\ &\leq Er^{-k}. \end{aligned}$$

Vse te ugotovitve povzemimo sedaj v izreku.

Izrek 5.7.3. *Če je α pravilna singularna točka enačbe $y'' + py' + qy = 0$ in vrsti za $(z-\alpha)p(z)$ in $(z-\alpha)^2 q(z)$ konvergirata na krogu $D(\alpha, R)$, potem obstaja vsaj ena rešitev oblike $y = (z-\alpha)^{\mu_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-\alpha)^k$, kjer vrsta konvergira na krogu $D(\alpha, R)$. Če razlika karakterističnih eksponentov $\mu_1 - \mu_2$ ni naravno število, kjer je $\operatorname{Re}\mu_1 \geq \operatorname{Re}\mu_2$, potem lahko drugo (linearno neodvisno) rešitev dobimo z nastavkom oblike $y = (z-\alpha)^{\mu_2}\sum_{k=0}^{\infty} d_k(z-\alpha)^k$, kjer vrsta prav tako konvergira na krogu $D(\alpha, R)$.*

Dokaz, da tudi vrsta pri eksponentu μ_2 (kadar $\mu_1 - \mu_2 \notin \mathbb{N}$) konvergira, bomo opustili, ker je v bistvu enak gornjemu dokazu za vrsto pri eksponentu μ_1.

Zgled 5.7.4. Rešimo enačbo

$$4z^2y'' + 2zy' + zy = 0.$$

Tukaj je $p(z) = \frac{1}{2z}$ in $q(z) = \frac{1}{4z}$, torej je $p_0 = \frac{1}{2}$ in $q_0 = 0$, zato se določilna enačba (5.7.5) glasi $\mu(\mu-1) + \frac{1}{2}\mu = 0$. Ko jo rešimo, dobimo karakteristična eksponenta $\mu_1 = \frac{1}{2}$ in $\mu_2 = 0$. Rešitev y_1 iščemo torej z nastavkom $y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\frac{1}{2}}$. Ko vstavimo to v diferencialno enačbo, dobimo

$$4\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)c_k z^{k+\frac{1}{2}} + 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)c_k z^{k+\frac{1}{2}} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\frac{3}{2}} = 0.$$

Pogoj, da mora biti koeficient pred $z^{k+\frac{1}{2}}$ enak 0, se glasi $4(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})c_k + 2(k+\frac{1}{2})c_k + c_{k-1} = 0$, od koder sledi

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{(2k+1)2k} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Od tod zlahka izračunamo, da je $c_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$, kjer smo izbrali $c_0 = 1$. Torej je

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{k+\frac{1}{2}} = \sin\sqrt{z}.$$

Podobno izračunamo, da je druga rešitev

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{k} = \cos\sqrt{z}.$$

Oglejmo si še, kako je videti druga rešitev, y_2, enačbe (5.7.1), kadar je ne moremo poiskati z nastavkom oblike $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-\alpha)^{\mu+k}$, kar se – kot vemo – lahko zgodi le v primeru, ko je razlika med karakterističnima eksponentoma naravno število, tj.

$$\mu_1 - \mu_2 = m \in \mathbb{N}. \tag{5.7.10}$$

Zaradi krajšega zapisa bomo spet vzeli, da je $\alpha = 0$. Kot vemo iz Liouvillove formule, je tedaj y_2 oblike $y_1 v$, kjer je $v' = y_1^{-2} e^{-\int p(z)\,dz}$. Ko vstavimo v ta izraz, da je $y_1 = z^{\mu_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ in upoštevamo razvoj (5.7.2) funkcije p ter da po Vietovi formuli iz (5.7.5) sledi $\mu_1 + \mu_2 = 1 - p_0$, torej po (5.7.10) $2\mu_1 + p_0 = m + 1$, dobimo

$$\begin{aligned} v' &= \frac{e^{-\int (\frac{p_0}{z} + p_1 + p_2 z + \ldots)\,dz}}{z^{2\mu_1}(c_0 + c_1 z + \ldots)^2} = \frac{z^{-p_0} h(z)}{z^{2\mu_1}(c_0 + c_1 z + \ldots)^2} \quad \text{(kjer je } h \text{ holomorfna okrog 0)} \\ &= \frac{g(z)}{z^{2\mu_1 + p_0}} \qquad \text{(kjer je } g \text{ holomorfna okrog 0 in } g(0) \neq 0) \\ &= \frac{g(z)}{z^{m+1}} = \frac{b_0}{z^{m+1}} + \frac{b_1}{z^m} + \ldots + \frac{b_m}{z} + b_{m+1} + \ldots, \end{aligned}$$

kjer so b_j kompleksne konstante in $b_0 \neq 0$. Od tod dobimo, da je v oblike

$$v = c \ln z + \Big(\frac{e_{-m}}{z^m} + \ldots + \frac{e_{-1}}{z} + e_0 + e_1 z + \ldots\Big), \qquad (e_{-m} \neq 0),$$

kjer so c in e_j konstante. Potem pa je $y_2 = y_1 v$ oblike

$$\begin{aligned} y_2 &= c y_1 \ln z + z^{\mu_1}(c_0 + c_1 z + \ldots)(e_{-m} z^{-m} + \ldots + e_{-1} z^{-1} + e_0 + e_1 z + \ldots) \\ &= c y_1 \ln z + z^{\mu_1 - m} f(z) = c y_1 \ln z + z^{\mu_2} f(z), \end{aligned}$$

kjer je f holomorfna funkcija v kaki okolici točke 0 in $f(0) \neq 0$. Tako smo dokazali naslednjo trditev:

Trditev 5.7.5. *Naj bo* 0 *pravilna singularna točka enačbe* (5.7.1)*,* μ_1*,* μ_2 *pa njena karakteristična eksponenta, urejena tako, da je* $\operatorname{Re}\mu_1 \geq \operatorname{Re}\mu_2$*. V primeru, ko je razlika* $m := \mu_1 - \mu_2$ *naravno število in enačba* (5.7.1) *nima dveh linearno neodvisnih rešitev oblike* (5.7.3)*, potem je ena rešitev oblike* $y_1 = z^{\mu_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$*, druga pa oblike* $y_2 = y_1 \ln z + z^{\mu_2} f(z)$*, kjer so* c_k *konstante,* f *pa funkcija, holomorfna v dovolj majhni okolici točke* 0 *in* $f(0) \neq 0$*. Torej so v primeru, ko je* $\operatorname{Re}\mu_2 < 0$ *ali pa* $\operatorname{Re}\mu_1 = \operatorname{Re}\mu_2 = 0$*, edine rešitve enačbe, ki so lahko (ne pa nujno) omejene v okolici točke* 0*, oblike* $a y_1$*, kjer je* a *poljubna kompleksna konstanta. (Podobno velja seveda za katerokoli pravilno singularno točko* α*.)*

Naloge

1. Rešite enačbo $y'' + (\frac{3}{2z} - \frac{1}{2})y' - \frac{1}{2z}y = 0$.

2. Eno netrivialno rešitev enačbe $y'' - 2y' + (1 + \frac{1}{4z^2})y = 0$ poiščite s pomočjo nastavka (5.7.3) in nato poiščite splošno rešitev enačbe.

3. (i) Ali je 0 pravilna singularna točka enačbe $z^2y'' + (3z - 1)y' + y = 0$?

(ii) Pokažite, da formalna potenčna vrsta $y = \sum_{k=0}^{\infty} k!z^k$ formalno zadošča enačbi iz (i), vendar ta vrsta konvergira le v točki $z = 0$.

(iii) Z vpeljavo nove spremenljivke $\zeta = \frac{1}{z}$ preoblikujete enačbo iz (i) v tako, ki bo imela v $\zeta = 0$ pravilno singulrano točko in nato poiščite njeno splošno rešitev.

4. V enačbi $y'' + py' + qy = 0$ naj bosta funkciji p in q taki, da je 0 njuna izolirana singularna točka. Predpostavimo, da ima enačba dve linearno neodvisni rešitvi y_1, y_2 oblike (5.7.3). Pokažite, da je tedaj 0 pravilna singularna točka enačbe. (Namig: po Liouvillovi formuli je $p = -\frac{W'}{W}$, kjer je W determinanta Wronskega funkcij y_1 in y_2.)

5.8. Besselova enačba

Za *Besselovo enačbo*

$$z^2y'' + zy' + (z^2 - \nu^2)y = 0 \qquad (\nu \geq 0) \tag{5.8.1}$$

je 0 pravilna singularna točka. Začetna koeficienta v razvoju funkcij $zp(z) = 1$ in $z^2q(z) = z^2 - \nu^2$ okrog točke 0 sta $p_0 = 1$ in $q_0 = -\nu^2$, zato se določilna enačba (5.7.5) v tem primeru glasi $\mu(\mu-1)+\mu-\nu^2 = 0$. Njeni rešitvi sta $\mu_1 = \nu$ in $\mu_2 = -\nu$. Eno rešitev enačbe (5.8.1) bomo torej poiskali z nastavkom $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\nu}$. Ko vstavimo to v enačbo (5.8.1), dobimo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+\nu)(k+\nu-1) + (k+\nu) - \nu^2\right] c_k z^{k+\nu} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\nu+2} = 0.$$

Od tod vidimo, da je za $k \geq 2$ koeficient pred $z^{k+\nu}$ enak $[(k+\nu)(k+\nu-1) + (k+\nu) - \nu^2]c_k + c_{k-2}$, kar lahko poenostavimo v $[(k+\nu)^2 - \nu^2]c_k + c_{k-2}$. Ker morajo biti vsi ti koeficienti enaki 0, izpeljemo od tod rekurzivno formulo

$$c_k = -\frac{c_{k-2}}{k(k+2\nu)} \qquad (k = 2, 3, \ldots). \tag{5.8.2}$$

Koeficient pred $z^{1+\nu}$ pa je $[(1+\nu)^2 - \nu^2]c_1 = (1+2\nu)c_1$. Ker mora biti enak 0, je $c_1 = 0$. Iz rekurzivne formule (5.8.2) potem sledi, da je $c_k = 0$ za vse lihe indekse k. Za sode k, $k = 2n$, pa dobimo iz (5.8.2) zaporedoma

$$c_2 = -\frac{c_0}{2(2+2\nu)}, \qquad c_4 = -\frac{c_2}{4(4+2\nu)} = \frac{c_0}{2(2+2\nu)4(4+2\nu)}, \qquad \ldots$$

in v splošnem

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2 \cdot 4 \cdots 2n(2+2\nu)(4+2\nu)\cdots(2n+2\nu)}.$$

Če izberemo $c_0 := \frac{1}{2^\nu \nu!}$ (kjer pomeni $\nu! = \Gamma(\nu+1)$), dobimo

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^\nu \nu!} \frac{1}{2^n n! 2^n (\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} = \frac{(-1)^n}{2^{\nu+2n} n!(\nu+n)!}.$$

Torej je ena rešitev Besselove enačbe

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^{\nu+2n}(\nu+n)!} z^{\nu+2n}.$$

To funkcijo, ki jo bomo označili z J_ν in imenovali *Besselova funkcija reda* ν, lahko zapišemo kot

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{z}{2})^{2n+\nu}}{n!(\nu+n)!}. \tag{5.8.3}$$

Po izreku 5.7.3 vrsta na desni v (5.8.3) konvergira za vse $z \in \mathbb{C}$, saj sta funkciji $zp(z) = 1$ in $z^2 q(z) = z^2 - \nu^2$ povsod holomorfni.

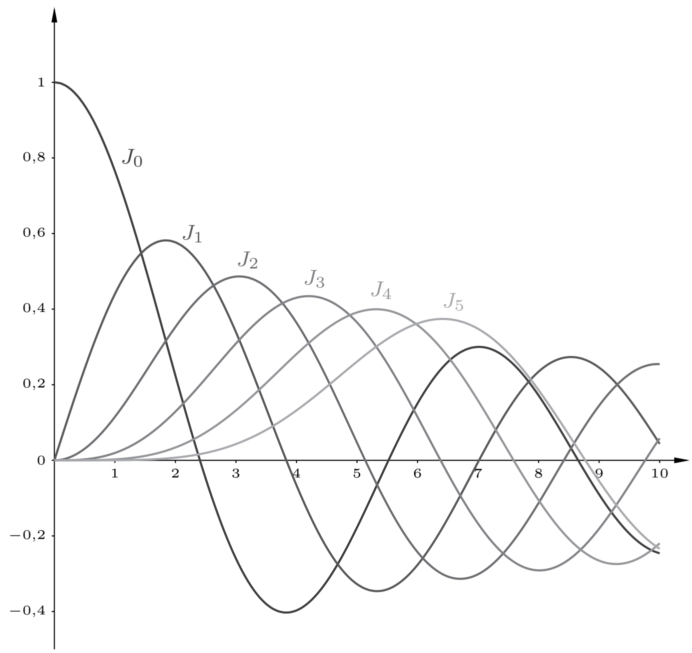

FIGURE 5.10. Grafi Besselovih funkcij J_n, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Kadar razlika karakterističnih eksponentov $\nu - (-\nu) = 2\nu$ ni naravno število, lahko poiščemo drugo, linearno neodvisno, rešitev Besselove enačbe z nastavkom

$$y_2 = z^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \tag{5.8.4}$$

Rešitev, ki jo tako dobimo, tudi imenujemo Besselova funkcija.

