Analiza 2b Episode II: The mnogoterosti strike back
Predavanja

Nek študent FMF

18.2.2019

Povzetek

Ta kreacija, ki jo trenutno berete, dragi bralec, je skupek prepisanih zapiskov študijskega predmeta Analiza 2b s perspektive nekega študenta 2. letnika matematike na FMF. Uporaba tega dokumenta za kakršnikoli namene je na lastno odgovornost.

1 Podmnogoterosti v $\mathbb{R}^n$

1.1 Uvod

Opomba 1: Pri tem predmetu ne bomo posebej definirali kaj so mnogoterosti, zanimale nas bodo samo podmnogoterosti, ki so gladke, torej so vsaj $\mathscr{C}^1$.

Definicija 1: Naj bo Ω odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$ in naj bo $a \in \Omega$. Naj bo $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ preslikava, ki je vsaj $\mathscr{C}^1$. *Rang* preslikave F v točki a je rang odvoda preslikave F v točki a oziroma:

$$rang(F)(a) = rang(DF)(a)$$

F ima rang k na Ω, če ima rang k v vsaki točki $a \in \Omega$.

Definicija 2: Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazna množica. M je (gladka) *podmnogoterost* razsežnosti/dimenzije k v $\mathbb{R}^n$, če za vsak $x_0 \in M$ obstajajo taka odprta okolica U točke x_0 in $\mathscr{C}^1$ funkcije $F_1, \ldots, F_{n-k}$ $(0 \leq k \leq n)$ na U, da ima preslikava $F = (F_1, \ldots, F_{n-k}) : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ maksimalen možen rang (torej $n - k$) in da velja:

$$M \cap U = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$$

- $F_1, \ldots, F_{n-k}$ so lokalne definicijske funkcije M v okolici točke x_0
- $n - k$ je *kodimenzija* podmnogoterosti M
- Če je $k = n - 1$ ali $n - k = 1$ je M *hiperploskev*
- Če je $k = 1$ je M krivulja, če je $k = 2$ pa je M ploskev
- Vsaka odprta množica v $\mathbb{R}^n$ je podmnogoterost dimenzije n.

Zgled 1:
$n = 3, k = 2, n - k = 1$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Definiramo funkcijo F:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$(x, y, z) \mapsto F(x, y, z)$$

tedaj velja:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$$

$$(DF)(x, y, z) = 0 \iff x = y = z = 0$$

Iz definicije množice A pa vemo, da $(0, 0, 0) \notin A$, torej je F (globalna) definicijska funkcija za A.

Zgled 2:
$n = 3, k = 1, n - k = 2$

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1; x + y + z = 0\}$$

Za N definirajmo definicijski funkciji F in G:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \text{ in } G(x, y, z) = x + y + z = 0$$

Definirajmo novo funkcijo Φ, ki ju obe poveže:

$$\Phi(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (F(x, y, z), G(x, y, z))$$

Poglejmo si odvod $D\Phi$:

$$D\Phi(x, y, z) = \begin{bmatrix} \text{2x} & \text{2y} & \text{2z} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$rang(D\Phi)(x, y, z) \leq 1 :$$

Velja:

$$rang(D\Phi)(x, y, z) \neq 0$$

, zaradi neničelne druge vrste matrike.

$$rang(D\Phi)(x, y, z) \leq 1 \iff (2x, 2y, 2z) = \lambda \cdot (1, 1, 1)$$

za nek $\lambda \in \mathbb{R}$. To pa velja natanko tedaj, ko

$$x = y = z = \alpha$$

Ker $x + y + z = 0 \Rightarrow \alpha = 0$. Poleg tega pa velja:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow 3 \cdot \alpha^2 = 1$$

Pridemo v protislovje, saj $3 \cdot 0 \neq 1$ Torej ima ta preslikava rang 2 v okolici N (saj je 2 edina preostala opcija).

Zgled 3: Poglejmo si še primer v množici $\mathbb{R}^{n^2} = \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \times n$ realnih matrik.

$$X \in \mathbb{R}^{n \times n}, F(X) = det(X) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{n \times n})$$

$$det(X) \neq 0$$

Množica

$$\{X \in \mathbb{R}^{n \times n}, det(X) > 0 \vee det(X) < 0\} = F^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

je odprta v $\mathbb{R}^{n \times n}$. Poleg tega je tudi vredno omeniti, da je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ odprta v $\mathbb{R}$. Poglejmo si splošno linearno grupo:

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid det(X) \neq 0\} = M$$

Ta grupa je podmnogoterost dimenzije n^2.

