Projektna naloga pri predmetu Numerična analiza in izbrana poglavja iz dinamičnih sistemov

Jimmy Zakeršnik

21. 5. 2025

1 Uvod

Ta naloga je razdeljena na dva dela. V prvem delu obravnavamo razna vprašanja v povezavi s podanimi polinomi f_1, f_2, f_3, f_4 in f v spremenljivkah x_1, x_2, x_3 in x_4 s pomočjo programa Singular. Vsa koda, ki smo jo pri tem uporabili, je zbrana v datoteki »*polinomi 1.txt*«, izpis programa pa je shranjen v datoteki »*VseVEnem.txt*«. V drugem delu obravnavamo mehaniko amortizerja preko pripadajoče navadne diferencialne enačbe 2. reda s pomočjo programa MATLAB. Vsa koda, ki smo jo pri tem uporabili, je zbrana v datoteki »*amortizer2.m*«.

2 Prvi del

Na začetku določimo konstanti A in B v predpisu polinomov. V tem primeru je $A = 11$ in $B = 24$, v skladu z danimi navodili. Tukaj omenimo še, da kadar naloga eksplicitno ne poda polja, v katerem rešujemo problem, kot privzeto vzamemo polje racionalnih števil in kot privzeto urejenost polinomov vzamemo leksikografsko ureditev. Definirajmo sedaj še polinomski ideal $I =< f_1, f_2, f_3, f_4 >$.

Vprašanje 1: Izračunajte Gröbnerjevo bazo ideala I glede na *lex*, *deglex* in *degrevlex* urejenost. Ali so pridobljene baze iste? Kateri izračun je bil najhitrejši?

Rešitev: Vsaka izračunana baza je prostorsko obsežna in zato ne bo eksplicitno podana v tej datoteki. Poračunane baze se izpišejo ob zagonu datoteke »*polinomi 1.txt*«, so pa shranjene tudi v datoteki »*VseVEnem.txt*«. Kljub temu je enostavno priti do odgovorov na zastavljeno vprašanje: Pridobljene Gröbnerjeve baze so različne, čas izračuna pa je (z uporabo funkcije *groebner*) v vseh primerih enak.

Vprašanje 2: Izračunajte dekompozicijo raznoterosti ideala I nad poljem racionalnih števil. Koliko komponent vsebuje dekompozicija raznoterosti ideala I nad poljem realnih števil? Kaj pa nad poljem kompleksnih števil?

Rešitev: V tej nalogi smo najprej poračunali dekompozicijo ideala I nad poljem racionalnih števil, z uporabo funkcije *minAssGTZ*. Hitro opazimo, da ima pripadajoča raznoterost v tem primeru tri (ireducibilne) komponente. Od teh je prva komponenta 0-razsežna:

$$(x1, x2, x3, x4) = (-11.546501, 389.6288, -167.98446, -0.17786659).$$

Ko se premaknemo v polje realnih števil, se število komponent ne spremeni, saj so vse preostale ničle sistema, ki ga določa 0-razsežna komponenta dekompozocije, kompleksne, in tudi v nobeni drugi komponenti ne pridobimo nobene nove rešitve. Nad poljem kompleksnih števil, število ireducibilnih komponent dekompozicije naraste na 11, saj sedaj lahko dodamo vse kompleksne ničle sistema, ki določa prvo komponento. Premik v polje kompleksnih števil tudi poveča razsežnost tretje komponente, ki je določena z enačbo

$$x_1^2 + 1225x_2^2 = 0,$$

a s tem ne poveča števila komponent dekompozicije.

Vprašanje 3: Izračunajte primarno dekompozicijo raznoterosti ideala I.

Rešitev: Primarna dekompozicija je bila izračunana z ukazom *primdec* in je v celoti izpisana v datoteki »*VseVEnem.txt*«.

