Algeberska topologija
Zapiski vaj

2023/24

Povzetek

Dokument vsebuje naloge iz predmeta Algeberska topologija in njihove rešitve. Predmet je bil izveden v okviru študija prvega letnika magistrskega študija matematike na FNM.

Kazalo

1 Uvod - vaje za ponovitev

1.1 Ponovitev grup

Definicija 1: Naj bo G neprazna množica in $\circ : G \times G \to G$ binarna operacija na G. Pravimo, da je G grupa, če velja:

i) $\forall x, y \in G: \ x \circ y \in G$

ii) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \ \forall x, y, z \in G$

iii) $\exists e \in G \ \forall x \in G : x \circ e = e \circ x = x$

iv) $\forall x \in G \ \exists y \in G : x \circ y = y \circ x = e$

Pravimo, da je G Abelova grupa, če poleg prej navedenih pogojev velja še: $\forall x, y \in G : x \circ y = y \circ x$.

Naloga 1. *Naj bo $G = (1, \infty)$ in $x \circ y = xy - x - y + 2$. Pokaži, da je G grupa.*

Rešitev: Treba je preveriti ali G zadošča pogojem grupe.

i) Naj bosta $x, y \in G$ poljubna in računamo:

$$\begin{aligned} x \circ y = xy - x - y + 2 &= x(y-1) - y + 2 = x(y-1) - (y-1) + 1 \\ &= (x-1)(y-1) + 1 > 1 \end{aligned}$$

Sledi torej, da je tudi $x \circ y \in G$.

ii) Naj bodo $x, y, z \in G$ poljubni.

- $$\begin{aligned} (x \circ y) \circ z &= (xy - x - y + 2) \circ z = (xy - x - y + 2)z - (xy - x - y + 2) - z + 2 \\ &= xyz - xz - yz + 2z - xy + x + y - 2 - z + 2 = xyz - xy - yz - xz + x + y + z \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x \circ (y \circ z) &= x(y \circ z) - x - (y \circ z) + 2 = x(yz - y - z + 2) - x - (yz - y - z + 2) + 2 \\ &= xyz - xy - xz + 2x - x - yz + y + z - 2 + 2 = xyz - xy - xz - yz + x + y + z \end{aligned}$$

Sledi $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

iii) Naj bo $x \in G$ poljuben. $x \circ e = xe - x - e + 2 = x$, torej je $(x-1)e = 2x - 2$ oz. $e = \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$. Trdimo torej, da je $e = 2$ iskana enota. Preverimo: $2 \circ x = 2x - x - 2 + 2 = x$. Enota je torej res 2.

iv) Naj bo $x \in G$ poljuben. Če zanj obstaja inverz y, potem velja $x \circ y = e = 2$.

$$xy - x - y + 2 = 2 \iff xy - x - y = 0 \iff x = y(x-1) \iff y = \frac{x}{x-1}$$

Sedaj vstavimo ta y v $y \circ x$:

$$\begin{aligned} y \circ x = \frac{x}{x-1} \circ x &= \frac{x^2}{x-1} - \frac{x}{x-1} - x + 2 = \frac{x^2 - x - x(x-1) + 2(x-1)}{x-1} \\ &= \frac{x^2 - x - x^2 + x + 2x - 2}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} = 2 \end{aligned}$$

Očitno velja tudi $x \circ y = y \circ x \ \forall x, y \in G$, torej je G celo Abelova grupa.

Naloga 2. *Naj bo $(G, \cdot)$ grupa. $\forall x, y \in G$ dokaži:*

a) $(x^{-1})^{-1} = x$

b) $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$

c) $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$

Rešitev:

a) $(x^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1} \cdot x^{-1} \cdot x = e \cdot x = x$

b) Ker je
$x^n \cdot (x^{-1})^n = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n} \cdot \underbrace{x^{-1} \cdot \ldots \cdot x^{-1}}_{n} = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n-1} \cdot e \cdot \underbrace{x^{-1} \cdot \ldots \cdot x^{-1}}_{n-1} = e$, je
$(x^n)^{-1} = (x^n)^{-1} \cdot x^n \cdot (x^{-1})^n = e \cdot (x^{-1})^n = (x^{-1})^n$

c) $(x \cdot y)^{-1} = (x \cdot y)^{-1} \cdot (x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = e \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = y^{-1} \cdot x^{-1}$

Definicija 2:

- Red elementa $g \in G$: $|g| = red(g)$ je enak naravnemu številu $n \in \mathbb{N}$, če:
  - $g^n = e$
  - $\forall m < n : g^m \neq e$

  Če tak $n \in \mathbb{N}$ ne obstaja, pravimo, da je $red(g) = \infty$.