Poglejmo še posebno linearno grupo:

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid det(X) = 1\}$$

Ali je to podmnogoterost dimenzije $n^2 - 1$?
Definirajmo definicijsko funkcijo $F(X)$:

$$F(X) - 1 = 0; F : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$$

Naj bo $X \in SL_n(\mathbb{R})$ matrika oblike

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

Kaj je $\frac{\partial F}{\partial x_{ij}}$?
Poglejmo primer ko je $n = 2$:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

$$F(X) = x_{11} \cdot x_{22} - x_{21} \cdot x_{12}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_{22}} = x_{11}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_{11}} = x_{22}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_{12}} = -x_{21}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_{21}} = -x_{12}$$

Velja:

$$rang(F) = 0 \vee X = 0$$

Razpišimo zdaj formulo za splošni X s pomočjo razvoja po prvi vrstici:

$$F(X) = x_{11} \cdot \tilde{X}_{11} - x_{12} \cdot \tilde{X}_{12} + \dots$$

Torej

$$\frac{\partial F}{\partial x_{ij}} = (-1)^{i+j} \cdot \tilde{X}_{ij}$$

Velja:

$$rang(F)(A) = 0 \Rightarrow det(A) = 0 \Rightarrow A \notin SL_n(\mathbb{R})$$

Dobimo protislovje iz katerega sledi:

$$rang(F) = 1 \text{ v okolici } SL_n(\mathbb{R})$$

Trditev 1. *Neprazna podmnožica $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je podmnogoterost dimenzije k ($0 < k < n$) natanko tedaj, ko za vsako točko $x_0 \in M$ obstaja okolica U in permutacija koordinat $\sigma : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$, ter odprta množica $D \subseteq \mathbb{R}^k$, ki je okolica točke $(x^0_{\sigma(1)}, \ldots, x^0_{\sigma(k)})$, ter $\mathscr{C}^1$ preslikava $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$, da je $U = D \times \Omega$ in $M \cap U = \{x \in U \mid (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}, \varphi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)})) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}, \varphi_1(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}), \varphi_2(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}), \ldots, \varphi_{n-k}(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}))\}$.*

Opomba 2: *Lokalno je M graf preslikave iz $D \subseteq \mathbb{R}^k$ v $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$*

Dokaz. Najprej se bomo lotili dokazovanja z leve proti desni: V tem primeru dokazujemo posledico posledice izreka o implicitni preslikavi:

$$M \cap \tilde{U} = \{x \in \tilde{U} \mid F(x) = 0\}; F = (F_1, \ldots, f_{n-k}); rang(F) = n-k \iff rang(DF) = n-k$$

To (baje) zadošča.
Dokažimo zdaj še v drugo smer:
Naj bo $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-k})$ in $M \cap U = \{(x, \varphi(x)) \mid x = (x_1, \ldots, x_k) \in D \subseteq \mathbb{R}^k, \varphi : D \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-k}\}$

$$F_1(x_1, \ldots, x_n) = x_{k+1} - \varphi_1(x_1, \ldots, x_k)$$

$$F_2(x_1, \ldots, x_n) = x_{k+2} - \varphi_2(x_1, \ldots, x_k)$$

$$\vdots$$

$$F_{n-k}(x_1, \ldots, x_n) == x_n - \varphi_{n-k}(x_1, \ldots, x_k)$$

Iz tega sledi:

$$M \cap U = \{x \in U \mid F_1 = \ldots = F_{n-k} = 0\}$$

$$(DF)(x) = \begin{bmatrix} -D\varphi(x_1, \ldots, x_k) & I \end{bmatrix}$$

$rang(DF) = n - k$ □

$F = 0$: implicitno podajanje podmnogoterosti kot graf: eksplicitno podajanje podmnogoterosti

Trditev 2. *Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazna množica. M je podmnogoterost dimenzije k ($0 < k < n$) natanko tedaj, ko za vsak $x_0 \in M$ obstaja taka odprta okolica U točke x_0 v $\mathbb{R}^n$ in difeomorfizem $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to V \subseteq \mathbb{R}^n$, da velja, da je $\Phi(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k})$ Pravimo tudi, da smo M lokalno izravnali.*

Dokaz. Najprej dokažimo iz leve proti desni: Naj bo M podmnogoterost v $\mathbb{R}^n$. Potem je lokanlo graf nad $D \subseteq \mathbb{R}^k$ in $M \cap U = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in D\} \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Naj bo

$$\Phi(x, y) = (x, y - \varphi(x)) = (x_1, \ldots, x_k, y_1 - \varphi_1(x), \ldots, y_{n-k} - \varphi_{n-k}(x))$$

potem je inverz:

$$\Phi^{-1}(x, z) = (x, z + \varphi(x))$$

Poglejmo odvod:

$$D\Phi(x, y) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D\varphi & I \end{bmatrix}, det(D\Phi) \neq 0$$

velja:

$$\Phi(M \cap U) = \{(x, 0) \mid x \in D \subseteq \mathbb{R}^k\}$$

To (baje) zadošča. Dokažimo zdaj še v drugo smer:

$$\Phi : U \to V \text{ je difeomorfizem.}$$

$$\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n);\ rang(D\Phi) = n \text{ v vsaki točki.}$$