Vprašanje 4: Če je komponenta dekompozicije raznoterosti ideala I 0-dimenzionalna, navedite točke komponente (numerično). V nasprotnem primeru navedite parametrizacijo komponente nad poljem realnih števil.

Rešitev: Točka, ki sestavlja 0-razsežne komponente dekompozicije nad poljem realnih števil, je predstavljena v datoteki »*VseVEnem.txt*«. Nad tem istim poljem, ima komponenta, ki jo določa enačba

$$24x_3 + 11 = 0,$$

parametrizacijo

$$(x_1, x_2, x_4) \mapsto (x_1, x_2, -\frac{11}{24}, x_4),$$

komponenta, določena z enačbo

$$x_1^2 + 1225x_2^2 = 0,$$

pa

$$(x_3, x_4) \mapsto (0, 0, x_3, x_4).$$

Vprašanje 5: Ali je polinom f v idealu I?

Rešitev: Z uporabo ukaza *reduce* vidimo, da polinom f ni element ideala I.

Vprašanje 6: Izračunajte $I :< x_1^2 + (A+B)^2 x_2^2 >$. Razložite geometrijski pomen rezultata.

Rešitev: Kvocientni ideal je v celoti zapisan v datoteki »*VseVEnem.txt*«. Ko s pomočjo ukaza *minAssGTZ* poračunamo dekompozicijo raznoterosti danega kvocientnega ideala opazimo, da se je število komponent, glede na ideal I, zmanjšalo! Bolj natančno, »izgubila« se je komponenta, določena z enačbo

$$x_1^2 + 1225x_2^2 = 0.$$

Vprašanje 7: Naj bosta $H =< f, f_4 >$ in $J =< f_1, f_2, f_3 >$. Ali sta ideala H in J enaka?

Rešitev: To nalogo smo rešili tako, da smo najprej poračunali Gröbnerjevi bazi obeh idealov ter nato preverili, ali lahko vsak element baze enega ideala reduciramo z bazo drugega. To se seveda ne da storiti, torej sta ideala H in J različna.

Vprašanje 8: Izračunajte $H + J$ in presek idealov H in J. Razložite geometrijski pomen rezultatov.

Rešitev: Tako vsota kot presek idealov sta zapisana v datoteki »*VseVEnem.txt*«. Izkaže se, da je raznoterost, ki jo določa vsota danih idealov, sestavljena iz dveh komponent. Enostavno je videti, da je rna izmed teh komponent podmnožica ene izmed komponent ideala I. To seveda ni presenetljivo, saj ideal $H + J =< f_1, f_2, f_3, f_4, f >$ vsebuje ideal I. Zato lahko sklepamo celo, da je celotna raznoterost ideala $H + J$ vsebovana v raznoterosti ideala I. Po drugi strani, razcep raznoterosti ideala $H \cap J$ pokaže, da ta ideal v celoti vsebuje več-razsežni komponenti razcepa ideala I, ter še dve dodatni komponenti. Če v prvi polinom prve komponente in prvi polinom druge komponente vstavimo točko 0-razsežne komponente ideala I, torej

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-11.546501, 389.6288, -167.98446, -0.17786659),$$

pa opazimo, da ta točka ni vsebovana v nobeni od omenjenih komponent. Res, ko vstavimo to točko v polinom $5x_2^2 + 290x_2 + 48x_3^2 + 2976x_3x_4$, dobimo približen rezultat $2315466, 121$, ko jo vstavimo v polinom

$$\begin{aligned} 20736x_3^3 + 2553435x_3^2 + 27441792x_3x_4 - 138171264x_3 + \\ + 84652032x_4^2 - 841420800x_4 + 2057487872, \end{aligned}$$

pa je rezultat približno $-1503, 215$. To pomeni, da raznoterost ideala I ni vsebovana v raznoterosti ideala $H \cap J$, ima pa z njo neprazen presek.