Tudi v primeru, ko je 2ν naravno število, lahko poskusimo drugo rešitev poiskati z nastavkom (5.8.4). Rekurzivna formula, ki jo pri tem dobimo za koeficiente, se razlikuje od (5.8.2) le v tem, da moramo ν nadomestiti z $-\nu$, torej

$$k(k-2\nu)c_k = -c_{k-2}. \tag{5.8.5}$$

Ko je $k = 2\nu$, je leva stran v (5.8.5) enaka 0, zato mora biti tedaj $c_{k-2} = 0$. Če ν ni naravno število, je 2ν liho število. Tedaj lahko izberemo $c_k = 0$ za vse lihe k in enakost (5.8.5) bo izpolnjena za lihe k. Za sode k, $k = 2n$, pa je $k - 2\nu \neq 0$, če $\nu \notin \mathbb{N}$, zato lahko iz (5.8.5) izrazimo $c_{2n} = -\frac{c_{2n-2}}{2n(2n-2\nu)}$. To je enaka rekurzivna formula kot zgoraj pri Besselovi funkciji, le da namesto ν nastopa $-\nu$. Zato lahko tudi rešitev y_2 dobimo kar tako, da v formuli (5.8.3) nadomestimo ν z $-\nu$. Tako dobimo funkcijo

$$J_{-\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{z}{2})^{2n-\nu}}{n!(n-\nu)!}. \tag{5.8.6}$$

Ker je prvi člen vrste na desni v (5.8.6) enak $\frac{(\frac{z}{2})^{-\nu}}{(-\nu)!}$ in je neomejen, ko gre z proti 0, je funkcija $J_{-\nu}$ linearno neodvisna od J_ν. S tem smo dokazali:

TRDITEV 5.8.1. *Kadar ν ni naravno število, je splošna rešitev Besselove enačbe* (5.8.1) *oblike $c_1 J_\nu + c_2 J_{-\nu}$, kjer sta c_1 in c_2 konstanti.*

ZGLED 5.8.2. Oglejmo si funkciji $J_{\frac{1}{2}}$ in $J_{-\frac{1}{2}}$. Po (5.8.3) je

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+\frac{1}{2}}}{2^{2n+\frac{1}{2}} n!(n+\frac{1}{2})!} = \sqrt{\frac{2}{z}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2^{2n+1} n!(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{n! 2^n (2n+1)(2n-1)\cdots 1} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Torej je

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z \qquad \text{in podobno} \qquad J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z. \tag{5.8.7}$$

Iz (5.8.3) izpeljemo z neposrednim računom, da je

$$\frac{d}{dz}(z^\nu J_\nu(z)) = z^\nu J_{\nu-1}(z) \qquad \text{in} \qquad \frac{d}{dz}(z^{-\nu} J_\nu(z)) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z). \tag{5.8.8}$$

Ko izvedemo odvajanji, lahko formuli (5.8.8) napišemo kot

$$J'_\nu(z) + \frac{\nu}{z} J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) \qquad \text{in} \qquad J'_\nu(z) - \frac{\nu}{z} J_\nu(z) = -J_{\nu+1}(z). \tag{5.8.9}$$

Od tod vidimo, da je

$$2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) \qquad \text{in} \tag{5.8.10}$$

$$\frac{2\nu}{z} J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z). \tag{5.8.11}$$

Iz (5.8.11) in (5.8.7) sledi na primer, da je

$$J_{\frac{3}{2}}(z) = \frac{J_{\frac{1}{2}}(z)}{z} - J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right).$$

Podobno lahko izrazimo $J_{-\frac{3}{2}}(z)$ in nato zaporedoma vse Besselove funkcije $J_{k+\frac{1}{2}}$ ($k \in \mathbb{Z}$), za katere tako vidimo, da so elementarne.

Najpogosteje v praksi nastopa Besselova enačba, v kateri je ν naravno število, $\nu = m \in \mathbb{N}$. Tedaj je v vrsti

$$J_{-m}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{z}{2})^{2n-m}}{n!(n-m)!}$$

m začetnih členov enakih 0 (ker je $(-k)! = \Gamma(-k+1) = \infty$ za $k = 1, 2, \ldots$), zato je

$$J_{-m}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{z}{2})^{2n-m}}{n!(n-m)!} = (-1)^m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\frac{z}{2})^{2k+m}}{(m+k)!k!} = (-1)^m J_m(z),$$

kjer smo v zadnji vsoti vpeljali nov sumacijski indeks $k = n - m$. Torej sta funkciji J_m in J_{-m} linearno odvisni. Zato iz trditve 5.7.5 izpeljemo naslednjo posledico:

Posledica 5.8.3. *Za vsak $m \in \mathbb{N}$ so edine rešitve Besselove enačbe $z^2 y'' + zy' + (z^2 - m^2)y = 0$, ki so omejene v kaki okolici točke 0, oblike cJ_m, kjer je c konstanta.*

Od J_m linearno neodvisno rešitev Besselove enačbe indeksa $m \in \mathbb{N}$ bi lahko sedaj poiskali s pomočjo Liouvillove formule, vendar pa se pokaže kot boljša naslednja pot. Za vsak $\nu \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ je *Webrova funkcija* (imenovana tudi *Besselova funkcija druge vrste* ali Neumannova funkcija)

$$Y_\nu(z) := \frac{J_\nu(z) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi} \tag{5.8.12}$$

rešitev Besselove enačbe (saj je linearna kombinacija funkcij J_ν in $J_{-\nu}$), linearno neodvisna od J_ν (ker sta J_ν in $J_{-\nu}$ linearno neodvisni). Za vsak $\nu = m \in \mathbb{N}$ pa je izraz na desni strani v (5.8.12) nedoločen $\frac{0}{0}$, zato tedaj definiramo Webrovo funkcijo kot

$$Y_m(z) = \lim_{\nu \to m} Y_\nu(z).$$

Po L'Hospitalovem pravilu sledi iz (5.8.12) po krajšem računu

$$Y_m(z) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(z) - (-1)^m \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(z) \right]_{\nu=m}. \tag{5.8.13}$$

TRDITEV 5.8.4. *Funkcija Y_m zadošča Besselovi enačbi $z^2y'' + zy' + (z^2 - m^2)y = 0$ ($m \in \mathbb{N}$).*

PROOF. Funkcija $y := J_\nu$ ($\nu \notin \mathbb{Z}$) zadošča Besselovi enačbi $z^2y''+zy'+(z^2-\nu^2)y = 0$. Od tod sledi z odvajanjem na parameter ν, da je $z^2(\frac{\partial y}{\partial \nu})''+z(\frac{\partial y}{\partial \nu})'+(z^2-\nu^2)\frac{\partial y}{\partial \nu}-2\nu y = 0$, torej

$$z^2 \left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)'' + z \left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)' + \left(z^2 - \nu^2\right) \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} = 2\nu J_\nu$$

in podobno

$$z^2 \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)'' + z \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)' + \left(z^2 - \nu^2\right) \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} = 2\nu J_{-\nu}.$$

Ko pomnožimo prvo od zadnjih dveh enačb z $\frac{1}{\pi}$, drugo pa z $\frac{(-1)^m}{\pi}$, ju nato odštejemo ter vstavimo $\nu = m$ in pri tem upoštevamo (5.8.13), dobimo

$$z^2Y_m'' + zY_m' + \left(z^2 - m^2\right) Y_m = 2\,\frac{m}{\pi}\,(J_\nu - (-1)^m J_{-\nu}).$$

Desna stran zadnje enakosti je 0, saj je $J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z)$. □

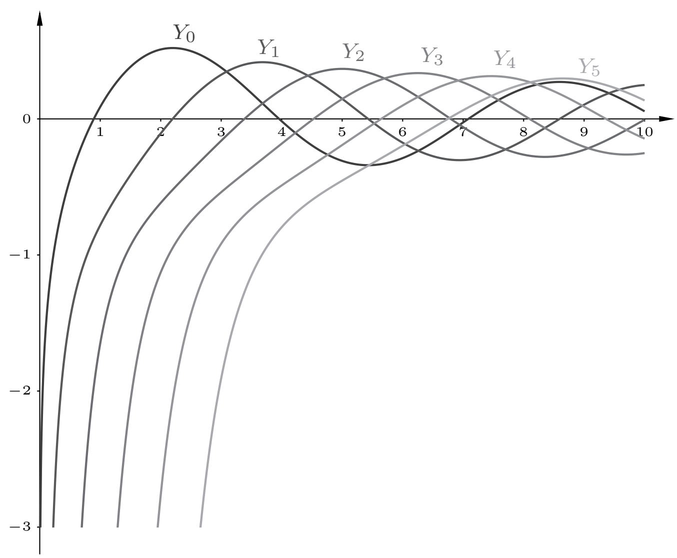

FIGURE 5.11. Grafi Webrovih funkcij.

ZGLED 5.8.5. Z odvajanjem formule (5.8.3) na ν dobimo

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{(\frac{z}{2})^{\nu+2k} \ln \frac{z}{2}}{k!\Gamma(\nu+k+1)} - \frac{(\frac{z}{2})^{\nu+2k}}{k!} \frac{\Gamma'(\nu+k+1)}{\Gamma^2(\nu+k+1)}\right],$$

torej je

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=0} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left[\frac{(\frac{z}{2})^{2k}}{(k!)^2}\ln\frac{z}{2} - \frac{(\frac{z}{2})^{2k}}{(k!)^2}\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}\right].$$

Ko podobno izrazimo še $\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}$, dobimo iz formule (5.8.13) po krajšem računu

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\frac{z}{2})^{2k}}{(k!)^2}\ln\frac{z}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(\frac{z}{2})^{2k}}{(k!)^2}\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}.$$

(Opazite, da je prvi člen na desni kar $\frac{2}{\pi}J_0(z)\ln\frac{z}{2}$.) Ker je $\Gamma'(1) = -\gamma$ (glejte nalogo 12 ali 13(iv) iz razdelka 2.16), sledi, da je

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{z}{2} + \gamma\right) + o(z), \qquad \text{kjer je } \lim_{z\to 0} o(z) = 0. \tag{5.8.14}$$

V zgledu (1.5.7) smo pokazali, da za vsako rešitev y Besselove enačbe (5.8.1) funkcija $u(x) = y\sqrt{x}$ zadošča enačbi

$$u'' + \left(1 + \frac{1-4\nu^2}{4x^2}\right)u \qquad (x > 0).$$

Za zelo velike x je to približno enačba $u'' + u = 0$, katere rešitve so oblike $A\cos(x-c)$ za poljubni konstanti A in c. Zato lahko pričakujemo, da bodo za zelo velike x rešitve Besselove enačbe podobne funkcijam $\frac{A}{\sqrt{x}}\cos(x-c)$. Bolj poglobljena analiza (glejte naloge 11–14) pokaže, da je

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right) + E_\nu(x) \qquad \text{in}$$

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right) + F_\nu(x),$$

kjer sta funkciji $|E_\nu|$ in $|F_\nu|$ za $x > 1$ dominirani s $\frac{C}{x^{3/2}}$ (C konstanta).

Izrek 5.8.6. *Funkcijo $e^{z/2(t-t^{-1})}$ imenujemo generirajoča funkcija Besselovih funkcij celega indeksa, ker je*

$$e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_m(z)t^m = J_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} J_m(z)[t^m + (-t)^{-m}]. \tag{5.8.15}$$

Proof. V produktu vrst

$$e^{z/2(t-t^{-1})} = e^{zt/2}e^{-z/(2t)} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!2^j}\,t^j\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{k!2^k}\,t^{-k}$$

je koeficient pred t^m enak

$$\sum_{j-k=m}\frac{(-1)^k}{j!k!2^{j+k}}\,z^{j+k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+m)!2^{2k+m}}\,z^{2k+m} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\frac{z}{2})^{2k+m}}{k!(k+m)!} = J_m(z).$$

To dokazuje prvo enakost v (5.8.15), druga pa sledi iz zveze $J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z)$. □

Posledica 5.8.7. *Za poljubna $z, w \in \mathbb{C}$ in vsak $m \in \mathbb{N}$ velja*

$$J_m(z+w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{m-k}(z) J_k(w).$$

Proof. Po izreku 5.8.6 je

$$\begin{aligned}\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z+w)t^m &= e^{\frac{z+w}{2}(t-t^{-1})} = e^{\frac{z}{2}(t-t^{-1})} e^{\frac{w}{2}(t-t^{-1})} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} J_j(z)t^j \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(w)t^k \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{m-k}(z) J_k(w) \right) t^m\end{aligned}$$

Sedaj le še primerjamo koeficienta pred t^m v začetni in končni formuli gornjega računa. □

Kot poseben primer prejšnje posledice in zveze $J_{-m} = (-1)^m J_m$ imamo:

$$J_0(z+w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{-k}(z) J_k(w) = J_0(z)J_0(w) + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_k(z) J_k(w)$$

za vsaka $z, w \in \mathbb{C}$. Ko vstavimo v to formulo $w = -z$, dobimo naslednjo posledico:

Posledica 5.8.8. $1 = J_0(z)^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k(z)^2$ *in zato*

$$|J_0(x)| \le 1 \qquad ter \qquad |J_k(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (k = 1, 2 \ldots).$$

Oglejmo si še integralsko predstavitev Besselovih funkcij celoštevilskega indeksa, kar je način, na katerega jih je vpeljal Bessel.

Izrek 5.8.9. *Za poljubna $m \in \mathbb{N}$ in $x \in \mathbb{R}$ je*

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(m\varphi - x \sin\varphi)\, d\varphi.$$

Proof. Za $t = e^{i\varphi}$ in $z = x$ se prva enakost v (5.8.15) glasi

$$e^{ix\sin\varphi} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_k(x) e^{ik\varphi} \tag{5.8.16}$$

oziroma, ko primerjamo posebej realni in imaginarni del,

$$\cos(x\sin\varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} J_k(x)\cos(k\varphi) \qquad \text{in} \qquad \sin(x\sin\varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} J_k(x)\sin(k\varphi).$$

Ko pomnožimo prvo od teh dveh enakosti s $\cos m\varphi$, drugo pa s $\sin m\varphi$ in ju nato seštejemo, dobimo

$$\cos(m\varphi - x\sin\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)\cos(m-k)\varphi. \tag{5.8.17}$$

Iz dokaza izreka 5.8.6 ni težko videti, da vrsta v (5.8.15) konvergira enakomerno (pri fiksnem z) za t iz vsake kompaktne podmnožice v $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, posledično vrsta v (5.8.17) konvergira enakomerno za $\varphi \in [0,\pi]$ in jo zato smemo integrirati členoma. Torej je

$$\int_0^\pi \cos(m\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi = \pi J_m(x). \qquad \square$$

Naloge

1. Pokažite, da je $\int_0^x tJ_0(t)\,dt = xJ_1(x)$ in splošneje

$$\int_0^x t^{\nu+1}J_\nu(t)\,dt = x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x) \quad (\nu \geq 0).$$

(Namig: (5.8.8).)

2. (i) Pokažite, da je $J_0' = -J_1$. (Namig: (5.8.9).)

(ii) Z integriranjem per partes pokažite, da je

$$\int J_0(x)x^n\,dx = x^nJ_1(x) + (n-1)x^{n-1}J_0(x) - (n-1)^2\int J_0(x)x^{n-2}\,dx.$$

(iii) Izračunajte $\int J_0(x)x^3\,dx$.

3. Iz identitete (5.8.16) izpeljite, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja:

(i) $\displaystyle J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x) = 1;$

(ii) $\displaystyle \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)J_{2k+1}(x) = \frac{x}{2}.$

4. Interpretirajte identiteto (5.8.16) kot razvoj v Fourierovo vrsto in sklepajte, da je $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k^nJ_k(x)|^2 < \infty$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in $x \in \mathbb{R}$.