Velja:

$$\Phi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) \iff \Phi_{k+1} = \ldots = \Phi_n = 0 \text{ na } M \cap U$$

Imamo torej $n - k$ funkcij, kjer je $rang(\Phi_{k+1}, \ldots, \Phi_n) = n - k$, saj je Φ difeomorfizem. □

Trditev 3. *Parametrično podajanje podmnogoterosti:*
Naj bo $M \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}^n$. M je gladka podmnogoterost dimenzije $k (0 \leq k \leq n)$, če za vsako točko $x_0 \in M$ obstaja taka okolica U točke x_0, ter odprta množica $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ in injekcija $\Psi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \xrightarrow{\mathscr{C}^1} \mathbb{R}^n$ ranga k, da velja:

$$\Psi_*(\Omega) = M \cap U$$

Dokaz. Najprej bomo dokazali implikacijo v desno ($\Rightarrow$):
M je lokalno graf, torej $M \cap U = \{(x', \varphi(x')) \mid x' \in D \subseteq \mathbb{R}^k; \varphi : D \xrightarrow{\mathscr{C}^1} V\}$. Določimo preslikavo $\Psi(x') = (x', \varphi(x')); \Psi : D \to M \cap U$ in poglejmo njen rang:

$$D\Psi = \begin{bmatrix} I \\ D\varphi \end{bmatrix}, rang(D\Psi) = rang(\Psi) = k$$

S tem se konča dokaz desne implikacije.
Poglejmo zdaj še dokaz implikacije v levo ($\Leftarrow$):
Naj bo $\Psi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \xrightarrow{\mathscr{C}^1} \mathbb{R}^n$ preslikava ranga k in naj bo $\Psi(t_0) = x_0$ ter $\Psi_*(\Omega) = M \cap U$. $\Psi(t) = (\Psi_1(t), \ldots, \Psi_n(t))$ in $rang(D\Psi) = k$.
Poglejmo si $D\Psi$:

$$D\Psi = \begin{bmatrix} D\Psi_1 \\ \vdots \\ D\Psi_n \end{bmatrix} k \times n \text{ matrika}$$

Naredimo permutacijo koordinat v $\mathbb{R}^n$, da v okolici točke t_0 velja:

$$D\Psi = \begin{bmatrix} D\Psi_1 \\ \vdots \\ D\Psi_k \\ D\Psi_{k+1} \\ \vdots \\ D\Psi_n \end{bmatrix}(t), \text{ da je matrika } \begin{bmatrix} D\Psi_1 \\ \vdots \\ D\Psi_k \end{bmatrix}(t) \text{ obrnljiva.}$$

Zapišemo $\Psi(t) = (\tilde{\Psi}_1(t), \tilde{\Psi}_2(t)) = ((\Psi_1, \ldots, \Psi_k), (\Psi_{k+1}, \ldots, \Psi_n))(t)$

$$t \mapsto \tilde{\Psi}_1(t) \text{ v okolici } t_0$$

Odvod je obrnljiv, torej je v okolici točke t_0 difeomorfizem na sliko $(Im(\tilde{\Psi}_1))$. $\tilde{\Psi}_1(t_0) = {}^1x_0$ ima $\mathscr{C}^1$ inverz. Torej:

$$\tilde{\Psi}_1(t) = {}^1x \Rightarrow t = \tilde{\Psi}_1^{-1}({}^1x)$$

Ψ v okolici t_0 je torej:

$$\Psi(t) = (\tilde{\Psi}_1(t), \tilde{\Psi}_2(t)) = ({}^1x, \tilde{\Psi}_2(\tilde{\Psi}_1^{-1}({}^1x)) = ({}^1x, \varphi({}^1x))$$

φ je $\mathscr{C}^1$ preslikava. Lokalno gledano je M graf preslikave $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$

□

1.2 Tangentni prostori na podmnogoterosti

Če gledamo $\gamma : (\alpha, \beta) = I^{interval} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n; \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ je to $\mathscr{C}^1$ preslikava. γ je »pot« v $\mathbb{R}^n$

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \ldots, \dot{\gamma}_n(t)); \text{ pri čemer je } \dot{\gamma}(t) = \frac{\partial \gamma}{\partial t} \text{ odvod po času}$$