3 Drugi del

Podan imamo amortizer v katerem s K označimo koeficient vzmeti, s α viskoznost tekočine ter z m maso avtomobila. Z $x(t)$ označimo oddaljenost dna avtomobila od začetne mirovne lege. Ko upoštevamo Newtonov 2. zakon, dobimo enačbo

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - Kx,$$

oziroma

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0.$$

Sedaj vpeljemo oznaki $2k = \frac{\alpha}{m}$ in $\omega^2 = \frac{K}{m}$ ter tako dobimo končno obliko enačbe amortizerja:

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{1}$$

Vprašanje 1: Zapiši enačbo 1 v ekvivalentni obliki kot dvorazsežni linearni sistem diferencialnih enačb.

Rešitev: Da enačbo 1 prepišemo v ekvivalentno obliko kot dvorazsežni linarni sistem diferencialnih enačb, uvedemo novo spremenljivko $y = \dot{x}$. Ko to vstavimo v enačbo 1, dobimo enačbo

$$\dot{y} + 2ky + \omega^2 x = 0.$$

Sedaj izpostavimo $\dot{y}$ in tako dobimo iskani sistem:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -\omega^2 x - 2ky \end{bmatrix} \tag{2}$$

Vprašanje 2: Izberi parametra $k > 0$ in $\omega > 0$ tako, da ima matrika sistema:

a) dve realni lastni vrednosti,

b) eno realno lastno vrednost,

c) dve kompleksni lastni vrednosti.

Rešitev: Sistemu 2 pripada matrika $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2k \end{bmatrix}$. Pripadajoči karakteristični polinom se glasi:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = (-\lambda)(-2k - \lambda) + \omega^2 = \lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2.$$

Ničli tega polinoma, torej lastni vrednosti matrike A, bosta ravno

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4\omega^2}}{2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}.$$

Sedaj določimo parametra $k > 0$ in $\omega > 0$ tako, da bodo lastne vrednosti zadoščale pogojem:

a) Da bi obe lastni vrednosti bili različni in realni, mora biti izraz pod korenom, torej $k^2 - \omega^2$, pozitiven. Glede na to, da sta tako k kot ω pozitivna parametra, to pomeni, da je potreben pogoj ravno, da je $k > \omega$. Če označimo $a^2 = k^2 - \omega^2$, sta potem lastni vrednosti pripadajočega sistema ravno $\lambda_1 = -k + a$ in $\lambda_2 = -k - a$.

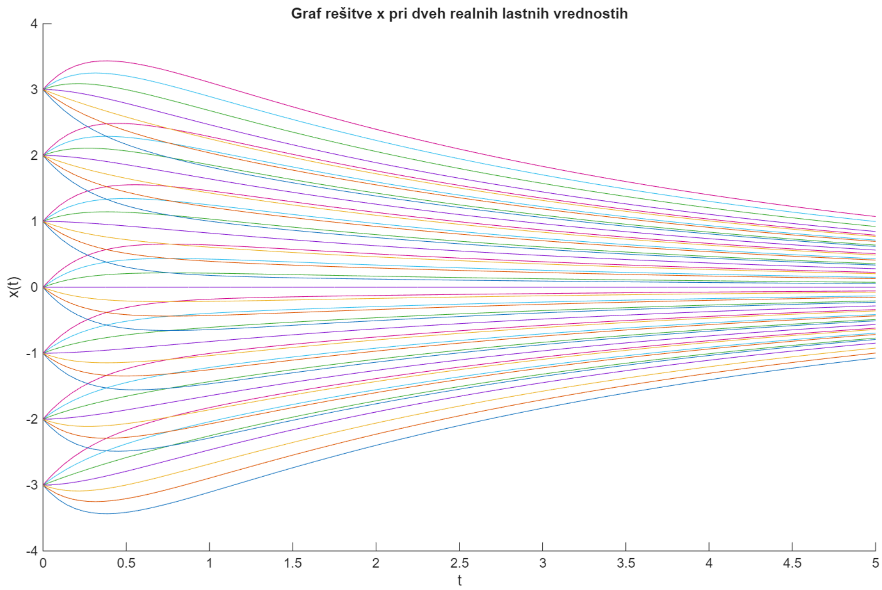
b) Da bi obe lastni vrednosti bili enaki in realni, mora biti izraz pod korenom, torej $k^2 - \omega^2$, enak 0. To bo res natanko tedaj, ko bo $k^2 = \omega^2$ oziroma $k = \omega$ (saj sta k in ω pozitivna). Posledično, je naša dvojna realna lastna vrednost ravno $\lambda_0 = -k$.