***5.** Dokažite, da je na poltraku $(0,\infty)$ med poljubnima ničlama funkcije J_ν ($\nu \geq 0$) kaka ničla funkcije $J_{\nu+1}$ in obratno. (Navodilo: za dokaz v eno smer uporabite izrek 1.5.5 in zgled 1.5.7, v drugo smer pa Rollejev izrek in (5.8.8).)

6. (i) Sklepajte iz razvojev v vrsti, da se za majhne pozitivne x funkciji J_ν in $J_{-\nu}$ asimptotično obnašata kot

$$J_\nu(x) \approx \frac{x^\nu}{2^\nu \nu!} \qquad \text{in} \qquad J_{-\nu}(x) \approx \frac{x^{-\nu}}{2^{-\nu}(-\nu)!}.$$

(ii) Pokažite, da za determinanto Wronskega poljubnih dveh rešitev y_1 in y_2 Besselove enačbe velja $W(x) = \frac{C}{x}$, kjer je C konstanta. S pomočjo tega in točke (i) izračunajte $W(x)$ v primeru, ko je $y_1 = J_\nu$ in $y_2 = J_{-\nu}$. (Rezultat: $W(x) = -2\frac{\sin \pi\nu}{\pi x}$.)

(iii) Pokažite, da je determinanta Wronskega funkcij J_ν in Y_ν enaka $W(x) = \frac{2}{\pi x}$. (Namig: uporabite (ii) in (5.8.12).)

7. Sklepajte iz (5.8.16), da je $J_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(x\sin\varphi - m\varphi)}\,dx$ in od tod

$$J_m^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (i\sin\varphi)^k e^{i(x\sin\varphi - m\varphi)}\,dx.$$

Zaključite, da je $|J_m^{(k)}(x)| \leq 1$ za vse $x \in \mathbb{R}$ in $m, k \in \mathbb{N}$.

8. Izpeljite enakost $J_m(x) = \frac{(-1)^m}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi + m\varphi)\,d\varphi$ za $x \in \mathbb{R}$ in $m \in \mathbb{N}$. (Namig: vpeljite novo spremenljivko v integral v izreku 5.8.9.)

9. Izračunajte integral $\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{itx}\,dt$ tako, da najprej razvijete e^{itx} v vrsto $\sum_{k=0}^\infty \frac{(itx)^k}{k!}$ in nato členoma integrirate vrsto $\sum_{k=0}^\infty (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\frac{(itx)^k}{k!}$. (Rezultat: $\sqrt{\pi}2^\nu(\nu-\frac{1}{2})!x^{-\nu}J_\nu(x)$. Torej je

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_{-1}^1 e^{ixt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt.) \tag{5.8.18}$$

Preostale naloge tega razdelka so v glavnem namenjene izpeljevanju asimptotičnih formul za Besselove funkcije, kar je dokaj zahtevno delo, ki ga bomo poskusili opraviti brez vpeljevanja novih orodij (tj. brez teorije asimptotičnih vrst). V prvih nekaj nalogah bomo vpeljali Hanklove funkcije, ki so pomembne tudi sicer.

* **10.** (i) Izračunajte, da je za funkcijo $y := x^\nu \int_a^b e^{ixt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt$ izraz $x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y$, kjer sta a in b poljubni kompleksni konstanti, enak

$$-ix^{\nu+1}\int_a^b \frac{d}{dt}\left[e^{ixt}(1-t^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\right]dt = -ix^{\nu+1}\left[e^{ixt}(1-t^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\right]_{t=a}^{t=b}. \tag{5.8.19}$$

Ko je $\nu > -\frac{1}{2}$, sklepajte od tod, da je y rešitev Besselove enačbe na poltraku $x > 0$, če je $a = \pm 1$ in b oblike $b = b_1 + i\infty$ ($b_1 \in \mathbb{R}$). (Tukaj lahko $\int_a^b$ pomeni integral po poljubni poti v zgornji polravnini $y > 0$, ki se začne v a, konča pa v b; zapis $b = b_1 + i\infty$ pa naj pomeni, da gre imaginarna komponenta števila b proti $+\infty$.)

(ii) Sklepajte iz (i), da sta funkciji

$$H_\nu^{(1)}(x) := -\frac{2x^\nu}{2^\nu\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_1^{1+i\infty} e^{ixt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt \tag{5.8.20}$$

in

$$H_\nu^{(2)}(x) := -\frac{2x^\nu}{2^\nu\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_{-1+i\infty}^{-1} e^{ixt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt \tag{5.8.21}$$

rešitvi Besselove enačbe. Imenujemo ju *Hanklovi funkciji*.

(iii) Naj bo $\nu > -\frac{1}{2}$. Pokažite, da je $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} e^{ixt}(1-t^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\,dt = 0$, kjer je γ_R tisti del krožnice s središčem 0 in polmerom R v zgornji polravnini, ki leži med točkama $Re^{i\psi}$ in $Re^{i(\pi-\psi)}$ $(0<\psi<\pi)$. Nato sklepajte iz točke (i) in formule (5.8.18), da je

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2}\left(H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)\right).$$

(Navodilo: Funkcija $f : t \mapsto e^{ixt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$ je holomorfna na območju, ki zajema sklenjeno pot, sestavljeno iz (glejte sliko): majhnega krožnega loka AB s polmerom δ okrog -1, daljice BC v zgornji polravnini, ki aproksimira daljico $[-1,1]$ na realni osi, krožnega loka CD s polmerom δ okrog 1, dolge navpične daljice DE z začetkom v D blizu 1, krožnega loka EF s središčem 0 in velikim polmerom R ter navpične daljice FA s koncem A blizu -1 (to je pot $ABCDEFA$ na sliki). Pošljite δ proti 0 in R proti ∞, tako da v limiti dobite $(\int_{-1}^1 + \int_1^{1+i\infty} + \int_{-1+i\infty}^{-1})f(t)\,dt = 0$.) Posplošite na kompleksno spremenljivko $z = x+iy$, $x>0$.

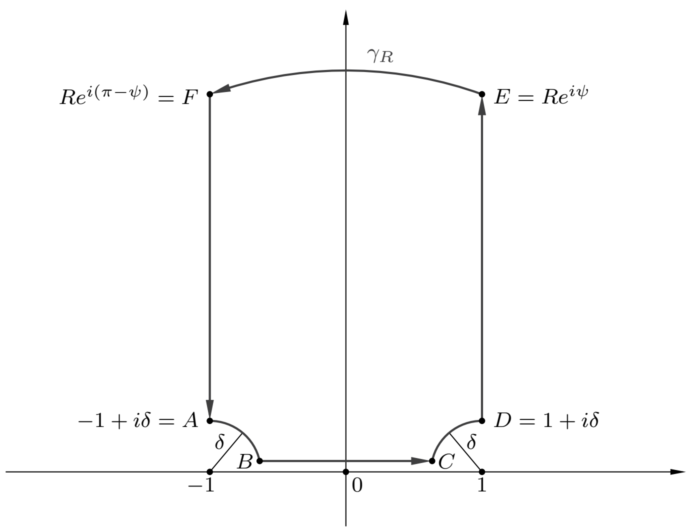

FIGURE 5.12. Integracijska pot v nalogi 10 (iii).

***11.** Naj bo $x > 0$ in $\nu > -\frac{1}{2}$.

(i) Vpeljite v integral v (5.8.20) novo integracijsko spremenljivko s prek zveze $t = 1 + i\frac{s}{x}$, da dobite

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \frac{e^{i(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4})}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-s} s^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 + i\,\frac{s}{2x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} ds. \tag{5.8.22}$$

Podobno preoblikujte tudi integral v (5.8.21) in opazite, da je $H_\nu^{(2)}(x) = \overline{H_\nu^{(1)}(x)}$.

(ii) Pokažite, da je funkcija

$$g(t) := \int_0^\infty e^{-s} s^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 + i\,\frac{s}{2}\,t\right)^{\nu-\frac{1}{2}} ds \qquad (t \in \mathbb{R})$$

neskončnokrat odvedljiva (odvajajte integral na parameter t), zato zanjo velja Taylorjeva formula

$$g(t) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}t + \ldots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{g^{(n+1)}(0) + \eta(t)}{(n+1)!}t^{n+1},$$

kjer gre $\eta(t)$ proti 0, ko gre t proti 0. Če vstavimo v to formulo $t = \frac{1}{x}$, lahko iz (5.8.22) izpeljemo asimptotski razvoj Hanklove funkcije. Za $n = 0$ imamo $g(\frac{1}{x}) = g(0) + (g'(0) + \eta(\frac{1}{x}))\frac{1}{x}$, kjer je $\lim_{x\to\infty} \eta(1/x) = 0$ in $g(0) = \int_0^\infty e^{-s} s^{\nu-\frac{1}{2}}\, ds$, torej iz (5.8.22) sledi, da lahko izrazimo

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \frac{e^{i(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4})}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \left(\int_0^\infty e^{-s} s^{\nu-\frac{1}{2}}\, ds + \frac{r_0(x)}{x}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4})} \left(1 + \frac{r(x)}{x}\right), \end{aligned} \tag{5.8.23}$$

kjer sta r_0 in r omejeni funkciji. Od tod in iz točke (iii) prejšnje naloge izpeljite, da za $x > 0$ velja

$$J_\nu(x) = \operatorname{Re} H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{O_1(x)}{x^{3/2}} \tag{5.8.24}$$

in

$$\operatorname{Im} H_\nu^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{O_2(x)}{x^{3/2}}, \tag{5.8.25}$$

kjer sta O_1 in O_2 omejeni funkciji.

Opomba 5.8.10. Asimptotična formula (5.8.23) (ter iz nje izpeljani asimptotični formuli za Besselove in Webrove funkcije) velja tudi za kompleksne x.

Za dokaz bi najprej integral v točki (ii) prejšnje naloge napisali kot integral po pozitivni ordinatni osi, to je

$$g(z) := -i \int_0^{i\infty} e^{i\zeta}(-i\zeta)^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{\zeta}{2}z\right)^{\nu-\frac{1}{2}} d\zeta \qquad \left(\nu > -\frac{1}{2}\right),$$

kar predstavlja funkcijo, ki je v 0 odvedljiva v vseh smereh, ki niso pravokotne na os x. Da ostajajo ti odvodi v 0 omejeni, ko se smeri bližajo ordinatni osi, bi sledilo iz opažanja, da se vrednost integrala ne spremeni, če integriramo po kakem drugem poltraku v zgornji polravnini, z začetkom v 0, namesto po pozitivnem poltraku ordinatne osi. Vendar pa bomo natančno utemeljitev, da asimptotične formule veljajo tudi v kompleksnem, prepustili bralcem.

Naslednjih nekaj nalog je usmerjenih v utemeljevanje, da je $\operatorname{Im} H_\nu^{(1)}$ ravno Webrova funkcija Y_ν, tako da predstavlja formula (5.8.25) asimtotično ponašanje funkcije Y_ν za velike pozitivne x (če je $\nu \geq 0$). Ker je to lažje pokazati v primeru, ko je ν naravno število, si bomo ta primer ogledali posebej v nalogi 13, splošen dokaz pa v nalogi 14. Naloga 12 pa je priprava na nalogi 13 in 14.

* **12.** (i) Izpeljite iz (5.8.18), da je

$$J_\nu(x) = 2\,\frac{x^\nu}{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos xt\, dt$$

in zato

$$\begin{aligned}\frac{x^\nu}{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^1 e^{ixt}\left(1-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}} dt &= \\ = \frac{1}{2}J_\nu(x) + i\,\frac{x^\nu}{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \sin xt\, dt. \qquad (5.8.26)\end{aligned}$$

(ii) Sklepajte po Cauchyevem izreku (podobno kot v nalogi 10(iii)), da za funkcijo $f(t) = e^{ixt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$ velja $(\int_0^1 + \int_1^{1+i\infty} + \int_{i\infty}^0) f(t)\,dt = 0$ in torej po (5.8.20) in (5.8.26)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}J_\nu(x) + i\,\frac{x^\nu}{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \sin xt\, dt &- \\ -\frac{1}{2}H_\nu^{(1)}(x) - \frac{x^\nu}{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^{i\infty} e^{ixt}\left(1-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}} dt &= 0.\end{aligned}$$

Ko v zadnji integral vpeljemo novo spremenljivko $t = i\tau$ in nato v enakosti vzamemo le imaginarni del, dobimo

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} H_\nu^{(1)}(x) = \frac{2x^\nu}{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\,\cdot& \\ \cdot\left(\int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \sin xt\, dt - \int_0^\infty e^{-x\tau}\left(1+\tau^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}} d\tau\right)&.\end{aligned}$$

V prvi integral na desni strani zadnje formule pišimo $t = \sin\theta$, v drugi integral pa $\tau = \operatorname{sh} v$, da dobimo

$$\operatorname{Im} H_\nu^{(1)}(x) = \frac{2x^\nu}{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\cdot \\ \cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\nu}\theta\sin(x\sin\theta)\,d\theta - \int_0^\infty e^{-x\operatorname{sh} v}\operatorname{ch}^{2\nu} v\,dv\right).$$

Končno vstavimo v zadnji integral $s = e^v$, da dobimo

$$\operatorname{Im} H_\nu^{(1)}(x) = \frac{2x^\nu}{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\cdot \\ \cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\nu}\theta\sin(x\sin\theta)\,d\theta - \int_1^\infty e^{-\frac{x}{2}(s-\frac{1}{s})}\left[\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\right]^{2\nu}\frac{ds}{s}\right). \quad (5.8.27)$$

* **13.** (i) V primeru $\nu = 0$ je formula (5.8.27) relativno enostavna:

$$\operatorname{Im} H_0^{(1)}(x) = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x\sin\theta)\,d\theta - \int_1^\infty e^{-s\frac{x}{2}}e^{\frac{x}{2s}}\frac{ds}{s}\right). \quad (5.8.28)$$

Za zelo majhne pozitivne x je prvi integral v tej formuli velikostnega reda x, drugi integral pa lahko ocenimo s pomočjo naloge 11 iz razdelka 2.16 kot

$$\int_1^\infty e^{-s\frac{x}{2}}e^{\frac{x}{2s}}\frac{ds}{s} = \int_1^\infty e^{-s\frac{x}{2}}\left(1+\frac{x}{2s}+\frac{x^2}{2!4s^2}+\dots\right)\frac{ds}{s} \\ \approx \int_1^\infty e^{-s\frac{x}{2}}\frac{ds}{s} = -\gamma - \ln\frac{x}{2} + \dots$$

Torej je

$$\operatorname{Im} H_0^{(1)} = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right) + o(x), \quad (5.8.29)$$

kjer je $\lim_{x\to 0} o(x) = 0$. Funkcija $y(x) := \operatorname{Im} H_0^{(1)}(x) - Y_0(x)$ je rešitev Besselove enačbe reda $\nu = 0$ in iz (5.8.29) ter (5.8.14) sledi, da je $y(0) = 0$. Torej je po posledici 5.8.3 y konstanten mnogokratnik funkcije J_0. Ker je $J_0(0) = 1$ in $y(0) = 0$, mora potemtakem biti $y \equiv 0$, torej je

$$\operatorname{Im} H_0^{(1)} = Y_0.$$

(ii) Izpeljite iz formule (5.8.20), da funkcije $H_\nu^{(1)}$ zadoščajo rekurzivni relaciji $H_{\nu+1}^{(1)}(x) = -x^\nu \frac{d}{dx}[x^{-\nu}H_\nu^{(1)}(x)]$, torej mora veljati enaka relacija tudi za funkcije $\operatorname{Im} H_\nu^{(1)}$. (Namig: integrirajte per partes integral v formuli (5.8.20) za funkcijo $H_{\nu+1}^{(1)}$.) Ker enaki relaciji zadoščajo tudi funkcije Y_ν (kot sledi iz (5.8.8) in (5.8.12)), sklepajte iz (i), da je $\operatorname{Im} H_\nu^{(1)} = Y_\nu$ za vsak $\nu \in \mathbb{N}$.

