• $y' = f(x,y)$:

$f(tx,ty) = f(x,y)\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow u(x) = \dfrac{y}{x}\ \&\ y' = u'x + u$

Bernoullijeva $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y^{\alpha}$; $\alpha \neq 1 \Rightarrow$ delimo z $y^{\alpha}, z(x) = y^{1-\alpha}(x)\ \&\ z'(x) = y'(x)y^{-\alpha}(x)$

Ricattijeva $y'(x) = a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c(x)$; $\alpha \neq 1 \Rightarrow$ najdi eno y_p & $y(x) = y_p(x) + u(x)$

V splošnih enačbah 1. reda izrazi y', če lahko, sicer pa smiselno parametriziraj.

• $F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}) = 0$:

$F(x,y',\ldots,y^{(n)}) = F(tx,ty,ty',\ldots,ty^{(n)})\forall t \in \mathbb{R};$ Uporabimo $z(x) = \dfrac{y'(x)}{y(x)}$, rešimo za $z(x)$

• Eksistenčna izreka :

Lokalni : $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2,\ a,b > 0, I = [x_0 - a, x_0 + a], J = [y_0 - b, y_0 + b]$. Če je $f : I \times J \to \mathbb{R}$ zvezna & $\exists M > 0;\ \forall y_1,y_2 \in J|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < M|y_1 - y_2|,\ \exists!$ rešitev $y' = f(x,y); y(x_0) = y_0$ na okolici x_0.

Globalni : $(x_0,y_0) \in (a,b) \times \mathbb{R}$. Če je $f : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna & $\exists k : (a,b) \to \mathbb{R}; \displaystyle\int_a^b k(x)dx < \infty;$ & $\forall y_1,y_2 \in \mathbb{R},\ \forall x \in (a,b) : |f(x,y_1) - f(x,y_2)| < k(x)|y_1 - y_2|,\ \exists!$ rešitev $y' = f(x,y); y(x_0) = y_0$ na (a,b).

• Jordanova forma :

$A \in M_{n\times n}, p(\lambda) = det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}\ldots(\lambda - \lambda_s)^{k_s}$

$\forall \lambda_i J_i \in M_{k_i \times k_i}$ št. celic $= dim(Ker(A - \lambda_i I))$. Če je$(A - \lambda_i I)^k = 0$ je največji blok v J_i $k \times k$.

Za $n \leq 3$: če je $\lambda_i = a + ib$, je $J_i = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, če je realna (za poljuben n) pa $J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$

Lastni vektorji za λ_i : Določi bazo za $A - \lambda_i I$, dopolni do baze $(A - \lambda_i)^2$ itd. do k.

vsi l. vektorji so stolpci matrike P. $A = PJP^{-1}$

$e^{tJ} = diag(e^{tJ_1,\ldots,e^{tJ_s}}); e^{tJ_i} = e^{\lambda_i t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \ldots \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2}\ldots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots\ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ če je $\lambda_i \in \mathbb{R}$ in $e^{tJ_{a\pm ib}} = e^{at}\begin{bmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}$

• Sistemi LDE s konstantnimi koeficienti : $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$

Najprej naredimo Jordanov razcep A. $\vec{x}_h(t) = Pe^{tJ}P^{-1}\vec{c};\ \vec{c} \in \mathbb{R}^n$

$\vec{d}(t) = \displaystyle\int e^{-tJ}P^{-1}\vec{f}(t)dt;\ \vec{x}_p(t) = Pe^{tJ}\vec{d}(t)\ \&\ \vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t)$

• LDE drugega reda : $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d(x)$

V H delu eno rešitev y_1 uganemo, drugo lin. neodv. pa dobimo z : $\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}$

V P delu uporabimo variacijo konstante

• LDE višjega reda s konst. koef. : $a_n y^{(n)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$

H del z nastavkom : $y(x) = e^{\lambda x}$ dobimo karakteristični polinom z ničlami $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$

Če je λ_i $k-$kratna *realna* ničla k rešitvi prispeva člene $C_1e^{\lambda_i x} + C_2xe^{\lambda_i x} + \ldots + C_kx^{k-1}e^{\lambda_i x}$

Če je $\lambda_i = a \pm ib$ $k-$kratna *kompleksna* ničla k rešitvi prispeva člene

$e^{ax}(A_1\cos(bx) + A_2\sin(bx) + A_3x\cos(bx) + A_4x\sin(bx) + \ldots + A_{2k-1}x^{k-1}\cos(bx) + A_{2k}x^{k-1}\sin(bx))$

Če je $f(x) = P(x)$ polinom stopnje $n : y_p(x) = R(x)x^r;$ r je krat. ničle 0 v kara. polinomu, $stP = stR$

Če je $f(x) = P(x)e^{ax}$ je $y_p(x) = R(x)x^re^{ax};$ r je krat. ničle a v kara. polinomu, $stP = stR$