c) Da bi obe lastni vrednosti bili različni in kompleksni, mora biti izraz pod korenom, torej $k^2 - \omega^2$, negativen. Upoštevajoč pogoja pozitivnosti parametrov k in ω hitro vidimo, da je to ekvivalentno pogoju $k < \omega$. Če označimo $-b^2 = k^2 - \omega^2$, sta potem pripadajoči kompleksni lastni vrednosti ravno $\lambda_1 = -k + ib$ in $\lambda_2 = -k - ib$.

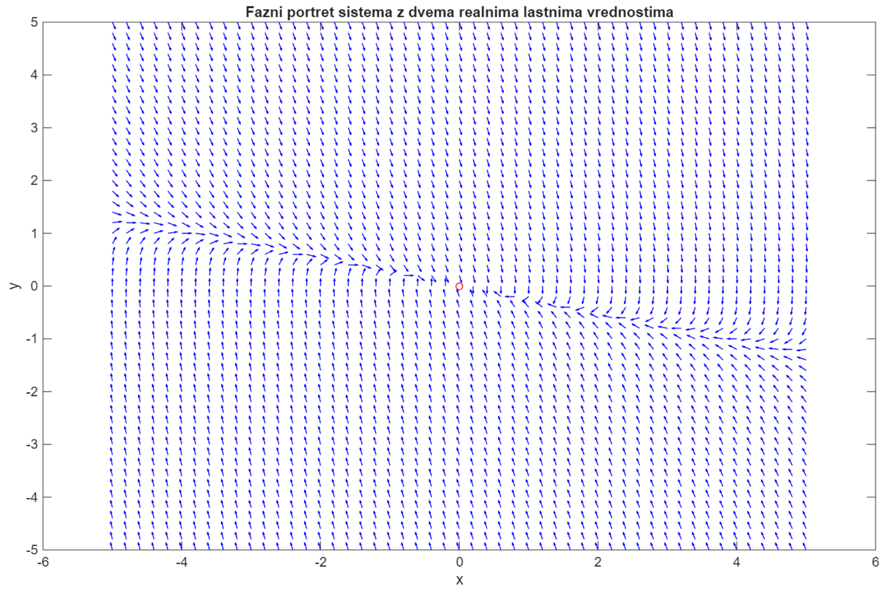
Vprašanje 3: Za vsakega od primerov $a), b)$ in $c)$ iz prejšnje naloge nariši:

1. rešitev $x(t)$ v ravnini (x, t).
2. fazno sliko v ravnini $(x, \dot{x})$.