***14.** Naj bo $\nu > 0$, $\nu \notin \mathbb{N}$.

(i) Dokažite, da je

$$\lim_{x\to 0} x^\nu \operatorname{Im} H_\nu^{(1)}(x) = -\frac{2^\nu}{\pi}\,\Gamma(\nu). \tag{5.8.30}$$

(Navodilo: Opazite, da gre prvi del v formuli (5.8.27) proti 0, ko gre x proti 0, v drugi integral v (5.8.27) pa vpeljite novo integracijsko spremenljivko $t = \frac{x}{2}s$, da dobite

$$\lim_{x\to 0} x^\nu \operatorname{Im} H_\nu^{(1)}(x) = -\frac{2}{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\lim_{x\to 0}\int_{\frac{x}{2}}^{\infty} e^{-t}e^{\frac{x^2}{4t}}t^{2\nu-1}\left(1+\frac{x^2}{4t^2}\right)^{2\nu}dt. \tag{5.8.31}$$

Ker so funkcije

$$f_x(t) := \begin{cases} e^{-t}e^{\frac{x^2}{4t}}t^{2\nu-1}(1+\frac{x^2}{4t^2})^{2\nu}, & t \geq \frac{x}{2};\\ 0, & 0 \leq t < \frac{x}{2}\end{cases}$$

vse omejene z isto integrabilno funkcijo $t \mapsto 2^{2\nu}ee^{-t}t^{2\nu-1}$, če je $x \in (0,1]$, smemo v gornjem izrazu zamenjati limito in integral (po Lebesgueovem izreku o dominirani konvergenci), s čimer dobimo

$$\lim_{x\to 0} x^\nu \operatorname{Im} H_\nu^{(1)}(x) = -\frac{2}{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\infty e^{-t}t^{2\nu-1}\,dt = -\frac{2\Gamma(2\nu)}{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}.$$

Po podvojitveni formuli za funkcijo Γ (naloga 8 iz razdelka 2.16) lahko to formulo poenostavimo v (5.8.30).)

(ii) Pokažite (s pomočjo trditve 2.16.7), da je tudi vodilni člen v vrsti za funkcijo Y_ν (definirano s (5.8.12)) enak izrazu na desni v (5.8.30). Sklepajte od tod (s pomočjo posledice 5.8.3 in dejstva, da so vse rešitve Besselove enačbe linearne kombinacije funkcij J_ν in Y_ν), da mora biti funkcija $\operatorname{Im} H_\nu^{(1)} - Y_\nu$ oblike cJ_ν za kako konstanto c.

(iii) Da bi dokazali, da je $c = 0$, se pravi $\operatorname{Im} H_\nu^{(1)} = Y_\nu$, sedaj zadošča dokazati, da je koeficient pred x^ν v razvoju funkcije $\operatorname{Im} H_\nu^{(1)}$ enak koeficientu v razvoju funkcije Y_ν, torej $\frac{1}{2^\nu\nu!}\frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}$ (utemeljite to). Za ta namen je ugodno obravnavati funkcije $J_\nu, Y_\nu, \ldots$ za kompleksne vrednosti parametra ν, definirane z enakimi formulami kot za realne ν. Zaradi holomorfnosti tako preslikave $\nu \mapsto Y_\nu(x)$ kot tudi preslikave, podane z desno stranjo formule (5.8.27) (pri fiksnem x), namreč zadošča dokazati enakost $\operatorname{Im} H_\nu^{(1)} = Y_\nu$ le za vse $\nu \in (0, \frac{1}{2})$. Za funkcije oblike $f(x) = c_0x^{-\nu} + bx^\nu + c_1x^{-\nu+1} + \ldots$, kjer je $\nu \in (0, \frac{1}{2})$ in označujejo pike člene reda večjega od $-\nu+1$, pokažite, da je mogoče izraziti koeficient pred x^ν kot $b = \frac{1}{2\nu}\lim_{x\to 0} x^{1-2\nu}\frac{d}{dx}(x^\nu f(x))$. Označimo

$$c = -\frac{1}{\nu 2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}.$$

Opazite iz (5.8.27) in z uvedbo spremenljivke $t = \frac{x}{2}s$ (podobno kot v (i)), da je

$$\frac{1}{2\nu}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}[x^\nu \operatorname{Im} H_\nu^{(1)}]}{x^{2\nu-1}} = c\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\int_{\frac{x}{2}}^\infty e^{-t}t^{2\nu-1}e^{\frac{x^2}{4t}}(1+\frac{x^2}{4t^2})^{2\nu}\,dt}{x^{2\nu-1}} =$$

$$= c\left[-1+\lim_{x\to 0}x^{1-2\nu}\int_{\frac{x}{2}}^\infty e^{-t}t^{2\nu-1}e^{\frac{x^2}{4t}}\left(1+\frac{x^2}{4t^2}\right)^{2\nu-1}\left(\frac{x}{2t}\left(1+\frac{x^2}{4t^2}\right)+\frac{\nu x}{t^2}\right)dt\right]$$

$$= c\left[-1+2^{-2\nu}\lim_{x\to 0}\int_1^\infty e^{-\frac{x}{2}s}s^{2\nu-1}e^{\frac{x}{2s}}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{2\nu-1}\left(\frac{x}{s}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)+\frac{4\nu}{s^2}\right)ds\right]$$

$$= c\left[-1+\nu 2^{2-2\nu}\int_1^\infty\left(s+\frac{1}{s}\right)^{2\nu-1}\frac{ds}{s^2}\right]$$

(iv) Izračunajte integral

$$I := \int_1^\infty\left(s+\frac{1}{s}\right)^{2\nu-1}\frac{ds}{s^2},$$

ki nastopa v točki (iii). (Rešitev: Uporabimo Cauchyev izrek za holomorfno funkcijo $z\mapsto(z+\frac{1}{z})^{2\nu-1}$ v tistem delu prvega kvadranta, ki je zunaj kroga $\bar{D}(0,1)$ (pri tem uporabimo tisto vejo potence, ki je pozitivna za pozitivne z). Ker gredo integrali po velikih krožnih lokih γ_R proti 0, ko gre R proti ∞, sledi, da je

$$I = \int_i^{i\infty}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2\nu-1}\frac{dz}{z^2}+\int_{\gamma_1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2\nu-1}\frac{dz}{z^2}, \tag{5.8.32}$$

kjer je γ_1 krožni lok $\gamma(t)=e^{it}$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$. Prvi integral v (5.8.32) preide z uvedbo nove spremenljivke $z=iy$ in nato $y=t^{-\frac{1}{2}}$ v

$$\begin{aligned}
i^{2\nu-2}&\int_1^\infty\left(y-\frac{1}{y}\right)^{2\nu-1}\frac{dy}{y^2} =\\
&= \frac{1}{2}\,i^{2\nu-2}\int_0^1 t^{-\nu}(1-t)^{2\nu-1}\,dt = \frac{i^{2\nu-2}}{2}\,B(-\nu+1,2\nu)\\
&= -\frac{e^{\nu\pi i}}{2}\,\frac{(-\nu)\Gamma(-\nu)\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu+1)} = \frac{e^{\nu\pi i}}{2}\,\Gamma(-\nu)\,\frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu)}\\
&= \frac{e^{\nu\pi i}}{2}\,\Gamma(-\nu)\,\frac{2^{2\nu-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) = -e^{\nu\pi i}\,\frac{\sqrt{\pi}\,2^{2\nu-2}}{\nu\sin\nu\pi}\,\frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)},
\end{aligned}$$

kjer smo v predzadnji enakosti uporabili podvojitveno formulo (8. naloga iz razdelka 2.16), v zadnji pa trditev 2.16.7, po kateri je

$$\Gamma(-\nu) = -\frac{\pi}{\Gamma(1+\nu)\sin\nu\pi} = -\frac{\pi}{\nu\Gamma(\nu)\sin\nu\pi}.$$

Tudi drugi integral v (5.8.32) se izraža s funkcijo Γ:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)^{2\nu-1} \frac{ie^{i\varphi}}{e^{2i\varphi}}\,d\varphi &= 2^{2\nu-1}i\int_0^{\pi/2}\cos^{2\nu-1}\varphi\,(\cos\varphi - i\sin\varphi)\,d\varphi\\ &= 2^{2\nu-2}i\left[B\left(\nu+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)-iB(\nu,1)\right]\\ &= 2^{2\nu-2}\left[\frac{\Gamma(\nu)\Gamma(1)}{\Gamma(\nu+1)}+i\,\frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)}\right]\\ &= \frac{2^{2\nu-2}}{\nu}\left(1+i\,\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)}\right).\end{aligned}$$

Od tod dobimo, da je $I=\dfrac{2^{2\nu-2}}{\nu}\left(1-\sqrt{\pi}\,\dfrac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)}\,\dfrac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}\right)$.)

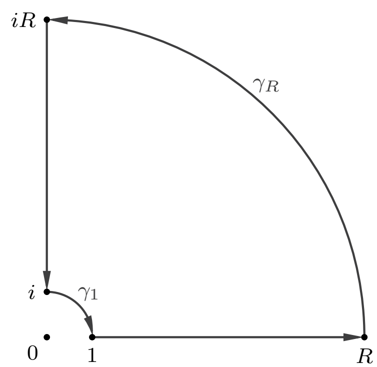

FIGURE 5.13. Integracijska pot v nalogi 14(iv).

(v) Sklepajte iz (iii) in (iv), da je koeficient pred x^ν v funkciji $\operatorname{Im} H_\nu^{(1)}(x)$ enak $\frac{1}{2^\nu\nu\Gamma(\nu)}\frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}$ in da je $\operatorname{Im} H_\nu^{(1)}=Y_\nu$.

5.9. Nihanje krožne membrane

Opazujmo nihajočo krožno membrano polmera a. V ravnovesni legi naj bo središče membrane v izhodišču koordinatnega sistema, membrana pa v ravnini x,y. Niha naj v navpični smeri. Lego točke na mirujoči membrani lahko tedaj podamo v polarnih koordinatah r,φ. Odmik točke (r,φ) od ravnovesne lege v času t bomo označili z $u(r,\varphi,t)$. Iz fizike je znano, da odmik u zadošča valovni enačbi $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\Delta u$, kjer je c pozitivna konstanta (hitrost valovanja), Δ pa Laplaceov operator, ki se v polarnih koordinatah glasi $\Delta u = u_{rr}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2}$. Odmik $u=u(r,\varphi,t)$ zadošča torej parcialni diferencialni enačbi

$$u_{tt}=c^2\left(u_{rr}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2}\right). \tag{5.9.1}$$

Predpostavili bomo, da je membrana na robu pritrjena, torej je *robni pogoj*

$$u(a, \varphi, t) = 0. \tag{5.9.2}$$

Da bi lahko določili odmik $u(r, \varphi, t)$, potrebujemo še začetno lego in začetno hitrost vseh točk na membrani, $u(r, \varphi, 0)$ in $u_t(r, \varphi, 0)$. Privzeli bomo, da sta to dani funkciji,

$$u(r, \varphi, 0) = f(r, \varphi) \qquad \text{in} \qquad u_t(r, \varphi, 0) = g(r, \varphi). \tag{5.9.3}$$

Radi bi torej poiskali rešitev u enačbe (5.9.1) pri robnem pogoju (5.9.2) in *začetnih pogojih* (5.9.3). Po *Fourierovi metodi ločitve spremenljivk* poskusimo poiskati najprej vse tiste rešitve enačbe (5.9.1) in robnega pogoja (5.9.2), ki jih je mogoče izraziti kot $u(r, \varphi, t) = R(r)\Phi(\varphi)T(t)$, kjer so R, Φ in T za sedaj še neznane funkcije. Ko vstavimo ta izraz v enačbo (5.9.1) in jo nato delimo s $c^2 R\Phi T$, dobimo

$$c^{-2}\,\frac{T''}{T} = \frac{R''}{R} + r^{-1}\,\frac{R'}{R} + r^{-2}\,\frac{\Phi''}{\Phi}. \tag{5.9.4}$$

Ker je leva stran te enačbe odvisna le od t, desna pa ni odvisna od t, morata biti obe strani konstantni. Označimo to konstanto z $-\mu^2$, da dobimo iz (5.9.4) enačbi

$$T'' + (\mu c)^2 T = 0 \tag{5.9.5}$$

in

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \mu^2 r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

Ker je leva stran zadnje enačbe odvisna le od r, desna pa je neodvisna od r, morata biti obe enaki konstanti, ki jo bomo imenovali ν^2, torej

$$r^2 R'' + rR' + (\mu^2 r^2 - \nu^2)R = 0 \tag{5.9.6}$$

in

$$\Phi'' + \nu^2\Phi = 0. \tag{5.9.7}$$

Pri spremembi kota φ za 2π se vrnemo v isto točko, zato mora biti Φ periodična funkcija s periodo 2π, $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. Splošna rešitev enačbe (5.9.7) je oblike $\Phi = A\cos(\nu\varphi) + B\sin(\nu\varphi)$; da bo imela periodo 2π, mora biti ν celo število. Ker v enačbah nastopa le ν^2, smemo vzeti, da je $\nu =: m \in \mathbb{N}$. Enačba (5.9.6) pa spominja na Besselovo. Substitucija $z = \mu r$ (torej $\frac{dR}{dr} = \mu\frac{dR}{dz}$ in $\frac{d^2R}{dr^2} = \mu^2\frac{d^2R}{dz^2}$) jo res prevede v Besselovo enačbo $z^2\frac{d^2R}{dz^2} + z\frac{dR}{dz} + (z^2 - \nu^2)R = 0$. Pri tem je $\nu = m \in \mathbb{N}$. Fizikalno smiselne so le rešitve, ki so omejene tudi v okolici točke 0, torej po posledici 5.8.3 večkratniki funkcij $J_m(z) = J_m(\mu r)$. Tako smo dobili rešitve enačbe (5.9.1) oblike $u = R(r)\Phi(\varphi)T(t) = CJ_m(\mu r)\Phi(\varphi)T(t)$. Da bi kaka taka neničelna rešitev lahko zadostila robnemu pogoju (5.9.2), mora biti $J_m(\mu a) = 0$, torej μa kaka od ničel Besselove funkcije J_m.