Če je $f(x) = (P_1(x)\cos(bx) + P_2(x)\sin(bx))e^{ax}$ je $y_p(x) = e^{ax}x^r(R_1(x)\cos(bx) + R_2(x)\sin(bx));$

r je krat. ničle $a \pm ib$ v kara. polinomu, $st(R_1,R_2) = \max(stP_1, stP_2)$

Sicer variacija konstante

• LDE višjega reda s konst. koef. : $a_n x^n y^{(n)}(x) + \ldots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$

H del z nastavkom : $y(x) = x^\lambda$ dobimo karakteristični polinom z ničlami $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

Če je λ_i $k-$kratna *realna* ničla k rešitvi prispeva člene $C_1 x^{\lambda_i} + C_2 \ln(x) x^{\lambda_i} + \ldots + C_k \ln(x)^{k-1} x^{\lambda_i}$

Če je $\lambda_i = a \pm ib$ $k-$kratna *kompleksna* ničla k rešitvi prispeva člene

$x^a(A_1 \cos(b\ln(x)) + A_2 \sin(b\ln(x)) + \ldots + C_{2k-1}\ln(x)^{k-1}\cos(b\ln(x)) + C_{2k}\ln(x)^{k-1}\sin(b\ln(x)))$

Če je $f(x) = P(\ln(x))x^\alpha$ je $y_p(x) = Q(\ln(x))\ln(x)^k x^\alpha;$ k je krat. ničle α v kara. polinomu, $stP = stQ$

Sicer variacija konstante

• Variacijski račun: $F(y) = \displaystyle\int_a^b \varphi(x, y(x), y'(x))dx;\ \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ \&\ y : [a,b] \to \mathbb{R}, y(a) = A, y(b) = B$

V F nastopajo vsi členi: Iščemo ekstremalo y preko $\varphi_y = \dfrac{\partial}{\partial x}(\varphi_{y'})$. Da je ekstrem, preverimo posebej.

Če imamo podan samo en robni pogoj, npr. $y(a) = A :$ $\varphi_{y'}(b, y(b), y'(b)) = 0$

Če ni podan noben robni pogoj : $\varphi_{y'}(a, y(a), y'(a)) = 0\ \&\ \varphi_{y'}(b, y(b), y'(b)) = 0$

Če je : $\varphi(x, y')$ rešujemo $\varphi_{y'} = C$ če je : $\varphi(y, y')$ pa $\varphi - y'\varphi_{y'} = C$

Če imamo robna pogoja in še pogoj : $\Phi(y) = \displaystyle\int_a^b \zeta(x, y(x), y'(x))dx = l \in \mathbb{R}$ rešujemo problem

$G(y) = F(y) - \lambda\Phi(y)$ s pogoji $y(a) = A, y(b) = B\ \&\ \Phi(y) = l$

• DE v kompleksnem: $w''(z) + p(z)w'(z) + q(z)w(z) = 0$

p in q analitični v z_0 ju razvijemo po Taylorju in : $w(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$, določimo lin. neodv. w_1 in w_2

z_0 pol p stopnje največ prve stopnje in za q največ druge : $w(z) = z^\rho \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$

ρ_1, ρ_2 določimo tako, da primerjamo člene (nizke potence). Če $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z} :$ $w_1(z) = z^{\rho_1}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$

$\&$ $w_2(z) = z^{\rho_2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} d_k(z - z_0)^k$. Če $\rho_1 = \rho_2 : w_1(z) = z^{\rho_1}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$.

Sicer za $Re(\rho_1) \geq Re(\rho_2)$ uporabimo nastavka iz 1. in če w_1 in w_2 nista lin. neodv. za w_2 uporabimo :

$w_2(z) = w_1(z)\ln(z) + z^{\rho_2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} d_k(z - z_0)^k$. Rešitev je (v vsakem primeru) $w(z) = Aw_1(z) + Bw_2(z)$

• Besselova DE $x^2 w'' + xw' + (x^2 - n^2)w = 0$

Uporabimo nastavek $w(x) = x^m \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ in najprej določimo m_1 in m_2(kot pri kompleksnih DE)

Če je $n \notin \mathbb{N}_0$ sta $J_n(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!\Gamma(i+n+1)}(\frac{x}{2})^{2i+n}$ & $J_{(-n)}(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!\Gamma(i-n+1)}(\frac{x}{2})^{2i-n}$

linearno neodvisni rešitvi, in splošna rešitev je : $w(x) = AJ_n(x) + BJ_{(-n)}(x)$

Če je pa $n \in \mathbb{N}_0$ pa vzamemo $w_1 = J_n$ in $w_2(x) = w_1(x)\ln(x) + \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m}$ ter uporabimo

determinanto wronskega, da določimo w_2 (koef. a_k ne računamo eksplicitno).

V tem primeru je splošna rešitev : $w(x) = AJ_n(x) + Bw_2(x)$

Velja tudi: $J_n(x) = \dfrac{2(\frac{x}{2})^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+\frac{1}{2})}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin(t))\cos^{2n}(t)dt$