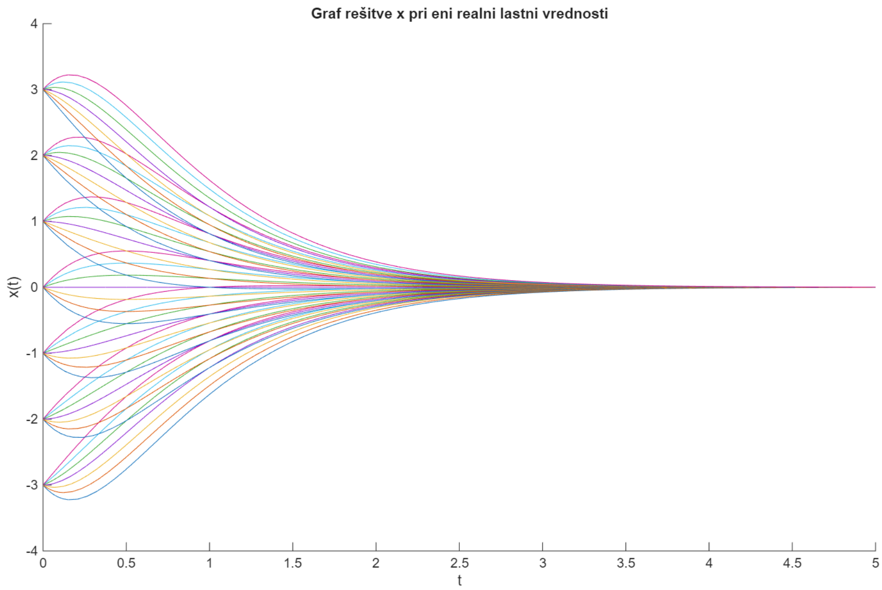
Rešitev: S pomočjo programa MATLAB narišemo graf rešitev in fazni portret za vse tri primere iz prejšnje naloge. Na vsakem grafu bo narisan šop rešitev v odvisnosti od začetnega pogoja. V tem primeru so začetni pogoji vsi elementi mreže $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \times \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.



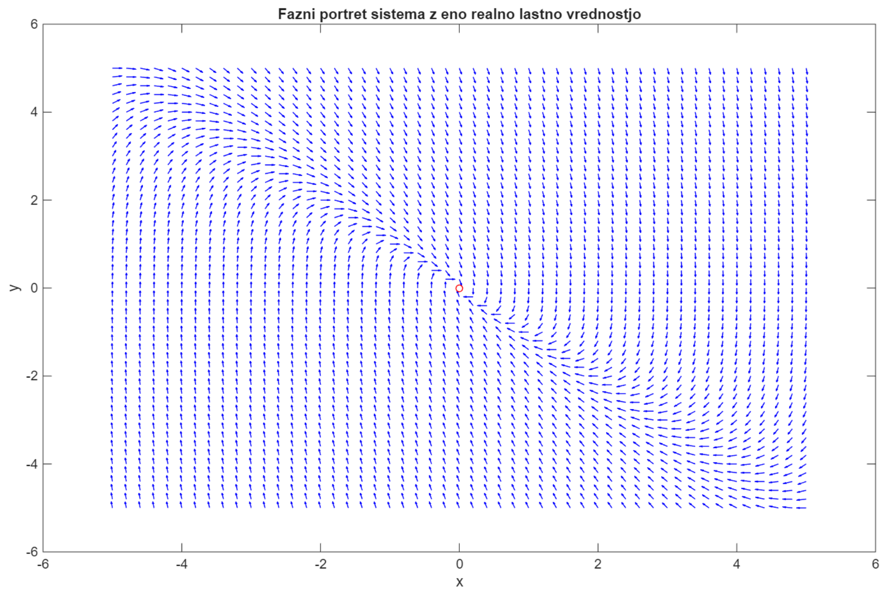
Slika 1: *Graf rešitve $x(t)$ v primeru dveh realnih lastnih vrednosti ($k = 2, \omega = 1$).*