Zaradi enostavnosti bomo sedaj privzeli, da sta funkciji f in g v začetnih pogojih (5.9.3) odvisni le od r. Tedaj lahko pričakujemo, da bo rešitev u odvisna le od r in t, in v gornjem sklepanju lahko vzamemo, da je Φ konstanta, torej $m = \nu = 0$

in zato $R(r) = J_0(\mu r)$. Naj bodo $\mu_1, \mu_2, \ldots$ vse pozitivne ničle funkcije J_0. (Vemo, da ima J_0 neskončno ničel na poltraku $(0, \infty)$ in da je $J_0(0) = 1$.) Potem pogoj $J_0(\mu a) = 0$ pove, da mora biti $\mu a = \mu_n$ za kak n, torej dobimo za vsak $n = 1, 2, \ldots$ eno rešitev $R_n(r) = J_m(\mu_n \frac{r}{a})$. (Pri tem smo opustili konstanto pred J_m, ker bi se, kot bo očitno iz nadaljevanja, absorbirala v konstanti, ki ju bomo dobili pri T.) Za $\mu = \frac{\mu_n}{a}$ se splošna rešitev enačbe (5.9.5) glasi $T_n = A_n \cos \frac{\mu_n}{a} ct + B_n \sin \frac{\mu_n}{a} ct$, kjer sta A_n in B_n konstanti. Za vsak n dobimo na ta način funkcijo $u_n(r, t) = R_n(t) T_n(t) = (A_n \cos \frac{\mu_n}{a} ct + B_n \sin \frac{\mu_n}{a} ct) J_0(\frac{\mu_n}{a} r)$, ki zadošča enačbi (5.9.1) in robnemu pogoju (5.9.2). Lahko je videti, da je potem tudi funkcija

$$u(r, t) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos \frac{\mu_n}{a} ct + B_n \sin \frac{\mu_n}{a} ct \Big) J_0 \Big(\frac{\mu_n}{a} r \Big) \tag{5.9.8}$$

rešitev enačbe (5.9.1) in robnega pogoja (5.9.2), če je le vrsta v (5.9.8) taka, da jo smemo členoma dvakrat odvajati na r in na t. Tedaj je treba le še določiti konstante A_n in B_n tako, da bo funkcija u zadostila tudi začetna pogoja (5.9.3), se pravi

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \Big(\frac{\mu_n}{a} r \Big) = f(r) \qquad \text{in} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{a} c B_n J_0 \Big(\frac{\mu_n}{a} r \Big) = g(r). \tag{5.9.9}$$

Da je to mogoče, sledi iz naslednjega izreka.

Izrek 5.9.1. *Bodita $\nu \geq 0$ in $a > 0$ konstanti, $\mu_1, \mu_2, \ldots$ vse pozitivne ničle funkcije J_ν in $\theta_n(r) := J_\nu(\frac{\mu_n}{a} r)$. Tedaj je $(\theta_n)_{n=1}^{\infty}$ ortogonalna baza Hilbertovega prostora $L^2_w(0, a)$, kjer je utež dana z $w(r) = r$. Pri tem je*

$$\|\theta_n\|_w^2 = \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}(\mu_n)^2. \tag{5.9.10}$$

Iz izreka sledi, da so konstante A_n in B_n v (5.9.9) enake

$$A_n = \frac{2 \int_0^a f(r) J_0(\frac{\mu_n}{a} r) r \, dr}{a^2 J_1(\mu_n)^2} \qquad \text{in} \qquad B_n = \frac{2 \int_0^a g(r) J_0(\frac{\mu_n}{a} r) r \, dr}{\mu_n c a J_1(\mu_n)^2}.$$

Ortogonalnost funkcij θ_n v izreku 5.9.1 ne sledi kar iz Sturm-Liouvillovega izreka, saj tukaj nimamo takih robnih pogojev kot v Sturm-Liouvillovemu izreku, lahko pa jo pokažemo s podobnim računom. Naj bo namreč $u(r) = J_\nu(\frac{\mu_n}{a} r)$ in $v(r) = J_\nu(\frac{\mu_m}{a} r)$ za fiksna $m \neq n$. Potem u in v zadoščata enačbi oblike (5.9.6), se pravi

$$(ru')' - \frac{\nu^2}{r} u = - \Big(\frac{\mu_n}{a} \Big)^2 ru \qquad \text{in} \qquad (rv')' - \frac{\nu^2}{r} v = - \Big(\frac{\mu_m}{a} \Big)^2 rv.$$

Ko pomnožimo prvo od teh enačb z v, drugo pa z u in ju nato odštejemo, dobimo

$$[r(u'v - uv')]' = \big(\mu_m^2 - \mu_n^2 \big) a^{-2} ruv.$$

Z integriranjem sledi od tod

$$\begin{aligned} \big(\mu_m^2 - \mu_n^2 \big) a^{-2} \int_0^a u(r) v(r) r \, dr &= \big[r(u'(r) v(r) - u(r) v'(r)) \big]_0^a \\ &= \mu_n J_\nu'(\mu_n) J_\nu(\mu_m) - \mu_m J_\nu(\mu_n) J_\nu'(\mu_m) = 0, \end{aligned}$$

ker sta μ_n in μ_m ničli funkcije J_ν. Torej je res $\langle u, v \rangle_r = \int_0^a u(r) v(r) r \, dr = 0$.

Izračunajmo še norme funkcij θ_n. Za ta namen izberimo n in označimo $\mu = \frac{\mu_n}{a}$. Kot smo že opazili, funkcija $R(r) = J_\nu(\mu r)$ zadošča enačbi (5.9.6), tj.

$$r^2 R'' + rR' + \left(\mu^2 r^2 - \nu^2\right) R = 0.$$

Ko jo pomnožimo z $2R'$, dobimo

$$\left(r^2 \left(R'\right)^2\right)' + \left(\mu^2 r^2 R^2\right)' - 2\mu^2 r R^2 - \left(\nu^2 R^2\right)' = 0.$$

Z integriranjem sledi od tod

$$2\mu^2 \int_0^a R^2 r\, dr = \left[(rR')^2 + (\mu r R)^2 - (\nu R)^2\right]_0^a. \tag{5.9.11}$$

Ker je $R(a) = J_\nu(\mu a) = J_\nu(\mu_n) = 0$ in $R(0) = J_\nu(0) = 0$ za $\nu > 0$, se (5.9.11) poenostavi v

$$2\mu^2 \int_0^a R^2 r\, dr = \left[(rR')^2\right]_0^a = \left(a\mu J_\nu'(\mu_n)\right)^2. \tag{5.9.12}$$

(To velja tudi v primeru $\nu = 0$, ker je tedaj $\nu R = 0$.) Po drugi formuli v (5.8.9) imamo (ker je $J_\nu(\mu_n) = 0$) $J_\nu'(\mu_n) = -J_{\nu+1}(\mu_n)$, zato iz (5.9.12) sledi

$$\int_0^a J_\nu\left(\frac{\mu_n}{a} r\right)^2 r\, dr = \frac{a^2}{2}\, J_{\nu+1}^2(\mu_n).$$

To pa je ravno enakost (5.9.10).

Dokaz polnosti ortogonalnega sistema $(\theta_n)_{n=1}^\infty$ je sicer v glavnih obrisih podoben dokazu Sturm-Liouvillovega izreka 5.2.6, vendar pa pri tem potrebujemo asimptotične ocene za Besselove in Webrove funkcije, ki smo jih v prejšnjem razdelku izpeljali le v nalogah, zato bomo tudi dokaz polnosti orisali v nalogah.

Naloge

1. Naj bo začetni odmik membrane od ravnovesne lege, ki je vpeta na robu in ima polmer a, podan s funkcijo $f(r) = a^2 - r^2$, začetna hitrost pa $g(r) = 0$. Izračunajte odmik $u(r,t)$ v poljubnem času t. (Navodilo: za izračun koeficientov v razvoju v vrsto po funkcijah $J_0(\frac{\mu_n}{a} r)$ uporabite nalogo 2.(ii) iz prejšnjega razdelka.)

2. Določite odmik od ravnovesne lege krožne, na robu vpete, membrane s polmerom a, če je njen začetni odmik enak $(a^2 - r^2)\cos\varphi$, začetna hitrost pa 0.

3. Poiščite tiste rešitve *modificirane Besselove enačbe*

$$z^2 y'' + zy' - (z^2 + \nu^2) y = 0 \qquad (\nu \geq 0),$$

ki so omejene okrog 0 in imajo realne vrednosti za $z \in \mathbb{R}$. (Rešitev: realni večkratniki *modificirane Besselove funkcije* $I_\nu(z) := i^{-\nu} J_\nu(iz)$.)

† **4.** Kakšna je stacionarna porazdelitev temperature $u(r, z)$ v valju, podanem v cilindričnih koordinatah kot $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le z \le b$, če je temperatura na plašču podana kot $u(a, \varphi, z) = f(z)$, temperatura na osnovni in vrhnji ploskvi pa 0? Rešiti je torej treba problem:

$$u_{rr} + r^{-1}u_r + u_{zz} = 0, \quad u(r, 0) = 0, \quad u(r, b) = 0, \quad u(a, z) = f(z) \quad (0 \le z \le b).$$

(Namig: v rešitvi nastopa tudi modificirana Besselova funkcija I_0, definirana v prejšnji nalogi.) Ta naloga je poseben primer *Dirichletovega problema za valj*, pri katerem je treba poiskati funkcijo $u(r, \varphi, z)$, ki je harmonična znotraj valja (tj. $\Delta u = 0$) in ima predpisane vrednosti na robu valja.

5. Pokažite, da za poljubna pozitivna μ in a ter vsak $\nu \ge 0$ velja

$$\int_0^a J_\nu(\mu x)^2 x\, dx = \frac{a^2}{2}\left[\left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2 a^2}\right) J_\nu(\mu a)^2 + J_\nu'(\mu a)^2\right].$$

(Namig: račun je podoben tistemu v dokazu enakosti (5.9.10).)

6. (i) Določite vse take $\mu \in \mathbb{C}$, da bo imela enačba $x^2 y'' + xy' + (\mu^2 x^2 - \nu^2)y = 0$ kako netrivialno rešitev, ki je omejena v okolici točke 0 in zadošča pogoju

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0,$$

kjer so a, α in β pozitivne konstante. Kako se tedaj glasijo rešitve. (Rezultat: $\mu = \frac{\lambda_n}{a}$, kjer so λ_n pozitivne ničle funkcije $x \mapsto \frac{\alpha}{\beta} a J_\nu(x) + xJ_\nu'(x)$. Lastna funkcija za lastno vrednost $\frac{\lambda_n}{a}$ je $y_n = J_\nu(\frac{\lambda_n}{a}x)$.)

(ii) Izračunajte norme lastnih funkcij iz točke (i). (Namig: uporabite nalogo 5. Rezultat: $\|y_n\|_w^2 = \frac{a^2}{2}(1 - \frac{\nu^2}{\lambda_n^2} + \frac{\alpha^2 a^2}{\beta^2 \lambda_n^2})J_\nu^2(\lambda_n)$.)

† **7.** (i) Kaj je rešitev naloge 6, če robni pogoj v točki a nadomestimo s pogojem $y'(a) = 0$?

(ii) Ali tvorijo funkcije $x \mapsto J_\nu(\frac{\lambda_n}{a}x)$, kjer so λ_n vse pozitivne ničle funkcije J_ν', poln ortogonalen sistem v $L_w^2(0, a)$? Tukaj je utež seveda $w(x) = x$. (Odgovor: Ne nujno. Kadar je $\nu = 0$, je konstantna funkcija 1 ortogonalna na vse te funkcije, saj je

$$\int_0^a J_0\left(\frac{\lambda_n}{a}x\right) x\, dx = \frac{a^2}{\lambda_n^2}\int_0^{\lambda_n} J_0(t)t\, dt = \frac{a^2}{\lambda_n^2}\, tJ_1(t)\Big|_0^{\lambda_n} = 0,$$

kjer smo v zadnjih dveh enakostih uporabili prvi dve nalogi iz prejšnjega razdelka.)