- Pravimo, da je grupa G ciklična, če je generirana z enim samim elementom: $G = \langle g \rangle$, torej $\forall x \in g \ \exists n \in \mathbb{Z} : x = g^n$.

Naloga 3. *Dokaži, da je vsaka ciklična grupa Abelova.*

Rešitev: Naj bo $G = \langle g \rangle$ ciklična grupa in $x, y \in G$ neka poljubna elementa.
Potem $\exists m, n \in \mathbb{Z} : x = g^n, y = g^m$. Sledi:
$xy = g^n g^m = g^{(n+m)} = g^{(m+n)} = g^m g^n = yx$

1.2 Ponovitev izomorfizmov grup

Definicija 3: Naj bosta $(G, \cdot)$ in $(\acute{G}, *)$ grupi in $\varphi : G \to \acute{G}$ preslikava med njima. Pravimo, da je φ homomorfizem grup G in $\acute{G}$, če velja:
$\forall x, y \in G : \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) * \varphi(y)$. Če je φ poleg tega bijektiven, mu pravimo izomorfizem. Če je φ izomorfizem in $G = \acute{G}$, pravimo, da je φ avtomorfizem.

Naloga 4. *Naj bosta $(G, \cdot)$ in $(\acute{G}, *)$ grupi in naj bo $\varphi : G \to \acute{G}$ homomorfizem med njima. Dokaži:*

a) $\varphi(e) = \acute{e}$

b) $\forall xinG, \ \forall n \in \mathbb{N} : \varphi(x^n) = (\varphi(x))^n$

c) $\forall x \in G : \varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$

Rešitev:

a) $\acute{e} = \varphi(e) * (\varphi(e))^{-1} = \varphi(e \cdot e) * (\varphi(e))^{-1} = \varphi(e) * \varphi(e) * (\varphi(e))^{-1} = \varphi(e)$

b) $\phi(x^n) = \phi(\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n}) = \underbrace{\phi(x) \cdot \phi(x) \cdot \ldots \cdot \phi(x)}_{n} = (\phi(x))^n$

c) $(\varphi(x))^{-1} * \acute{e} = (\varphi(x))^{-1} * \varphi(e) = (\varphi(x))^{-1} * \varphi(x \cdot x^{-1}) =$
$(\varphi(x))^{-1} * \varphi(x) * \varphi(x^{-1}) = \acute{e} * \varphi(x^{-1}) = \varphi(x^{-1})$

Naloga 5. *Naj bo G grupa in $\varphi : G \to G$ s predpisom $\varphi(g) = g^{-1}$. Pokaži:*

$$G \text{ je Abelova} \iff \varphi \text{ je izomorfizem}$$

Rešitev:

$\Rightarrow)$: Denimo, da je G Abelova grupa. Vidimo, da je φ homomorfizem, saj za poljubna $x, y \in G$ velja $\varphi(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = \varphi(x)\varphi(y)$. Denimo sedaj, da $\exists x \in Ker(\varphi)$. Potem je $e = \varphi(x) = x^{-1}$, torej je $x = e$. Posledično je $Ker(\varphi) = \{e\}$, torej je φ injektiven. Ker za $\forall x \in G \ \exists \ y \in G : y = x^{-1}$ in je posledično $\varphi(y) = x$, sledi, da je φ tudi surjektiven. Sledi, da je φ bijektiven, torej je izomorfizem.

$\Leftarrow)$: Denimo, da je φ izomorfizem. Potem je $\varphi(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = \varphi(y)\varphi(x) = \varphi(yx)$. Sledi, da je $xy = yx \ \forall x, y \in G$, torej je G Abelova grupa.