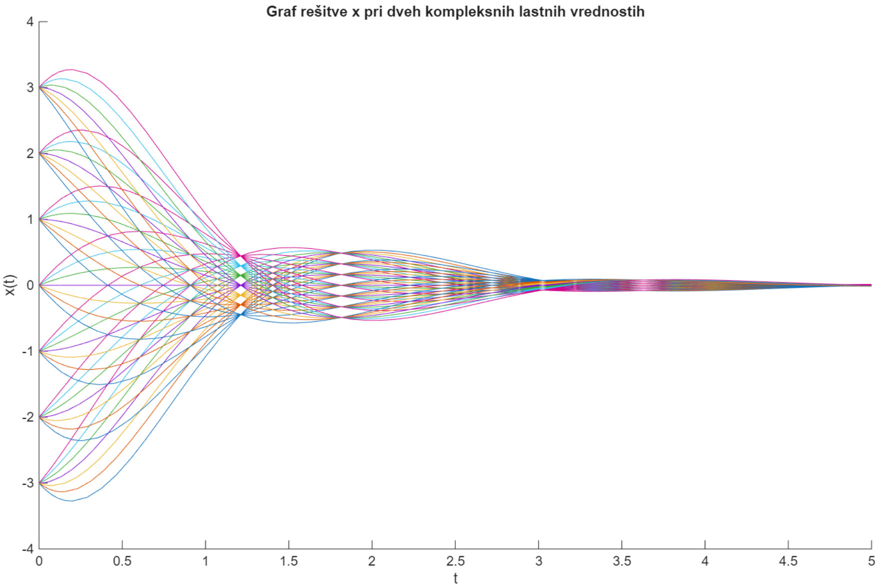
Slika 2: *Fazni portret sistema v primeru dveh realnih lastnih vrednosti ($k = 2, \omega = 1$).*



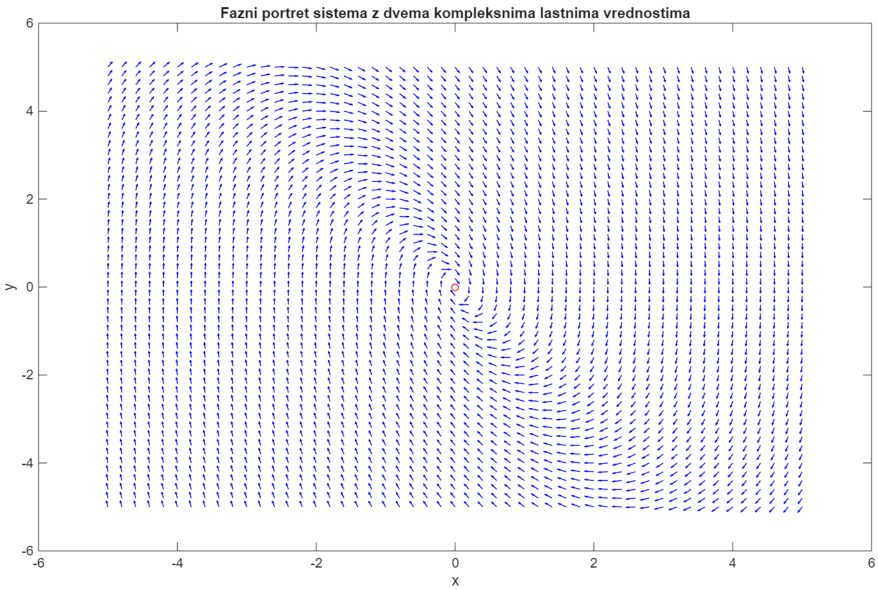
Slika 3: *Graf rešitve $x(t)$ v primeru ene realne lastne vrednosti ($k = 2, \omega = 2$).*



Slika 4: *Fazni portret sistema v primeru ene realne lastne vrednosti ($k = 2, \omega = 2$).*



Slika 5: *Graf rešitve $x(t)$ v primeru dveh kompleksnih lastnih vrednosti ($k = 1, \omega = 2$).*



Slika 6: *Fazni portret sistema v primeru dveh kompleksnih lastnih vrednosti ($k = 1, \omega = 2$).*

Vprašanje 4: Katera izbira parametrov je najbolj primerna za pravilno delovanje amortizerja?

Rešitev: Glede na fazni portret rešitve je najbolj primerna izbira parametrov k in ω, v kateri je $k < \omega$, torej tista, v kateri ima sistem dve kompleksni lastni vrednosti.