V naslednjih nekaj nalogah bomo orisali dokaz polnosti ortogonalnega sistema v izreku 5.9.1. Zaradi poenostavitve oznak bomo predpostavili, da je $a = 1$. Obravnavajmo torej singularni Sturm-Liouvillov problem povezan z Besselovo enačbo

$$(xy'(x))' - \frac{\nu^2}{x}y(x) + \lambda xy(x) = 0, \tag{5.9.13}$$

kjer je $\nu \geq 0$, na intervalu $x \in (0,1]$, pri robnih pogojih

$$\text{limita} \quad \lim_{x\to 0} y(x) \quad \text{obstaja in je končna}, \qquad y(1) = 0. \tag{5.9.14}$$

Označimo $\lambda = \mu^2$; potem so rešitve enačbe (5.9.13), ki zadoščajo prvemu robnemu pogoju (5.9.14), le večkratniki funkcije $J_\nu(\mu x)$. Izberimo torej

$$y_1(x;\mu^2) := \mu^{-\nu} J_\nu(\mu x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{x}{2})^{\nu+2n}}{n!(\nu+n)!} \mu^{2n};$$

potem je $y_1(x;\mu^2)$ holomorfna funkcija v spremenljivki $\lambda = \mu^2$. Za rešitev $y_2(x;\mu^2)$ enačbe (5.9.13) pri drugem robnem pogoju v (5.9.14) pa izberimo

$$y_2(x;\mu^2) := J_\nu(\mu)Y_\nu(\mu x) - Y_\nu(\mu)J_\nu(\mu x).$$

* **8.** Pokažite, da je funkcija y_2 pri fiksnem x res odvisna le od μ^2 in da je holomorfna v spremenljivki $\lambda = \mu^2$. (Navodilo: Najprej pokažite, s pomočjo naloge 6(iii) iz prejšnjega razdelka, da je $y_2'(1;\cdot) = \frac{2}{\pi}$. Torej y_2 zadošča enačbi (5.9.13) in pogojema $y_2(1;\cdot) = 0$, $y_2'(1;\cdot) = \frac{2}{\pi}$. Ker nastopajo tako v enačbi kot v robnih pogojih le holomorfne funkcije v spremenljivki μ^2, mora biti taka tudi rešitev y_2.)

† **9.** (i) Pokažite, da je rešitev enačbe

$$(xy')' - \frac{\nu^2}{x} y + \lambda x y = f(x),$$

pri robnih pogojih

$$\text{limita} \quad \lim_{x\to 0} y(x;\lambda) \quad \text{obstaja in je končna}, \qquad y(1;\lambda) = 0,$$

podana z $y(x;\lambda) = \int_0^1 G(x,t;\lambda) f(t)\,dt$, kjer je G Greenova funkcija,

$$G(x,t;\lambda) := \frac{y_1(\min\{x,t\};\lambda)\, y_2(\max\{x,t\};\lambda)}{tW(t;\lambda)},$$

pri čemer sta y_1 in y_2 rešitvi homogene enačbe (5.9.13), ki zadoščata prvemu oziroma drugemu robnemu pogoju v (5.9.14) (definirani v komentarju pred 8. nalogo).

(ii) Izračunajte, da je determinanta Wronskega funkcij y_1 in y_2, vpeljanih pred nalogo 8, enaka

$$W(x;\lambda) = \frac{2}{\pi x} \mu^{-\nu} J_\nu(\mu). \tag{5.9.15}$$

(Namig: uporabite nalogo 6(iii) iz prejšnjega razdelka.) Izpeljite od tod in iz (i) za Greenovo funkcijo G formulo

$$G(x,t;\lambda) = \frac{\pi}{2} \frac{J_\nu(\mu \min\{x,t\})}{J_\nu(\mu)}\, y_2(\mu \max\{x,t\};\mu^2), \tag{5.9.16}$$

torej

$$G(x,t;\lambda) = \frac{\pi}{2} \frac{J_\nu(\mu \min\{x,t\})}{J_\nu(\mu)} \left[J_\nu(\mu)Y_\nu(\mu \max\{x,t\}) - Y_\nu(\mu)J_\nu(\mu \max\{x,t\})\right]. \tag{5.9.17}$$

***10.** (i) Z uporabo asimptotičnih ocen (5.8.24) in (5.8.25) za kompleksne vrednosti spremenljivke x (kjer je treba na levi strani formule (5.8.25) nadomestiti $\operatorname{Im} H_\nu^{(1)}$ z Webrovo funkcijo Y_ν) sklepajte iz (5.9.17), da je za vse dovolj velike $|\mu|$ vrednost $|G(x,t;\lambda)|$ omejena s konstantnim večkratnikom izraza

$$\frac{1}{|\mu|\sqrt{\min\{x,t\}\max\{x,t\}}}\left|\frac{\cos(\mu\min\{x,t\}-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})\sin\mu(1-\max\{x,t\})}{\cos(\mu-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\right|+\frac{o}{|\mu|}, \tag{5.9.18}$$

kjer je o neka taka omejena funkcija, da je $\lim_{|\mu|\to\infty} o = 0$.

(ii) Iz ocen $|\cos z| \le e^{|\operatorname{Im} z|}$ in $|\sin z| \le e^{|\operatorname{Im} z|}$ izpeljite (upoštevajoč $x,t \in [0,1]$), da je

$$\begin{aligned}\left|\cos\left(\mu\min\{x,t\}-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\mu(\max\{x,t\}-1)\right| &\le \\ \le e^{|\operatorname{Im}\mu|(\min\{x,t\}-\max\{x,t\}+1)} & \\ \le e^{|\operatorname{Im}\mu|} \qquad (x\in[0,1]). &\end{aligned}$$

Nato z uporabo identitete $|\cos(s+it)|^2 = \operatorname{ch}^2 t - \sin^2 s$ $(s,t\in\mathbb{R})$ pokažite (s sklepanjem, podobnim tistemu v dokazu leme 5.3.5), da je

$$\left|\cos\left(\mu-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right| \ge \frac{e^{|\operatorname{Im}\mu|}}{4},$$

če je $|\operatorname{Im}\mu| \ge 1$ ali $\operatorname{Re}\mu = \frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Zaključite sedaj od tod in iz (5.9.18), da obstaja tako konstanta C, da velja

$$|G(x,t,\lambda)| \le \frac{C}{|\mu|\sqrt{xt}} \qquad (x,t\in(0,1],\ \lambda=\mu^2) \tag{5.9.19}$$

za vse dovolj velike $|\mu|$, za katere je izpolnjen še vsaj eden od pogojev $|\operatorname{Im}\mu| \ge 1$ ali $\operatorname{Re}\mu = \frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

(iii) Podobno kot v dokazu formule (5.3.6) sklepajte sedaj iz točke (ii), da za $t,x\in(0,1]$ konvergirajo integrali funkcije $\frac{G(x,t;z)}{z-\lambda}$ po primerno izbranih velikih kvadratih proti 0, ko gre velikost kvadratov proti ∞, in je zato vsota residuov funkcije $z\mapsto\frac{G(x,t;z)}{z-\lambda}$ enaka 0. Za vsak $\lambda\in\mathbb{C}$, ki ni pol funkcije $z\mapsto G(x,t;z)$, je residuum funkcije $\frac{G(x,t;z)}{z-\lambda}$ v točki λ enak $G(x,t;\lambda)$. Ker je y_2 holomorfna funkcija v spremenljivki $\lambda=\mu^2$, sledi iz (5.9.16), da so druge singularne točke funkcije $z\mapsto\frac{G(x,t;z)}{z-\lambda}$ ravno ničle funkcije J_ν. Za vsako tako ničlo μ je po (5.9.15) $\lambda=\mu^2$ ničla funkcije W, se pravi lastna vrednost Sturm-Liouvillovega problema (5.9.13), (5.9.14), zato realna. Torej $\mu^2\in\mathbb{R}$ in zato bodisi $\mu\in\mathbb{R}$ bodisi $\mu\in i\mathbb{R}$. Iz razvoja v vrsto lahko opazimo, da je $i^{-\nu}J_\nu(it)>0$ za vsak realen neničelen t, zato J_ν nima imaginarnih ničel. Ker je funkcija y_2 holomorfna v spremenljivki μ, sledi iz (5.9.16), da je $\mu=0$ premostljiva singularna točka za funkcijo $z \mapsto G(x,t;z)$, saj obstaja $\lim_{\mu\to 0} \frac{J_\nu(\mu \min\{x,t\})}{J_\nu(\mu)} = \min\{x,t\}^\nu$. Torej so edine možne singularne točke funkcije $z \mapsto G(x,t;z)$ oblike $z = \mu_n^2$, kjer so μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ vse pozitivne ničle funkcije J_ν. Iz dejstva, da je vsota vseh residuov funkcije $z \mapsto \frac{G(x,t;z)}{z-\lambda}$ enaka 0, zato sledi, da je

$$G(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Res}\left(\frac{G(x,t;z)}{\lambda - z}; z = \mu_n^2\right). \tag{5.9.20}$$

(iv) Napišite zvezo (5.9.17) v obliki

$$G(x,t;z) = \frac{\pi}{2}\,\frac{J_\nu(\sqrt{z}\min\{x,t\})}{J_\nu(\sqrt{z})}\cdot \\ \cdot\left[J_\nu(\sqrt{z})Y_\nu(\sqrt{z}\max\{x,t\}) - Y_\nu(\sqrt{z})J_\nu(\sqrt{z}\max\{x,t\})\right].$$

Za izračun residua funkcije $z \mapsto G(x,t;z)$ v točki $z = \mu_n^2$ je treba izračunati limito $\lim_{z\to\mu_n^2}(z-\mu_n^2)G(x,t;z)$, kar se reducira na računanje limite

$$\lim_{z\to\mu_n^2} \frac{z-\mu_n^2}{J_\nu(\sqrt{z})} = \frac{1}{\frac{d}{dz}J_\nu(\sqrt{z})|_{z=\mu_n^2}} = \frac{1}{\frac{1}{2\mu_n}J_\nu'(\mu_n)} = \frac{2\mu_n}{J_\nu'(\mu_n)}.$$

Preoblikujte sedaj formulo (5.9.20) najprej v

$$G(x,t;\lambda) = -\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n Y_\nu(\mu_n)J_\nu(\mu_n x)J_\nu(\mu_n t)}{(\lambda-\mu_n^2)J_\nu'(\mu_n)},$$

nato pa, z upoštevanjem druge enakosti v (5.8.9) in naloge 6(iii) iz prejšnjega razdelka, v

$$G(x,t;\lambda) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_\nu(\mu_n x)J_\nu(\mu_n t)}{(\lambda-\mu_n^2)J_{\nu+1}^2(\mu_n)}. \tag{5.9.21}$$

***11.** (i) Naj bo y dvakrat zvezno odvedljiva funkcija na intervalu $[0,1]$, ki naj zadošča pogojema $y(0) = 0 = y(1)$. Označimo $f(x) = (xy')' - \frac{\nu^2}{x}y + \lambda xy$. Pokažite, da je f zvezna funkcija in po nalogi 9(i)

$$y(x) = \int_0^1 G(x,t;\lambda)f(t)\,dt,$$

če λ ni ničla funkcije W. Po (5.9.21) in definiciji funkcije f lahko to formulo napišemo v obliki

$$y(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_\nu(\mu_n x)}{(\lambda-\mu_n^2)J_{\nu+1}^2(\mu_n)}\cdot \\ \cdot\left[\int_0^1 J_\nu(\mu_n t)(ty'(t))'\,dt - \int_0^1 J_\nu(\mu_n t)\left(\frac{\nu^2}{t}-\lambda t\right)y(t)\,dt\right],$$

kjer smo predpostavili, da smemo zamenjati vrstni red seštevanja in integriranja, kar bomo utemeljili nekoliko kasneje. Z dvakratnim integriranjem per partes prvega integrala, upoštevajoč pri tem enakosti $\frac{d}{dt}(t\frac{d}{dt}J_\nu(\mu_n t)) = (\frac{\nu^2}{t} - \mu_n^2 t)J_\nu(\mu_n t)$ in robne pogoje, ki jim zadoščata funkciji $J_\nu(\mu_n x)$ in $y(x)$, preoblikujte gornjo formulo v

$$y(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\nu(\mu_n x)}{J_{\nu+1}^2(\mu_n)} \int_0^1 y(t)J_\nu(\mu_n t)t\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\theta_n(x),$$

kjer je $\theta_n(x) = J_\nu(\mu_n x)$ in

$$c_n = 2\,\frac{\int_0^1 y(t)J_\nu(\mu_n t)t\,dt}{J_{\nu+1}^2(\mu_n)} = \frac{\langle y, \theta_n\rangle}{\|\theta_n\|^2}.$$

(Pri tem vrsta $\sum c_n\theta_n$ konvergira proti y po točkah. Ker pa je $(\|\theta_n\|^{-1}\theta_n))$ ortonormiran sistem funkcij in $\|\theta_n\|c_n = \langle y, \|\theta_n\|^{-1}\theta_n\rangle$, je po Besselovi neenakosti $\sum_n \|\theta_n\|^2|c_n|^2 \leq \|y\|^2 < \infty$. Zato delne vsote vrste $\sum_n c_n\theta_n = \sum_n(\|\theta_n\|c_n)\|\theta_n\|^{-1}\theta_n$ konvergirajo proti kaki funkciji $v \in L_w^2(0,1)$ po normi prostora $L_w^2(0,1)$, torej kako podzaporedje delnih vsot konvergira proti v po točkah skoraj povsod. Torej mora biti $v = y$, kar dokazuje, da konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\theta_n$ proti y tudi po normi prostora $L_w^2(0,1)$.) Pokažite, da je množica vseh dvakrat zvezno odvedljivih funkcij $y : [0,1] \to \mathbb{C}$, ki zadoščajo pogojema $y(0) = 0 = y(1)$, gosta v Hilbertovem prostoru $L_w^2(0,1)$, kjer je utež $w(x) = x$, in sklepajte, da je ortogonalen sistem funkcij $\theta_n(x) = J_\nu(\mu_n x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ poln v prostoru $L_w^2(0,1)$.

(ii) Poglejmo sedaj, kako utemeljiti zamenjavo vrstnega reda seštevanja in integriranja v točki (i). Znano je, da lahko pri integriranju splošne funkcijske vrste $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\,dt$ (kjer je $a < b$ in so g_n merljive funkcije) zamenjamo vrstni red seštevanja in integriranja, če je $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |g_n(t)|\,dt < \infty$. Pokazati je torej treba, da pri fiksnih $x \in (0,1]$ in λ $(\lambda \neq \mu_n^2,\ n = 1, 2, \ldots)$ za vrsto v (5.9.21) velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|J_\nu(\mu_n x)|}{|\lambda - \mu_n^2|J_{\nu+1}^2(\mu_n)} \int_0^1 |J_\nu(\mu_n t)|\,dt < \infty.$$

Ker je funkcija J_ν $(\nu \geq 0)$ omejena na realni osi, so vsi integrali $\int_0^1 |J_\nu(\mu_n t)|\,dt = \frac{1}{\mu_n}\int_0^{\mu_n} |J_\nu(s)|\,ds$ omejeni z isto konstanto, zato bo dovolj, da dokažete, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|J_\nu(\mu_n x)|}{|\lambda - \mu_n^2|J_{\nu+1}^2(\mu_n)} < \infty.$$

(Namig: iz asimptotične formule (5.8.24) lahko izpeljemo oceno za lokacijo ničel μ_n funkcije J_ν in oceno za $|J_{\nu+1}(\mu_n)|$ za vse dovolj velike n.)