1.3 Ponovitev metričnih prostorov

Definicija 4: Naj bo X množica in $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Pravimo, da je d metrika na X, če:

- $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0 \wedge d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall x, y, z \in X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Označimo: $K_r = \{y \in X;\ d(x, y) < r\}$

Naloga 6. *Naj bo $X = \mathbb{R}^2$ in $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |e^{x_1} - e^{x_2}| + |\arctan(y_1) - \arctan(y_2)|$ Preveri, ali je d metrika na X*

Rešitev:

i) Najprej vidimo, da je očitno $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \geq 0 \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Dodatno, $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0 \iff |e^{x_1} - e^{x_2}| = 0 \wedge |\arctan(y_1) - \arctan(y_2)| = 0 \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \iff (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

ii) Ker je $|e^{x_1} - e^{x_2}| = |e^{x_2} - e^{x_1}| \wedge |\arctan(y_1) - \arctan(y_2)| = |\arctan(y_2) - \arctan(y_1)|$ za poljubne $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, sledi $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d((y_1, y_2), (x_1, x_2))$

iii)

$$\begin{aligned}
&d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |e^{x_1} - e^{x_2}| + |\arctan(y_1) - \arctan(y_2)| \\
&= |e^{x_1} - e^{x_3} + e^{x_3} - e^{x_2}| + |\arctan(y_1) - \arctan(y_3) + \arctan(y_3) - \arctan(y_2)| \\
&\leq |e^{x_1} - e^{x_3}| + |e^{x_3} - e^{x_2}| + |\arctan(y_1) - \arctan(y_3)| + |\arctan(y_3) - \arctan(y_2)| \\
&= d((x_1,y_1),(x_3,y_3)) + d((x_3,y_3),(x_2,y_2))
\end{aligned}$$

Na kratko: $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3) \in \mathbb{R}^2:\ d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \leq d((x_1,y_1),(x_3,y_3)) + d((x_3,y_3),(x_2,y_2))$

Definicija 5: Naj bosta (X,d) in $(Y,\acute{d})$ metrična prostora. Pravimo, da je $f: X \to Y$ zvezna v $a \in X$, če:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0; \forall x \in X : d(x,a) < \delta \Rightarrow \acute{d}(f(x), f(a)) < \epsilon$$

Pravimo, da je f zvezna na X, če je zvezna $\forall a \in X$. Pravimo, da je f homeomorfizem, če je zvezna bijekcija z zveznim inverzom.

Naloga 7. *Naj bosta $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x,y > 0\}$ in $Y = K_1$. Ali je $X \approx Y$?*

Rešitev: Denimo, da je $X \approx Y$. Potem lahko sestavimo homeomorfizem $f: X \to Y$. Da to naredimo, bomo sestavili več homeomorfizmov, najprej iz X v nek drugi prostor, Z_1, nato iz tega prostora v naslednjega, Z_2, itd., dokler ne pridemo do Y. Vzemimo $Z_1 = (0,2)^2$ Potem je $f_1 : X \to Z_1$ s predpisom $f_1(x,y) = (\frac{4}{\pi}\arctan(x), \frac{4}{\pi}\arctan(y))$. Ta je očitno zvezna bijekcija in tudi inverz je zvezen. Za Z_2 nato izberemo kar $Z_2 = (-1,1)^2$, ki je v resnici samo togi premik Z_1. Potem je primeren $f_2 : Z_1 \to Z_2$ s predpisom $f_2(x,y) = (x-1, y-1)$. Tudi ta funkcija je očitno homeomorfizem. Preostane nam samo še preslikava $f_3 : Z_2 \to Y$. Za to določimo predpis $f_3(x,y) = (x, y\sqrt{1-x^2})$. Ta funkcija je dobro definirana, zvezna bijekcija z zveznim inverzom, torej homeomorfizem. Pišemo $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ in ker je kompozitum homeomorfizmov tudi sam homeomorfizem, vemo, da je f homeomorfizem, torej je res $X \approx Y$.

1.4 Ponovitev topoloških prostorov

Definicija 6: Naj bo X neprazna množica in $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Pravimo, da je $\mathcal{T}$ topologija na X, če velja:

a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

b) $U_\lambda \in \mathcal{T}\ \forall \lambda \in \Lambda \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{T}$

c) $\forall U, V \in \mathcal{T} : U \cap V \in \mathcal{T}$

Naloga 8. *Naj bo $X = \mathbb{R}$ in $\mathcal{T} = \{(r,\infty); r \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Pokaži, da je $\mathcal{T}$ topologija na X.*

Rešitev:

a) Prvi pogoj velja očitno, po definiciji $\mathcal{T}$.

b) Preverimo vse možnosti:

- $\bigcup_{r\in\mathbb{R}}(r,\infty)=\mathbb{R}\in\mathcal{T}$
- $U_\lambda=\emptyset\ \forall\lambda\in\Lambda\Rightarrow\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda=\emptyset\in\mathcal{T}$
- $\exists\lambda_0\in\Lambda;U_{\lambda_0}=\mathbb{R}\Rightarrow\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda=\mathbb{R}\in\mathcal{T}$
- $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(r_\lambda,\infty)=\begin{cases}(\inf_{\lambda\in\Lambda}(r_\lambda),\infty) & ;\ \exists\inf_{\lambda\in\Lambda}(r_\lambda)\\ \mathbb{R} & ;\ \text{sicer}\end{cases}$ V obeh primerih je rezultat element iz $\mathcal{T}$.

c)
- $U=\emptyset\vee V=\emptyset\Rightarrow U\cap V=\emptyset\in\mathcal{T}$
- $U=\mathbb{R}\wedge V\neq\emptyset\Rightarrow U\cap V=V\in\mathcal{T}$
- $V=\mathbb{R}\wedge U\neq\emptyset\Rightarrow U\cap V=U\in\mathcal{T}$
- $U\notin\{\emptyset,\mathbb{R}\}\wedge V\notin\{\emptyset,\mathbb{R}\}\Rightarrow U\cap V=(r,\infty)\cap(q,\infty)=(\max(r,q),\infty)\in\mathcal{T}$

Torej je $\mathcal{T}$ res topologija na X.

Definicija 7: Pravimo, da je $\mathcal{B}$ baza za topologijo $\mathcal{T}$, če velja:

1. $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{T}$
2. $\forall U\in\mathcal{T}\ \exists\mathcal{C}\subseteq\mathcal{B};U=\bigcup_{C\in\mathcal{C}}C$

Definicija 8: Funkcija $f:(x,\mathcal{T})\to(Y,\acute{\mathcal{T}})$ je zvezna, če $\forall U\in\acute{\mathcal{T}}:f^{-1}(U)\in\mathcal{T}$

Naloga 9. *Naj bo $f:(\mathbb{R},\mathcal{T}_e)\to(\mathbb{R},\mathcal{T}_e)$ in $g:(\mathbb{R},\mathcal{T}_L)\to(\mathbb{R},\mathcal{T}_D)$ s predpisoma $f(x)=2x-1$ in $g(x)=x$. Pri tem sta $\mathcal{B}_D=\{(a,b];a,b\in\mathbb{R},a<b\}$ in $\mathcal{B}_L=\{[a,b);a,b\in\mathbb{R},a<b\}$. Ali sta f in g zvezni?*

Rešitev:

f: Najprej poračunamo predpis za f^{-1}. Ta se glasi $f^{-1}(y)=\frac{y+1}{2}$. Naj bo sedaj interval $(a,b)\in\mathcal{B}_e$ poljuben interval iz evklidske baze. tedaj je $f^{-1}((a,b))=(\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2})\in\mathcal{B}_e$, torej je f zvezna.

g: $g(x)=x=g^{-1}(x)$. Naj bo $(a,b]\in\mathcal{B}_D$. Potem je $g^{-1}((a,b])=(a,b]\notin\mathcal{B}_L$ Še več, ne obstaja nobena družina množic iz $\mathcal{B}_L$, katerih unija bi bila $(a,b]$. Sledi, da g ni zvezna.