Definicija 3:
Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^n$ podmnogoterost in naj bo $x_0 \in M$. *Tangentni prostor* na M v točko x_0 je:

$$T_{x_0}(M) = \{\dot{\gamma}(t_0) \mid \gamma : I \xrightarrow{\mathscr{C}^1} M \subseteq \mathbb{R}^n \text{ je pot in } \gamma(t_0) = x_0\}$$

Trditev 4. *Naj bo M podmnogoterost dimenzije k v $\mathbb{R}^n$ in naj bo $x_0 \in M$ ter naj bodo $F = (F_1, \ldots, F_{n-k})$ definicijske funkcije M v okolici x_0 (Pomnimo: $M \cap U = \{x_0 \in U \mid F(x_0) = 0\}, rang(F) = n - k$) Tedaj $T_{x_0}(M) = Ker(DF(x_0))$*

Dokaz. Lokalno je $M \cap U = \{(x, \varphi(x)) \mid \varphi : D \subseteq \mathbb{R}^k \xrightarrow{\mathscr{C}^1} \mathbb{R}^{n-k}\}$, torej je $F((x, \varphi(x))) = 0$ za vsak $x \in D$.
Odvajamo:

$$DF_x((x, \varphi(x))) \cdot I + DF_y((x, \varphi(x))) \cdot D\varphi = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} DF_x & DF_y \end{bmatrix}}_{=DF} \cdot \begin{bmatrix} I \\ D\varphi \end{bmatrix} = 0, \text{ torej } DF \cdot \begin{bmatrix} I \\ D\varphi \end{bmatrix} = 0 \text{ (v točki } (x, \varphi(x)))$$

$$DF(x_0, y_0) \cdot \begin{bmatrix} I \\ D\varphi(x_0) \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \underbrace{Im\left(\begin{bmatrix} I \\ D\varphi(x_0) \end{bmatrix}\right)}_{T_{(x_0, y_0)}(M)} \subseteq Ker(DF(x_0, y_0))$$

Sledi:

$$Dim(Im\left(\begin{bmatrix} I \\ D\varphi(x_0) \end{bmatrix}\right)) = k = Dim(Ker(DF(x_0, y_0))) \Rightarrow \text{sta enaka}$$

□

M podana implicitno:

$$T_{x_0}(M) = Ker(DF(x_0))$$

Trditev 5. *Naj bo $\Psi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lokalna parametrizacija M v okolici $x_0 \in M$, ranga k in naj velja $\Psi_*(\Omega) = M \cap U$. Tedaj je $T_{x_0}(M) = Im(D\Psi(t_0))$, kjer je $\Psi(t_0) = x_0$.*

Dokaz. Lahko predpostavimo, da je $\Psi = (\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2)$, kjer je $D\tilde{\Psi}_1(t_0)$ v okolici t_0 obrnljiva (Linearna sprememba koordinat). Tedaj je $M \cap U$ graf preslikave $\varphi = \tilde{\Psi}_2(\tilde{\Psi}_1^{-1})$. Torej je:

$$T_{(x_0,y_0)}(M) = T_{(^1x_0)}(M) = Im\left(\begin{bmatrix} I \\ D(\tilde{\Psi}_2 \circ \tilde{\Psi}_1^{-1})(^1x_0) \end{bmatrix} \right) = Im\left(\begin{bmatrix} I \\ D\tilde{\Psi}_2(t_0) \cdot (D\tilde{\Psi}_1^{-1})(^1x_0) \end{bmatrix} \right)$$

$$= Im\left(\begin{bmatrix} I \\ D\tilde{\Psi}_2(t_0) \cdot (D\tilde{\Psi}_1^{-1})(t_0) \end{bmatrix} \right) = Im\left(\begin{bmatrix} (D\tilde{\Psi}_1)(t_0) \\ (D\tilde{\Psi}_2)(t_0) \end{bmatrix} \right) \cdot (D\tilde{\Psi}_1^{-1})(t_0)$$

$$= Im\left(\begin{bmatrix} (D\tilde{\Psi}_1)(t_0) \\ (D\tilde{\Psi}_2)(t_0) \end{bmatrix} \right) = Im(D\Phi(t_0))$$

$\square$

Zgled 4:

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}; F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \end{bmatrix}$$

$T_{(x,y,z)}(M) = \{(X,Y,Z) \mid \langle (X,Y,Z), (x,y,z) \rangle = 0\} = \{(X,Y,Z) \mid x \cdot X + y \cdot Y + z \cdot Z = 0\}$

Za $x = y = \frac{1}{\sqrt{6}}$ in $z = -\frac{2}{\sqrt{6}}$:

$$T_{(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})}(M) = \{(X,Y,Z) \mid \frac{(X+Y-2Z)}{\sqrt{6}} = 0\} = \{(X,Y,\frac{X+Y}{2}) \mid X,Y \in \mathbb{R}^2\}$$