5.10. Hipergeometrijska enačba†

Diferencialne enačbe je dostikrat koristno obravnavati v razširjeni kompleksni ravnini $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Definicija 5.10.1. Točka ∞ je *pravilna singularna točka* enačbe

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0, \tag{5.10.1}$$

če je 0 pravilna singularna točka enačbe, ki jo dobimo iz (5.10.1) s substitucijo $z = \zeta^{-1}$.

Iz

$$y' = \frac{dy}{dz} = \frac{\frac{dy}{d\zeta}}{\frac{dz}{d\zeta}} = -\zeta^2 \frac{dy}{d\zeta}$$

sledi

$$y'' = -\zeta^2 \frac{dy'}{d\zeta} = -\zeta^2 \frac{d}{d\zeta}\left(-\zeta^2 \frac{dy}{d\zeta}\right) = \zeta^4 \frac{d^2y}{d\zeta^2} + 2\zeta^3 \frac{dy}{d\zeta},$$

zato ta substitucija preoblikuje enačbo (5.10.1) v

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} + \left(\frac{2}{\zeta} - \frac{p\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^2}\right)\frac{dy}{d\zeta} + \frac{q\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^4}y = 0. \tag{5.10.2}$$

Da bo 0 pravilna singularna točka enačbe (5.10.2), sme imeti funkcija $2\zeta^{-1} - \zeta^{-2}p(\zeta^{-1})$ v 0 kvečjemu pol stopnje 1, funkcija $\zeta^{-4}q(\zeta^{-1})$ pa kvečjemu pol stopnje 2; torej mora imeti funkcija $p(\zeta^{-1})$ v 0 ničlo, funkcija $q(\zeta^{-1})$ pa ničlo reda vsaj 2. Potemtakem velja naslednja trditev:

Trditev 5.10.2. *Točka ∞ je pravilna singularna točka enačbe* (5.10.1) *natanko tedaj, ko je $p(\infty) = 0$ in je ∞ ničla reda vsaj* 2 *za funkcijo q.*

Definicija 5.10.3. Enačbo oblike (5.10.1), v kateri sta p in q holomorfni funkciji na $\hat{\mathbb{C}}$, razen v izoliranih točkah, ki pa so vse pravilne singularne točke, imenujemo *Fuchsova enačba.*

Takih enačb je manj, kot bi pričakovali prvi hip. Ker je $\hat{\mathbb{C}}$ kompaktna množica, je namreč izoliranih singularnih točk lahko le končno mnogo, sicer bi bilo stekališče takih točk neizolirana singularna točka. Naj bodo $z_1, \ldots, z_n$ vse končne singularne točke Fuchsove enačbe (5.10.1). Ker smeta imeti v teh točkah funkciji p in q le pole prve oziroma druge stopnje, sta oblike

$$p(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z - z_k} + p_1(z) \qquad \text{in} \qquad q(z) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{B_k}{(z - z_k)^2} + \frac{C_k}{z - z_k}\right] + q_1(z)$$

za kake konstante A_k, B_k, C_k in funkciji p_1, q_1, ki sta holomorfni na $\mathbb{C}$. Ker je tudi ∞ pravilna singularna točka enačbe (ali pa je regularna), morata imeti funkciji

(p in q, zato tudi) p_1 in q_1 v ∞ ničlo, torej sta omejeni in zato po Liouvillovem izreku konstantni. Torej sta funkciji p_1 in q_1 identično enaki 0, se pravi, da je

$$p(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z - z_k} \qquad \text{in} \qquad q(z) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{B_k}{(z - z_k)^2} + \frac{C_k}{z - z_k} \right]. \tag{5.10.3}$$

Pogoj, da mora imeti q v ∞ ničlo reda vsaj 2 (torej $\lim_{z\to\infty} zq(z) = 0$), pomeni, da je

$$\sum_{k=1}^{n} C_k = 0. \tag{5.10.4}$$

Določitvena enačba za karakteristična eksponenta v točki z_k se glasi

$$\mu(\mu - 1) + A_k\mu + B_k = 0. \tag{5.10.5}$$

Določitvena enačba v točki ∞ (ki je po definiciji določitvena enačba za enačbo (5.10.2) v točki $\zeta = 0$) pa bo sledila iz razvojev

$$\frac{2}{\zeta} - \frac{p(\zeta^{-1})}{\zeta^2} = \frac{2}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k \zeta}{1 - z_k\zeta} = \frac{1}{\zeta} \left[2 - \sum_{k=1}^{n} A_k \left(1 + z_k\zeta + z_k^2\zeta^2 + \ldots \right) \right]$$

in

$$\begin{aligned} \frac{q(\zeta^{-1})}{\zeta^4} &= \frac{1}{\zeta^4} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{B_k\zeta^2}{(1 - z_k\zeta)^2} + \frac{C_k\zeta}{1 - z_k\zeta} \right] \\ &= \frac{1}{\zeta^2} \sum_{k=1}^{n} B_k \left(1 + 2z_k\zeta + \ldots \right) + \frac{1}{\zeta^3} \sum_{k=1}^{n} C_k \left(1 + z_k\zeta + z_k^2\zeta^2 + \ldots \right). \end{aligned}$$

Od tod preberemo koeficient A_∞ pred $\frac{1}{\zeta}$ v razvoju funkcije $2\zeta^{-1} - \zeta^{-2}p(\zeta^{-1})$ in koeficient B_∞ pred $\frac{1}{\zeta^2}$ v razvoju funkcije $\zeta^{-4}q(\zeta^{-1})$:

$$A_\infty = 2 - \sum_{k=1}^{n} A_k, \qquad B_\infty = \sum_{k=1}^{n} (B_k + z_kC_k). \tag{5.10.6}$$

Določitvena enačba v ∞ je torej $\mu(\mu-1) + A_\infty\mu + B_\infty$, kjer sta konstanti A_∞ in B_∞ dani z (5.10.6). Po Vietovih formulah je vsota karakterističnih eksponentov $\mu_{1,k}$ in $\mu_{2,k}$ v točki z_k enaka

$$\mu_{1,k} + \mu_{2,k} = 1 - A_k,$$

v točki ∞ pa

$$\mu_{1,\infty} + \mu_{2,\infty} = 1 - A_\infty.$$

Od tod in iz (5.10.6) takoj sledi, da je $\mu_{1,\infty} + \mu_{2,\infty} + \sum_{k=1}^{n}(\mu_{1,k} + \mu_{2,k}) = 1 - A_\infty + n - \sum_{k=1}^{n} A_k = n - 1$. S tem smo dokazali:

TRDITEV 5.10.4. *Vsota vseh karakterističnih eksponentov Fuchsove enačbe, ki ima n končnih singularnih točk, je $n - 1$.*

Ker je vsaka bijektivna ulomljena linearna transformacija kompozitum translacij, rotacij, raztegov in inverzij (naloga 10 iz razdelka 2.8), je lahko videti, da take transformacije preoblikujejo enačbo (5.10.1) v enačbo enake vrste in preslikajo pravilne singularne točke v pravilne singularne točke.

Zgled 5.10.5. (i) Če ima enačba (5.10.1) le eno pravilno singularno točko, recimo, da je to ∞, se po gornjih ugotovitvah (torej po (5.10.3), kjer je $n = 0$ in zato $p \equiv 0 \equiv q$) glasi $y'' = 0$.

(ii) Fuchsova enačba z dvema pravilnima singularnima točkama, 0 in ∞ pa se po (5.10.3) in (5.10.4) glasi

$$y'' + \frac{A}{z}\,y' + \frac{B}{z^2}\,y = 0,$$

kjer sta A in B konstanti. To je Eulerjeva enačba, ki smo jo spoznali že prej.

(iii) Fuchsova enačba s tremi singularnimi točkami, $0, 1, \infty$, pa se glasi (spet po (5.10.3) in (5.10.4))

$$y'' + \left[\frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z-1}\right] y' + \left[\frac{B_1}{z^2} + \frac{B_2}{(z-1)^2} + \frac{C}{z} - \frac{C}{z-1}\right] y = 0, \tag{5.10.7}$$

kjer so A_j, B_j in C poljubne konstante. Tako enačbo imenujemo *Riemannova.*

Trditev 5.10.6. *Riemannova enačba je določena s svojimi karakterističnimi eksponenti.*

Proof. Označimo karakteristična eksponenta v točki 0 z α_1, α_2, v točki 1 z β_1, β_2, v točki ∞ pa z γ_1, γ_2. Iz določitvenih enačb $\mu^2 + (A_k - 1)\mu + B_k = 0$ v točkah 0 in 1 sledi po Vietovih formulah

$$A_1 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2, \quad A_2 = 1 - \beta_1 - \beta_2, \quad B_1 = \alpha_1\alpha_2, \quad B_2 = \beta_1\beta_2. \tag{5.10.8}$$

Po (5.10.6) se določitvena enačba v ∞ glasi $\mu(\mu-1)+(2-A_1-A_2)\mu+(B_1+B_2-C) = 0$, kar lahko napišemo kot (ko upoštevamo (5.10.8))

$$\mu(\mu - 1) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)\mu + (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 - C) = 0.$$

Ko vstavimo v to enačbo eno njeno rešitev, namreč γ_1, dobimo

$$C = \gamma_1(\gamma_1 - 1) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)\gamma_1 + \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2. \tag{5.10.9}$$

Pri tem smo za izpeljavo zadnje enakosti uporabili trditev 5.10.4, po kateri je $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 1 - \gamma_1 - \gamma_2$. Tako smo vse konstante A_j, B_j, C v Riemannovi enačbi izrazili s karakterističnimi eksponenti. □

Če vpeljemo v Riemannovo enačbo novo neznanko u prek zveze $y = z^\alpha u$, kjer je α konstanta, dobimo spet Riemannovo enačbo, le da z novimi eksponenti. Z oznakami iz dokaza prejšnje trditve se novi eksponenti glasijo: $\alpha_1 - \alpha, \alpha_2 - \alpha$ (v točki 0); β_1, β_2 (v točki 1); $\gamma_1 + \alpha, \gamma_2 + \alpha$ (v točki ∞). (Da se eksponenta v 1 ne spremenita, je razumljivo, saj je funkcija z^α holomorfna v okolici točke 1.) Če torej izberemo $\alpha = \alpha_1$, bo eden od novih eksponentov v točki 0 enak 0. Podobno lahko s substitucijo oblike $u = (z-1)^\beta v$ dosežemo, da bo v točki 1 eden od eksponentov enak 0 (eksponenta v točki 0 pa se ne spremenita). Na ta način lahko torej Riemannovo enačbo poenostavimo tako, da so njeni eksponenti oblike: $0, 1-c$ (v točki 0); a, b (v ∞); $0, 1-(1-c)-a-b$ (v 1). Pri tem smo uporabili trditev 5.10.4. Tako reducirano Riemannovo enačbo lahko sedaj po (5.10.7), (5.10.8) in (5.10.9) napišemo kot

$$y'' + \left[\frac{c}{z} + \frac{1-c+a+b}{z-1}\right] y' + \left[-\frac{ab}{z} + \frac{ab}{z-1}\right] y = 0$$

oziroma

$$z(z-1)y'' + [(a+b+1)z - c]y' + aby = 0. \tag{5.10.10}$$

To je *Gaussova* ali *hipergeometrijska* enačba. Ker je določena s svojimi tremi pravilnimi singularnimi točkami in karakterističnimi eksponenti v njih, kolekcijo njenih rešitev označujejo kot

$$P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a; & z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{pmatrix}.$$

Vendar pa se tukaj ne bomo zelo poglobili v hipergeometrijsko enačbo in te oznake ne bomo uporabljali. Poiščimo le rešitve v okolici točke 0. Ker je eden od karakterističnih eksponentov enak 0, lahko eno rešitev iščemo kar z nastavkom $y = \sum_{k=0}^\infty c_k z^k$ ($c_0 \neq 0$). Ko ga vstavimo v enačbo (5.10.10), dobimo

$$(z^2 - z) \sum_{k=0}^\infty k(k-1)c_k z^{k-2} + [(a+b+1)z - c] \sum_{k=0}^\infty k c_k z^{k-1} + ab \sum_{k=0}^\infty c_k z^k = 0.$$

Koeficient pred z^k je

$$k(k-1)c_k - (k+1)kc_{k+1} + k(a+b+1)c_k - (k+1)cc_{k+1} + abc_k.$$

Ko ga izenačimo z 0, dobimo rekurzivno formulo, če privzamemo, da $c \notin (-\mathbb{N})$,

$$c_{k+1} = \frac{k(a+b+k)+ab}{(k+1)(k+c)}\, c_k = \frac{(a+k)(b+k)}{(k+1)(c+k)}\, c_k.$$

Izberimo $c_0 = 1$, da dobimo

$$c_1 = \frac{ab}{1 \cdot c}, \qquad c_2 = \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)}, \qquad \ldots, \qquad c_k = \frac{(a)_k (b)_k}{k!(c)_k},$$

kjer pomeni

$$(a)_k := a(a+1)\cdots(a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}.$$

Tako dobimo rešitev

$$y = F(a,b,c;z) := \sum_{k=0}^\infty \frac{(a)_k (b)_k}{k!(c)_k}\, z^k,$$

ki jo imenujemo *hipergeometrijska funkcija*. Po osnovnem izreku 5.7.3 mora biti konvergenčni polmer te vrste enak 1, kar je mogoče potrditi tudi s kvocientnim kriterijem.

Hipergeometrijska funkcija s parametri $a = 1$ in $c = b$ je

$$F(1, b, b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \qquad (|z| < 1),$$

torej običajna geometrijska vrsta. Kadar je a ali pa b negativno celo število, je hipergeometrijska funkcija polinom. Mnoge znane funkcije je mogoče izraziti s hipergeometrijsko. Na tem mestu si oglejmo le en primer, še nekaj pa jih bo v nalogah.

Zgled 5.10.7. Vrsto za $\arcsin z$ lahko dobimo z integriranjem iz binomske vrste za $(1-t^2)^{-1/2}$, torej

$$\begin{aligned}
\arcsin z &= \int_0^z (1-t^2)^{-1/2}\, dt \\
&= \int_0^z \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k t^{2k}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{-\frac{1}{2}}{k} z^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} z^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k}{(2k+1)k!} z^{2k+1}.
\end{aligned}$$

Po drugi strani pa je

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; z^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k (\frac{1}{2})_k}{k! (\frac{3}{2})_k} z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2})_k}{k!(\frac{3}{2}+k-1)} z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k}{k!(2k+1)} z^{2k}.$$

Od tod lahko zaključimo, da je

$$\arcsin z = zF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; z^2\right).$$

Ker je drugi karakteristični eksponent hipergeometrijske enačbe v točki 0 enak $1-c$, bi lahko drugo rešitev v okolici točke 0 iskali z nastavkom $y = z^{1-c} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, če $1-c$ ni celo število. Vendar pa obstaja še druga pot. Če namreč v enačbo (5.10.10) vpeljemo novo neznanko u prek zveze $y = uz^{1-c}$, potem sledi po krajšem računu, da u zadošča enačbi

$$z(z-1)u'' + [((a-c+1)+(b-c+1)+1)z - (2-c)]u' + (a-c+1)(b-c+1)u = 0.$$

To je spet hipergeometrijska enačba, katere ena rešitev je $u = F(a-c+1, b-c+1, 2-c; z)$. Torej je

$$y = z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c; z)$$

rešitev enačbe (5.10.10), ki je očitno linearno neodvisna od rešitve $F(a, b, c; z)$, kadar $c \notin \mathbb{Z}$ (zaradi faktorja z^{1-c}, katerega eksponent $1-c$ ni naravno število).

Naloge

1. Napišite vse homogene linearne diferencialne enačbe drugega reda, ki imajo le dve pravilni singularni točki, in sicer 1 in ∞, nobene nepravilne singularne točke, determinanta Wronskega poljubnih dveh rešitev pa je konstantna.

2. Napišite homogeno linearno diferencialno enačbo drugega reda, ki ima pravilne singularne točke v 0, 1 in ∞, nobene nepravilne singularne točke, karakteristična eksponenta v 0 sta 0 in $\frac{1}{2}$, v 1 sta 0 in $-\frac{1}{2}$, v ∞ pa je en eksponent $\frac{1}{2}$. Koliko je drugi eksponent v ∞? Napišite tudi dve linearno neodvisni rešitvi v okolici točke 0.

3. Dokažite naslednje identitete za $|z| < 1$:

(i) $(1+z)^r = F(-r, b, b; -z)$;

(ii) $\ln(1+z) = zF(1, 1, 2; -z)$;

(iii) $\operatorname{arctg} z = zF(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; -z^2)$;

(iv) $e^z = \lim_{b\to\infty} F(a, b, a; \frac{z}{b})$.

4. Z vpeljavo nove spremenljivke $\zeta = 1 - z$ prevedite hipergeometrijsko enačbo (5.10.10) v

$$\zeta(\zeta-1)\,\frac{d^2y}{d\zeta^2} + [(a+b+1)\zeta - (a+b-c+1)]\,\frac{dy}{d\zeta} + aby = 0$$

in sklepajte od tod, da sta funkciji $F(a, b, a+b-c+1; 1-z)$ in $(1-z)^{c-a-b}F(c-b, c-a, c-a-b+1; 1-z)$ rešitvi enačbe (5.10.10) v okolici točke $z = 1$.

5. Izrazite s pomočjo hipergeometrijske funkcije rešitve hipergeometrijske enačbe (5.10.10) v okolici točke ∞.

6. Pokažite, da lahko vsako enačbo oblike

$$(z-a)(z-b)y'' + (c+dz)y' + ey = 0,$$

kjer so a, b, c, d, e konstante in $a \neq b$, prevedemo na hipergeometrijsko. (Namig: vpeljite novo spremenljivko $\zeta = \frac{z-a}{b-a}$.)

7. Prevedite Legendreovo enačbo $(z^2-1)y'' + 2zy' - n(n+1)y = 0$ na hipergeometrijsko in sklepajte, da lahko eno rešitev Legendreove enačbe izrazimo kot $y_1 = F(-n, n+1, 1; \frac{1}{2}(1-z))$.

8. Dokažite zvezo

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,dt = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}\,F(a, b, c; z) \qquad (c > b > 0).$$

(Namig: najprej razvijte izraz $(1-zt)^{-a}$ v binomsko vrsto.)

9. Prevedite enačbo Čebiševa $(1-z^2)y'' - zy' + n^2y = 0$ na hipergeometrijsko in izrazite njeno splošno rešitev v okolici točke $z = 1$ s hipergeometrijsko funkcijo.

10. Izračunajte odvod $\frac{d}{dz}F(a,b,c;z)$ $(c \neq 0)$. (Rezultat: $\frac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1;z)$.)

11. Vpeljite v hipergeometrijsko enačbo (5.10.10) novo spremenljivko $\zeta = bz$, da dobite enačbo

$$\zeta\left(\frac{\zeta}{b}-1\right)\frac{d^2y}{d\zeta^2} + \left[\frac{a+b+1}{b}\,\zeta - c\right]\frac{dy}{d\zeta} + ay = 0.$$

Ko pošljemo b proti ∞, preide ta enačba v *konfluentno hipergeometrijsko enačbo*

$$\zeta\,\frac{d^2y}{d\zeta^2} + (c-\zeta)\,\frac{dy}{d\zeta} - ay = 0. \tag{5.10.11}$$

(i) Ali je ∞ pravilna singularna točka enačbe (5.10.11)?

(ii) Pokažite, da je 0 pravilna singularna točka enačbe (5.10.11), da sta v njej karakteristična eksponenta 0 in $1-c$, rešitev, ki pripada eksponentu 0 in ima v točki 0 vrednost 1, pa *konfluentna hipergeometrijska funkcija*

$$F(a,c;\zeta) := 1 + \frac{a}{c}\,\zeta + \frac{a(a+1)}{2!c(c+1)}\,\zeta^2 + \ldots + \frac{(a)_k}{k!(c)_k}\,\zeta^k + \ldots,$$

če je $c \neq 0, -1, -2, \ldots$

12. Laguerrova enačba $zy'' + (1-z)y' + ny = 0$ je poseben primer enačbe (5.10.11). Pokažite, da so edine rešitve Laguerrove enačbe, ki so omejene v okolici točke 0, oblike $cF(-n,1;z)$, kjer je c konstanta. (Namig: trditev 5.7.5.) Nadalje je $F(-n,1;z)$ Laguerrov polinom $L_n(z) = \frac{e^z}{n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^n e^{-z})$, če je n naravno število. (Namig: izračunajte $L_n(0)$.)

Bibliography

[1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill, New York, 1979.

[2] G. Allann, *Introduction to Banach Spaces and Algebras*, Oxford University Press, Oxford, 2011.

[3] V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[4] G. Birkhoff in G-C. Rota, *Ordinary Differential Equations*, Fourth Edition, Wiley, New York, 1989.

[5] F. Bowman, *Introduction to Bessel Functions*, Dover Publications, New York, 1958.

[6] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*, Fourth Edition, TAM, Springer-Verlag, New York, 1993.

[7] J. C. Burkill in H. Burkill, *A Second Course in Mathematical Analysis*, Cambridge Math. Library, Cambridge, 2002.

[8] R. Courant in D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I, Interscience Publishers, New York, 1953.

[9] A. Deitmar, *A First Course in Harmonic Analysis*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 2005.

[10] M. Dobovišek, *Riemannov in Lebesgueov integral v* $\mathbb{R}^n$, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **36**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1997.

[11] M. Dobovišek, *Nekaj o diferencialnih enačbah*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **47**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2011.

[12] M. Dobovišek, *Matematika 2*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **48**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2013.

[13] G. B. Folland, *Fourier Analysis and its Applications*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[14] G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Second Edition, Princeton University Press, Princeton, 1995.

[15] J. Globevnik in M. Brojan, *Analiza 2*, Matematični rokopisi, DMFA, Ljubljana, 2010. `http://www.fmf.uni-lj.si/~globevnik/skriptaII.pdf`

[16] M. A. Al-Gwaiz, *Sturm-Liouville Theory and its Applications*, Springer-Verlag, London, 2008.

[17] P. R. Halmos, *Naive Set Theory*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[18] P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, GTM **19**, Springer-Verlag, New York, 1982.

[19] A. W. Knapp, *Basic Real Analysis*, Cornerstones, Birkhäuser, Basel, 2005.

[20] J. Korevaar, *On Newman's quick way to the prime number theorem*, Math. Intell. **4** (1982), 108–115.

[21] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Groups and Symmetries*, Universitext, Springer, New York, 2010.

[22] F. Križanič, *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1974.

[23] F. Križanič, *Linearna algebra in linearna analiza*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1993.

[24] S. Lang, *Complex Analysis*, Fourth Edition, GTM, Springer-Verlag, New York, 2003.

[25] N. N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Prentice-Hall, Englewood, 1965.

[26] B. Magajna, *Linearna algebra, metrični prostor in funkcije več spremenljivk*, Matematika-fizika **50**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2011.

[27] B. Magajna, *Osnove teorije mere*, Podiplomski seminar iz matematike **27**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2011.

[28] J. Mrčun, *Topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **44**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 2008.

[29] D. J. Newman, *Simple analytic proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **87** (1980), 693–696.

[30] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill, New York, 1987.

[31] G. F. Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes*, Third Edition, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2016.

[32] A. Suhadolc, *Robni problemi za linearne diferencialne enačbe 2. reda*, Matematični rokopisi **19**, DMFA, Ljubljana, 1990.

[33] A. Suhadolc, *Potencialna teorija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **31**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1994.

[34] A. Suhadolc, *Navadne diferencialne enačbe*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **34**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1996.

[35] A. Suhadolc, *Metrični prostor, Hilbertov prostor, Fourierova analiza, Laplaceova transformacija*, Matematični rokopisi **23**, DMFA, Ljubljana, 1998.

[36] S. Širca in M. Horvat, *Računske metode za fizike*, Matematika-fizika **46**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2011.

[37] E. C. Titchmarsh, *Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations*, Part I, Second Edition, Oxford Univ. Press, 1962.

[38] I. Vidav, *Višja matematika I*, Matematika-fizika **6**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 2008.

[39] Z. X. Wang in D. R. Guo, *Special Functions*, World Scientific, Singapore, 2010.

[40] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge Math. Library Edition, Cambridge, 1996.

[41] D. Zagier, *Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem*, American Math. Monthly, **104** (1997), 705–708.

[42] E. Zakrajšek, *Analiza 3*, Matematični rokopisi **21**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2002.

Index

MATEMATIKA – FIZIKA
Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij

Izdajajo: Fakulteta za matematiko in fiziko
Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
DMFA – založništvo

4. I. Vidav, *Algebra*, 1980, 1987, 1989, 2003, 2010, 2017
6. I. Vidav, *Višja matematika I*, 1973, 1976, 1978, 1981, 1985, 1987, 1990, 1994, 2008
9. J. Strnad, *Fizika, 1. del, Mehanika, toplota*, 1977, 1984, 1985, 1987, 1989, 1990, 1992, 1995, 2002, 2007, 2011, 2014, 2016
11. J. Strnad, *Fizika, 2. del, Elektrika, optika*, 1978, 1985, 1989, 1992, 1995, 2005, 2014, 2018
14. J. Strnad, *Fizika, 3. del, Posebna teorija relativnosti, kvantna fizika, atomi*, 1981, 1982, 1988, 1992, 1998, 2002, 2009, 2018
15. I. Vidav, *Afina in projektivna geometrija*, 1981
16. R. Jamnik, *Matematika*, 1981, 1985, 1987, 1990, 1992, 1994, 2001, 2008
18. J. Strnad, *Fizika, 4. del, Molekule, kristali, jedra, delci*, 1982, 1986, 2000, 2005, 2010, 2018
19. J. Grasselli, *Algebraična števila*, 1983
23. J. Grasselli, *Linearna algebra*,
    A. Vadnal, *Linearno programiranje*, 1975, 1979, 1986, 1990, 1994, 2003
28. I. Kuščer, S. Žumer, *Toplota, Termodinamika, statistična mehanika, transportni pojavi*, 1987, 2006, 2017
30. S. Pahor, *Uvod v analitično mehaniko*, 1989, 1995
31. J. Vrabec, *Metrični prostori*, 1990, 1993
32. I. Vidav, *Eliptične krivulje in eliptične funkcije*, 1991
34. Z. Bohte, *Numerično reševanje nelinearnih enačb*, 1993
36. I. Kuščer, A. Kodre, *Matematika v fiziki in tehniki*, 1994, 2006, 2017
39. J. Rakovec, T. Vrhovec, *Osnove meteorologije za naravoslovce in tehnike*, 1998, 2000, 2007, 2017
41. S. Pahor, *Uvod v ravnovesno statistično fiziko*, 2001

42. E. Zakrajšek, *Matematično modeliranje*, 2004
43. F. Križanič, *Parcialne diferencialne enačbe*, 2004
44. J. Kozak, *Numerična analiza*, 2008
45. J. Grasselli, *Enciklopedija števil*, 2008
46. S. Širca, M. Horvat, *Računske metode za fizike*, 2010, 2011
47. G. Planinšič, *Didaktika fizike – Aktivno učenje ob poskusih, I. Mehanika in termodinamika*, 2010, 2011
48. G. Schilling, L. L. Christensen, *Oči zazrte v nebo: 400 let odkritij s teleskopi*, 2011
49. A. Čadež, *Teorija gravitacije*, 2011, 2018
50. B. Magajna, *Linearna algebra, metrični prostor in funkcije več spremenljivk*, 2011, 2014
51. R. Podgornik, A. Vilfan, *Elektromagnetno polje*, 2012, 2014
52. B. Plestenjak, *Razširjen uvod v numerične metode*, 2015
53. S. Širca, *Verjetnost v fiziki*, 2016
54. A. Likar, *Osnove fizikalnih merjenj*, 2017
55. B. Magajna, *Uvod v diferencialne enačbe, kompleksno in Fourierovo analizo*, 2018

MATEMATIKA – FIZIKA
Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij

Izdajajo: Fakulteta za matematiko in fiziko
Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
DMFA – založništvo

Založilo: DMFA – založništvo, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana
`http://www.dmfa-zaloznistvo.si`

Odgovorni urednik Simon Širca

55.

Bojan Magajna

UVOD V DIFERENCIALNE ENAČBE, KOMPLEKSNO IN FOURIEROVO ANALIZO

Knjiga je bila strokovno pregledana
Jezikovni pregled Grega Rihtar
Tehnični urednik Matjaž Zaveršnik

Natisnila tiskarna NONPAREL v nakladi 200 izvodov
Ljubljana 2018

Cena: 22,00 EUR

Bojan Magajna je doktor matematičnih znanosti, zaposlen kot redni profesor na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani.